IRACEMA e DULCE

MATEMÁTICA
IDEIAS E DESAFIOS

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
8º ANO

MANUAL DO PROFESSOR

8

Editora Saraiva

ISBN 978-85-02-62820-5

9 788502 628205

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
8º ANO

MATEMÁTICA
IDEIAS E DESAFIOS

Iracema Mori
Bacharel e licenciada em Matemática pela USP.
Professora e assessora de Matemática.

Dulce Satiko Onaga
Licenciada em Matemática pela USP.
Professora e assessora de Matemática.
Membro do Centro de Educação Matemática.

Manual do Professor

8

18ª edição – 2015
São Paulo

Editora Saraiva

Matemática: Ideias e Desafios — 8º ano (Ensino Fundamental)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mori, Iracema
Matemática : ideias e desafios, 8º ano /
Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. — 18. ed. —
São Paulo : Saraiva, 2015.

Edição não consumível.
Suplementado pelo manual do professor.
ISBN 978-85-02-62819-9 (aluno)
ISBN 978-85-02-62820-5 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Onaga,
Dulce Satiko. II. Título.

15-03909 CDD-372.7

ISBN 978-85-02-63382-7
(PDF Professor)

ISBN 978-85-02-63381-0
(PDF Aluno)

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Gerente editorial	M. Esther Nejm
Editor responsável	Viviane Carpegiani
Editor	Julio Cesar Augustus de Paula Santos, Marcela Maris, Maria Ângela de Camargo
Assistentes editoriais	Eduardo Oliveira Guaitoli, Rani Oliveira e Souza
Coordenador de revisão	Camila Christi Gazzani
Revisores	Ana Marson, Eduardo Sigrist, Kátia Lopes Godoi, Raquel Alves Taveira
Coordenador de iconografia	Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica	Cristiano Rogério Vieira
Licenciamento de textos	Érica Brambila e Carolina Carmini
Gerente de artes	Ricardo Borges
Coordenador de artes	Aderson Oliveira
Design	Josiane Batista de Oliveira
Capa	Sergio Cândido com foto de Mauricio Simonetti/Tyba
Diagramação	Lisandro Paim Cardoso, Tarumã Editoração Gráfica
Ilustrações	Adolar, BIS, Eliana Delarissa, Francisco Vilachã, Hagaquezart Estúdio, Hélio Senatore, Mario Takeshi
Cartografia	Selma Caparroz
Assistentes de produção de arte	Jacqueline Ortolan
Tratamento de imagens	Emerson de Lima
Produtor gráfico	Robson Cacau Alves
Impressão e acabamento	

077.233.018.001

Editora Saraiva
SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Caro estudante,

"Como aprender Matemática?"

Essa é uma pergunta que você já deve ter feito a muitas pessoas e também a si mesmo.

Sabemos que não existe um caminho único ou melhor para o aprendizado. Para quase tudo que se aprende ao longo da vida é preciso dedicação e persistência. E isso vale também para a Matemática.

Aprender é vivenciar e adquirir experiências, é enfrentar desafios, descobrir coisas novas, buscar conhecimento, querer. Esta coleção se propõe a auxiliá-lo para que seja bem-sucedido nesse aprendizado.

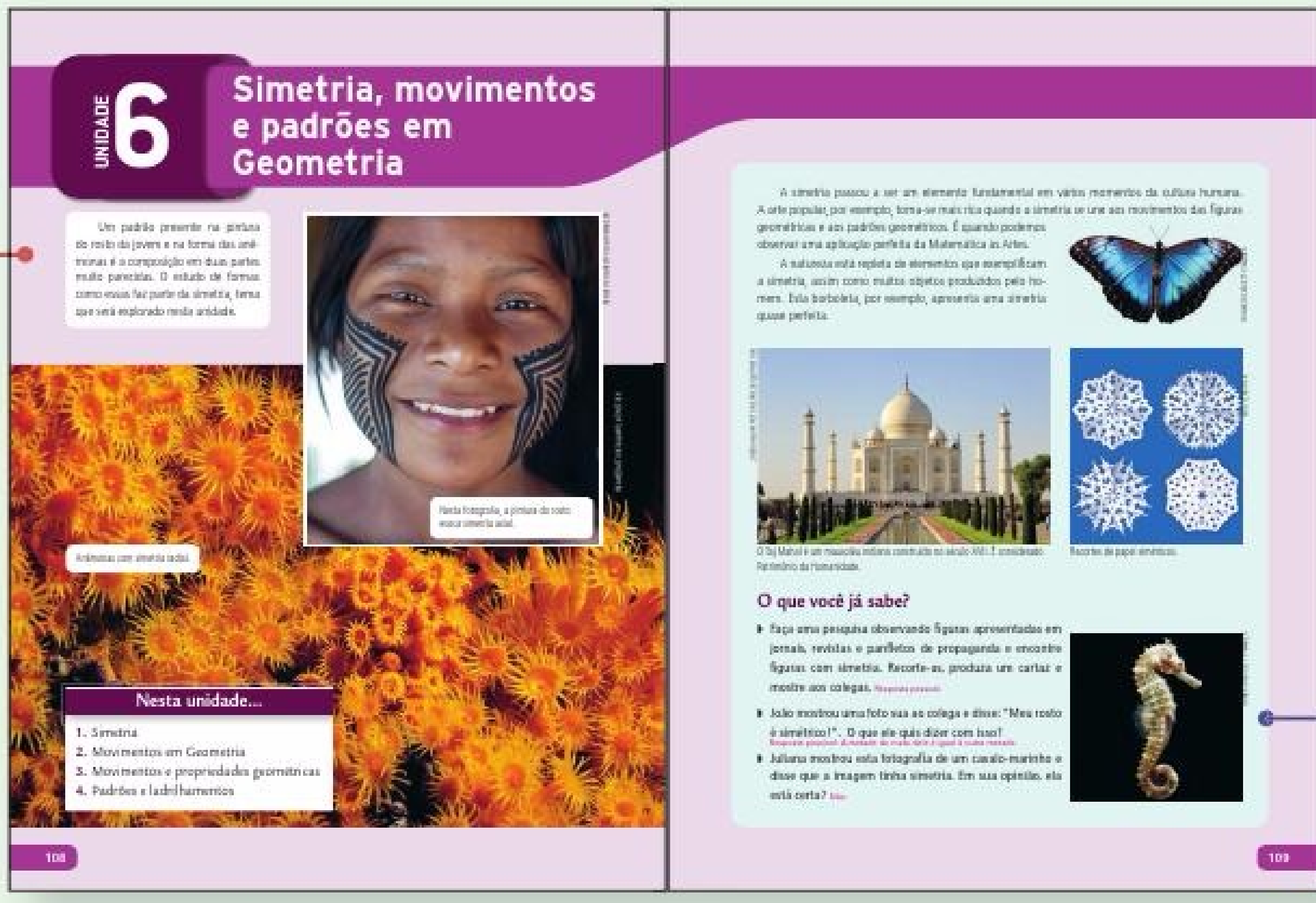
Você é nosso convidado especial nessa tarefa, que esperamos que seja prazerosa. Nesta coleção, algumas abordagens foram feitas por meio da História da Matemática e outras, a partir de situações-problema do cotidiano ou da observação de fenômenos que ocorrem na natureza. Você notará também que a Matemática é uma ciência dinâmica e em constante evolução.

Diante dos desafios que esta coleção lhe propõe, você será instigado a resolvê-los e a desenvolver ideias e conceitos, ampliando seus conhecimentos de maneira estimulante e participativa. Além disso, terá a oportunidade de explorar as conexões da Matemática com a realidade e analisar aplicações em outras áreas do conhecimento.

Nosso esforço conjunto envolvendo autores, professores e alunos terá valido a pena se você desempenhar com perseverança o papel que lhe cabe na construção de seu próprio conhecimento. É isso que lhe proporcionará segurança no aprendizado da Matemática.

As autoras

Conheça seu livro

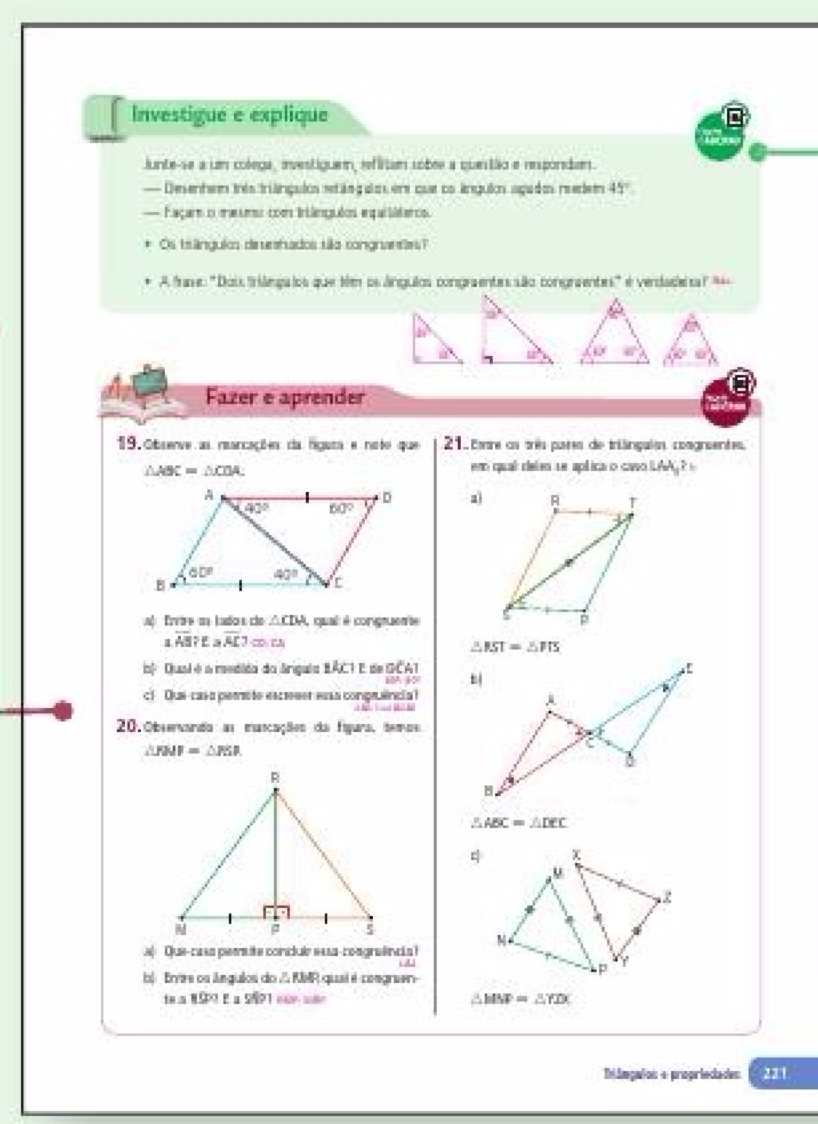


O que você já sabe?

Apresenta questões que propiciam o resgate de conhecimentos prévios a respeito dos conteúdos que serão tratados na unidade.

Abertura da unidade

Imagens e textos introduzem os assuntos da unidade.

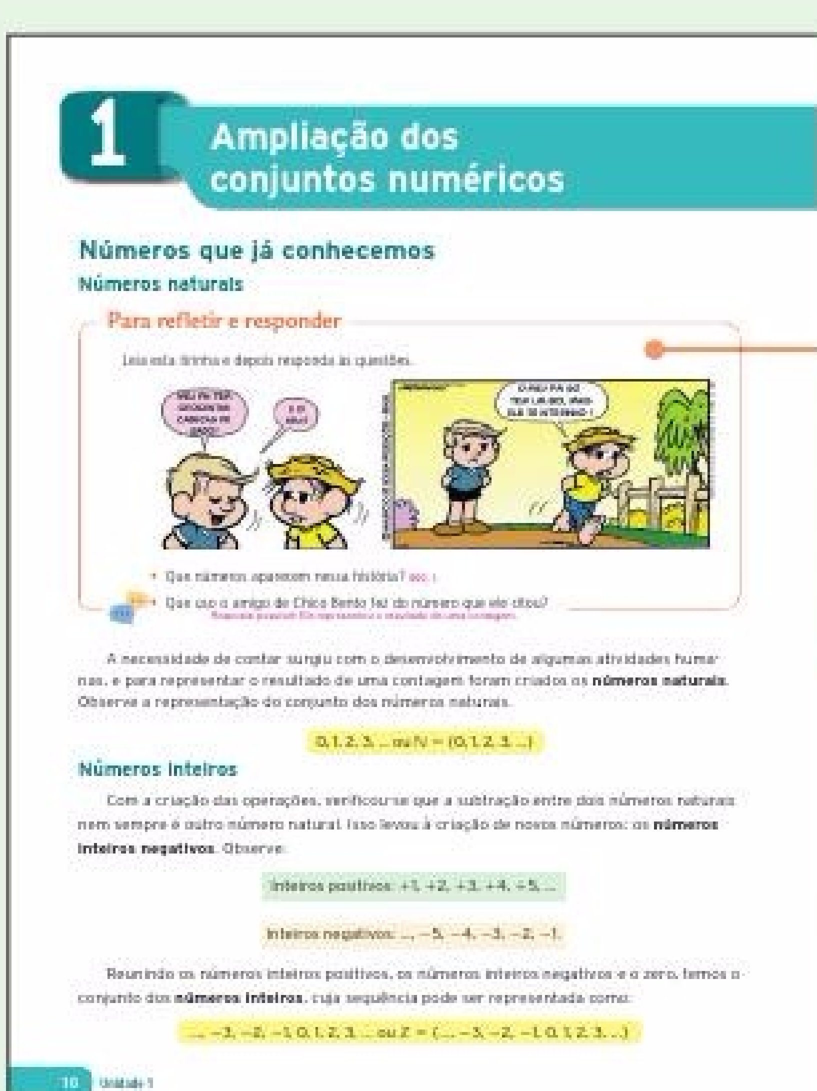


Investigue e explique

O principal objetivo dessa seção é explorar situações de natureza investigativa e abrir espaço para a formulação de conjecturas a respeito do tema que se está investigando.

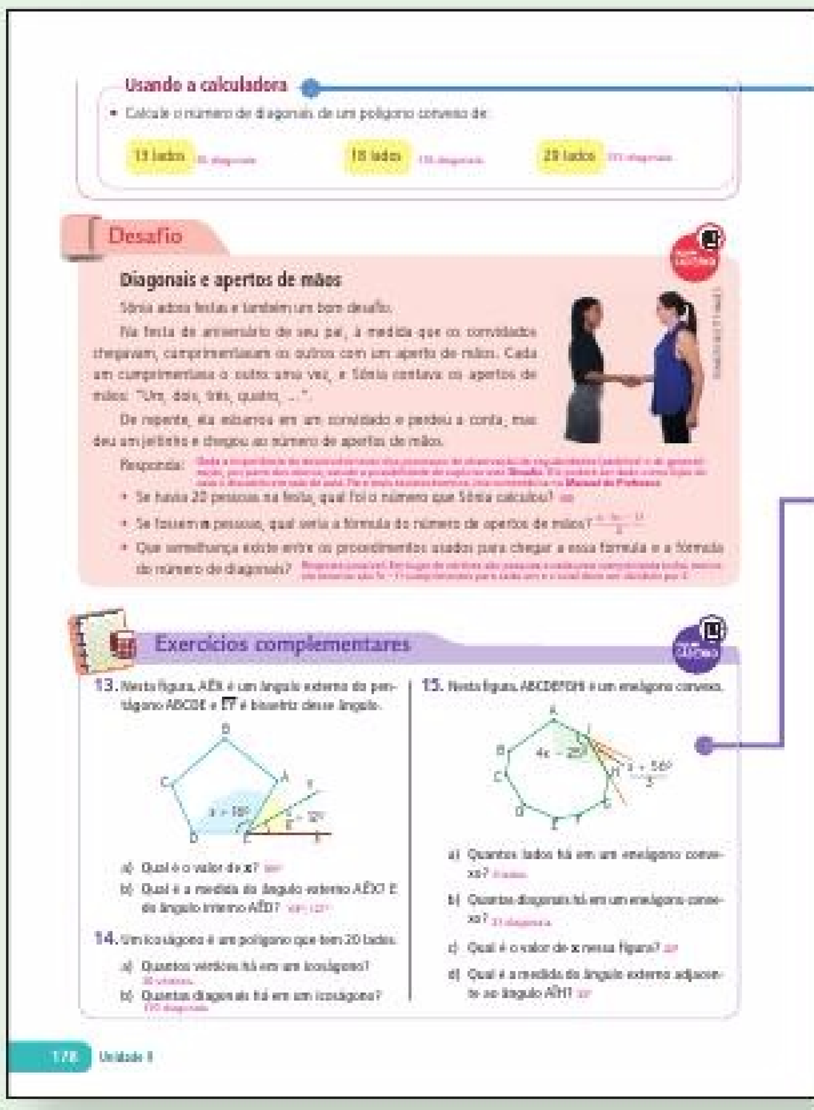
Fazer e aprender

Nessa seção, são propostos exercícios de fixação e de aplicação da teoria estudada, apresentados em ordem crescente de dificuldade.



Para refletir e responder

Os conceitos matemáticos são abordados em situações-problema com temas do dia a dia e que servem de partida para o desenvolvimento dos conteúdos.

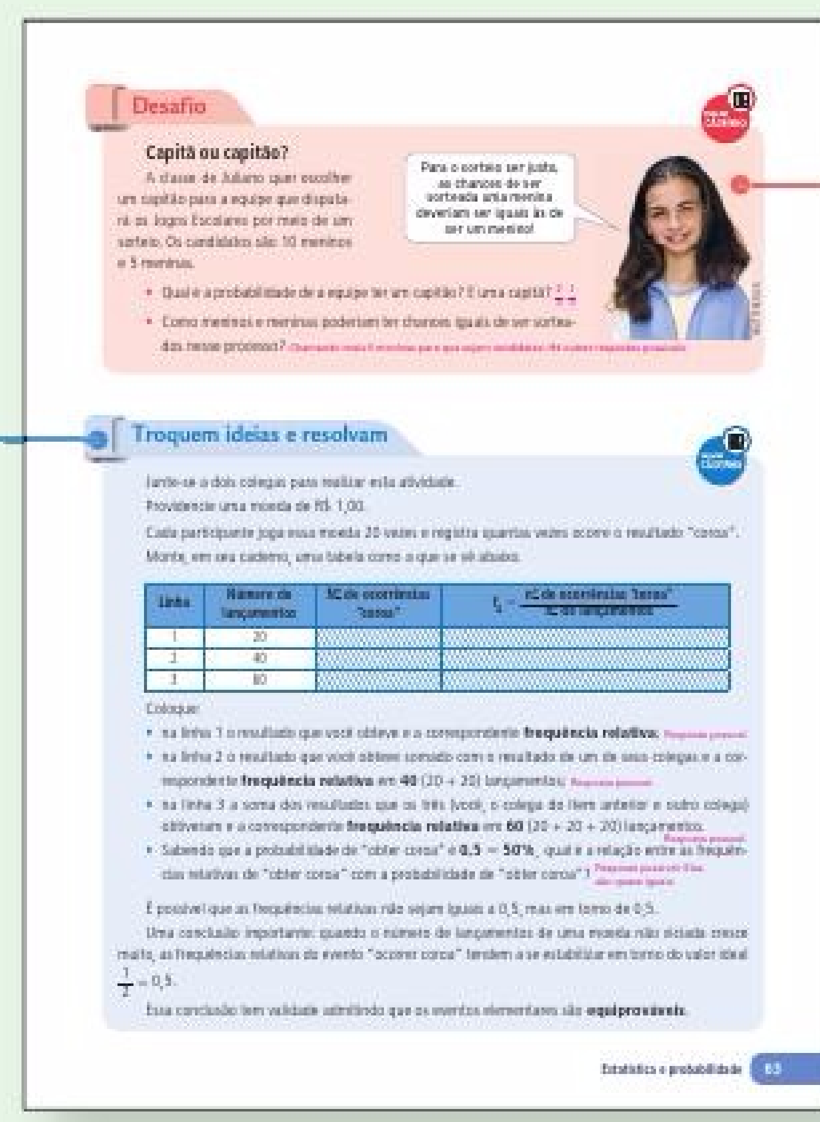


Usando a calculadora

A calculadora é utilizada como ferramenta de apoio para a resolução de atividades que envolvem problemas significativos.

Exercícios complementares

Essa seção contém atividades e problemas que ampliam o estudo dos temas explorados. Poderá ser feita em sala de aula ou em casa, individualmente ou em grupo.

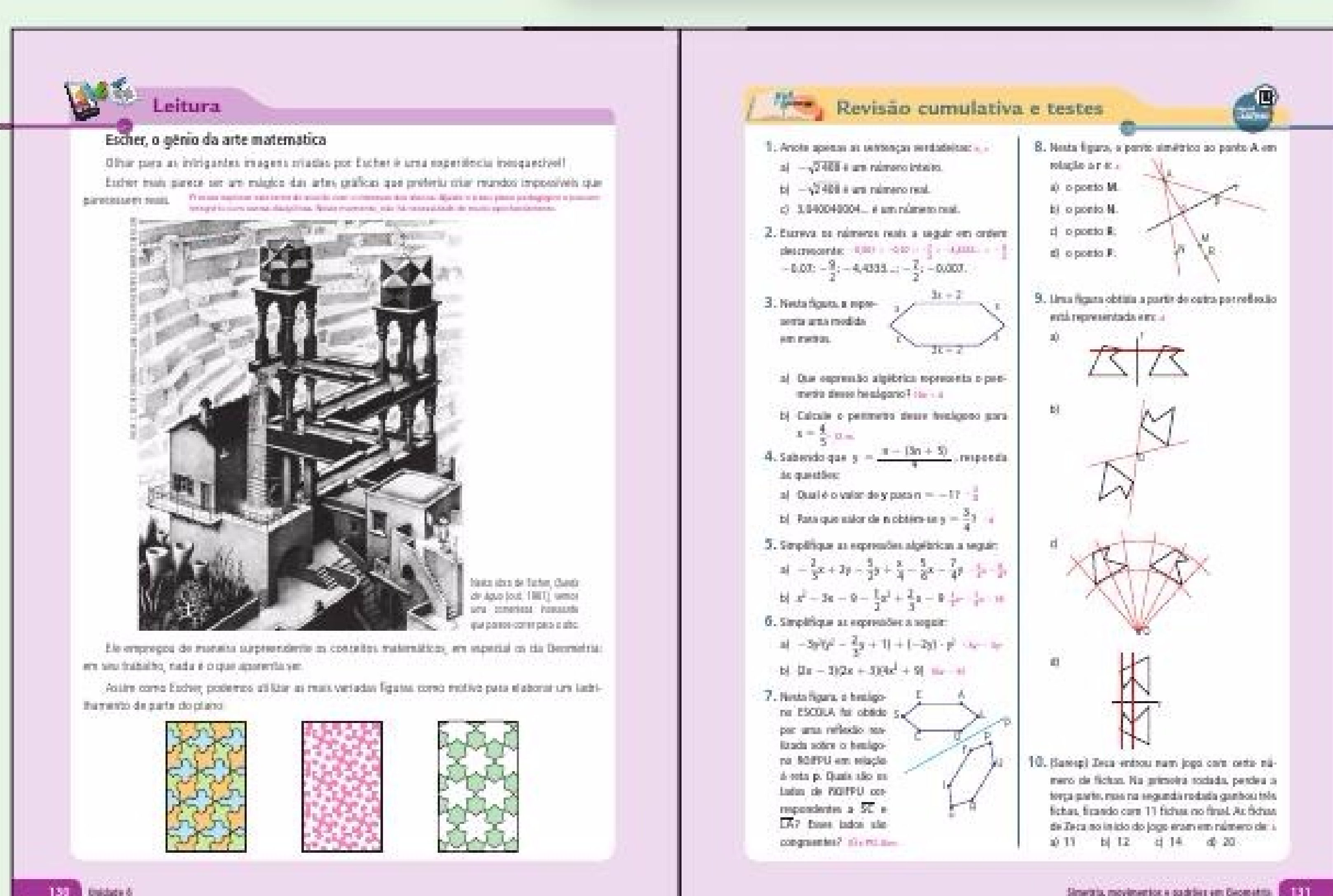


Desafio

Nessa seção você encontra atividades de cálculo mental e estimativas, problemas não convencionais desafiadores, brincadeiras e jogos.

Troquem ideias e resolvam

Essa seção aparece intercalada ao desenvolvimento dos conteúdos. Nela são propostas atividades de caráter dinâmico e de socialização, pois possibilitam uma discussão em grupo e a troca de conhecimentos e descobertas entre os alunos.



Leitura

Assuntos de diferentes áreas do conhecimento, temas importantes para a formação cidadã e informações históricas da Matemática são tratados nas leituras disponíveis ao final das unidades.

Revisão cumulativa e testes

Ao final de todas as unidades, atividades são propostas como uma oportunidade de autoavaliação da aprendizagem desenvolvida até o momento.

Sumário

UNIDADE 7 Produtos notáveis e fatoração

UNIDADE 8 Retas coplanares e ângulos

UNIDADE 9 Polígonos e propriedades

UNIDADE 10 Inequações e sistemas de equações

UNIDADE 11 Triângulos e propriedades

UNIDADE 12 Quadriláteros e propriedades

UNIDADE 1 Números reais

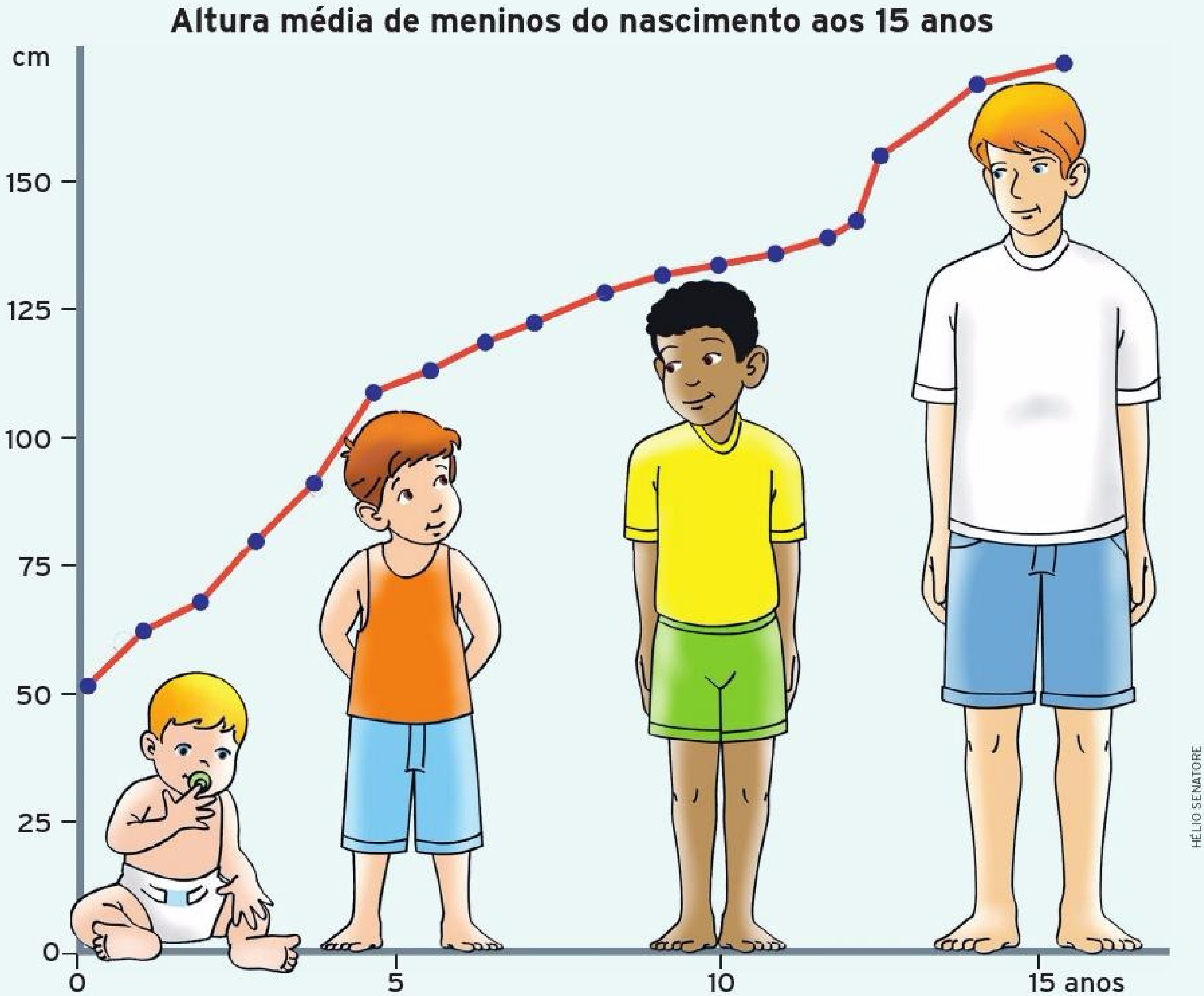


Gráfico de linhas: uma utilização dos números reais.

Nesta unidade...

1. Ampliação dos conjuntos numéricos
2. Números irracionais
3. Números reais

A elaboração de gráficos compostos por segmentos de reta consecutivos como esse envolve a ideia de números diferentes daqueles que conhecemos até o momento: os números reais. Esse é o assunto que será explorado nesta unidade.

Durante muito tempo, a ideia de número que se disseminou entre os povos da Antiguidade foi a de números naturais e a de números racionais positivos, presentes em situações que ocorriam no dia a dia das pessoas.

Observe situações nas quais esses números estão envolvidos.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Contando as pessoas dessa imagem temos, ao todo, 8 pesssoas.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Se a *pizza* está dividida em 8 partes iguais, um desses pedaços pode ser representado pela fração $\frac{1}{8}$.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Osmar precisa de 1,20 m de tecido para fazer um colete.

BIA FANELLI/FOLHAPRESS

Números racionais são utilizados na representação de quantias em dinheiro.

O que você já sabe?

- Números naturais estão presentes em situações de contagem. Descreva, em seu caderno, uma situação em que eles aparecem em seu dia a dia. Resposta possível: A contagem dos dias de um mês.
- Se um inteiro foi dividido em 10 partes iguais, que número representa 4 dessas partes? $\frac{4}{10}$
- Que tipo de número representa o quociente de 13 por 4? Número racional, $\frac{13}{4}$ ou 3,25.

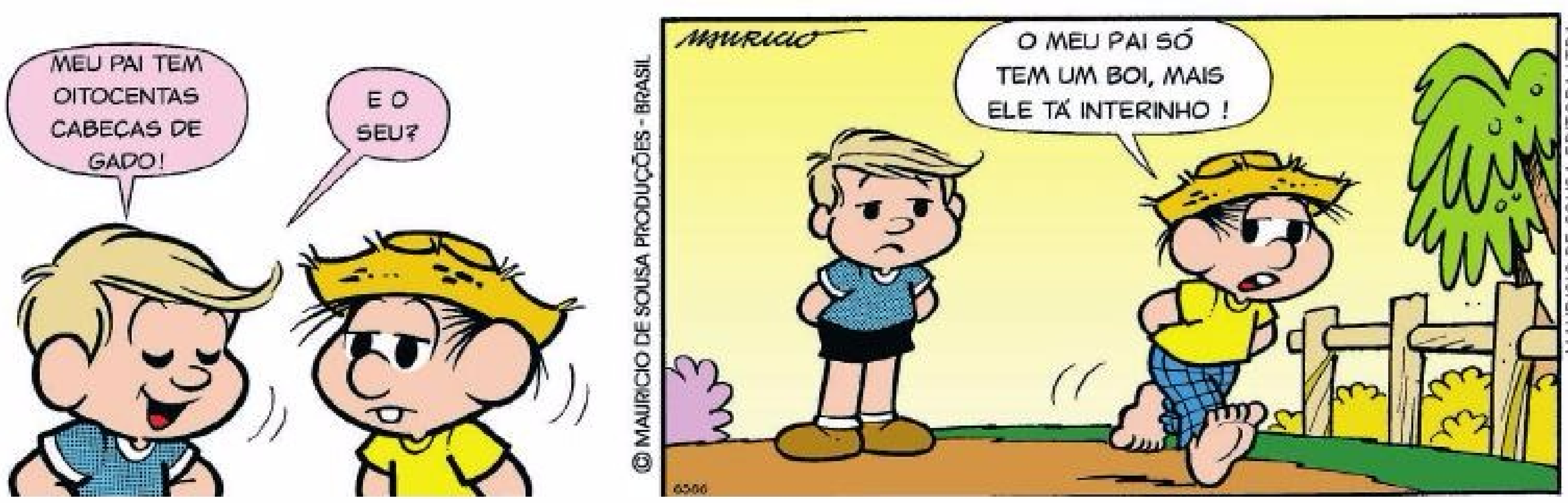
1 Ampliação dos conjuntos numéricos

Números que já conhecemos

Números naturais

Para refletir e responder

Leia esta tirinha e depois responda às questões.



- Que números aparecem nessa história? 800, 1.
- Que uso o amigo de Chico Bento fez do número que ele citou?
  Resposta possível: Ele representou o resultado de uma contagem.

A necessidade de contar surgiu com o desenvolvimento de algumas atividades humanas, e para representar o resultado de uma contagem foram criados os **números naturais**. Observe a representação do conjunto dos números naturais.

$$0, 1, 2, 3, \ldots \text{ ou } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Números inteiros

Com a criação das operações, verificou-se que a subtração entre dois números naturais nem sempre é outro número natural. Isso levou à criação de novos números: os **números inteiros negativos**. Observe:

Inteiros positivos: $+1, +2, +3, +4, +5, \ldots$

Inteiros negativos: $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1.$

Reunindo os números inteiros positivos, os números inteiros negativos e o zero, temos o conjunto dos **números inteiros**, cuja sequência pode ser representada como:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ ou } \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Números racionais

Assim como a subtração de números naturais ocasionou a criação dos números inteiros negativos, a divisão de números inteiros levou à criação dos **números racionais**, que, como já sabemos, podem ser representados na forma fracionária ou decimal.

São considerados números racionais todos aqueles que podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, em que **a** e **b** são números inteiros, com $b \neq 0$. Ou seja, são os quocientes de dois números inteiros com divisor diferente de zero.

SHUTTERSTOCK

Exemplos:

-3 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad -0{,}008$ $\quad 0$ $\quad \frac{8}{5}$ $\quad 4$

O conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Na seção **Fazer e aprender**, propomos exercícios de fixação e de aplicação da teoria estudada, além de problemas apresentados em ordem crescente de complexidade. Para mais esclarecimentos, leia comentários no **Manual do Professor – Orientações Didáticas**. Professor: daqui em diante, quando fizermos referência a essa parte do livro, usaremos apenas a expressão **Manual do Professor**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Camila escreveu todos os números naturais entre 50 e 80. Quantas vezes ela escreveu o algarismo 7? 13 vezes.

2. Quais das expressões abaixo resultam em números naturais? a, b, d.

a) $145 : 5$

b) $\frac{45}{9}$

c) $(-4)^3$

d) $\sqrt{144}$

e) $\sqrt{2}$

3. Qual é o maior número natural menor que 1 000? 999

4. Incluindo 51 e 100, quantos números naturais existem de 51 a 100? 50 números.

5. A sequência apresentada a seguir tem infinitos termos que variam de 7 em 7 a partir do segundo termo.

1, 8, 15, 22, 29, 36, ...

a) Determine o oitavo e o nono termos dessa sequência, mantendo o padrão apresentado. 50 e 57

b) Se dividirmos cada termo dessa sequência, a partir do 8, por 7, qual deve ser o resto dessa divisão? 1

c) Os termos que compõem essa sequência são múltiplos de 8? Não.

6. A forma decomposta em potências de 10 de um número natural é representada por:

$$2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$$

Qual é esse número? 21 947

7. Responda em seu caderno:

a) Qual é o oposto de -309? 309

b) Qual é o oposto do oposto de -309? -309

c) Um número A tem módulo maior que o módulo de um número B. É possível afirmar que A é menor que B? Explique por quê.
Resposta possível: Não, porque essa conclusão depende dos sinais e desses números.

8. Um papelão tem aproximadamente $9 \cdot 10^{-3}$ cm de espessura. Escreva essa medida na forma decimal. 0,009 cm

9. Certa marca de café em pó é vendida em pacotes como os da ilustração abaixo.

HAGAQUEZART ESTÚDIO

a) Lúcia comprou $\frac{1}{4}$ kg de pó de café. Que tipo de pacote ela poderia ter escolhido? Quantos de cada tipo? 1 pacote de 250 g

b) De quantas maneiras diferentes Lúcia poderá comprar $\frac{3}{4}$ kg de pó de café dessa marca? 1 pacote de 750 g; 1 pacote de 250 g e 1 pacote de 500 g; 3 pacotes de 250 g; 5 pacotes de 100 g e 1 de 250 g.

10. Alice e Renata praticam judô com o mesmo treinador e no mesmo horário. Alice treina a cada 2 dias. Renata treina a cada 3 dias. Em certo mês com 31 dias, Alice treinou no dia 2, e Renata, no dia 3.

a) As duas treinaram juntas no dia 4 desse mês? Não.

b) Qual foi o primeiro dia em que as duas se encontraram nos treinos? Dia 6.

c) Alice e Renata treinaram juntas em quais dias desse mês? 6, 12, 18, 24 e 30.

11. Moacir é dono de uma lanchonete. Observe abaixo as anotações dele sobre o faturamento de certa semana.

Dia	Saldo (R$)
2ª-f	+ 1200,00
3ª-f	− 580,00
4ª-f	− 1015,00
5ª-f	+ 2500,00

BIS

a) Se +1 200,00 indica lucro, o que indica −580,00 ? Prejuízo.

b) Em quais desses dias ele teve lucro? Segunda-feira e quinta-feira.

c) Considerando todas as anotações acima, ele está tendo lucro ou prejuízo? De que quantia? Lucro de R$ 2 105,00.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Com as cartelas numeradas abaixo, Pedro quer compor números com dois algarismos.

BIS

- Quantos algarismos diferentes podem ser escolhidos para ocupar a ordem das dezenas? 3 algarismos.
- Como os algarismos precisam ser diferentes, tendo sido escolhido o algarismo da ordem das dezenas, a ordem das unidades pode ser preenchida por quantos algarismos diferentes? 2 algarismos.
- Agora, responda: Quantos números naturais de dois algarismos diferentes podemos formar com 3, 5 e 7? $3 \times 2 = 6$ (6 números diferentes)

O que são dízimas periódicas?

Para entender sobre esse assunto, examine a situação seguinte.

Um químico preparou três soluções de álcool com água nas razões $\frac{15}{3}$, $\frac{17}{4}$ e $\frac{16}{3}$ nessa ordem, considerando o volume. Elas são todas iguais?

As soluções são diferentes, não é mesmo?

Para verificar, podemos escrever essas razões de outra maneira, dividindo o numerador pelo denominador.

$\frac{15}{3} = 5$ $\qquad$ $\frac{17}{4} = 4{,}25$ $\qquad$ $\frac{16}{3} = 5{,}33333...$

5,33333... é uma **dízima periódica de período 3**.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Soluções aquosas de álcool são usadas para limpeza e assepsia.

CRISTINA XAVIER/FINEPHOTO

Outros exemplos:

- $\frac{13}{33} = 0{,}\underbrace{39}\underbrace{39}\underbrace{39}...$ período
- $\frac{49}{90} = 0{,}5\underbrace{4}\underbrace{4}\underbrace{4}...$ período

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Note que o período de uma dízima é o grupo de algarismos que se repete. 0,393939... é uma **dízima periódica simples**, pois o período se repete logo depois da vírgula.

$0{,}3939... = 0{,}\overline{39}$ — Colocamos um traço sobre 39, que é o período.

0,5444... é uma **dízima periódica composta**, pois logo após a vírgula existe um algarismo que não compõe o período.

$0{,}5444... = 0{,}5\overline{4}$ — Colocamos um traço sobre 4, que é o período.

Também dizemos que..

$\frac{13}{33}$ é uma **fração geratriz** da dízima periódica $0{,}\overline{39}$.

$\frac{49}{90}$ é uma **fração geratriz** da dízima periódica $0{,}5\overline{4}$.

Todo número racional tem representação decimal finita ou infinita periódica.

Cálculo de uma fração geratriz de uma dízima periódica

Vamos explorar esse assunto por meio de exemplos.

- Cálculo da fração geratriz de 0,343434...

Indicamos a fração procurada por **g**:

$g = 0{,}343434...$

Multiplicamos os dois membros da igualdade por 100:

$100 \cdot g = 100 \cdot 0{,}343434...$

$100 \cdot g = 34{,}3434...$

O número 34,343434... também é uma dízima periódica de período 34.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

De $100 \cdot g$, subtraímos g:

$$100 \cdot g - g = \underbrace{34{,}343434\ldots - 0{,}343434\ldots}_{34{,}000000\ldots}$$

$$99 \cdot g = 34$$

$$\begin{array}{r} 34{,}343434\ldots \\ -\ \ 0{,}343434\ldots \\ \hline 34{,}000000\ldots \end{array}$$

Dividimos os dois membros da igualdade por 99 e obtemos uma equação equivalente:

$$\frac{99 \cdot g}{99} = \frac{34}{99} \quad — \quad g = \frac{34}{99}$$

Como $g = 0{,}343434...$ e obtivemos $g = \frac{34}{99}$, podemos concluir que:

$$0{,}343434... = \frac{34}{99}$$

Portanto, $\frac{34}{99}$ é uma fração geratriz da dízima periódica 0,3434...

Note que $\frac{68}{198}$ e $\frac{102}{297}$ também são frações geratrizes de 0,3434..., uma vez que são frações equivalentes a $\frac{34}{99}$.

Podemos observar a seguinte regra prática: uma fração geratriz de uma dízima periódica simples, em que a parte inteira é zero, tem numerador igual ao período da dízima e denominador com tantos algarismos nove quantos forem os algarismos do período da dízima.

$$0{,}\overbrace{34}34 34... = \frac{34}{99}$$

Escrevemos o período.

Dois algarismos no período, dois algarismos nove.

- Cálculo da fração geratriz de 8,343434...

Indicamos a fração procurada por **y** e decompomos a dízima periódica em uma soma, na qual uma das parcelas é uma dízima periódica com parte inteira igual a zero.

$$y = 8{,}343434...$$

$$y = 8 + \underbrace{0{,}343434...}_{\frac{34}{99}}$$

Uma das parcelas é uma dízima periódica com parte inteira igual a zero.

Podemos usar o resultado anterior!

$$y = 8 + \frac{34}{99} = \frac{8 \cdot 99 + 34}{99} = \frac{826}{99}$$

Portanto, $\frac{826}{99}$ é uma fração geratriz de 8,343434.... Esse resultado pode ser verificado dividindo 826 por 99.

- Cálculo da fração geratriz de 6,42222...

Indicamos a fração procurada por **f**; como a ordem dos décimos não faz parte do período, multiplicamos **f** por 10. Dessa forma, a vírgula de 6,4222... é deslocada para logo antes do primeiro período da dízima.

$$10 \cdot f = 10 \cdot 6{,}4222... = 64{,}222...$$

$$10 \cdot f = 64 + \underbrace{0{,}222...}_{\frac{2}{9}}$$

0,222... é uma dízima periódica simples, com período 2 e parte inteira igual a zero.

Neste caso, o período não começa logo após a vírgula. É uma dízima periódica composta.

$$10 \cdot f = 64 + \frac{2}{9}$$

$$10 \cdot f = \frac{576}{9} + \frac{2}{9} \text{ —— } 10 \cdot f = \frac{578}{9}$$

$$f = \frac{578}{9} : 10 \text{ —— } f = \frac{578}{9} \cdot \frac{1}{10} \text{ —— } \boxed{f = \frac{578}{90}}$$

Portanto, $\frac{578}{90}$ é uma fração geratriz de 6,4222...

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

12. Em uma prova de Matemática foi solicitado aos alunos que classificassem os números deste quadro em decimais exatos e em dízimas periódicas.

$\frac{20}{3}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{17}{90}$	$\frac{19}{40}$	$\frac{245}{110}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{17}{34}$	$\frac{123}{999}$

Veja como Sônia respondeu à questão proposta:

- decimais exatos: $\frac{25}{4}$, $\frac{16}{50}$ e $\frac{245}{110}$
- dízimas periódicas: $\frac{20}{3}$, $\frac{19}{40}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{17}{90}$, $\frac{123}{999}$

Sônia respondeu corretamente? Justifique sua resposta.

Não, porque $\frac{245}{110} = 2{,}227272...$ não é um decimal exato, e $\frac{17}{34} = 0{,}5$ e $\frac{19}{40} = 0{,}475$ são decimais exatos.

13. Na tabela **A** figuram algumas dízimas periódicas, e na tabela **B**, as frações geratrizes dessas dízimas. Forme pares combinando cada dízima com sua fração geratriz: I e D; II e A; III e F; IV e C; V e B; VI e E.

Tabela A	I	II	III	IV	V	VI
	0,6060...	1,4545...	$2,\overline{09}$	$10,\overline{01}$	$5,3\overline{18}$	$0,00\overline{21}$

Tabela B	A	B	C	D	E	F
	$\frac{16}{11}$	$\frac{117}{22}$	$\frac{991}{99}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{7}{3300}$	$\frac{23}{11}$

14. Indique um número racional da forma $\frac{a}{b}$, em que **a** e **b** são inteiros, com $b \neq 0$, e equivalente a $\frac{0,777...}{0,2828...}$. $\frac{11}{4}$

15. Se $x = 0,2929...$ e $y = 0,3737...$, qual é o valor de $x + y$? $\frac{2}{3}$

16. Qual é o valor da expressão $\frac{0,\overline{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}}{0,2525...}$? $\frac{33}{5}$

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam, investiguem e resolvam. Resposta possível: O denominador é sempre 9 e o numerador é igual a um período.

- Calculem uma fração geratriz para cada dízima apresentada a seguir e encontrem um padrão.

0,55555... $\frac{5}{9}$ | 0,66666... $\frac{6}{9}$ | 0,77777... $\frac{7}{9}$ | 0, 88888... $\frac{8}{9}$

- A afirmação **"0,99999... é igual a 1"** é verdadeira? Justifiquem sua resposta utilizando o padrão encontrado no item anterior. Resposta possível: É verdadeira, porque a fração geratriz dessa dízima periódica é $\frac{9}{9}$, que é igual a 1.

Em **Exercícios complementares** são propostos exercícios de revisão e aprofundamento sobre conteúdos já estudados. Além disso, em alguns deles os alunos têm a oportunidade de ampliar os conhecimentos.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

17. Quais das igualdades apresentadas a seguir são verdadeiras? b, c

a) $\frac{21}{4} = 5,252525...$

b) $\frac{37}{3} = 12,3333...$

c) $\frac{13}{6} = 2,16666...$

18. Identifique frações geratrizes de 2,466666... a, c, d

a) $\frac{74}{30}$ b) $\frac{74}{15}$ c) $\frac{37}{15}$ d) $\frac{370}{150}$

19. Encontre uma fração geratriz de cada dízima periódica apresentada a seguir:

a) 0,272727...

b) 1,83333...

Respostas possíveis: a) $\frac{3}{11}$; b) $\frac{11}{6}$

2 Números irracionais

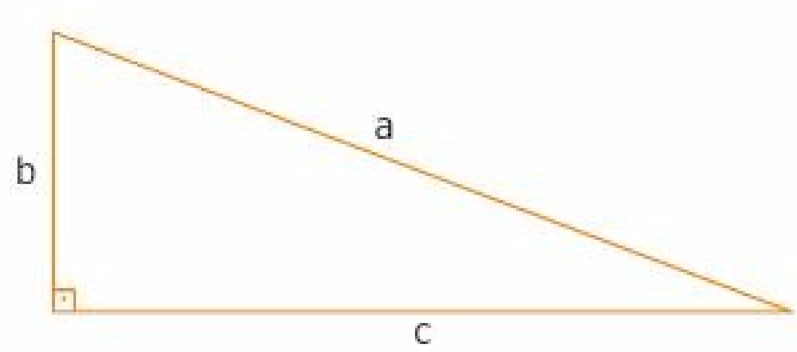
Pitágoras e os triângulos retângulos

Pitágoras foi um grande matemático, nascido na ilha de Samos, na Grécia, no século VI a.C. Do pouco que conhecemos sobre sua vida, sabemos que ele fundou a Escola Pitagórica, cuja existência durou de quatro a cinco séculos.

Os números inteiros exerciam um grande fascínio sobre Pitágoras e seus discípulos: eles acreditavam que toda a harmonia e a beleza da natureza podiam ser expressas por relações entre números inteiros.

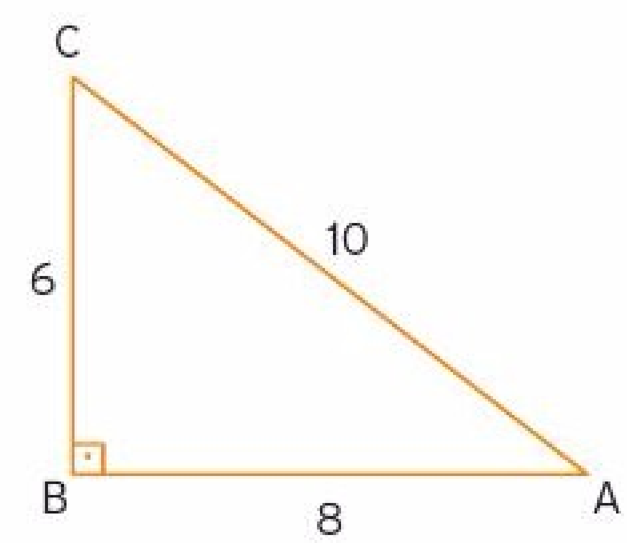
Uma dessas relações é verificada entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Gravura de Pitágoras.



Relação de Pitágoras:
$\mathbf{a = b^2 + c^2}$

$10^2 = 6^2 + 8^2$
$100 = 36 + 64$



É possível verificar que, se $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, então o triângulo que tem lados medindo **a**, **b** e **c** é um triângulo retângulo.

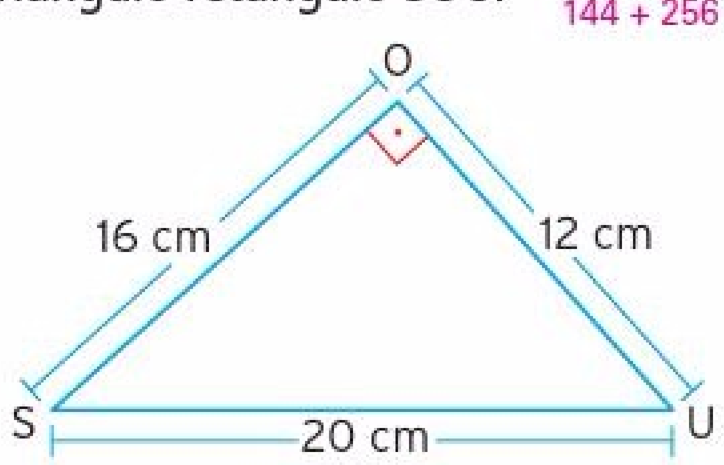
A relação de Pitágoras será justificada mais adiante.

Veja um exemplo ao lado.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

20. Mostre como se aplica a relação de Pitágoras no triângulo retângulo SUO. $12^2 + 16^2 = 20^2$ ou $144 + 256 = 400$



21. Verifique se a sentença abaixo é verdadeira.

$2{,}5^2 + 6^2 = 6{,}5^2$

Como poderá ser classificado em relação aos ângulos um triângulo CAM com med $\overline{CA} = 2{,}5$ cm, med $\overline{AM} = 6$ cm e med $\overline{MC} = 6{,}5$ cm?
Verdadeira; triângulo retângulo em Â.

22. Copie este quadro, analise-o e complete-o com medidas adequadas para triângulos retângulos.

Hipotenusa	Cateto	Cateto
26	24	? 10
? 13	12	5
30	? 18	24

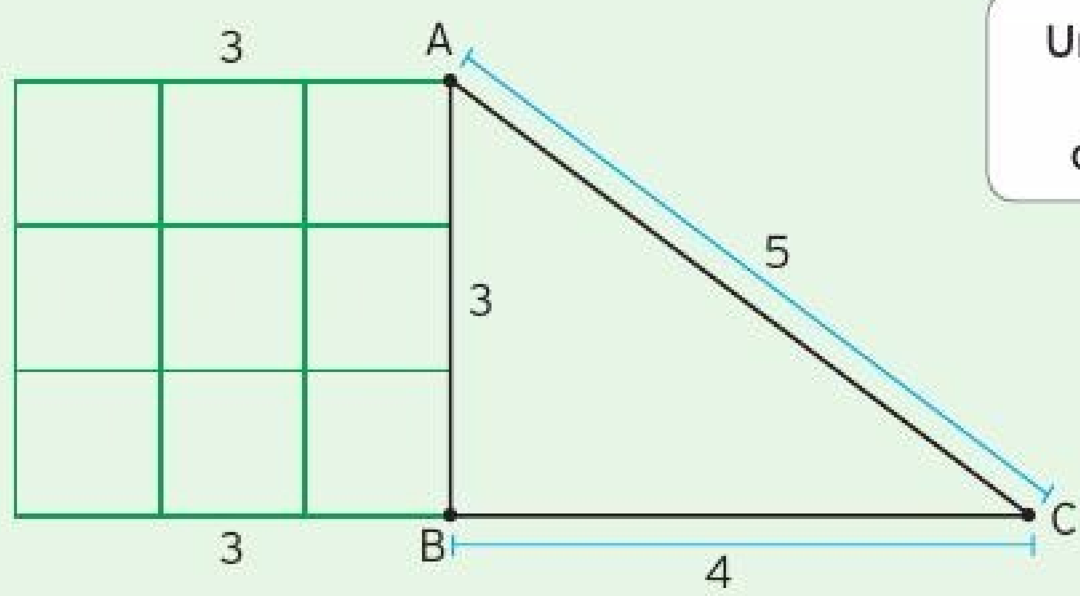
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e resolvam.

Iniciem desenhando um triângulo retângulo como este que está abaixo.

A partir de cada cateto construa um quadrado cujos lados tenham a mesma medida do cateto. Faça o mesmo com a hipotenusa.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

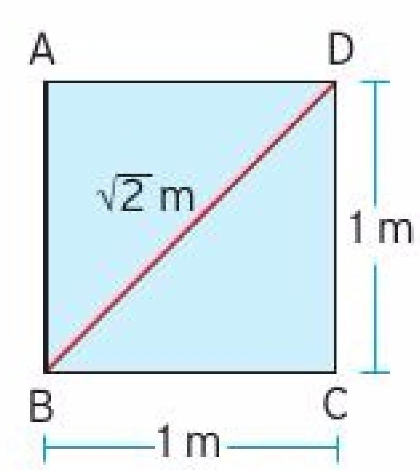
O que se pode concluir sobre as áreas desses quadrados?

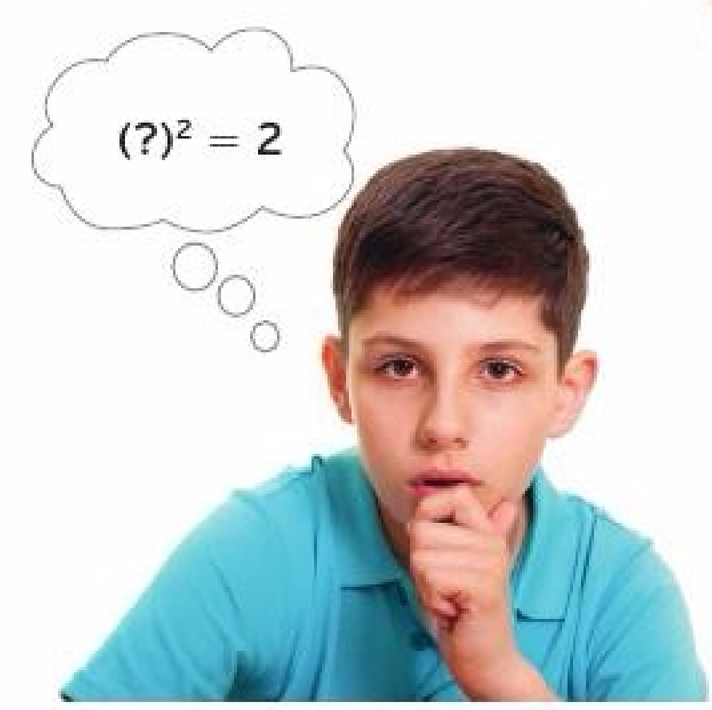
A soma das áreas dos quadrados construídos com os catetos é igual à área do quadrado construído com a hipotenusa. Ou $3^2 + 4^2 = 5^2$.

$\sqrt{2}$, um número irracional

Para refletir e responder

Para calcular a medida da diagonal de um quadrado de 1 m de lado, André aplicou a relação de Pitágoras e obteve $\sqrt{2}$ metro.





THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual é o valor aproximado de $\sqrt{2}$ com duas casas decimais? 1,41

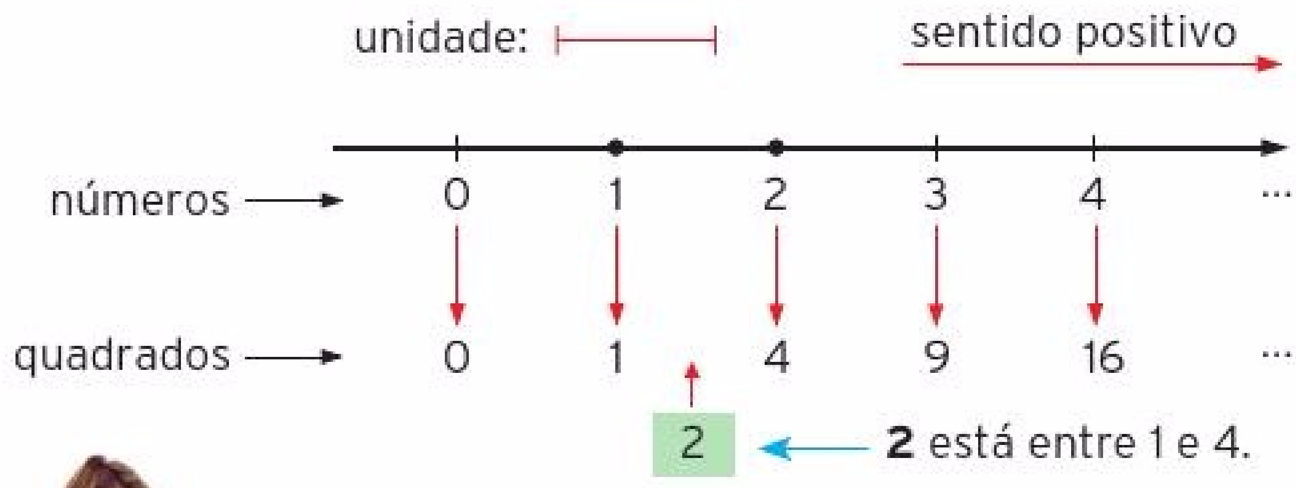
  Pista: É um número entre 1,0 e 1,5.

O problema do cálculo da medida da diagonal de um quadrado com lados medindo 1 unidade apareceu, também, nas pesquisas realizadas por Pitágoras e seus discípulos.

Como não encontraram um número conhecido que indicasse a medida da diagonal de um quadrado como esse, o problema foi colocado de lado. Bem mais tarde, a prática de medições apontou a necessidade de novos números que representassem com exatidão a medida de comprimentos como $\sqrt{2}$ metro, que aparece nessa situação.

O valor de $\sqrt{2}$ é um número tal que elevado ao quadrado é igual a 2.

Podemos ter uma ideia do valor desse número utilizando uma reta numerada:



$\sqrt{2}$ está entre **1** e **2**.

$\sqrt{2}$ não é um número inteiro.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Observe o quadrado de alguns números entre **1** e **2** com uma casa decimal.

$(1{,}1)^2 = 1{,}21$

$(1{,}2)^2 = 1{,}44$

$(1{,}3)^2 = 1{,}69$ — Os quadrados são menores que **2**.

$(1{,}4)^2 = 1{,}96$

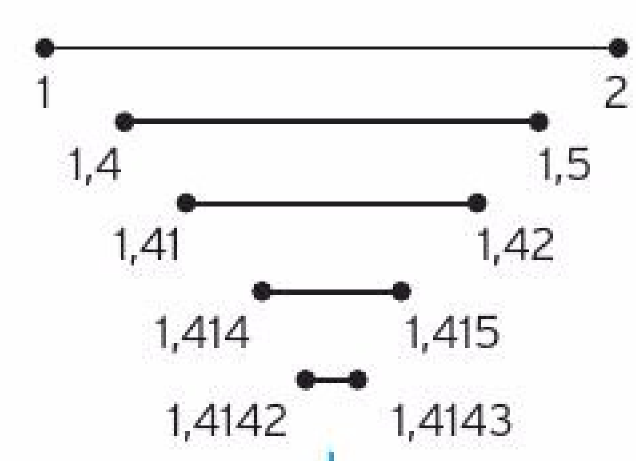
$(1{,}5)^2 = 2{,}25$ — O quadrado é maior que **2**.

Então, a raiz quadrada de 2 está entre 1,4 e 1,5.

Repetimos várias vezes o mesmo procedimento:

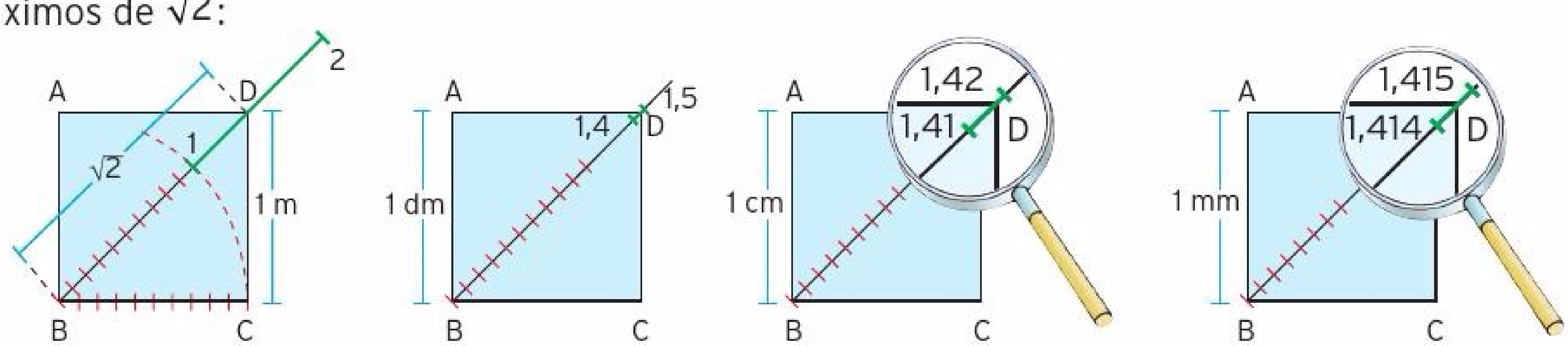
$1^2 = 1$		$2^2 = 4$
$(1{,}4)^2 = 1{,}96$		$(1{,}5)^2 = 2{,}25$
$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$	Os quadrados destes números vão se aproximando de **2**.	$(1{,}42)^2 = 2{,}0164$
$(1{,}414)^2 = 1{,}999396$		$(1{,}415)^2 = 2{,}002225$
$(1{,}4142)^2 = 1{,}99996164$		$(1{,}4143)^2 = 2{,}00024449$

$\rightarrow$ **2** $\leftarrow$



$\sqrt{2}$ está entre 1,4142 e 1,4143. $\rightarrow \sqrt{2}$

Observe a sequência de quadrados em que representamos os valores cada vez mais próximos de $\sqrt{2}$:



$\sqrt{2}$ está entre **1** e **2**.

$\sqrt{2}$ está entre **1,4** e **1,5**.

$\sqrt{2}$ está entre **1,41** e **1,42**.

$\sqrt{2}$ está entre **1,414** e **1,415**.

Podemos dizer que:

- $\sqrt{2}$ é aproximadamente igual a **1,414**, com **três** casas (ou ordens) decimais, mas 1,414 é **menor** que $\sqrt{2}$.
- $\sqrt{2}$ é aproximadamente igual a **1,415**, com **três** casas decimais, mas 1,415 é **maior** que $\sqrt{2}$.

Utilizando uma calculadora simples, é possível obter o valor de $\sqrt{2}$ com, por exemplo, oito casas decimais, mas com máquinas mais sofisticadas podemos obter muito mais casas decimais!

CRISTINA XAVIER/ FINEPHOTO

É possível verificar que $\sqrt{2}$ não é uma dízima periódica, pois não há um grupo de algarismos que se repete periodicamente, mas isso não será justificado aqui.

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

Os números irracionais não podem ser representados na forma fracionária, pois não são representações decimais exatas nem dízimas periódicas.

Na reta numerada eles são representados por pontos que não correspondem a números racionais.

Outros exemplos:

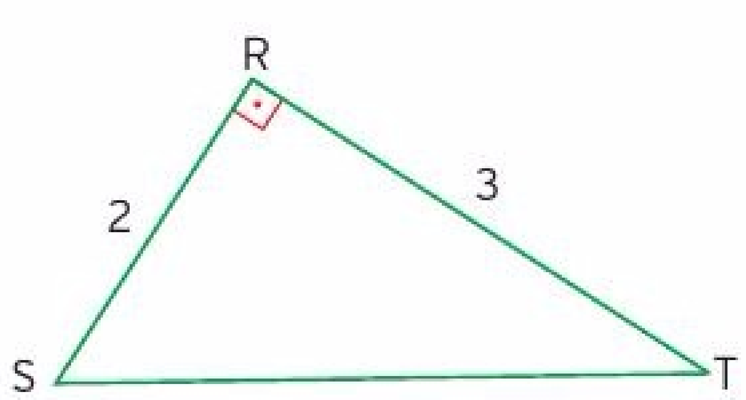
- $\sqrt{3} = 1{,}732050807568...$
- $\sqrt{5} = 2{,}236067977499...$

Números como esses formam o conjunto dos **números irracionais**, que é indicado por $\mathbb{I}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

23. Neste triângulo retângulo, as medidas estão em centímetros. Qual é a medida exata da hipotenusa? $\sqrt{13}$ cm



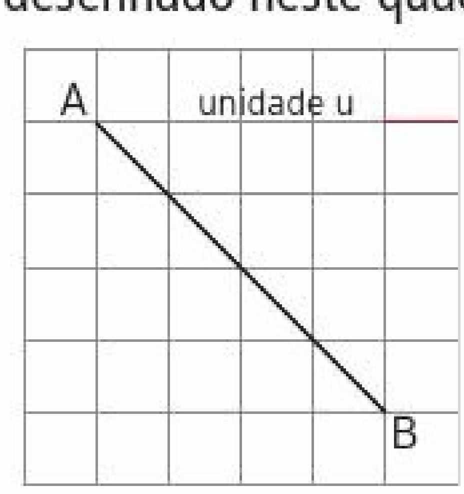
24. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 5 cm, e a hipotenusa, $\sqrt{34}$ cm. Quanto mede o outro cateto? 3 cm

25. Desenhe um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 1 cm.

a) Qual é o número não racional que expressa a medida da hipotenusa desse triângulo retângulo? Justifique sua resposta.
$\sqrt{10}$; $3^2 + 1^2 = (\text{hipotenusa})^2$ — $9 + 1 = (\sqrt{10})^2$

b) Com uma calculadora, obtenha um valor aproximado com duas casas decimais desse número não racional. 3,16 cm

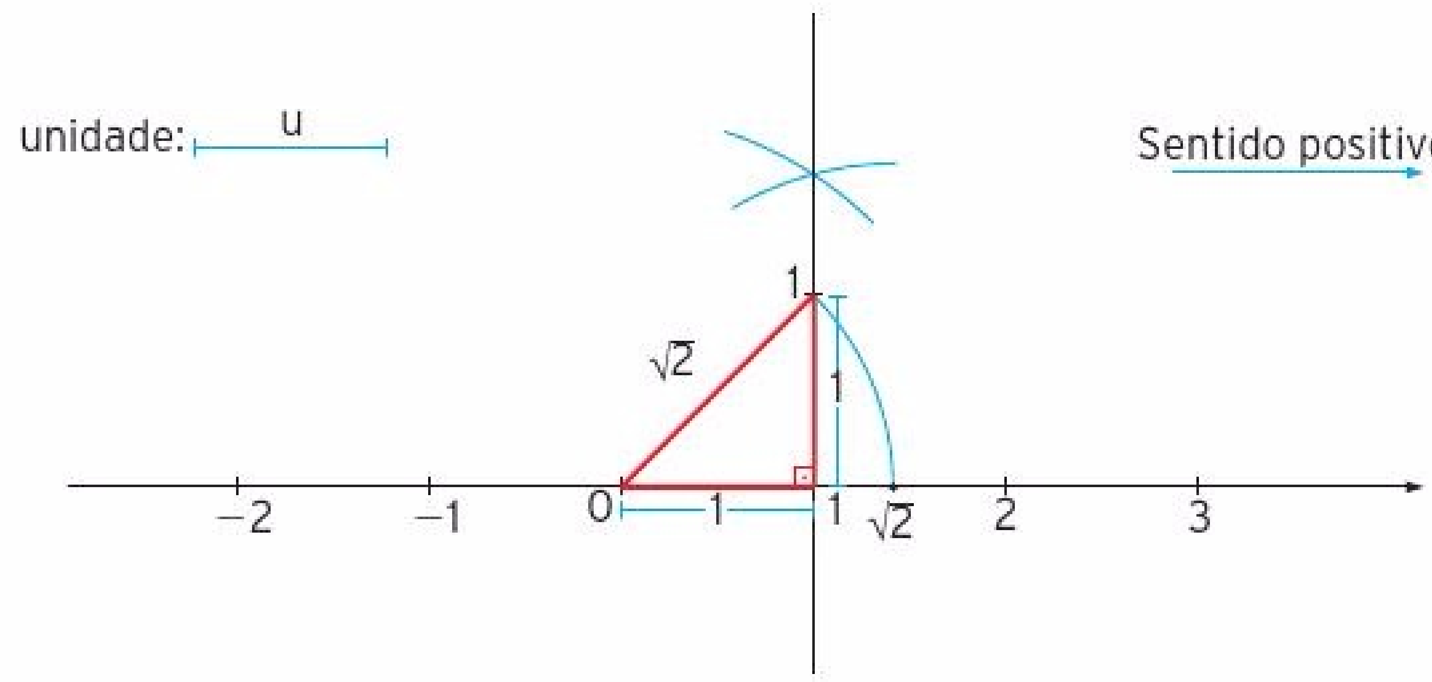
26. Calcule a medida do comprimento do segmento de reta AB desenhado neste quadriculado.
$\sqrt{32}$ u = 5,66 u



$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e a representação na reta numerada

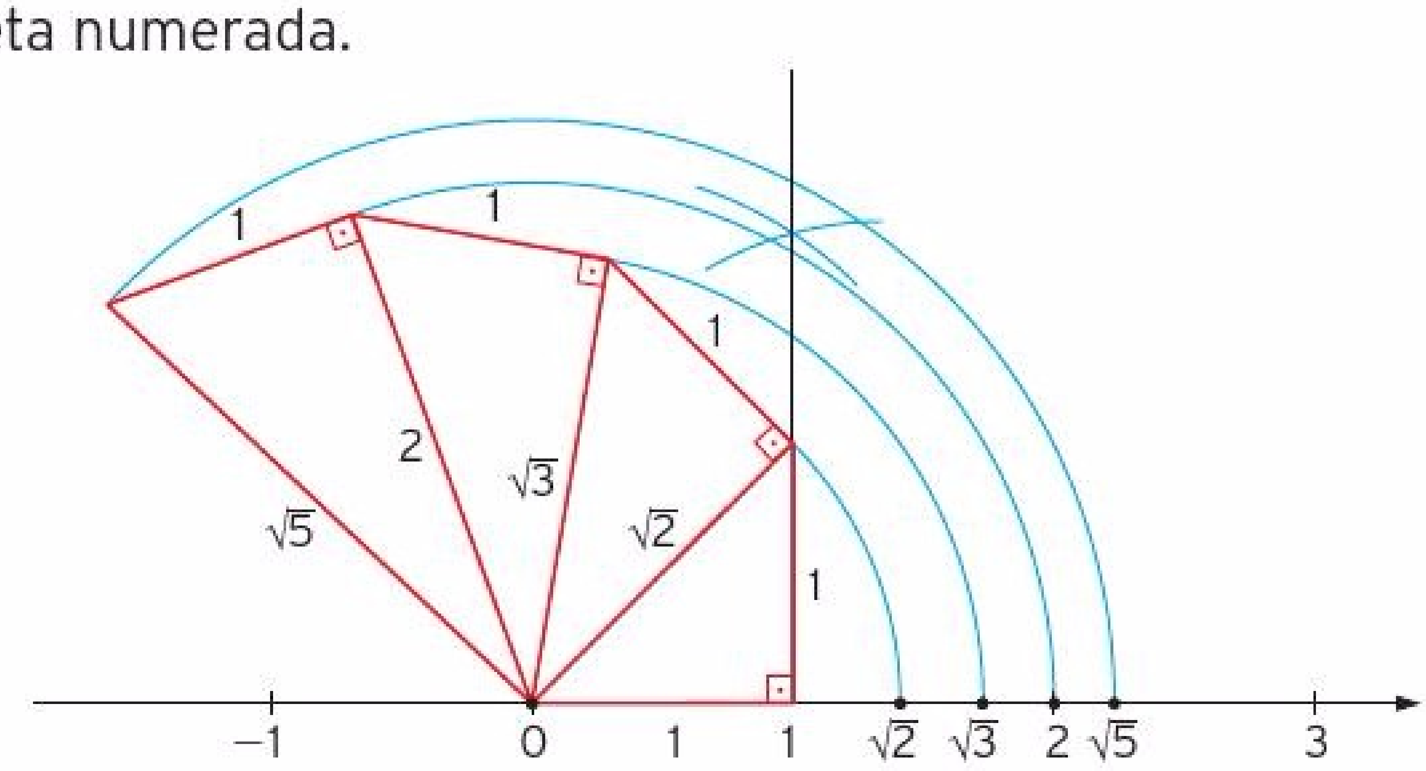
Como sabemos, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são números cuja representação decimal tem infinitas casas decimais e não são dízimas periódicas, ou seja, são números irracionais e podem ser representados na reta numerada. Observe a seguir.

- Construímos um triângulo retângulo com um vértice no "ponto zero" e com catetos que tenham como medida 1 u, por exemplo. Como sabemos, a hipotenusa medirá $\sqrt{2}$ u. Marcamos essa medida na reta numerada a partir do "ponto zero" e obtemos a representação do número $\sqrt{2}$.



- Aproveitamos a construção já feita e traçamos um triângulo retângulo com um dos catetos medindo $\sqrt{2}$ u e outro medindo 1 u. Nele, a hipotenusa medirá $\sqrt{3}$ u. Podemos representar o número $\sqrt{3}$ na reta numerada.

- Repetimos o processo até conseguirmos um triângulo retângulo com hipotenusa medindo $\sqrt{5}$ u e representamos o número $\sqrt{5}$ na reta numerada, marcando um ponto na reta que está a $\sqrt{5}$ u do "ponto zero".



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Construa um segmento de reta com medida $\sqrt{6}$ cm e represente o número $\sqrt{6}$ em uma reta numerada. Veja resposta no final do livro.
Pista: Comece com um triângulo retângulo com catetos de medidas 2 cm e 1 cm.

28. Observe o número $\sqrt{6}$ na reta numerada que você construiu na atividade 27 e responda:

a) Entre quais números inteiros está $-\sqrt{6}$? -3 e -2

b) Qual é o ponto que representa o número $-\sqrt{6}$? Resposta possível: O ponto simétrico em relação ao "ponto zero" que representa $\sqrt{6}$.

29. Represente o número $\sqrt{10}$ na reta numerada da atividade 27. Veja resposta no final do livro.

30. Qual é o número inteiro negativo cujo quadrado é igual a 1 296? -36

31. Nas afirmações seguintes, a letra **x** representa um número racional positivo. Analise cada uma delas e indique as que estão corretas. Reescreva as afirmações incorretas, de modo que sejam verdadeiras. Corretas: **a** e **b**

Corrigindo **c**: Para $x = 2$, $\sqrt{\frac{x^2}{9}} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{2}{3} - \frac{6}{4} = -\frac{5}{6}$

a) O valor de $\sqrt{x^2}$ é x.

b) O valor de $\sqrt{\frac{x^2}{9}}$ é $\frac{x}{3}$.

c) O valor de $\sqrt{\frac{x^2}{9}} - \frac{3x}{4}$, para $x = 2$, é $-\frac{19}{18}$.

32. Determine as raízes quadradas, usando aproximações e estimativas.

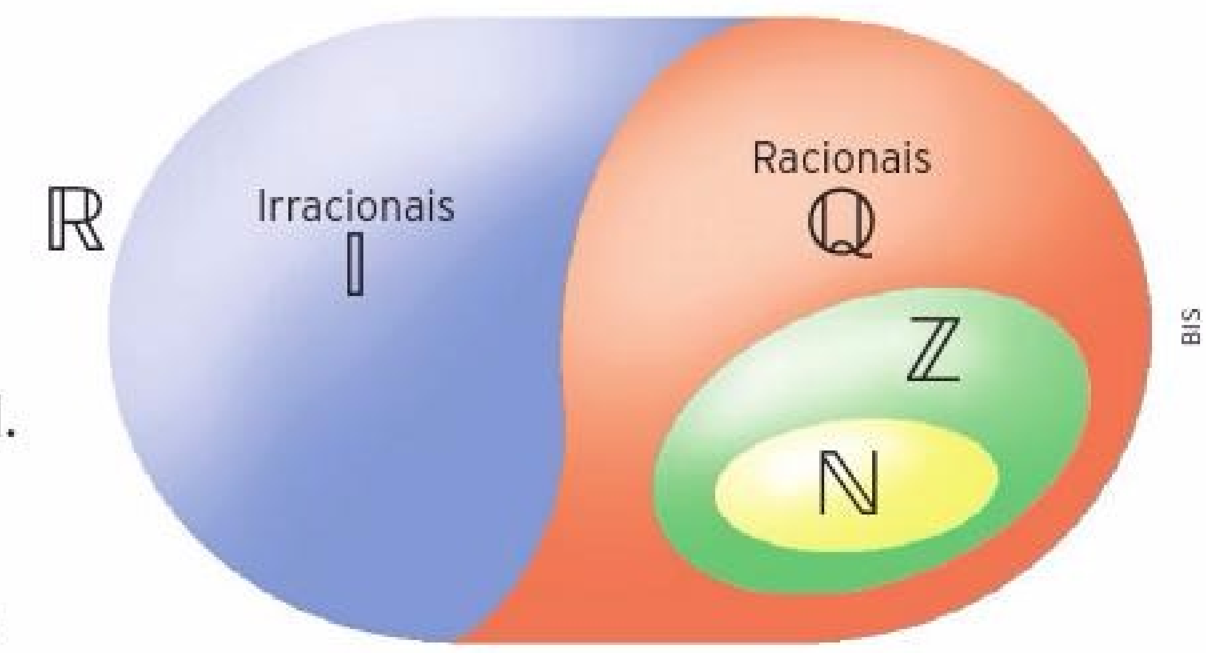
a) $\sqrt{1024}$ 32
b) $\sqrt{6\,561}$ 81
c) $\sqrt{\frac{144}{25}}$ 2,4
d) $\sqrt{\frac{400}{169}}$ Aproximadamente 1,538.

Se julgar necessário, comente com os alunos que, no item **c**, podem fazer $\sqrt{\frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{12^2}{5^2}} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2}$

3 Números reais

Números que formam o conjunto dos números reais

Reunindo os números **racionais** com os números **irracionais**, temos o **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.



- Todo número natural é um número real.
- Todo número inteiro é um número real.
- Todo número racional é um número real.
- Todo número irracional é um número real.

Em símbolos:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Portanto:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ —— $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$. $\mathbb{I}$ também é subconjunto de $\mathbb{R}$.

O símbolo $\subset$ significa: "está contido".

Exemplos:

- $\frac{7}{6} = 1{,}166666...$ é um número real.
- $-\sqrt{10} = -3{,}162277660...$ é um número real.
- 0,246810121416... é um número real —— Ele foi obtido colocando-se sucessivamente a sequência de números pares positivos a partir do 2.
- 0,010010001... é um número real —— Neste caso, a regra foi acrescentar um zero a mais que a quantidade de zeros do grupo anterior entre dois algarismos 1.

Lembre-se:

- Os números irracionais não podem ser representados na forma fracionária, pois não admitem representações decimais exatas nem dízimas periódicas. Na reta numerada, eles são representados por pontos que não correspondem a números racionais.
- Todo número real diferente de zero, elevado ao quadrado, é um número positivo.

Exemplos:

$(-9)^2 = 81$ $\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ $\quad (-1{,}2)^2 = 1{,}44$

- A raiz quadrada de um número negativo não é um número real.

Exemplos:

$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{-0{,}36} \notin \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{-\frac{49}{25}} \notin \mathbb{R}$

O símbolo $\notin$ significa: "não pertence".

Comparação de números reais

As propriedades já estudadas em comparação de números racionais continuam valendo no conjunto dos números reais.

Exemplos:

$\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{6}$ podem ser comparados de duas maneiras:

- Recorrendo à redução ao mesmo denominador

  $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$ e $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$.

  Logo, $\frac{5}{6} > \frac{3}{5}$.

- Escrevendo-os na forma decimal

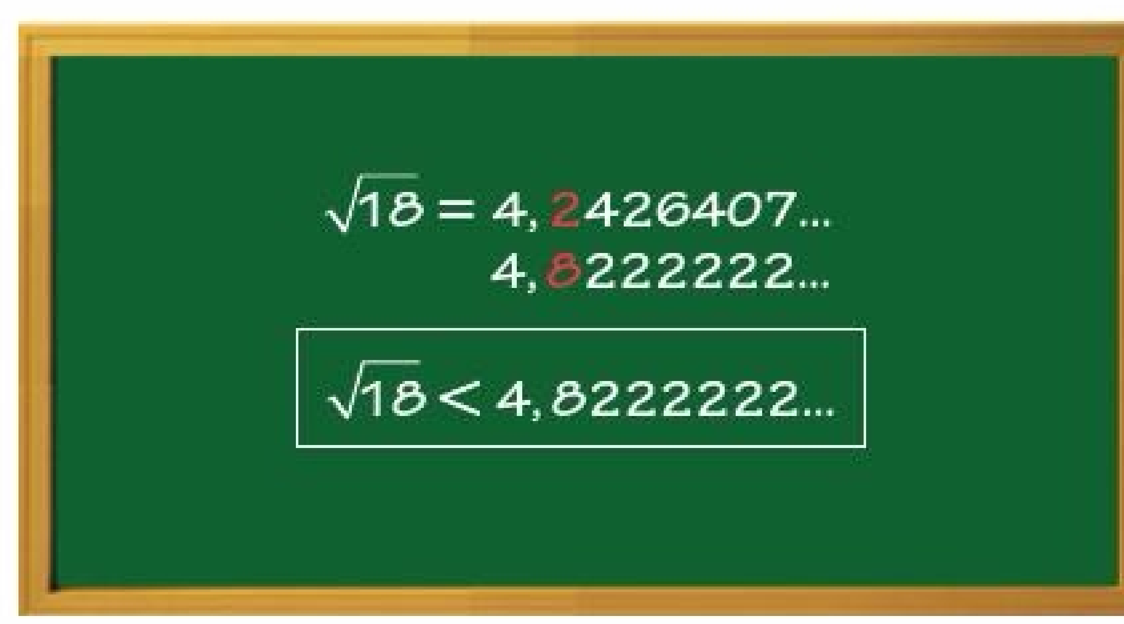
  $\frac{3}{5} = 0{,}6$ e $\frac{5}{6} = 0{,}8333...$

  Temos $0{,}8333... > 0{,}6$

  Logo, $\frac{5}{6} > \frac{3}{5}$.

$4{,}8222222...$ e $\sqrt{18}$ podem ser comparados escrevendo $\sqrt{18}$ na forma decimal:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES



HÉLIO SENATORE

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

33. Entre os números a seguir, identifique aqueles que são números irracionais. b, e, f

a) $\frac{2}{3}$

b) $-\sqrt{3}$

c) $20{,}\overline{015}$

d) $-6{,}0001$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $-1{,}3579111315...$

34. Copie as sentenças substituindo o ■ por $\in$ ou $\notin$.

a) -5 ■ $\mathbb{R}$ $\in$

b) $\frac{2}{3}$ ■ $\mathbb{Q}$ $\in$

c) $-\frac{2}{3}$ ■ $\mathbb{R}$ $\in$

d) $\frac{14}{5}$ ■ $\mathbb{N}$ $\notin$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ ■ $\mathbb{Q}$ $\notin$

f) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ ■ $\mathbb{I}$ $\in$

35. Os números $-\sqrt{13}$ e $-\frac{32}{9}$ são números reais. Qual deles é maior? $-\frac{32}{9}$

36. Copie as sentenças substituindo o ■ por $\subset$ ou $\not\subset$.

a) $\mathbb{N}$ ■ $\mathbb{R}$ $\subset$

b) $\mathbb{R}$ ■ $\mathbb{Q}$ $\not\subset$

c) $\mathbb{Z}$ ■ $\mathbb{R}$ $\subset$

d) $\mathbb{Q}$ ■ $\mathbb{R}$ $\subset$

e) $\mathbb{N}$ ■ $\mathbb{Z}$ $\subset$

f) $\mathbb{Z}$ ■ $\mathbb{Q}$ $\subset$

O símbolo $\not\subset$ significa: "não está contido".

37. Escreva dois números reais compreendidos entre $\sqrt{26}$ e $\sqrt{36}$. Resposta possível: 5,5; $\sqrt{27}$.

38. Observe estes números reais:

3,1234567891021...

3,1234567891112...

3,1234567891011...

a) Qual é o maior deles? E o menor?
3,1234567891112... e 3,1234567891011...

b) Escreva dois outros números que estejam entre o menor e o maior deles.
Resposta possível: 3,1234567891012... e 3,1234567891111...

39. Escreva em ordem crescente os números a seguir utilizando valores aproximados.

$\sqrt{6}$; $-\pi$; $\frac{1}{4}$; $-1{,}999...$; $1{,}24681012...$; 3.

$-\pi < -1{,}999... < \frac{1}{4} < 1{,}24681012... < \sqrt{6} < 3$

40. Desenhe em seu caderno um diagrama como o da página 22, que representa todos os conjuntos numéricos que conhecemos até agora, e escreva nele os seguintes números:
Veja resposta no final do livro.

a) -8

b) 10

c) $\frac{2}{5}$

d) $-\frac{10}{3}$

e) $-\frac{18}{6}$

f) $0{,}484848...$

g) $\sqrt{2}$

h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $-4\sqrt{7}$

j) 2

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Número áureo

Os gregos consideravam harmoniosos os retângulos em que a razão entre as medidas de seus lados fosse aproximadamente igual ao número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja:

$$\frac{\text{medida do lado maior do retângulo}}{\text{medida do lado menor do retângulo}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esses retângulos ficaram conhecidos como **retângulos áureos**, a razão ficou conhecida como **razão áurea**, e o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, como **número áureo** ou **número de ouro**.

ROBERT HARDING WORLD IMAGERY/ALAMY/LATINSTOCK

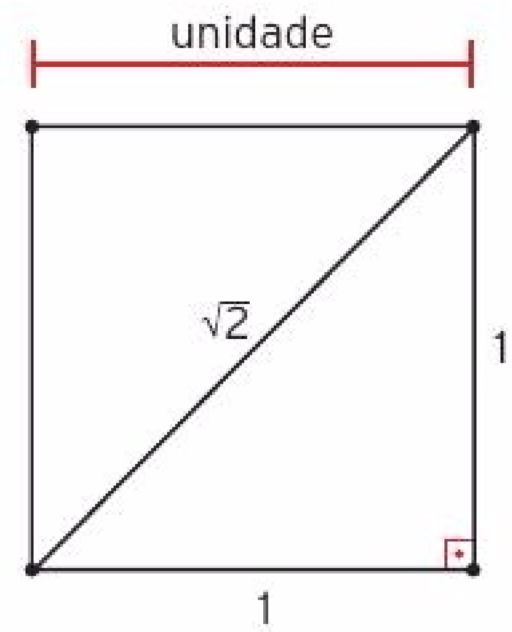
O retângulo áureo está presente no Parthenon, uma das obras arquitetônicas mais admiradas de todos os tempos.

- O número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um **número irracional**.

Utilize uma calculadora e obtenha um valor aproximado do número áureo com três casas decimais. 1,618

Leitura

Números reais: dos gregos aos matemáticos modernos

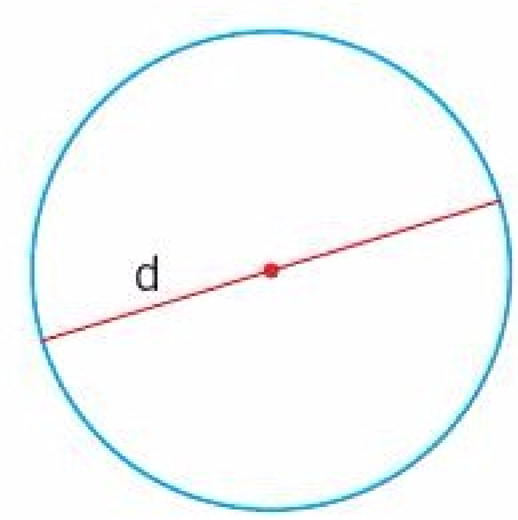


Na época de Pitágoras, por volta do século VI a.C., afirmava-se que a harmonia do universo podia ser expressa por relações entre números inteiros.

Hipaso de Metaponto, um dos membros da escola pitagórica, descobriu que não havia números, conhecidos na época, suficientes para expressar a razão entre a medida da diagonal de um quadrado e a medida de seus lados.

Por causa dessa descoberta, dizemos, em Matemática, que a diagonal de um quadrado e seus lados medidos na mesma unidade são grandezas (comprimento) incomensuráveis.

Um fato semelhante, mas de compreensão muito mais difícil, ocorre com a circunferência: a razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de um de seus diâmetros não pode ser expressa por números inteiros ou números racionais.



Nesse caso, dizemos que o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro são grandezas incomensuráveis.

Pierre de Fermat (1601-1665), no século XVII, abriu caminhos para o estudo aritmético da incomensurabilidade com a criação da Geometria Analítica.

Depois de Fermat muitos estudiosos se debruçaram sobre esse problema: Isaac Newton (1642-1727) e, no século XIX, Carl Weierstrass, Charles Méray, Carl Louis von Lindemann, Richard Dedekind e Georg Cantor.

Passaram-se mais de dois mil anos até a formalização da teoria geral sobre os números reais, resultado da reunião dos números racionais com os irracionais.

Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916) escreveu uma obra intitulada *Continuidade e números irracionais*, na qual menciona:

A linha reta é infinitamente mais rica em pontos que o domínio dos números racionais o é em números [...]

Torna-se absolutamente necessário aperfeiçoar este instrumento pela criação de novos números, se pretendermos que o domínio dos números seja tão completo ou, como podemos agora dizer, tenha a mesma continuidade que a linha reta. [...]

AKG-IMAGES/LATINSTOCK

Selo lançado em 1981 na Alemanha Oriental, comemorativo dos150 anos de nascimento de Richard Dedekind.

Revisão cumulativa e testes

1. Em uma escola, os alunos do 6º ano A estão distribuídos em 4 classes, como mostra a tabela:

Classe	A	B	C	D
Nº de alunos	42	38	35	40

Qual a maior quantidade de grupos com 12 alunos que pode ser formada? Quantos alunos sobram? 12 grupos; 11 alunos.

2. Considerando os números 15 e 50, responda às questões:

a) Qual é o produto desses números? 750

b) Determine o m.m.c. (15, 50). 150

c) Calcule o m.d.c. (15, 50). 5

d) Calcule o produto do m.m.c.(15, 50) pelo m.d.c.(15, 50). 750

e) O produto de 15 por 50 é igual ao produto do m.m.c. (15, 50) pelo m.d.c. (15, 50)? Sim.

f) Qual é a relação entre os resultados obtidos em **a** e em **d**? São iguais.

3. Qual é o valor do produto de **a** por **b**, se m.d.c. (a, b) = 18 e m.m.c. (a, b) = 90? 1620

4. Rosana fez seis provas de Matemática e obteve as seguintes notas:

7,5 6,5 6,0 5,5 8,5 8,0

Qual é a média aritmética das notas de Rosana em Matemática? 7,0

5. Qual é o valor da expressão: $\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-3}}$? 6

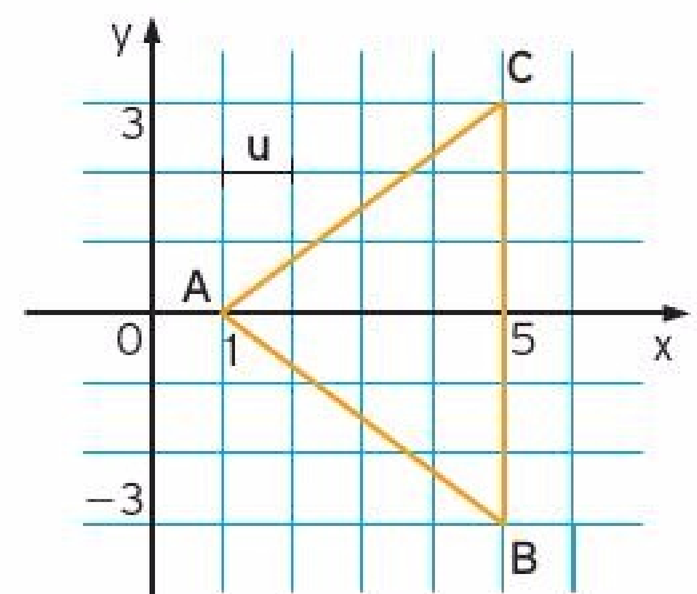
6. Usando régua e compasso, desenhe um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 cm e 3 cm.

a) Qual é o número não racional representado na reta numerada pela medida da hipotenusa desse triângulo retângulo? $\sqrt{13}$

b) Com uma calculadora, obtenha um valor aproximado desse número não racional. 3,61

7. O número 0,1357911... foi obtido colocando-se sucessivamente a sequência de números ímpares positivos, a partir do 1. Esse número é um número racional ou irracional? Por quê?
Irracional. Porque tem uma representação decimal não periódica com infinitas ordens decimais.

8. Observe o $\triangle ABC$ representado em um sistema de coordenadas cartesianas.



a) Qual é o lado do triângulo perpendicular ao eixo x? $\overline{BC}$

b) Calcule o perímetro desse triângulo. 16 unidades

9. Escreva estes números racionais na forma decimal:

a) $\frac{9}{15}$ 0,6 b) $\frac{31}{6}$ 5,1666...

10. Na divisão de uma classe em equipes, $\frac{5}{12}$ formaram a equipe **A**, $\frac{3}{8}$ a equipe **B** e $\frac{1}{12}$ a equipe **C**. Sabendo que as equipes **A**, **B** e **C** somam 42 alunos, calcule:

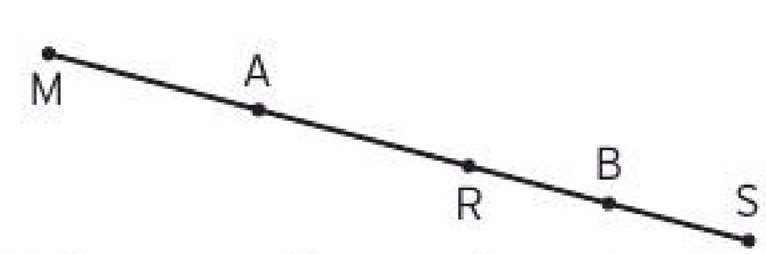
a) o número de alunos da classe; 48 alunos.

b) o número de alunos que não participaram de nenhuma das três equipes. 6 alunos.

11. Calcule uma fração geratriz das dízimas periódicas apresentadas a seguir:

a) 0,65555... $\frac{59}{9}$ b) 8,242424... $\frac{272}{33}$

12. Nesta figura, $\overline{MA}$ e $\overline{AR}$ têm medidas iguais, ou seja, A é ponto médio de $\overline{MR}$.



a) Utilize uma régua e determine as medidas dos segmentos de reta $\overline{MR}$ e $\overline{RS}$. 3 cm, 2 cm

b) Qual é a medida de $\overline{AB}$? 2,5 cm

c) Qual é o valor de $\frac{\text{med } \overline{MR} + \text{med } \overline{RS}}{2}$? 2,5 cm

13. A diferença entre o quadrado de 12 e o dobro de 12 é: b

a) 144 b) 120 c) 24 d) 12

14. A expressão $N = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^1 + 8$ é uma forma decomposta do número natural: a

a) 5 048
b) 5 148
c) 548
d) 540

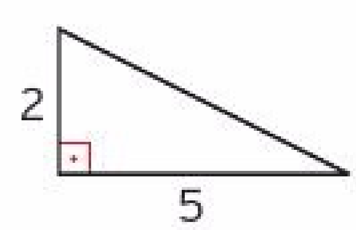
15. O produto de dois números racionais é igual a 1. Se um deles é $\frac{7}{15}$, o valor do outro é: d

a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{7}$ c) 1 d) $\frac{15}{7}$

16. Qual sequência de três números corresponde às medidas dos lados de um triângulo retângulo? a

a) 16, 30 e 34
b) 30, 40 e 60
c) 10, 24 e 30
d) 5, 12 e 15

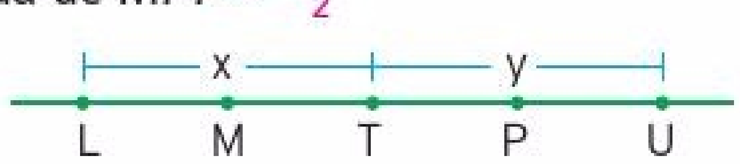
17. Neste triângulo retângulo, as medidas estão indicadas em centímetros.



O número não racional representado na reta numerada pela medida da hipotenusa desse triângulo é: d

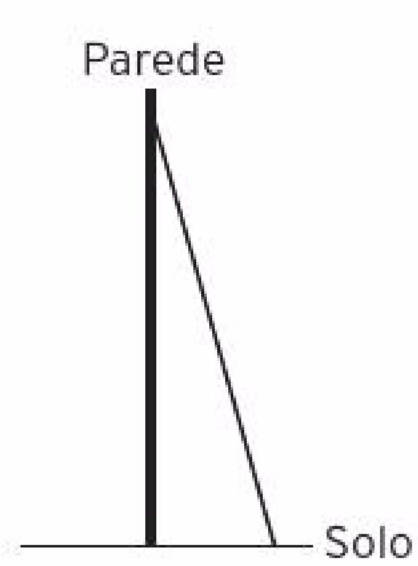
a) 7 b) 29 c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{29}$

18. Nesta figura, **M** e **P** são os pontos médios de $\overline{LT}$ e $\overline{TU}$, respectivamente. Se **x** e **y** representam as medidas desses segmentos de reta, qual é a medida de $\overline{MP}$? d) $\frac{x + y}{2}$



a) $\frac{x \cdot y}{2}$
b) $x^2 + y^2$
c) $2x + 2y$
d) $\frac{x + y}{2}$

19. (Prova Brasil) Observe esta figura, que representa uma escada apoiada em uma parede que forma um ângulo reto com o solo. O topo da escada está a 7 m de altura e seu pé está afastado 2 m da parede.



A escada mede, aproximadamente: c

a) 5 m b) 6,7 m c) 7,3 m d) 9 m

20. (Cesgranrio) Um botijão de 13 kg de gás de cozinha (GLP) é vendido por R$ 30,58. Esse preço é composto de três partes: distribuição e revenda, tributos e preço de custo. Se o valor de distribuição e revenda superar em R$ 1,77 o preço de custo e o preço de custo superar em R$ 5,09 a parte correspondente aos tributos, qual será, em reais, o preço de custo de um botijão de 13 kg? a

a) 11,30
b) 11,54
c) 12,36
d) 12,49

21. A dízima 0,34545... pode ser escrita na forma de fração como: c

a) $\frac{297}{990}$
b) $\frac{300}{990}$
c) $\frac{342}{990}$
d) $\frac{345}{990}$

22. Simplificando a expressão $4 - \frac{11}{6} \cdot 3 + 0{,}333...$, obtém-se um número: a

a) compreendido entre -2 e 0.
b) compreendido entre -1 e 2.
c) compreendido entre 2 e 3.
d) maior do que 3.

23. (Fuvest) O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é: a

a) 37
b) 36
c) 35
d) 34
e) 33

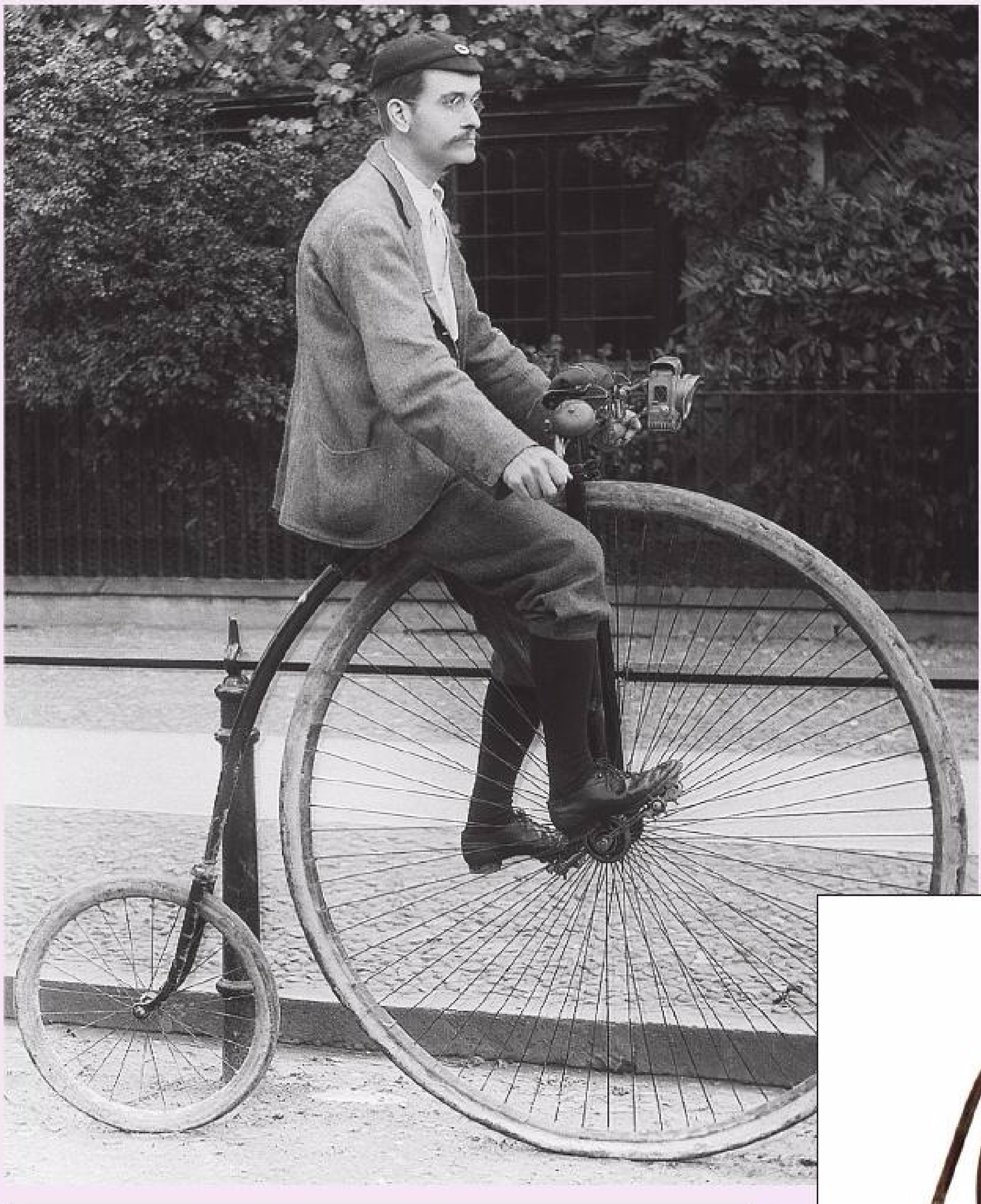
24. (Fundação Carlos Chagas) Seja X a diferença entre o maior número inteiro com 4 algarismos distintos e o maior número inteiro com 3 algarismos, é correto afirmar que X é um número: b

a) par.
b) divisível por 3.
c) quadrado perfeito.
d) múltiplo de 5.
e) primo.

UNIDADE 2

A circunferência e o número π

A circunferência é muito utilizada em diversos instrumentos comuns em nosso dia a dia, e, por essa razão, é importante conhecer seus elementos e propriedades, como saber, por exemplo, calcular o comprimento de uma circunferência. Esse é um dos assuntos que serão explorados nesta unidade.



SEAN SEXTON COLLECTION/CORBIS/LATINSTOCK

Bicicleta com uma grande roda circular com pedal.

SHUTTERSTOCK

Nesta unidade...

1. Explorando circunferência e círculo
2. Construções geométricas

Aristóteles, um filósofo grego que viveu entre 384 e 322 a.C., considerava a circunferência a figura perfeita.

No estudo das formas e das linhas, as circunferências e os círculos sempre chamaram a atenção dos estudiosos, por serem considerados formas regulares e perfeitas. Logo surgiram muitas aplicações dessas formas e elas passaram a fazer parte do cotidiano.

CRISTINA XAVIER/FINEPHOTO

Olhando de cima, as bordas de tubos cilíndricos formam circunferências quase perfeitas.

IMAGEBROKER/ALAMY/LATINSTOCK

Objetos pequenos que caem sobre a superfície da água geram ondas circulares concêntricas.

COLOURIA MEDIA/ALAMY/LATINSTOCK

PASHKOV ANDREY/ALAMY/LATINSTOCK

O hodômetro da bicicleta mede a distância percorrida por meio de um dispositivo que conta as voltas dadas pela roda e converte esse valor em distâncias percorridas. Para isso, é necessário conhecer o perímetro da circunferência que constitui a roda.

O que você já sabe?

- Circunferências estão presentes em rodas de bicicletas. Anote em seu caderno outros objetos ou construções nas quais se observam tal forma geométrica. Resposta possível: Em rotatórias, motores, engrenagens, formas artísticas.
- Dê sua opinião: Como se pode calcular a distância que será percorrida pela roda de uma bicicleta? Resposta possível: Contornando-a com uma fita métrica.

1 Explorando circunferência e círculo

π... um número famoso!

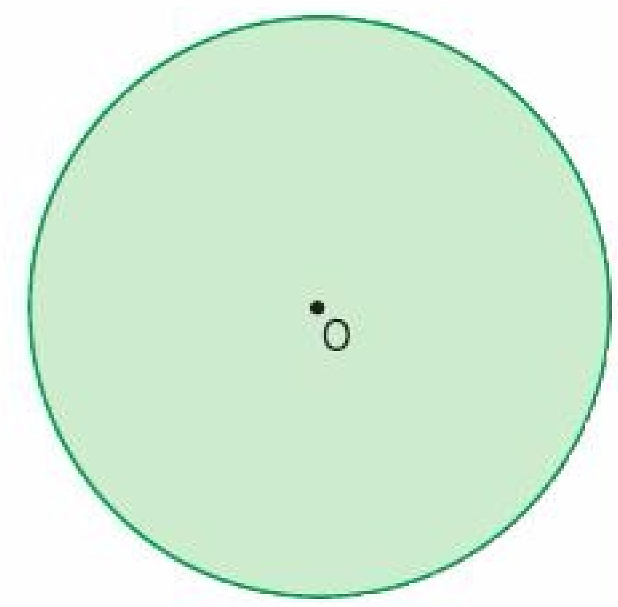
Incentive os alunos a desenvolver os experimentos propostos a seguir para o cálculo do número π. Eles poderão fazer suas tentativas em casa ou em sala de aula, em grupos ou individualmente.

Para refletir e responder

Que tal fazer um experimento?

Inicie recortando um disco, em cartolina, com 2 cm de raio, como este ao lado.

Caio e Rute propõem medir o comprimento de um disco como esse de maneiras diferentes.



SHUTTERSTOCK

THINKSTOCK/GETTY IMA

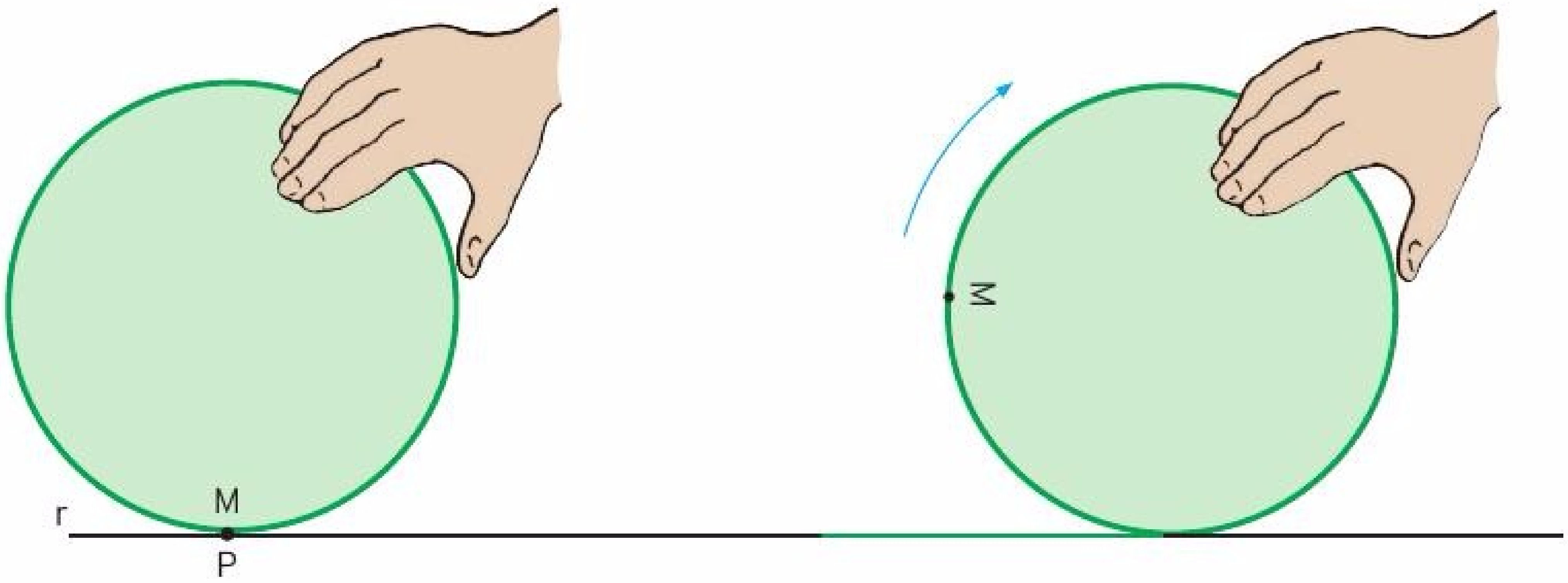
- Siga uma das sugestões apresentadas pelos jovens e calcule a medida do contorno desse disco. Aproximadamente quantos centímetros você encontrou? Reposta possível: Entre 12 cm e 13 cm.

O contorno do disco apresentado na situação acima é uma **circunferência**. Sabemos, há algum tempo, que a medida do comprimento de uma circunferência com número racional como medida do raio é um número não racional.

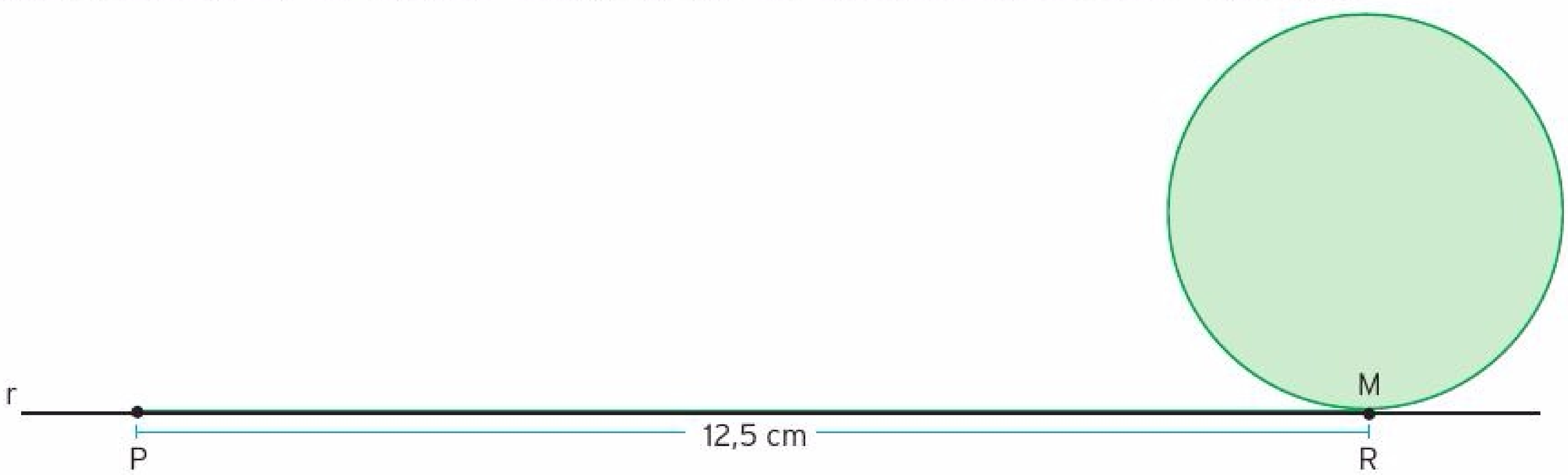
Essa medida envolve o número π. Esse número não é conhecido com exatidão, pois sua representação tem infinitas ordens decimais e não é uma dízima periódica.

THINKSTOCK/GETTY IMA

É possível calcular a medida do comprimento do contorno do disco apresentado na situação acima seguindo a sugestão dada por Caio. Para isso, marca-se um ponto **M** no disco circular. Em seguida, desenha-se uma reta e marca-se nela um ponto que pode ser chamado de **P**. Ajusta-se o ponto **M** sobre **P** e basta rolar o disco sobre a reta.



Quando o ponto **M** tocar novamente a reta, marca-se um ponto **R**. O segmento de reta $\overline{PR}$ corresponde ao percurso de uma volta completa do disco, e a medida de $\overline{PR}$ é a medida do contorno do disco, ou seja, do comprimento da circunferência que o contorna.



O comprimento de uma circunferência com 2 cm de raio é de aproximadamente 12,5 cm.

Caio deseja saber a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

THINKSTOCK/GETTY IMA

$$\begin{array}{r|l} 12{,}5 & 4{,}0 \\ \cline{2-2} 50 & \mathbf{3{,}125} \\ 100 & \\ 200 & \\ 0 & \end{array}$$

Na calculadora, pressione:

Atenção para este quociente:

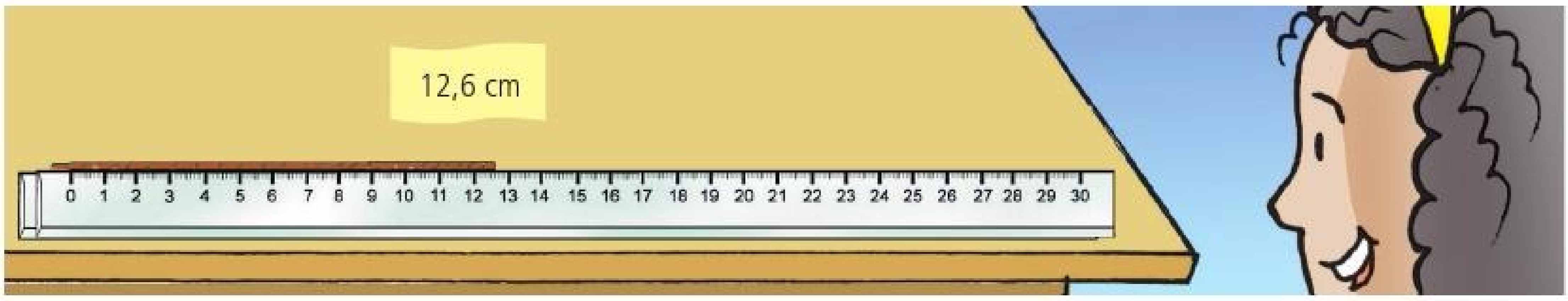
$$\frac{\text{comprimento de uma circunferência}}{\text{medida de um diâmetro dessa circunferência}} = \frac{12{,}5}{4} = \mathbf{3{,}125}$$

Vamos combinar:
Neste texto, a expressão "comprimento da circunferência" significa "medida do comprimento da circunferência", ou seja, o perímetro da circunferência.

Agora, observe como calcular, aproximadamente, o perímetro do disco usando um pedaço de barbante. Com ele, contorna-se o disco e faz-se uma marca no ponto que corresponde a uma volta. Em seguida, mede-se o comprimento marcado no barbante.

FRANCISCO VILACHA

Veja como ficou uma volta completa:



FRANCISCO VILACHÁ

Nesse caso:

$$\frac{\text{comprimento de uma circunferência}}{\text{medida de um diâmetro dessa circunferência}} = \frac{12{,}6}{4} = \mathbf{3{,}15}$$

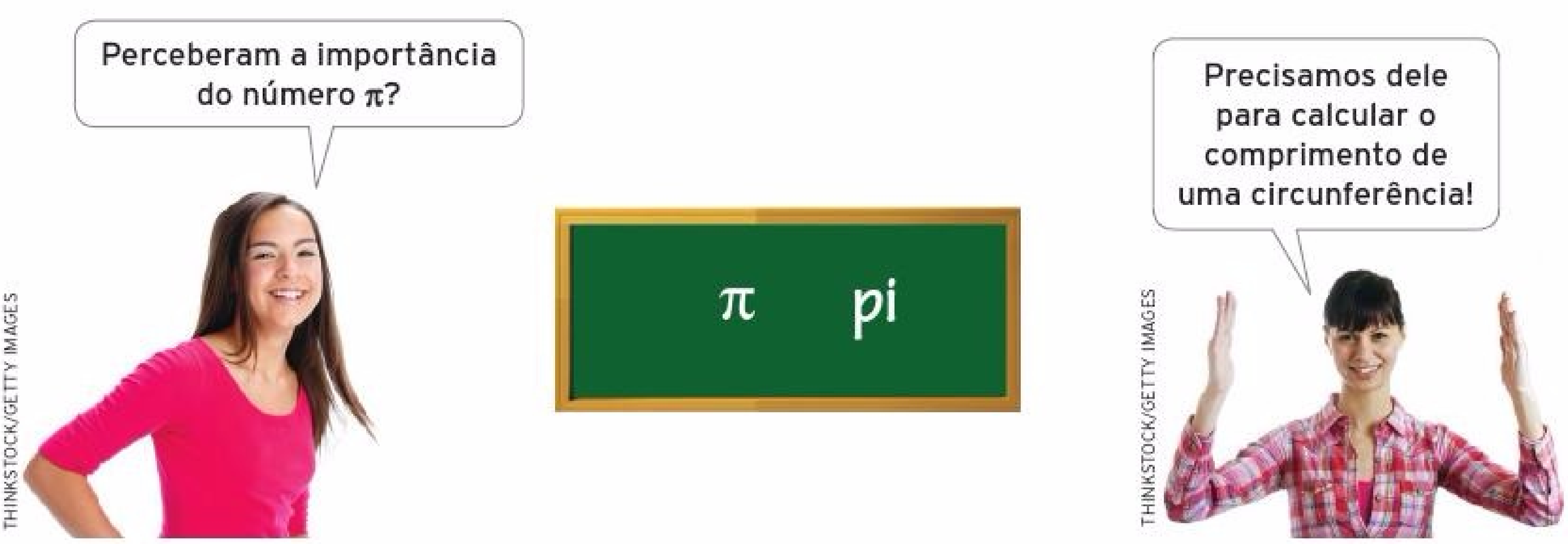
Note que esse resultado é bastante próximo ao obtido anteriormente.

Observe, na tabela abaixo, alguns quocientes da divisão do comprimento de uma circunferência pela medida do diâmetro.

Comprimento (C) (em cm)	**Diâmetro (d) (em cm)**	$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{d}}$
18,85	6	3,141666
62,83	20	3,1415
282,74	90	3,1415555...

Comparando os resultados $\frac{C}{d}$, percebemos que, embora não sejam iguais, são muito próximos.

O número ao qual os matemáticos deram o nome de π tem um valor próximo a esses quocientes.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

π é o **quociente** obtido na divisão do **perímetro** ou **comprimento** de uma circunferência pela medida de um **diâmetro**. É um número com infinitas casas decimais em sua representação decimal e não é uma dízima periódica.

π é um número irracional.

Procure fazer com que os alunos explorem a relação que existe entre a medida de um diâmetro de uma circunferência e seu perímetro. Proporcione atividades lúdicas e de interesse deles. Incentive, também, pesquisas sobre a circunferência e o círculo. Isso poderá motivá-los a estudar um assunto tão complexo como os números reais.

$$\pi = \frac{\text{comprimento de uma circunferência}}{\text{medida de um diâmetro dessa circunferência}}$$

Comprimento da circunferência

Podemos usar letras para representar as medidas:

c – comprimento de uma circunferência;

d – medida de um diâmetro dessa circunferência.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$\pi = \frac{c}{d}$$

A partir da fórmula $\dfrac{\textbf{comprimento da circunferência}}{\textbf{medida do diâmetro}} = \pi$, ou seja, $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \pi$, podemos escrever as fórmulas para o comprimento de uma circunferência:

$$d = 2 \cdot r$$

$$c = \pi \cdot d \quad \text{ou} \quad c = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Na resolução de problemas, costuma-se usar **3,1416** (com quatro ordens decimais) ou **3,14** (com duas ordens decimais) como valores aproximados para **π**.

Exemplo:

Em uma circunferência com comprimento igual a 50,24 cm, calcula-se o raio usando a fórmula apresentada acima.

$$c = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\boxed{50{,}24 = 2 \cdot \pi \cdot r} \quad r = \frac{50{,}24}{2 \cdot \pi} \cong \frac{50{,}24}{2 \cdot 3{,}14} \cong \frac{50{,}24}{6{,}28} \cong 8$$

equação de 1º grau

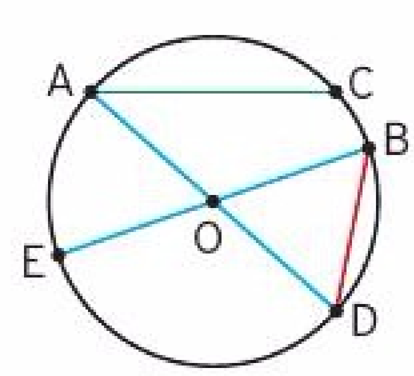
Use $\pi \cong 3{,}14$

A medida de um raio dessa circunferência é, aproximadamente, 8 cm.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Nesta circunferência, identifique os segmentos de reta que são:



a) raios; $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$

b) cordas; $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{EB}$

c) diâmetros. $\overline{AD}$ e $\overline{EB}$

2. Marque um ponto C e trace uma circunferência de centro C e raio igual a 2,5 cm. Nessa circunferência, desenhe cordas de:

Veja construção no final do livro.

a) 3 cm b) 5 cm c) 6 cm

Resposta possível: Não foi possível traçar uma corda de 6 cm, porque a maior corda é o diâmetro, que mede 5 cm.

Foi possível traçar uma corda em todos os itens? Justifique sua resposta.

3. O número π é o quociente entre duas medidas relacionadas a uma circunferência. Que medidas são essas? A medida do comprimento de uma circunferência e a medida de um de seus diâmetros.

4. Qual é a medida aproximada de um diâmetro da circunferência cujo comprimento é igual a 311,41 m? Aproximadamente 99,20 m.

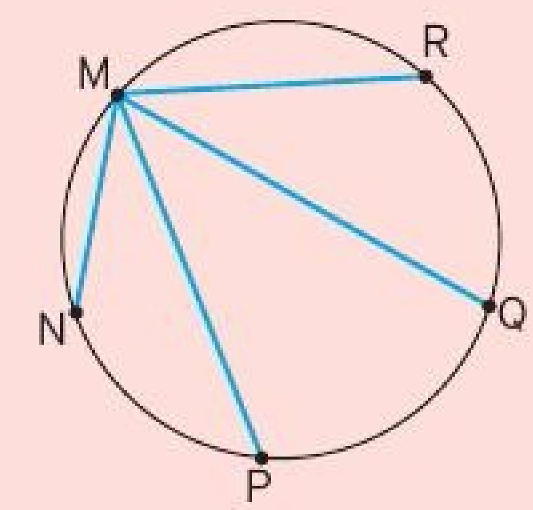
5. Uma pista circular tem 90 m de raio. Quantos quilômetros uma pessoa terá percorrido após dar 20 voltas nessa pista? Aproximadamente 11,304 km.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Cinco pontos, quantas cordas?

Nesta circunferência estão marcados cinco pontos e foram desenhadas as cordas que têm uma das extremidades em **M**.



- Quantas cordas com extremidades nos pontos destacados podem ser traçadas? 10 cordas.
- E se fossem seis pontos? 15 cordas.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

A brincadeira preferida de muitas crianças é a bolinha de gude. Em uma das muitas versões desse jogo, traça-se uma circunferência com cerca de 3 palmos de diâmetro: ela limita a região onde devem ficar as bolinhas de gude durante o jogo.

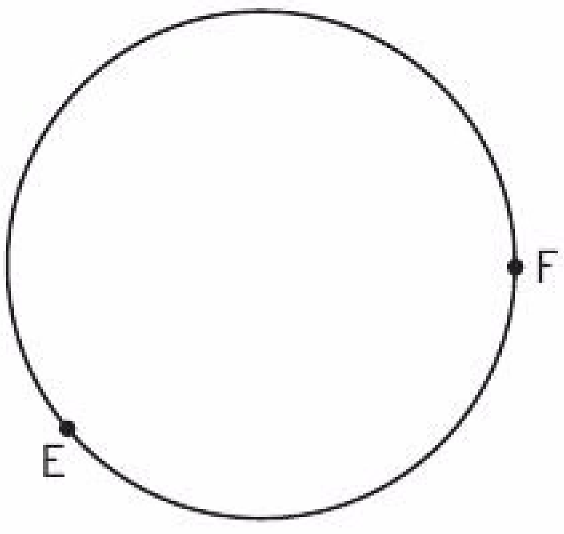

FRANCISCO VILACHÃ

- Meça o seu palmo ou o de um colega, em centímetros. Resposta pessoal.
- Qual é o perímetro aproximado do círculo no qual devem ficar as bolinhas de gude? Dê sua resposta em centímetros. Resposta pessoal.

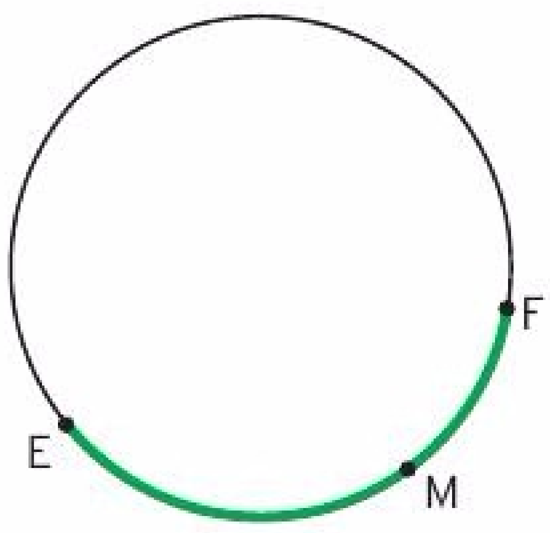
Incentive os alunos a pesquisar e explorar brincadeiras que envolvam circunferências e círculos. Essa é uma maneira lúdica de aprender mais sobre essas figuras geométricas. Lembre-se: atividades lúdicas costumam motivar os alunos.

Arcos

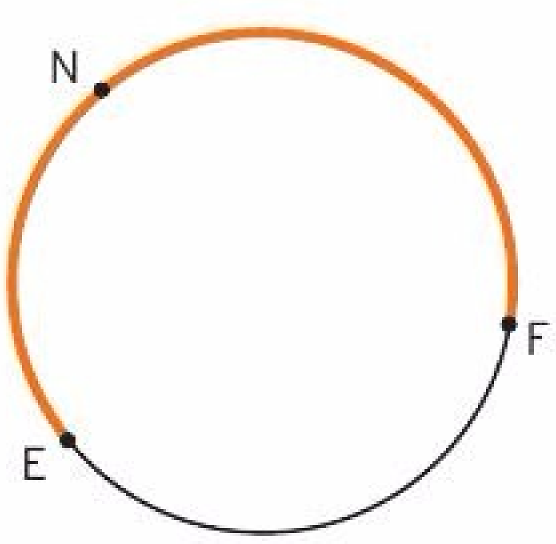
Já sabemos que uma circunferência é composta por infinitos pontos. Na figura ao lado foram destacados dois deles: os pontos E e F.



Um percurso de um desses pontos para o outro, sobre a circunferência, pode ser realizado de duas maneiras.



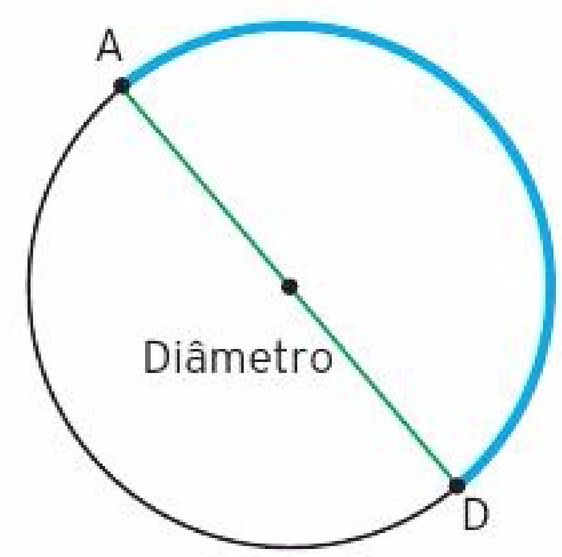
Percorrer de **E** a **F** passando por **M.** Chamamos esse percurso de **arco EMF**, que é representado por $\overset{\frown}{\mathbf{EMF}}$.



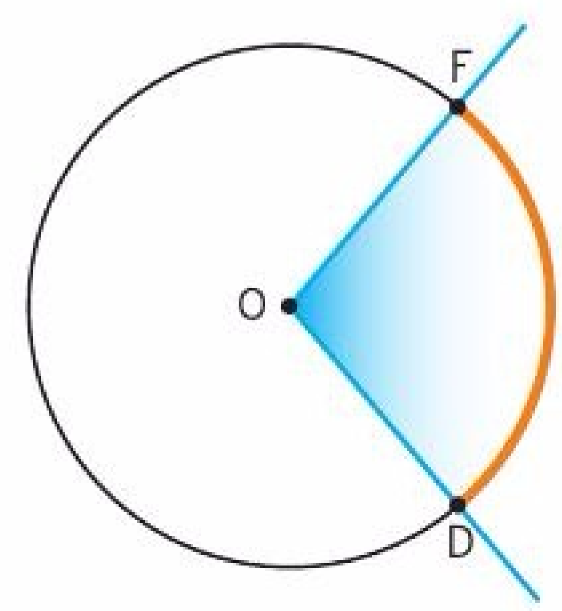
Percorrer de **E** a **F** passando por **N**. Chamamos esse percurso de arco **ENF**, indicado por $\overset{\frown}{\mathbf{ENF}}$.

Observe que os arcos **$\overset{\frown}{EMF}$** e **$\overset{\frown}{ENF}$** têm as mesmas extremidades, mas nesse caso **$\overset{\frown}{EMF}$** apresenta um percurso menor que **$\overset{\frown}{ENF}$**.

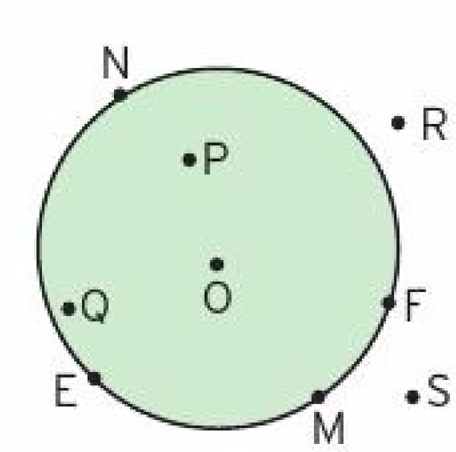
Quando as extremidades de um arco são também as extremidades de um diâmetro, chamamos cada um dos arcos de semicircunferência.



Um ângulo com vértice no centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**. Os lados do ângulo determinam dois arcos nessa circunferência.



Círculo



Qualquer circunferência separa os pontos do plano em que está em duas regiões:

- **pontos internos**: **O**, **P** e **Q** – distâncias ao centro **O** são menores que a medida de um raio.
- **pontos externos**: **R** e **S** – distâncias ao centro **O** são maiores que a medida de um raio.

Nessa figura, as distâncias dos pontos E, F, M e N ao centro da circunferência são iguais à medida de um raio e esses pontos pertencem a ela.

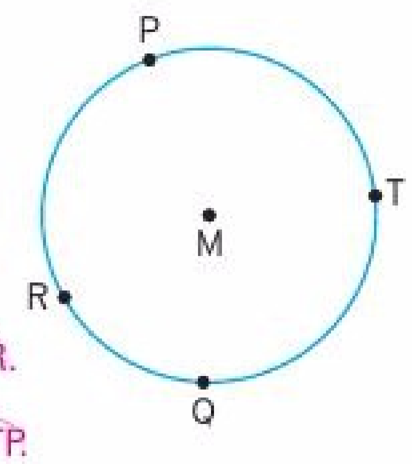
Círculo é a figura formada pelos pontos da circunferência e pelos pontos internos a ela.

Os pontos E, F, M, N, O, P e Q pertencem ao círculo.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

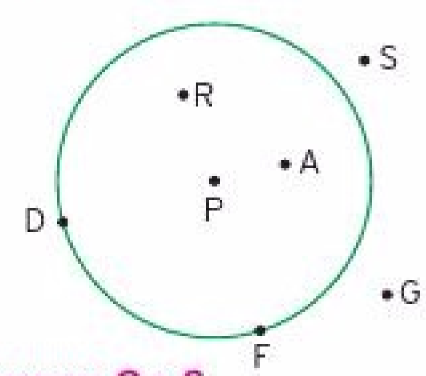
6. Observe esta circunferência e determine quais são os arcos que têm como extremidades:



a) os pontos **R** e **T**; $\overset{\frown}{RQT}$ e $\overset{\frown}{TPR}$.

b) os pontos **P** e **Q**. $\overset{\frown}{PRQ}$ e $\overset{\frown}{QTP}$.

7. Nesta figura:



a) identifique, em relação à circunferência, os pontos internos e os pontos externos;
Pontos internos: **A**, **P** e **R**; pontos externos: **G** e **S**.

b) mencione três pontos que pertencem ao círculo.
Resposta possível: **R**, **D** e **A**.

8. Desenhe uma circunferência de raio igual a 2,5 cm e centro **M**. Trace um ângulo central de 70° e destaque um dos arcos correspondentes a esse ângulo. Veja resposta no final do livro.

9. Desenhe uma circunferência de centro **C** e raio igual a 3 cm. Marque, em relação à circunferência, um ponto interno **A**, diferente de **C**, e um ponto externo **B**.

a) A distância de **C** a **A** é maior ou menor que a medida de um raio? Menor.

b) A distância de **C** a **B** é maior ou menor que a medida de um raio? Maior.

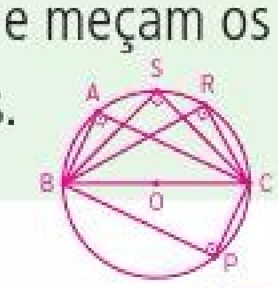
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

Desenhem uma circunferência e nomeiem o seu centro de **O**. Tracem nela o diâmetro $\overline{BC}$ e marquem um ponto **A** pertencente à circunferência que não coincida com as extremidades desse diâmetro.

- Utilizem um transferidor para medir os ângulos do triângulo ABC. Que tipo de triângulo ele é em relação aos ângulos? Triângulo retângulo.
- Desenhem outros três triângulos do mesmo modo que vocês desenharam o △ABC e meçam os ângulos desses triângulos. Classifiquem esses triângulos em relação aos ângulos.
Resposta possível: Triângulos retângulos.



Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

10. Um diâmetro de uma circunferência mede 3,6 cm. Qual é a medida de um raio dessa circunferência? 1,8 cm

11. Desenhe uma circunferência de centro em O e trace uma corda de extremidades M e N, que não seja um diâmetro. Você pode afirmar que o triângulo OMN é isósceles? Justifique sua resposta.
Sim, porque os lados $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ são raios e têm medidas iguais.

12. Desenhe uma circunferência de centro **C** e raio igual a 5 cm. Indique por **x** a distância de um ponto **A** qualquer ao centro dessa circunferência. Relacione o valor de **x** e a medida 5 cm usando os símbolos $=$, $>$ ou $<$ para estes casos:

a) o ponto **A** está na circunferência; $x = 5$ cm

b) o ponto **A** é externo à circunferência; $x > 5$ cm

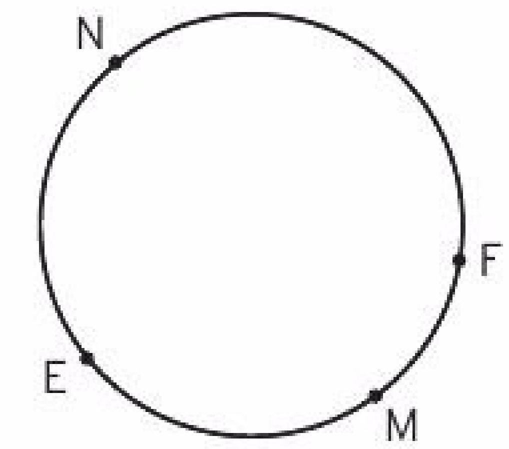
c) o ponto **A** é interno à circunferência. $x < 5$ cm

13. Quantas voltas dá uma roda de uma moto para percorrer 9,42 km, se o diâmetro da roda tem 60 cm? Aproximadamente 5 000 voltas.

14. As medidas dos raios de duas circunferências estão na razão de 2 para 5. Qual é a razão entre os comprimentos da circunferência menor para a maior? $\frac{2}{5}$

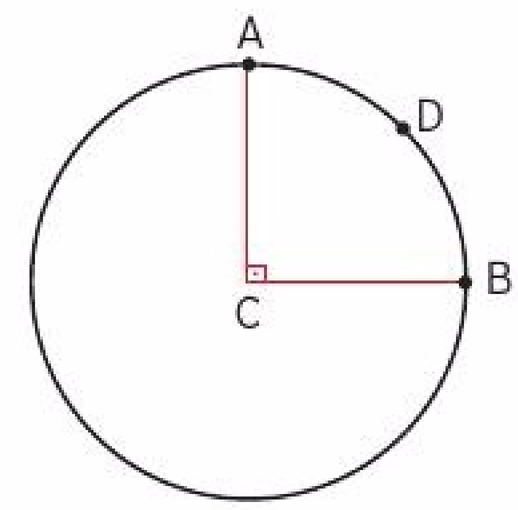
15. Se o raio de uma circunferência **A** mede o dobro do raio de uma circunferência **B**, quantas vezes o comprimento de **A** é maior que o comprimento de **B**? 2 vezes.

16. As medidas dos raios de duas circunferências estão na razão de 4 : 7. Se o comprimento da menor é 10 cm, qual é o comprimento da circunferência maior? 17,5 cm



17. Em uma circunferência de 6 cm de raio, representada ao lado, os pontos **E** e **F** determinam os arcos $\overset{\frown}{FNE}$ e $\overset{\frown}{EMF}$. O comprimento do arco $\overset{\frown}{FNE}$ é o triplo do comprimento do arco $\overset{\frown}{EMF}$. Quais são os comprimentos desses arcos? 9,42 cm e 28,26 cm

18. Em uma circunferência de 2,5 cm de raio, os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são perpendiculares. Qual é o comprimento do arco $\overset{\frown}{BDA}$? 3,925 cm



- Neste texto, a expressão "comprimento do arco" significa "medida do comprimento do arco".

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

Três moedas de R$ 1,00, em tamanho real, estão colocadas uma ao lado da outra.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

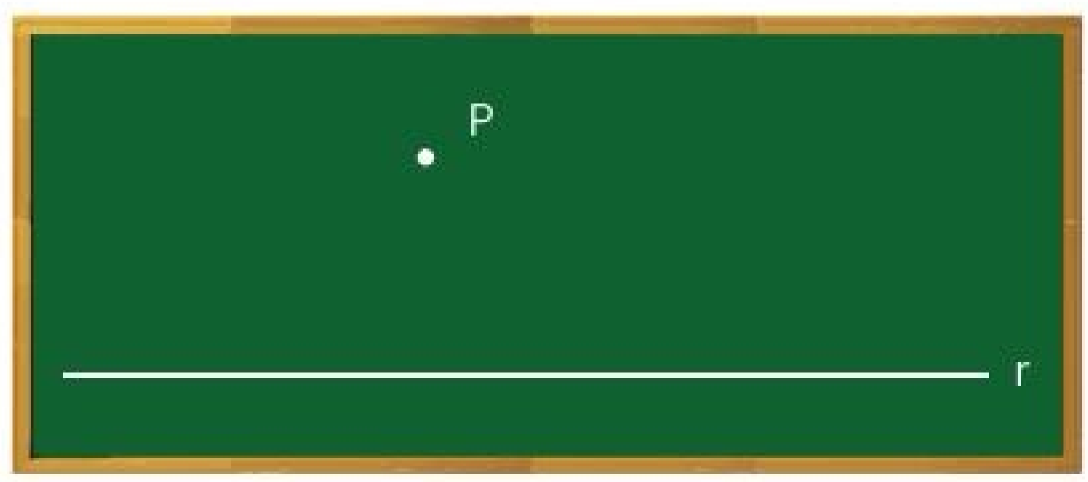
- O comprimento **c** corresponde a quantos raios da moeda? 6 raios.
- Esse mesmo comprimento corresponde a quantos diâmetros da moeda? 3 diâmetros.
- Com o auxílio de uma régua e uma moeda de R$ 1,00, verifiquem quantos centímetros mede, aproximadamente, cada diâmetro dessa moeda. 2,4 cm
- Qual é o valor aproximado de **c**? 7,2 cm
- Qual é o valor aproximado da medida do comprimento de circunferência da moeda de R$ 1,00? Resposta possível: 7,536 cm.
- Qual é o quociente aproximado entre o valor encontrado para a medida do comprimento da circunferência da moeda e a medida de seu diâmetro? Resposta possível: 3,14.
- Ao analisar todas as respostas encontradas, como se pode relacionar o comprimento da circunferência de uma moeda com os diâmetros das três moedas colocadas uma ao lado da outra? A medida do comprimento da circunferência de uma moeda é bem próxima do triplo da medida de seu diâmetro.

2 Construções geométricas

Perpendicular a uma reta por um ponto não pertencente a ela

Para refletir e responder

Na figura abaixo temos uma reta r e um ponto P fora dela.



Resposta possível: Usando um esquadro, de modo que um dos lados que formam o ângulo reto do esquadro fique alinhado com **r** e o outro lado passe por **A**.

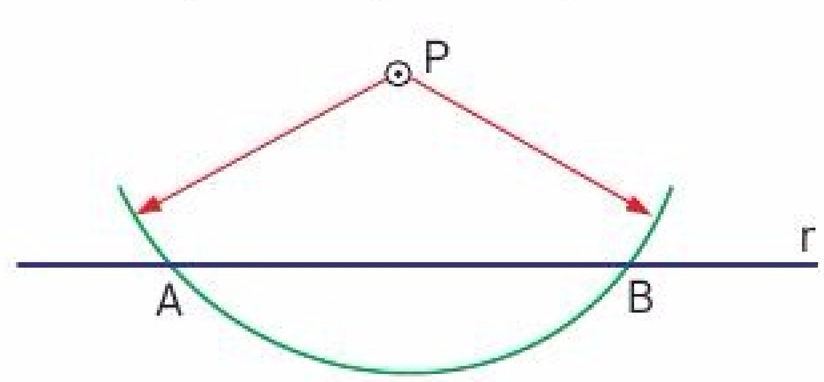
- Dê sua opinião: Como se pode traçar uma reta **p** perpendicular a **r** e que passa por **P**?

O conhecimento que temos sobre as figuras geométricas e suas propriedades permitem realizar o que chamamos de **construções geométricas**, ou seja, desenhos precisos feitos com a utilização de instrumentos como régua e compasso.

Vamos explorar algumas dessas construções, embora nem sempre os procedimentos desenvolvidos possam ser justificados neste momento, o que será feito mais adiante.

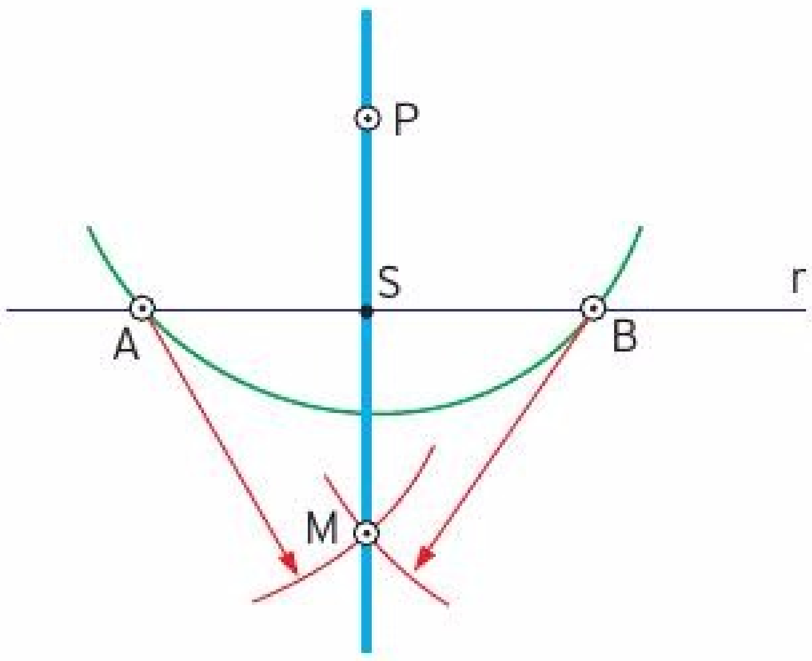
Observe uma maneira de traçar uma perpendicular a uma reta, por um ponto que não pertence a ela.

- Inicia-se abrindo o compasso de modo que, ao traçar um arco, com a ponta-seca em P, ele cruze a reta r em dois pontos: A e B; como $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são raios, eles estão à mesma distância do ponto P. Obtém-se, assim, um segmento de reta $\overline{AB}$ na reta r.



Com o compasso em uma abertura qualquer, desde que seja maior que a metade da medida do segmento de reta $\overline{AB}$, são traçados dois arcos: um com a ponta-seca do compasso em **A** e outro com a ponta-seca em **B**. Chamamos o ponto comum aos dois arcos de **M**.

É possível justificar que os triângulos ASP e BSP são congruentes. Por essa razão os ângulos $A\hat{S}P$ e $B\hat{S}P$ têm a mesma medida, e como a soma dessas medidas é igual a 180º, cada um deles tem 90º.



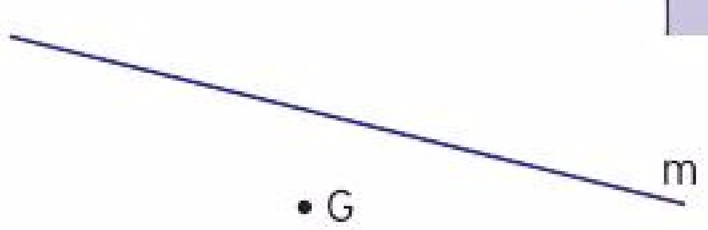
Os ângulos $A\hat{S}P$ e $B\hat{S}P$ são ângulos retos. A reta $\overleftrightarrow{PM}$ é perpendicular a r.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

19. Carmem gostou muito da história de Pitágoras. Ao fazer dobras com uma folha, ela fez uma descoberta: conseguiu traçar retas perpendiculares sem esquadros, réguas e compasso. Providencie uma folha de papel e descubra quais foram as dobras que ela fez. Veja resposta no final do livro.

20. Copie o desenho ao lado e, em seguida, trace uma reta perpendicular a **m** e que passe pelo ponto **G**. Veja resposta no final do livro.



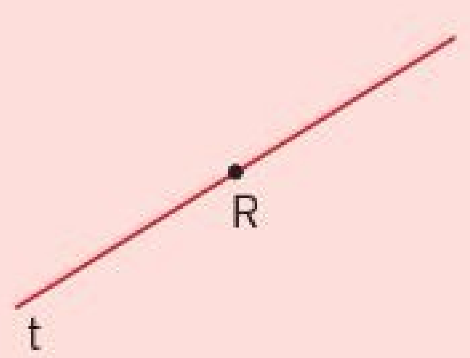
Desafio

FAÇA NO CADERNO

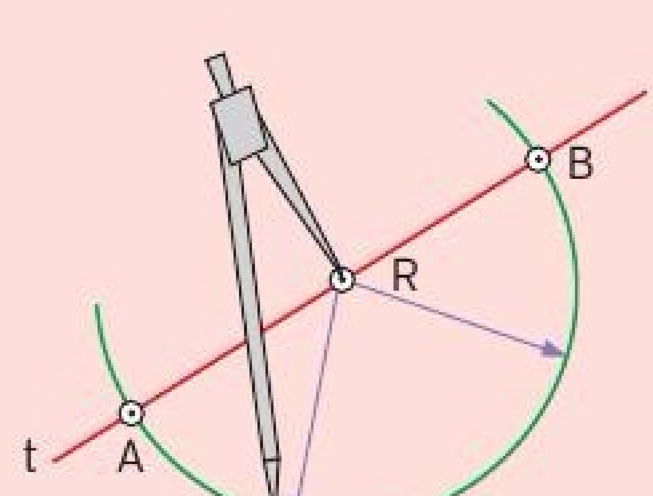
Retas perpendiculares

As construções geométricas abordadas poderão servir de suporte para a redescoberta das propriedades das figuras geométricas.

Copie o desenho ao lado em seu caderno.



- Como construir, com régua e compasso, uma reta perpendicular a **t** e que passe por **R**? Resposta pessoal.
- Agora siga as etapas apresentadas a seguir e obtenha uma construção geométrica.
  - ✓ Com um compasso em uma abertura qualquer, coloque a ponta-seca em **R** e marque dois pontos na reta **t**: **A** e **B**.
  - ✓ Ajuste o compasso em uma abertura maior que a metade de $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em **A**, trace um arco. Faça o mesmo em relação ao ponto **B**. Chame de **P** o ponto comum aos arcos.



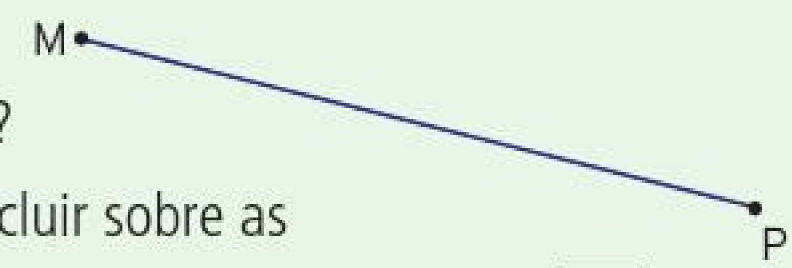
- Qual é a posição de $\overleftrightarrow{PR}$ em relação à reta **t**? $\overleftrightarrow{PR}$ é perpendicular à reta **t**.
- Compare os segmentos de reta $\overline{AR}$ e $\overline{RB}$ usando o compasso. O que é possível verificar? $\overline{AR}$ e $\overline{RB}$ têm medidas iguais.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, desenhem, investiguem e respondam.

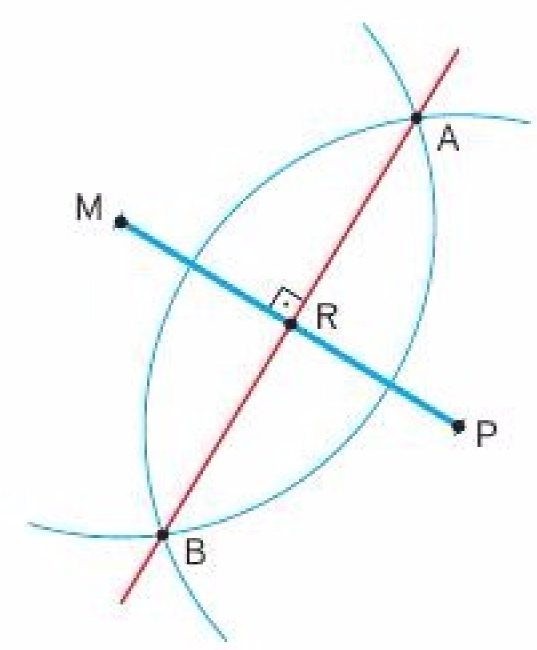
Desenhe um segmento de reta **MP** como o da figura. Com o compasso em uma abertura maior que a metade da medida de $\overline{MP}$, trace dois arcos: um com centro em **M** e outro com centro em **P**. Chame os pontos comuns a esses arcos de **A** e **B**.



- Trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e observe a figura obtida. Nela, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{MP}$ formam quatro ângulos. Qual é a medida de cada um desses ângulos? 90°
- Em relação a esses ângulos, como nos referimos a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{MP}$?
  $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{MP}$ são perpendiculares.
- Chame de **R** o ponto comum a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{MP}$. O que se pode concluir sobre as medidas dos segmentos de reta $\overline{MR}$ e $\overline{PR}$? Como é chamado o ponto **R** em relação a $\overline{MP}$?
  São iguais. **R** é o ponto médio de $\overline{MP}$.

Mediatriz de um segmento de reta

Pedro e Mariana exploram novamente a atividade desenvolvida acima. Leia o que eles dizem.



O ponto **R** que pertence ao segmento de reta $\overline{MP}$ divide-o em dois segmentos de reta de medidas iguais. **R** é o **ponto médio** de $\overline{MP}$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é a **mediatriz** de $\overline{MP}$.

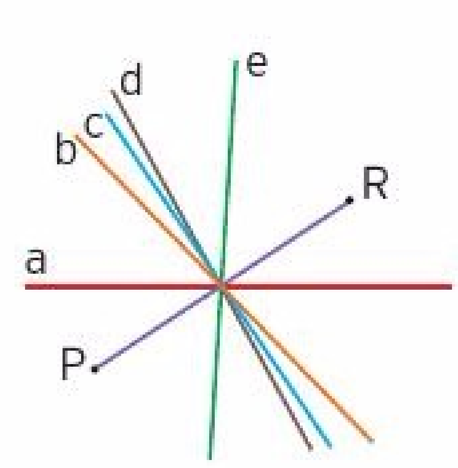
Mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular à reta suporte desse segmento e que contém seu ponto médio.

Incentive os alunos a observar, explorar o desenho e levantar hipóteses, além de conferir se elas são verdadeiras ou falsas. Atividades desse tipo poderão auxiliar na elaboração do raciocínio lógico-dedutivo. Veja a atividade 24.

Fazer e aprender

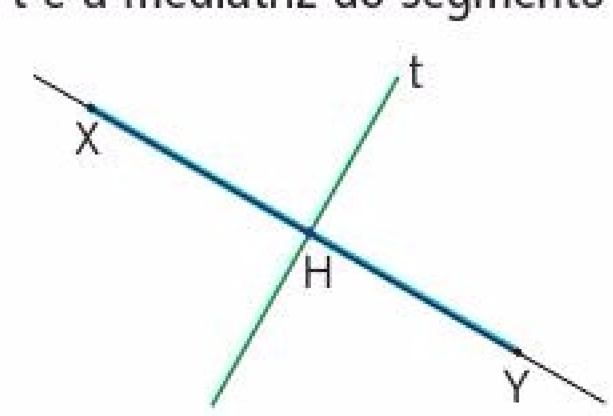
FAÇA NO CADERNO

21. Nesta figura, uma das retas é a mediatriz do segmento de reta $\overline{PR}$. Identifique-a. Reta c.



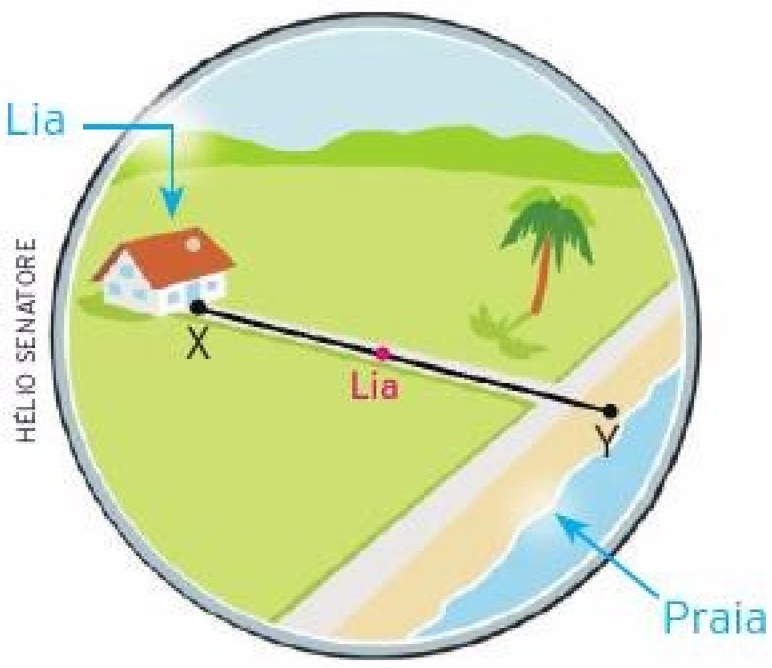
22. Nesta figura, a reta t é a mediatriz do segmento de reta XY. Como denominamos o ponto H em relação a $\overline{XY}$?

O ponto **H** é o ponto médio de $\overline{XY}$.

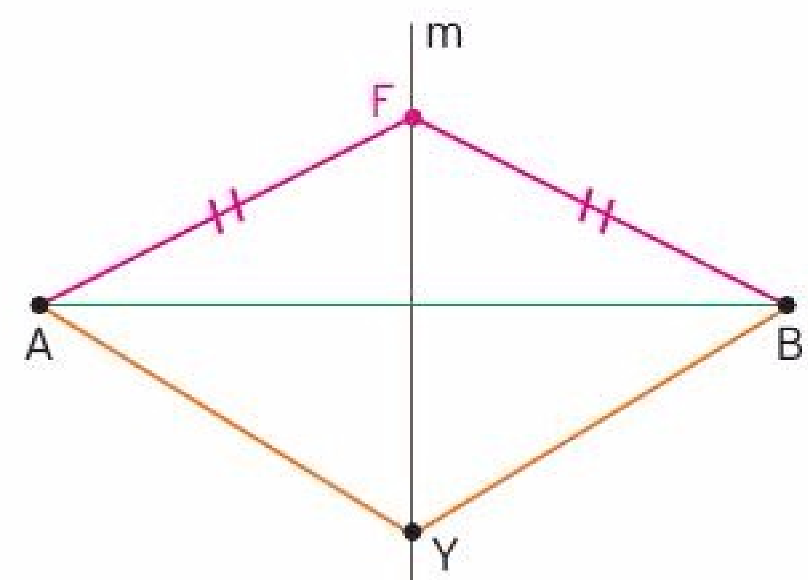


23. Lia e Téo são amigos. Téo convidou Lia para uma partida de vôlei de praia. Eles combinaram de se encontrar na metade do caminho de Lia até a praia, isto é, no ponto médio do segmento $\overline{XY}$.

Transcreva o segmento $\overline{XY}$ para seu caderno e determine o ponto em que se encontra Lia usando régua e compasso.



24. Na figura a seguir, a reta m é a mediatriz de $\overline{AB}$ e o ponto **Y** pertence a essa mediatriz.



a) Use uma régua e determine as medidas dos segmentos de reta $\overline{YA}$ e $\overline{YB}$. Qual é a relação entre as medidas de $\overline{YA}$ e $\overline{YB}$?
3 cm; 3 cm. As medidas são iguais.

b) Em relação aos lados, como classificamos o triângulo AYB? Triângulo isósceles.

c) Copie essa figura, escolha outro ponto que pertença à mediatriz de $\overline{AB}$, que não seja o ponto médio desse segmento, e chame-o de **F**. Qual é a relação entre as medidas dos segmentos de reta $\overline{FA}$ e $\overline{FB}$?
Resposta possível: As medidas são iguais.

d) Em relação aos lados, como se classificaria o triângulo ABF? Triângulo isósceles.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Uma surpresa para você

Rute estava concentrada em alguns desenhos: pegava a régua, largava a régua, pegava o compasso...

Para acabar com a curiosidade, faça como Rute:

- Desenhe em uma folha de papel três pontos não colineares.
- Trace as mediatrizes dos segmentos formados pelos pontos que você desenhou. O que ocorre com essas mediatrizes? Elas têm um ponto comum.
- Agora, ajuste o compasso com a abertura do ponto de encontro dessas mediatrizes a um dos pontos que você desenhou.
- Coloque a ponta-seca do compasso no ponto de encontro das mediatrizes e gire o compasso. Qual foi a figura que você obteve? Obtém-se uma circunferência que passa pelos pontos **A**, **B** e **C**.

Pontos não colineares não pertencem à mesma reta.

Leitura

Caso os alunos tenham interesse em conhecer um pouco da história da Matemática, eles poderão explorar esta seção como lição de casa. Organize-se com antecedência e no dia da aula proponha um painel de discussões e síntese.

π: um número diferente...

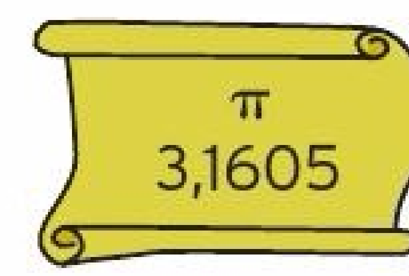
Segundo alguns historiadores, π é o número mais famoso da história universal.

Ele já era mencionado no *Papiro de Rhind*, um documento egípcio escrito por volta do ano 1650 a.C.

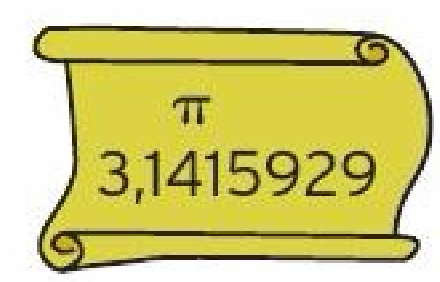
Nele, considerou-se π igual a $\frac{256}{81}$, ou aproximadamente **3,1605**, um valor um pouco diferente do que usamos atualmente.

Tsu Chung-Chih foi um matemático chinês que viveu por volta de 470 d.C. Em seu trabalho, ele usou $\frac{355}{113}$, que é aproximadamente igual a **3,1415929**. Esse é um valor bem mais próximo do que usamos hoje para π.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES




THINKSTOCK/GETTY IMAGES



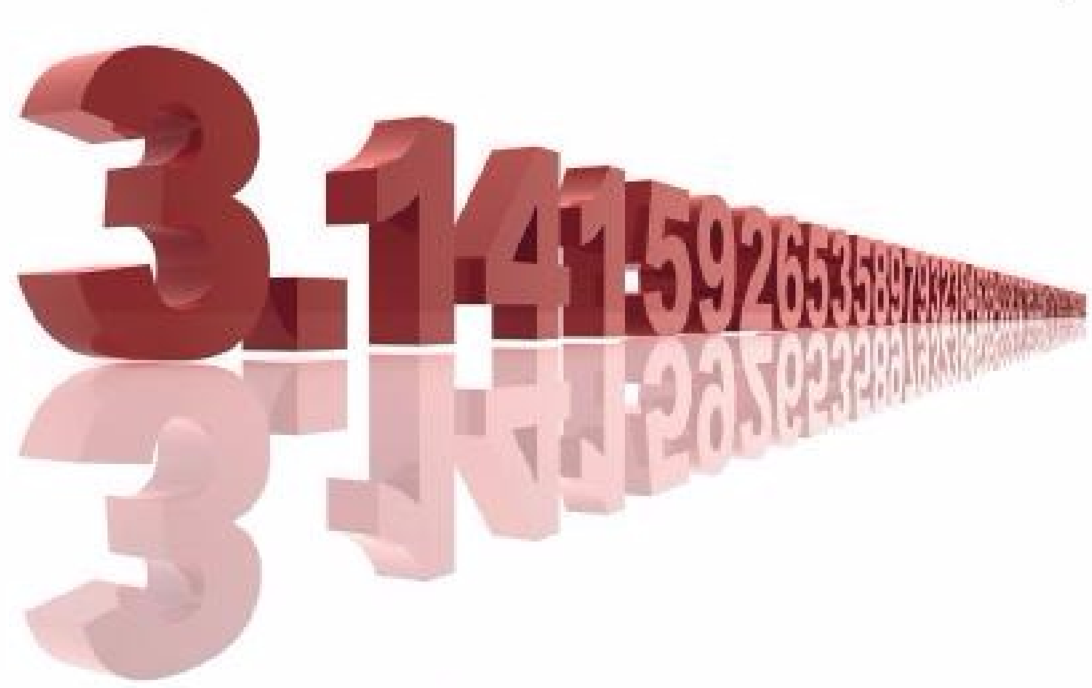
ILUSTRAÇÕES: FRANCISCO VILACHÃ

Conheça o valor aproximado de π, com mais de 200 algarismos nas ordens decimais. Observe que, até o último algarismo apresentado, esse número não é uma dízima periódica.

$\pi \cong$ 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279
502 884 197 169 399 375 105 820 974 944
592 307 816 406 286 208 998 628 034 825
342 117 067 982 148 086 513 282 306 647
093 844 609 550 582 231 725 359 408 128
481 117 450 284 102 701 938 521 105 559
644 622 948 954 930 381 964 428 81

David e Gregory Chudnovsky, da Universidade de Columbia, Nova York (EUA), chegaram a calcular um valor de π com **1 011 196 691** algarismos nas ordens decimais, usando um computador.

Para escrevê-los em folhas comuns, seriam necessárias cerca de **260 000** páginas!


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

E, ainda assim, não apareceu um grupo de algarismos que se repetisse periodicamente.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Pensei em um número inteiro e multipliquei-o por 4. Do resultado subtraí 30 e obtive -210. Que número é esse? -45

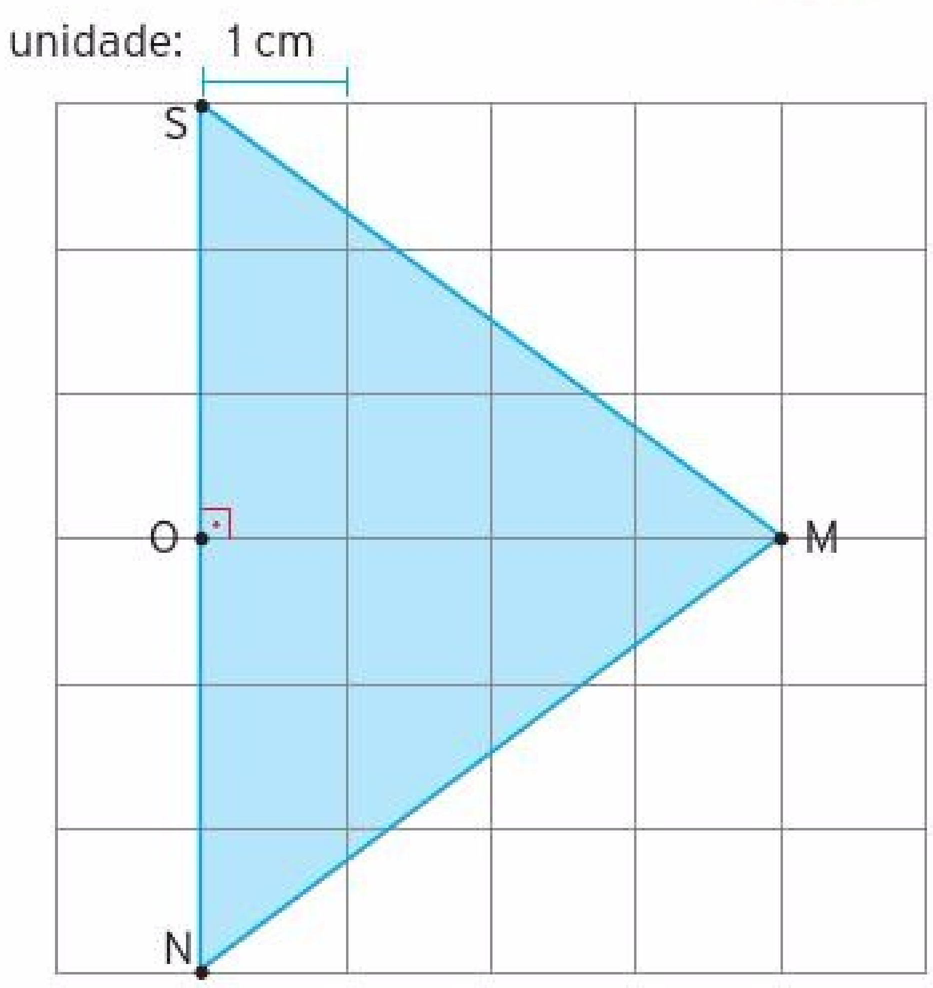
2. Desenhe em seu caderno um triângulo retângulo em que os catetos medem 5 cm e 7 cm.

a) Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo? $\sqrt{74}$ cm

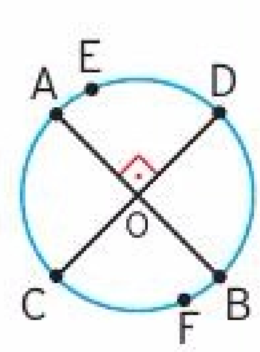
b) A medida dessa hipotenusa é maior que 8 cm? É maior que 9 cm? É maior que 8,4 cm? Sim; não; sim.

3. Sobre uma folha de papel quadriculado, Pedro desenhou este triângulo SNM.

Calcule o perímetro desse triângulo. 16 cm



4. Nesta circunferência, os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e medem 16 mm.



a) Quais são as medidas dos ângulos centrais $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$? 90° e 90°

b) Quais são as medidas, em milímetros, dos arcos $\widehat{DEA}$ e $\widehat{CFB}$? 12,56 mm

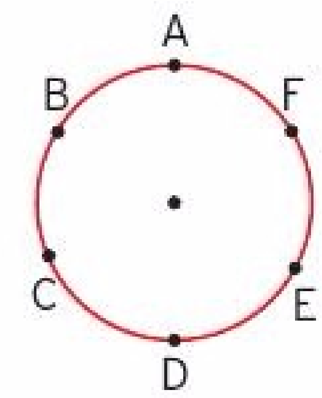
5. Qual é a razão entre o diâmetro de uma circunferência e o seu raio, nessa ordem? 2 : 1

6. Uma circunferência tem 9 cm de diâmetro. Qual é o perímetro aproximado dela? 28,26 cm

7. $\sqrt{125}$ é um número: a

a) real.
b) racional.
c) inteiro.
d) natural.

8. Os arcos $\widehat{ABC}$, $\widehat{CDE}$ e $\widehat{EFA}$ têm o mesmo comprimento. Se o raio da circunferência representada ao lado mede 0,5 m, qual é o comprimento, em metros, de cada um dos arcos? 1,05 m



9. (Prova Brasil) Exatamente no centro de uma mesa redonda com 1 m de raio, foi colocado um prato de 30 cm de diâmetro, com doces e salgados para uma festa de fim de ano. Qual é a distância entre a borda desse prato e a borda da mesa? b

a) 115 cm
b) 85 cm
c) 70 cm
d) 20 cm

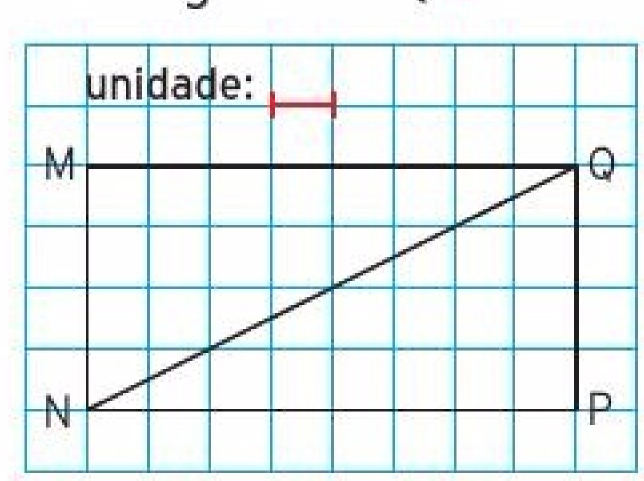
10. O comprimento de uma semicircunferência com raio igual a 1 dm é: c

a) $\frac{\pi}{4}$ dm
b) $\frac{\pi}{2}$ dm
c) π dm
d) 2π dm

11. O comprimento de um arco correspondente a $\frac{1}{12}$ de uma circunferência com raio igual a 10 cm é: d

a) $\frac{\pi}{12}$ cm
b) $\frac{5\pi}{12}$ cm
c) $\frac{5\pi}{6}$ cm
d) $\frac{5\pi}{3}$ cm

12. Observe o retângulo MNPQ: d

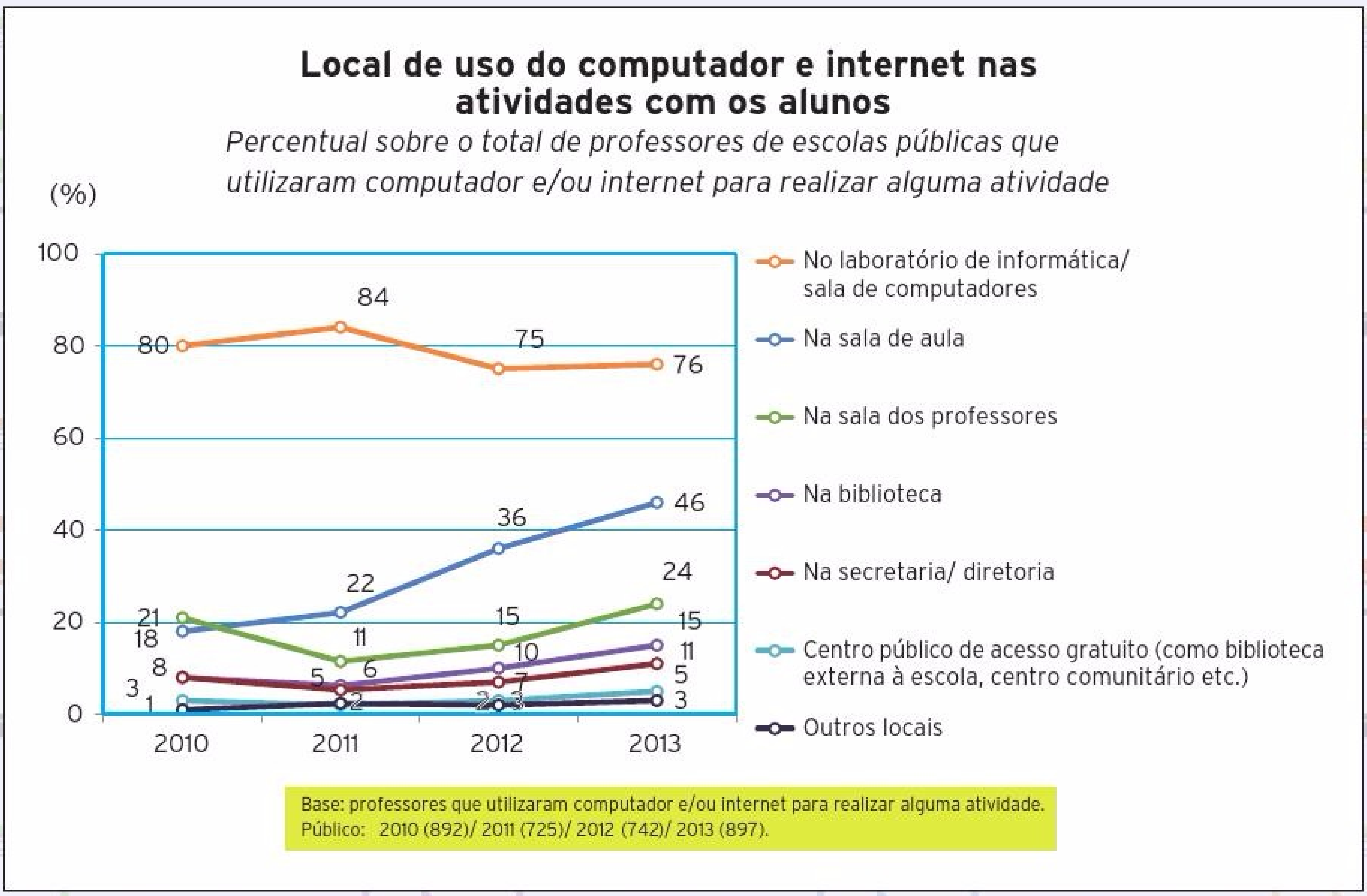


A diagonal $\overline{NQ}$ mede:

a) 12 u
b) 80 u
c) $\sqrt{12}$ u
d) $\sqrt{80}$ u

UNIDADE 3 Estatística e probabilidade

Os gráficos apresentados nesta abertura dão informações sobre a evolução da oferta de computadores nas escolas brasileiras entre 2008 e 2013. Nesta unidade ampliaremos os conhecimentos sobre Estatística, construindo e analisando gráficos de linha, explorando o conceito de frequência e estudando noções de probabilidade.

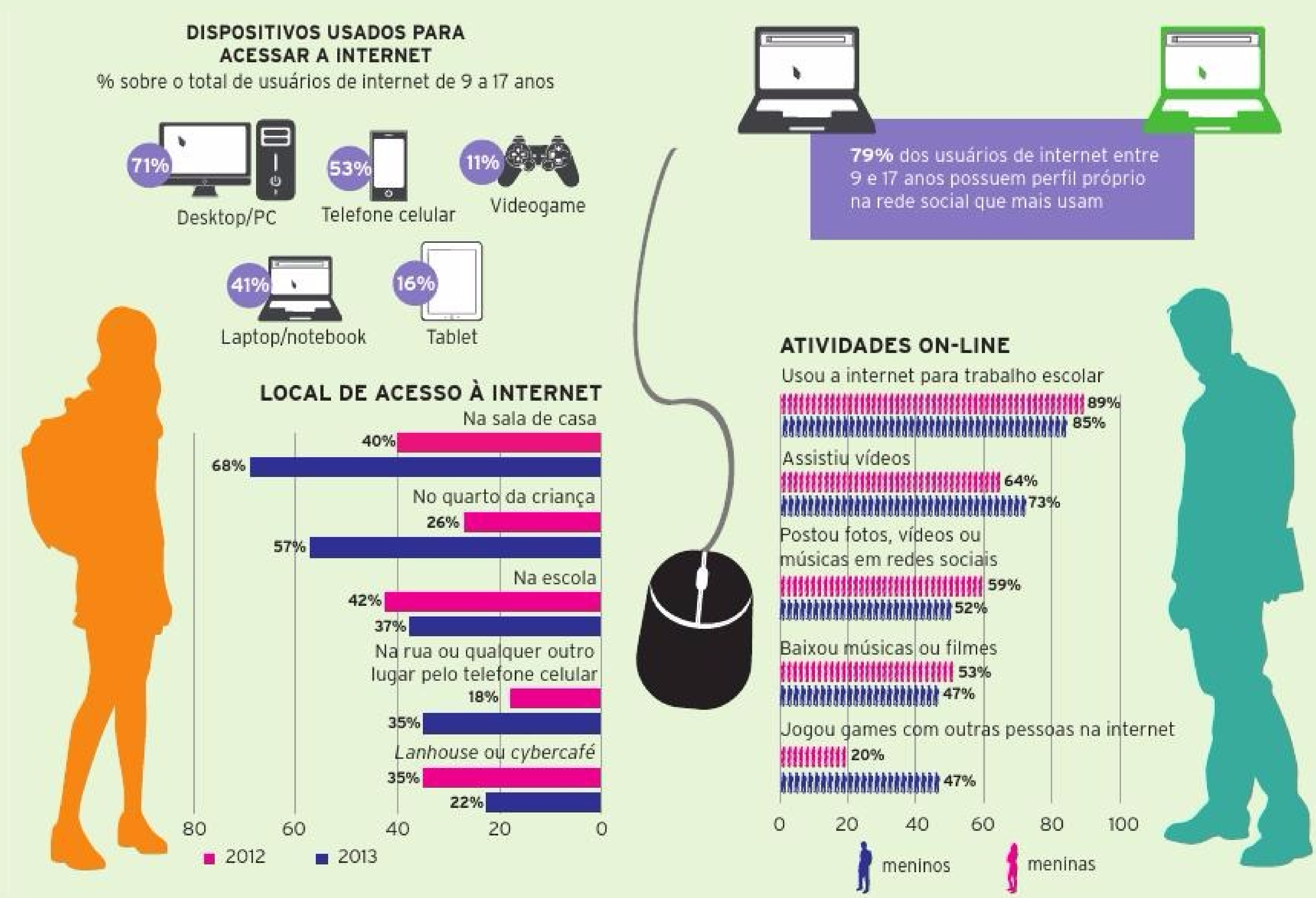


Fonte: Cetic.br. Pesquisa TIC Educação 2013 – Pesquisa sobre o Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Escolas Brasileiras, p. 9. Disponível em: <http://cetic.br/media/analises/tic-educacao-apresentacao-2013.pdf>. Acesso em: 8 maio 2015.

Nesta unidade...

1. Gráfico de linha
2. Estatística
3. Probabilidade

A Estatística tem grande importância não só nos meios de comunicação, mas também no campo das pesquisas científicas e sociais e no mundo dos negócios. Por causa da ampla aplicação desse assunto, vamos explorar os conceitos relacionados a ele.



Fonte: TIC KIDS ON-LINE BRASIL 2013. Pesquisa sobre o uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil, p. 1. Disponível em: <http://www.cetic.br/media/analises/Infografico_kids_online_2013.pdf>. Acesso em: 8 maio 2015.

O que você já sabe?

- Dê sua opinião sobre a importância da Estatística atualmente. Ela está presente em quase todos os meios de comunicação. Há outras respostas possíveis.
- O tema da pesquisa apresentada na página 44 é o uso de internet por professores e alunos. E você, usa a internet? Com que frequência? Resposta pessoal.
- O que você pensa sobre a internet? Resposta pessoal.
- Que tipo de gráfico foi ilustrado na página 44? Gráfico de linha.

Se desejar ampliar este tema, utilize-o em pesquisas sobre assuntos de interesse dos alunos, da escola, da comunidade e da família. É possível realizar um trabalho integrado com outras disciplinas.

1 Gráfico de linha

Arredondamento e gráficos

Muitas vezes, construímos tabelas e gráficos ou efetuamos cálculos com dados aproximados obtidos por **arredondamento** dos números envolvidos.

Existem algumas regras para arredondar números.

Uma regra utilizada para arredondar números para o inteiro mais próximo é:

- Se o algarismo da ordem dos décimos for 0, 1, 2, 3 ou 4, mantemos inalterado o algarismo das unidades simples.
- Se o algarismo da ordem dos décimos for 5, 6, 7, 8 ou 9, acrescentamos uma unidade na ordem das unidades simples.

Exemplo:

Em uma pesquisa sobre diversões preferidas, foram entrevistadas pessoas de um grupo.

- Dados obtidos na pesquisa realizada:

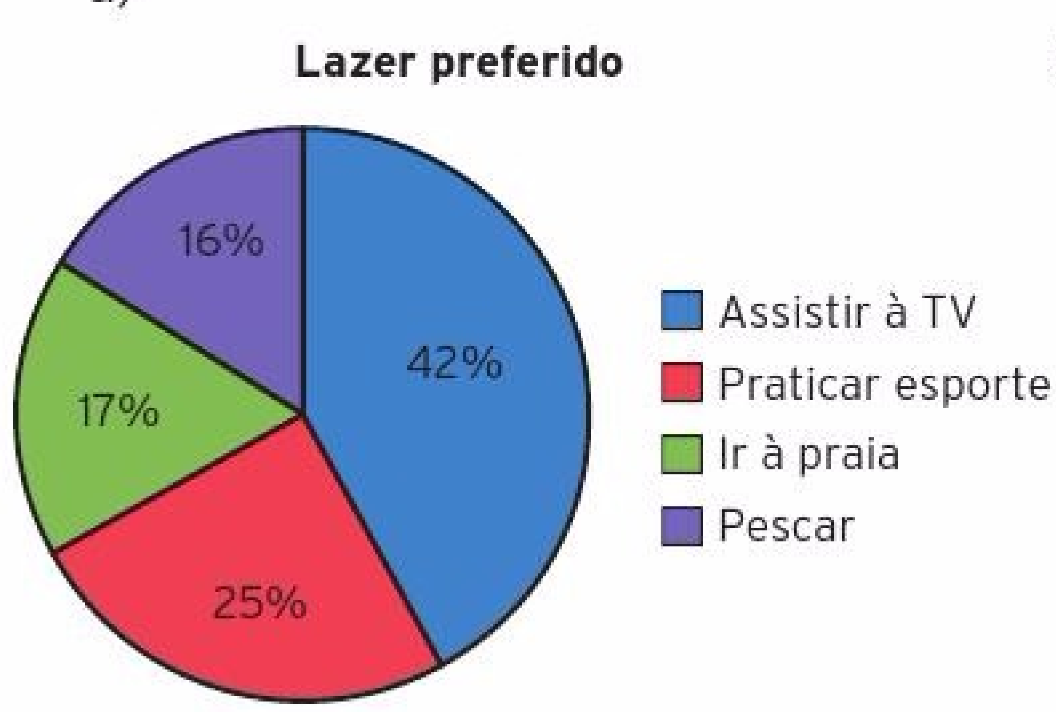
Lazer preferido (em %)	
Praticar esporte	25,4
Ir à praia	17,4
Assistir à TV	41,5
Pescar	15,7

- Dados arredondados para o inteiro mais próximo e colocados em ordem decrescente:

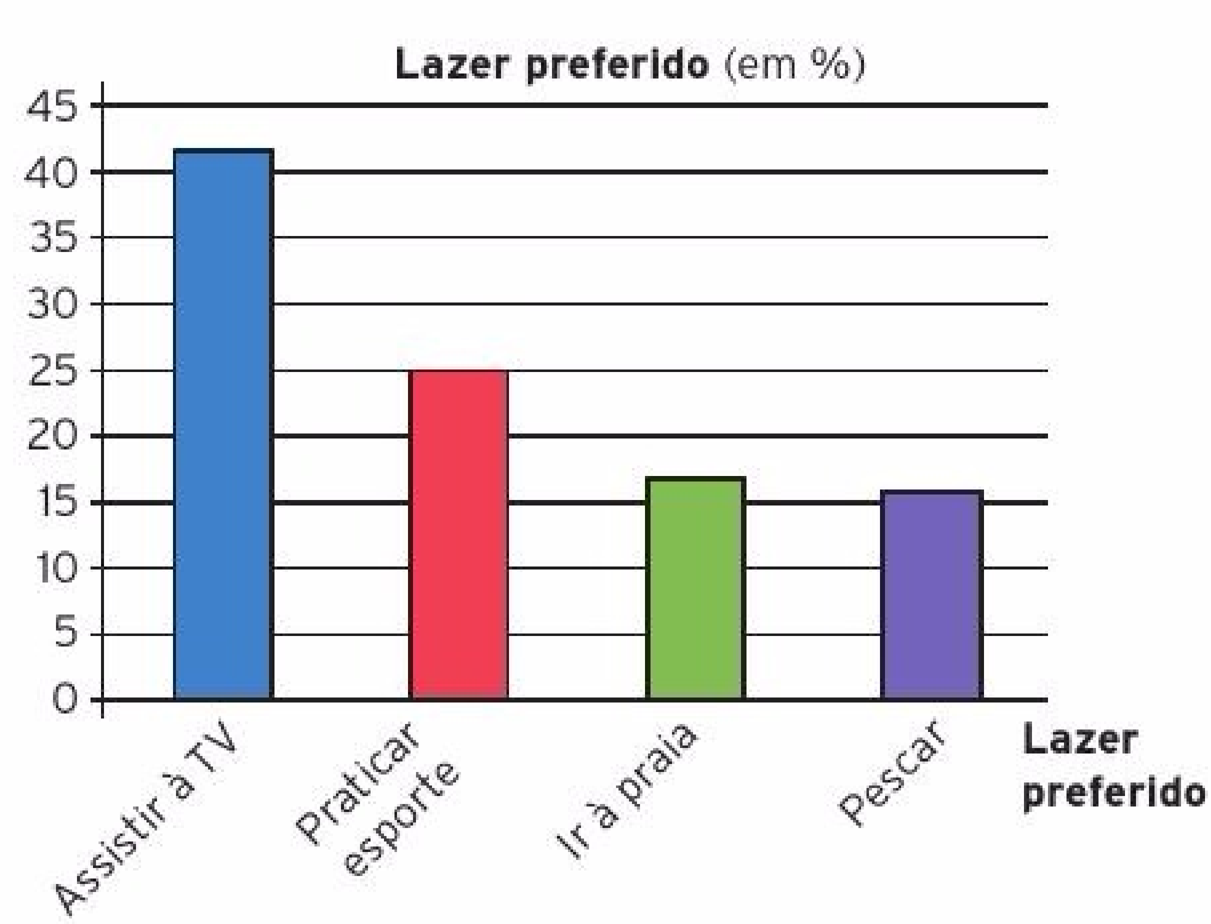
Lazer preferido (em %)	
Assistir à TV	42
Praticar esporte	25
Ir à praia	17
Pescar	16

Representação dos dados acima em dois tipos de gráficos:

a)



b)



No arredondamento de números para décimos, siga esta regra, parecida com a que foi apresentada para o arredondamento para inteiros:

- Se o algarismo dos centésimos for 0, 1, 2, 3 ou 4, mantenha inalterado o algarismo dos décimos.
- Se o algarismo dos centésimos for 5, 6, 7, 8 ou 9, acrescente uma unidade ao algarismo dos décimos.

Exemplos:

a) $50{,}01 \cong 50{,}0$ b) $50{,}16 \cong 50{,}2$ c) $30{,}05 \cong 30{,}1$

Fazer e aprender

1. Se o valor arredondado de um número com duas casas decimais para o décimo mais próximo fosse 7,3, quais seriam os possíveis valores desse número? 7,25; 7,26; 7,27; 7,28; 7,29; 7,31; 7,32; 7,33; 7,34

2. O comprimento de uma mesa retangular é 1,80 m, e sua largura, 1 m. Qual é a medida aproximada de uma diagonal dessa mesa, com uma casa decimal? Utilize uma calculadora e arredonde os resultados para os décimos mais próximos. 2,1 m

3. A Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (CPLP) busca maior integração entre os países que adotam esse idioma. Consulte as informações sobre os membros dessa comunidade na tabela a seguir e responda às questões:

O mundo em português

País	Área (em km²)	População (em milhões)	Capital
Angola	1 246 700	22	Luanda
Brasil	8 515 767	202,03	Brasília
Cabo Verde	4 030	0,50	Praia
Guiné-Bissau	36 130	1,74	Bissau
Guiné Equatorial	28 050	0,78	Malobo
Moçambique	799 380	26,47	Maputo
Portugal	92 090	10,61	Lisboa
São Tomé e Príncipe	960	0,19	São Tomé
Timor Leste	14 870	1,15	Dili

Fonte: *IBGE Países, 2015. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/paisesat/main_frameset.php>. Acesso em: 8 maio 2015.*

a) Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Guiné Equatorial, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor Leste.

a) Que países são membros da CPLP?

b) Construa uma tabela relacionando, em ordem crescente, as populações desses países, expressas em milhões de habitantes. Arredonde os dados para o inteiro mais próximo.
Veja resposta no final do livro.

c) Represente os dados da tabela construída no item **b** em um gráfico de colunas.
Veja resposta no final do livro.

Gráficos de linha

Procure subsidiar os alunos com o mínimo de conhecimentos para que eles possam fazer uma leitura mais crítica dos artigos de jornais e revistas. Algumas vezes esses artigos podem utilizar estatísticas para manipular os dados conforme interesses particulares.

Em algumas pesquisas, os **gráficos de linha** podem proporcionar uma comunicação mais direta e rápida acerca das tendências de aumento ou redução dos valores numéricos do conjunto de informações pesquisadas.

Vamos aprender a construir e analisar gráficos desse tipo, explorando um exemplo apresentado na página a seguir.

Exemplo: Este tema contribui para estabelecer conexões entre a Matemática e outros componentes curriculares. É possível organizar pesquisas sobre a Mata Atlântica e a importância de sua recuperação.

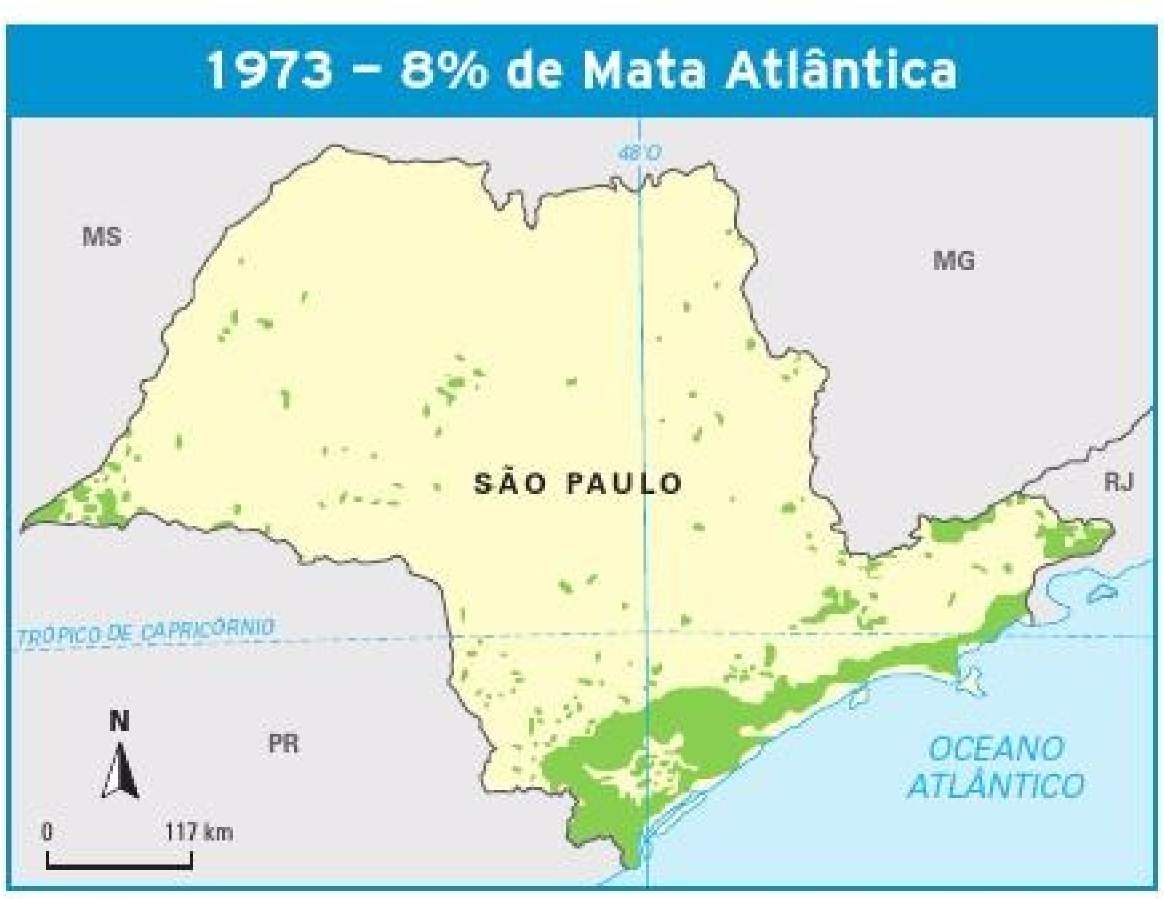
Dados sobre o desmatamento da Mata Atlântica no estado de São Paulo de 1500 a 2000.

A Mata Atlântica no estado de São Paulo

ILUSTRAÇÕES: SELMA CAPARROZ

O estado de São Paulo era uma mancha contínua de Mata Atlântica em 1500. Cerca de 80% do território era de floresta.

Em 1920, mais da metade da Mata Atlântica havia sido destruída. Restavam apenas 45% de florestas nativas.



Em 1973, o total de Mata Atlântica equivalia a 8% da área do estado.

Em 2000, a Mata Atlântica ficou reduzida a 3% do seu território.

Fonte: A reserva da biosfera da Mata Atlântica no estado de São Paulo. Disponível em: <www.rbma.org.br/rbma/pdf/caderno_05.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2014.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A Mata Atlântica no estado de São Paulo

Ano	Área com Mata Atlântica (%)
1500	80
1920	45
1973	8
2000	3

Construímos um gráfico de linha seguindo alguns passos:

- No eixo das abscissas, representamos os valores de um dos dados. Nesse caso, o tempo em anos. Escolhemos uma unidade para esse eixo, por exemplo, 2 cm para cada 100 anos. Nele marcamos intervalos de 100 anos com segmentos de reta de 2 cm: as extremidades correspondem ao fim e ao início de cada século.
- No eixo das ordenadas, representamos os percentuais da área do estado de São Paulo coberto por Mata Atlântica em função do tempo. Observamos qual é o maior valor a ser marcado: nessa situação é 80%. O ponto do gráfico que representa esse valor será seu ponto mais alto. Nesse eixo, o segmento de reta com extremidades na origem do sistema e no ponto que corresponde a 80% é dividido proporcionalmente para a marcação dos demais valores. No gráfico a seguir, 1 cm representa 10%, ou seja, 10 cm representam 100%.

  80% — foi marcado a 8 cm do eixo das abscissas.

  45% — foi marcado a 4,5 cm do eixo das abscissas.

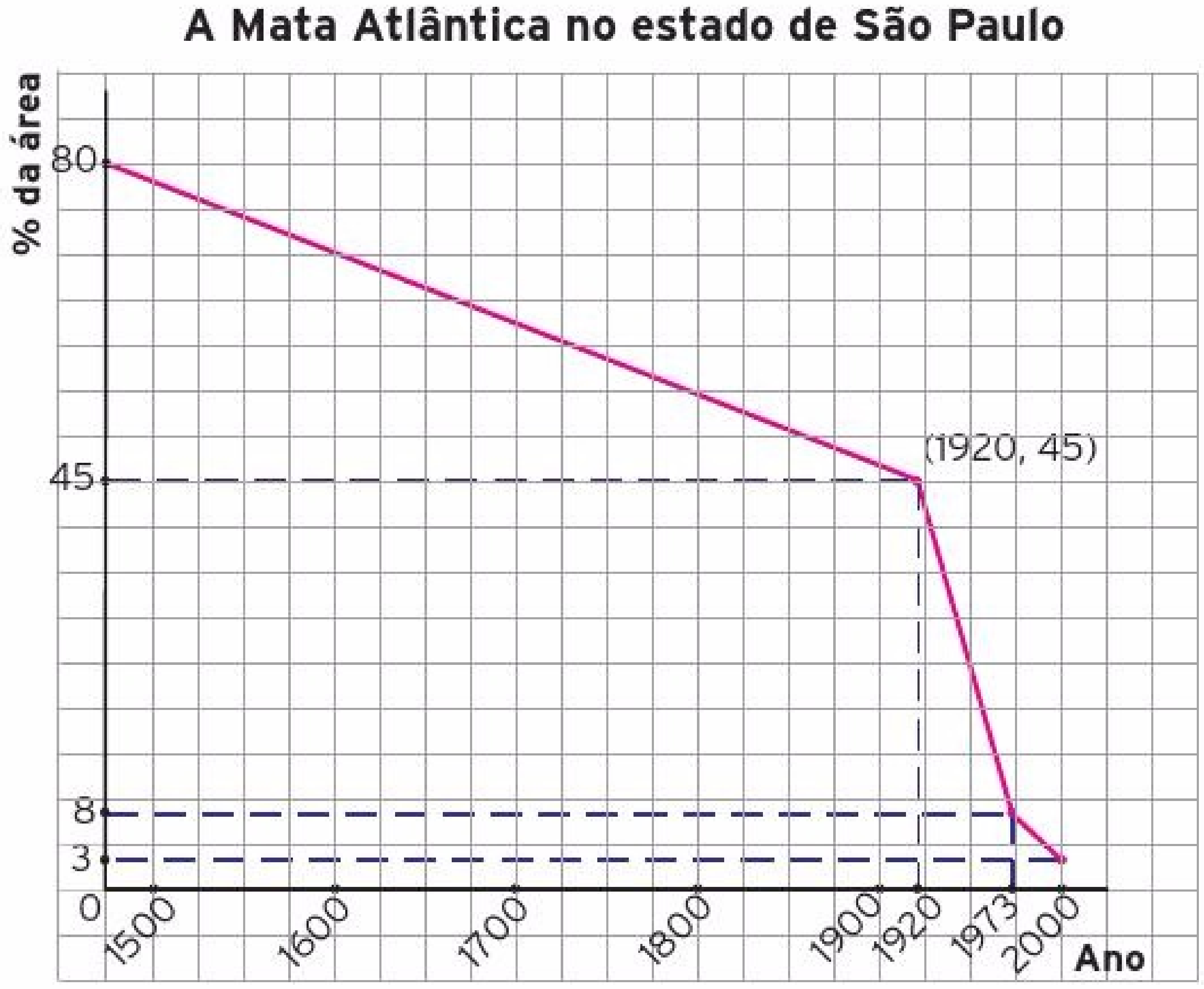
  8% — foi marcado a 0,8 cm do eixo das abscissas.

  3% — foi marcado a 0,3 cm do eixo das abscissas.

- Em seguida, marcamos os pontos do gráfico. Eles são determinados por pares ordenados: o ano, no eixo das abscissas, e o percentual de área correspondente a ele, no eixo das ordenadas. Uma vez determinados todos os pontos, basta ligá-los, ordenadamente, com segmentos de reta para obter o gráfico de linha que representa os dados pesquisados.
- Também é preciso colocar um título que explique de que trata o gráfico, nomear os eixos e indicar a fonte na qual se basearam as informações.

De modo geral, os gráficos de linha são utilizados para nos dar uma ideia do comportamento de um fenômeno observado ao longo de um período.

A Mata Atlântica no estado de São Paulo



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

4. A água de rios e lagos tem papel fundamental na vida das pessoas, animais e plantas. A tabela (A) traz dados sobre a área das superfícies ocupadas por algumas das bacias hidrográficas brasileiras. Observe.

(A) **Bacias hidrográficas brasileiras**

Bacia	Área (km^2)
Amazônia	3 984 467
Tocantins	803 250
São Francisco	631 133
Paraná	891 309
Outras	2 201 769

:100 000

:100 000

39,84467 ≅ 40

(B) **Bacias hidrográficas brasileiras**

Bacia	Área (100 mil km^2)		%
Amazônia	39,84467	40	
Tocantins	8,03250	8	
São Francisco			
Paraná			
Outras			
Total			**100**

Fonte: Atlas Geografico escolar. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

a) Construa uma tabela como a (B) e complete-a, arredondando os dados para a centena de milhar mais próxima. Veja resposta no final do livro.

b) Represente os dados em um gráfico de setores.
Se julgar necessário, retome com os alunos o estudo sobre gráfico de setores realizado no volume do 7º ano.

5. Esta tabela contém dados sobre a taxa de fecundidade no Brasil no período de 2000 a 2013.

Taxa de fecundidade total – Brasil – 2000 a 2013

Ano	Número de filhos	Ano	Número de filhos
2000	2,39	2007	1,99
2001	2,32	2008	1,95
2002	2,26	2009	1,91
2003	2,20	2010	1,87
2004	2,14	2011	1,83
2005	2,09	2012	1,80
2006	2,04	2013	1,77

Fonte: IBGE, Projeção da População do Brasil – 2013. Disponível em: <http://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-de-fecundidade-total>. Acesso em: 26 nov. 2014.

a) Construa uma nova tabela arredondando os números de filhos para os décimos mais próximos. Veja resposta no final do livro.

b) Represente os dados da tabela em um gráfico de linha. Veja resposta no final do livro.

c) O que se pode perceber sobre a taxa de fecundidade no Brasil de 2000 a 2013? Explique sua resposta. A taxa de fecundidade diminuiu ano a ano.

d) Que fatores podem ter provocado a diminuição da taxa de fecundidade? Veja a seguir alguns possíveis fatores para você conversar com os colegas e o professor a respeito. Pense em outros e anote em seu caderno. Este tema propicia formulação de questões relevantes relativas a gravidez na adolescência. Incentive reflexão e discussão em torno desse tema e avalie a possibilidade de desenvolver a interdisciplinaridade entre a Matemática e outros componentes curriculares.

- A adoção de métodos anticoncepcionais mais eficientes.
- A diminuição do número de casamentos.
- A entrada da mulher no mercado de trabalho.
- O aumento do número de divórcios.

Resposta pessoal.

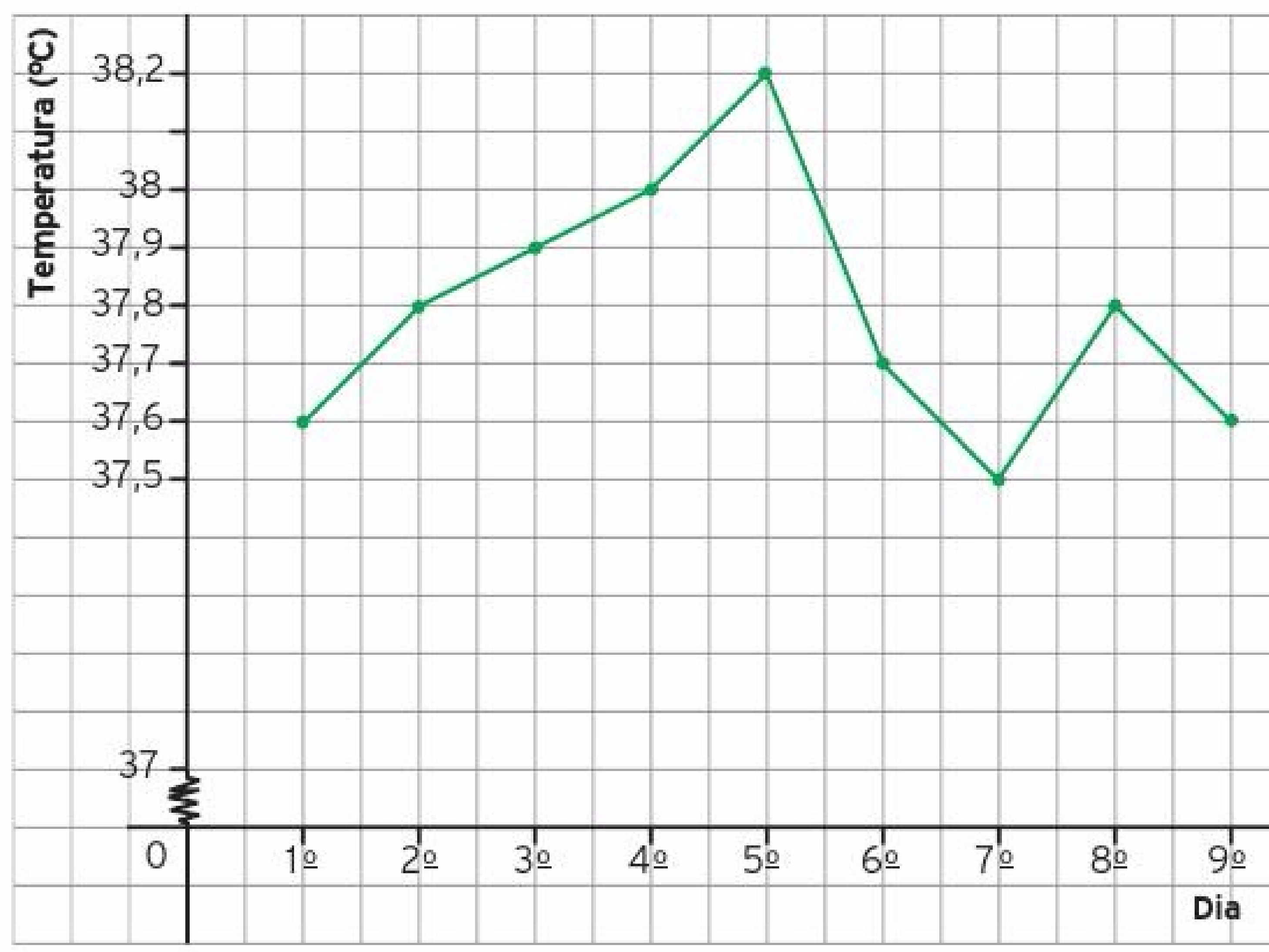
6. Em um hospital, mediu-se a temperatura de um paciente, sempre no mesmo horário, durante nove dias. Este gráfico mostra a variação dessas temperaturas. Observe os dados e responda.

a) O que ocorreu com as temperaturas desse paciente durante os quatro primeiros dias?
As temperaturas subiram.

b) Em que dia a temperatura parece que foi maior?
No 5º dia.

c) O que ocorreu com a temperatura no 7º dia?
A temperatura foi a menor registrada nesse período.

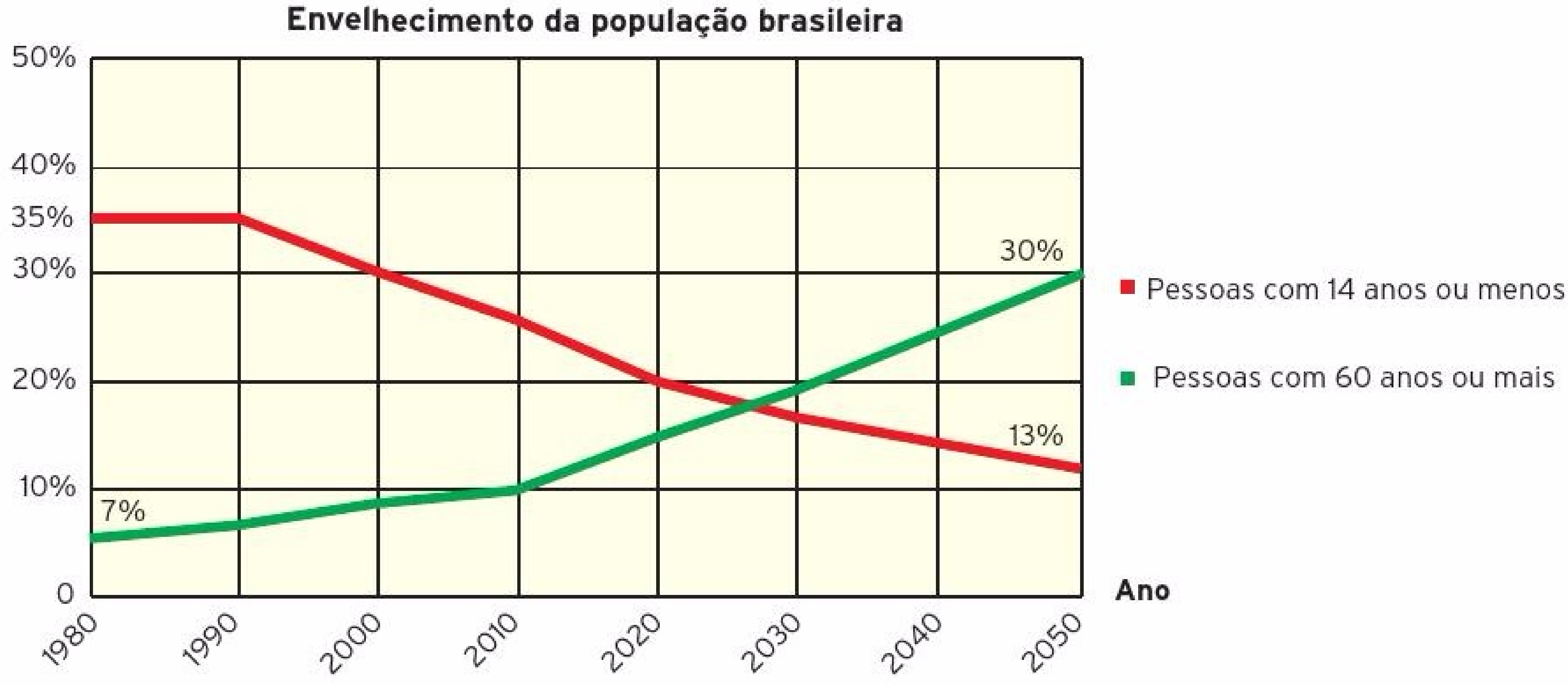
Variação da temperatura de um paciente



Fonte: fictícia.

7. O gráfico de linha a seguir nos dá algumas informações sobre o envelhecimento da população brasileira no período de 1990 a 2010 e faz uma projeção até o ano 2050. No gráfico há duas linhas, das quais uma representa crianças e adolescentes até 14 anos e a outra, os idosos com 60 anos ou mais. Utilize as informações dadas para responder às questões a seguir.

Envelhecimento da população brasileira



Fonte: IBGE, 2008. Disponível em: <http://saladeimprensa.ibge.gov.br/noticias?view=noticia&id=1&busca=1&idnoticia=1272>. Acesso em: 8 maio 2015.

a) Em 1990, qual era o percentual de pessoas com 14 anos ou menos? E de pessoas com 60 anos ou mais? Qual dessas faixas etárias tinha percentual maior? 35%; 7%; a de 14 anos ou menos.

b) De acordo com a projeção, em qual período o número de pessoas com 14 anos ou menos passará a ser menor que o número de pessoas com 60 anos ou mais: entre 2020 e 2030 ou entre 2010 e 2020?
Entre 2020 e 2030.

c) Em 2050, segundo a projeção, qual será a diferença entre o percentual de idosos e o percentual de pessoas com 14 anos ou menos? 17%

8. Esta tabela contém dados sobre a expectativa de vida (por idade) de homens e mulheres no Brasil, em alguns anos, no período de 1998 a 2013.

a) Construa uma nova tabela arredondando esses dados para unidades mais próximas. Veja resposta no final do livro.

b) Represente os dados da tabela em um gráfico de linha. Veja resposta no final do livro.

Expectativa de vida no Brasil em anos no período de 1998 a 2013

Ano	Homens	Mulheres
1998	64,4	72,0
2001	65,1	72,9
2004	67,9	75,5
2007	68,82	76,44
2010	69,73	77,3
2013	71,3	78,6

Fonte: IBGE, 2014.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

A pesquisa TIC Kids On-line Brasil 2012, realizada pelo Comitê Gestor da Internet no Brasil, teve por objetivo "medir usos e hábitos da população brasileira usuária de internet de 9 a 16 anos em relação às tecnologias de informação e de comunicação (TIC)". Perguntados sobre a frequência de uso na internet, os resultados obtidos foram:

Frequência de uso da internet

Fonte dos dados: COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. TIC Kids On-line Brasil 2012 . Disponível em: <www.cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic-kids-online-2012.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2014.

Observe este gráfico e responda:

- Que porcentagem dos entrevistados usa a internet pelo menos uma vez por semana? 85%
- A internet é muito presente na vida dessas crianças e adolescentes entrevistados? Explique por quê. Resposta possível: Sim; pelo menos 85% de crianças e jovens usam a internet pelo menos uma vez por semana.
- Junte-se a um colega e façam uma pesquisa parecida com a realizada pela TIC Kids. Escolham uma classe de sua escola e peçam aos alunos que respondam à seguinte pergunta:

Com que frequência você usa a internet?

Ofereçam as seguintes opções de resposta, pedindo que escolham apenas uma:

Todos os dias ou quase todos os dias — Uma ou duas vezes por semana — Uma ou duas vezes por mês — Menos de uma vez por mês — Não sei — Não acesso a internet.

- Façam uma tabulação e um gráfico dos dados obtidos. Resposta pessoal.
- Comparem os resultados que obtiveram com os da pesquisa realizada pela TIC Kids e comuniquem aos colegas as suas conclusões. Resposta pessoal.

2 Estatística

Organização de informações

Em muitas situações, não é possível consultar todo o grupo de pessoas que estariam envolvidas em uma pesquisa. Nesse caso, ela pode ser realizada com uma parte desse grupo. O grupo todo é a **população**, e a parte selecionada, a **amostra**. Uma vez definida a amostra, o pesquisador faz uma **coleta de dados sobre a amostra**.

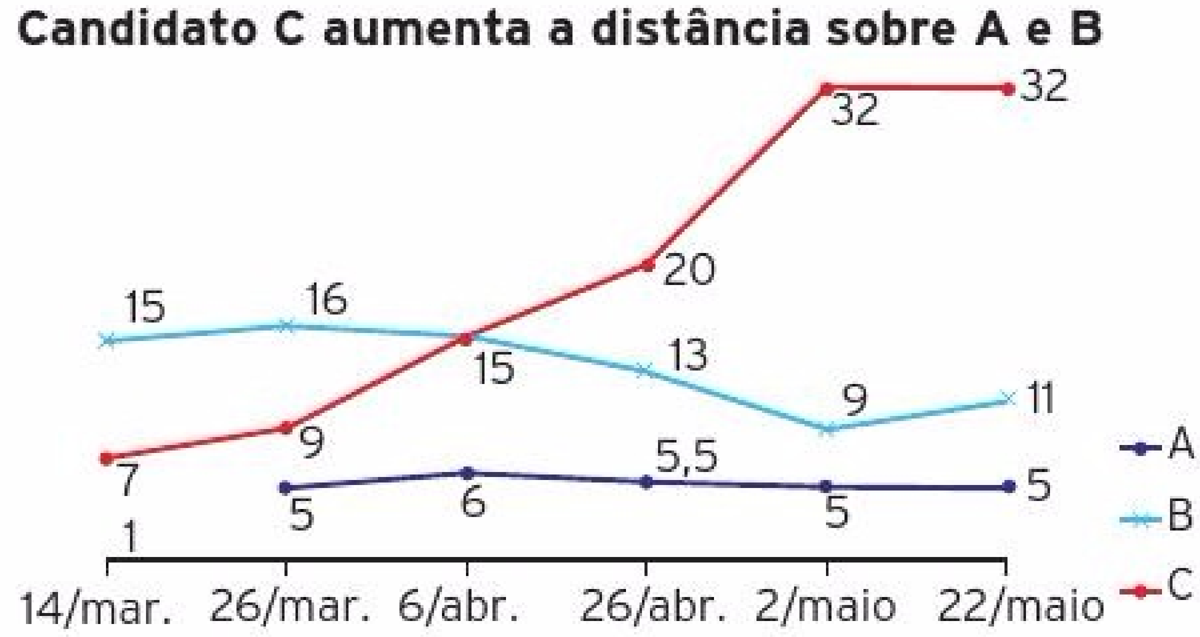
Exemplo:

A ilustração seguinte mostra um gráfico que é o resultado da superposição de três linhas. Os dados representados nesses gráficos foram coletados em uma pesquisa realizada em 2016, sobre a intenção de voto para a eleição do prefeito de uma cidade com 600 000 habitantes. Nessa pesquisa foram entrevistadas 1 564 pessoas.

Cada linha representa o desempenho de um candidato. A pesquisa foi realizada de 14 de março a 22 de maio. Os números assinalados nas linhas são as taxas percentuais de intenção de voto. Por esse gráfico, sabe-se, por exemplo, que o candidato B obteve 15% das intenções de voto em 14 de março, 16% em 26 de março, 15% em 6 de abril, 9% em 2 de maio e 11% em 22 de maio.

Nessa pesquisa, a **população** é constituída de todos os habitantes da cidade em 2016 (600 000 habitantes) e a **amostra** é o grupo de pessoas que foram consultadas sobre a intenção de voto (1 564 pessoas).

Candidato C aumenta a distância sobre A e B



Dados fictícios.

Distribuição por frequências

Para refletir e responder

Em uma prova de Ciências, Cláudia, que estuda no 8º ano C, obteve nota 7,0.

Notas de Ciências do 8º C

6,5	7,0	7,5	8,0	8,5
9,0	8,0	9,0	7,0	9,0
7,5	9,0	9,0	8,5	9,5
8,0	8,5	9,0	9,5	9,5
9,0	7,0	8,0	6,5	8,0
8,0	8,5	7,5	9,5	9,5
9,0	9,0	9,0	7,5	8,0
7,5	8,5	6,5	8,5	7,0

- Dê sua opinião sobre a nota de Cláudia, comparando-a com as notas de 0 (zero) a 10. Resposta pessoal.

Considerando apenas a nota de Cláudia, podemos chegar a conclusões falsas. É preciso compará-la com as notas dos demais alunos para ter uma opinião sobre o desempenho de Cláudia em Ciências.

Observando as notas dos demais alunos, na forma como estão indicadas no quadro anterior, não é simples fazer uma comparação. Mas podemos organizá-las em ordem crescente (ou decrescente) para facilitar a contagem. Esse procedimento é chamado de **tabulação**.

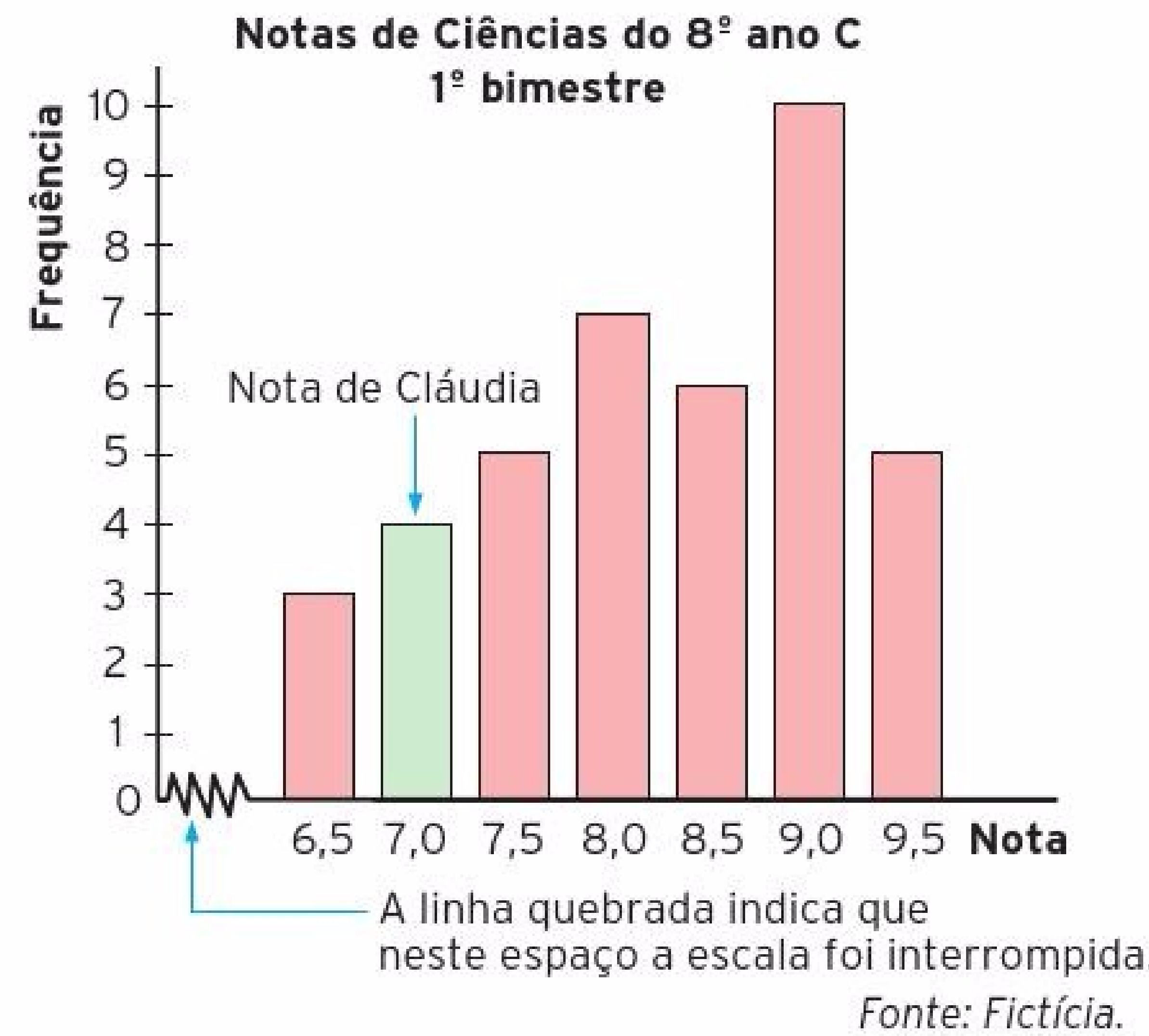
Notas de Ciências do 8º ano C – 1º bimestre

Notas	Tabulação
6,5	
7,0	
7,5	
8,0	
8,5	
9,0	
9,5	

Notas	Frequência
6,5	3
7,0	4
7,5	5
8,0	7
8,5	6
9,0	10
9,5	5
Total	40

Chamamos essa forma de organizar os dados de **distribuição por frequências**, e o número de vezes que uma nota aparece é chamado de **frequência simples** ou **frequência absoluta**, ou apenas **frequência** dessa nota. Costuma-se representar a frequência absoluta por **f**.

Analisando a distribuição por frequências das notas de Ciências da classe, podemos concluir que o desempenho de Cláudia está abaixo do desempenho da maioria dos alunos do 8º ano C: há 33 alunos, em um total de 40, com notas maiores que a de Cláudia.

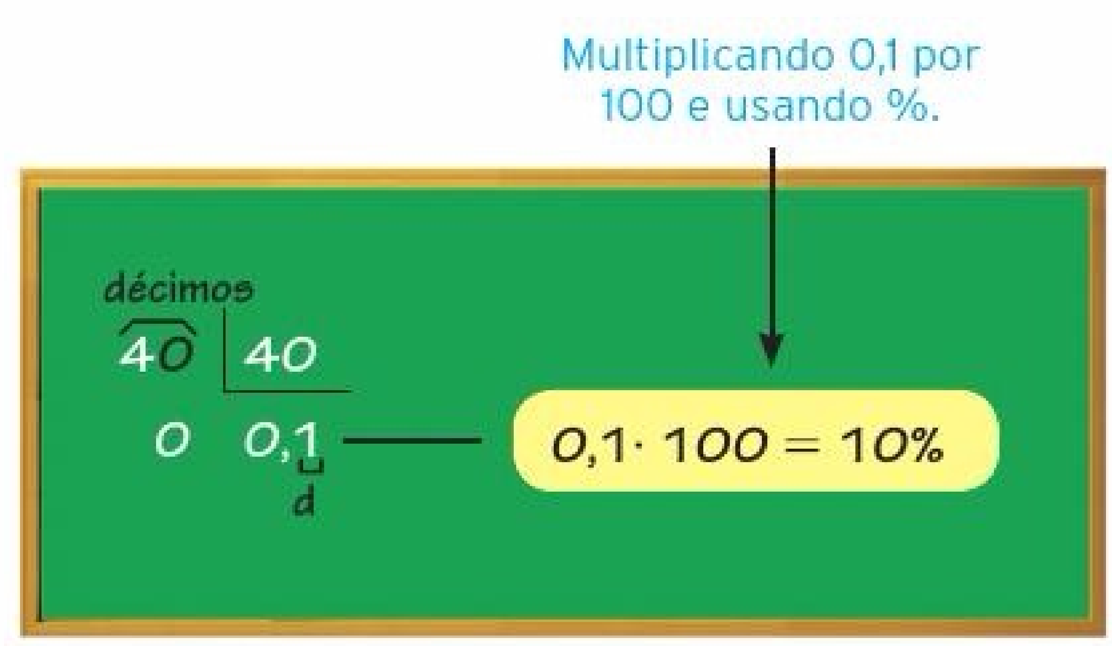


Frequência relativa

Observe novamente a tabela das notas de Ciências do 8º ano C, apresentada na página anterior.

O percentual de alunos que obtiveram a nota 7,0 corresponde à razão:

$$\frac{\text{nº de alunos que tiveram nota 7,0}}{\text{total de alunos}}$$



10% dos alunos tiveram nota 7,0 nessa prova de Ciências.

10% é a **frequência relativa** da nota 7,0.

Representando a frequência relativa por **fr**, temos: **fr** de 7,0: 10%

Incentive os alunos a utilizar uma calculadora em situações de cálculo de frequências relativas.

Veja na tabela a seguir a coluna com as frequências relativas das outras notas:

Acrescentamos na tabela a frequência relativa de cada nota.

Notas de Ciências do 8º ano C – 1º bimestre

Notas	Frequência (f)	Frequência relativa – fr (%)
6,5	3	7,5
7,0	4	10,0
7,5	5	12,5
8,0	7	17,5
8,5	6	15,0
9,0	10	25,0
9,5	5	12,5
Total	40	100,0

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

9. Resposta possível: Distribuição por frequências é uma forma de organizar um grande números de dados junto com as frequências correspondentes a eles.

9. Explique com suas palavras o que você entendeu por distribuição por frequências.

10. Um levantamento sobre o número de pessoas da família de cada funcionário de um escritório resultou na tabela abaixo.

Quantas pessoas formam sua família?				
3	5	4	3	5
3	6	4	6	4
4	5	1	5	8
6	3	1	2	2

Construa uma tabela de distribuição de frequência com esses dados. Depois, acrescente à tabela uma coluna com as frequências relativas dos dados coletados. Veja resposta no final do livro.

11. Faça o que se pede a seguir.

Providencie uma moeda de R$ 1,00. Lance primeiro 10 vezes e depois 20 vezes, tabulando os resultados obtidos (cara ou coroa).
Respostas pessoais.

MUSEU DE VALORES/ BANCO CENTRAL DO BRASIL

Cara ou coroa?

Número de lançamentos	Ocorrência de cara	Ocorrência de coroa
10		
20		
Total		

a) Quantas vezes ocorreu cara nos 10 primeiros lançamentos? E em 30?

b) Qual foi a frequência relativa de coroa nos 20 últimos lançamentos?

c) Construa uma tabela com os dados obtidos, acrescentando as frequências absolutas e as frequências relativas.

d) Compare os resultados que você obteve com os de seus colegas. O que se pode afirmar sobre eles?

12. João lançou um dado 50 vezes e anotou, na tabela a seguir, os números que apareceram na face superior.

SHUTTERSTOCK

Lançamento de dado									
4	1	3	2	1	3	2	1	2	3
6	2	4	5	1	1	4	6	3	1
1	3	6	1	3	2	6	3	6	1
5	6	3	6	4	5	1	2	4	5
6	4	2	1	6	3	3	1	5	4

a) Organize esses dados em uma tabela de distribuição por frequências, com frequências absolutas e relativas, conforme modelo a seguir.
Veja resposta no final do livro.

Número (face superior)	f	fr (%)

b) Que número apareceu mais vezes? 1

c) Qual é a frequência absoluta do número que você identificou no item anterior? 12

d) Qual é a frequência relativa do número 3? 20%

e) Qual é a frequência absoluta do aparecimento de números menores que 3 nesses 50 lançamentos? 19

f) Qual é o percentual do aparecimento de números menores que 3 nesses 50 lançamentos? 38%

g) Qual é o número com maior frequência relativa? 1

Frequência acumulada

Vamos explorar esse assunto examinando um exemplo.

Uma professora fez o controle das faltas de seus alunos durante um semestre.

Ela anotou as faltas em tabelas como estas:

Nº do aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Nº de faltas	1	5	0	7	4	4	8	4	1	3	5	2	9	3	9	2	3	4	1	7	3	9	5	2	1

São 50 alunos ao todo.

Nº do aluno	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Nº de faltas	5	9	2	9	0	1	3	1	8	9	8	2	4	8	2	3	2	8	3	7	3	3	8	9	2

A partir dessas anotações, ela construiu uma tabela de distribuição por frequências com as frequências absolutas e as frequências relativas.

Número de faltas do 8º ano

Número de faltas	Frequência absoluta (f)	Frequência relativa fr (%)
0	2	4
1	6	12
2	8	16
3	9	18
4	5	10
5	4	8
6	0	0
7	3	6
8	6	12
9	7	14
Total	50	100

$2 + 6 + 8 + 9 + 5 + 4 = 34$ é a soma de todas as frequências absolutas correspondentes ao número de faltas menor ou igual a **5**.

Essa soma é chamada de **frequência acumulada correspondente a 5 faltas** e indicada por **fa**.

fa de 5 = 34

A frequência acumulada de 7 faltas pode ser representada por **fa de 7 = 37**.

Em uma distribuição de frequências, a **frequência acumulada** até certo dado é a soma da frequência desse dado com as dos dados anteriores. Representamos essa frequência por **fa**.

Frequência acumulada relativa

Vamos retomar as informações da tabela anterior sobre o número de faltas.

A razão entre a frequência acumulada correspondente a 5 faltas e o total de alunos é calculada da seguinte maneira:

$$\frac{\text{fa de } 5}{\text{total}} = \frac{34}{50} = 0{,}68 = 68\%$$

68% dos alunos do 8º ano tiveram número de faltas igual ou inferior a 5.

Chamamos essa razão de **frequência acumulada relativa** para 5 faltas.

far de 5 = 68%

Para 7 faltas —— far de 7 $= \frac{37}{50} = 0{,}74 = 74\%$

74% dos alunos do 8º ano tiveram número de faltas igual ou inferior a 7.

A **frequência acumulada relativa** de um dado é a razão entre a frequência acumulada até esse dado e o total das frequências. Representamos essa frequência por **far**.

A partir do levantamento das frequências acumuladas e frequências acumuladas relativas, completamos a tabela de distribuição por frequências:

Número de faltas do 8º ano no semestre

Número de faltas	Frequência absoluta f	Frequência acumulada fa	Frequência relativa fr (%)	Frequência acumulada relativa far (%)
0	2	2	4	4
1	6	8	12	4 + 12 = 16
2	8	16	16	16 + 16 = 32
3	9	25	18	32 + 18 = 50
4	5	30	10	50 + 10 = 60
5	4	34	8	60 + 8 = 68
6	0	34	0	68 + 0 = 68
7	3	37	6	68 + 6 = 74
8	6	43	12	74 + 12 = 86
9	7	50	14	86 + 14 = 100
Total	50		100	

Note que as frequências relativa e acumulada relativa para alunos com **0** falta são iguais a **4%**.

A frequência acumulada relativa para **0** ou **1** falta é igual a 4% + 12% = 16% e significa que **16%** dos alunos tiveram **0** ou **1** falta.

A frequência acumulada relativa para **0**, **1** ou **2** faltas é igual a 16% + 16% = 32% e significa que 32% dos alunos tiveram **0**, **1** ou **2** faltas.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

13. A distribuição por frequência indicada na tabela a seguir refere-se às notas de uma das provas de Língua Portuguesa de uma classe.

Notas de Língua Portuguesa – 1º bimestre

Nota	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	Total
Frequência	7	6	5	6	8	10	8	50

a) Construa em seu caderno uma tabela de distribuição por frequências com frequências absolutas, frequências relativas, frequências acumuladas e frequências acumuladas relativas. Veja resposta no final do livro.

b) Qual é a frequência relativa dos alunos que têm nota 7,0? 16%

c) Quantos alunos têm nota inferior a 6,5? 32 alunos.

d) Quantos alunos têm nota 5,0 ou abaixo de 5,0? 18 alunos.

e) Qual o percentual de alunos que têm nota inferior a 5,0? 26%

14. "Qual é seu manequim?" Com essa pergunta, Teresa consultou 50 pessoas e fez estas anotações:

38	40	40	36	42	42	40	36	40	42
36	42	40	44	38	36	50	40	38	36
40	38	42	44	50	38	40	42	50	38
42	36	40	42	36	44	40	38	40	42
44	42	38	40	44	42	36	44	40	42

a) Faça uma contagem dos dados obtidos por Teresa e construa uma tabela de distribuição por frequência com frequências absolutas, frequências relativas, frequências acumuladas e frequências acumuladas relativas. Veja resposta no final do livro.

b) Quantas pessoas formam a amostra da pesquisa de Teresa? 50 pessoas.

c) Qual é a frequência do manequim 42? 12

d) Qual é a frequência relativa do manequim 42? 24,0%

e) Qual é a frequência acumulada do manequim 42? 41

f) Qual é a frequência acumulada relativa do manequim 42? 82,0%

g) Quais são a **fr**, a **fa** e a **far** do manequim 40? 26,0%; 29; 58,0%

h) Represente os dados da pesquisa de Teresa em um gráfico de colunas, indicando no eixo **x** o manequim e no eixo **y** a frequência absoluta.

15. Jorge é um pesquisador do departamento de trânsito de sua cidade. Observe as anotações que ele fez sobre a velocidade aproximada com que os motoristas trafegam em uma das avenidas mais movimentadas. Veja resposta no final do livro.

Velocidade em km/h											
70	80	90	80	80	90	80	90	70	80	60	80
80	100	80	70	90	80	90	60	80	80	90	70
90	80	90	80	60	80	70	80	90	80	80	90
80	70	80	90	80	90	80	100	70	90	60	90
100	80	80	70	80	80	90	80	60	80	70	60

a) Faça uma contagem desses dados e construa uma tabela completa de distribuição por frequência dessa pesquisa. Veja resposta no final do livro.

b) Quantos veículos foram observados nessa pesquisa? 60 veículos.

c) Quantos motoristas dirigiam a 90 km por hora? 15 motoristas.

d) No grupo observado por Jorge, qual é o percentual de motoristas que dirigiam a 90 km por hora? 25%

e) Qual é o percentual de motoristas que dirigiam com velocidades menores que 90 km por hora? 70%

f) Se o limite de velocidade nessa avenida é 80 km por hora, qual é a taxa percentual de motoristas infratores? 30%

g) Represente esses dados em um gráfico de setores. Veja resposta no final do livro.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e façam uma pesquisa.

- Escolham três classes de sua escola e façam um levantamento:
  a) do esporte preferido pelos garotos e pelas garotas;
  b) do esporte mais praticado pelos garotos e pelas garotas.
- Anotem os dados coletados em uma tabela como esta:

Esporte preferido	Garotas	Garotos	Total

- Para cada conjunto de dados coletados, construam uma tabela completa de distribuição por frequências.
- Elaborem questões sobre frequência relativa, frequência acumulada e frequência acumulada relativa.
- Troquem essas questões com outra dupla e resolvam as questões que receberam. Resposta pessoal.

3 Probabilidade

Noções de probabilidade

Quando falamos sobre acontecimentos ou fatos, é comum ouvirmos frases do tipo:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

HAGAQUEZART ESTÚDIO

As palavras *chance* e *provavelmente* são usadas para descrever a frequência com que se espera que um acontecimento ocorra, quando é considerado imprevisível.

Há uma imensa quantidade de situações que podem ser classificadas como "imprevisíveis", com o seguinte significado: um acontecimento é considerado "imprevisível" se não é possível afirmar, com certeza, qual resultado irá ocorrer quando da sua ocorrência.

Em casos como esses, em que há vários resultados possíveis, ficamos diante da seguinte opção: medir as "chances" de sua ocorrência.

A partir de estudos de vários tipos de acontecimentos "imprevisíveis", foi desenvolvida por grandes matemáticos, ao longo da história, a teoria denominada "Teoria de Probabilidades", que é um ramo da Matemática. Esse assunto tem aplicações em experimentos de Física Nuclear, em pesquisas médicas, em ciências atuariais (seguros-saúde, aposentadorias), em pesquisas de mercado, para citar apenas algumas aplicações.

Um dos principais objetivos dessa ciência é calcular a probabilidade de ocorrência de certos acontecimentos ao se realizar um experimento aleatório.

Experimento aleatório

Um experimento é considerado aleatório se, ao ser realizado muitas e muitas vezes, os acontecimentos ligados a ele ocorrem ao acaso.

Para cada repetição do experimento, podemos obter, em geral, um resultado diferente dos resultados obtidos em repetições anteriores.

Exemplos:

- Lançar um dado e observar a face superior.
- Selecionar um item de uma linha de produção e testar para ver se está com defeito ou não.

Espaço amostral

Ao se lançar uma moeda (não viciada), é possível obter apenas um dos dois resultados:


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

1º a face superior exibe o acontecimento "cara";

2º a face superior exibe o acontecimento "coroa".

O conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento pode ser representado por:

E = {c, r}, em que **c** representa o resultado "cara" e **r** representa o resultado "coroa".

> O conjunto de todos os resultados possíveis ao se realizar um experimento aleatório chama-se **espaço amostral**.

Exemplo:

No lançamento de um dado (não viciado), o espaço amostral desse experimento pode ser representado por:

E = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

Se associarmos ao resultado ⚀ o número **1**, ao resultado ⚁ o número **2**, ao resultado ⚂ o número **3**, ao resultado ⚃ o número **4**, ao resultado ⚄ o número **5** e ao resultado ⚅ o número **6**, então o espaço amostral **E** pode ser representado de forma mais adequada por:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento

Quando realizamos um experimento aleatório, podemos estar interessados em certos conjuntos de acontecimentos.

> Conjuntos de acontecimentos de um experimento aleatório são denominados **eventos**.

Exemplos:

- No lançamento de uma moeda (não viciada), o acontecimento "obter cara" é um evento, que podemos representar por "cara".
- No lançamento de um dado (não viciado), o acontecimento "sair 1" é um evento, que podemos representar por "1".

Se um evento tem apenas um acontecimento, então dizemos que o evento é **simples** ou **elementar**.

> **Vamos combinar:**
> Os experimentos citados neste texto sempre envolvem objetos, como dados, moedas, bolas e outros, **não viciados**.

Probabilidade

Para refletir e responder

Considere o seguinte experimento: lançar um dado uma única vez.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Quantas vezes pode ocorrer o evento "5" nesse único lançamento? 1

Neste experimento, o número de resultados possíveis é **6**, e os eventos elementares são: "1", "2", "3", "4", "5", "6".

Como existem seis resultados possíveis e o evento "5" só pode ocorrer uma única vez em um lançamento, então dizemos que a probabilidade de "sair 5" é de 1 em 6.

Idealmente, a **probabilidade** de "sair 5" no lançamento de um dado pode ser representada por $\frac{1}{6}$, ou 16,6666...% $\cong$ 16,7%.

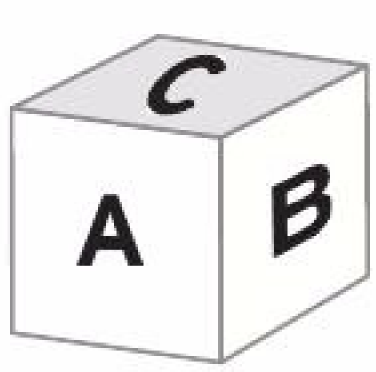
Cada um dos eventos elementares desse experimento tem uma possibilidade de ocorrer em seis possibilidades possíveis, ou seja: a probabilidade de ocorrer qualquer evento elementar é igual a $\frac{1}{6}$.

Como o dado não é viciado, dizemos que o experimento é **equiprovável**, ou seja, cada um dos eventos elementares tem a **mesma probabilidade de ocorrer** quando o dado é lançado.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

16. Imagine um dado que apresenta uma só das letras A, B, C, D, E ou F em cada face.



Qual é o espaço amostral desse experimento? {A, B, C, D, E, F}

17. Qual é o espaço amostral no lançamento de uma moeda? {cara, coroa}

MUSEU DE VALORES/ BANCO CENTRAL DO BRASIL

18. Na "Revisão cumulativa e testes" deste livro, há questões de múltipla escolha, compostas de quatro alternativas: a, b, c, d, das quais apenas uma é verdadeira. Ao escolher uma alternativa ao acaso em uma questão, qual é a probabilidade de acertar a questão? Escreva a resposta usando o símbolo %. 25%

19. Uma urna contém 4 bolas verdes e 6 bolas amarelas. Qual é a probabilidade de uma pessoa retirar ao acaso, sem olhar, uma bola verde? $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ ou 40%


HAGAQUEZART ESTÚDIO

20. Numa rifa de uma bicicleta, uma cartela com 100 nomes foi totalmente vendida. Uma pessoa assinalou 17 nomes. Qual é a probabilidade de ela ganhar a bicicleta? $\frac{17}{100}$ ou 17%.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Capitã ou capitão?

A classe de Juliano quer escolher um capitão para a equipe que disputará os Jogos Escolares por meio de um sorteio. Os candidatos são 10 meninos e 5 meninas.

SHUTTERSTOCK

- Qual é a probabilidade de a equipe ter um capitão? E uma capitã? $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$
- Como meninos e meninas poderiam ter chances iguais de ser sorteados nesse processo? Chamando mais 5 meninas para que sejam candidatas. Há outras respostas possíveis.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a dois colegas para realizar esta atividade.

Providencie uma moeda de R$ 1,00.

Cada participante joga essa moeda 20 vezes e registra quantas vezes ocorre o resultado "coroa".

Monte, em seu caderno, uma tabela como a que se vê abaixo.

Linha	Número de lançamentos	Nº de ocorrências "coroa"	$f_A = \frac{\text{nº de ocorrências "coroa"}}{\text{nº de lançamentos}}$
1	20		
2	40		
3	60		

Coloque:

- na linha 1 o resultado que você obteve e a correspondente **frequência relativa**; Resposta pessoal.
- na linha 2 o resultado que você obteve somado com o resultado de um de seus colegas e a correspondente **frequência relativa** em **40** (20 + 20) lançamentos; Resposta pessoal.
- na linha 3 a soma dos resultados que os três (você, o colega do item anterior e outro colega) obtiveram e a correspondente **frequência relativa** em **60** (20 + 20 + 20) lançamentos. Resposta pessoal.
- Sabendo que a probabilidade de "obter coroa" é **0,5 = 50%**, qual é a relação entre as frequências relativas de "obter coroa" com a probabilidade de "obter coroa"? Resposta possível: Elas são quase iguais.

É possível que as frequências relativas não sejam iguais a 0,5, mas em torno de 0,5.

Uma conclusão importante: quando o número de lançamentos de uma moeda não viciada cresce muito, as frequências relativas do evento "ocorrer coroa" tendem a se estabilizar em torno do valor ideal $\frac{1}{2} = 0,5$.

Essa conclusão tem validade admitindo que os eventos elementares são **equiprováveis**.

Leitura

Um toque de arte

É o que se observa, hoje em dia, nos gráficos apresentados pelos jornais e revistas: arte e humor, além de certa análise crítica. São os gráficos chamados **pictóricos**.

Os gráficos pictóricos proporcionam um visual interessante, que atrai a atenção do leitor. Eles se caracterizam pela sobreposição de ilustração e gráfico ou pela sobreposição de fotografia e gráfico. Veja um exemplo:

O risco do dólar

Em 2014, a moeda americana teve aumento em relação ao real no segundo semestre.

STOCKXPERT/IMAGEPLUS

Fonte: <http://economia.uol.com.br/cotacoes/cambio/dolar-comercial-estados-unidos>. Acesso em: 8 maio 2015.

Esse tipo de representação gráfica associa a imagem (nota de 100 dólares) ao tema pesquisado. O desenho é feito mantendo-se uma proporcionalidade com os dados coletados.

Revisão cumulativa e testes

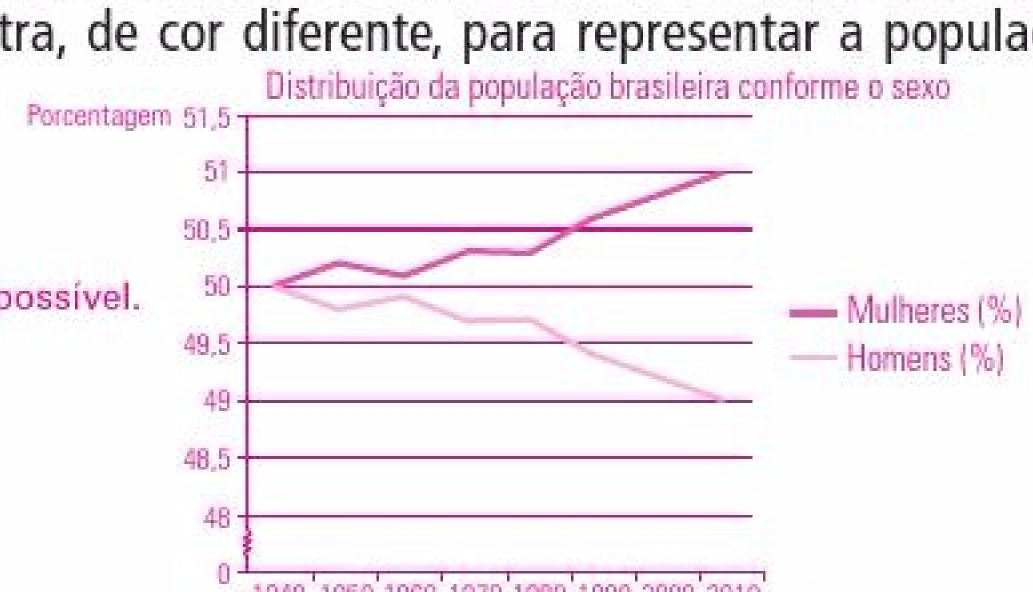
FAÇA NO CADERNO

1. Considere os dados da tabela ao lado e responda às questões.

a) Construa uma tabela arredondando os números para décimos.

b) Usando os dados da tabela que você construiu, faça um gráfico de linha para a distribuição da população feminina e masculina. Faça uma linha para representar a população masculina e uma outra, de cor diferente, para representar a população feminina.

Gráfico possível.



Distribuição da população brasileira conforme o sexo

	Mulheres (%)	Homens (%)
1940	50,01 50,0	49,99 50,0
1950	50,16 50,2	49,84 49,8
1960	50,09 50,1	49,91 49,9
1970	50,29 50,3	49,71 49,7
1980	50,30 50,3	49,70 49,7
1990	50,63 50,6	49,37 49,4
2000	50,78 50,8	49,22 49,2
2010	51,04 51,0	48,96 49,0

Fonte: IBGE. Anuário estatístico do Brasil, 2010.

2. Observe as anotações da professora de Língua Inglesa sobre o número diário de faltas dos alunos de uma turma nos dias letivos de certo mês. As informações da tabela são constituídas por números inteiros de 0 a 7.

Número de faltas por dia dos alunos da turma A

2ª-feira	3ª-feira	4ª-feira	5ª-feira	6ª-feira
2	5	1	3	0
7	4	0	2	5
5	3	4	2	6
3	6	2	0	3

Observe que há três dias com 0 (zero) falta; há um dia com 1 falta; há quatro dias com 2 faltas, e assim por diante.

Complete a contagem dos dados obtidos pela professora e construa, no seu caderno, uma tabela de distribuição por frequências parecida com a seguinte:

Nº de faltas	f (nº de dias)	fa	fr (%)	far (%)
0	3	3		
1	1	4		
Total	20	100		

a) Em quantos dias desse mês ocorreram 5 faltas? 3 dias.

b) Qual é a frequência relativa para 5 faltas? 15%

c) Qual é a frequência acumulada para 5 faltas? 17

d Qual é a frequência acumulada relativa para 5 faltas? 85%

e) Em quantos dias do mês houve 0, 1, 2 ou 3 faltas? 20

3. O comprimento de um arco correspondente a $\frac{1}{12}$ de uma circunferência com raio igual a 10 cm é: d

a) $\frac{\pi}{12}$ cm

b) $\frac{5\pi}{12}$ cm

c) $\frac{5\pi}{6}$ cm

d) $\frac{5\pi}{3}$ cm

4. Observe a reta numérica seguinte:

A dízima periódica 0,999... está representada pelo ponto: b

a) M

b) P

c) N

d) Q

5. Joga-se um dado e observa-se a face superior. A probabilidade de sair um número par é: d

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

6. Uma sacola contém uma bola de bilhar verde, uma vermelha e uma branca. Se tirarmos uma bola dessa sacola, sem olhar, a probabilidade de que ela seja vermelha é de aproximadamente: c

a) 10%

b) 25%

c) 33%

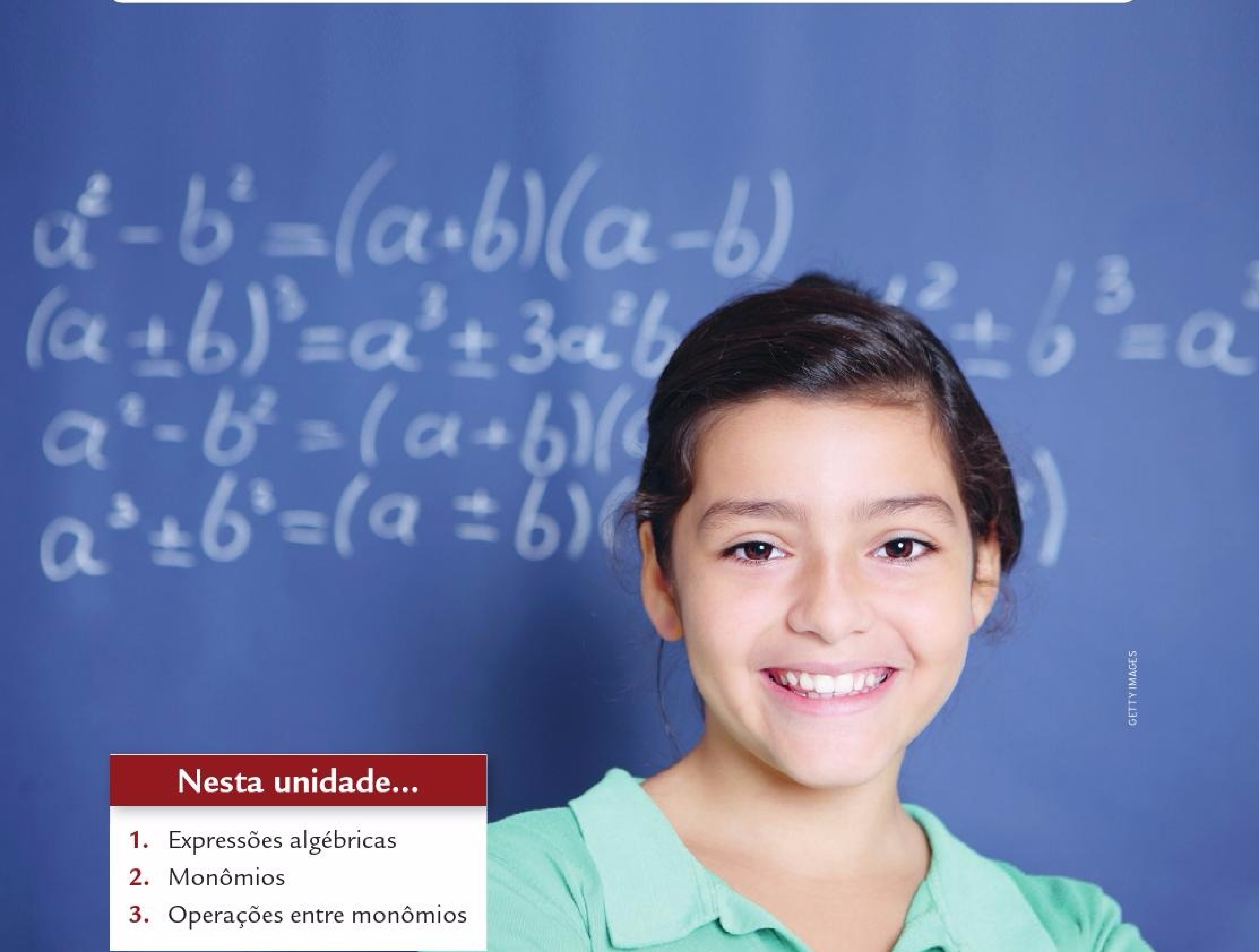
d) 50%

UNIDADE 4

Cálculo algébrico

O uso frequente da Álgebra é uma conquista do ser humano moderno, que possibilitou avanço acelerado em diversas áreas do conhecimento.

A Álgebra é uma linguagem fundamental em Matemática. Ela é assim considerada por ter possibilitado a introdução de símbolos claros e precisos para representar operações e sentenças envolvendo números e também para expressar fatos genéricos.



GETTY IMAGES

Nesta unidade...

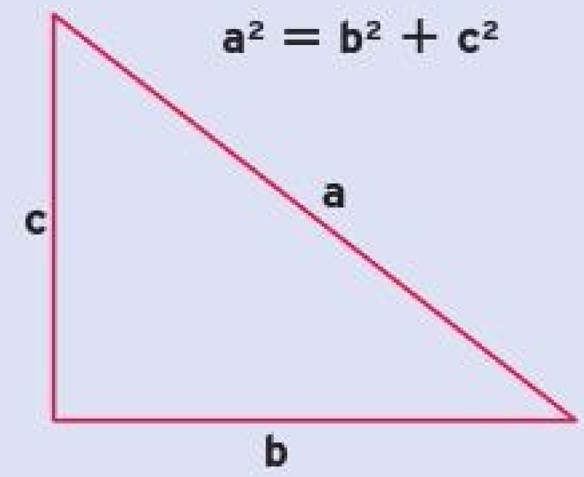
1. Expressões algébricas
2. Monômios
3. Operações entre monômios

De modo geral, os cientistas fazem experimentos, anotam e comparam resultados, usam o raciocínio e o cálculo algébrico e obtêm fórmulas.

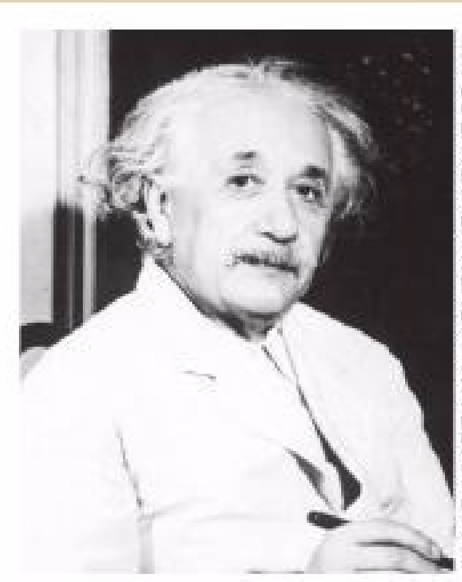
Uma fórmula que já conhecemos é a de Pitágoras, aplicada às medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Em 2004, um concurso realizado na Inglaterra elegeu as mais belas fórmulas matemáticas. Estas são algumas das mais votadas:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Beleza matemática

	$e^{i\pi} + 1 = 0$	$E = mc^2$	$F = ma$
Para que serve	A fórmula de Euler tem aplicações em cálculos de Matemática pura.	A fórmula de Albert Einstein estabelece a relação entre energia (**E**) e massa de um corpo (**m**). O símbolo **c** refere-se à velocidade da luz.	Ao associar a força (**F**) com a massa de um corpo (**m**) e sua aceleração (**a**), a fórmula de Isaac Newton permite o cálculo do movimento de qualquer objeto.
Por que foi eleita	A formulação reúne vários elementos – como a constante (π), um número imaginário (**i**) e outro real (**1**) – para resultar em nada (0).	Teve grande impacto na Física do início do século XX. Além disso, fica fotogênica estampada em uma camiseta.	Pela simplicidade do raciocínio e a praticidade da fórmula.
	 AKG-IMAGES/LATINSTOCK Leonhard Euler (1707–1783).	 IMAGE ASSET MANAGEMEN/KEYSTONE BRASIL Albert Einstein (1879–1955).	 BETTMANN/CORBIS/LATINSTOCK Sir Isaac Newton (1643–1727).

Fonte: Veja. São Paulo: Abril, 2005.

O que você já sabe?

- Se os catetos de um triângulo retângulo medem 9 cm e 12 cm, substituindo esses valores na fórmula de Pitágoras podemos calcular a medida da hipotenusa. Quanto mede a hipotenusa? 15 cm.
- Utilize a fórmula de Pitágoras e encontre as medidas de outro triângulo retângulo. Catetos: 30 cm e 40 cm; hipotenusa 50 cm. Há outras respostas possíveis.
- João disse: "A minha despesa diária multiplicada por 5, menos o dobro de R$ 23,00, é igual a S". Que fórmula podemos escrever nesse caso? $5 \cdot d - 46 = S$. Há outras respostas possíveis.
- Invente uma fórmula e troque com um colega. Cada um atribui valores às letras e calcula um valor usando a fórmula recebida. Resposta pessoal.

1 Expressões algébricas

Procure certificar-se de que os alunos compreendem a Álgebra como generalização da Aritmética, dando às variáveis (representadas por letras) o mesmo tratamento dado aos números.

O que é expressão algébrica?

Para refletir e responder

Uma locadora de bicicletas está fazendo muito sucesso.

Ao alugar uma bicicleta pela primeira vez, o cliente paga uma taxa única, que é acrescida ao valor diário do aluguel.

Ajude o planeta a ser mais saudável!
E, de "quebra", economize combustível, alugando uma bicicleta.

Taxa única	R$ 8,00
Diária	R$ 5,00


ORMUZD ALVES/FOLHAPRESS

A bicicleta é um dos meios de transporte terrestres mais usados no mundo inteiro.

- Se Mariana alugar uma bicicleta por 3 dias, quanto ela gastará? E se alugar por 10 dias? E por 20 dias? R$ 23,00; R$ 58,00; R$ 108,00.

Vamos fazer uma tabela com o número de dias de aluguel e o valor correspondente a ser pago:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Aluguel de bicicletas

Número de dias	Valor a ser pago (R$)
1	$8 + 5 \cdot 1 = 13$
2	$8 + 5 \cdot 2 = 18$
3	$8 + 5 \cdot 3 = 23$
5	$8 + 5 \cdot 5 = 33$
10	$8 + 5 \cdot 10 = 58$
20	$8 + 5 \cdot 20 = 108$

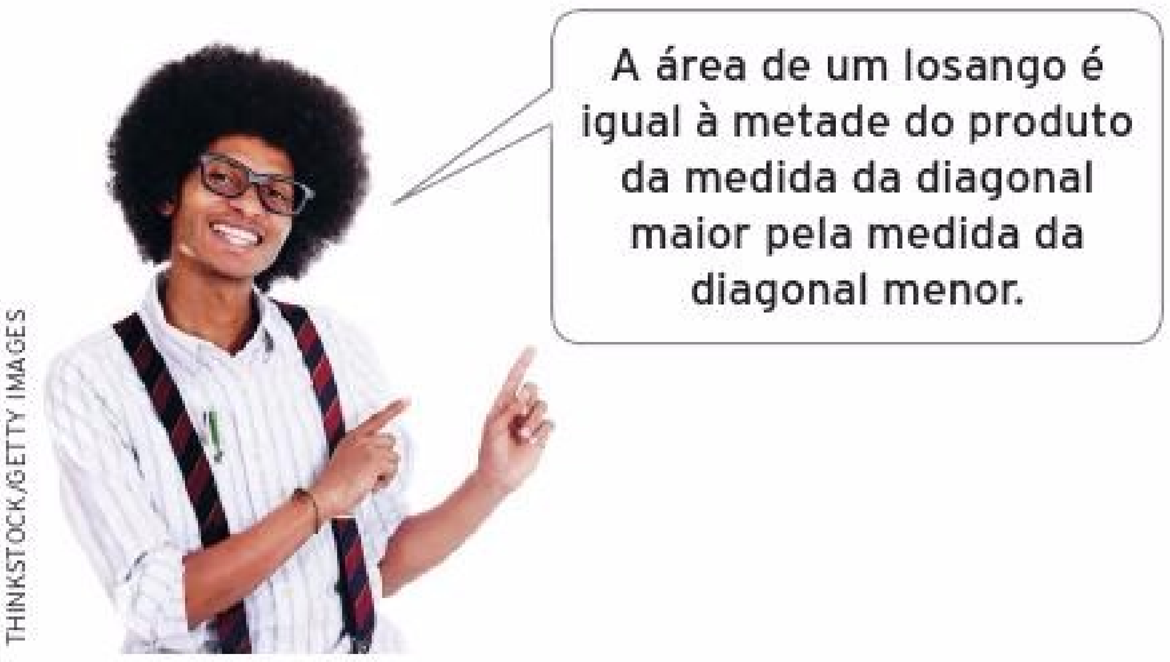
Para um número qualquer de dias: Aluguel = 8 + 5 · (número de dias)

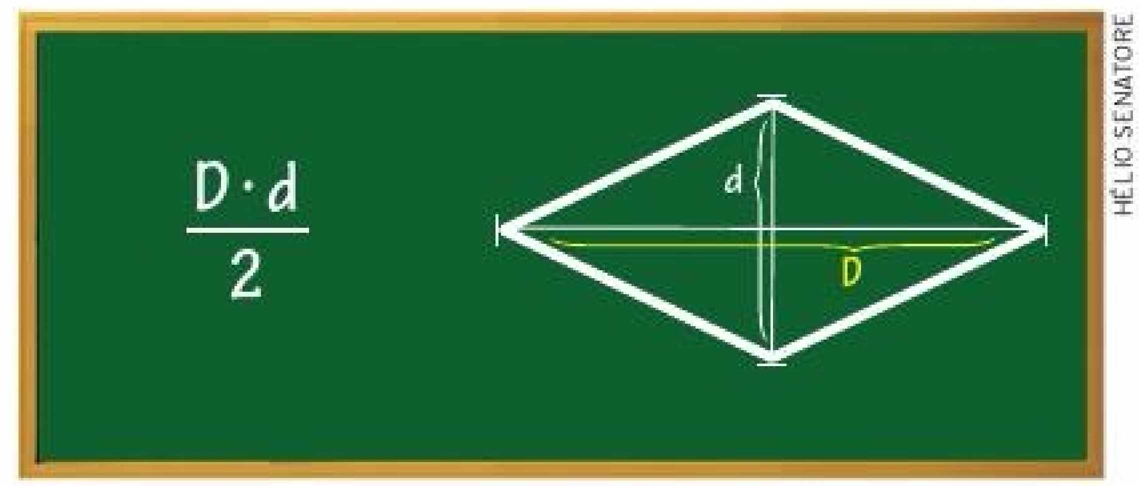
Em vez de escrevermos a expressão "número de dias", podemos usar uma letra que a represente. É comum adotarmos esse procedimento em Álgebra: sempre que uma palavra ou uma expressão se repete constantemente, usamos uma letra para representá-la. Por exemplo, utilizando a letra **n** para expressar o número de dias, podemos escrever uma expressão para o valor do aluguel da bicicleta. Veja:

$8 + 5 \cdot n$ ou $8 + 5n$

n é uma variável.

Como outro exemplo, veja o losango desenhado na lousa e a fórmula ao lado dele.





$\mathbf{8 + 5 \cdot n}$ e $\mathbf{\frac{D \cdot d}{2}}$ são exemplos de **expressões algébricas**.

De maneira simplificada, chamamos de **expressão algébrica** uma expressão que envolve **números**, **letras** e as **operações** indicadas entre eles.

As **letras** são as **variáveis** de uma expressão algébrica e podem representar qualquer número real.

Exemplos:

$-6 \cdot x + 13$ $\qquad \frac{2 \cdot x - 4}{7}$ $\qquad \frac{5 \cdot x}{4 - x}$

Valor numérico

aluguel $= 8 + 5 \cdot n$

Para 10 dias ——— aluguel $= 8 + 5 \cdot 10 = 58$

58 é o **valor numérico** da expressão $\mathbf{8 + 5 \cdot n}$, para $n = 10$.

Para 25 dias ——— aluguel $= 8 + 5 \cdot 25 = 133$

133 é o **valor numérico** da expressão $\mathbf{8 + 5 \cdot n}$, para $n = 25$.

Valor numérico de uma **expressão algébrica** é o resultado que obtemos quando atribuímos às letras dessa expressão valores numéricos e efetuamos as operações nela indicadas.

Quando o valor de uma variável anula o denominador de uma expressão algébrica, **não existe** valor numérico da expressão para esse valor.

Exemplos:

- Qual é o valor numérico da expressão algébrica $\frac{10 + x}{5}$ para $x = -10$?

Atribuindo a x o valor -10, temos:

$$\frac{10 + x}{5} = \frac{10 + (-10)}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

O valor numérico da expressão algébrica $\frac{10 + x}{5}$ para $x = -10$ é 0.

- Para que valor de x não existe valor numérico de $\frac{5 \cdot x}{10 + x}$?

  Determinamos o valor de x que anula o denominador resolvendo a equação:

$$10 + x = 0 \quad \text{———} \quad x = -10$$

A expressão algébrica $\frac{5x}{10 + x}$ não tem valor numérico para $x = -10$.

Ou seja, na expressão algébrica $\frac{5x}{10 + x}$, devemos ter $x \neq -10$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Ana, Laura, Rita e Beatriz são secretárias. Veja na tabela a quantidade de caracteres que cada uma digita por minuto.

	Ana	Laura	Rita	Beatriz
Caracteres (por min.)	38	40	35	45

Se **t** representa o tempo de digitação, identifique a expressão que representa o total de caracteres digitados de cada uma delas nesse tempo: Ana: C; Laura: A; Rita: D; Beatriz: B.

(A) $40 \cdot t$ (B) $45 \cdot t$ (C) $38 \cdot t$ (D) $35 \cdot t$

2. A letra **a** representa um número. Escreva uma frase que traduza estas expressões algébricas:

a) $3 \cdot a$ O triplo de um número.
b) $\sqrt{a}$ A raiz quadrada de um número.
c) $\frac{a^3}{3}$ A terça parte do cubo de um número.
d) $\sqrt{2 \cdot a}$ A raiz quadrada do dobro de um número.

3. Observe a cena e responda às questões.

a) Entrando nesse parque e utilizando 3 brinquedos, quanto será gasto? E utilizando 10 brinquedos? R$ 25,00; R$ 67,00.

b) Copie e complete esta tabela com dados para 1, 2, 3, 6, 8, 10 e 15 brinquedos. Veja resposta no final do livro.

Número de brinquedos utilizados	Gasto (R$)
1	
2	
3	

c) Escreva uma expressão algébrica que traduza o gasto nessa situação. $7 + 6 \cdot n$, em que n representa o número de brinquedos utilizados.

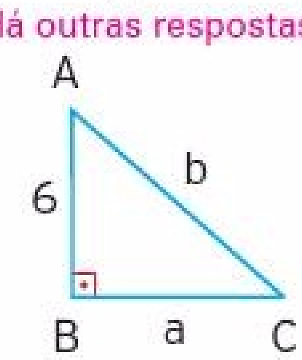
4. Considere a sequência:

$-3, 0, 3, 6, 9, ..., 3n, ...$

Escreva uma expressão algébrica que represente o número que vem imediatamente depois de **n**. $3n + 3$

5. ABC é um triângulo retângulo.

Qual é a expressão algébrica que relaciona **a**, **b** e **c**? $b^2 = a^2 + 36$. Há outras respostas possíveis.



6. Um automóvel percorre uma distância **d** em meia hora. Copie e complete esta tabela com expressões algébricas, supondo que o automóvel conserve a mesma velocidade.

Tempo (horas)	0,5	1	1,5	2	**t**
Distância percorrida	d	$2 \cdot d$	$3 \cdot d$	$4 \cdot d$	$2 \cdot t \cdot d$

7. Escreva cada frase a seguir usando uma expressão algébrica:

a) A soma do quadrado de um número **x** com um número **y**. $x^2 + y$

b) O quociente entre o quadrado de um número **a** e o quadrado de um número **b**, diferente de zero, nessa ordem. $\frac{a^2}{b^2}$, com $b \neq 0$

c) O quadrado da diferença entre um número **x** e um número **y**, nessa ordem. $(x - y)^2$

8. Determine o valor numérico da expressão $a^2 + 2a + 3$ para $a = -5$. 18

9. Qual é o valor numérico da expressão algébrica: $\frac{y^2}{2} - 8$, para $y = 4$? 0

10. Dentre as alternativas abaixo indique a que resulta na sequência 2, 5, 10, 17, 26, ..., se **n** for substituído por 1, por 2, por 3 e assim por diante.

a) $n + 1$
b) $n^2 + 1$
c) $4n + 1$
d) $2n^2 + 1$

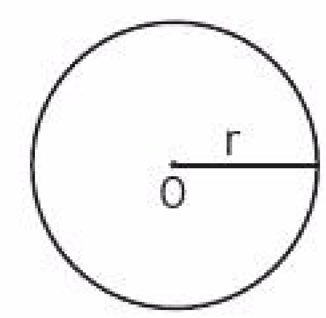
b

11. Copie a tabela a seguir e complete-a com os valores numéricos da expressão apresentada para os valores de **x** e de **y**:

$2(-x + 13) - y$

x	0	6	10	–1	0,5
y	6	0	1	40	–0,5
Valor numérico	20	14	5	–12	25,5

12. Na expressão algébrica $2 \cdot \pi \cdot r$, **r** representa a medida de um dos raios de uma circunferência.



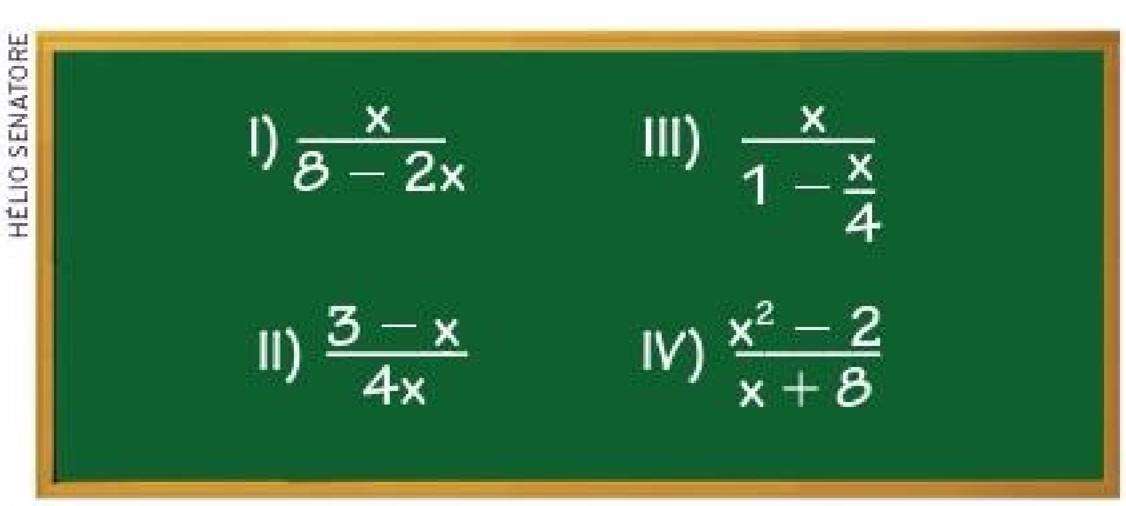
a) O que representa a expressão dada?
O perímetro da circunferência.

b) Calcule o valor numérico da expressão dada para circunferências de raios com 2 cm, 3 cm, 5,6 cm e 10 cm. 12,56 cm; 18,84 cm; 35,168 cm; 62,8 cm.

Use $\pi = 3,14$

13. O professor de Matemática disse que algumas expressões que estão no quadro não têm valor numérico para $x = 4$. Veja as respostas de alguns alunos:

HÉLIO SENATORE



Aline: I e II

João: II e III

Mariana: I e III

Pedro: III e IV

Qual deles deu a resposta correta? Mariana.

14. Determine o valor de **x** para o qual não existe o valor numérico destas expressões algébricas:

a) $\frac{2x - 5}{8 - x}$ 8

b) $\frac{2x^2 - 1}{6x + 1}$ $-\frac{1}{6}$

c) $\frac{15x^2}{18x + 36}$ -2

15. Calcule o valor numérico da expressão $\frac{7 \cdot x + 1}{8 + x}$ para $x = 0$. $\frac{1}{8}$

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

Em uma competição esportiva, cada atleta dá um aperto de mão a cada um dos outros atletas uma única vez. O número de apertos de mãos de acordo com o número de atletas foi calculado e registrado nesta tabela.

- Encontrem um padrão entre as formas de cálculo do número de apertos de mãos. [(número de atletas) × (número de atletas − 1)] : 2
- Copiem a tabela e completem-na para 6, 7 e 8 atletas.
- Qual é o número de apertos de mãos para um número qualquer de atletas? $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Há outras respostas possíveis.

Número de atletas	Número de apertos de mãos
3	$\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$
4	$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$
5	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
6	$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$
7	$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$
8	$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

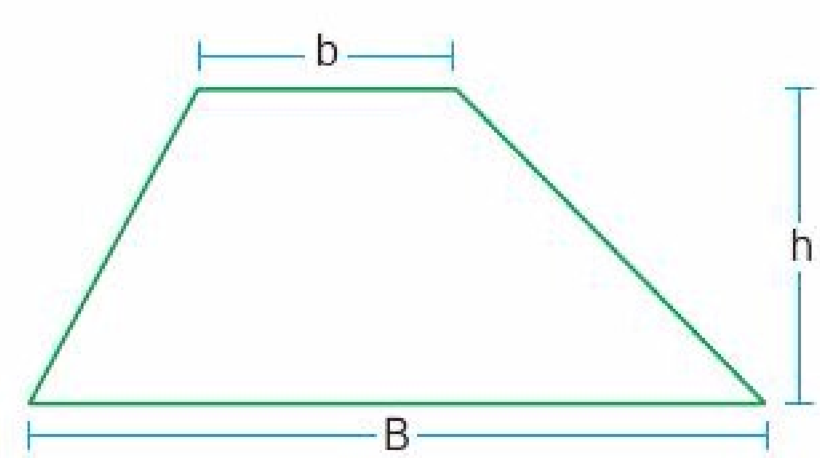
Medidas e fórmulas

Explore outras atividades envolvendo Álgebra e Grandezas e Medidas em que as letras utilizadas como variáveis expressem relações entre duas ou mais grandezas.

Para refletir e responder

A área de um trapézio qualquer é a metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura do trapézio.

B, **b** e **h** representam medidas na mesma unidade.



- Escreva uma expressão algébrica para a área do trapézio dado na figura. Qual é a área de um trapézio que tem 7 cm de altura e bases que medem 5 cm e 9 cm? $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$; 49 cm².

As expressões algébricas e o cálculo de seu valor numérico são muito utilizados na aplicação de fórmulas, como, por exemplo, nas fórmulas de áreas de regiões planas.

Indicando a medida da altura de um trapézio qualquer por **h** e as medidas das bases por **B** e **b**, sua área é representada pela fórmula a seguir. A letra **A** representa a área do trapézio.

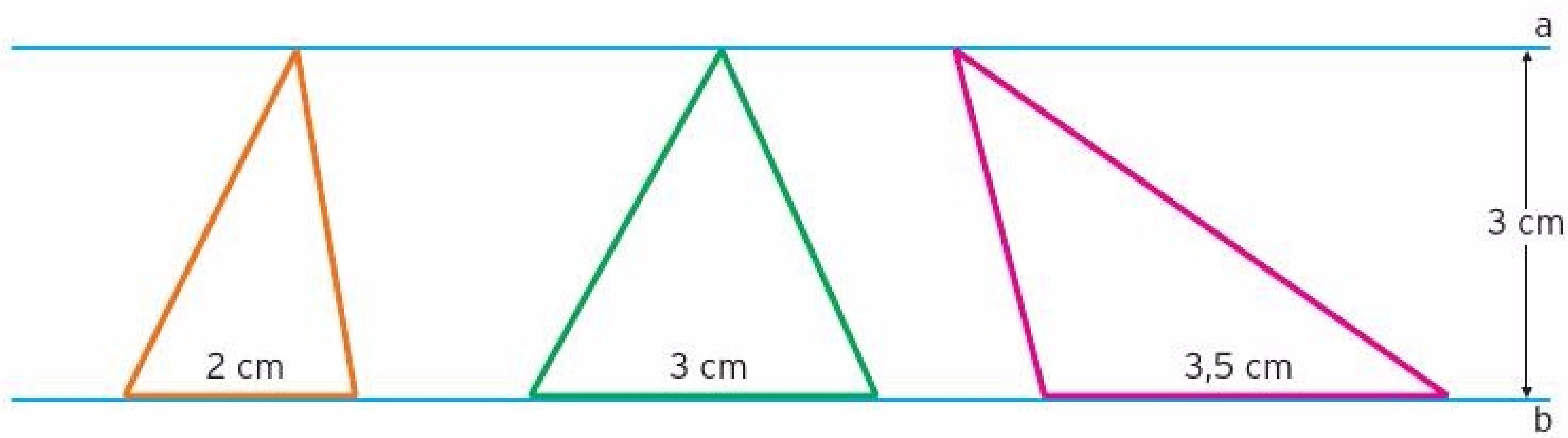
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Calculamos a área do trapézio apresentado na situação acima atribuindo a **h**, **B** e **b** as medidas dadas. Essa área é o valor numérico da expressão $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$, para B = 9, b = 5 e h = 7.

$$A = \frac{(9 + 5) \cdot 7}{2} = \frac{14 \cdot 7}{2} = 49$$ **A = 49 cm²**

Exemplo:

Obtenha uma fórmula para a área dos triângulos desenhados nesta figura:



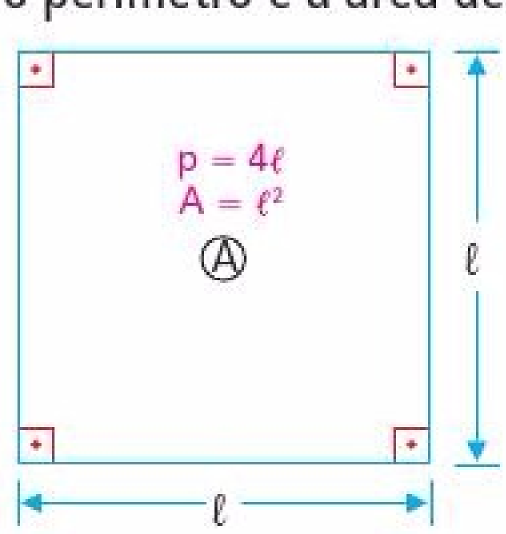
FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

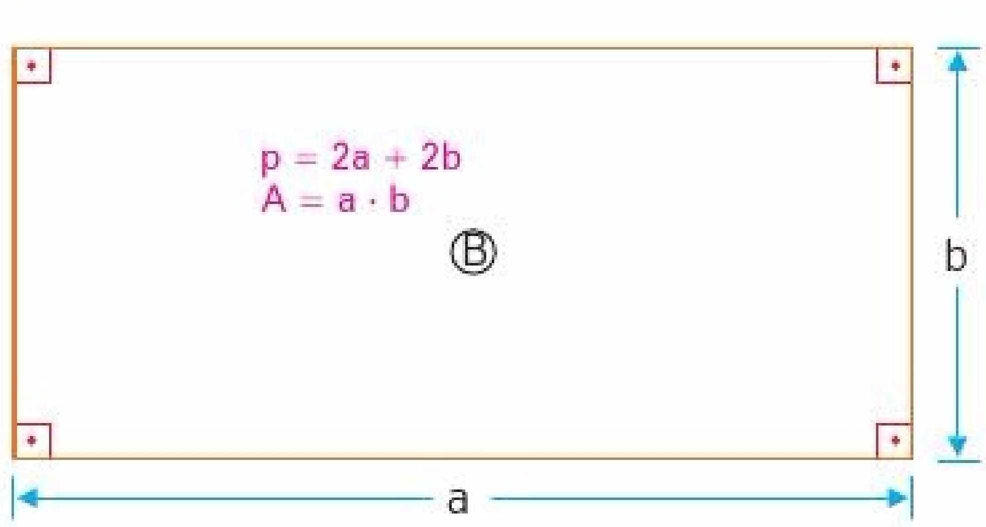
A altura de qualquer desses triângulos é igual a 3 cm; portanto, a área poderá ser indicada pela fórmula: $\mathbf{A = (3 \cdot m) : 2}$, ou $\mathbf{A = \dfrac{3 \cdot m}{2}}$, em que a letra **m** representa a medida da base de qualquer triângulo desenhado da mesma forma, e **A**, a área do triângulo.

Fazer e aprender

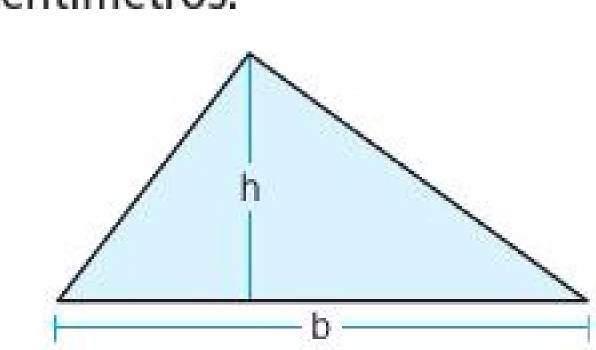
FAÇA NO CADERNO

16. Represente o perímetro e a área destas figuras:





17. No triângulo a seguir, b e h representam medidas em centímetros.

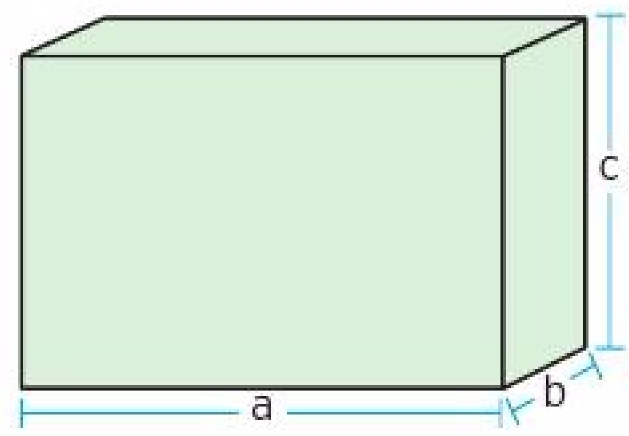


a) Escreva uma fórmula para a área desse triângulo. $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

b) Calcule a área de um triângulo que tem 4,2 cm de base e 5 cm de altura relativa a essa base. 10,5 cm².

18. Uma relação entre a distância d (em metros) percorrida por um corpo e o tempo t (em segundos) necessário para percorrê-la é dada pela fórmula $d = 5 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 12$. Qual é a distância percorrida em 6 segundos? E em 8,2 segundos? 168 m; 315,4 m.

19. Neste bloco retangular, ou paralelepípedo, **a**, **b** e **c** representam medidas na mesma unidade.



a) Qual é a fórmula do volume desse bloco retangular? $V = a \cdot b \cdot c$

b) Qual é o valor numérico da expressão algébrica obtida no item anterior para $a = 6$ cm, $b = 2{,}5$ cm e $c = 4$ cm? O que significa esse valor numérico? 60 cm³; significa o volume do bloco retangular para os valores dados.

20. Na figura da atividade 19, suponha que $a = b = c$ e responda às questões:

a) Que tipo de sólido se obtém nesse caso? Cubo.

b) Qual é a fórmula para o volume desse sólido? $V = a^3$, em que **a** representa a medida da aresta.

c) Qual é o volume desse sólido para $a = 9$ m? 729 m³.

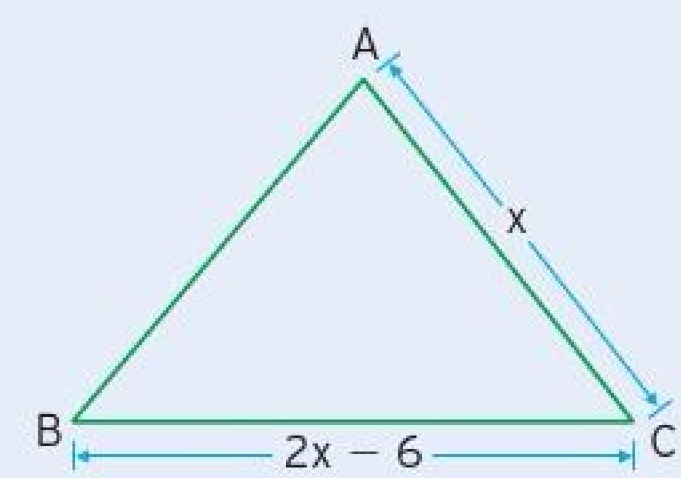
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

O triângulo ao lado é isósceles de base BC.

- Representem o perímetro desse triângulo. $4x - 6$
- Qual é o perímetro desse triângulo para $x = 4{,}8$ cm? 13,2 cm.
- Para que valor de **x** temos um perímetro igual a 26 cm? Quanto medem os lados do triângulo nesse caso? 10 cm, 8 cm, 8 cm.



Em Exercícios Complementares são propostos exercícios de revisão e aprofundamento sobre conteúdos já estudados. Além disso, em alguns deles os alunos têm a oportunidade de ampliar os conhecimentos. Para mais esclarecimentos, leia comentários no **Manual do Professor**.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

21. Copie esta tabela e complete-a.

Língua portuguesa	Expressão algébrica
O dobro do produto de um número real por outro.	$2 \cdot a \cdot b$
O produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.	$(m + n) \cdot (m - n)$
O quadrado da diferença entre dois números reais.	$(x - y)^2$

22. Um carro roda, em média, 8 quilômetros com 1 litro de combustível. Anote as expressões algébricas que representam o total de quilômetros percorridos por esse carro com g litros de combustível:

$2 \cdot 4 \cdot g$ x $10 \cdot g$ $8 \cdot g$ x $4 \cdot g$

23. A conversão de temperaturas de °F (graus Fahrenheit) para °C (graus Celsius) pode ser feita usando-se a fórmula:

$$C = \frac{5F - 160}{9}$$

A quantos graus Celsius correspondem -4 °F? -20 °C.

24. Determine o valor numérico destas expressões algébricas, quando ele existir.

a) $\dfrac{3x - 4}{2\sqrt{x}}$, em que $x = 64$. $\frac{47}{4}$

b) $\dfrac{-2x + y}{x - y}$, em que $x = y = 10$. Não existe.

c) $\dfrac{x^2 - 25}{(x + 5) \cdot (x - 5)}$, em que $x = 10$. 1

2 Monômios

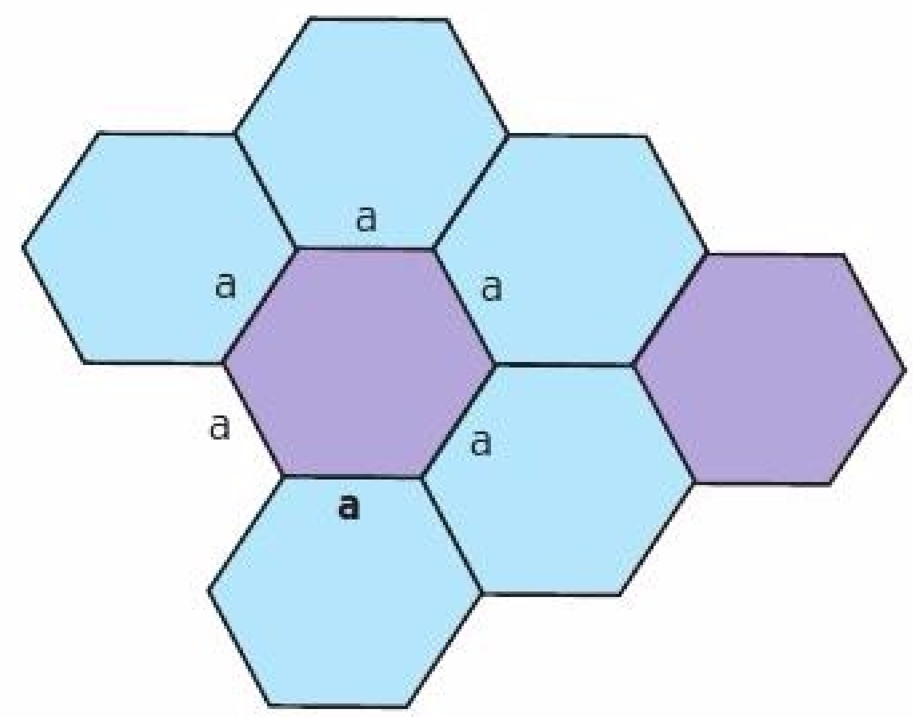
O que são monômios?

Para refletir e responder

Nesta figura, todos os hexágonos são iguais.

A letra **a** representa a medida de cada lado de um hexágono.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES



- Que expressão algébrica representa o perímetro de cada hexágono? 6a

Algumas expressões algébricas envolvem apenas um produto. Identificar essas expressões é o primeiro passo para trabalhar com elas como se fossem números.

Para cada hexágono da figura acima, temos:

$$a + a + a + a + a + a = 6 \cdot a \qquad a + a + a + a + a + a = 6a$$

O perímetro de cada hexágono é representado pela expressão algébrica: $6 \cdot a$ ou $6a$.

6 · a ou **6a** é uma **expressão algébrica** que representa um produto.

6 · a ou **6a** é um **monômio**.

a é a variável.

Um monômio é formado por:

- uma **parte numérica** chamada **coeficiente**;
- uma **parte literal** formada pelas letras, que são as variáveis, e seus expoentes.

Em:

$6 \cdot a$ — **6** é o coeficiente. **a** é a parte literal.

Exemplos:

- x^3 ou $1 \cdot x^3$

  Variável: **x**

  Coeficiente: **1**

  Parte literal: $\mathbf{x^3}$

- $-\dfrac{3 \cdot y^2}{4}$ ou $-\dfrac{3}{4} \cdot y^2$

  Variável: **y**

  Coeficiente: $-\dfrac{3}{4}$

  Parte literal: $\mathbf{y^2}$

- $5 \cdot a \cdot b^5$ ou $5ab^5$

  Variáveis: **a** e **b**

  Coeficiente: **5**

  Parte literal: $\mathbf{ab^5}$

Monômios são expressões algébricas que representam um **produto** de **números reais** por uma **parte literal** formada por letras e seus expoentes, que devem ser números naturais.

As **letras** são as **variáveis** e representam números reais quaisquer.

Vamos combinar:
Todo monômio com coeficiente igual a zero é um **monômio nulo**. O monômio $\mathbf{0 \cdot x^4}$ ou $\mathbf{0x^4}$ é um monômio nulo porque seu coeficiente é igual a zero.

Forma reduzida

Observe a expressão algébrica neste quadro:

Da mesma maneira como fazemos com números, podemos escrever um monômio em uma forma reduzida.

Para a parte numérica:
$2 \cdot (-3) = -6$

Para a parte literal:
$a \cdot x^2 \cdot x^3 = a \cdot x^{2+3} = a \cdot x^5$

$$2 \cdot a \cdot x^2 \cdot (-3) \cdot x^3 = -6 \cdot a \cdot x^5 = -6ax^5$$

$\mathbf{-6ax^5}$ é uma **forma reduzida** do monômio $\mathbf{2 \cdot a \cdot x^2 \cdot (-3) \cdot x^3}$.

Monômios semelhantes

Observe estes dois monômios:

$\mathbf{-11ab}$ $\mathbf{0{,}8ab}$

Eles têm partes literais iguais: são monômios semelhantes.

Dois ou mais monômios que têm **partes literais iguais** são chamados de **monômios semelhantes**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

25. Copie esta tabela e complete-a escrevendo monômios combinando partes literais com coeficientes, como mostra o exemplo:

	a^3	my	x^2	$\frac{m}{t^2}$
-10	$-10a^3$	$-10my$	$-10x^2$	$-10\frac{m}{t^2}$
$-1,2$	$-1,2a^3$	$-1,2my$	$-1,2x^2$	$-1,2\frac{m}{t^2}$
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}a^3$	$-\frac{2}{3}my$	$-\frac{2}{3}x^2$	$-\frac{2}{3}\cdot\frac{m}{t^2}$

26. Os monômios $-\frac{3\cdot y^2}{4}$ e $-\frac{3y^1}{4}$ são semelhantes? Justifique sua resposta.
Não, porque eles têm partes literais diferentes.

27. Apresente dois monômios semelhantes a $-\frac{3\cdot y^2}{4}$. Resposta possível: $12y^2$, $-3y^2$.

28. Quando um monômio é nulo? Quando tem coeficiente igual a zero.

29. Indique três monômios que tenham:

a) parte literal ab^4; b) coeficiente $-3,5$.

Respostas possíveis:
a) $2ab^4$; $-\frac{3}{5}ab^4$; $10ab^4$. b) $-3,5x$; $-3,5a^2b$; $-3,5c$

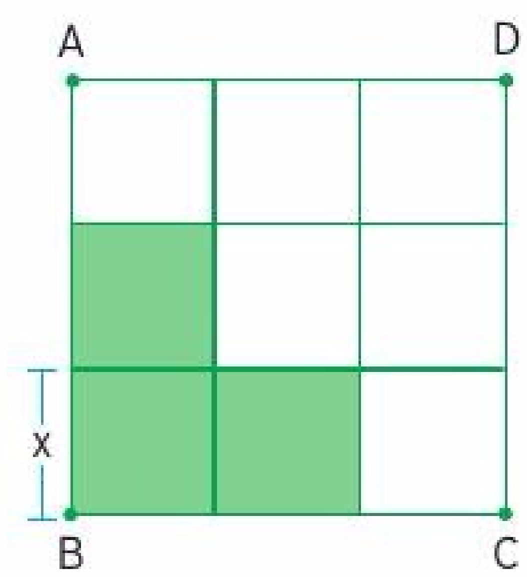
30. Com os monômios a seguir, forme grupos de monômios semelhantes: a, e; b, d; c, f

a) $-9m^2n$ d) $\frac{12}{35}mn^2$

b) $0,8mn^2$ e) $0,8m^2n$

c) $-\frac{12}{35}mn$ f) $21mn$

31. Represente usando monômios:



x é a medida do lado de um quadradinho.

a) a medida do lado do quadrado ABCD; $3x$

b) a área da parte pintada em verde. $3x^2$

- Os monômios encontrados nos dois itens anteriores são semelhantes? Por quê?
Não, porque eles têm partes literais diferentes.

32. Copie e complete esta tabela escrevendo os monômios em uma forma reduzida. Identifique o coeficiente e a parte literal de cada um deles.

Monômios	$3\cdot(10x^2)\cdot x$	$\frac{1}{2}\cdot(-8x^3)\cdot x^4$	$-4\cdot(2x)\cdot\frac{1}{6}y^2$	$-5\cdot(10x)\cdot\left(-\frac{1}{50}\right)\cdot y$	$3\cdot(0x^2)$
Forma reduzida	$30x^3$	$-4x^7$	$-\frac{4}{3}xy^2$	xy	$0x^2$
Coeficiente	30	-4	$-\frac{4}{3}$	1	0
Parte literal	x^3	x^7	xy^2	xy	x^2

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Copiem e completem esta tabela em seus cadernos:

Número	0	1	2	5	15	37	n
Dobro do número	0	2	4	10	30	74	2n

- Que tipo de número representa o monômio **2 · n**, sendo que **n** representa um número natural? Um número par.

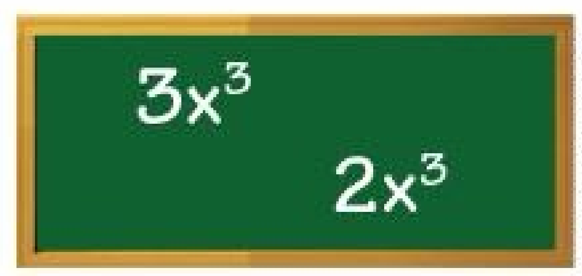
3 Operações entre monômios

Adição e subtração

Podemos efetuar operações entre monômios empregando as propriedades já estudadas para os números.

Para refletir e responder

Observe os monômios registrados no quadro.



ELIANA DELARISSA

FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual é a soma dos monômios que estão no quadro? $5x^3$

Primeiro observamos que os monômios **$3x^3$** e **$2x^3$** são semelhantes.

$$3x^3 + 2x^3 = \underbrace{\overbrace{x^3 + x^3 + x^3}^{3x^3} + \overbrace{x^3 + x^3}^{2x^3}}_{5x^3} \quad \text{———} \quad 3x^3 + 2x^3 = 5x^3 \quad (3 + 2)$$

Adicionamos os coeficientes e conservamos a parte literal.

Ou, ainda, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$3x^3 + 2x^3 = (3 + 2) \cdot x^3 = 5x^3$$

A soma de $3x^3$ com $2x^3$ é igual a $5x^3$.

Veja outros exemplos:

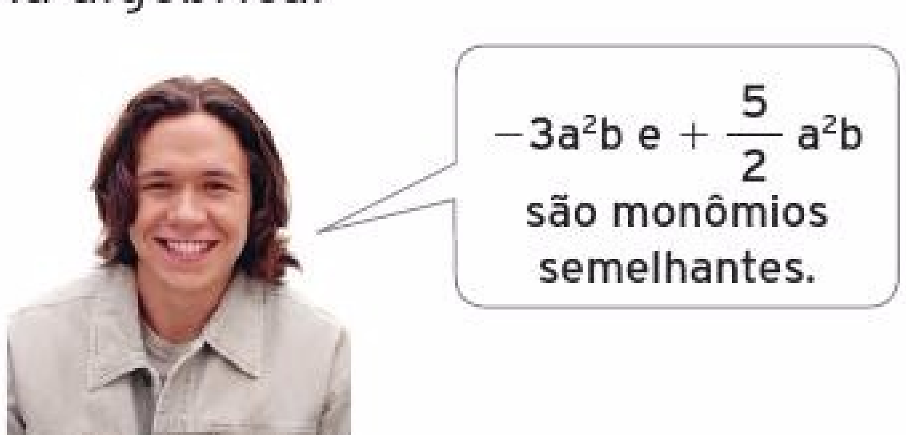
- Calcule a diferença: $-3a^2b - \left(-\frac{5}{2}a^2b\right)$

Começamos eliminando os parênteses e transformando a expressão algébrica em uma soma algébrica:

$$-3a^2b - \left(-\frac{5}{2}a^2b\right) = \underbrace{-3}a^2b + \underbrace{\frac{5}{2}}a^2b$$

$$-3 + \frac{5}{2}$$

$$-3a^2b - \left(-\frac{5}{2}a^2b\right) = \left(-\frac{6}{2} + \frac{5}{2}\right)a^2b = -\frac{1}{2}a^2b$$



- $\frac{1}{2}x^2 - 3x^2 + \frac{5}{6}x^2 = \left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{5}{6}\right)x^2 = \frac{3 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{6}x^2 = \frac{3 - 18 + 5}{6}x^2 = -\frac{10}{6}x^2 = -\frac{5}{3}x^2$
- $ax - 3ax - \frac{5}{2}ax = \left(1 - 3 - \frac{5}{2}\right)ax = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5}{2}ax = \frac{2 - 6 - 5}{2}ax = -\frac{9}{2}ax$

- $-3ab^3 - \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{18}ab^3 + \frac{7}{9}ab^3$

Temos uma soma algébrica com quatro parcelas.

Como os monômios são semelhantes, podemos escrever:

$$-3ab^3 - \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{18}ab^3 + \frac{7}{9}ab^3 = \left(-3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{7}{9}\right)ab^3 =$$

$$= \left(-\frac{54}{18} - \frac{3}{18} + \frac{1}{18} + \frac{14}{18}\right)ab^3 = -\frac{42}{18}ab^3 = -\frac{7}{3}ab^3$$

$-3ab^3 - \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{18}ab^3 + \frac{7}{9}ab^3$ é igual a $-\frac{7}{3}ab^3$.

A soma ou a diferença de dois monômios semelhantes é um monômio com:
- coeficiente igual à soma algébrica dos coeficientes;
- parte literal igual à desses monômios.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

33. Calcule a soma e a diferença, na ordem dada, entre estes monômios:

a) $-5x^2$ e $-7x^2$ $-12x^2$; $2x^2$

b) $-ay^3$ e $10ay^3$ $9ay^3$; $-11ay^3$

c) $\frac{3}{4}xy^2$ e $-\frac{1}{2}xy^2$ $\frac{1}{4}xy^2$; $\frac{5}{4}xy^2$

d) $\frac{1}{3}x^2y$ e $\frac{2}{5}x^2y$ $\frac{11}{15}x^2y$; $-\frac{1}{15}x^2y$

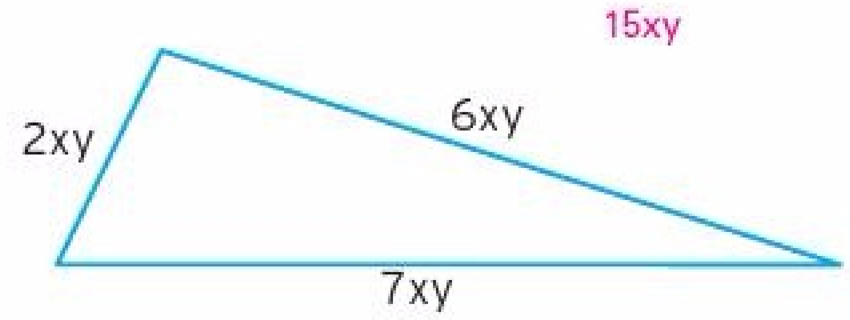
e) $-ax^4$ e $-0{,}2ax^4$ $-1{,}2ax^4$; $-0{,}8ax^4$

f) $-1{,}4bmx^3$ e $\frac{5}{6}bmx^3$ $-\frac{17}{30}bmx^3$; $-\frac{67}{30}bmx^3$

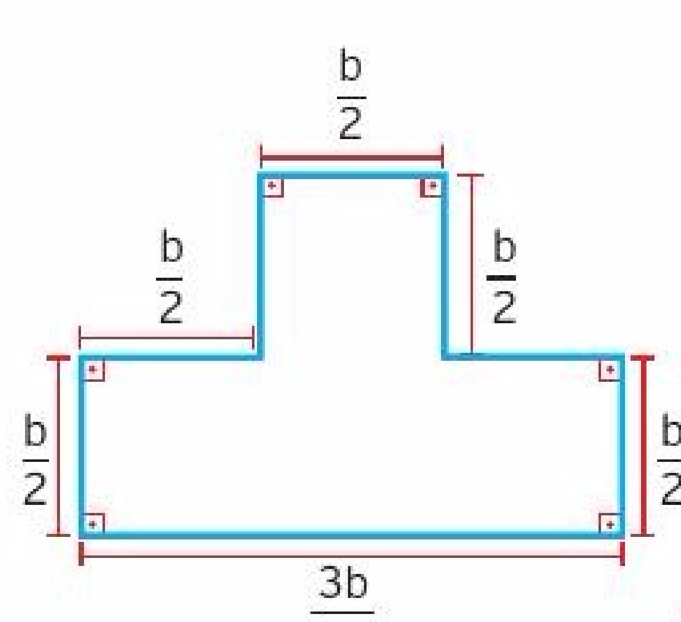
34. Qual é o monômio que na forma reduzida corresponde a: $-\frac{3}{4}x^3y^2 - \left(-\frac{x^3y^2}{8}\right)$? $-\frac{5}{8}x^3y^2$

35. Calcule o perímetro de cada figura. As medidas dos lados são dadas em uma mesma unidade e estão representadas por monômios.

a) 15xy

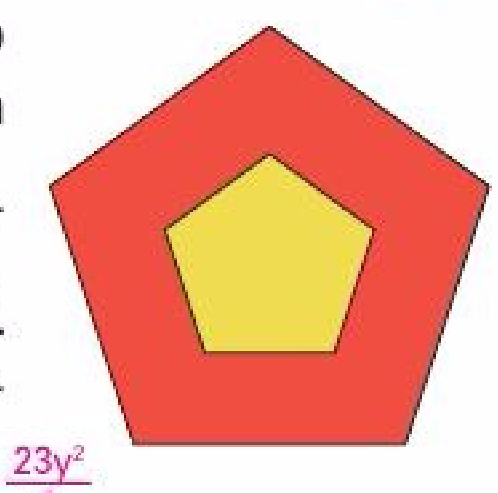


b)

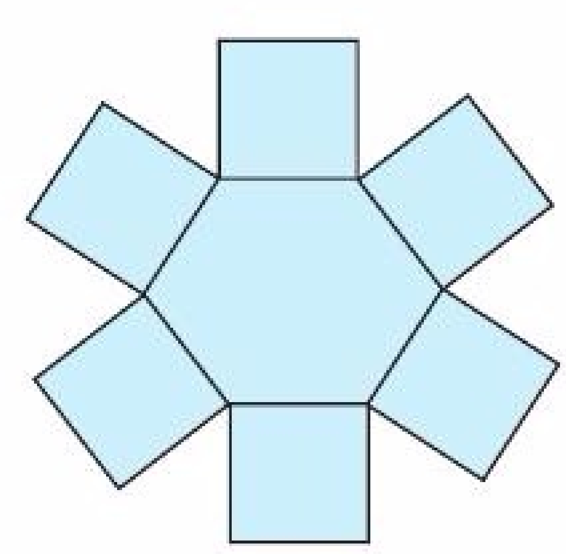


4b

36. A área do pentágono menor é representada por $\frac{y^2}{6}$, e a área do pentágono maior, por $4y^2$. Determine a área da parte pintada de vermelho. $\frac{23y^2}{6}$



37. A área desta figura é representada pelo monômio $33a^2b$, e a área de cada quadrado, por $2a^2b$. Determine a área do hexágono. $21a^2b$



38. Simplifique a seguinte expressão:

$(-27xy + 32xy - 4xy) - (18xy + xy)$ $-18xy$

39. Calcule estas somas algébricas:

a) $-3m^2n + \frac{3}{8}m^2n + 6m^2n - \frac{5}{8}m^2n - m^2n$; $\frac{7}{4}m^2n$

b) $-0{,}5xy + \frac{3}{5}xy + \frac{1}{2}xy - 0{,}6xy$. 0

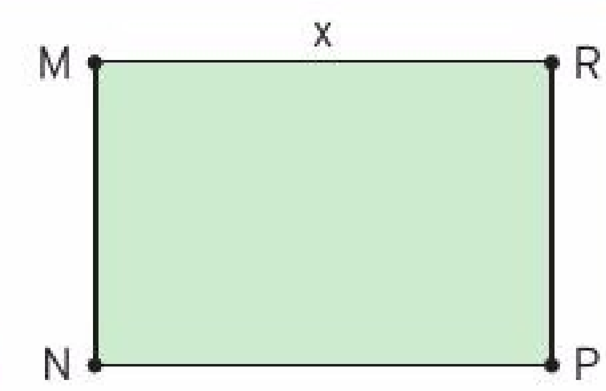
Proponha aos alunos outras aplicações de perímetros de figuras, áreas de quadrados e de retângulos como recursos gráficos para concretizar situações que envolvam operações com monômios.

Multiplicação e divisão

Multiplicamos e dividimos monômios aplicando as propriedades que já conhecemos para a multiplicação e a divisão de potências de números.

Para refletir e responder

Observe o retângulo MNPR.



Nele a medida da largura corresponde a dois terços da medida do comprimento, representada por **x**.

- Que expressão algébrica representa a área desse retângulo? $\frac{2}{3}x^2$

Representamos a medida da largura por $\frac{2}{3}x$. A área do retângulo é igual ao produto da medida da largura pela medida do comprimento.

x — medida do comprimento

$\frac{2}{3}x$ — medida da largura

$$\text{área} = \underbrace{x}_{1x} \cdot \frac{2}{3}x = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^{1+1}} = \frac{2}{3} \cdot x^2 = \frac{2}{3}x^2$$

$x \cdot \frac{2}{3}x$ é um produto de monômios.

O monômio $\frac{2}{3}x^2$ representa a área desse retângulo e é o produto dos monômios x e $\frac{2}{3}x$.

Exemplos:

- $\left(-\frac{10}{9}x^2y^3\right) \cdot \left(-\frac{6}{5}xy^4\right) = \left(+\frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{5}_{\,1}}\right) \cdot x^2 \cdot x \cdot y^3 \cdot y^4 = \frac{4}{3} \cdot x^{2+1} \cdot y^{3+4} = \frac{4}{3}x^3y^7$

Observe com os alunos que na multiplicação e na divisão de monômios efetuamos os cálculos ainda que eles não sejam semelhantes. O mesmo não ocorre na adição e na subtração.

- Calcule $(3x^2) \cdot (-5x) \cdot \left(+\frac{1}{18}x^3\right)$.

Temos três fatores. Veja como calculamos o produto nesse caso:

$$(3x^2) \cdot (-5x) \cdot \left(+\frac{1}{18}x^3\right) = \cancel{3}^{\,1} \cdot (-5) \cdot \left(\frac{1}{\cancel{18}_{\,6}}\right) \cdot x^2 \cdot x \cdot x^3 = -\frac{5}{6} \cdot x^6$$

O produto de dois ou mais monômios é um monômio com:
- coeficiente igual ao produto dos coeficientes desses monômios;
- parte literal igual ao produto das partes literais desses monômios.

Para refletir e responder

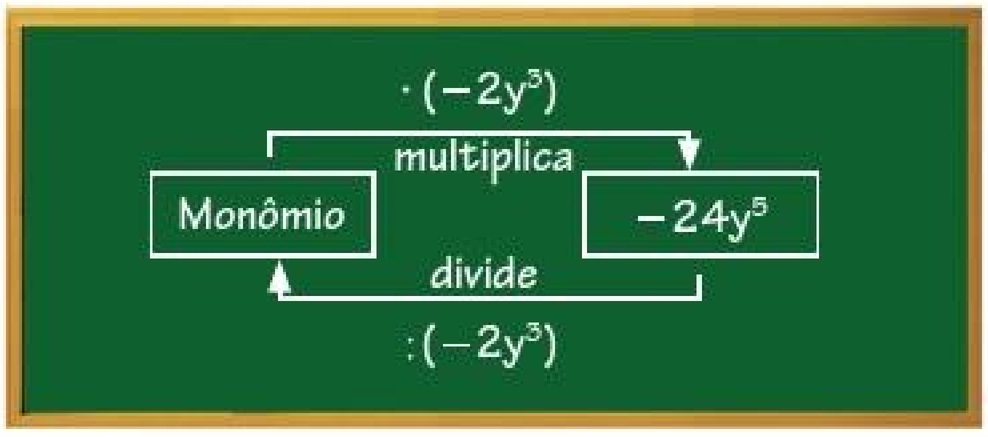
Observe esta cena:

Qual é o monômio que multiplicado por $-2y^3$ tem como produto $-24y^5$?

Espere um pouco. Deixe-me pensar.

Divisão é a operação inversa da multiplicação.

- Vamos encontrar uma resposta? $12y^2$, com $y \neq 0$.



ELIANA DELARISSA

Dividindo $-24y^5$ por $-2y^3$ obtemos o monômio desconhecido no problema proposto pelo garoto.

$(-24y^5) : (-2y^3)$ é uma divisão de monômios. O monômio $12y^2$ é o quociente da divisão de $-24y^5$ por $-2y^3$, com $y \neq 0$.

$$(-24y^5) : (-2y^3) = \frac{-24y^5}{-2y^3} =$$
$$= +\frac{24}{2} \cdot \frac{y^5}{y^3} = 12y^{5-3} = 12y^2$$

Divisão de potências de bases iguais.

Assim, $12y^2$ é o monômio que multiplicado por $-2y^3$ tem como resultado $-24y^5$.

Exemplos:

- $(28a^3x^4) : (-12ax^2) = -\dfrac{28a^3x^4}{12ax^2} =$
  $= -\dfrac{7}{3}a^{3-1} \cdot x^{4-2} = -\dfrac{7}{3}a^2x^2$, com $x \neq 0$.
- $\left(-\dfrac{3}{5}x^2y^3\right) : \left(\dfrac{2}{15}x^2y\right) = -\left(\dfrac{3}{\cancel{5}_1} \cdot \dfrac{\cancel{15}^3}{2}\right)\dfrac{x^2y^3}{x^2y} =$
  $= -\dfrac{9}{2}x^{2-2} \cdot y^{3-1} = -\dfrac{9}{2}x^0 \cdot y^2 = -\dfrac{9}{2}y^2$,
  com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

O quociente entre dois monômios, com o divisor diferente de zero, tem:
- coeficiente igual ao quociente entre os coeficientes desses monômios;
- parte literal igual ao quociente entre as partes literais desses monômios.

Nas divisões, vamos considerar os **divisores** sempre **diferentes de zero**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

40. Determine os monômios que representam as áreas do quadrado e dos retângulos abaixo. As medidas dos lados de cada figura, em uma mesma unidade, são representadas por monômios indicados nas figuras.

a) $5x$; $5x$ — $25x^2$

b) $3y^3$; $\frac{y^2}{2}$ — $\frac{3}{2}y^5$

c) y^2 ; x — xy^2

41. Calcule estes produtos:

a) $\left(-\dfrac{1}{2}a\right) \cdot (+2a) \cdot (-6)$ $6a^2$

b) $(-0{,}2m^3n) \cdot (-5m^2n^3) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}m\right)$ $-\frac{1}{4}m^6n^4$

c) $\left(-\dfrac{4}{3}xy^2\right) \cdot \left(\dfrac{6}{5}x^2y\right) \cdot \left(-\dfrac{15}{8}x\right)$ $3x^4y^3$

42. Qual é o monômio que multiplicado por $20x^3y$ tem como produto $-18x^4y^2$? $-\frac{9}{10}xy$

43. Calcule os quocientes:

a) $-7xy^2 : y^2$ $-7x$

b) $2{,}8abc : +0{,}7abc$ 4

c) $-\dfrac{7}{10}a^2b^4 : \dfrac{14}{5}ab^2$ $-\frac{1}{4}ab^2$

Potenciação

Para elevar um monômio a uma potência, aplicamos as propriedades já estudadas para os números.

Podemos calcular, por exemplo, o cubo de x^2 de duas maneiras:

- escrevendo $(x^2)^3$ como um produto de três fatores iguais a x^2.

$$(x^2)^3 = \underbrace{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2}_{x^{2+2+2}} \;\_\_\_\_\; (x^2)^3 = x^6$$

- aplicando a propriedade da potência de potências.

$$(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6 \;\_\_\_\_\; (x^2)^3 = x^6$$

Portanto, $(x^2)^3 = x^6$.

> A potência de um monômio é um monômio com:
> - coeficiente igual à potência do coeficiente desse monômio;
> - parte literal igual à potência da parte literal desse monômio.

Vamos combinar que, em potências de monômios, a **parte literal** é **diferente de zero**.

Simplificação de expressões algébricas

Podemos simplificar as expressões algébricas que envolvem operações procedendo da mesma forma que em expressões numéricas. Efetuamos primeiro as potências, em seguida calculamos os produtos e os quocientes e, finalmente, as somas algébricas, reduzindo os termos semelhantes. Veja um exemplo.

Simplifique a expressão algébrica: $(2x^2)^3 : 5x^3 + 6x^2 + \dfrac{x^3}{5}$

$$(2x^2)^3 : 5x^3 + 6x^2 + \frac{x^3}{5} = 8x^6 : 5x^3 + 6x^2 + \frac{x^3}{5} = \frac{8}{5}x^3 + 6x^2 + \frac{x^3}{5} = \frac{9}{5}x^3 + 6x^2$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

44. Calcule estas potências:

a) $(-3x^2y^3)^3$ $-27x^6y^9$

b) $(0{,}2y^2z)^5$ $0{,}00032y^{10}z^5$

c) $-\left(\dfrac{mn^3}{4}\right)^3$ $-\dfrac{m^3n^9}{64}$

d) $(-0{,}3ay^4)^2$ $0{,}09a^2y^8$

e) $(-1{,}2a^4b^2)^2$ $1{,}44a^8b^4$

f) $(0{,}1xy^6)^4$ $0{,}0001x^4y^{24}$

45. Simplifique as expressões algébricas:

a) $-8ax^2 + 10ax^2 + 18ax^3 : (-3x)$ $-4ax^2$

b) $\left(-\dfrac{2}{3}x^2y\right)^2 - \dfrac{1}{2}x^5y^3 : \left(-\dfrac{3}{2}xy\right)$ $\dfrac{7}{9}x^4y^2$

c) $-4a^3y^4 : (0{,}2ay) - 0{,}8a^2y^3 + y^3$ $-20{,}8a^2y^3 + y^3$

46. Cada sequência de monômios a seguir apresenta pelo menos um padrão. Descubra um deles.
A – Cada monômio, a partir de $6x^2$, é o anterior multiplicado por -3. B – Cada monômio, a partir de $32a^2$, é o anterior multiplicado por $\frac{1}{2}$ a.

a) Mantenha o padrão descoberto e indique os monômios que estão escondidos nos quadrinhos.
C – Cada monômio, a partir de $\frac{1}{125}x^3$, é o anterior multiplicado por 5.

Ⓐ	$-2x^2$	$6x^2$	$-18x^2$	$54x^2$	$-162x^2$	$486x^2$	$-1458x^2$
Ⓑ	$64a$	$32a^2$	$16a^3$	$8a^4$	$4a^5$	$2a^6$	a^7
Ⓒ	$\frac{1}{625}x^3$	$\frac{1}{125}x^3$	$\frac{1}{25}x^3$	$\frac{1}{5}x^3$	x^3	$5x^3$	$25x^3$

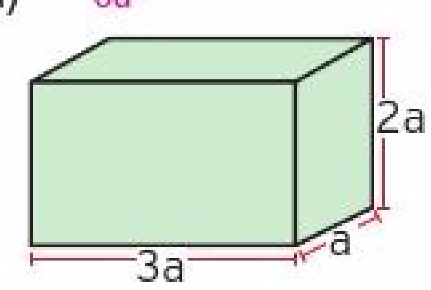
Descubra um padrão antes!

b) Quais das sequências dadas são formadas de monômios semelhantes? A; C.

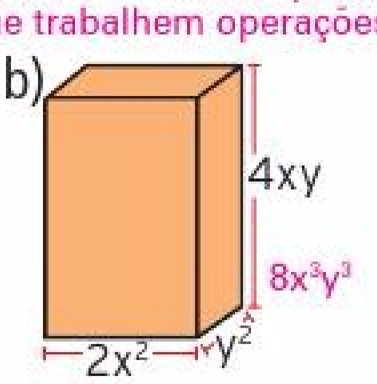
47. Leia a informação dada pela professora e, em seguida, determine o monômio que representa o volume dos paralelepípedos das figuras. As medidas das arestas de cada paralelepípedo, em uma mesma unidade, estão representadas por monômios indicados nas figuras.
Procure explorar aplicações, envolvendo o volume de paralelepípedos e suas planificações, que possam concretizar situações que trabalhem operações com expressões algébricas.

O volume de um paralelepípedo é o produto das medidas: comprimento, largura e altura.

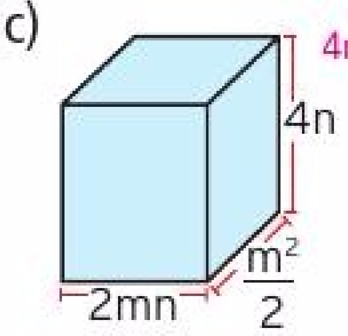
a) $6a^3$



b)



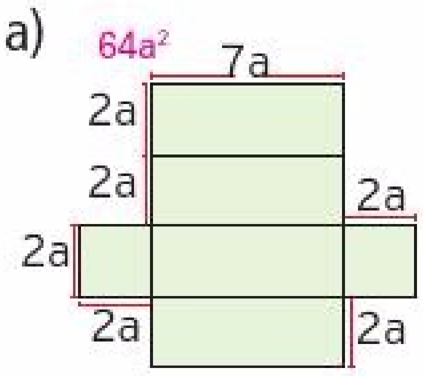
c) $4m^3n^2$



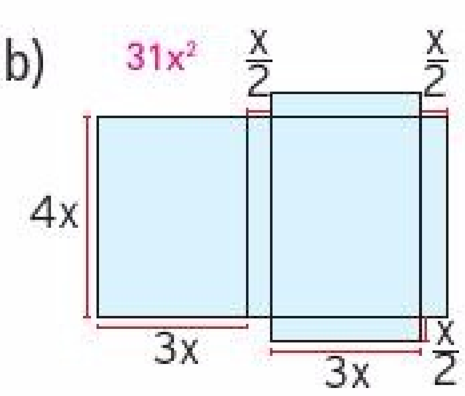
48. Observe cada caixa a seguir, que tem a forma de um paralelepípedo, e suas planificações. As medidas das arestas de cada caixa, numa mesma unidade, estão representadas por monômios indicados nas figuras. Determine o monômio que representa a área total da superfície de cada caixa.

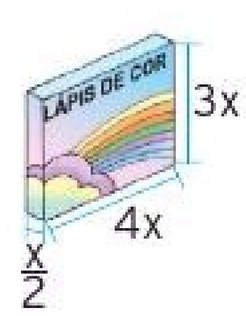
A área total é a soma das áreas das faces.

a) $64a^2$



b) $31x^2$





Desafio

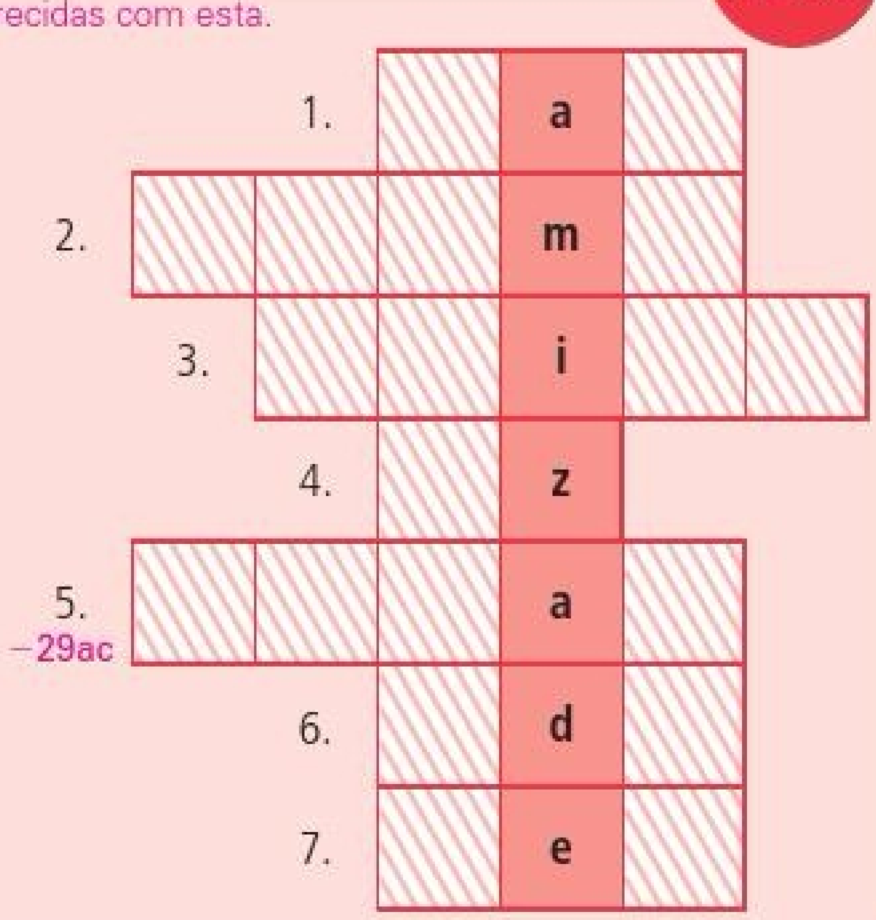
FAÇA NO CADERNO

Incentive os alunos a criar atividades parecidas com esta.

Amizade: a palavra-chave

Copie a cruzadinha e complete as linhas horizontais com:

1. A soma algébrica de $3ax^2$ com $-ax^2$. $2ax^2$
2. O produto de $3y$ por $-mx$. $-3xmy$
3. A diferença entre $-\frac{1}{4}$ irt e $\frac{3}{4}$ irt. -1irt
4. O quociente entre $10xz^2$ e $2xz$. $5z$
5. O número que multiplicado por $-2ab$ resulta em $58a^2bc$. $-29ac$
6. O número que dividido por $-3m$ dá $\frac{d}{3}$. $-dm$
7. O produto de y pela soma de ey com seu triplo. $4ey^3$

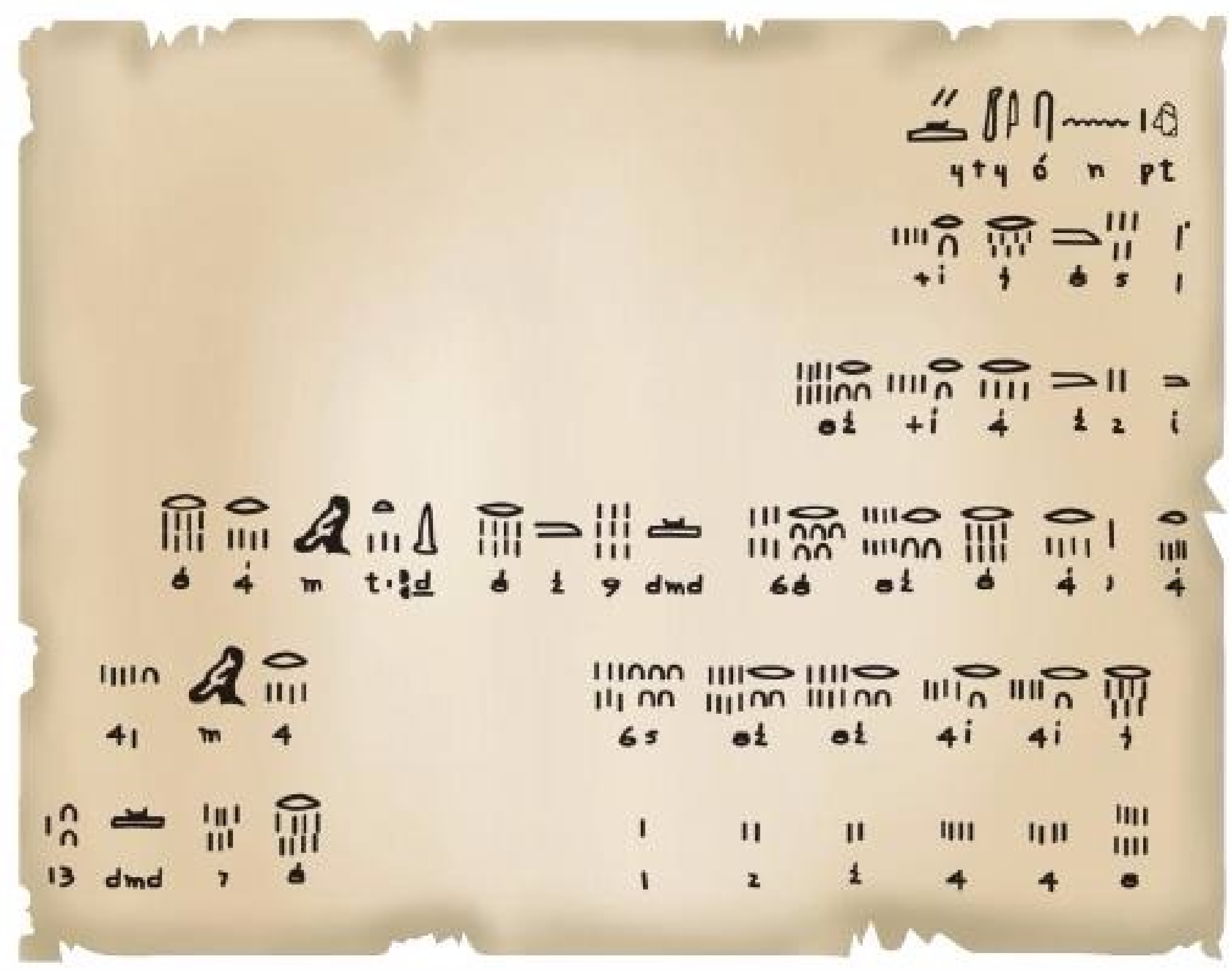


Leitura

O uso de letras para decifrar o desconhecido

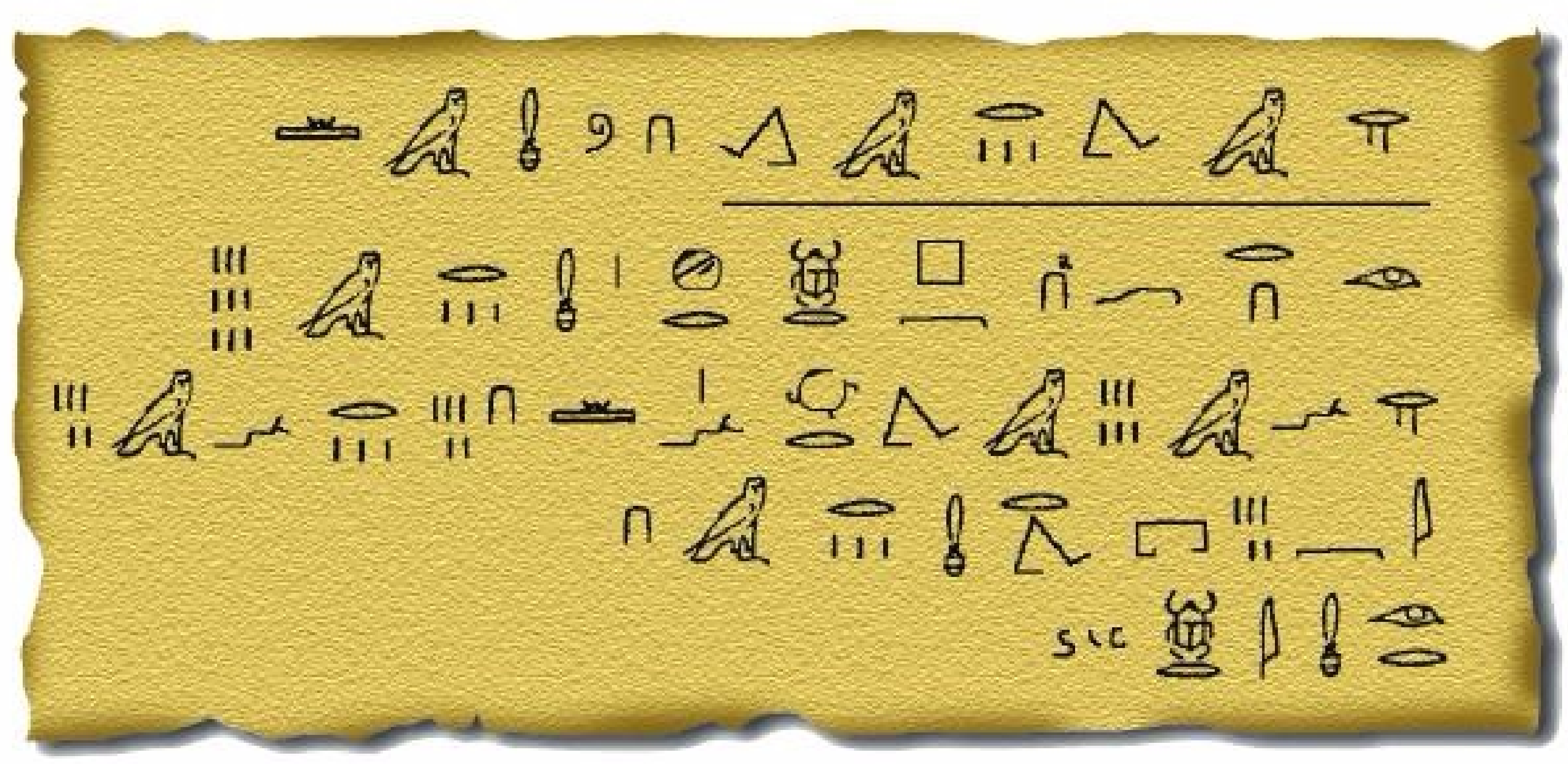
As questões matemáticas acompanham o ser humano há muito tempo, desde a época dos faraós, no Antigo Egito. Portanto, há mais de 3 000 anos. Essas questões iam além da Aritmética simples, utilizada para resolver problemas do cotidiano.

O *Papiro de Rhind* é um dos documentos mais antigos e importantes sobre a Matemática egípcia. Ele foi escrito por volta de 1650 a.C. e mostra que já nessa época se trabalhava com problemas que envolviam quantidades desconhecidas: o que chamamos atualmente de incógnitas. Para as incógnitas de uma equação, existia um hieróglifo *hau* ou *aha*, que significava "montão". Por isso, esse papiro também é conhecido como *Papiro de Aha*.

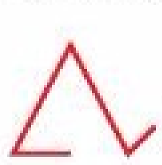


Fragmento do grande *Papiro de Rhind*.

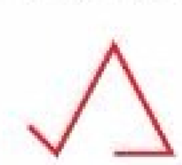
Na ilustração a seguir, temos um fragmento desse papiro, do qual foram destacados dois símbolos:



Os egípcios usaram desenhos de duas pernas dando passos:

 significava "adição"

Passo para a frente.

 significava "subtração"

Passo para trás.

O *Papiro de Rhind* está no Museu Britânico, em Londres, e recebeu esse nome por ter sido adquirido pelo banqueiro e antiquário Henry Rhind em 1858, na cidade de Luxor, no Egito. O documento pode ser chamado também de *Papiro de Ahmes*, em homenagem ao escriba que o registrou.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Se $x = 0{,}777...$ e $y = 0{,}0222$, qual é o valor de $x + y$? 0,8.

2. Determine a medida aproximada da diagonal de um retângulo cujos lados medem 10 cm e 14 cm. 17,20 cm.

3. Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos mede 12 cm. Qual é o perímetro desse retângulo? 36 cm.

4. Escreva uma expressão algébrica para:

a) o cubo de um número real; x^3

b) a metade do quadrado de um número real; $\frac{x^2}{2}$

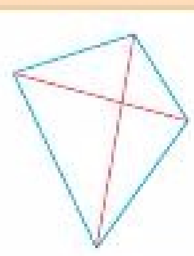
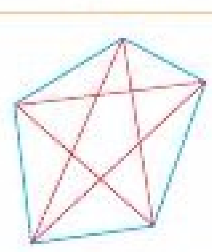
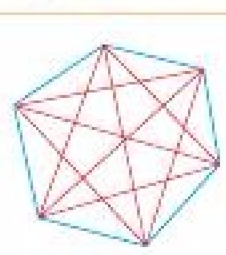
c) 25 unidades a mais que o triplo de um número real; $3x + 25$

d) o quociente entre os números reais representados por **x** e **y**, com $y \neq 0$, nessa ordem. $\frac{x}{y}$

5. Qual é o resultado de: $-ab$

$$\frac{1}{12}ab - \left(\frac{3}{4}ab - \frac{1}{2}ab + ab\right) - \left(\frac{5}{6}ab - ab\right)?$$

6. Observe os polígonos apresentados nesta tabela e o número de suas diagonais:

Figura	Número de diagonais
Quadrilátero 	$\frac{4 \cdot (4 - 3)}{2} = 2$
Pentágono 	$\frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5$
Hexágono 	$\frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$

a) Encontre um padrão na maneira de calcular o número de diagonais. [(nº de lados) · (nº de lados – 3)] : 2

b) Quantas diagonais possui um octógono? 20 diagonais.

c) Escreva uma fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo de **n** lados. $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

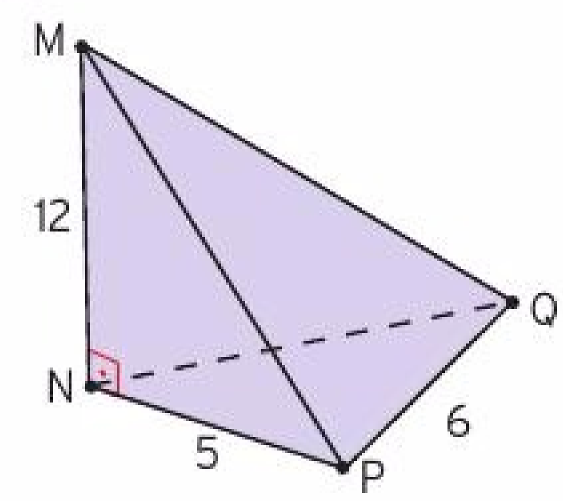
7. Um número real compreendido entre $3 \cdot 10^{-1}$ e $\frac{1}{3}$ pode ser: c

a) 0,03
b) 0,032
c) 0,32
d) 0,35

8. O valor numérico da expressão $a^3 - 3a^2 \cdot x^2 \cdot y^2$, em que $a = 10$, $x = 3$ e $y = 1$, é igual a: a

a) -1700
b) -1500
c) 1000
d) 2700

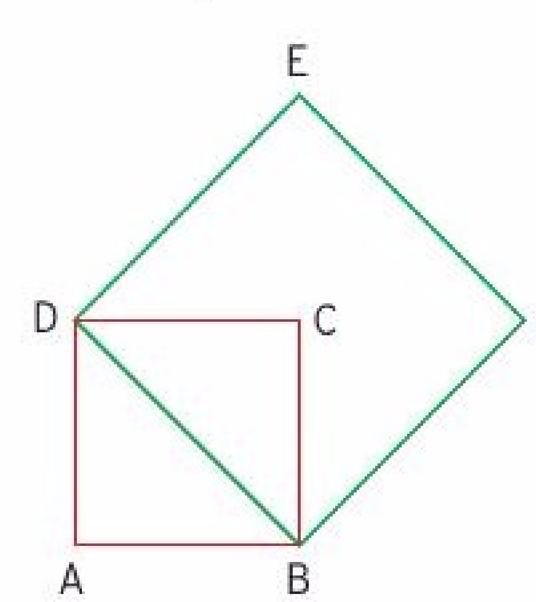
9. Nesta pirâmide as medidas de suas arestas estão indicadas em centímetros e a face MPQ é um triângulo isósceles.



O perímetro do $\triangle MPQ$ é igual a: d

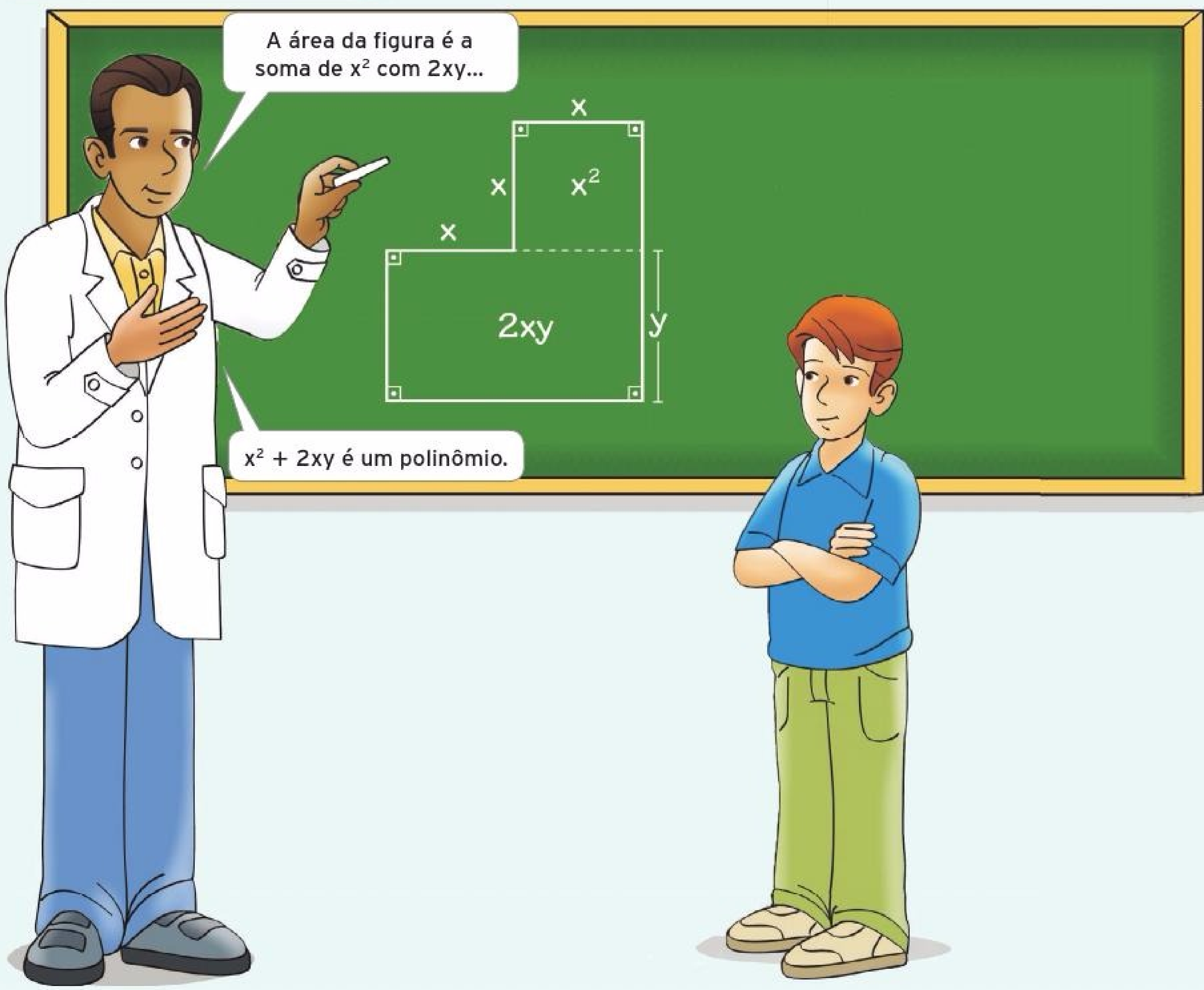
a) 20 cm
b) 23 cm
c) 30 cm
d) 32 cm

10. Os quadriláteros ABCD e DBFE são quadrados. Se os lados do quadrado ABCD medem 3 cm, então a área do quadrado DBFE é igual a: a



a) $18\ cm^2$
b) $9\ cm^2$
c) $\sqrt{18}\ cm^2$
d) $\sqrt{12}\ cm^2$

UNIDADE 5 Polinômios e operações



A expressão algébrica apresentada pelo professor é um polinômio. Com os polinômios podemos efetuar todas as operações que já aprendemos e utilizar as propriedades dessas operações.

Mas o que é um polinômio? Como operar com eles? Esses são os assuntos que serão explorados nesta unidade.

Nesta unidade...

1. Polinômios.
2. Polinômio com uma variável.
3. Adição e subtração de polinômios.
4. Multiplicação e divisão de polinômios.

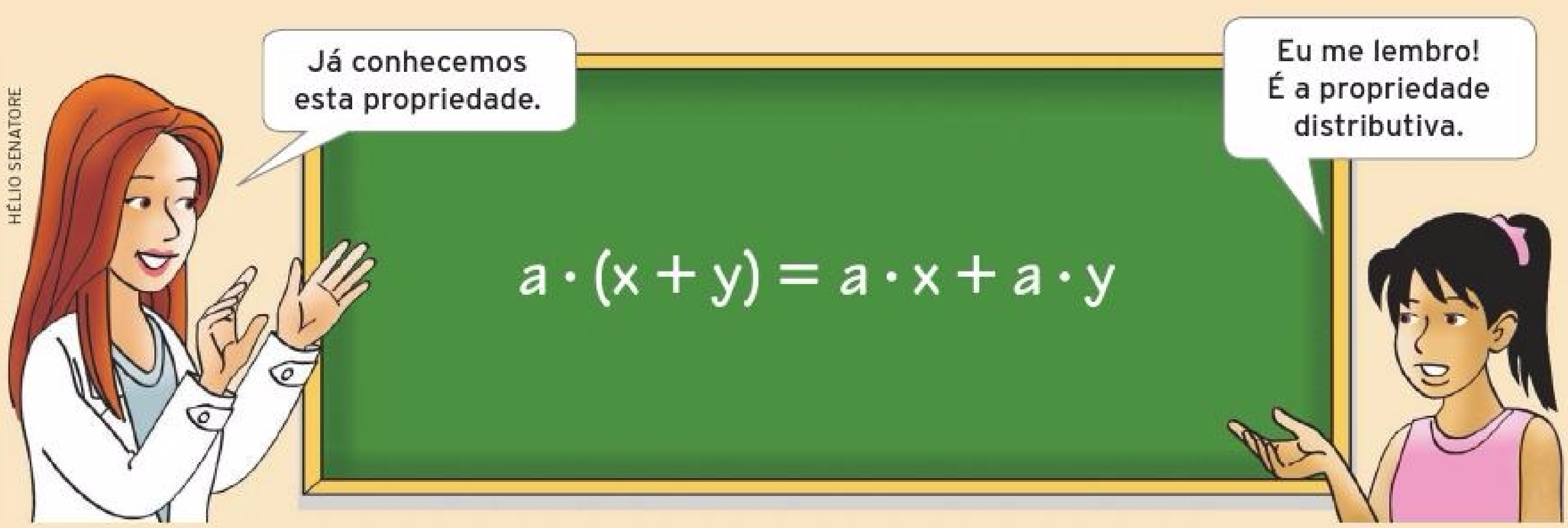
Em 1638, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) usou as primeiras letras do alfabeto para designar os números conhecidos e as últimas letras para as incógnitas. Com isso, ele deu grande avanço ao longo processo evolutivo do simbolismo algébrico. Sua obra é o primeiro texto matemático que um estudante de Matemática atual pode ler sem encontrar dificuldades com a notação.


AKG-IMAGES/LATINSTOCK

René Descartes (1596-1650).

Observe, a seguir, um exemplo de expressão algébrica em que usamos letras para representar números reais.

HÉLIO SENATORE



A igualdade apresentada pela professora é genérica: **a**, **x** e **y** representam números reais quaisquer. A expressão algébrica $a \cdot x + a \cdot y$ é um polinômio.

O que você já sabe?

- Qual foi o polinômio obtido pelo professor na página 86? $x^2 + 2xy$
- Aplique a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e elimine os parênteses em $2 \cdot (3t - t^3)$. A expressão obtida é um polinômio? Sim: $2 \cdot (3t - t^3) = 6t - 2t^3$.
- O matemático francês René Descartes usou as letras **x**, **y**, **z** para indicar incógnitas ou números conhecidos em uma equação? Incógnitas.

1 Polinômios

Binômios, trinômios e polinômios

Explore esquemas de visualização em situações que envolvem polinômios, espaço e forma e grandezas e medidas. São esquemas que poderão auxiliar os alunos no processo de compreensão e construção do conceito de polinômios e dos algoritmos das operações efetuadas com eles.

Para refletir e responder

Nestas figuras, **a**, **b** e **c** representam medidas de lados de quadrados.

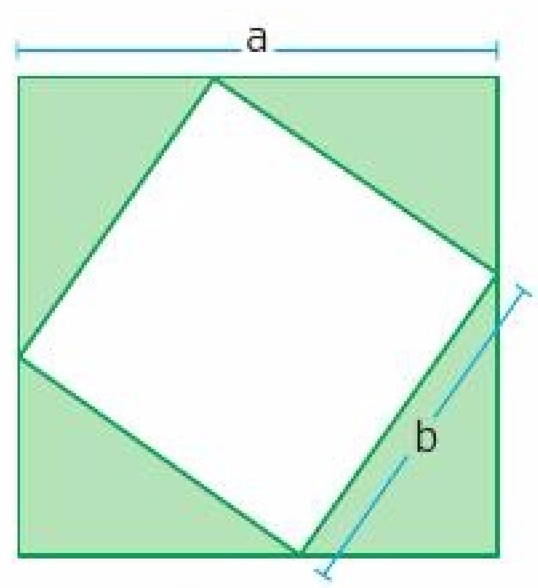


Figura A

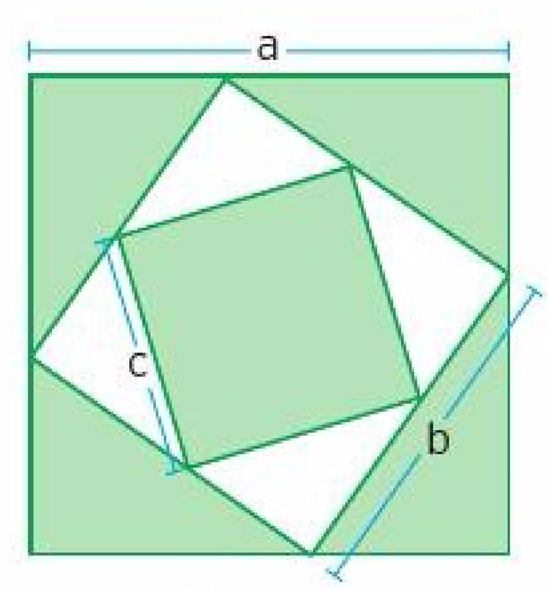


Figura B

- Em cada figura, que expressão algébrica representa a área pintada de verde?

$a^2 - b^2$; $a^2 - b^2 + c^2$

Já sabemos muita coisa sobre áreas e expressões algébricas. Vamos explorar esses conhecimentos e representar as áreas dos quadrados acima usando as letras **a**, **b** e **c**, que expressam as medidas dos lados.

Na figura **A**: **Área**

quadrado de lado **a** — $\mathbf{a^2}$

quadrado de lado **b** — $\mathbf{b^2}$

Área pintada de verde: $\mathbf{a^2 - b^2}$

Na figura **B**:

quadrado de lado **c** — $\mathbf{c^2}$

Área pintada de verde: $\mathbf{a^2 - b^2 + c^2}$

As expressões algébricas $\mathbf{a^2 - b^2}$ e $\mathbf{a^2 - b^2 + c^2}$ são **polinômios**.

Os monômios $\mathbf{a^2}$ e $\mathbf{-b^2}$ são **termos** do polinômio $\mathbf{a^2 - b^2}$. Como esses termos não são monômios semelhantes, $\mathbf{a^2 - b^2}$ é uma soma algébrica de dois monômios. Esse polinômio é também chamado de **binômio**.

$\mathbf{a^2 - b^2 + c^2}$ é uma soma algébrica de três monômios que não são semelhantes. Chamamos esse polinômio de **trinômio**.

Polinômio é uma soma algébrica de monômios.

Vamos combinar: monômios também podem ser chamados de polinômios.

Polinômio na forma reduzida

Um polinômio que tem monômios semelhantes pode ser escrito com um número menor de termos: é a **forma reduzida** desse polinômio.

Exemplo:

Vamos escrever o polinômio $15a + \frac{2}{3}ab - b + 5ab + \frac{b}{3} - a$ na forma reduzida. Para isso, agrupamos e reduzimos os termos semelhantes.

$$15a + \frac{2}{3}ab - b + 5ab + \frac{b}{3} - a$$

$$15a - a = 14a \qquad \frac{2}{3}ab + 5ab = \frac{17}{3}ab \qquad -b + \frac{b}{3} = -\frac{2}{3}b$$

$$14a + \frac{17}{3}ab - \frac{2}{3}b$$

A forma reduzida de $15a + \frac{2}{3}ab - b + 5ab + \frac{b}{3} - a$ é $14a + \frac{17}{3}ab - \frac{2}{3}b$.

Valor numérico de um polinômio

Podemos calcular o valor numérico de polinômios do mesmo modo como fazemos para expressões algébricas.

Exemplo:

Qual é o valor numérico do trinômio $-3x^3 + 2x^2 - 4xy$ para $x = -1$ e $y = 3$? 17

Atribuindo a **x** o valor -1, a **y** o valor 3 e efetuando os cálculos indicados, obtemos o valor numérico do polinômio apresentado acima.

$$-3x^3 + 2x^2 - 4xy = -3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 =$$
$$= -3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = +3 + 2 + 12 = 17$$

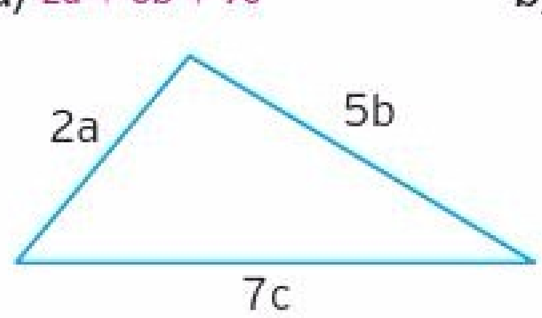
O valor numérico do polinômio $-3x^3 + 2x^2 - 4xy$ para $x = -1$ e $y = 3$ é 17.

Fazer e aprender

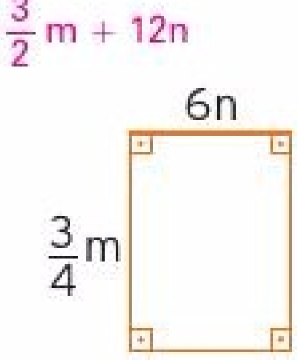
FAÇA NO CADERNO

1. Que polinômio expressa o perímetro em cada uma destas figuras?

a) $2a + 5b + 7c$

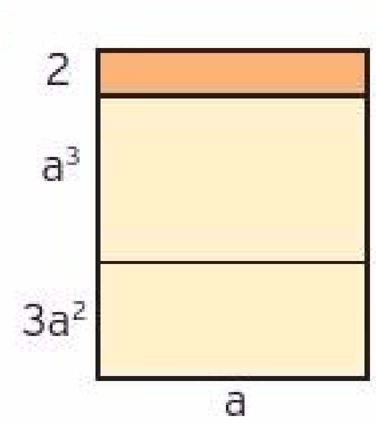


b) $\frac{3}{2}m + 12n$



2. Escreva o polinômio que representa a área da figura abaixo, em que todos os cantos são retos.

$2a + a^4 + 3a^3$



3. Identifique e anote os termos destes polinômios:

a) $\frac{2}{3} - 4a^3b + \frac{b^3}{2}$ $\frac{2}{3}; -4a^3b; \frac{b^3}{2}$

b) $-x^2y + 2xy - 3y^2 + xy^2$ $-x^2y; 2xy; -3y^2; xy^2$

c) $\frac{xy^4}{3}$ $\frac{xy^4}{3}$

4. Qual é a forma reduzida do polinômio $x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2xy^2 - 6x^2y$? $x^3 - 4x^2y + 3xy^2$

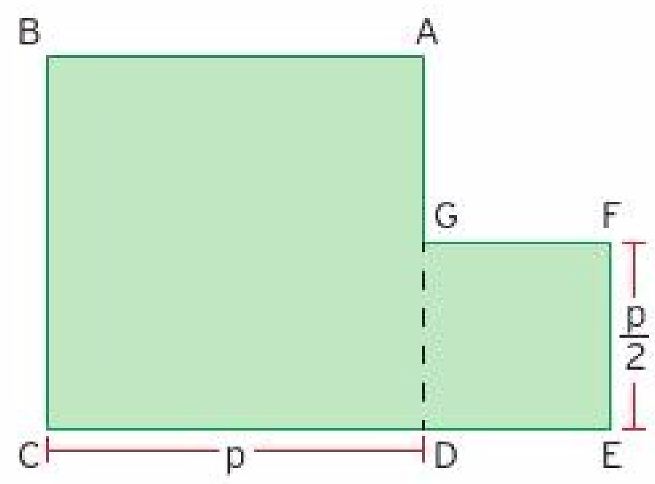
5. A letra **P** representa um polinômio. Sabendo que $P = \frac{7}{10}abc - 2ab + \frac{1}{5}ab - abc$, responda:

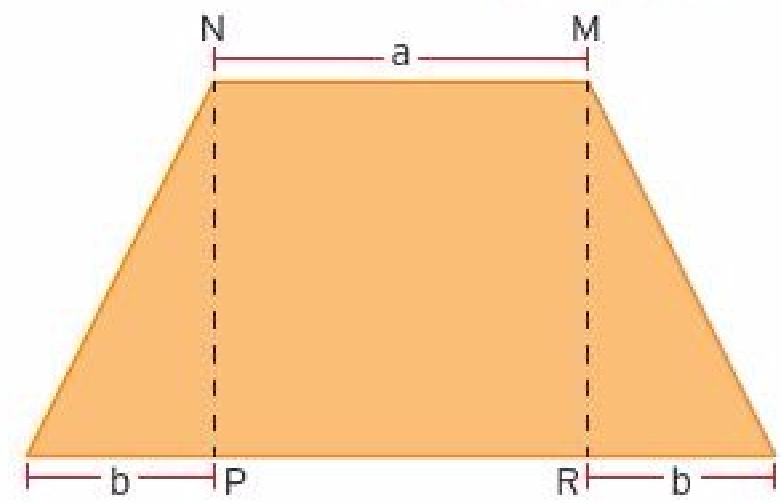
a) Qual é a forma reduzida de **P**? $-\frac{3}{10}abc - \frac{9}{5}ab$

b) Na forma reduzida, **P** é um binômio ou um trinômio? Binômio.

6. Que polinômio representa a área de cada uma destas figuras? Esse polinômio é um monômio?

a) ABCD e DEFG são quadrados. $\frac{5p^2}{4}$; sim. b) MNPR é um quadrado. $a^2 + ab$; não.





7. Qual é o valor numérico do polinômio $\frac{y^2}{2} - \frac{y}{3} + \frac{6}{5} - \frac{7y^2}{10} + \frac{5y}{6}$ para $y = -4$? -4

8. Calcule o valor numérico do polinômio $y^4 - y^2 + 1$ para $y = -\frac{1}{2}$. $\frac{13}{16}$

9. Calcule o valor de **y** para o qual o valor numérico do polinômio $5y - 7$ é 13. $y = 4$

10. Para que valor de **a** o valor numérico do binômio $\frac{7}{3}a - 14$ é igual a zero? 6

Usando a calculadora

Calcule e anote em seu caderno o valor numérico dos polinômios para os valores dados:

- $x^2 - 2xy - y^2$, para $x = 2$ e $y = -4$ 4
- $\frac{a^3}{2} - b^2$, para $a = -6$ e $b = 6$ -144
- $x^3 + 3x^2y - 8xy^2 - y^3$, para $x = 1$ e $y = -1$ -9

Use a memória da calculadora.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Calcule os valores numéricos destes polinômios para $a = 3$ e $b = -7$:

  $A = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $B = (a - b)^2$ A: 100; B: 100

- Escolha um valor para **a** e outro para **b** e peça ao colega que calcule o valor numérico desses polinômios. Resposta pessoal.
- Comparem os valores numéricos dos polinômios **A** e **B**, calculados no item anterior. O que pode ser observado? São iguais.
- Façam o mesmo para os polinômios:

  $C = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $D = (a + b)^2$

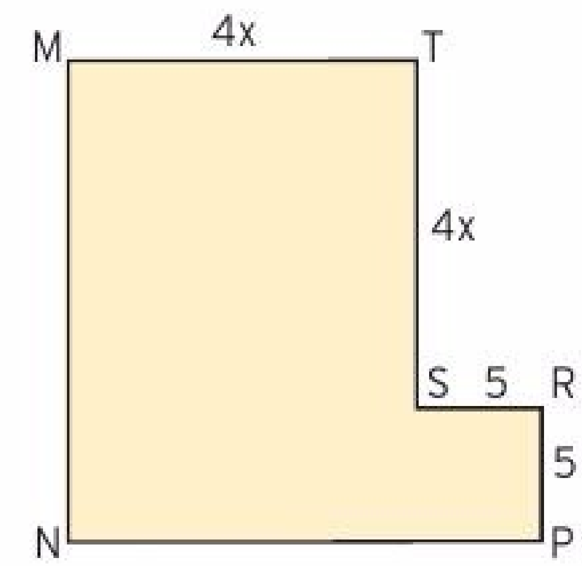
- Escolham um valor para **a** e outro para **b**, calculem e comparem os valores numéricos desses polinômios. Escrevam o que observaram. Eles também são iguais.

2 Polinômio com uma variável

Ampliando o estudo de polinômios

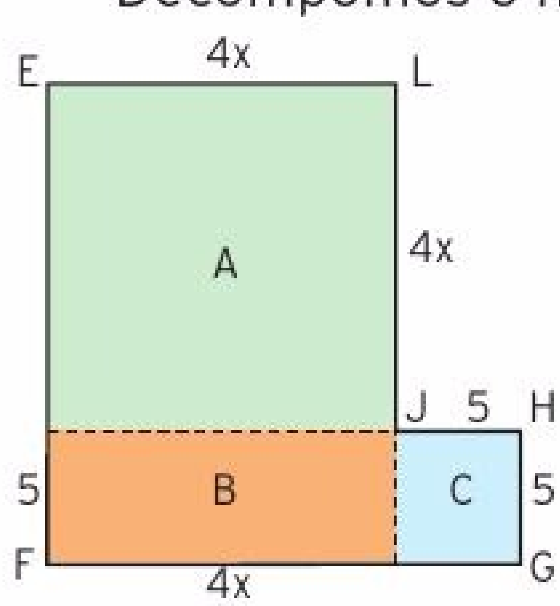
Para refletir e responder

Nesta figura, a letra **x** representa um número real positivo e $\hat{M}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$, $\hat{R}$ e $\hat{T}$ são ângulos retos.



Que expressão algébrica indica a área dessa figura? $16x^2 + 20x + 25$

Decompomos o hexágono apresentado em dois quadrados e um retângulo:



área A $= 4x \cdot 4x = 16x^2$

área B $= 4x \cdot 5 = 20x$

área C $= 5 \cdot 5 = 25$

área EFGHJL = área A + área B + área C $= 16x^2 + 20x + 25$

A área desse hexágono é representada pelo polinômio

$$\mathbf{16x^2 + 20x + 25}$$

$\mathbf{16x^2 + 20x + 25}$ é um **polinômio com uma variável,** que é representada pela letra **x**.

Nesse polinômio:

- o **coeficiente** de $\mathbf{x^2}$ é **16**;
- o **coeficiente** de **x** é **20**;
- o **termo independente** de **x** é **25**.

> **Polinômio com uma variável** é todo polinômio cujos termos têm **uma só letra** na parte literal e essa letra é sempre a mesma em todos os termos.

Observe que no polinômio $\mathbf{16x^2 + 20x + 25}$ os expoentes dos monômios estão em ordem decrescente. Nesse caso, dizemos que o polinômio está escrito em uma **forma ordenada**. Isso também vale para os expoentes dos monômios que estão em ordem crescente.

> Um polinômio está na **forma ordenada**, em relação a uma variável, quando os expoentes dos termos estão em ordem crescente ou decrescente nessa variável.

O polinômio que tem todos os coeficientes iguais a zero é chamado de **polinômio nulo**. Exemplo: $\mathbf{0x^2 + 0x + 0}$.

Grau de um polinômio com uma variável

Para refletir e responder

Observe este polinômio com uma variável:

$$-6t^2 + 20t + 25$$

- Qual é o maior expoente da variável com coeficiente diferente de zero? 2

A situação apresentada envolve um polinômio na forma reduzida.

Nesse caso, o termo $-6t^2$ é o termo com coeficiente diferente de zero e com o maior expoente da variável. Esse polinômio tem **grau 2**.

Exemplos:

- $4 - 20z + \frac{3}{2}z^2 - z^3$ — O maior expoente de **z** com coeficiente diferente de zero é **3** e está no termo $-z^3$. Este polinômio tem **grau 3**.
- $-0{,}6y^4 - 1$ — O maior expoente de **y** com coeficiente diferente de zero é **4** e está no termo $-0{,}6y^4$. Este polinômio tem **grau 4**.
- 8 — $8 = 8x^0$. Este polinômio tem **grau 0**.

Grau de um polinômio (não nulo) com uma variável é o maior expoente da variável que tem coeficiente diferente de zero.

Polinômios completos

Observe os termos destes polinômios:

$-6t^2 + 20t + 25$ $\quad$ $4 - 20z + \frac{3}{2}z^2 - z^3$ $\quad$ $3m - \frac{1}{4}$ $\quad$ 8

Em cada polinômio, todos os termos têm coeficientes diferentes de zero e têm todas as potências da variável, desde o grau do polinômio até zero. Eles são denominados **polinômios completos**.

Os polinômios $0{,}6y^4 - 1$ ou $0{,}6y^4 + 0 \cdot y^3 + 0 \cdot y^2 + 0 \cdot y + 1 \cdot y^0$ e $-18y^2 + 8y$ ou $-18y^2 + 8y + 0 \cdot y^0$ têm alguns dos coeficientes de **y** iguais a zero.

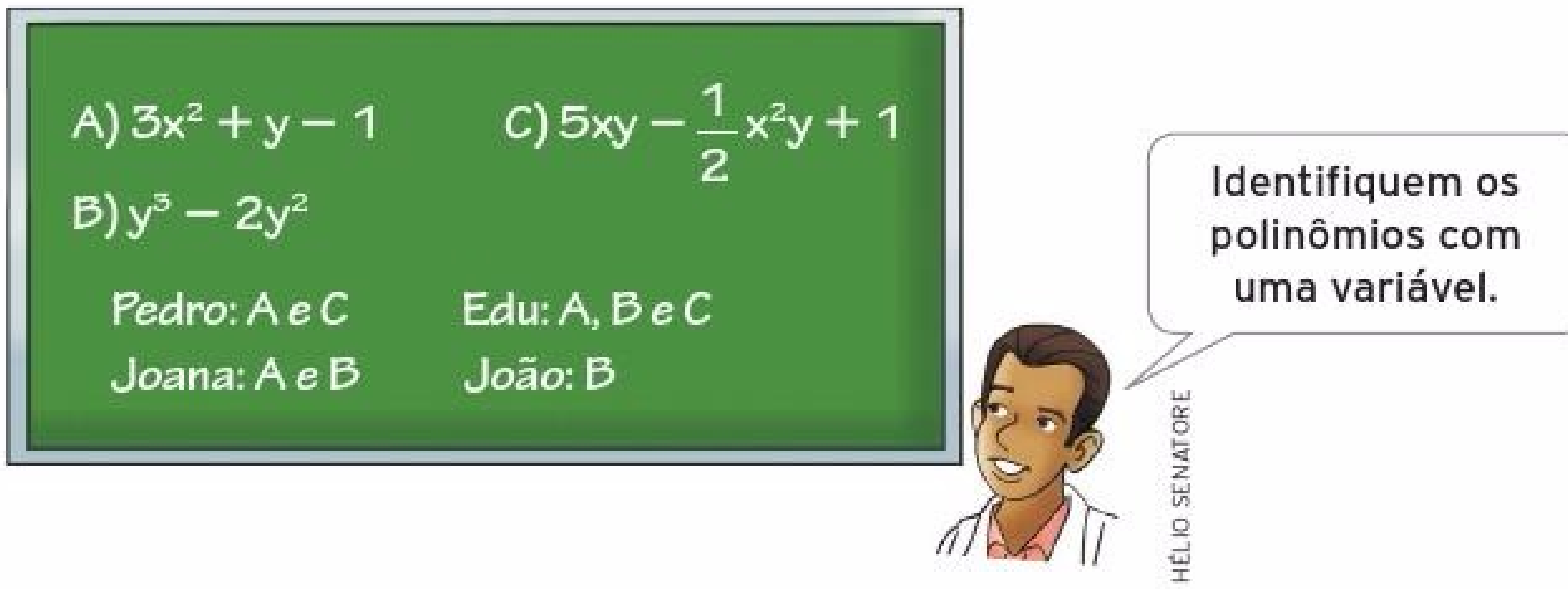
Polinômios como esses são denominados **polinômios incompletos**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

11. O polinômio $4 - 20z + z^2 - z^3$ está na forma reduzida? Qual é a variável e o grau desse polinômio? Sim. A variável é z e o grau 3.

12. Veja a questão apresentada pelo professor de Pedro e as respostas dadas por alguns alunos.



HÉLIO SENATORE

Quem deu a resposta correta? João.

13. Anote o grau destes polinômios, identifique os coeficientes de cada termo e escreva se são completos ou incompletos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

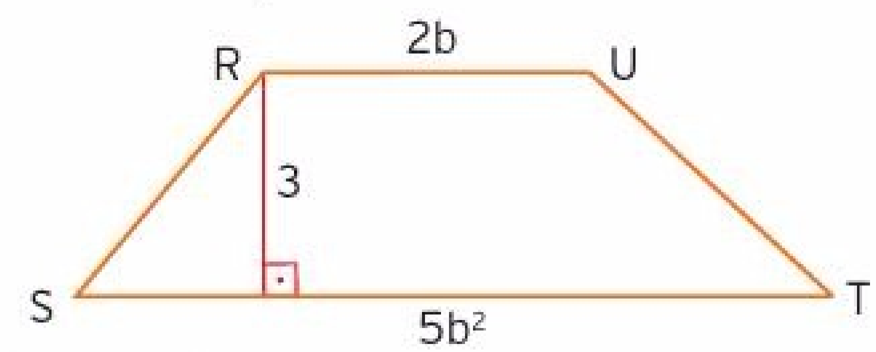
Grau 2; coeficientes: 8, 2 e − 7. Polinômio incompleto.

a) $4x^2 - x + 2x^2 + 3x + 2x^2 - 7$

b) $\frac{1}{9}x^3 - x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{4}{3}x^2 + 4$ Grau 3; coeficientes: $\frac{2}{9}$, 0, $-\frac{3}{5}$ e 4. Polinômio incompleto.

14. Quais são os valores de **m** e **n** para que o polinômio $(m - 2)y^3 + (2n - 1)y^2$ seja nulo? $m = 2$ e $n = \frac{1}{2}$

15. Observe o trapézio RSTU:



a) Que polinômio representa a área desse trapézio? $\frac{15}{2}b^2 + 3b$

b) Qual é o grau desse polinômio? Ele é completo ou incompleto? Grau 2; incompleto.

16. Anote a forma reduzida do polinômio $-5 \cdot (3y^2 + 7) + 12y + 10y^2 + 30$: c

a) $-15y^2 - 35 + 12y + 10y^2 + 30$

b) $5y^2 + 12y - 5$

c) $-5y^2 + 12y - 5$

17. Determine o valor numérico destes polinômios:

a) $8x^3 - 16x^2 - 4x + 8$, para $x = 0$ 8

b) $-\frac{1}{2}z^2 - z + 1$, para $z = -10$ −39

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Para que valor de **a** o valor numérico do polinômio $\frac{2}{3}a - 1$ é igual a 7? 12
- Determinem um valor de **z** para o qual o polinômio $z^6 - 32z + 150$ tem valor numérico igual a 150. $z = 0$ e $z = 2$

3 Adição e subtração de polinômios

Proponha aos alunos outras aplicações de perímetros e áreas de figuras desenhadas no plano como recursos gráficos para concretizar situações que envolvam adição e subtração de polinômios.

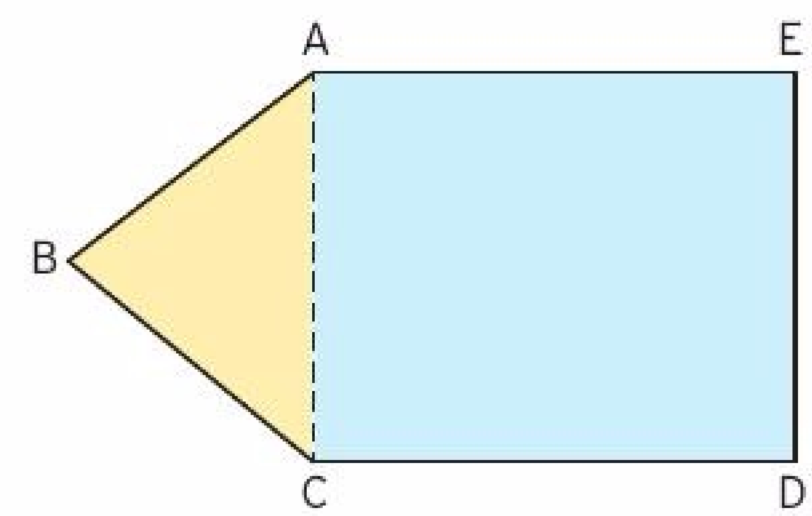
Adição

Para refletir e responder

Este pentágono ABCDE foi decomposto em um triângulo e um retângulo. A soma das medidas dos lados $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ é representada pelo polinômio $\mathbf{a + 4ab}$, e a soma das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, pelo polinômio $\mathbf{9a - 6ab - 6}$.

SHUTTERSTOCK

Lembre-se: perímetro é a soma das medidas dos lados.



- Que polinômio representa o perímetro do pentágono ABCDE?

$10a - 2ab - 6$

Adicionamos e subtraímos polinômios aplicando as mesmas propriedades estudadas para números.

O perímetro de ABCDE é a soma do polinômio $a + 4ab$ com o polinômio $9a - 6ab - 6$.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A soma é o resultado de $(a + 4ab) + (9a - 6ab - 6)$. Para obtê-la, eliminamos os parênteses usando as regras de sinais já estudadas. Com esse procedimento teremos uma soma algébrica de monômios. Prosseguimos reduzindo os termos semelhantes.

$$\text{Perímetro de ABCDE} = (a + 4ab) + (9a - 6ab - 6) =$$

$$= a + 4ab + 9a - 6ab - 6 = 10a - 2ab - 6$$

$$(a + 4ab) + (9a - 6ab - 6) = 10a - 2ab - 6$$

Podemos também calcular a soma usando um esquema semelhante ao aplicado para os números.

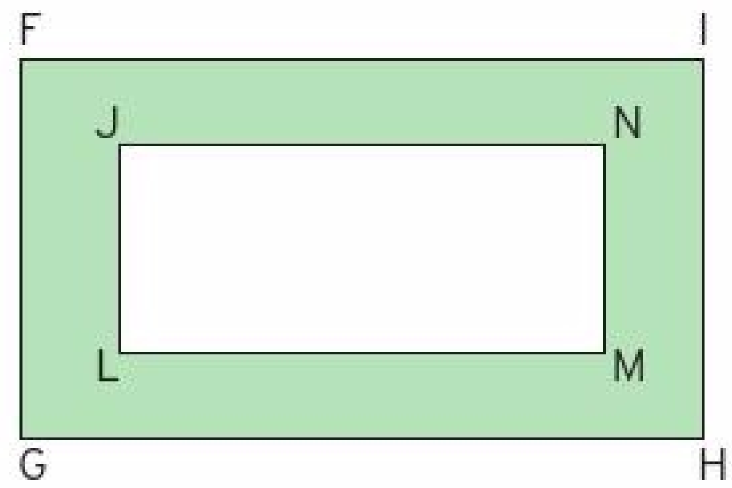
Colocamos termo semelhante embaixo de termo semelhante e efetuamos a adição.

$$\begin{array}{rrrr} & a & +\ 4ab & \\ + & 9a & -\ 6ab & -6 \\ \hline & 10a & -\ 2ab & -6 \end{array}$$

Subtração

Para refletir e responder

Na figura abaixo, a área do retângulo FGHI é representada pelo polinômio $\mathbf{8x^3 + 6x^2 - 7}$, e a área do retângulo JLMN, por $\mathbf{7x^2 - 5}$.



- Que polinômio representa a área pintada de verde? $8x^3 - x^2 - 2$

A solução da situação apresentada poderá ser encontrada recorrendo-se à subtração.

A área da parte pintada de verde é a diferença entre os polinômios $\mathbf{8x^3 + 6x^2 - 7}$ e $\mathbf{7x^2 - 5}$, nessa ordem.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Eliminamos os parênteses trocando os sinais de $7x^2 - 5$.

Área verde $= (8x^3 + 6x^2 - 7) - (7x^2 - 5) =$

$= 8x^3 + 6x^2 - 7 - 7x^2 + 5 = 8x^3 - x^2 - 2$

Note que, trocando os sinais de $7x^2 - 5$, obtemos $-7x^2 + 5$, que é o polinômio oposto dele.

$$(8x^3 + 6x^2 - 7) - (7x^2 - 5) = 8x^3 - x^2 - 2$$

Podemos também calcular a diferença usando um esquema como o mostrado ao lado:

$$\begin{array}{rrrrr} & 8x^3 & + & 6x^2 & -7 \\ + & & - & 7x^2 & +5 \\ \hline & 8x^3 & - & x^2 & -2 \end{array} \leftarrow \text{é o oposto de } 7x^2 - 5$$

Exemplo:

As letras **A**, **B** e **C** representam polinômios, sendo $A = x - 2xy + y^2$, $B = 3x - 4y^2$ e $C = -x + 6xy - y^2$. Observe como calculamos $A - B + C$.

Podemos utilizar um esquema no qual calculamos a soma de **A** com o oposto de **B** e com **C**.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & - & 2xy & + & y^2 & \leftarrow \mathbf{A} \\ & -3x & & & + & 4y^2 & \leftarrow \text{oposto de } \mathbf{B} \\ + & -x & + & 6xy & - & y^2 & \leftarrow \mathbf{C} \\ \hline & -3x & + & 4xy & + & 4y^2 & \end{array}$$

$$\mathbf{A - B + C = -3x + 4xy + 4y^2}$$

Lembre-se: colocamos termo semelhante embaixo de termo semelhante e efetuamos as operações.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

18. Obtenha a soma de $(-25a + 7ab)$ com $(-4ab + 16a)$. $-9a + 3ab$

19. Calcule $(32a - 40b - 18c) - (27a - 18c - 27b)$.
$5a - 13b$

20. Uma professora propôs aos alunos que calculassem $A - B$, sendo $A = -3m^2 + 20m + 14$ e $B = 14 + 31m - 10m^2$. Das respostas dadas por alguns alunos, anote apenas as que estão corretas: a, b

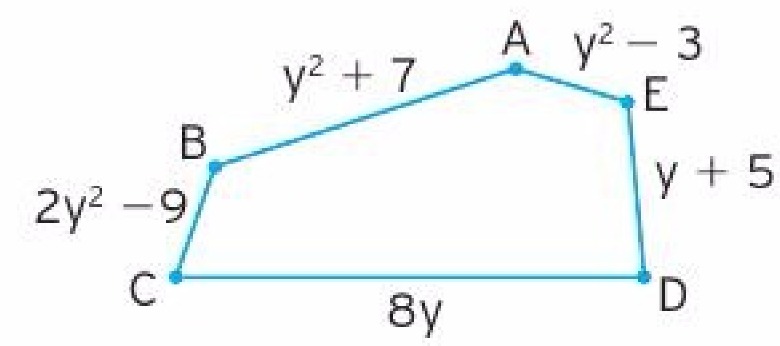
a) $7m^2 + 20m - 31m$

b) $7m^2 - 11m$

c) $-13m^2 + 51m + 28$

d) $7m^2 + 11m$

21. Nesta figura, a letra **y** representa um número real maior que 3.



a) Que polinômio representa o perímetro dessa figura? $4y^2 + 9y$

b) Qual é o perímetro dessa figura para $y = 3{,}5$ cm? 80,5 cm.

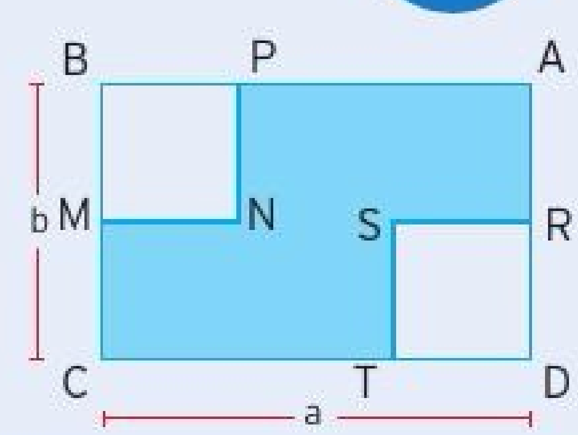
22. Calcule a soma de $\left(\frac{1}{2}ab - \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{4}ab - \frac{1}{6}\right)$.
$\frac{3}{4}ab - \frac{5}{6}$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Nesta figura, BMNP e RSTD são quadrados congruentes e **M** é ponto médio de $\overline{BC}$. Além disso, **a** e **b** representam medidas em centímetros.



- Que expressão algébrica representa a área da parte pintada de azul? $ab - \frac{b^2}{2}$
- A expressão algébrica obtida é um polinômio? Sim.

Relação entre adição e subtração

A adição e a subtração de polinômios também são operações inversas. Vamos explorar esse assunto examinando um exemplo.

A soma de um polinômio **A** com $\left(\frac{1}{3}xy^2 + 10x^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{4}y\right)$ é igual a $\left(-xy^2 + \frac{9}{4}y - \frac{1}{8}y^2 + 10x^3\right)$. Qual é o polinômio **A**?

Vamos fazer um esquema e colocar nele as informações dadas no problema. Observe abaixo.

$$+\left(\frac{1}{3}xy^2 + 10x^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{4}y\right)$$

adiciona

$$\boxed{\text{Polinômio A}} \qquad \boxed{-xy^2 + \frac{9}{4}y - \frac{1}{8}y^2 + 10x^3}$$

subtrai

$$-\left(\frac{1}{3}xy^2 + 10x^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{4}y\right)$$

Para obter o polinômio A, subtraímos o polinômio $\left(\frac{1}{3}xy^2 + 10x^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{4}y\right)$ do resultado.

$$A = \left(-xy^2 + \frac{9}{4}y - \frac{1}{8}y^2 + 10x^3\right) - \left(\frac{1}{3}xy^2 + 10x^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{4}y\right) = -\frac{4}{3}xy^2 + \frac{5}{8}y^2$$

O polinômio **A** é igual a $\left(-\frac{4}{3}xy^2 + \frac{5}{8}y^2\right)$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

23. Que polinômio adicionado a $8a^3 + 14a^2 - 9$ resulta em $-a^3 + a^2 - 2a + 6$? $-9a^3 - 13a^2 - 2a + 15$

24. A soma de 2 polinômios é igual a $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{3}{8}\right)$. Um deles é $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x\right)$. Qual é o outro polinômio? $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{24}$

25. Considere os polinômios $A = x^2 - 2xy + 4y^2$ e $B = -2x^2 + 2xy + 4y^2$.

a) Qual é o resultado de $(A - B)$? $3x^2 - 4xy$

b) Qual é o valor numérico de $(A - B)$ para $x = 1$ e $y = \frac{1}{4}$? 2

c) Que expressão algébrica se obtém para $-(A - B)$? $-3x^2 + 4xy$

d) Relacione o valor numérico de $-(A - B)$ para $x = 1$ e $y = \frac{1}{4}$ com o valor de $(A - B)$ obtido no item b. -2 e 2; são simétricos.

26. As letras **P**, **Q** e **R** representam polinômios. Considere $P = -13y^3 + 15y^2 - y$, $Q = -15y^2 + 19y^3 - 10$ e $R = 17y^3 - 28$, e responda:

a) Qual é o polinômio $(P + Q - R)$? $-11y^3 - y + 18$

b) Qual é o polinômio $(Q - P - R)$? $15y^3 - 30y^2 + y + 18$

c) Qual é o valor numérico de $(P + Q - R)$ para $y = 2$? -72

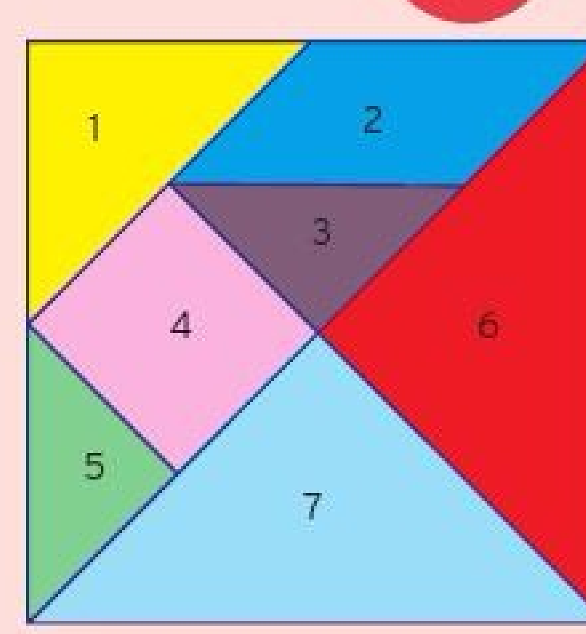
27. Que monômio deve ser adicionado a $7a^4 - 4a^2 - 12a + 19$ para se obter um trinômio do $2^{\underline{o}}$ grau?

Desafio

Procure propor outras situações em que os alunos possam trabalhar conceitos e propriedades do cálculo algébrico de maneira lúdica. Veja a seguir.

FAÇA NO CADERNO

Peças do tangram e expressões algébricas



Vamos explorar novamente o tangram, aquele quebra-cabeça chinês com sete peças que podem formar um quadrado? Observe ao lado.

Copie a figura ao lado e desenhe as peças do tangram. Depois, cole em uma cartolina e recorte-as. 2: paralelogramo; 3, 5, 6, 7: triângulos retângulos; 4: quadrado.

- A peça 1 é um triângulo retângulo. Identifique as outras peças.
- Quais são as peças que podem ser utilizadas para compor o triângulo 1, o paralelogramo 2 e o quadrado 4? Para obter a resposta, manuseie as peças do jogo. Em seguida, registre sua resposta contornando as figuras em seu caderno. Veja resposta no final do livro.
- Se a letra **a** representa a metade da medida do lado do quadrado formado pelas sete peças, qual é a área desse quadrado? $4a^2$

  Calcule a área de cada uma das sete peças do tangram. 1, 2 e 4 : $\frac{a^2}{2}$; 3 e 5 : $\frac{a^2}{4}$; 6 e 7 : a^2.

  Pista: use as composições que você fez no item anterior para calcular as áreas solicitadas.
- Mostre que a soma das áreas dessas sete peças é igual à área do quadrado formado por elas.

Área 1 + área 2 + área 4 + área 3 + área 5 + área 6 + área 7 = $\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2 + a^2 = \frac{2a^2 + 2a^2 + 2a^2 + a^2 + a^2 + 4a^2 + 4a^2}{4} = 4a^2$

área do quadrado inicial

4 Multiplicação e divisão de polinômios

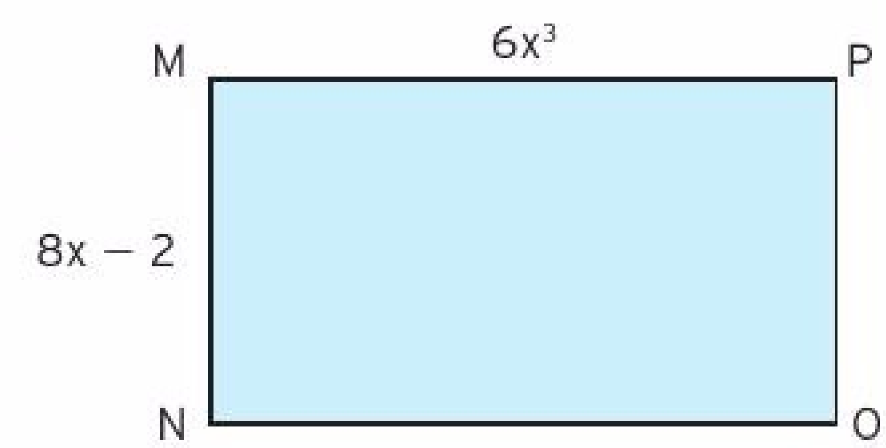
Proponha aos alunos outras aplicações de perímetros de figuras desenhadas no plano, de áreas de quadrados e retângulos e de volumes de prismas como recursos gráficos para concretizar situações que envolvem multiplicação e divisão com polinômios.

Multiplicação de monômio por polinômio

Para refletir e responder

Observe o retângulo ao lado.

Nele, o comprimento é representado pelo monômio $\mathbf{6x^3}$, e a largura, pelo polinômio ($\mathbf{8x - 2}$).



- Que polinômio representa a área desse retângulo? $48x^4 - 12x^3$

A multiplicação de polinômios se baseia no produto de monômios e na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A área de MNOP é o produto do comprimento $6x^3$ pela largura $8x - 2$, ou seja, é o produto do monômio $6x^3$ pelo binômio $(8x - 2)$.

$$\text{Área MNOP} = 6x^3 \cdot (8x - 2) = 6x^3 \cdot 8x - 6x^3 \cdot 2 =$$

$$= 48x^4 - 12x^3$$

$$\boxed{6x^3 \cdot (8x - 2) = 48x^4 - 12x^3}$$

A área desse retângulo pode ser representada pelo binômio $48x^4 - 12x^3$.

Exemplos:

- $(-5ab) \cdot (16a - 8b^2)$

$$(-5ab) \cdot (16a - 8b^2) =$$

$$= -5ab \cdot 16a + 5ab \cdot 8b^2 =$$

$$= -80a^2b + 40ab^3$$

- $(-15x^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{30}\right)$

$$(-15x^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{30}\right) =$$

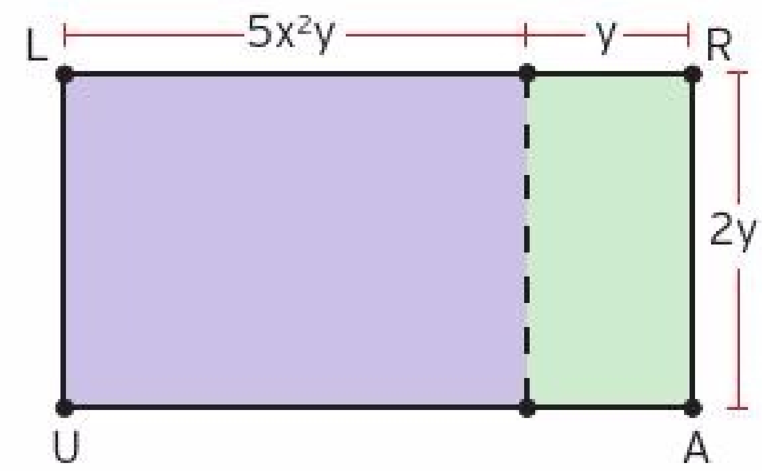
$$= +15x^2 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 15x^2 \cdot \frac{4}{5}x + 15x^2 \cdot \frac{1}{30} =$$

$$= 5x^4 - 12x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

28. Neste retângulo, as letras x e y representam medidas em centímetros.

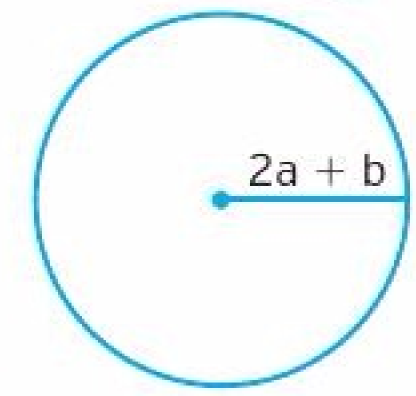


a) Que polinômio representa a área de LUAR? $10x^2y^2 + 2y^2$

b) Qual é a área de LUAR para $x = 1{,}5$ e $y = 3$? 220,5

29. Qual é o produto do monômio $-13ab^2$ pelo polinômio $(-2a + 5b - 3a^2b - 6)$? $26a^2b^2 - 65ab^3 + 39a^3b^3 + 78ab^2$

30. Nesta figura, a medida do raio da circunferência é representada por $(2a + b)$. Que polinômio poderá representar a medida do comprimento dessa circunferência?



$4\pi a + 2\pi b$

31. Considere $P = -\dfrac{18}{25}m^2n$ e

$$Q = \frac{5}{2}m - \frac{15}{4}n^2 + \frac{25}{9}mn - 15.$$

a) Qual é o produto de **P** por **Q**?

b) Qual é o valor numérico de $P \cdot Q$ para $m = -2$ e $n = 0$? Zero.

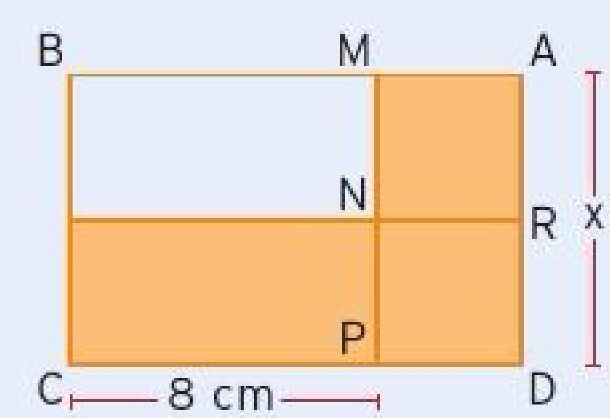
a) $-\dfrac{9}{5}m^3n + \dfrac{27}{10}m^2n^3 - 2m^3n^2 + \dfrac{54}{5}m^2n$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Nesta figura, AMNR e NPDR são quadrados e R é ponto médio de $\overline{AD}$. Além disso, **x** representa uma medida em centímetros. Respostas possíveis:



- Expresse a área de ABCD usando um produto de polinômios. $x \cdot \left(8 + \dfrac{x}{2}\right)$
- Expresse a área da parte pintada de alaranjado como a diferença entre o polinômio encontrado no item anterior e um monômio. $x \cdot \left(8 + \dfrac{x}{2}\right) - 4x$
- Que polinômio representa a área da parte pintada de alaranjado? $\dfrac{x^2}{2} + 4x$

Multiplicação de polinômio por polinômio

Vamos ampliar o nosso conhecimento sobre cálculos algébricos aprendendo a multiplicar um binômio por outro.

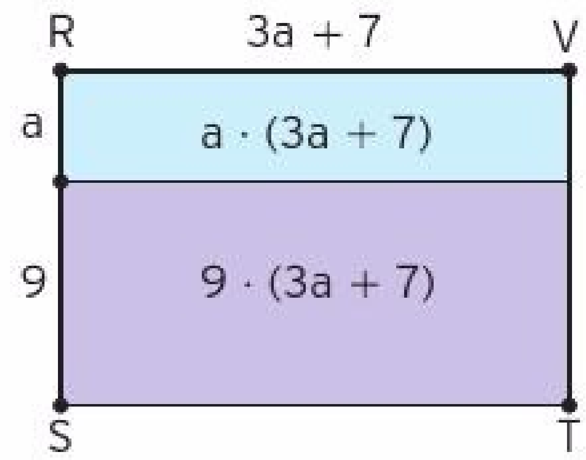
Exemplos:

- Determine o produto $(3a + 7) \cdot (a + 9)$.

Podemos calcular esse produto aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$(3a + 7) \cdot (a + 9) = 3a \cdot (a + 9) + 7 \cdot (a + 9) =$$
$$= 3a \cdot a + 3a \cdot 9 + 7 \cdot a + 7 \cdot 9 =$$
$$= 3a^2 + \underbrace{27a + 7a}_{} + 63 =$$
$$= 3a^2 + 34a + 63$$

Ou ainda utilizar um esquema:

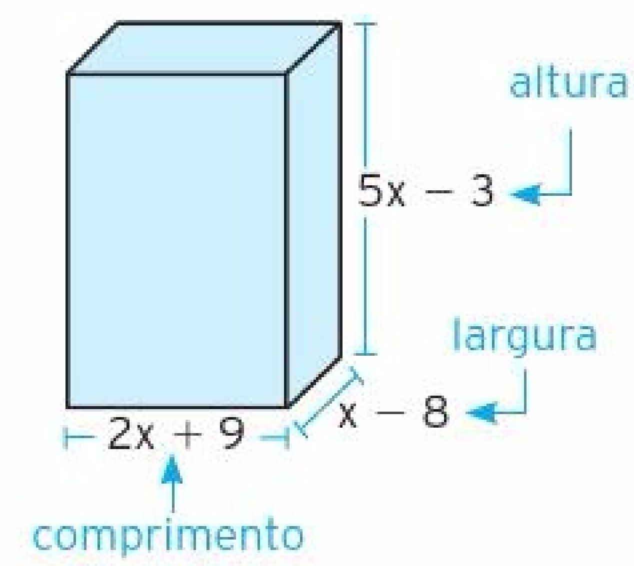


$$\begin{array}{r} 3a + 7 \\ \times\ a + 9 \\ \hline 3a^2 + 7a \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 3a + 7 \\ \times\ a + 9 \\ \hline 3a^2 + 7a \\ + 27a + 63 \\ \hline 3a^2 + 34a + 63 \end{array}$$

Calculamos o **produto de dois polinômios** multiplicando cada termo de um deles por todos os termos do outro e reduzindo os termos semelhantes.

- O volume de um bloco retangular é o produto da medida de seu comprimento pelas medidas de sua largura e de sua altura. Que polinômio poderá representar o volume deste bloco retangular?

  O volume do bloco retangular poderá ser representado pelo produto $(2x + 9) \cdot (x - 8) \cdot (5x - 3)$.



comprimento × largura

$$\begin{array}{rrrr} & 2x & +\ 9 & \\ \times & x & -\ 8 & \\ \hline & -\ 16x & -\ 72 & \\ +\ 2x^2 & +\ 9x & & \\ \hline 2x^2 & -\ 7x & -\ 72 & \end{array}$$

multiplicando pela altura

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & -\ 7x & -\ 72 \\ \times & & 5x & -\ 3 \\ \hline & -6x^2 & +\ 21x & +\ 216 \\ +\ 10x^3 & -\ 35x^2 & -\ 360x & \\ \hline 10x^3 & -\ 41x^2 & -\ 339x & +\ 216 \end{array}$$

$$(2x + 9) \cdot (x - 8) \cdot (5x - 3) = 10x^3 - 41x^2 - 339x + 216$$

O volume desse bloco retangular pode ser representado pelo seguinte polinômio:

$$10x^3 - 41x^2 - 339x + 216$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

32. Calcule os produtos a seguir. Se necessário, desenhe figuras para auxiliá-lo.

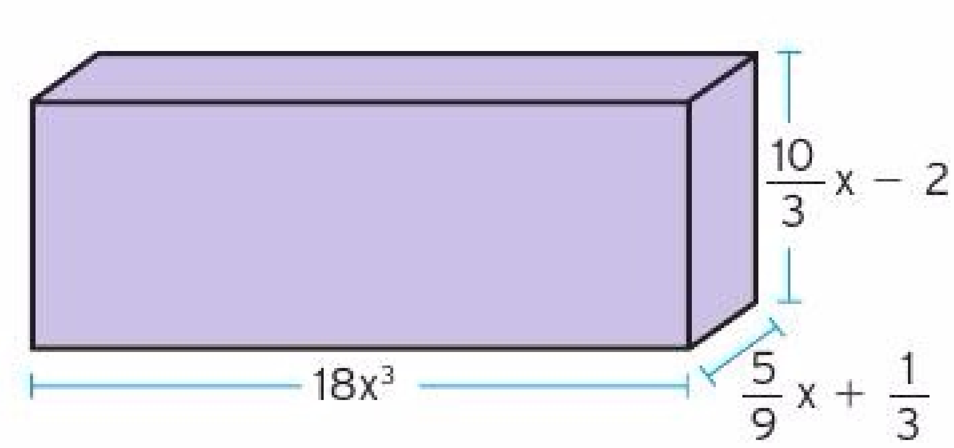
a) $\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (9x + 15)$ $9x^2 + 18x + 5$

b) $(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$ $x^3 + 8$

c) $(12x^2 + 6x - 3) \cdot (2x - 1)$ $24x^3 - 12x + 3$

d) $(7y^2 + 2y + 2) \cdot (10y^2 + 4y - 4)$ $70y^4 + 48y^3 - 8$

33. Expresse o volume deste bloco retangular por meio de um polinômio. $\frac{100x^5}{3} - 12x^3$



34. Sabendo que $P = 9a^2 - 3a$, $M = 3a + 1$ e $R = 9a^2 + 1$, responda às questões.

a) Qual é o polinômio $P \cdot M \cdot R$? $243a^5 - 3a$

b) Qual é o polinômio $\frac{2}{27} \cdot (P \cdot M \cdot R)$? $18a^5 - \frac{2}{9}a$

35. Dados os polinômios $A = x - 1$, $B = x^2 + x$ e $C = x$, determine os polinômios:

a) $A \cdot B$ $x^3 - x$

b) $B \cdot C$ $x^3 + x^2$

c) $A \cdot A$ ou A^2 $x^2 - 2x + 1$

d) $A \cdot B - B \cdot C + A \cdot C$ $-2x$

36. Calcule o produto dos polinômios e reduza os termos semelhantes.

a) $a \cdot (2a + b + 2) + b \cdot (-a - b + 12) - 12 \cdot$ $\cdot (a + b - 1)$ $2a^2 - 10a - b^2 + 12$

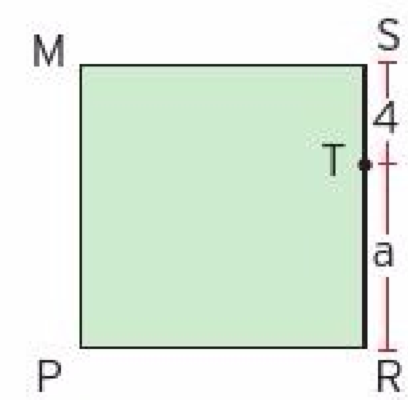
b) $(3x - 2) \cdot (2x + 3) - 6x \cdot (x + 1)$ $-x - 6$

37. Se $A = x \cdot (3x - 1)$ e $B = (x + 5) \cdot (3x - 2)$, determine os polinômios a seguir:

a) $A - B$ $-14x + 10$

b) $-13 \cdot (A - B)$ $182x - 130$

38. Nesta figura, SMPR é um quadrado e as medidas estão em centímetros.



Escreva um polinômio que represente a área desse quadrado. $a^2 + 8a + 16$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

No esquema ao lado, a área do retângulo é representada pelo polinômio $ac + ad + bc + bd$ e é o produto de dois binômios.

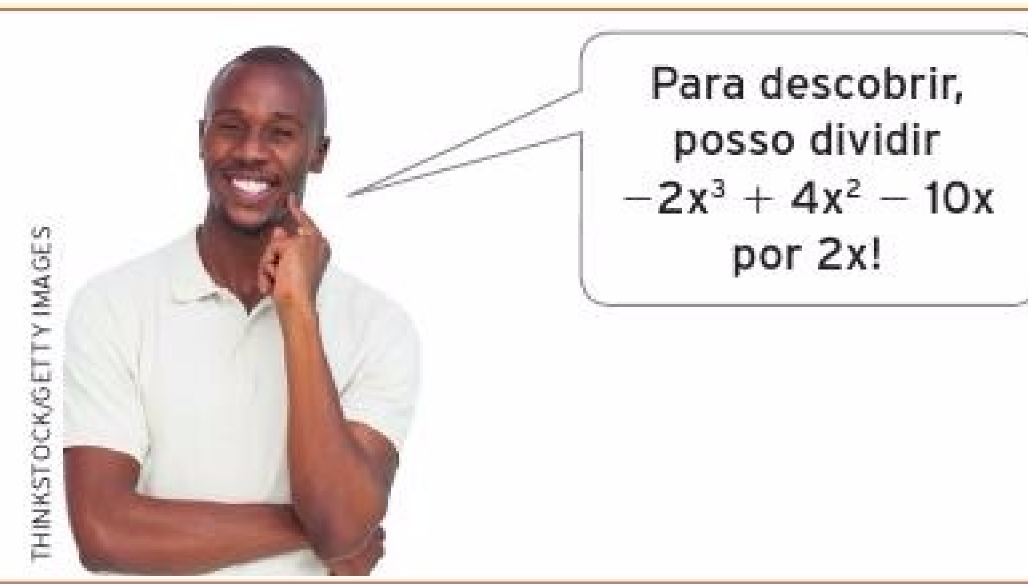
Quais são esses binômios? $(a + b)$ e $(c + d)$

ac	ad
bc	bd

Divisão de polinômio por monômio

Para refletir e responder

O produto de um polinômio pelo monômio $2x$ é $-2x^3 + 4x^2 - 10x$.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Que polinômio é esse? $-x^2 + 2x - 5$

A situação apresentada envolve uma divisão de um polinômio por um monômio.

Considerando $x \neq 0$, o polinômio procurado é o quociente do polinômio $\mathbf{-2x^3 + 4x^2 - 10x}$ pelo monômio $\mathbf{2x}$.

Encontramos esse quociente dividindo cada termo de $-2x^3 + 4x^2 - 10x$ por $2x$:

$$(-2x^3 + 4x^2 - 10x) : 2x = \frac{-2x^3 + 4x^2 - 10x}{2x} = -\frac{2x^3}{2x} + \frac{4x^2}{2x} - \frac{10x}{2x} = \mathbf{-x^2 + 2x - 5}$$

O polinômio que foi multiplicado por $2x$ é $-x^2 + 2x - 5$.

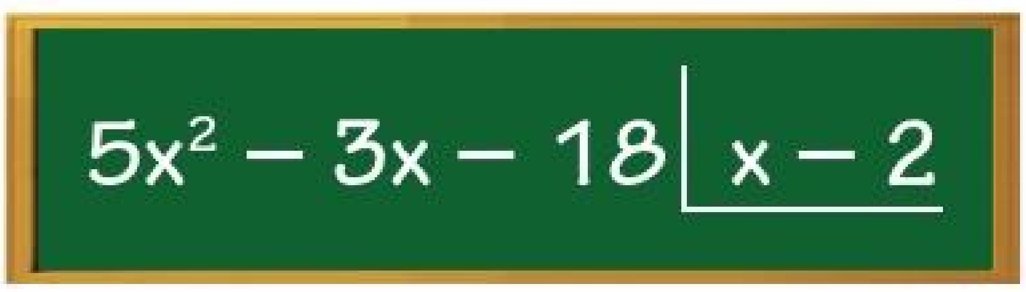
Dividimos um polinômio por um monômio, não nulo, dividindo cada termo desse polinômio por esse monômio.

Divisão de polinômio por polinômio

Vamos aprender a calcular o quociente e o resto da divisão de um polinômio por outro polinômio não nulo.

Exemplos:

- Efetue a divisão indicada abaixo considerando $x \neq 2$.



$5x^2 - 3x - 18$ é o dividendo, e $x - 2$ é o divisor.

Podemos fazer da mesma forma como na divisão de números?

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Empregamos um esquema semelhante ao utilizado para os números. Veja:

$5x^2 : x$

$$\begin{array}{l|l} 5x^2 - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} & 5x \end{array}$$

Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor.

$(5x^2 - 10x)$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{5x^2} - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^2} + 10x & 5x \\ \hline 0x^2 + 7x - 18 & \end{array}$$

+ oposto

Calculamos $5x \cdot (x - 2)$ e subtraímos o resultado do dividendo (ou adicionamos o oposto do resultado obtido a ele).

$(7x : x)$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{5x^2} - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^2} + 10x & 5x + 7 \\ \hline +7x - 18 & \end{array}$$

Dividimos 7x por **x**.

$(7x - 14)$

grau 1

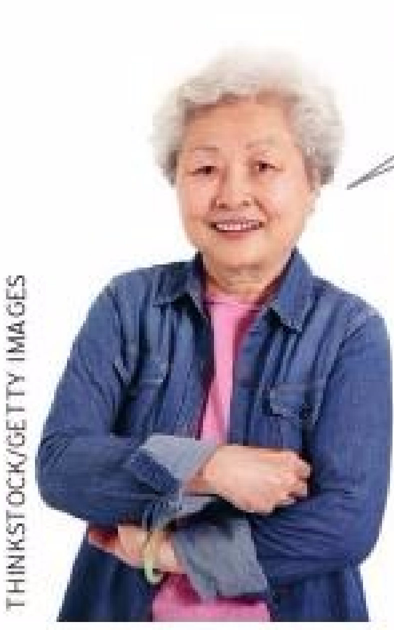
$$\begin{array}{r|l} \cancel{5x^2} - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^2} + 10x & 5x + 7 \\ \hline +\cancel{7x} - 18 & \\ -\cancel{7x} + 14 & \\ \hline 0x - 4 & \end{array}$$

+ oposto

grau zero

Calculamos $7 \cdot (x - 2)$ e adicionamos o oposto do resultado obtido a $7x - 18$.

Efetuamos a divisão até que o grau do polinômio resto seja menor do que o grau do polinômio divisor. Até que os alunos consigam consolidar o algoritmo da divisão de polinômios, procure deixar indicadas todas as passagens que envolvem a técnica da divisão.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Resumindo...

$$\begin{array}{r|l} \cancel{5x^2} - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^2} + 10x & 5x + 7 \\ \hline +\cancel{7x} - 18 & \\ -\cancel{7x} + 14 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

dividendo → $5x^2 - 3x - 18$; divisor → $x - 2$; quociente → $5x + 7$; resto → -4

$(5x^2 - 3x - 18) : (x - 2)$ tem quociente $(5x + 7)$ e resto -4 para $x \neq 2$.

FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$(8a^4 - 10a^2 + 8a - 6) : (-2a^2 + a - 1)$$

Quando efetuamos uma divisão de um polinômio por outro, é conveniente que eles estejam escritos na forma completa e na ordem decrescente dos expoentes dos monômios.

Nesse caso, completamos o polinômio dividendo acrescentando o termo **$0a^3$**.

$$
\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & \cancel{8a^4} & +\,0a^3 & -\,10a^2 & +\,8a & -\,6 & -2a^2 + a - 1 \\
(-4a^2)\cdot(-2a^2+a-1) \text{ — oposto} \rightarrow & -\cancel{8a^4} & +\,4a^3 & -\,4a^2 & & & -4a^2 - 2a + 6 \\
\hline
 & & +\,\cancel{4a^3} & -\,14a^2 & +\,8a & & \\
(-2a)\cdot(-2a^2+a-1) \text{ — oposto} \rightarrow & & -\,\cancel{4a^3} & +\,2a^2 & -\,2a & & \\
\hline
 & & & -\cancel{12a^2} & +\,\cancel{6a} & -\,\cancel{6} & \\
(+6)\cdot(-2a^2+a-1) \text{ — oposto} \rightarrow & & & +\cancel{12a^2} & -\,\cancel{6a} & +\,\cancel{6} & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

$-\dfrac{8a^4}{2a^2}$ $\quad -\dfrac{4a^3}{2a^2}$ $\quad +\dfrac{12a^2}{2a^2}$

O quociente é $\mathbf{-4a^2 - 2a + 6}$, e o resto, **0**.

Como o **resto** é **zero**, temos uma **divisão exata**, e dizemos que $8a^4 - 10a^2 + 8a - 6$ é **divisível** por $-2a^2 + a - 1$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

39. Que polinômio é o resultado da divisão de $36x^6 - 12x^5$ por $6x^2$? $6x^4 - 2x^3$

40. O produto de um polinômio pelo monômio $-\dfrac{5}{8}a$ é $-\dfrac{5}{8}a^3 + \dfrac{15}{8}a^2 - \dfrac{5}{16}a$. Qual é esse polinômio? $a^2 - 3a + \dfrac{1}{2}$

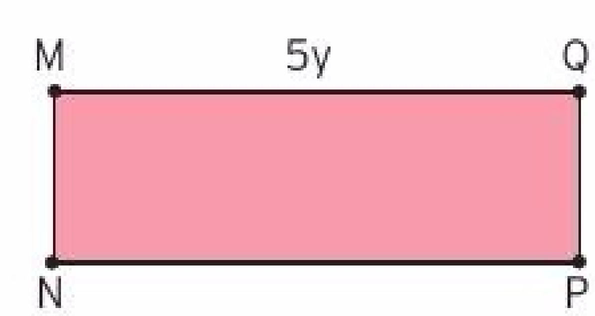
41. Determine o quociente da divisão de $81a^5 - 21a^2$ por $3a^2$. $27a^3 - 7$

42. O polinômio $2y^3 - 5y^2 - 3y$ representa a área do retângulo MNPQ, e o monômio $5y$, a medida do lado $\overline{MQ}$.

a) Que polinômio representa a medida de $\overline{PQ}$? $\dfrac{2}{5}y^2 - y - \dfrac{3}{5}$

b) Quais são as medidas dos lados do retângulo MNPQ para $y = 5$? 25; 4,4

c) Qual é a área do retângulo MNPQ para $y = 5$? 110



43. Calcule o quociente e o resto de $(24x^2 - 28x - 10) : (-3x + 2)$ $-8x + 4; -18$

44. Qual o quociente e qual o resto da divisão de $22x^3 - 6x^4 - 12 + 35x$ por $-x + 4$? $6x^3 + 2x^2 + 8x - 3; 0$

45. Considere os polinômios $A = 63x^3 - 62x^2 + 51x - 20$ e $B = -9x + 5$, e responda às questões:

a) Qual é o quociente da divisão do polinômio **A** pelo polinômio **B**? $-7x^2 + 3x - 4$

b) Qual é o valor numérico desse quociente para $x = -2$? -38

c) O polinômio **A** é divisível pelo polinômio **B**? Por quê? Sim; porque o resto é zero.

Relação entre a multiplicação e a divisão

Em geral, em uma divisão de polinômios podemos escrever uma relação entre multiplicação e divisão: **quociente × divisor + resto = dividendo**.

Exemplos:

- $\begin{array}{r|l} 5x^2-3x-18 & x-2 \\ \cline{2-2} -4 & 5x+7 \end{array}$ —— $\underbrace{(5x+7)}_{\text{quociente}} \cdot \underbrace{(x-2)}_{\text{divisor}} + \underbrace{(-4)}_{\text{resto}} = \underbrace{5x^2-3x-18}_{\text{dividendo}}$

- Dividindo um polinômio **P** por $(-2x+9)$, obtém-se o quociente $(5x^2-3x-6)$ e o resto 40. Qual é esse polinômio?

$$\begin{array}{rr|l} \text{dividendo} \rightarrow & P & \overbrace{-2x+9}^{\text{divisor}} \\ \cline{3-3} \text{resto} \rightarrow & 40 & \underbrace{5x^2-3x-6}_{\text{quociente}} \end{array}$$

Como dividendo = quociente × divisor + resto, podemos escrever:

$P = (5x^2-3x-6) \cdot (-2x+9) + 40$

$P = -10x^3 + 51x^2 - 15x - 54 + 40 = -10x^3 + 51x^2 - 15x - 14$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

46. A divisão de um polinômio **P** por $(-3x+1)$ é exata e tem quociente igual a $(-9x^2-3x+4)$. Determine o polinômio **P**. $27x^3-15x+4$

47. O polinômio **A** é divisível pelo polinômio **B** $= -6x-2$, e o quociente da divisão de **A** por **B** é (x^2-3x+1). Qual é o polinômio **A**?
$-6x^3+16x^2-2$

48. Calcule o quociente e o resto de $(-80y^4-6y^3+51y^2-15y-4):(8y^2+3y-5)$.
$-10y^2+3y-1$; $3y-9$

49. O quociente da divisão de um polinômio **B** por $(8x-2)$ é $(4x^2+x)$ e o resto é -5.

Anote apenas a resposta correta:

$B = 32x^3-2x$

$B = 32x^3-2x-5$ x

$B = 32x^3+16x^2-2x-5$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Teste o seu raciocínio

Qual é o polinômio **P**? E o **R**? Encontre a resposta sem efetuar a divisão. $P = -6x+7$ e $R = 0$.

Esta divisão está correta.

$$\begin{array}{r|l} -30x^3+23x^2+38x-28 & -6x+7 \\ \cline{2-2} 0 & 5x^2+2x-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -30x^3+23x^2+38x-28 & 5x^2+2x-4 \\ \cline{2-2} R & P \end{array}$$

Leitura

Álgebra e generalizações

O resultado será sempre um número ímpar?

Experimente com outros números naturais.

E, então, como foi?

Sempre um número ímpar, não é mesmo?

Por quê?

Proponha outras situações nas quais os alunos percebam que uma mesma letra pode representar vários números reais — daí a denominação de **variável** — e situações em que eles possam verificar fórmulas calculando alguns valores.

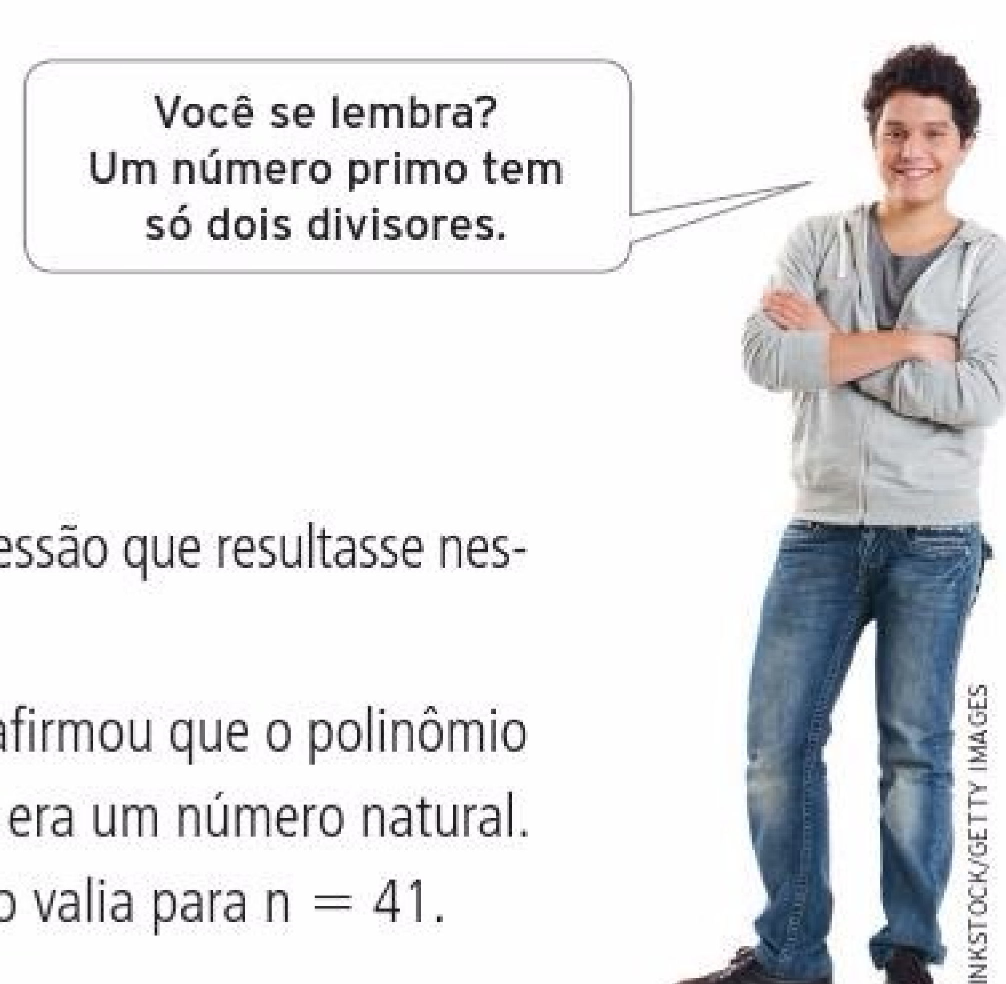
Podemos entender o que ocorre com os números nessa situação construindo uma tabela.

Número	0	1	2	3	10	23	100
(Número) · 2 + 1	$0 \cdot 2 + 1$ **1**	$1 \cdot 2 + 1$ **3**	$2 \cdot 2 + 1$ **5**	$3 \cdot 2 + 1$ **7**	$10 \cdot 2 + 1$ **21**	$23 \cdot 2 + 1$ **47**	$100 \cdot 2 + 1$ **201**

Os números 1, 3, 5, 7, ... são números ímpares.

Quando multiplicamos um número natural por 2, o resultado é sempre um número par, ou seja, **2n**, com **n** natural, representa sempre um número par. Se adicionarmos a esse resultado 1 unidade, o resultado será sempre um número ímpar.

Portanto, a expressão **2n + 1** representa um número **ímpar** quando **n** é um número natural.



Agora, observe esta sequência numérica:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, ...

Ela é formada por números primos. Descobrir uma expressão que resultasse nessa sequência foi um desafio para muitos matemáticos.

Em 1772, o matemático Leonard Euler (1707-1783) afirmou que o polinômio $\mathbf{n^2 - n + 41}$ fornecia apenas números primos quando **n** era um número natural. No entanto, descobriu-se mais tarde que essa fórmula não valia para $n = 41$.

Veja alguns exemplos:

para $n = 0$ —— $0^2 - 0 + 41 = 0 - 0 + 41 = 41$ ← é um número primo

para $n = 7$ —— $7^2 - 7 + 41 = 49 - 7 + 41 = 83$ ← é um número primo

para $n = 41$ —— $41^2 - 41 + 41 = 1681 - 41 + 41 = 1681$ ← é divisível por 41

Em 1879, E. B. Escott divulgou esta fórmula: $n^2 - 79n + 1601$

O valor numérico desse trinômio é um número primo para **n** igual a 0, 1, 2, 3, ..., 79. Porém, essa fórmula não vale para $n = 80$. Veja:

$80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 6400 - 6320 + 1601 = 1681$ ← é divisível por 41

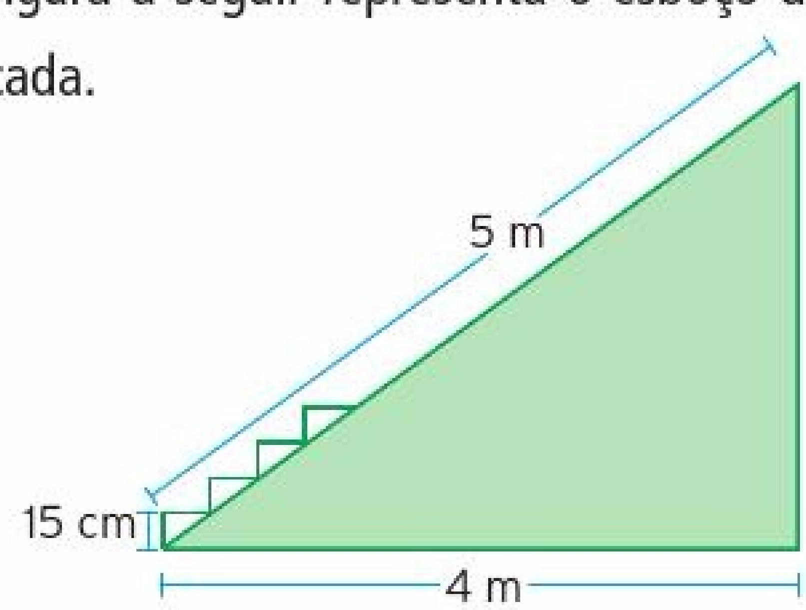
Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

117,71; 17,117111711117... Há outras respostas possíveis.

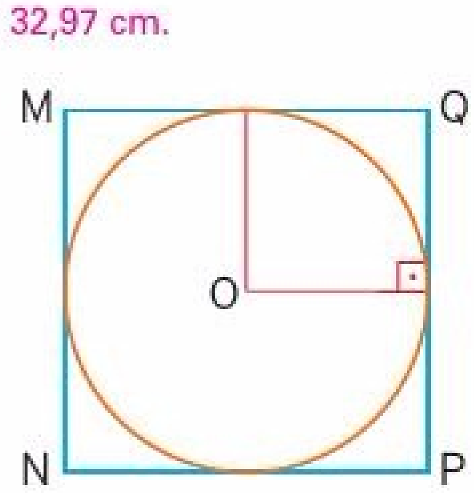
1. Escreva um número racional e um número irracional, usando somente os algarismos 1 e 7.

2. A figura a seguir representa o esboço de uma escada.



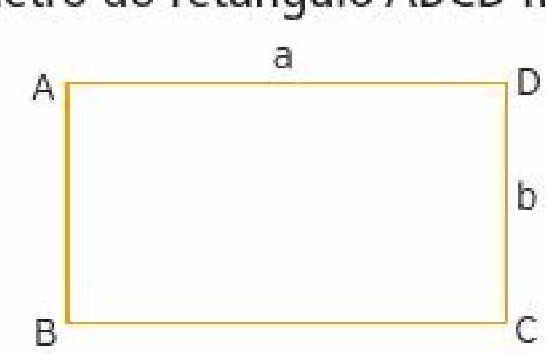
Se a altura de cada degrau é 15 cm, qual é o número de degraus dessa escada? 20 degraus.

3. O perímetro deste quadrado é 42 cm. Qual é o comprimento aproximado da circunferência de centro **O**? 32,97 cm.



4. Qual é o valor numérico da expressão $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ para $a = -2$, $b = 5$ e $c = 3$? 49

5. O perímetro do retângulo ABCD mede 40 cm.



Qual expressão algébrica, na variável **b**, representa a área desse retângulo? $20b - b^2$

6. Qual é o grau do polinômio que é a diferença entre $7a^3 + 4a^2 - 9$ e $9a^2 - 6$? 3

7. Considere $A = 5y^2 - 3y + 3$; $B = -3y^2 - 8y + 3$; $C = 4y^2 - 13$ e $D = 6y^2 - 7y + 9$, e calcule: $(A - C) - (B - D)$. $10y^2 - 2y + 22$

8. Qual é o produto de $2x^3y$ por $x^2 + y$? $2x^5y + 2x^3y^2$

9. Considere $M = x^2 - xy + y^2$ e $N = x + y$.

a) Calcule o produto $M \cdot N$. $x^3 + y^3$

b) Quantos termos tem o polinômio que é o resultado dessa multiplicação? 2 termos.

10. Qual é o quociente entre o polinômio $6a^3bc - 4a^2b^2c + 34abc$ e o monômio $2ab$? $3a^2c - 2abc + 17c$

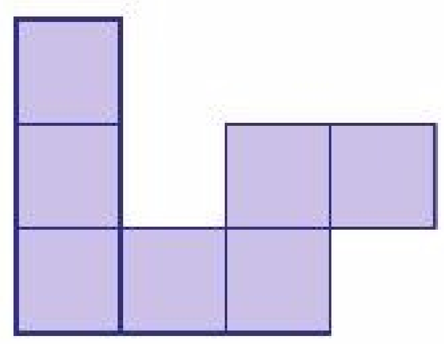
11. Mostre que o resto da divisão de $y^4 - 5y^3 + 9y^2 - 7y + 2$ por $y^2 - 3y + 2$ é um polinômio nulo. O quociente é $y^2 - 2y + 1$ e o resto é 0.

12. A área de um retângulo é representada pelo polinômio $6t^3 - 17t^2 + 22t - 15$, e o comprimento, pelo polinômio $3t^2 - 4t + 5$. Determine o polinômio que representa a largura desse retângulo. $2t - 3$

13. A letra **n** representa um número inteiro e $9n = 111111111$. A soma dos algarismos de **n** é: b

a) 45 b) 37 c) 18 d) 9

14. Na figura abaixo, a área de cada quadrado é representada por $a^2 \cdot b^4$.

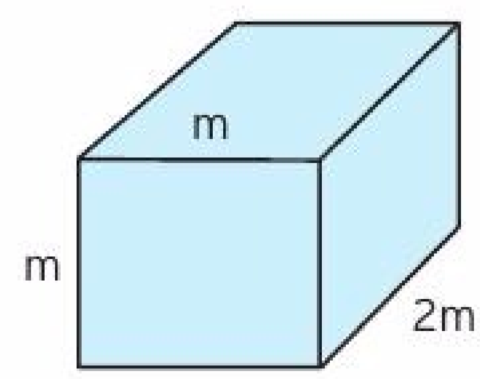


A área total da figura é: a

a) $7a^2b^4$ c) $7ab$

b) $10\,a^2b^4$ d) $10\,ab$

15. Neste paralelepípedo, a letra **m** representa um número real positivo.



O polinômio que pode representar o volume desse paralelepípedo é: d

a) $6m$ c) m^3

b) $9m$ d) $2m^3$

16. (Fuvest-SP) Se $A = \frac{(x - y)}{xy}$, $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{1}{2}$, então **A** é igual a: e

a) $-0{,}1$ d) $0{,}4$

b) $0{,}2$ e) $-0{,}5$

c) $-0{,}3$

17. (Prova Brasil) Uma prefeitura aplicou R$ 850 mil na construção de 3 creches e um parque infantil. O custo de cada creche foi de R$ 250 mil. A expressão que representa o custo do parque, em mil reais, é: d

a) $x + 850 = 250$ c) $850 = x + 250$

b) $x - 850 = 750$ d) $850 = x + 750$

18. O valor numérico da expressão $j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$, para $c = 3\,000$, $t = 4$ e $i = 5$, é: c

a) 200

b) 300

c) 600

d) 800

19. Se $A = x^3 - 1$; $B = 2x^3 - x^2 + x - 2$ e $C = -3x^3 + x^2 - 5$, o resultado de $A + B + C$ é um polinômio de grau: c

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

20. Se $A = 2a - 1$ e $B = 6a^2 - 15a + 2$, então $2A - \frac{B}{3}$ é igual a: a

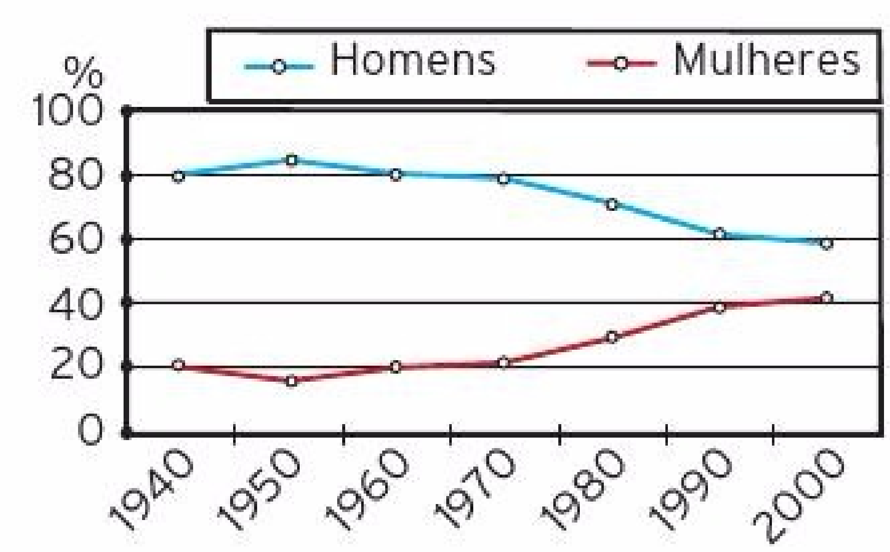
a) $-2a^2 + 9a - \frac{8}{3}$ c) $6a^2 - 13a + 1$

b) $2a^2 - 5a$ d) $2a^2 - 5a + \frac{2}{3}$

21. O resto da divisão de $5z^4 - 2z + 1$ por $z - 2$ é: b

a) 100 b) 77 c) 14 d) 0

22. (Enem) Um dos aspectos utilizados para avaliar a posição ocupada pela mulher na sociedade é a sua participação no mercado de trabalho. O gráfico mostra a evolução da presença de homens e mulheres no mercado de trabalho entre os anos de 1940 e 2000.



Fonte: IBGE. Anuários Estatísticos do Brasil.

Da leitura do gráfico, pode-se afirmar que a participação percentual do trabalho feminino no Brasil: e

a) teve valor máximo em 1950, o que não ocorreu com a participação masculina.

b) apresentou, tanto quanto a masculina, menor crescimento nas três últimas décadas.

c) apresentou o mesmo crescimento que a participação masculina no período de 1960 a 1980.

d) teve valor mínimo em 1940, enquanto a participação masculina teve o menor valor em 1950.

e) apresentou-se crescente desde 1950 e, se mantida a tendência, alcançará, a curto prazo, a participação masculina.

UNIDADE 6

Simetria, movimentos e padrões em Geometria

Um padrão presente na pintura do rosto da jovem e na forma das anêmonas é a composição em duas partes muito parecidas. O estudo de formas como essas faz parte da simetria, tema que será explorado nesta unidade.

RENATO SOARES/PULSAR IMAGENS

Nesta fotografia, a pintura do rosto evoca simetria axial.

INCAMERASTOCK/ALAMY/LATINSTOCK

Anêmonas com simetria radial.

Nesta unidade...

1. Simetria
2. Movimentos em Geometria
3. Movimentos e propriedades geométricas
4. Padrões e ladrilhamentos

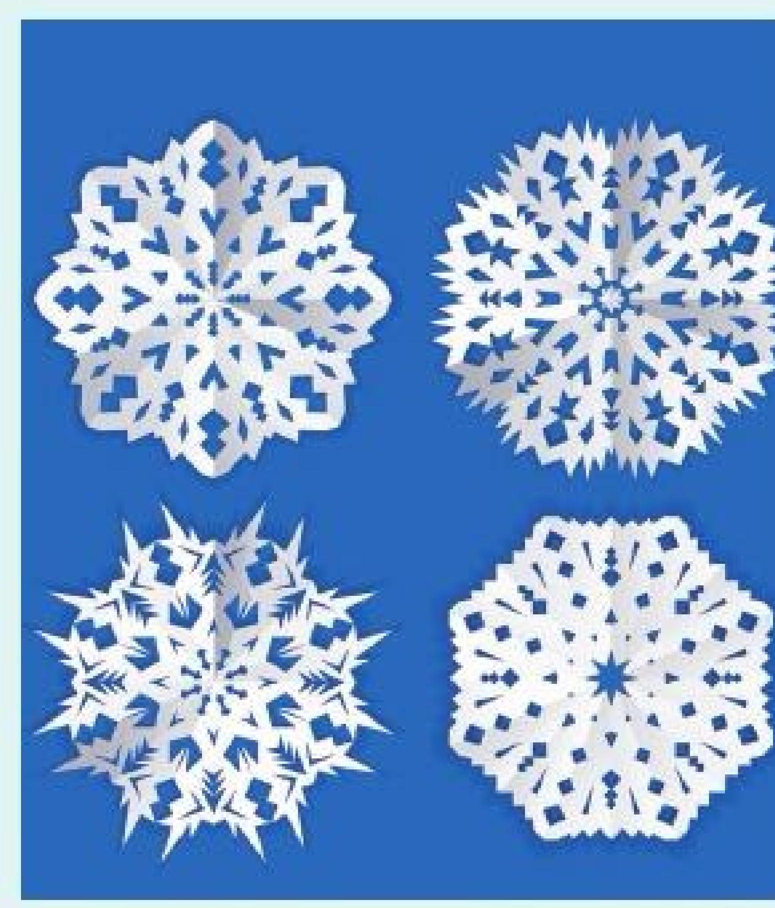
A simetria passou a ser um elemento fundamental em vários momentos da cultura humana. A arte popular, por exemplo, torna-se mais rica quando a simetria se une aos movimentos das figuras geométricas e aos padrões geométricos. É quando podemos observar uma aplicação perfeita da Matemática às Artes.

A natureza está repleta de elementos que exemplificam a simetria, assim como muitos objetos produzidos pelo homem. Esta borboleta, por exemplo, apresenta uma simetria quase perfeita.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

JOERG HAUK/PICTURE PRESS/LATINSTOCK

O Taj Mahal é um mausoléu indiano construído no século XVII. É considerado Patrimônio da Humanidade.


SHUTTERSTOCK

Recortes de papel simétricos.

O que você já sabe?

- Faça uma pesquisa observando figuras apresentadas em jornais, revistas e panfletos de propaganda e encontre figuras com simetria. Recorte-as, produza um cartaz e mostre aos colegas. Resposta pessoal.
- João mostrou uma foto sua ao colega e disse: "Meu rosto é simétrico!". O que ele quis dizer com isso?
Resposta possível: A metade do rosto dele é igual à outra metade.
- Juliana mostrou esta fotografia de um cavalo-marinho e disse que a imagem tinha simetria. Em sua opinião, ela está certa? Não.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

1 Simetria

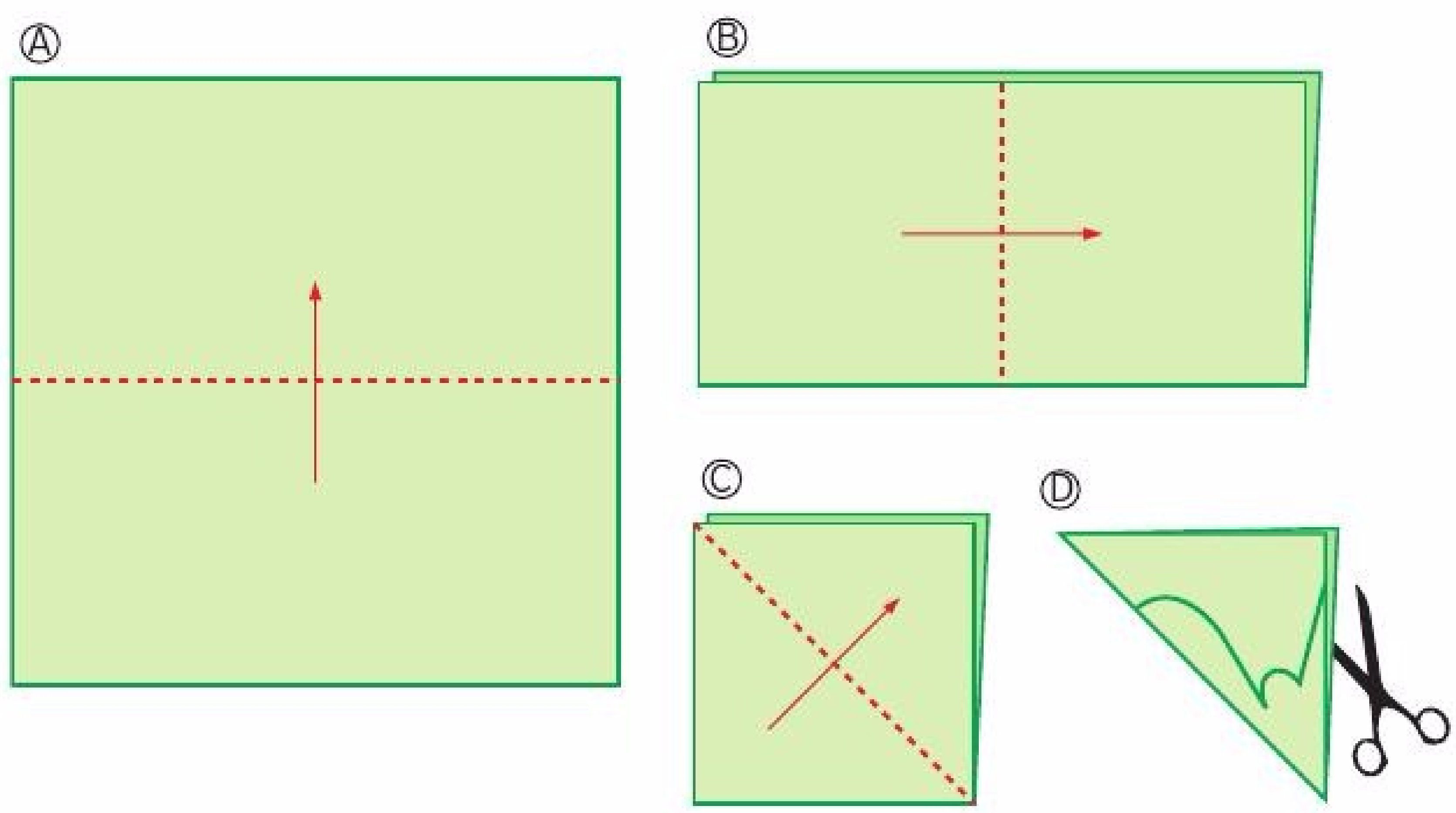
Simetria axial

Para refletir e responder

Kiri: cortar
gami: papel

Faça um *kirigami*!

Comece dobrando três vezes ao meio, ajustando as bordas, um papel de forma quadrada. Crie uma figura qualquer e desenhe-a junto à última dobra. Recorte pelas linhas e abra o papel.

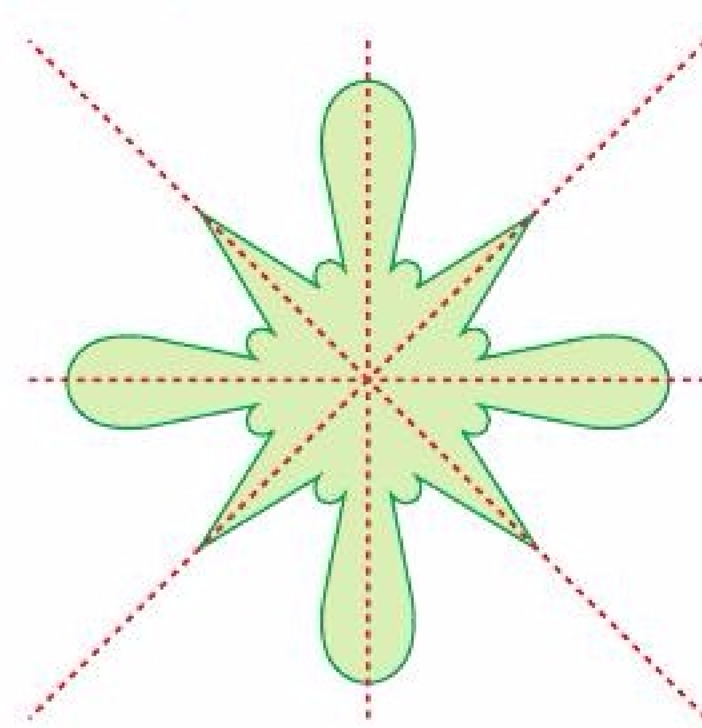


- A figura obtida apresenta simetria? Explique por quê.
  Sim. Resposta possível: Porque a figura fica dividida, pela dobra, em duas partes que são espelhadas.

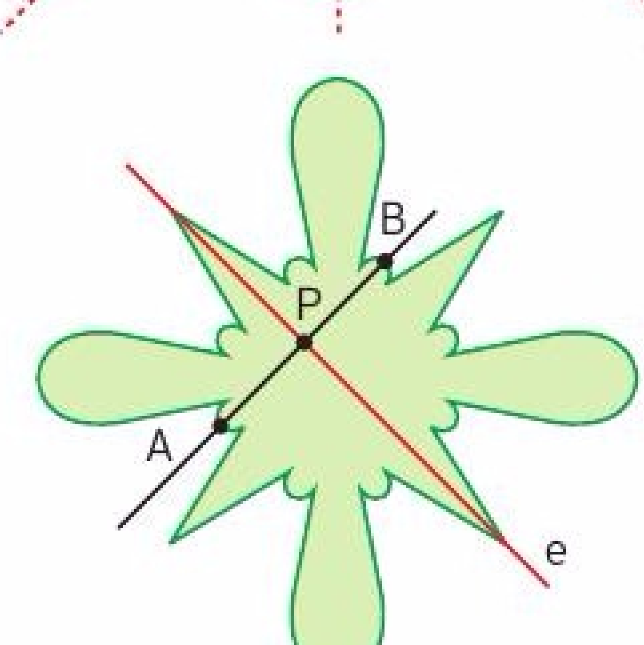
Figuras obtidas por meio de procedimentos como o desenvolvido acima apresentam **simetria**.

Em outras palavras, é possível traçar uma reta sobre ela de maneira que ficará dividida em duas partes que são espelhadas uma da outra.

No caso da atividade acima, a figura obtida tem quatro **eixos de simetria**.



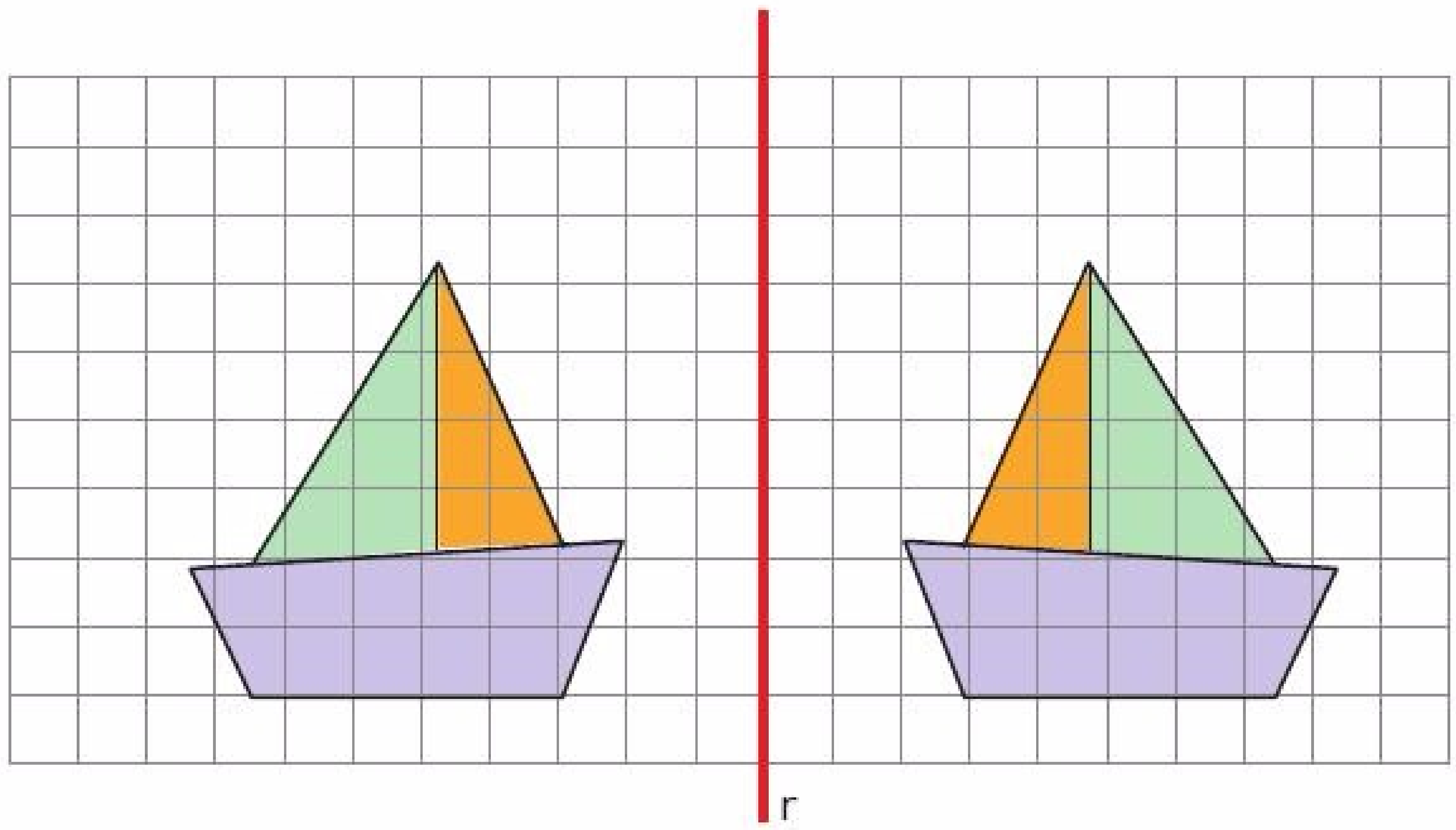
Agora, observe novamente essa figura e a reta **e**, um dos eixos de simetria.



A e **B** são **pontos simétricos** em relação ao eixo **e**. Note que a reta AB é perpendicular ao eixo de simetria: $\overleftrightarrow{AB} \perp e$

Além disso, os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ têm as medidas iguais.

Existem situações nas quais toda a figura é a imagem espelhada de outra em relação a uma reta. Nesse caso dizemos que elas são figuras simétricas. Veja o exemplo abaixo.

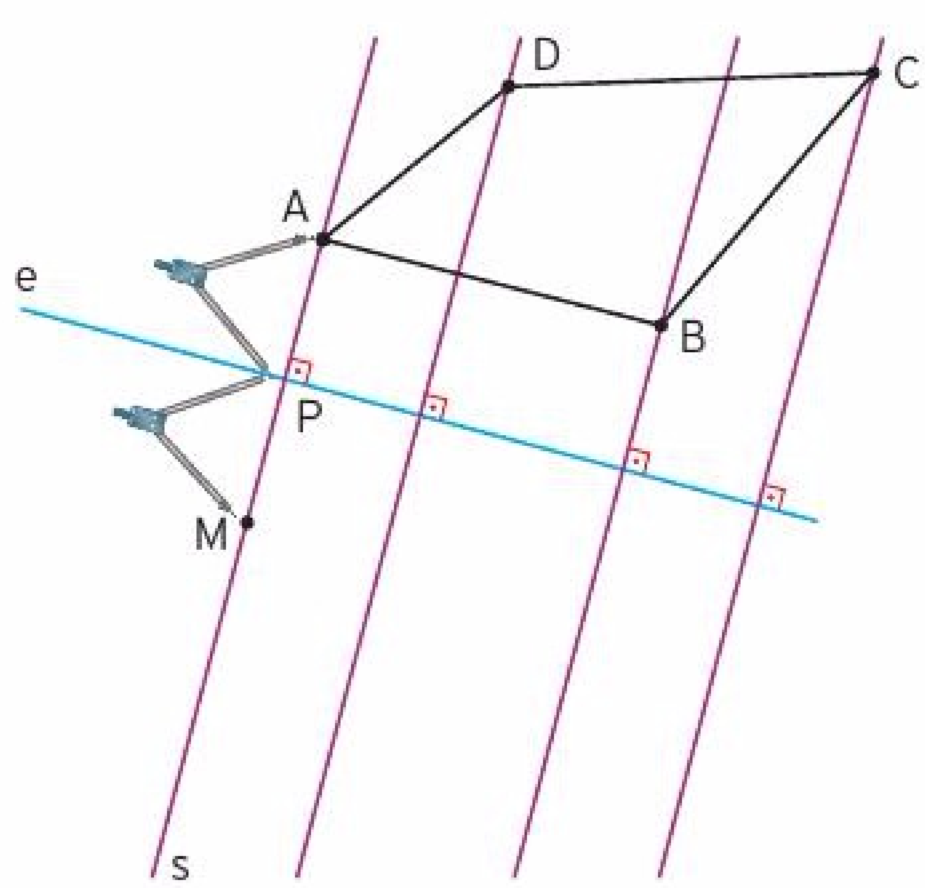


r é o eixo de simetria.

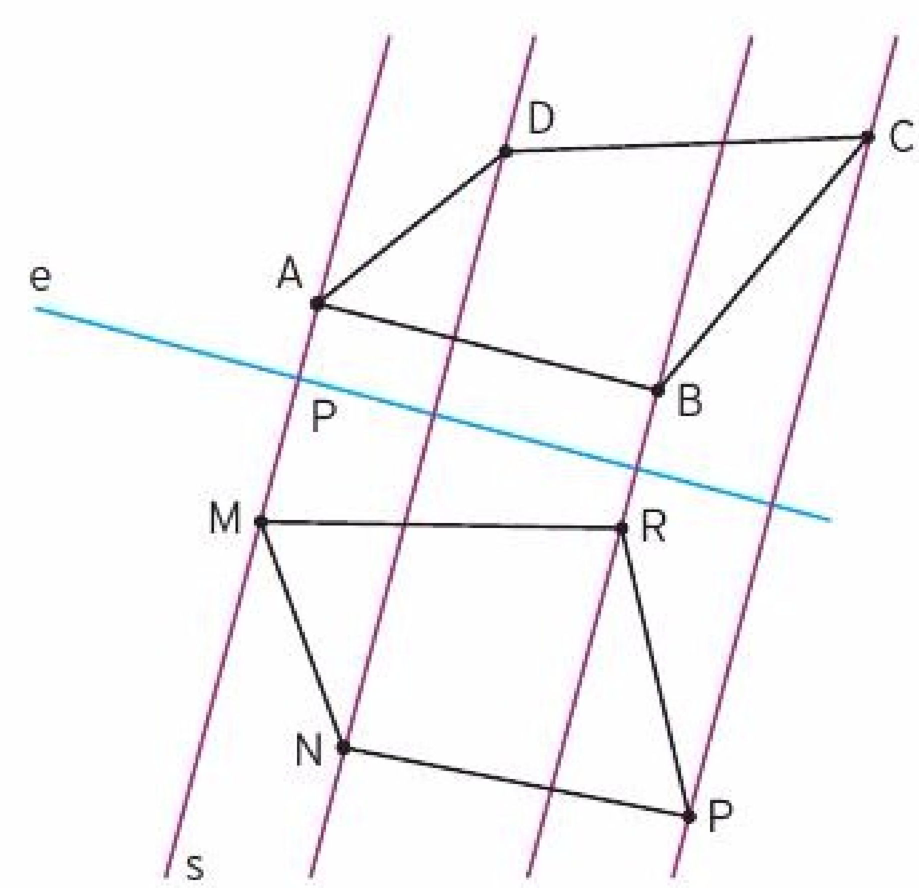
Desenhando figuras simétricas

Vamos, então, aprender a desenhar uma figura simétrica a outra em relação a um eixo de simetria.

Primeiro destacamos os pontos principais da figura. Em seguida, por esses pontos, traçamos retas perpendiculares ao eixo de simetria **e**. No caso do quadrilátero abaixo, destacamos os vértices. Pelos vértices destacados traçamos retas perpendiculares a **e**.



O ponto simétrico a **A** é destacado na reta s, perpendicular a **e** passando por **A**, de modo que a distância dele a **P** seja igual à distância de **A** a **P**. Na figura acima, **A** e **M** são simétricos em relação a **e**.



O procedimento é repetido para os demais vértices até obter-se MRPN, que é a figura simétrica de ABCD em relação a **e**.

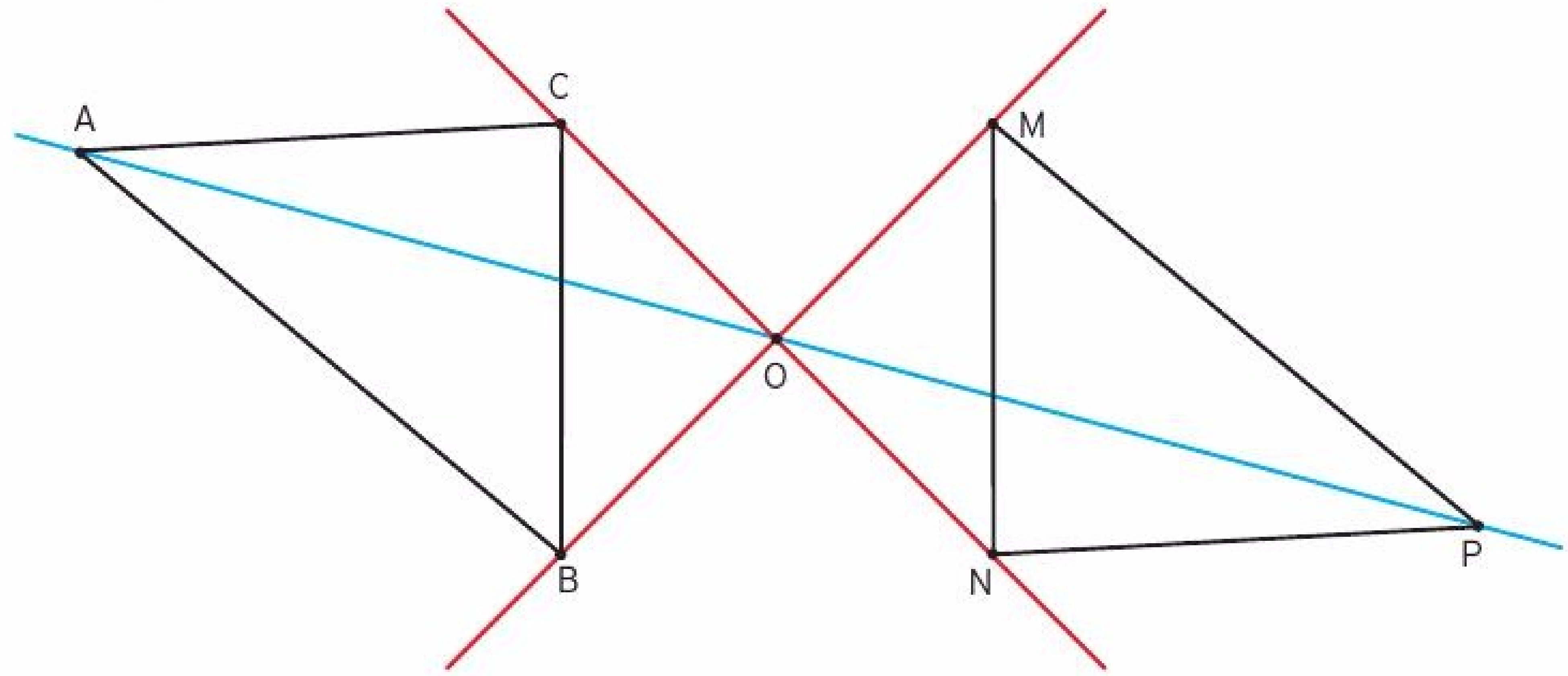
Esse tipo de simetria é uma **simetria axial** ou de **reflexão sobre uma reta**.

Nessa figura, se fizermos uma dobra sobre a reta **e**, um dos polígonos ficará superposto ao outro, ou seja, as duas figuras serão coincidentes. Isso significa que em uma simetria axial uma figura e a figura simétrica a ela têm lados correspondentes com medidas iguais e ângulos correspondentes com medidas iguais. Elas são **figuras congruentes**.

Simetria central

Vamos explorar uma **simetria central** examinando um exemplo.

Observe a figura abaixo.



Na figura, as distâncias de:

- **A** a **O** e **P** a **O** são iguais;
- **B** a **O** e **M** a **O** são iguais;
- **C** a **O** e **N** a **O** são iguais.

Os triângulos ABC e PNM são **simétricos em relação ao ponto O**.

Chamamos esse tipo de simetria de **simetria central**.

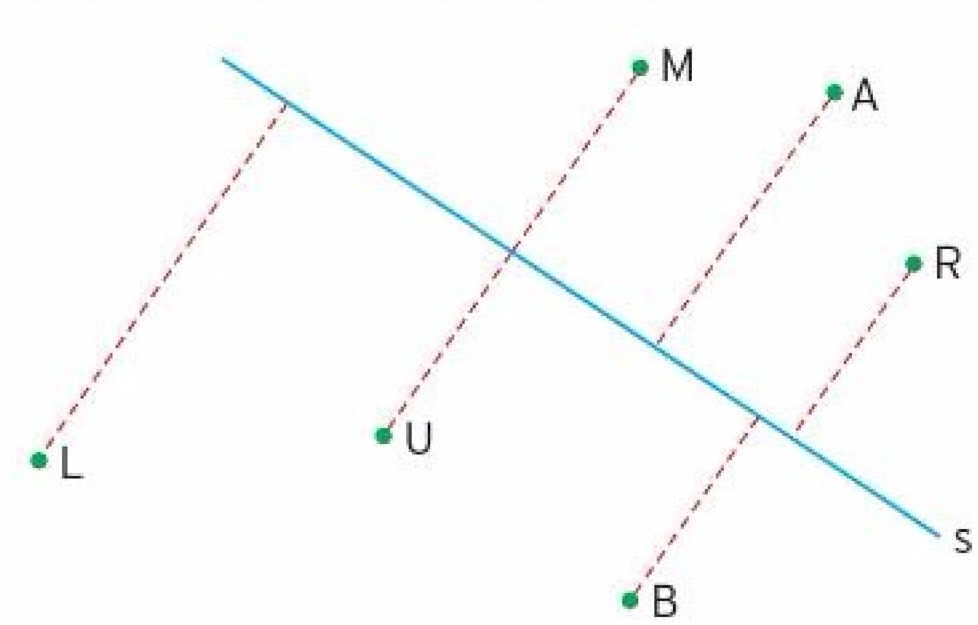
Note que o △PNM é congruente ao △ABC.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Na figura abaixo os segmentos de reta tracejados são perpendiculares à reta **s**. Com uma régua, determine a distância de cada um desses pontos à reta e responda às questões.

M – 1,5 cm; **A** – 2,2 cm; **R** – 1,5 cm; **L** – 3 cm; **U** – 1,5 cm; **B** – 1,5 cm

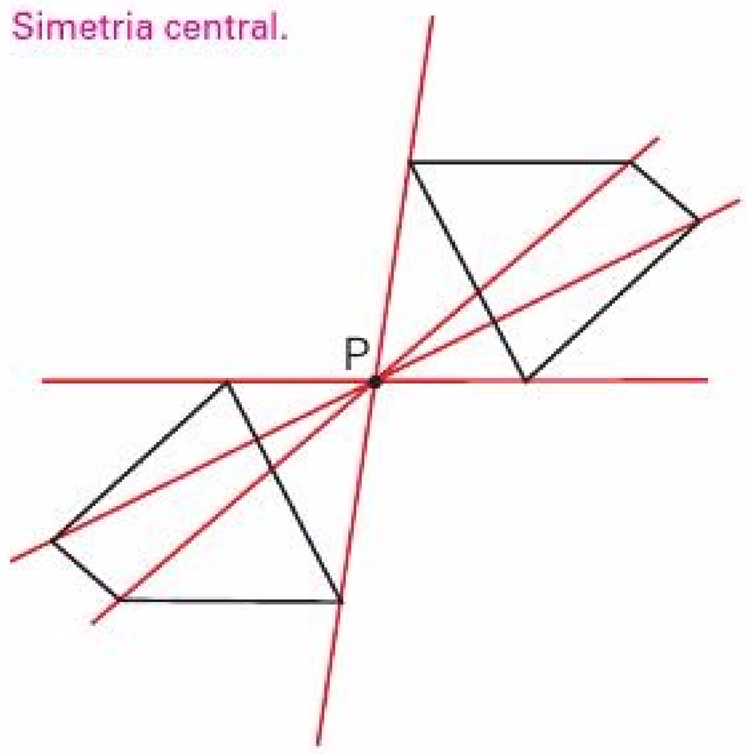


a) Quais desses pontos são simétricos em relação à reta **s**? **M** e **U**.

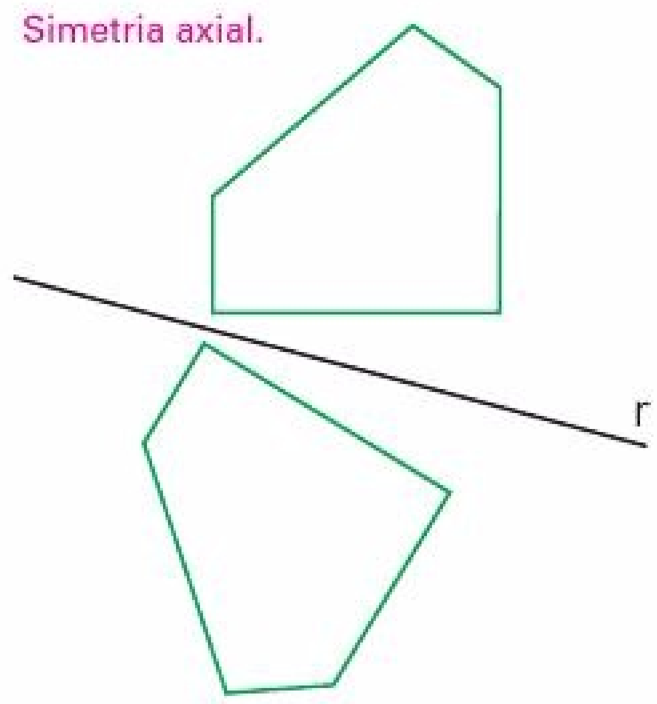
b) B e R estão à mesma distância de **s**. Eles são pontos simétricos em relação a **s**? Por quê?
Não; não estão na mesma reta perpendicular a **s**.

2. Anote o tipo de simetria que há em cada situação:

a) Simetria central.

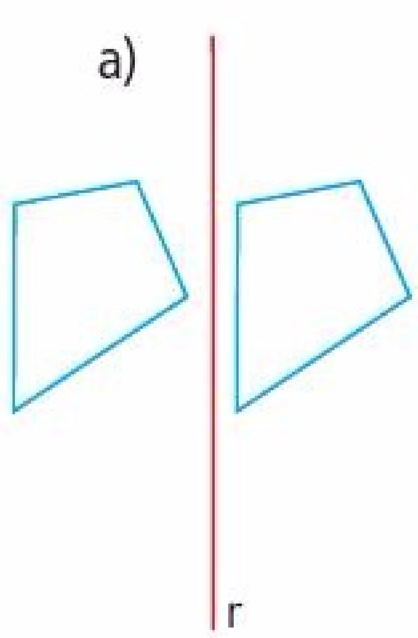


b) Simetria axial.

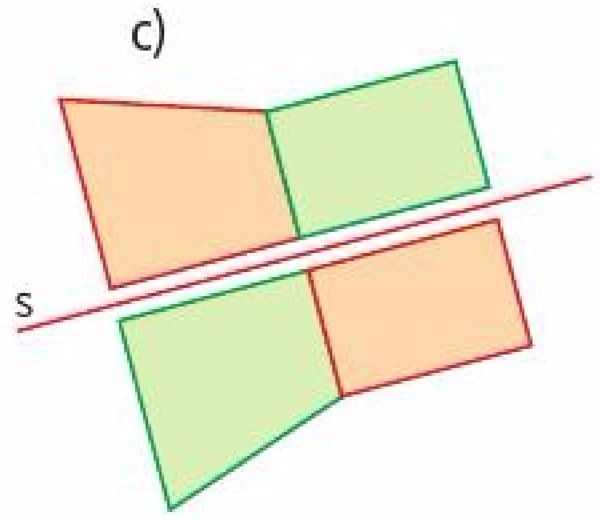


3. Entre os pares de figuras a seguir, quais são simétricas? c

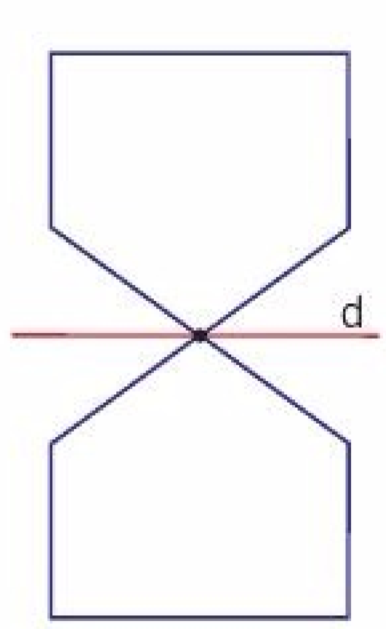
a)



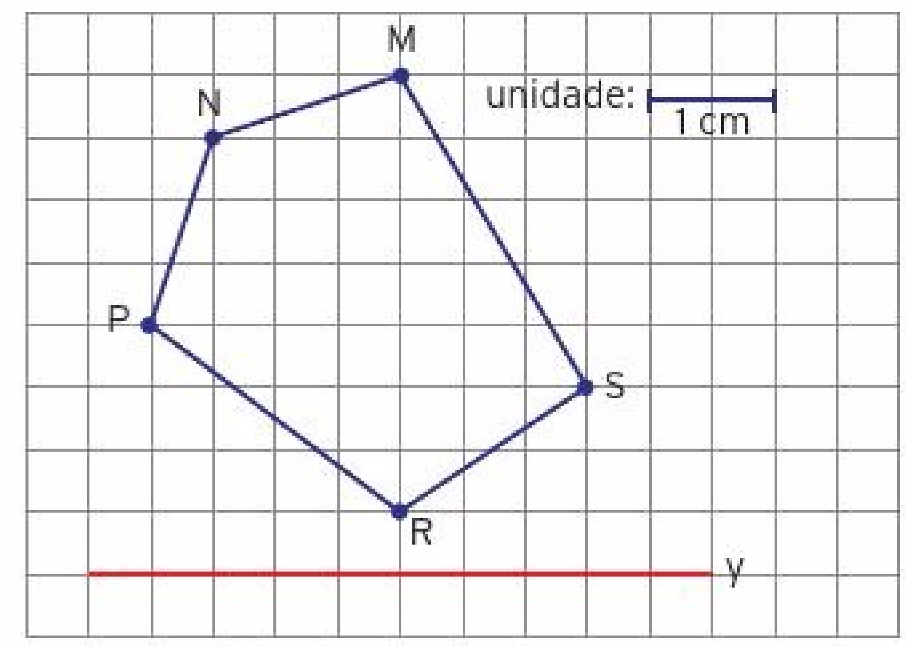
c)



b)



4. Copie este pentágono em papel quadriculado e faça o que se pede.

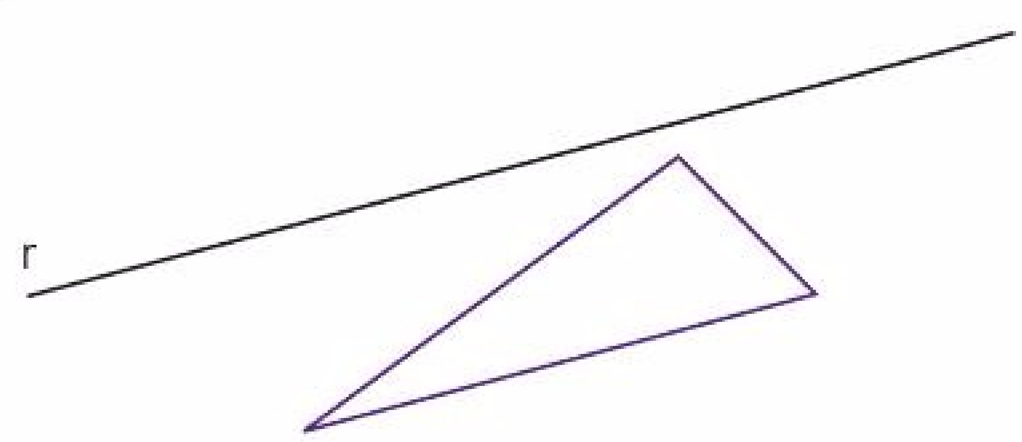


a) Construa a figura geométrica simétrica a essa em relação ao eixo y. Veja resposta no final do livro.

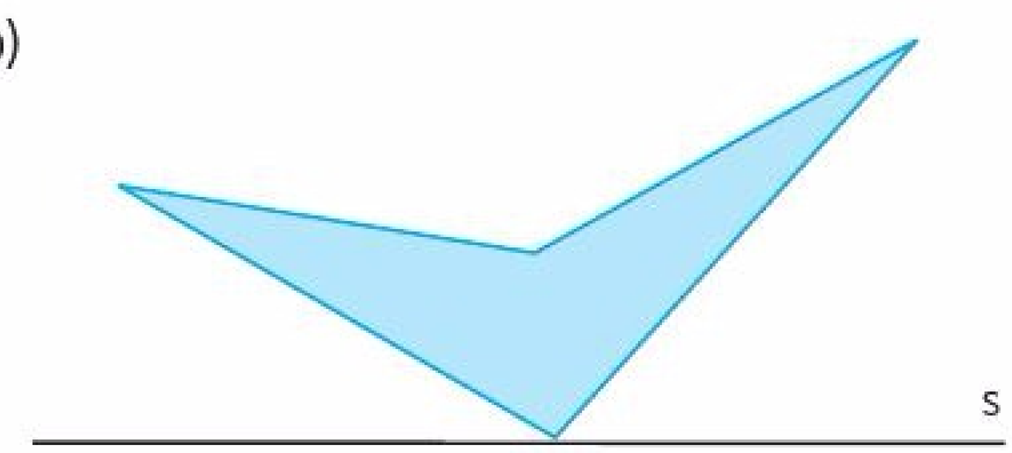
b) Identifique um par de pontos simétricos em relação ao eixo y. Resposta pessoal.

5. Desenhe polígonos parecidos com estes. Trace as retas **r**, **s** e **t** em posição semelhante às da figura. Em seguida, complete-os desenhando figuras simétricas em relação à reta, em cada situação. Veja respostas no final do livro.

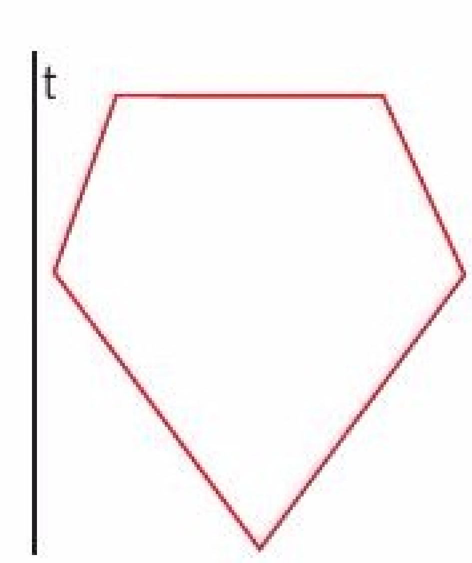
a)



b)

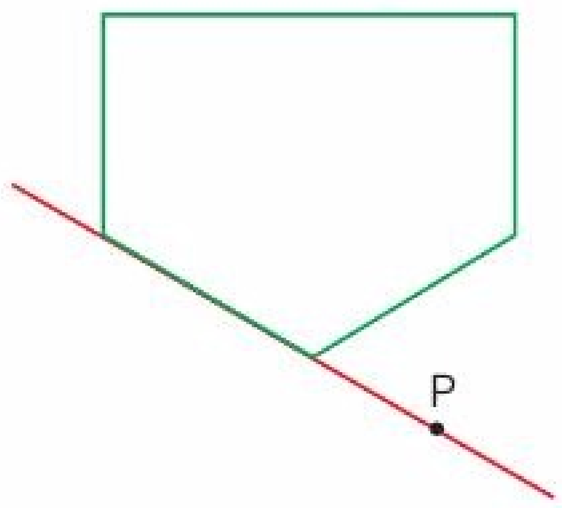


c)

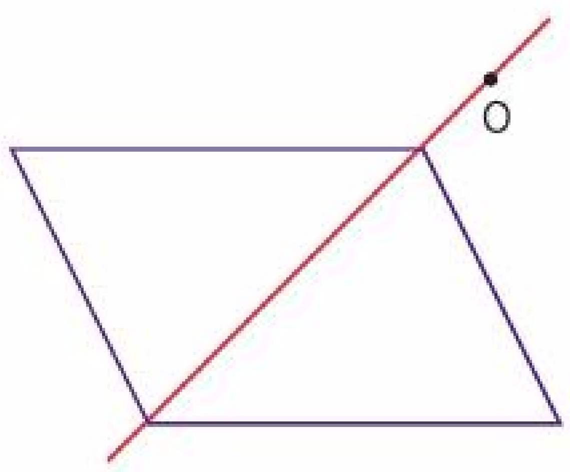


6. Desenhe polígonos parecidos com estes. Marque os pontos **P** e **O** em posição semelhante às das figuras. Em seguida, complete-os desenhando figuras simétricas em relação ao ponto em cada situação. Veja respostas no final do livro.

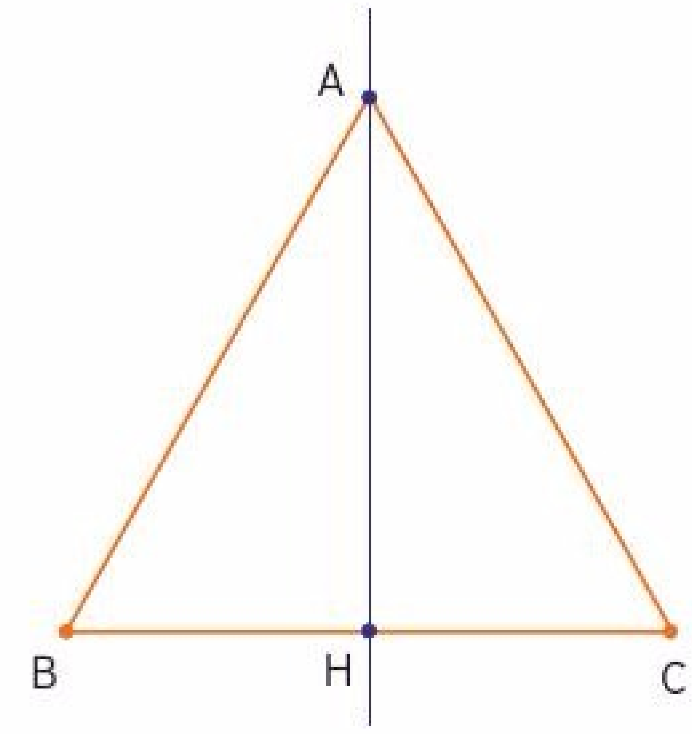
a)



b)



7. Os triângulos ABH e ACH são simétricos em relação ao eixo $\overline{AH}$.



Responda a estas questões:

a) Os lados e os ângulos correspondentes nesses dois triângulos são congruentes? Sim.

b) Qual é o lado congruente a $\overline{AB}$ no triângulo ACH? Lado $\overline{AC}$.

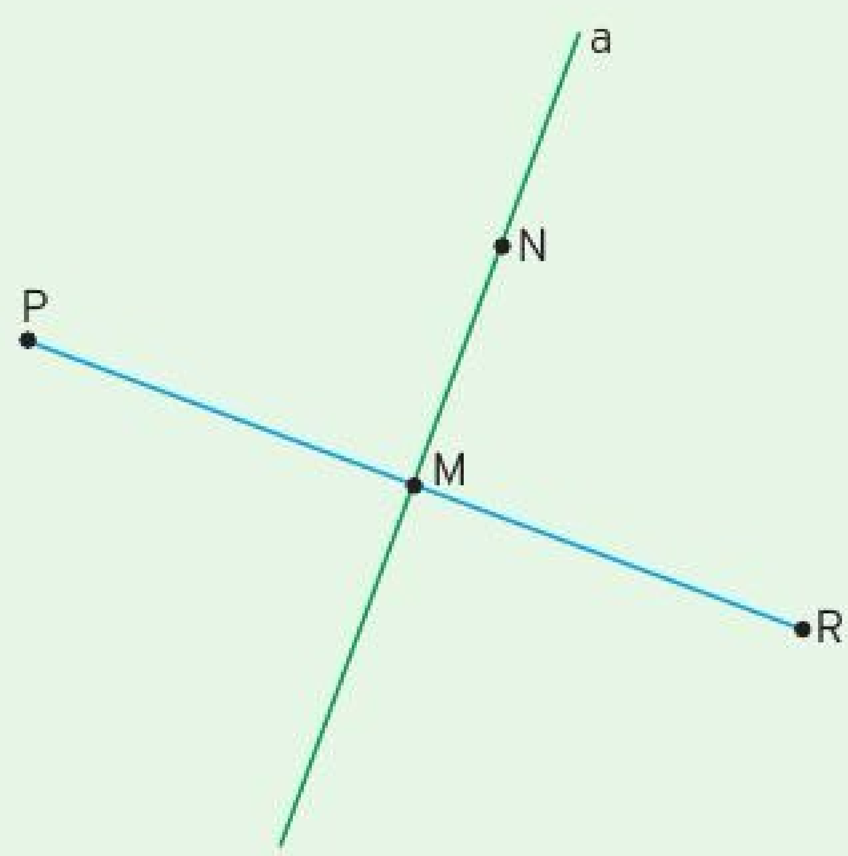
c) Qual é o ângulo congruente a $A\hat{B}H$ no triângulo ACH? $A\hat{C}H$.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

Neste desenho temos um segmento de reta $\overline{PR}$ e uma reta **a**, sendo $a \perp \overline{PR}$. Além disso, **M** é ponto médio de $\overline{PR}$.



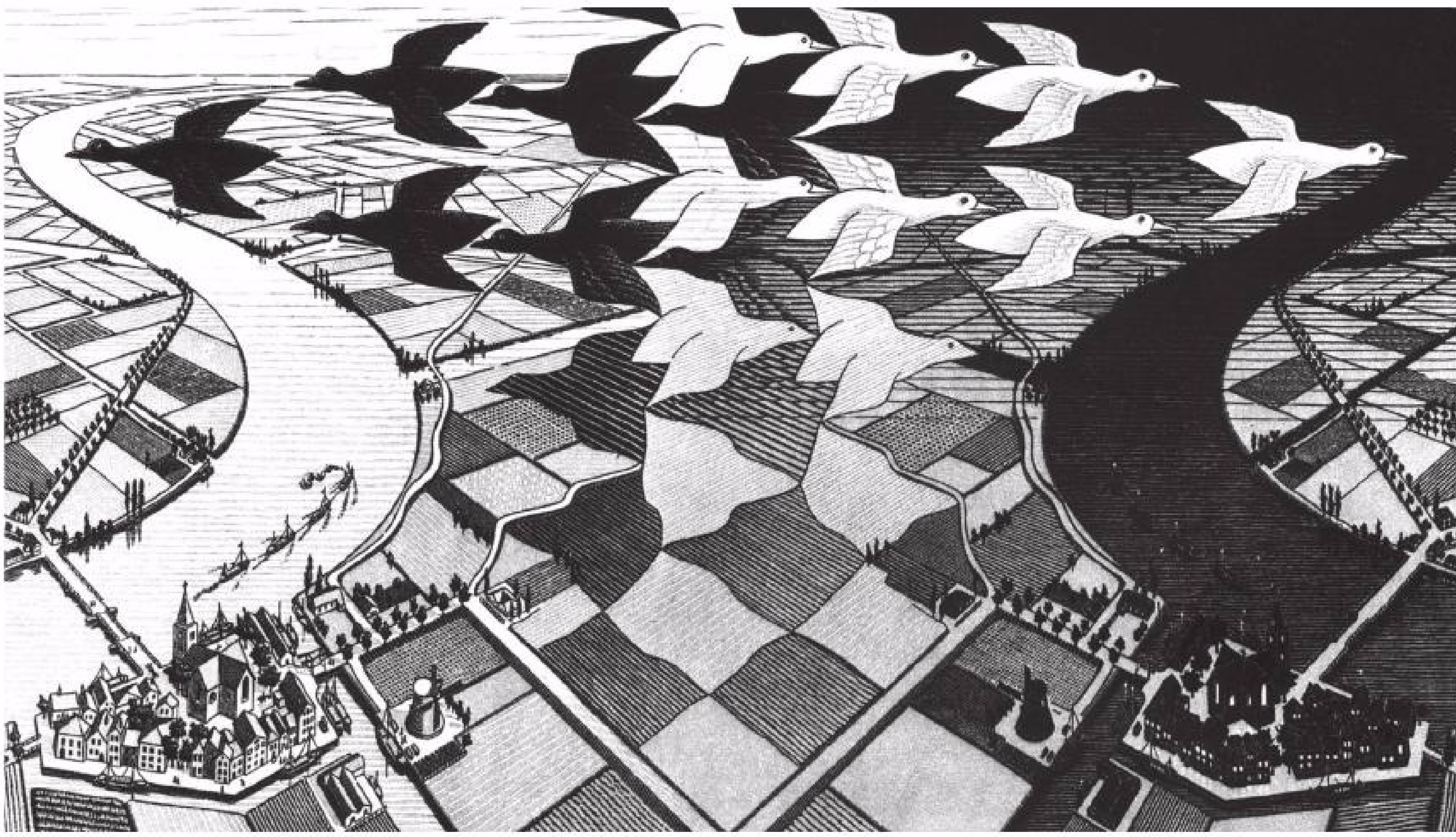
- O que é a reta **a** em relação ao segmento de reta $\overline{PR}$? Mediatriz de $\overline{PR}$.
- Considerando a reta **a**, que relação existe entre os pontos **P** e **R**? São pontos simétricos.
- A distância de **N** a **P** é igual à distância de **N** a **R**? Sim.
- Copiem esse desenho em seu caderno e marquem outros pontos na reta **a**. O que se pode concluir sobre as distâncias de qualquer um desses pontos às extremidades **P** e **R** de $\overline{PR}$? São iguais.

Movimentos e padrões

Certifique-se de que os alunos se interessam por atividades que envolvem artes, figuras geométricas e movimentos. Propicie atividades lúdicas motivadoras que possibilitem a exploração desse tema. É possível, também, desenvolvê-lo com outras disciplinas, como Educação Artística, por exemplo.

Para refletir e responder

Com gravuras como *Dia e noite*, Escher (1898-1972), artista gráfico holandês, surpreendeu o mundo e, em particular, os matemáticos, com suas obras apoiadas em conceitos geométricos.



MAURITS CORNELIS ESCHER

Fonte: Bruno Ernst. *O espelho mágico de M. C. Escher*. Evergreen, 1991. Escher, *Dia e noite*, fev. de 1938.

- Identifique um padrão na gravura feita por Escher. Resposta possível: Pássaros brancos se deslocam todos na mesma direção.
- Em seu caderno, faça um desenho que sugira movimento e mostre a um colega. Resposta pessoal.

Vamos observar novamente a obra *Dia e noite*.

Fixe seu olhar nos **pássaros brancos...**

Mas, se você olhar os **pássaros pretos...**

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Nessa obra, os campos lavrados, com sua forma geométrica, elevam-se em direção ao céu e transformam-se, aos poucos, em pássaros brancos e em pássaros pretos.

...eles voam para a direita, em direção à noite que recobre uma pequena aldeia à beira de um rio.

...poderá vê-los sobrevoando uma paisagem iluminada de sol, que é a imagem refletida da paisagem noturna.

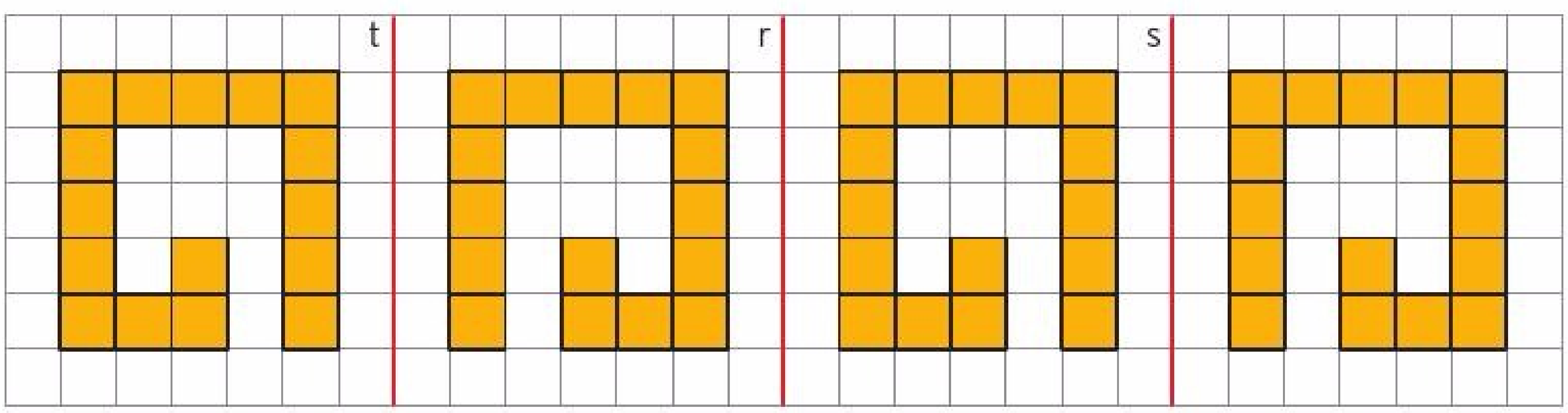
2 Movimentos em Geometria

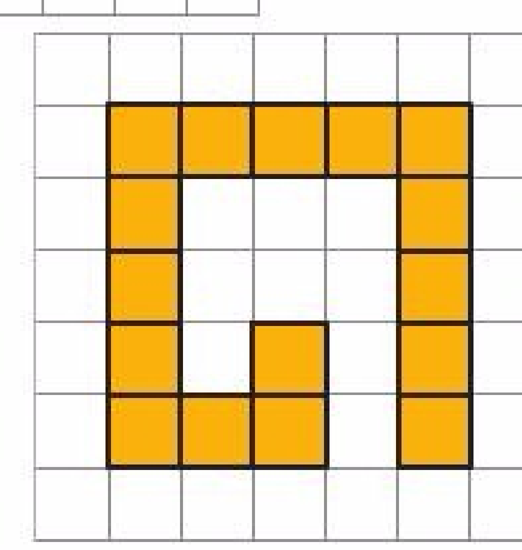
O movimento de reflexão

Movimentos, como esse presente na obra de Escher, mostrado na página anterior, associados às figuras geométricas produzem trabalhos de muita qualidade estética. Em Geometria estudam-se tais movimentos de acordo com a natureza de cada um. A **reflexão** de uma imagem é um deles.

Exemplo:

Parte de uma barra decorativa.





Note que um padrão presente nessa faixa decorativa pode ser a composição de imagens, como esta ao lado, recorrendo a uma simetria axial que produz uma reflexão dela.

O movimento de translação

O movimento de **translação** caracteriza-se pelo deslocamento de todos os pontos de uma figura em uma mesma direção, mantendo-se a distância do deslocamento.

Exemplo:

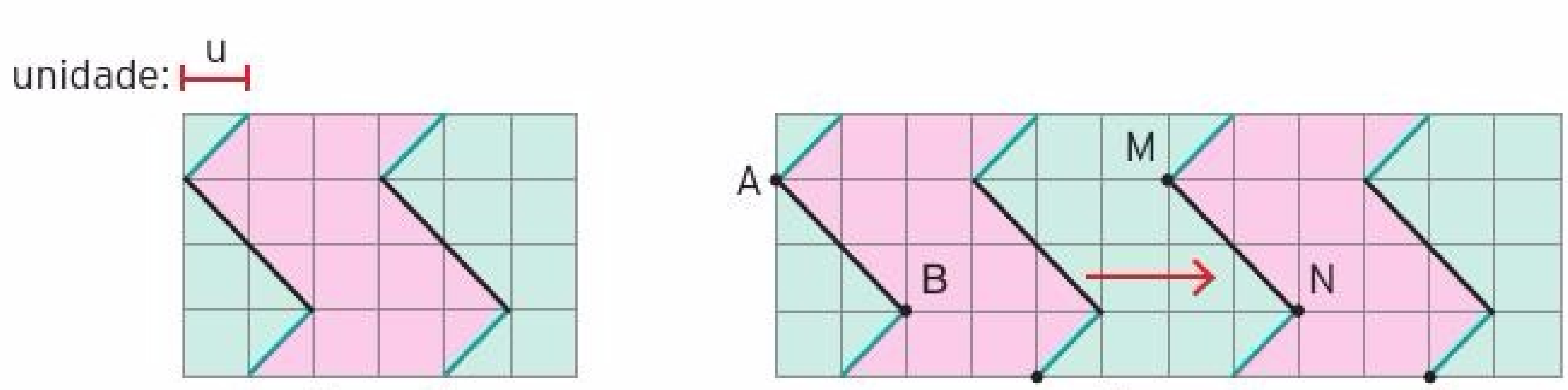


Figura 1 Figura 2

A **figura 2** foi obtida deslocando a **figura 1** no sentido indicado pela seta em vermelho e da esquerda para a direita. Assim:

- o ponto **A** foi deslocado para a direita 6 unidades até obter-se o ponto **M**;
- o ponto **B** foi deslocado para a direita 6 unidades até obter-se o ponto **N**;
- essas ações foram repetidas para todos os pontos da figura, até obter-se a figura 2.

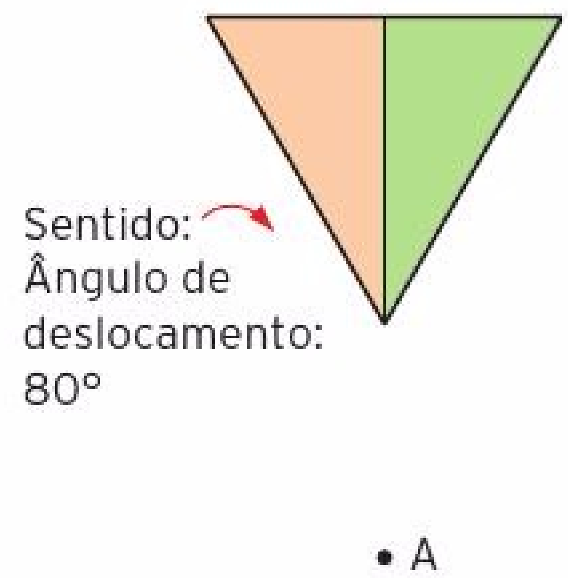
Nessa situação foi aplicada uma **translação** sobre a figura 1.

O movimento de rotação

O movimento de **rotação** caracteriza-se pelo giro, em torno de um ponto, de todos os pontos de uma figura em uma mesma direção mantendo-se um ângulo de deslocamento.

Exemplo:

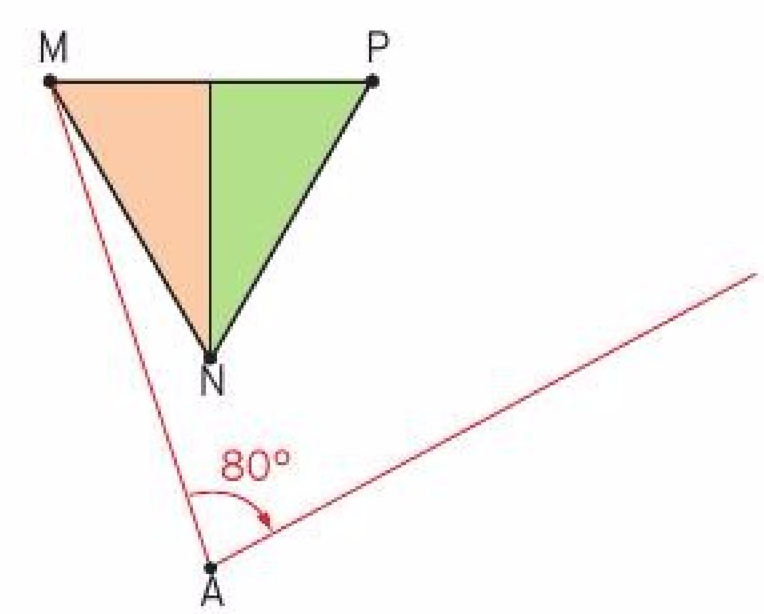
Vamos aplicar um giro de 80° sobre a figura ao lado, em torno do ponto **A** no sentido horário, e obter outra figura seguindo as etapas seguintes.



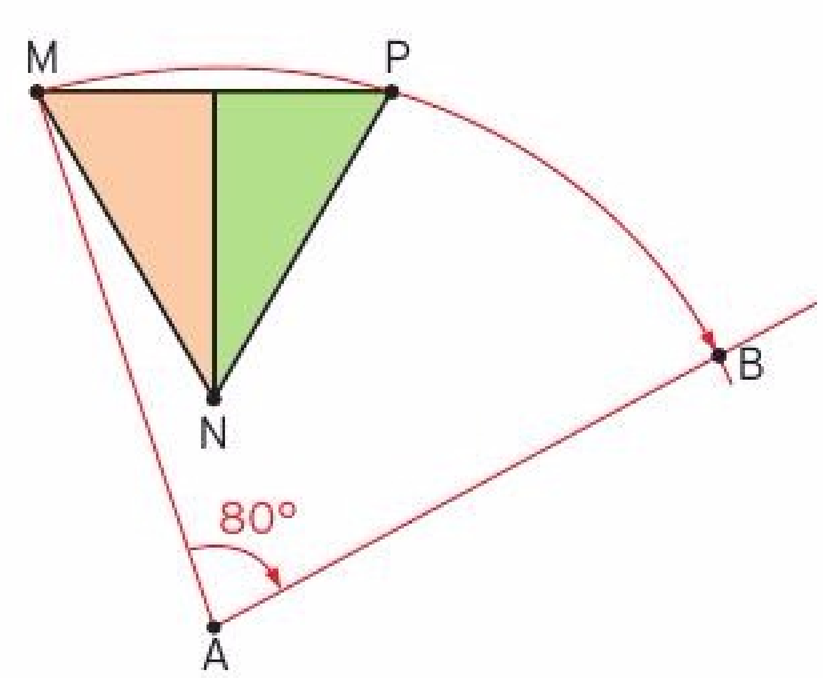
O **sentido horário** é o sentido do movimento dos ponteiros de um relógio.

1) Marcando na figura inicial três pontos, **M**, **N** e **P**, temos o triângulo MNP.

   Desenhamos o segmento de reta $\overline{MA}$ e, com um transferidor, traçamos um ângulo de 80°.

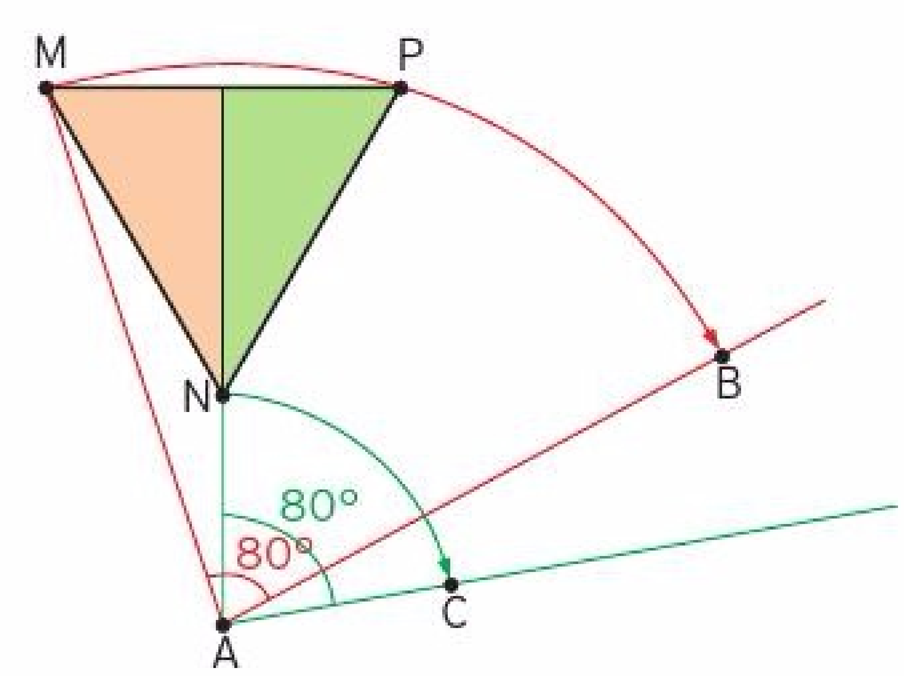


2) Com a ponta-seca do compasso em **A** e abertura $\overline{AM}$, traçamos um arco de circunferência. Esse arco cruza o outro lado do ângulo no ponto **B**.

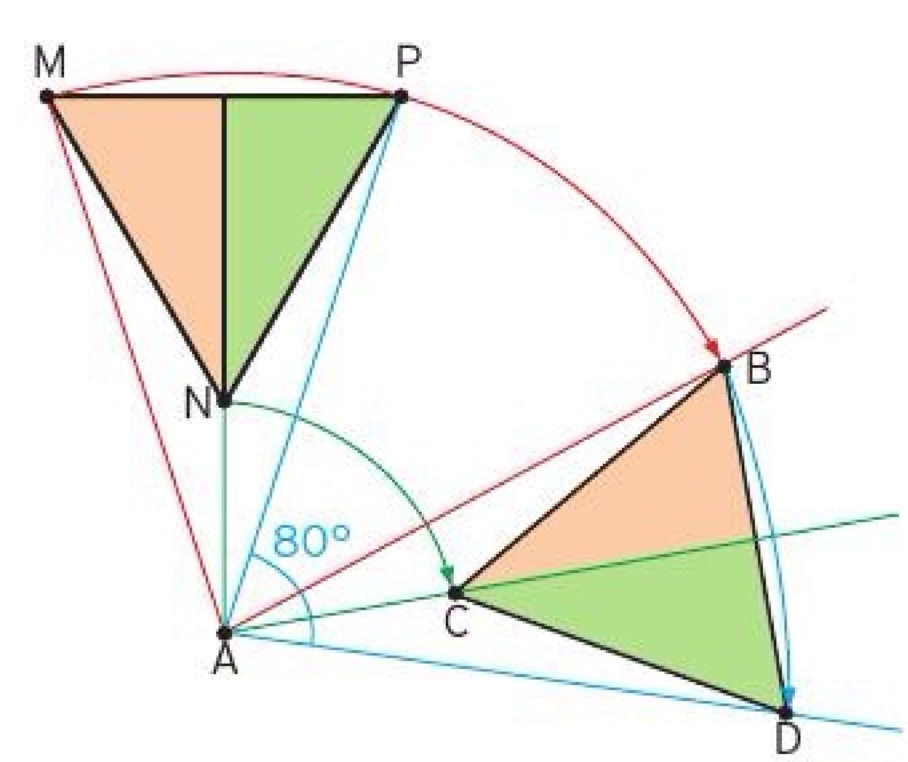


   O ponto **B** é o ponto correspondente a **M** nesse giro.

3) Para o ponto **N**, marcado sobre a figura, repetimos todas as ações já descritas para o ponto **M**. Nesse caso, fica determinado o ponto **C**, que é o ponto correspondente a **N** nesse giro.



4) Repetimos para o ponto **P** o que foi feito com os pontos **M** e **N**. Obtemos a figura na posição final: o triângulo BCD.



Podemos observar que cada ponto do triângulo MNP girou 80° em torno do ponto **A**, no sentido horário, e manteve sempre a mesma distância em relação a esse ponto.

$$\left.\begin{array}{l} \text{med } M\hat{A}B = 80° \\ \text{med } \overline{AM} = \text{med } \overline{AB} \end{array}\right]$$ — **M** e **B** são pontos correspondentes.

$$\left.\begin{array}{l} \text{med } N\hat{A}C = 80° \\ \text{med } \overline{AN} = \text{med } \overline{AC} \end{array}\right]$$ — **N** e **C** são pontos correspondentes.

$$\left.\begin{array}{l} \text{med } P\hat{A}D = 80° \\ \text{med } \overline{AP} = \text{med } \overline{AD} \end{array}\right]$$ — **P** e **D** são pontos correspondentes.

Em Geometria, dizemos que sobre o desenho inicial foi aplicada uma **rotação** de 80° no sentido horário em torno do ponto **A**. Esse ponto é o **centro de rotação**.

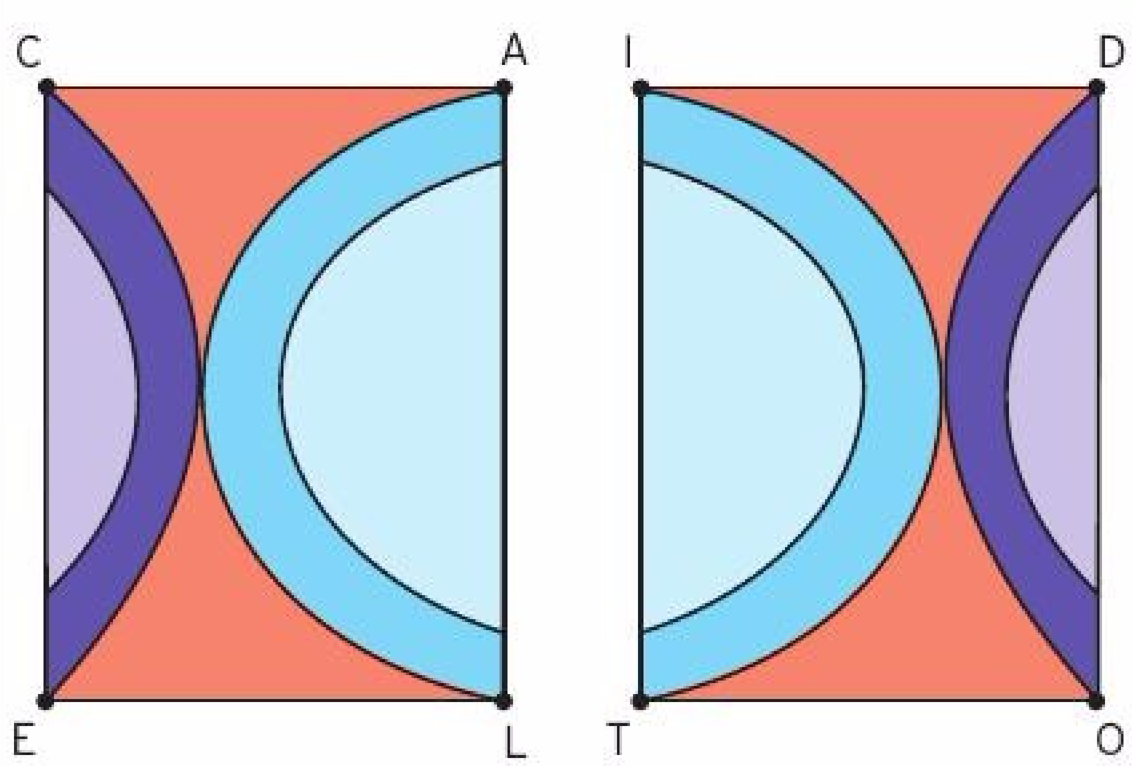
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

8. Uma figura foi movimentada segundo uma translação. Como são as retas que passam pelos pontos da figura inicial e por seus correspondentes na figura obtida? São retas paralelas.

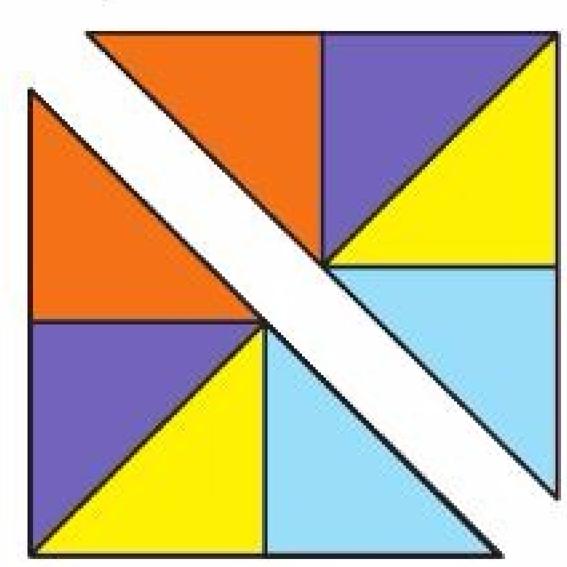
9. Uma figura foi movimentada segundo uma translação. O que ocorre com as distâncias entre os pontos da figura inicial e seus correspondentes na figura final? São iguais.

10. Neste desenho, DOTI foi obtido a partir de CELA por meio de um movimento. Que movimento foi esse? Reflexão.



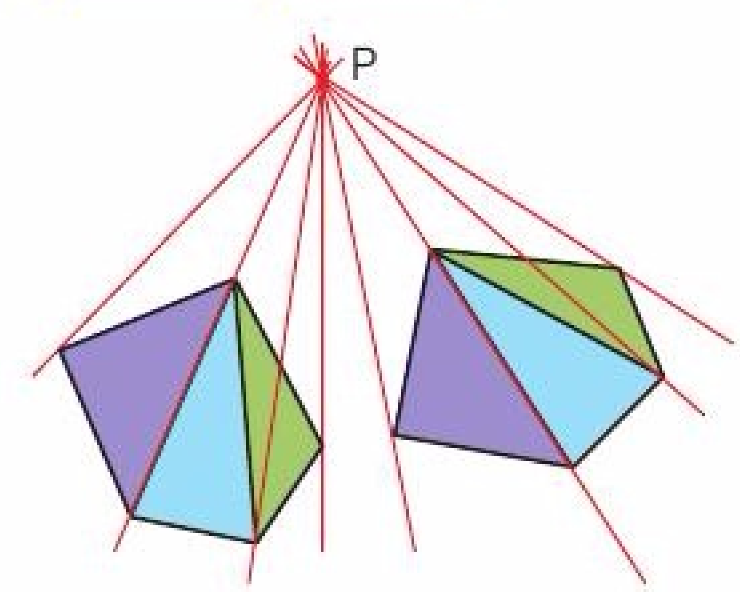
11. Observe os resultados obtidos por meio de um movimento aplicado a cada uma das figuras. Identifique o movimento utilizado em cada caso.

a)



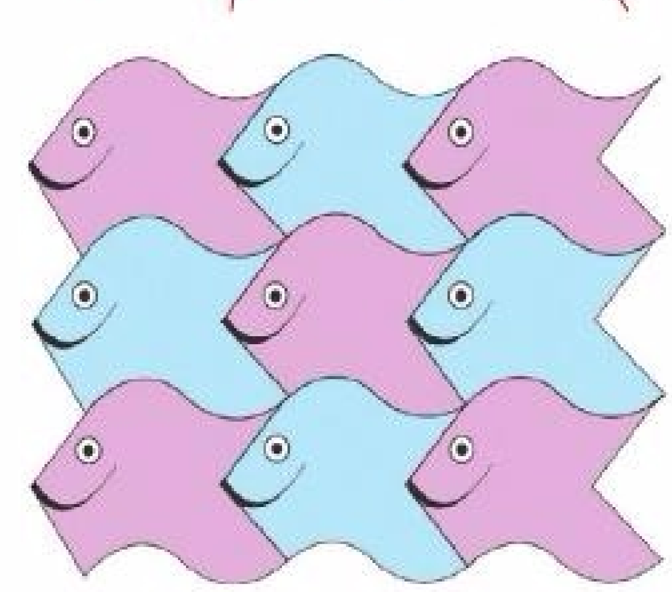
Reflexão.

b)



Rotação.

c)



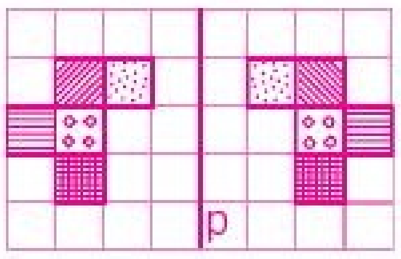
Translação.

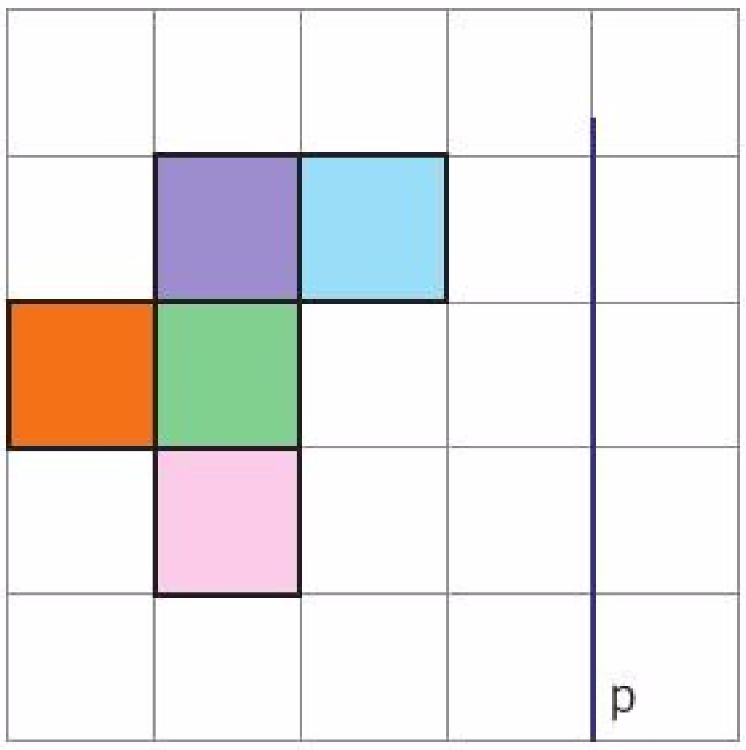
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

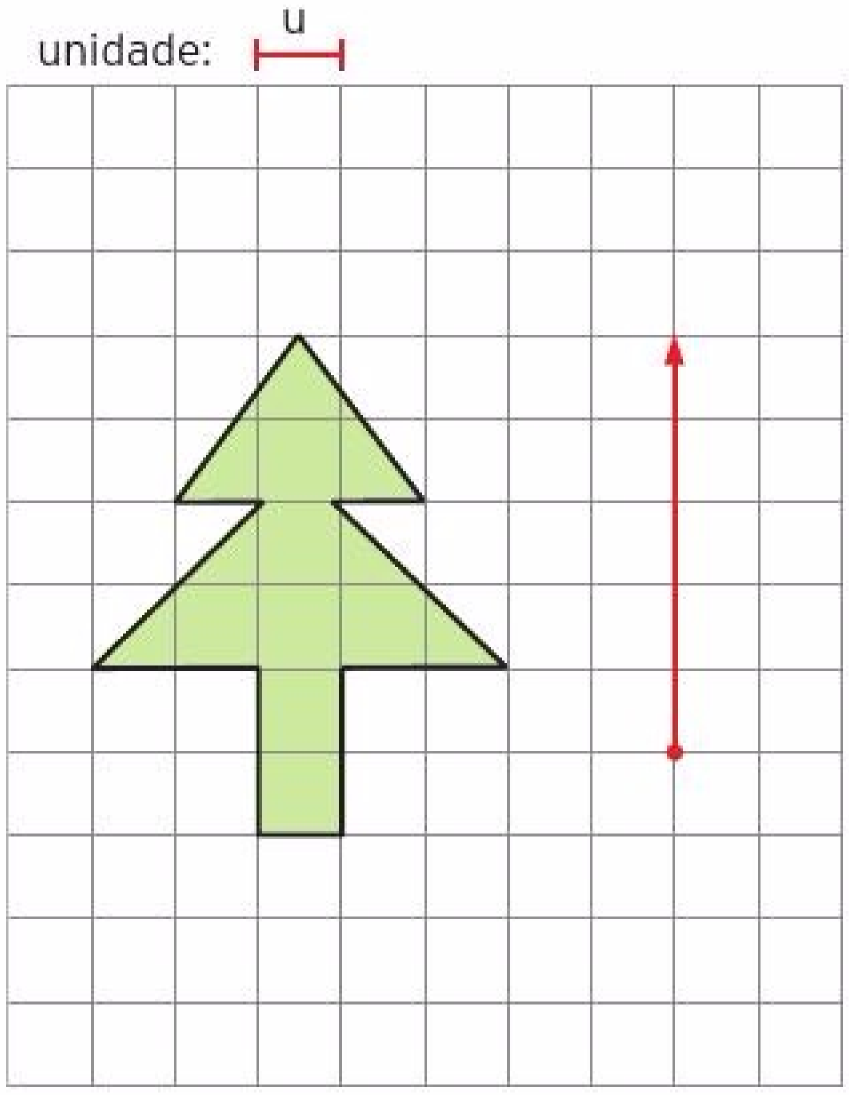
12. Faça um desenho como este. A partir dele, obtenha outro, realizando um movimento de reflexão em relação ao eixo **p**. A figura final é simétrica em relação à figura inicial? Sim.

Utilize papel quadriculado.

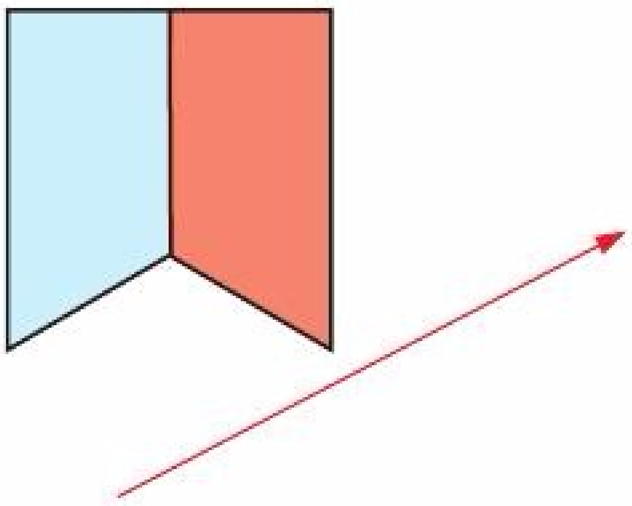




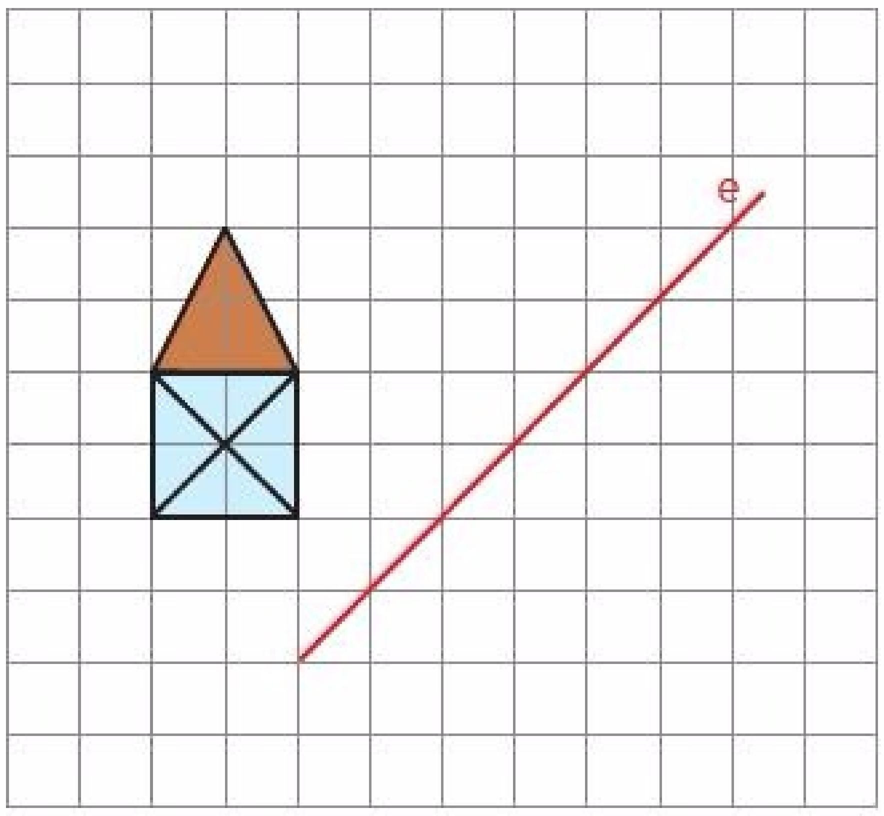
13. Em uma folha de papel quadriculado, faça um desenho como este. A partir dele, obtenha outro, realizando um movimento de translação de modo que as distâncias entre os pontos correspondentes sejam iguais a 5 unidades. A direção e o sentido estão indicados pela seta vermelha. Veja resposta no final do livro.



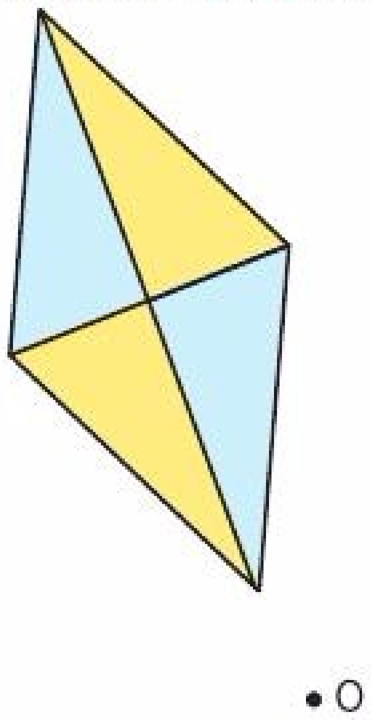
14. Faça um desenho como este. A partir dele, obtenha outro, realizando um movimento de translação de modo que as distâncias entre os pontos correspondentes sejam iguais a 4 cm. A direção e o sentido estão indicados pela seta vermelha. Veja resposta no final do livro.



15. Faça um desenho como este em uma folha de papel quadriculado. A partir dele, obtenha outro, realizando um movimento de reflexão em relação ao eixo **e**. Veja resposta no final do livro.



16. Copie este desenho. Ao redor do ponto **O**, realize uma rotação de 60° da figura, no sentido horário. Veja resposta no final do livro.



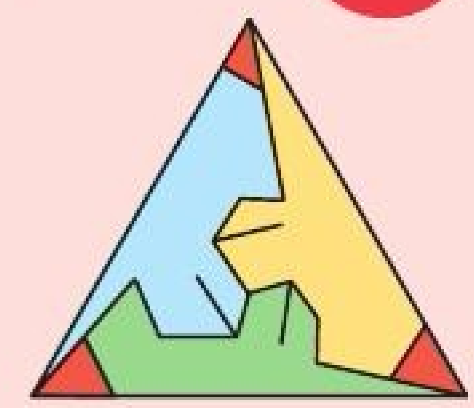
Desafio

Nesta atividade, os alunos se envolvem com os movimentos estudados e com construções geométricas. Dessa forma, exploram, de modo informal, o conceito de congruência de figuras geométricas. É uma atividade lúdica que desenvolve a criatividade, o que poderá motivá-los. Pode ser integrada com outras disciplinas, como Desenho Geométrico e Educação Artística.

FAÇA NO CADERNO

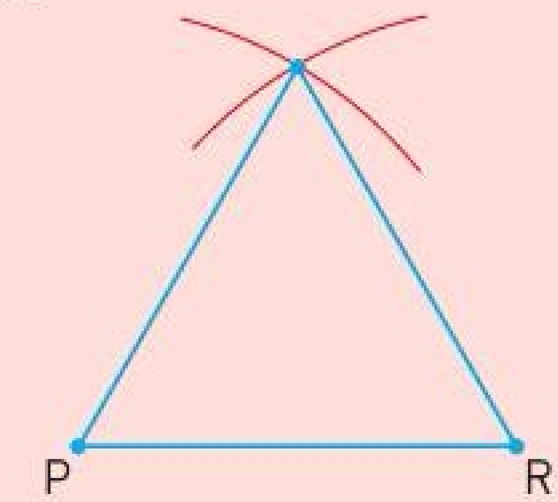
Movimentos e figuras geométricas produzindo arte

O padrão ao lado foi desenhado em um triângulo equilátero. Observe-o atentamente e procure desenhar outro parecido em uma folha de papel.



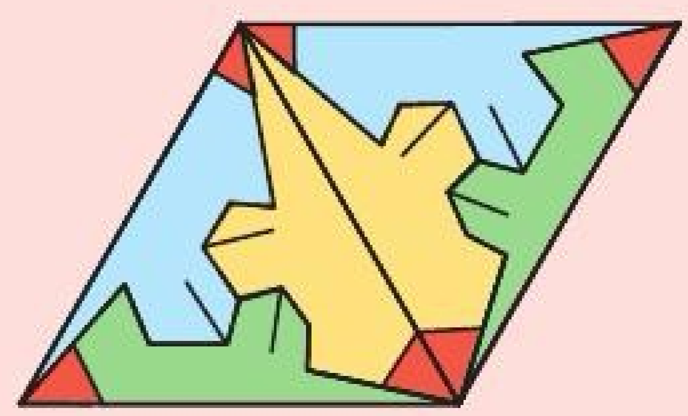
Primeiro, veja como construir um triângulo equilátero com lados de medida 3 cm, por exemplo. O problema estará resolvido quando determinarmos os três vértices desse triângulo.

Traçamos um segmento de reta $\overline{PR}$ com 3 cm: **P** e **R** são dois vértices do triângulo. Desenhamos dois arcos de circunferência com raios de 3 cm: um deles com a ponta-seca do compasso em **P** e o outro em **R**.



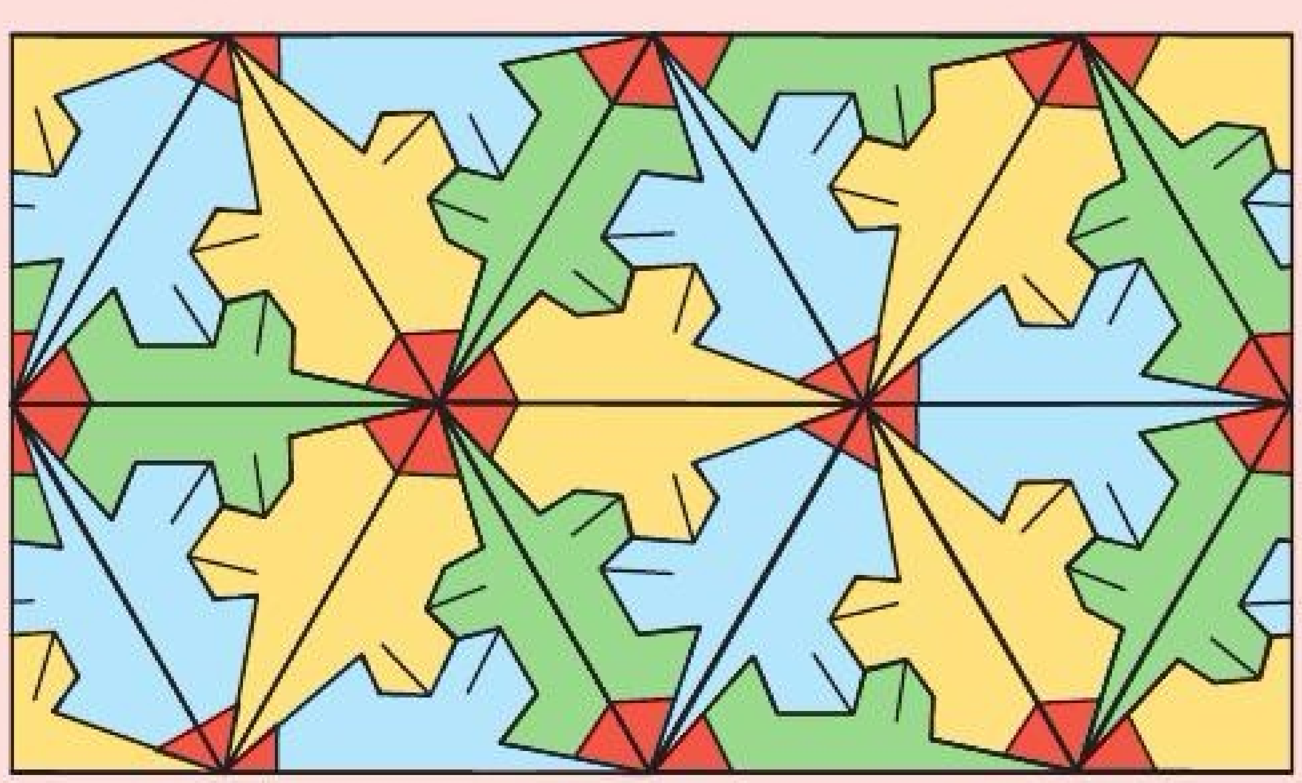
O cruzamento desses dois arcos é o terceiro vértice do triângulo.

Partindo do padrão anterior, temos este desenho:



- Qual foi o movimento realizado para obter esse resultado? Reflexão.
- Faça, em uma folha de papel maior, um desenho parecido com esse.

Aplicando alguns movimentos no novo padrão, foi recoberta uma parte do plano. Observe como ficou:



Peça aos alunos que descrevam o processo que gera esta figura – há mais de uma resposta possível.

- Que tal criar outros padrões, combinar outros movimentos e produzir obras de arte diferentes? Junte-se com os colegas e mãos à obra! Resposta pessoal.

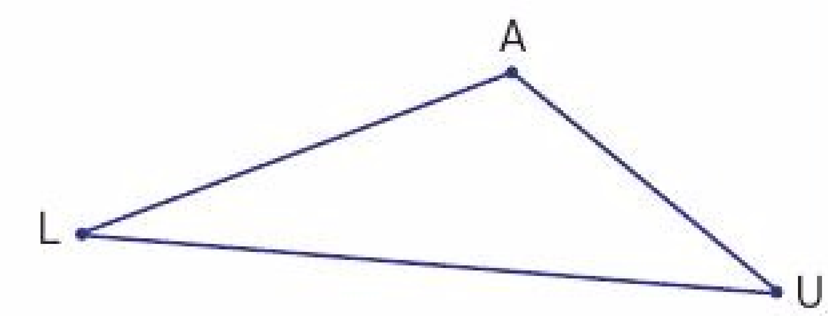
3 Propriedades geométricas

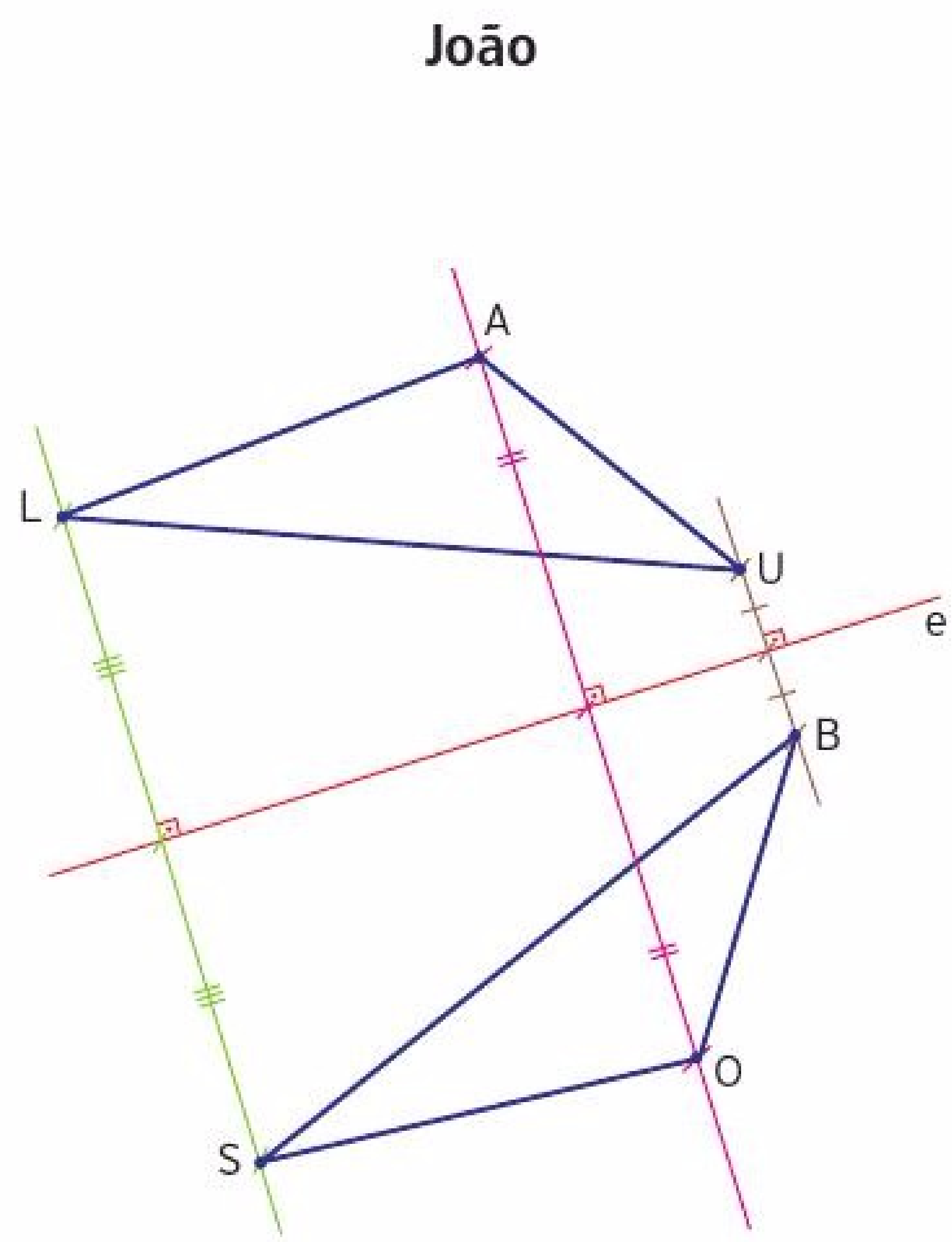
Movimentos e propriedades geométricas

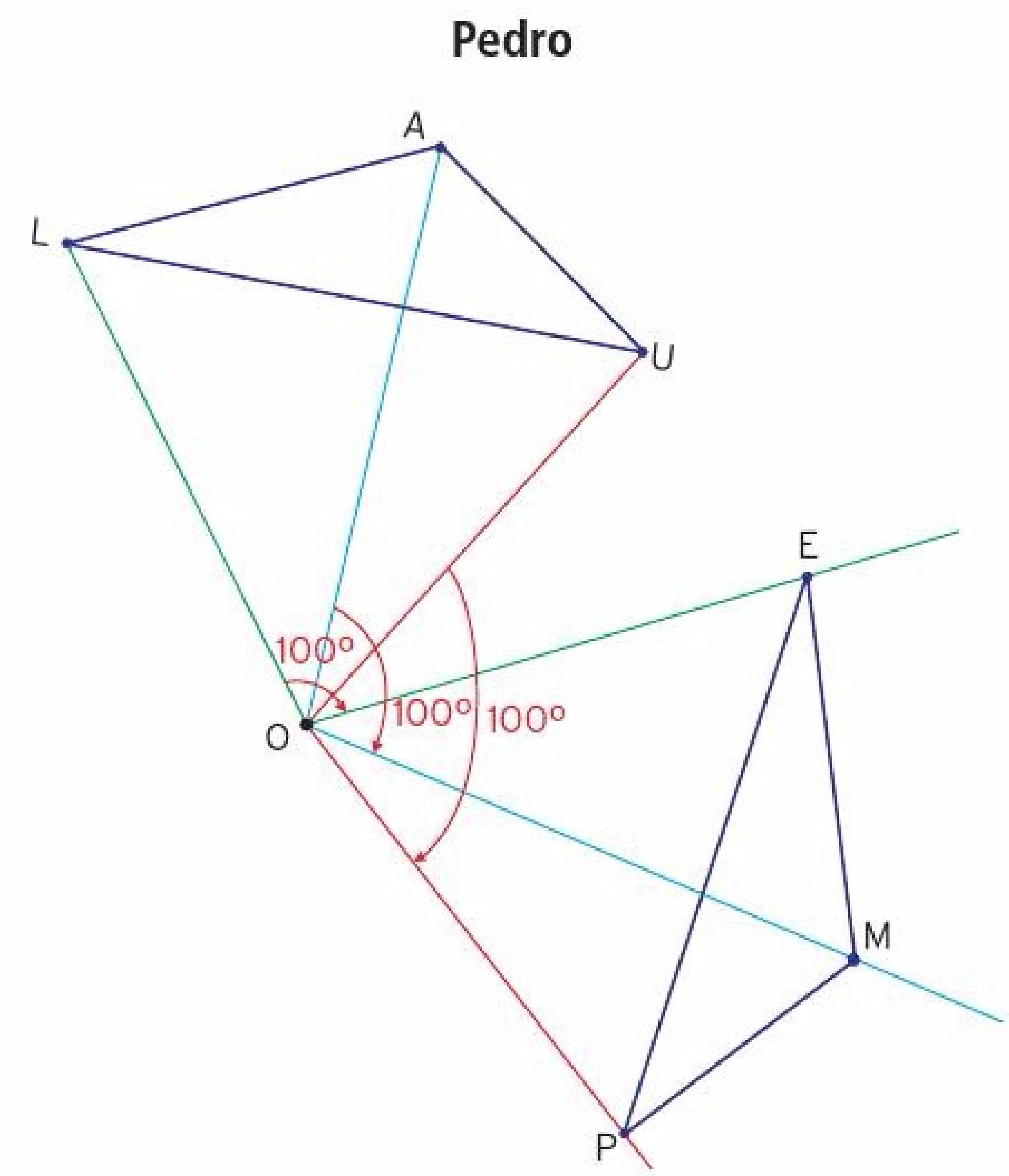
Para refletir e responder

João e Pedro produziram, cada um deles, um desenho partindo da figura ao lado e usando os movimentos que aprenderam. João realizou uma reflexão, e Pedro, uma rotação.

Observe os resultados obtidos e responda à questão abaixo.







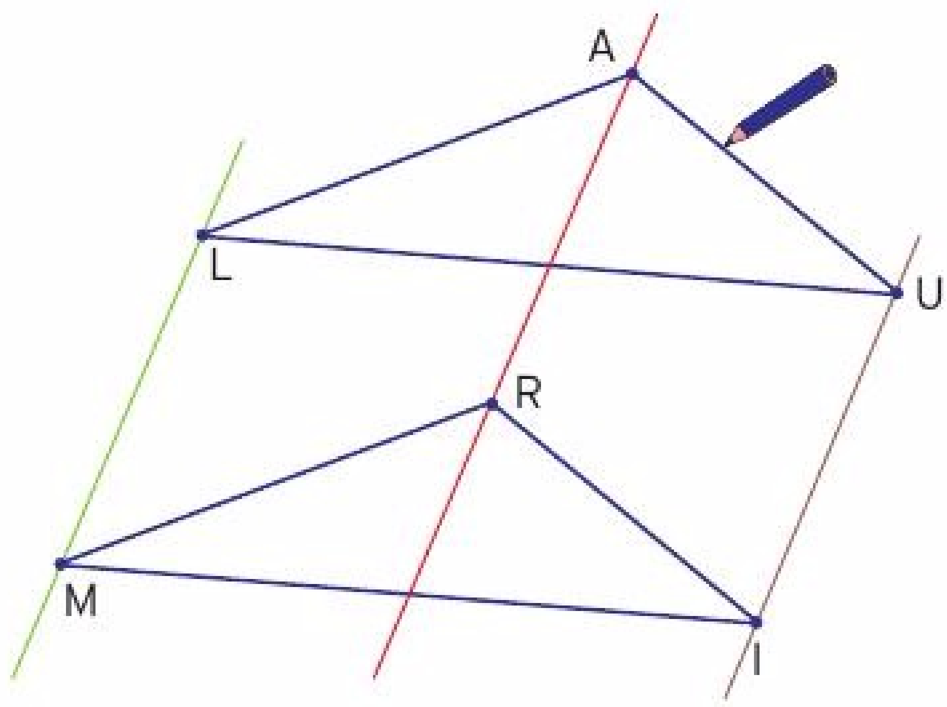
- O que aconteceu com a forma, as medidas dos lados e as dos ângulos do triângulo obtido em cada caso, em relação à figura inicial? Permaneceram as mesmas.

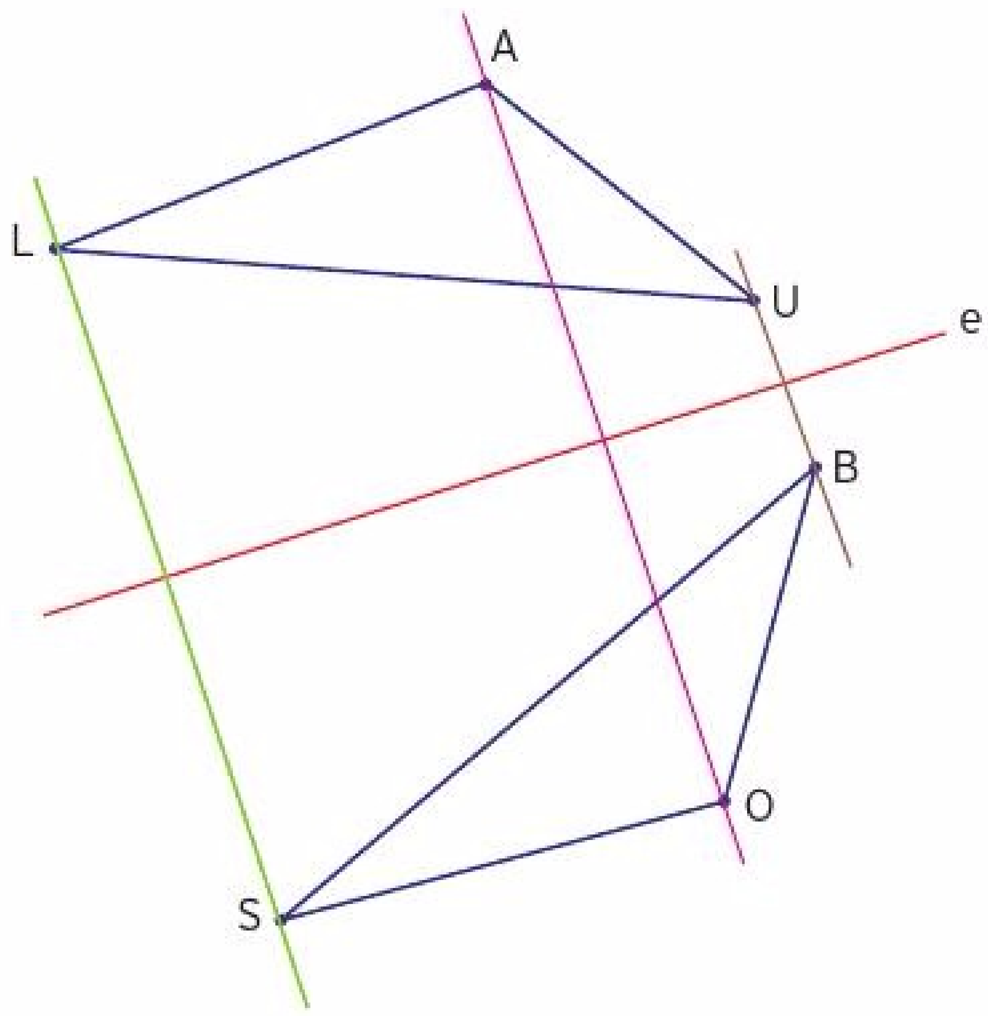
Além dos movimentos utilizados nessas construções, existe a possibilidade de obter um triângulo com as mesmas medidas dos lados e ângulos do triângulo inicial aplicando o movimento de translação.

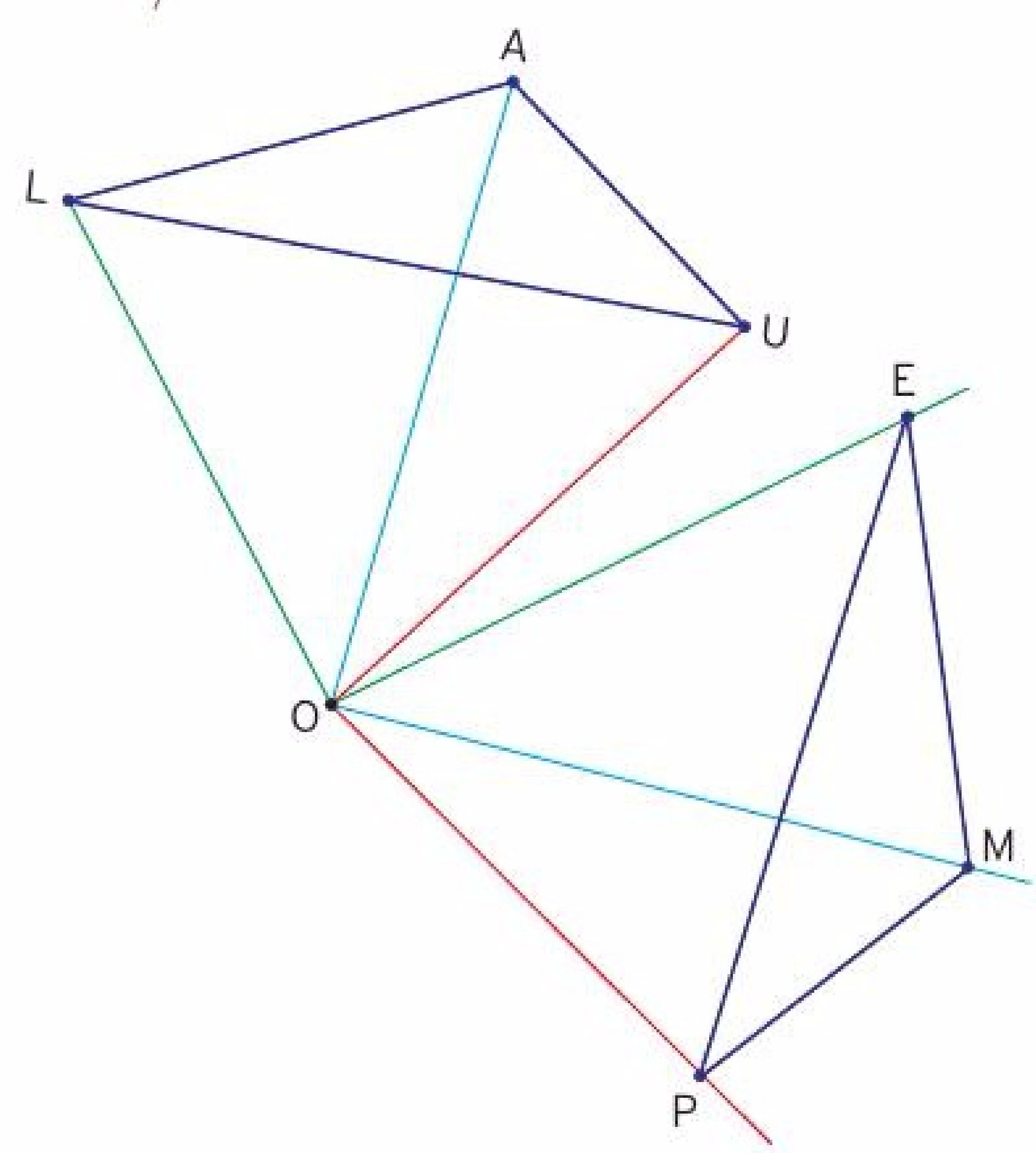
Esses movimentos transformam uma figura em outra mantendo as características da figura inicial, com exceção da posição.

Vamos aprender mais sobre eles analisando os resultados que podem ser obtidos aplicando os movimentos de translação, reflexão e rotação sobre o triângulo apresentado acima.

Imagine uma cópia do triângulo inicial LUA em papel transparente e a sobreposição dele aos triângulos obtidos.







É possível afirmar que:

- os lados dos triângulos obtidos têm medidas iguais às dos lados correspondentes do triângulo LUA. Ou seja, os lados correspondentes são congruentes;
- os ângulos dos triângulos obtidos têm medidas iguais às dos ângulos correspondentes do triângulo LUA.

Os triângulos LUA e MIR, LUA e SBO e LUA e EPM têm:

- os três lados correspondentes congruentes;
- os três ângulos correspondentes congruentes.

Indica-se $\overline{AL}$ congruente a $\overline{OS}$ por $\overline{AL} \equiv \overline{OS}$.

O triângulo LUA é **congruente** ao triângulo MIR. Indicamos por: $\triangle LUA \equiv \triangle MIR$

O triângulo LUA é **congruente** ao triângulo SBO. Indicamos por: $\triangle LUA \equiv \triangle SBO$

O triângulo LUA é **congruente** ao triângulo EPM. Indicamos por: $\triangle LUA \equiv \triangle EPM$

Translações, reflexões e rotações transformam uma figura em outra **congruente** à figura inicial.

Proponha outras situações nas quais os alunos se envolvam com o conceito de congruência de figuras geométricas que eles já conhecem. Não há, porém, necessidade de enfatizar esse tema, pois ele será retomado mais adiante.

Fazer e aprender

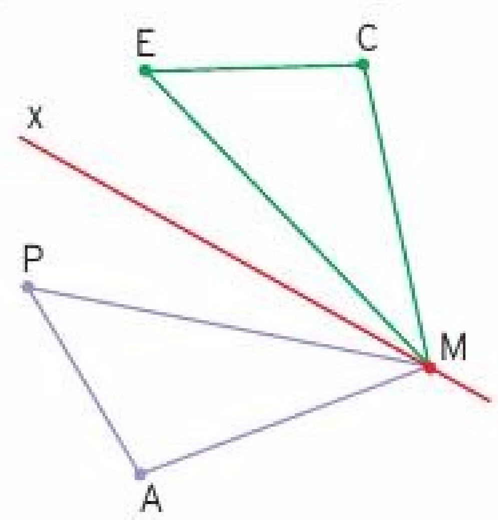
FAÇA NO CADERNO

17. Um triângulo ABC foi desenhado a partir de um triângulo MNP por meio de uma translação. O que podemos afirmar sobre os triângulos ABC e MNP? O triângulo ABC é congruente ao triângulo MNP.

18. Explique com suas palavras o que significa dizer: "Dois triângulos são congruentes". Resposta possível: São dois triângulos com formas iguais e tamanhos iguais.

19. Em quais condições dois quadriláteros são congruentes? Quando os lados correspondentes são respectivamente congruentes e os ângulos correspondentes também são respectivamente congruentes.

20. Nesta figura, o triângulo CEM é simétrico ao triângulo APM em relação ao eixo **x**.



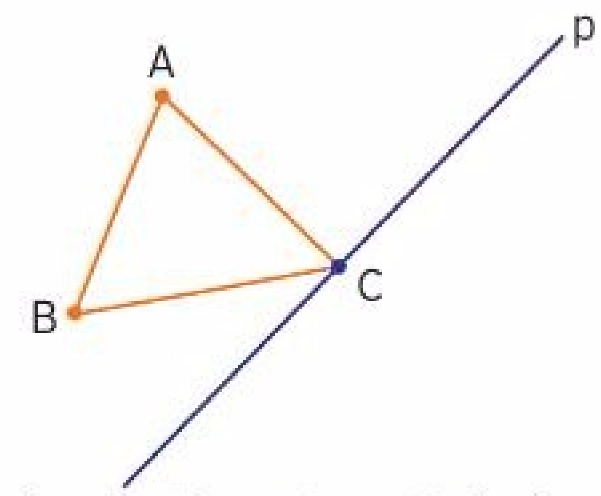
a) Respostas possíveis: $C\hat{E}M$ e $A\hat{P}M$; $E\hat{M}C$ e $P\hat{M}A$.

b) Respostas possíveis: $\overline{EM}$ e $\overline{PM}$; $\overline{CE}$ e $\overline{AP}$.

a) Identifique dois ângulos, um em CEM e outro em APM, que sejam congruentes.

b) Identifique dois lados de CEM que sejam congruentes a dois lados de APM.

21. Desenhe uma reta **p** e um triângulo parecidos com estes:



a) Utilize um dos movimentos estudados e desenhe um triângulo congruente a esse. Resposta pessoal.

b) Qual foi o movimento escolhido? Descreva-o. Resposta pessoal.

c) Identifique um par de lados e um par de ângulos congruentes nos triângulos que foram desenhados. Resposta pessoal.

22. É a sua vez!

a) Desenhe em uma folha de papel uma figura geométrica qualquer. Troque o desenho com um colega. Resposta pessoal.

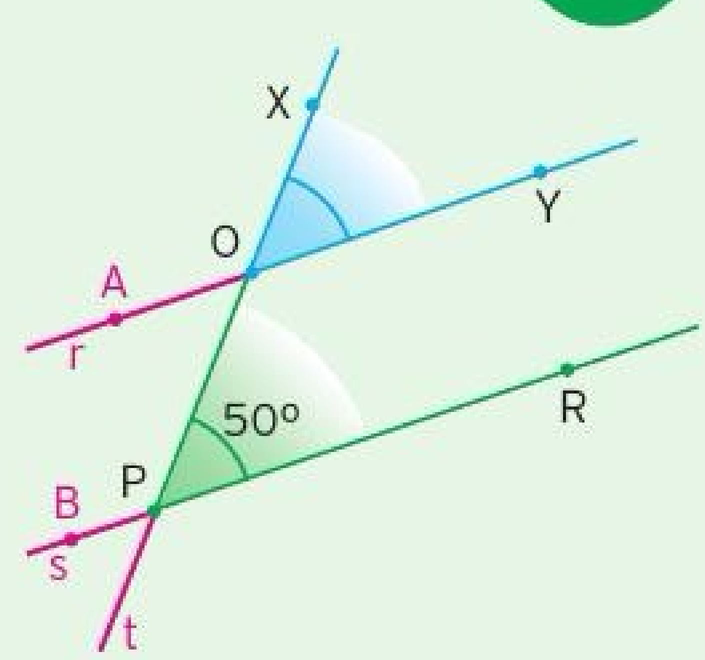
b) Escolha um dos movimentos: translação, reflexão ou rotação. Obtenha uma figura congruente à figura que recebeu, realizando o movimento escolhido. Resposta pessoal.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

Observem, na figura ao lado, os desenhos dos ângulos $X\hat{O}Y$ e $X\hat{P}R$. Um deles foi obtido a partir do outro por meio de uma translação.



- Se $X\hat{P}R$ mede 50°, então qual é a medida de $X\hat{O}Y$? 50°

Copiem a figura dada e completem-na traçando as retas suportes desses ângulos.

- As retas $\overleftrightarrow{OY}$ e $\overleftrightarrow{PR}$ são paralelas entre si? Sim.

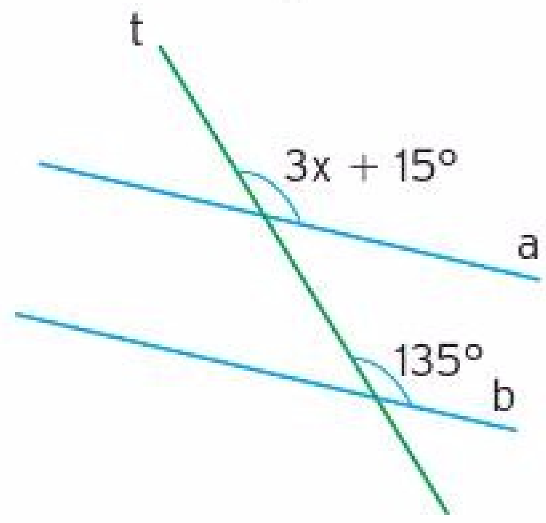
Chamem as retas paralelas de **r** e **s**. Chamem a terceira reta de **t**.

- Qual é a medida do ângulo suplementar a $X\hat{O}Y$? 130°
- Na figura construída há um ângulo com a mesma medida desse ângulo suplementar. Identifiquem-no. O ângulo suplementar a $X\hat{P}R$, o ângulo $X\hat{P}B$.
- Identifiquem outros dois pares de ângulos congruentes nessa figura. Resposta possível: $A\hat{O}X$ e $B\hat{P}O$.

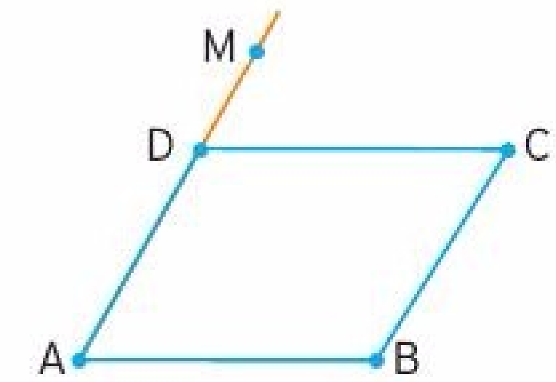
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

23. Nesta figura **a** e **b** são retas paralelas e **x** representa uma medida em graus. Qual é o valor de **x**? 40°



24. No paralelogramo ABCD, med $\hat{A}$ é 74°.



a) Qual a medida de $A\hat{D}C$? 106°

b) Que relação há entre $\hat{A}$ e $\hat{D}$?
São ângulos suplementares.

Desafio

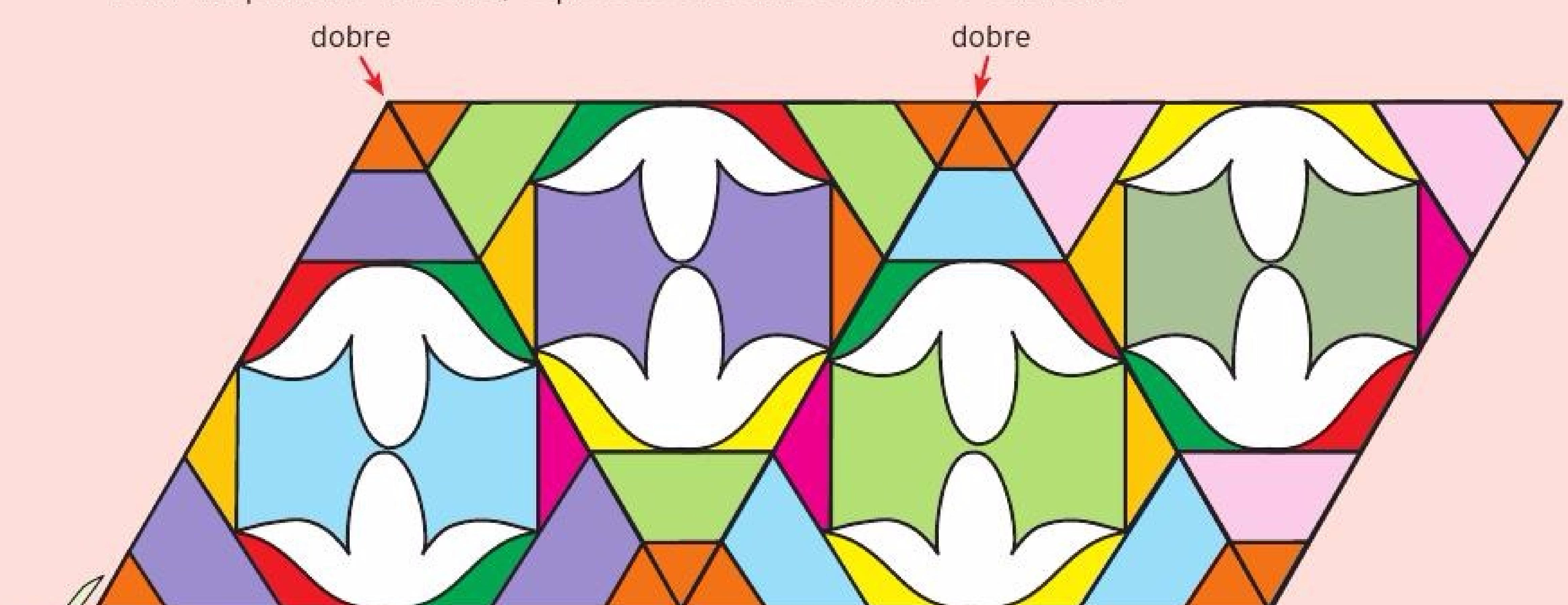
FAÇA NO CADERNO

Composição de tetraedros que têm movimento

Junte figuras geométricas e não geométricas, imaginação e cores e produza trabalhos bonitos e interessantes.

Comece com uma planificação de um tetraedro como a que segue.

- Para um primeiro trabalho, copie este desenho e monte o tetraedro.



- Com oito tetraedros iguais a esse pode-se construir um **caleidociclo**: composição de sólidos que tem movimento. Una os tetraedros juntando aresta com aresta por meio de fita adesiva.

FABIO MORE

RITA BARRETO

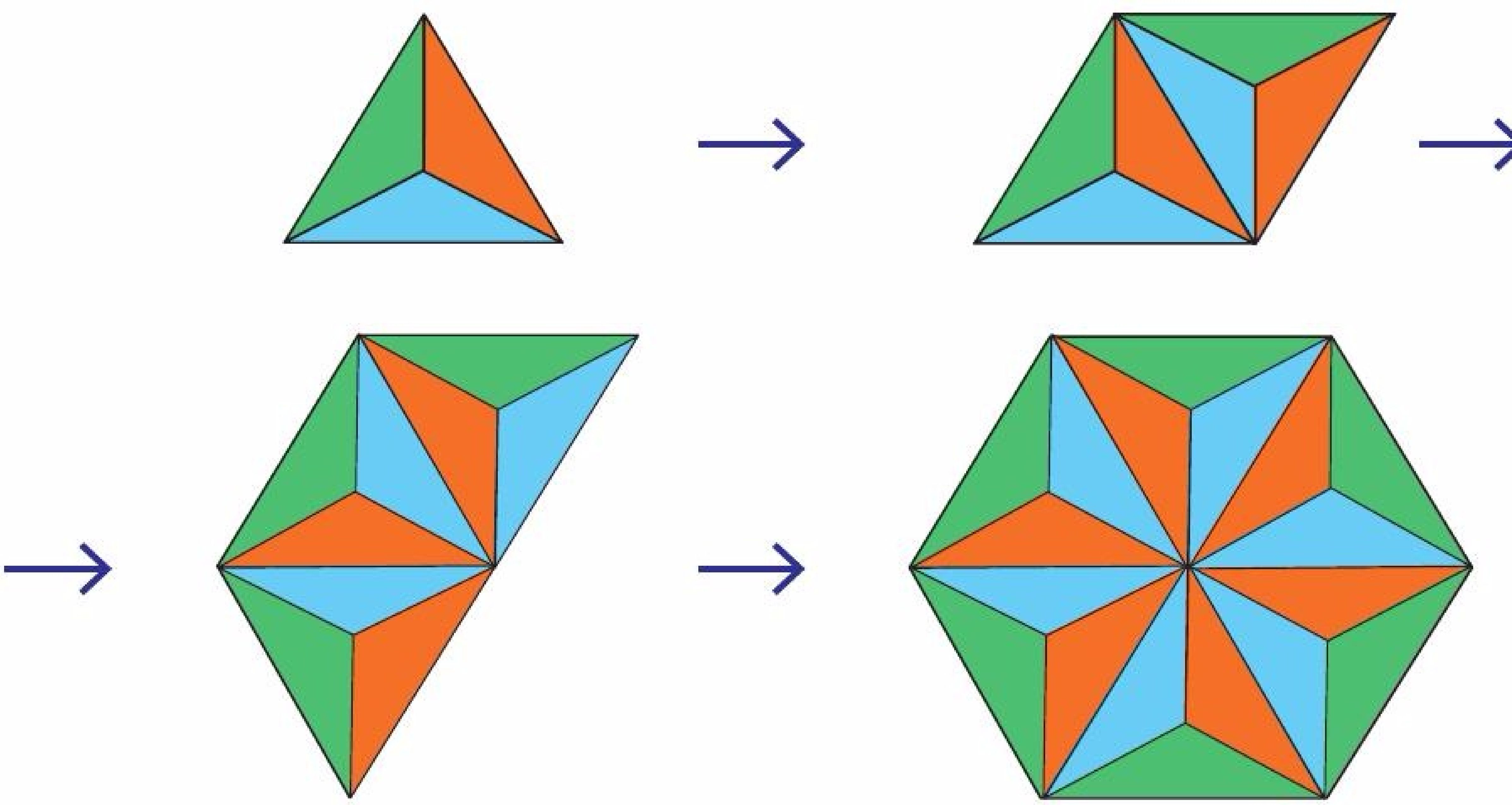
4 Padrões e ladrilhamentos

Padrões e movimentos geométricos

Aplicações do conhecimento sobre padrões e movimentos geométricos são frequentes em recobrimento de superfícies planas como o descrito na situação apresentada a seguir. Vamos aprender um pouco sobre esse assunto.

Exemplo:

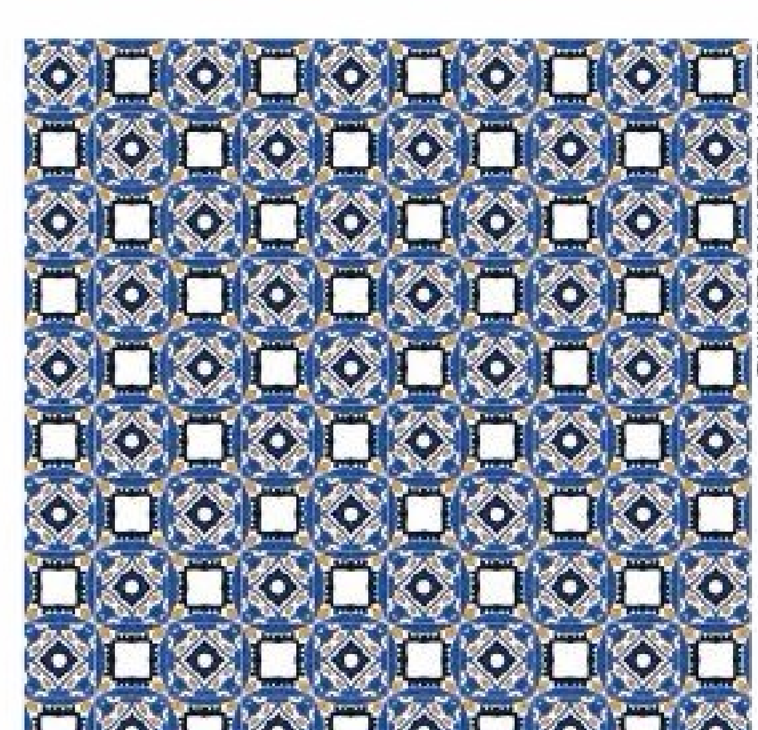
Um centro de mesa hexagonal, com certo padrão, pode ser criado aplicando-se movimentos como os que aprendemos sobre um triângulo equilátero.



O recobrimento de um plano feito com polígonos, sem sobrepô-los, nem deixar lacunas, é chamado, em Geometria, de **ladrilhamento**. Exemplos:

SHUTTERSTOCK

Ladrilhamento em parede com retângulos e quadrados.

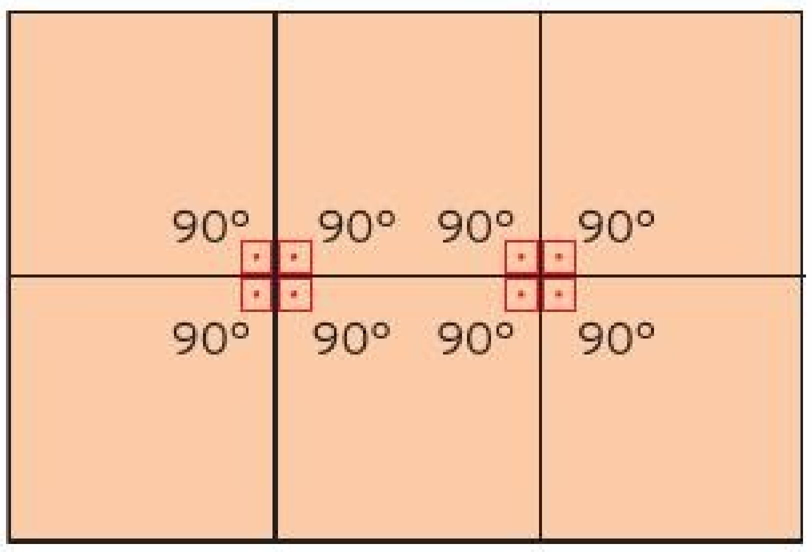


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

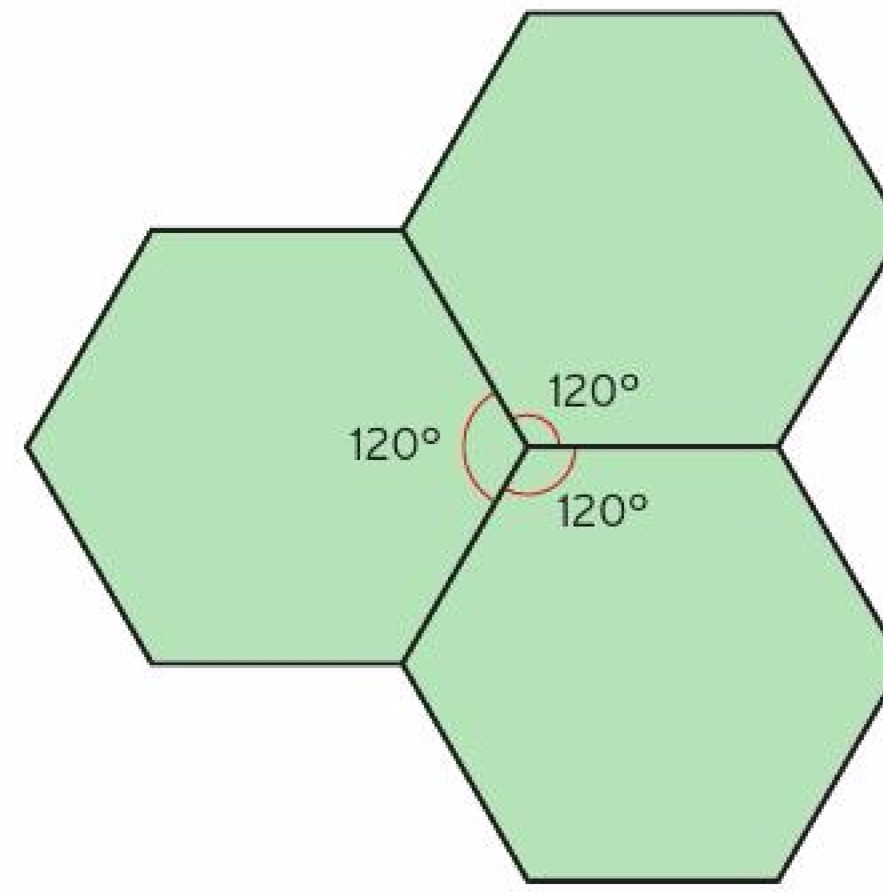
Ladrilhamento de azulejos em estilo português.

É possível mostrar que os únicos polígonos com os quais podemos obter um ladrilhamento usando um só tipo de ladrilho, com todos os lados e ângulos congruentes, são:

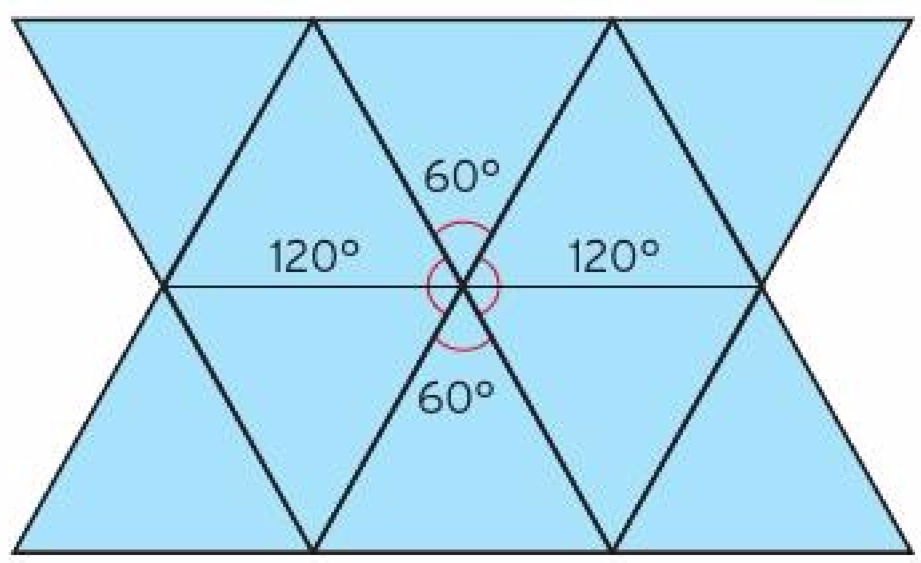
Quadrado



Hexágono com os lados e os ângulos congruentes



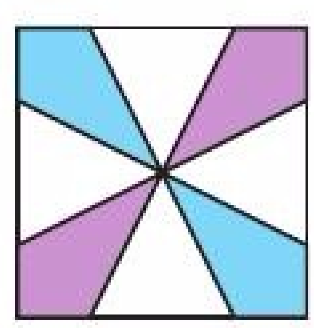
Triângulo equilátero



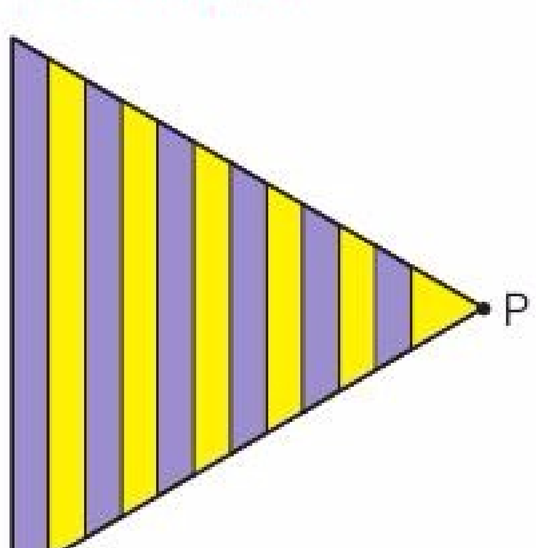
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

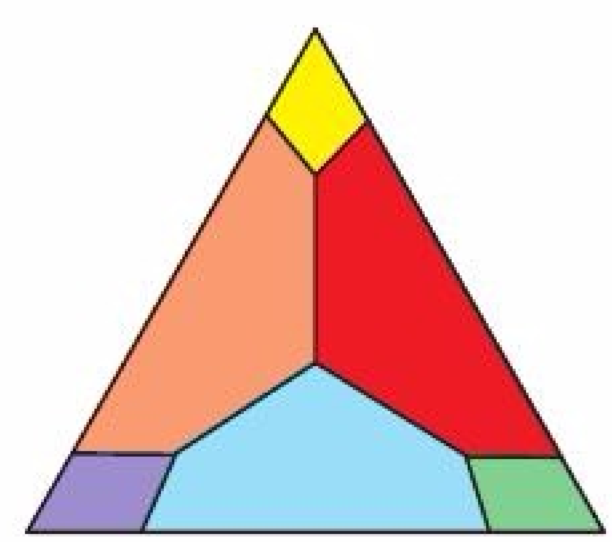
25. Faça um ladrilhamento em uma folha de papel quadriculado, usando o padrão ao lado. Veja resposta no final do livro.



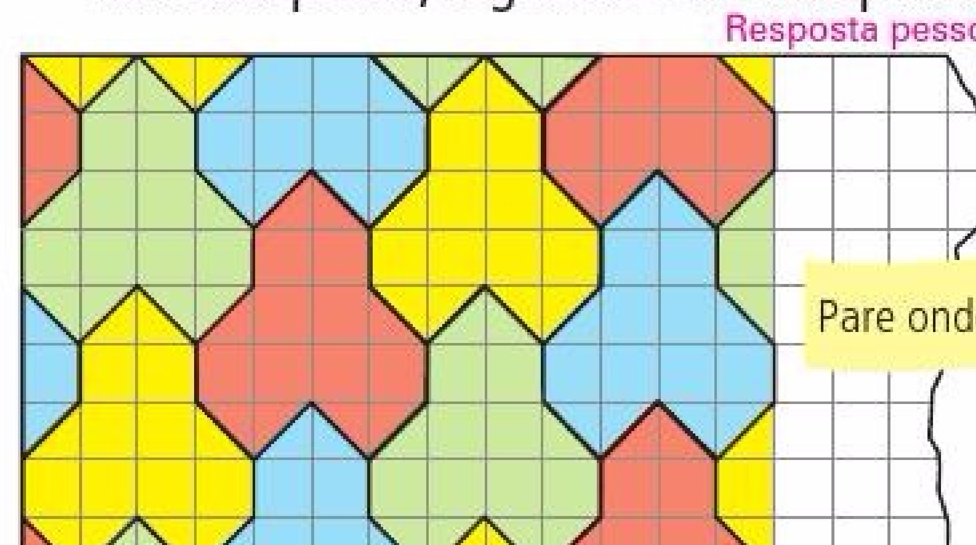
26. Este padrão tem a forma de um triângulo equilátero. Faça seis iguais a ele, recorte-os e junte lado com lado em torno de um ponto **P**. Qual é o nome da figura geométrica que forma o contorno do mosaico formado? Hexágono. Veja resposta no final do livro.



27. Este padrão tem a forma de um triângulo equilátero. Faça três iguais a ele, recorte-os e junte lado com lado, em linha reta. Qual é o nome da figura geométrica que forma o contorno do mosaico obtido? Trapézio. Veja resposta no final do livro.



28. Joana começou a desenhar um mosaico como este. Copie a parte que ela já fez e desenhe mais um pouco, seguindo o mesmo padrão. Resposta pessoal.



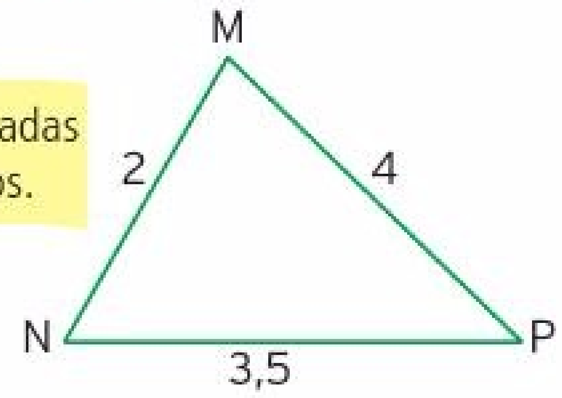
Pare onde quiser.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

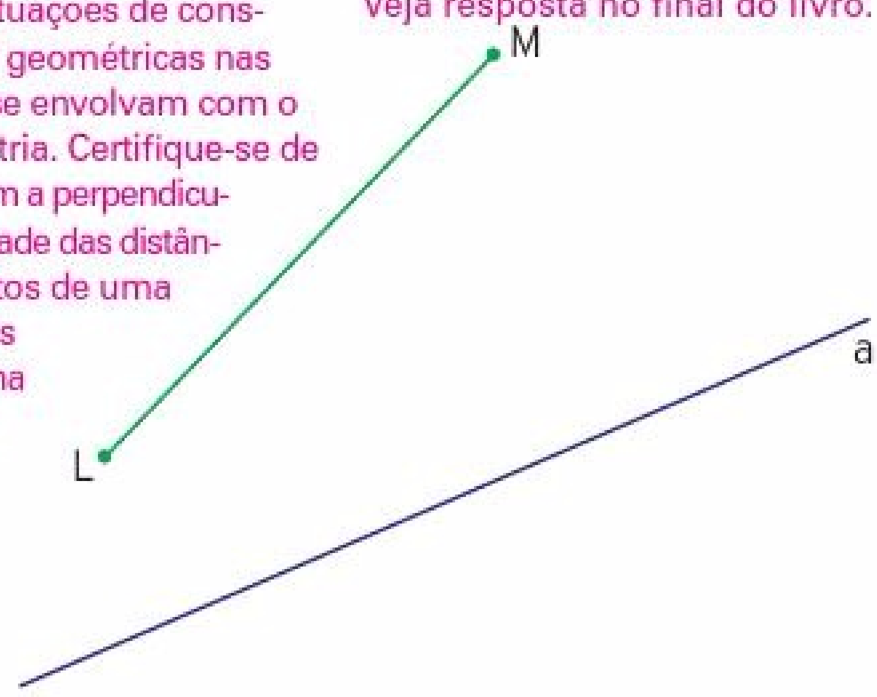
29. Faça um desenho como este. Em seguida, desenhe outro triângulo realizando, ao redor do ponto **P**, uma rotação de meia-volta, no sentido horário. Os lados correspondentes do △MNP e do triângulo na posição final são congruentes?
Sim.
Veja resposta no final do livro.

Medidas indicadas em centímetros.

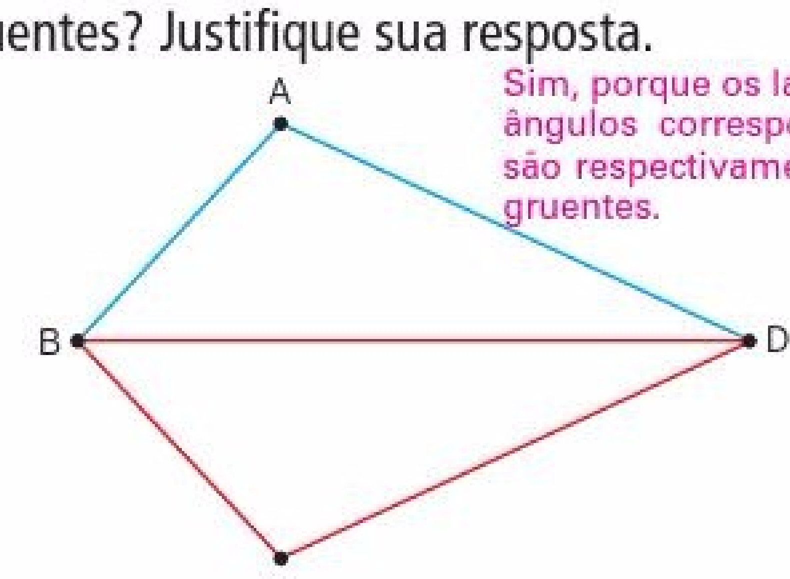


30. Copie esta figura e desenhe um segmento de reta simétrico a $\overline{ML}$ em relação ao eixo de simetria **a**.
Veja resposta no final do livro.

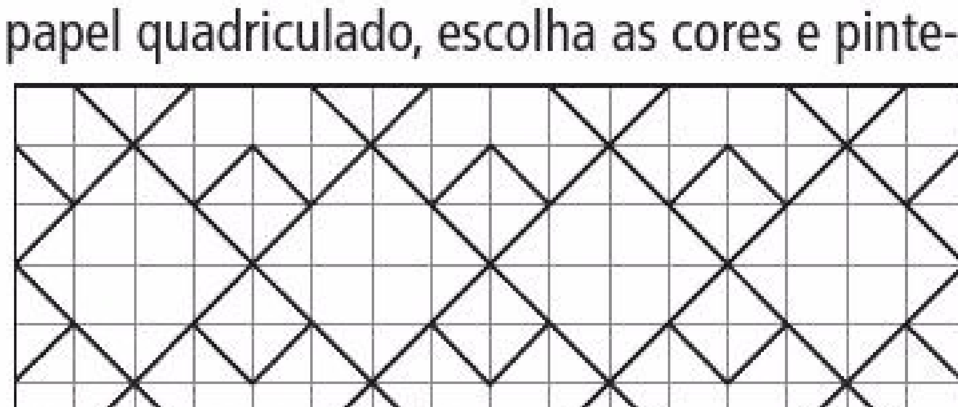
Explore outras situações de construção de figuras geométricas nas quais os alunos se envolvam com o conceito de simetria. Certifique-se de que eles percebem a perpendicularidade e a igualdade das distâncias entre os pontos de uma figura e os pontos correspondentes na figura simétrica.



31. Nesta figura, os triângulos ABD e CBD são congruentes? Justifique sua resposta.
Sim, porque os lados e os ângulos correspondentes são respectivamente congruentes.

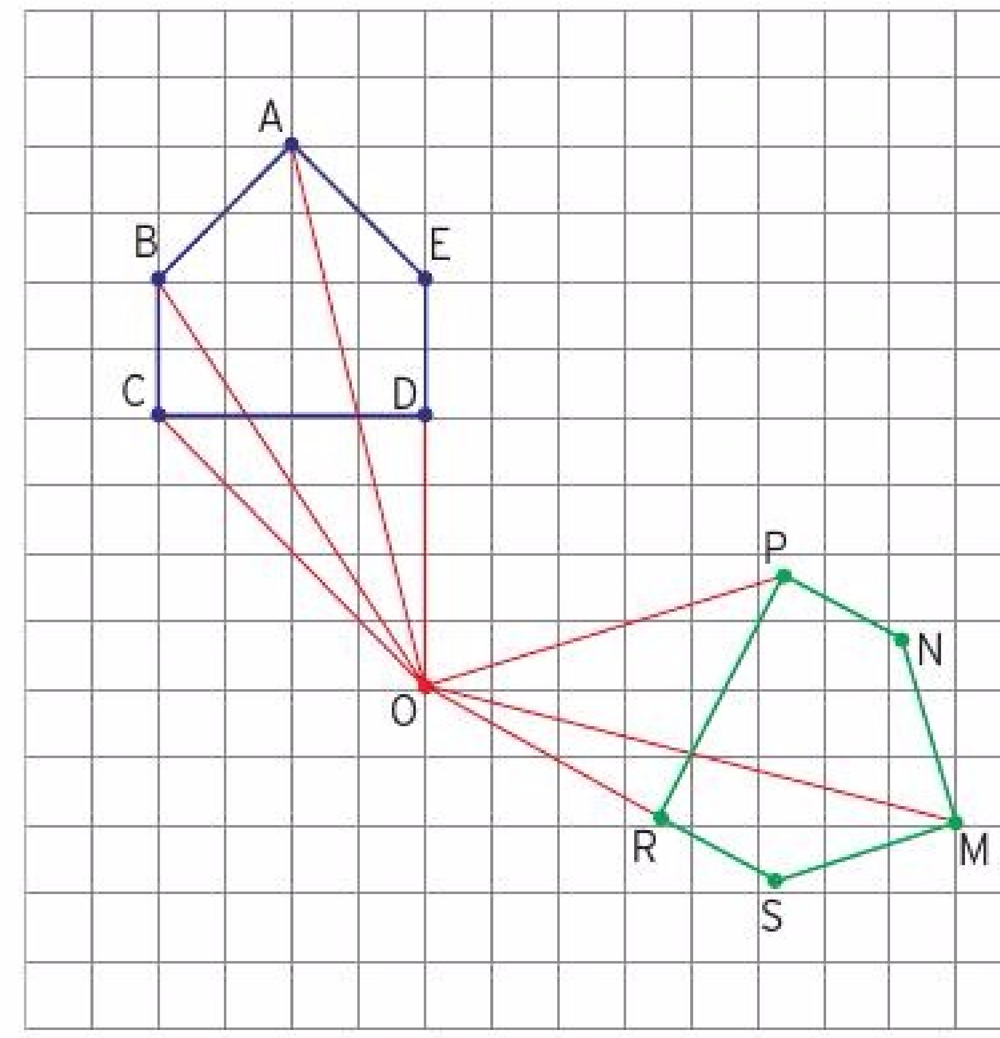


32. Nesta atividade, comece identificando o padrão e verificando como foi produzido este mosaico. Em seguida, copie esta parte em uma folha de papel quadriculado, escolha as cores e pinte-o.



Veja resposta no final do livro.
Translação de 4 unidades, da esquerda para a direita.

33. Nesta figura, o pentágono MNPRS foi obtido por uma rotação realizada sobre o pentágono ABCDE.

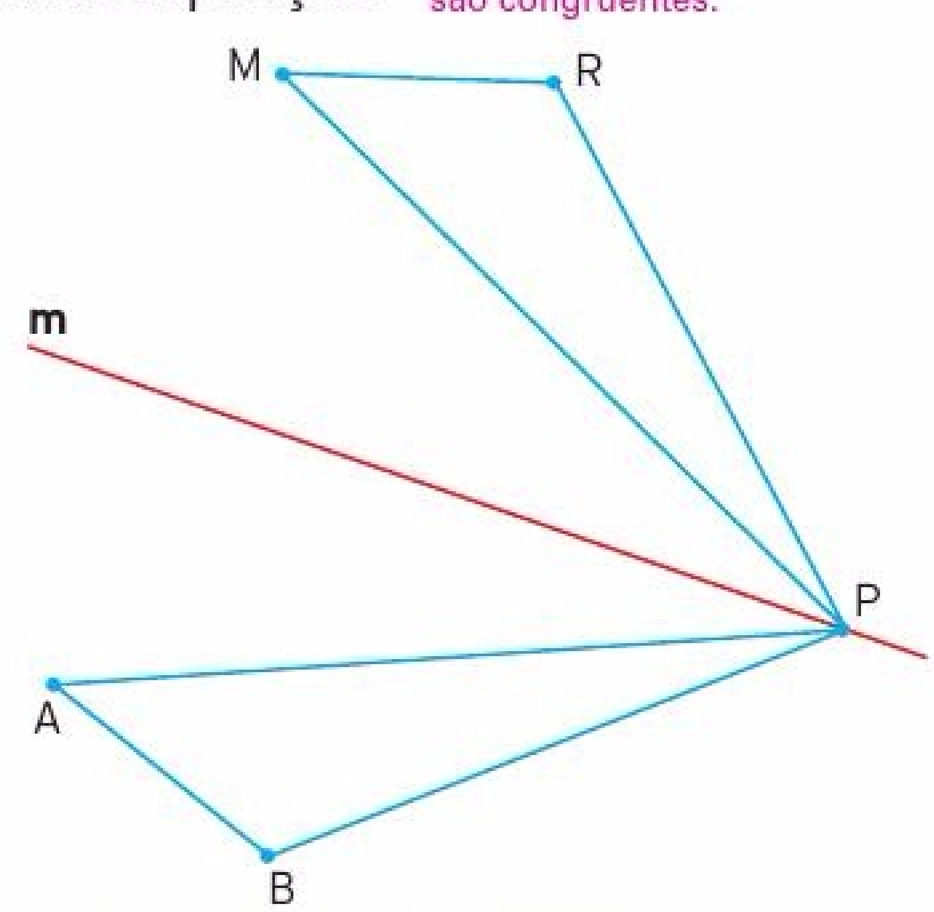


Responda às questões:

a) Quais são o centro e o ângulo dessa rotação? O; 120°

b) Quais são os lados do pentágono MNPRS correspondentes aos lados $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$? Esses lados são congruentes? $\overline{MS}$ e $\overline{NP}$; Sim.

34. Neste desenho, uma das figuras é o resultado de uma reflexão da outra em relação ao eixo **m**. Compare os lados e os ângulos correspondentes dessas figuras. O que pode ser observado nessa comparação? Os lados e os ângulos são congruentes.



Os triângulos MPR e APB são simétricos em relação ao eixo **m**.

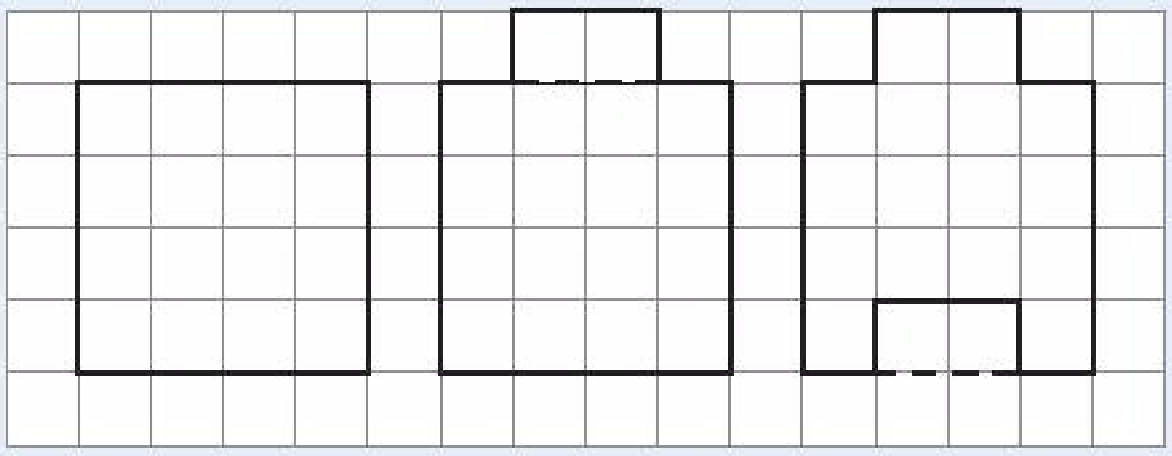
Troquem ideias e resolvam

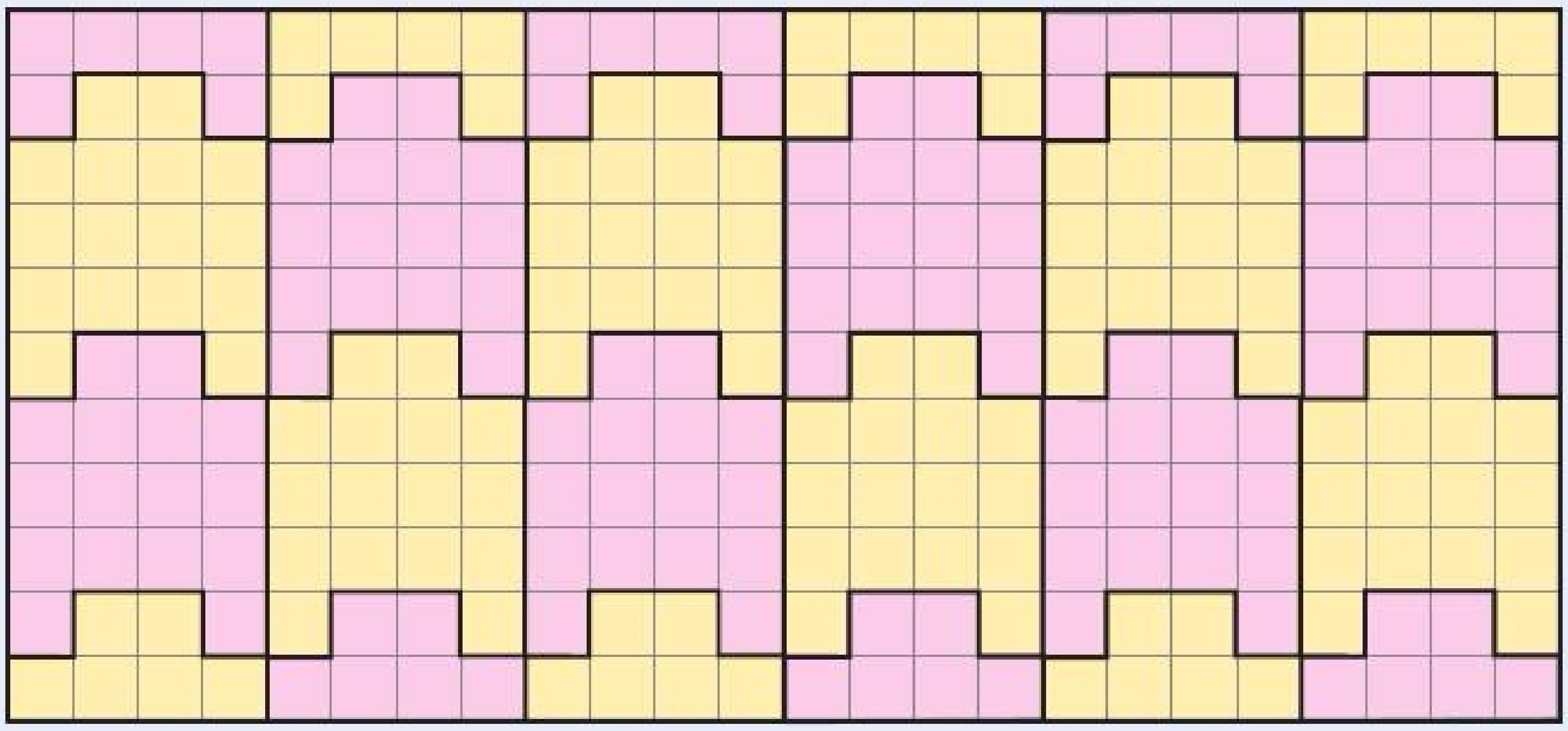
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e experimentem.

- Em seus cadernos, criem desenhos como Escher escolhendo um quadrado, um triângulo equilátero ou um hexágono com os lados e os ângulos congruentes. Em seguida, inventem um padrão, apliquem um ou mais movimentos estudados e recubram uma parte do plano.

O padrão abaixo foi obtido alterando-se um dos lados do quadrado e fazendo-se a translação desse lado para o lado oposto.





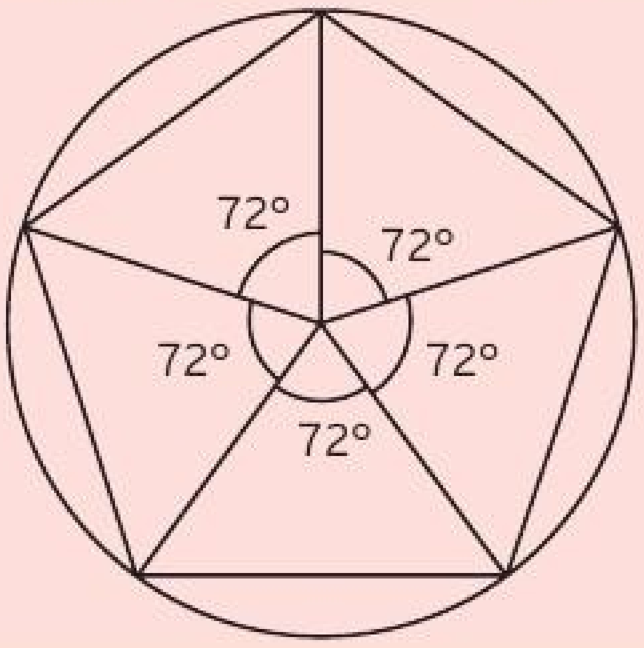
- Depois de pronto, mostrem o trabalho aos colegas.

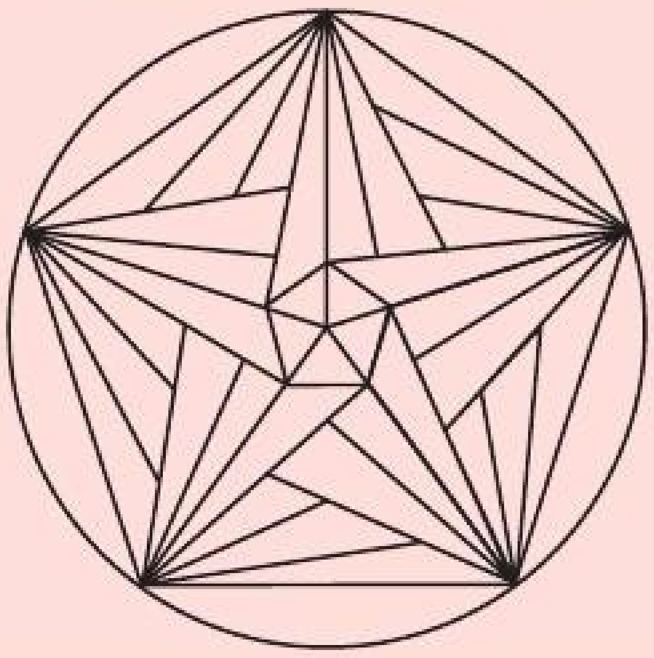
Desafio

FAÇA NO CADERNO

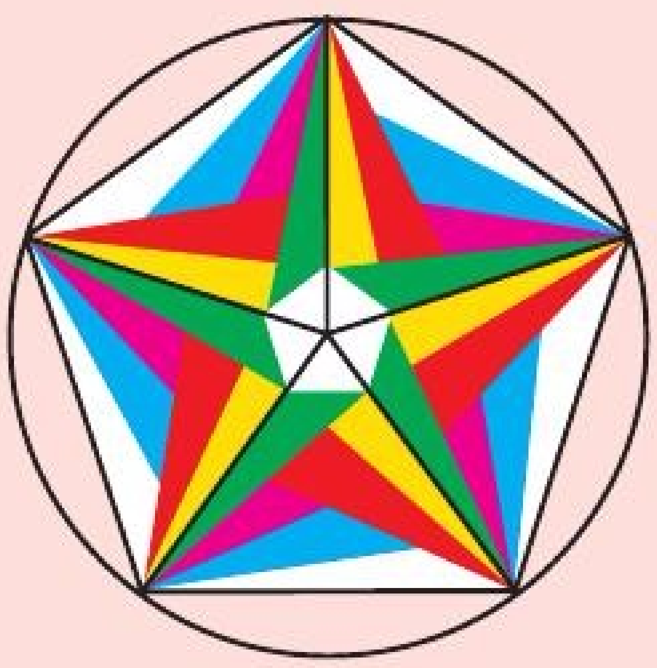
A arte e a geometria caminhando juntas

Usando um pentágono, foi criado este padrão e repetido em outros cinco.

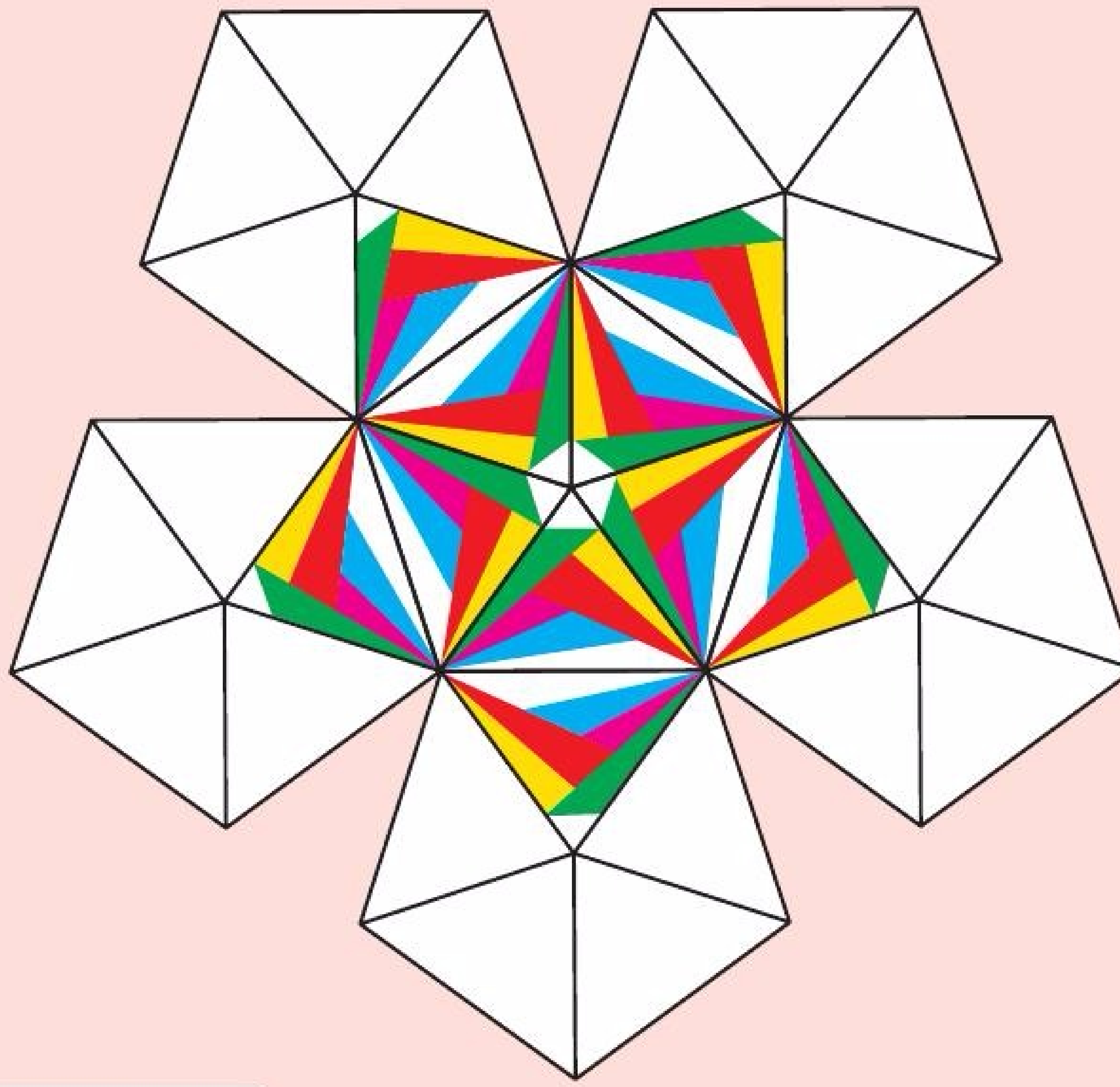




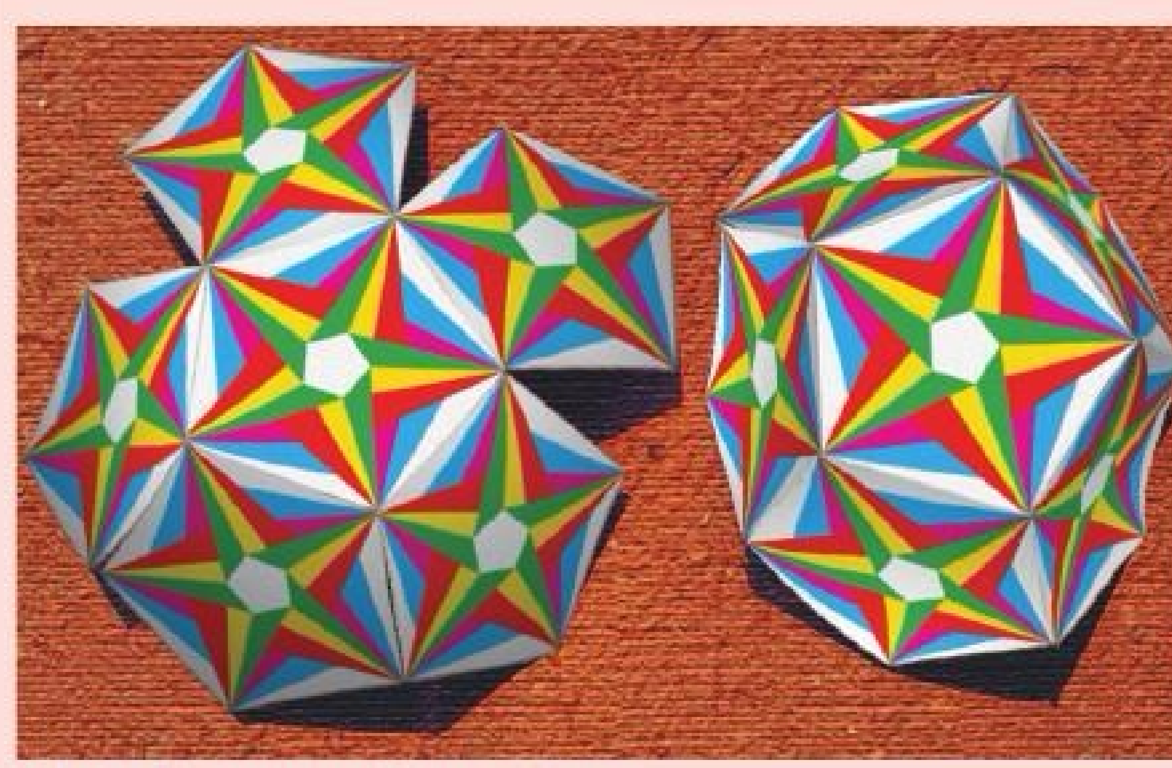
- Em uma cartolina branca, copie este molde, formado por seis pentágonos. Complete todos os pentágonos repetindo o padrão dado. Procure acertar na repetição do padrão para obter um bom resultado final.



Veja resposta no final do livro.



HÉLIO SENATORE



FABIO MORI

Certifique-se de que os alunos se interessam por esse tipo de atividade. Em caso positivo, procure explorá-la tanto quanto possível. Essas atividades têm caráter lúdico e possibilitam a exploração das propriedades das figuras geométricas, algumas já conhecidas e outras que serão descobertas durante o trabalho. É possível também uma integração com outras disciplinas, como Arte, por exemplo.

Junte as duas partes, formando um sólido.

- Faça outro conjunto de pentágonos como esse. Qual é o poliedro que pode ser construído com eles? Dodecaedro
- Agora, chegou a vez do grupo! Criem um padrão e construam outro dodecaedro. Em seguida, mostrem o resultado aos demais grupos.

Resposta pessoal.

Busque inspiração observando o trabalho de outros artistas.

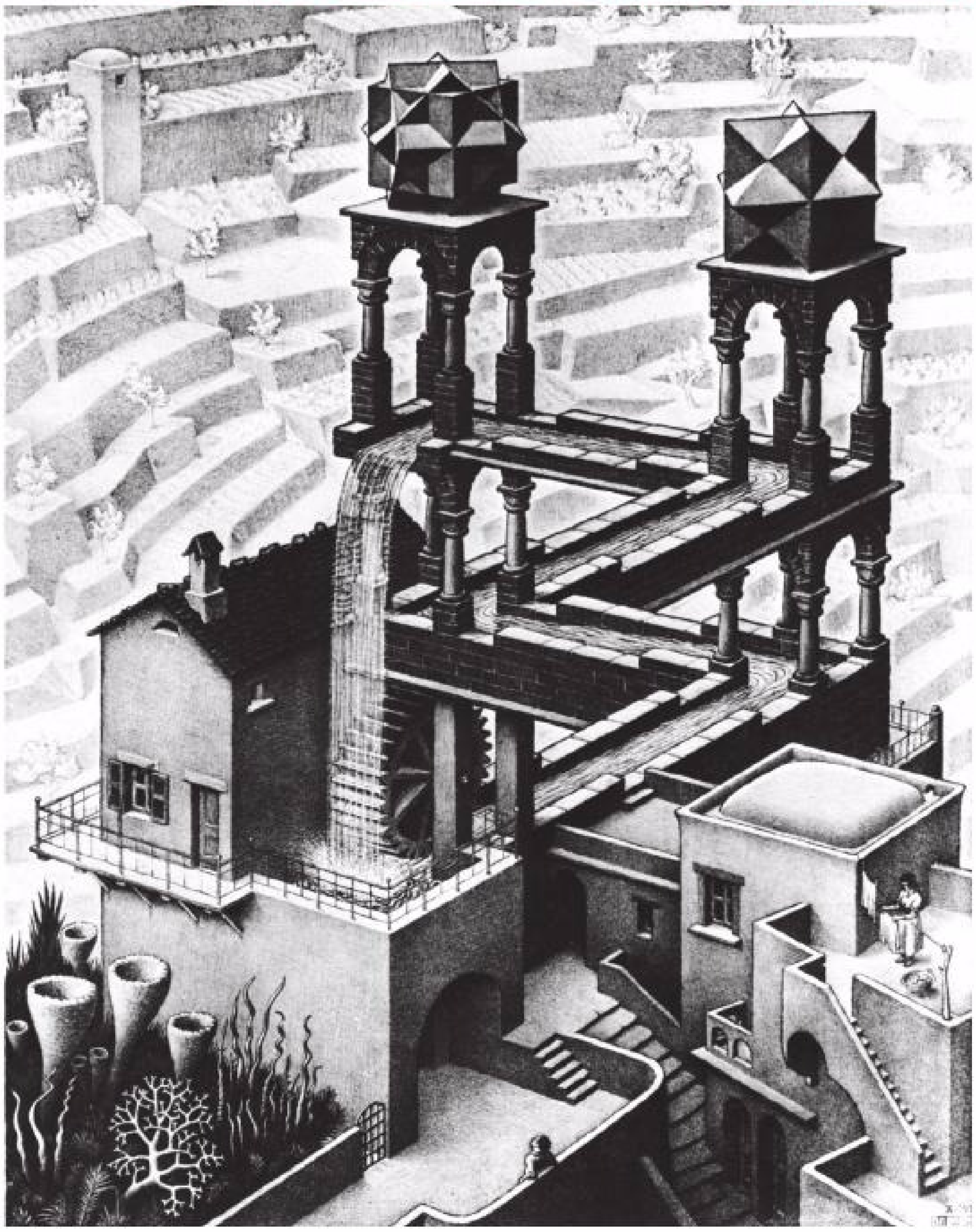
Leitura

Escher, o gênio da arte matemática

Olhar para as intrigantes imagens criadas por Escher é uma experiência inesquecível!

Escher mais parece ser um mágico das artes gráficas que preferiu criar mundos impossíveis que parecessem reais.

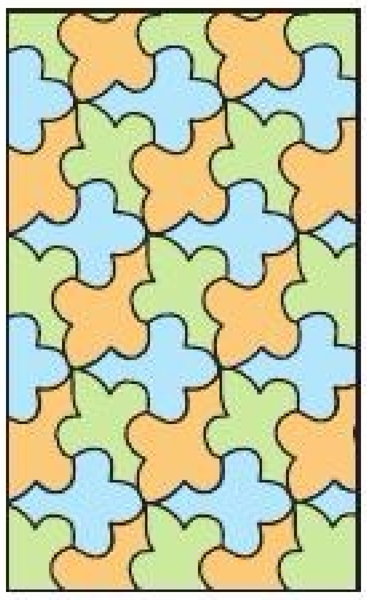
Procure explorar este tema de acordo com o interesse dos alunos. Ajuste-o a seu plano pedagógico e procure integrá-lo com outras disciplinas. Neste momento, não há necessidade de muito aprofundamento.

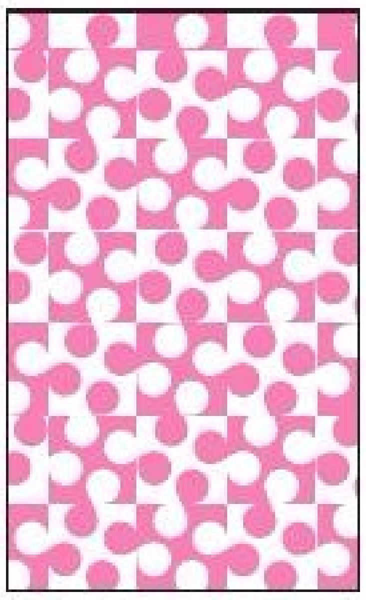


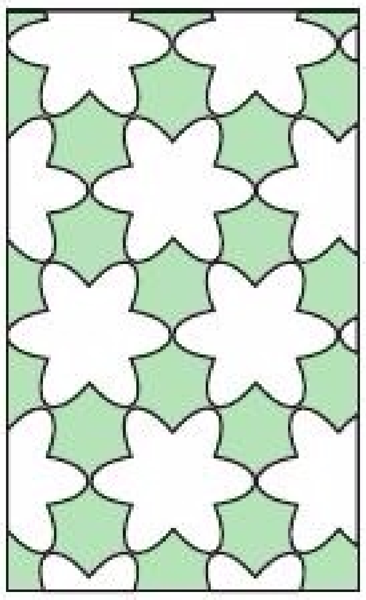
Nesta obra de Escher, *Queda de água* (out. 1961), vemos uma correnteza incessante que parece correr para o alto.

Ele empregou de maneira surpreendente os conceitos matemáticos, em especial os da Geometria: em seu trabalho, nada é o que aparenta ser.

Assim como Escher, podemos utilizar as mais variadas figuras como motivo para elaborar um ladrilhamento de parte do plano:







Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Anote apenas as sentenças verdadeiras: b, c

a) $-\sqrt{2\,408}$ é um número inteiro.

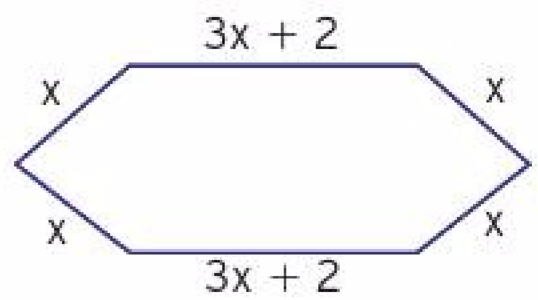
b) $-\sqrt{2\,408}$ é um número real.

c) 3,040040004... é um número real.

2. Escreva os números reais a seguir em ordem descrescente: $-0{,}007 > -0{,}07 > -\frac{7}{2} > -4{,}4333... > -\frac{9}{2}$

$-0{,}07$; $-\frac{9}{2}$; $-4{,}4333...$; $-\frac{7}{2}$; $-0{,}007$.

3. Nesta figura, **x** representa uma medida em metros.



a) Que expressão algébrica representa o perímetro desse hexágono? $10x + 4$

b) Calcule o perímetro desse hexágono para $x = \frac{4}{5}$. 12 m.

4. Sabendo que $y = \dfrac{n - (3n + 5)}{4}$, responda às questões:

a) Qual é o valor de **y** para $n = -1$? $-\frac{3}{4}$

b) Para que valor de **n** obtém-se $y = \frac{3}{4}$? -4

5. Simplifique as expressões algébricas a seguir:

a) $-\frac{2}{3}x + 2y - \frac{5}{2}y + \frac{x}{4} - \frac{5}{6}x - \frac{7}{4}y$ $\quad -\frac{5}{4}x - \frac{9}{4}y$

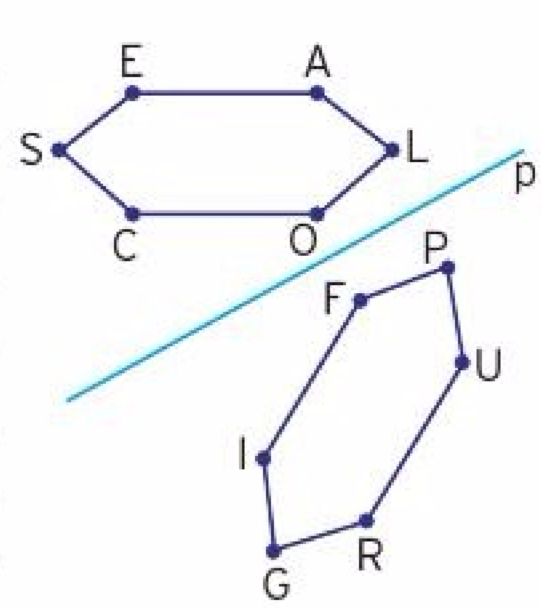
b) $x^2 - 3x - 9 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 9$ $\quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 18$

6. Simplifique as expressões a seguir:

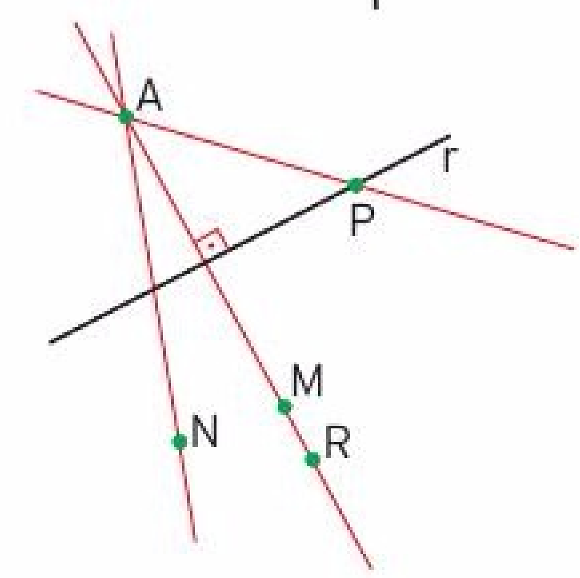
a) $-3y^2(y^2 - \frac{2}{3}y + 1) + (-2y) \cdot y^2$ $\quad -3y^4 - 3y^2$

b) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)$ $\quad 16x^4 - 81$

7. Nesta figura, o hexágono ESCOLA foi obtido por uma reflexão realizada sobre o hexágono RGIFPU em relação à reta **p**. Quais são os lados de RGIFPU correspondentes a $\overline{SC}$ e $\overline{LA}$? Esses lados são congruentes? $\overline{GI}$ e $\overline{PU}$. Sim.



8. Nesta figura, o ponto simétrico ao ponto **A** em relação a **r** é: a



a) o ponto **M**.

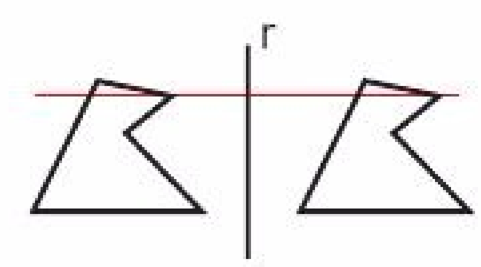
b) o ponto **N**.

c) o ponto **R**.

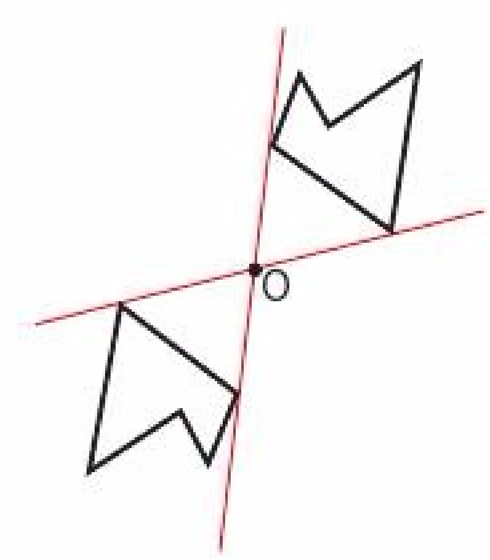
d) o ponto **P**.

9. Uma figura obtida a partir de outra por reflexão está representada em: d

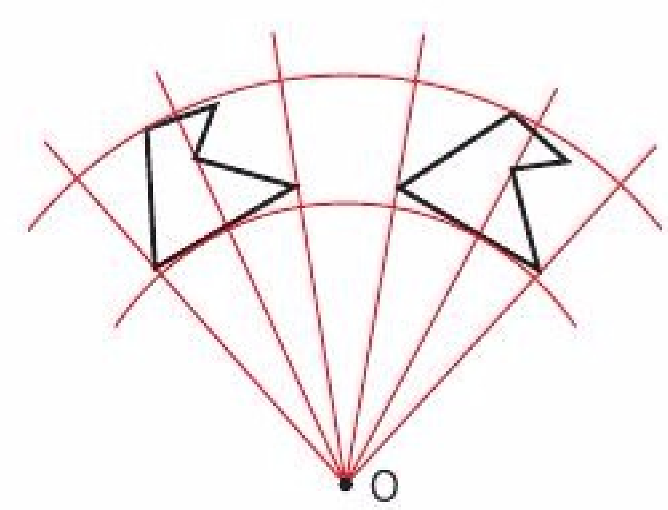
a)



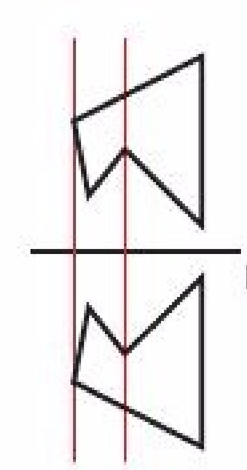
b)



c)



d)



10. (Saresp) Zeca entrou num jogo com certo número de fichas. Na primeira rodada, perdeu a terça parte, mas na segunda rodada ganhou três fichas, ficando com 11 fichas no final. As fichas de Zeca no início do jogo eram em número de: b

a) 11 b) 12 c) 14 d) 20

UNIDADE 7

Produtos notáveis e fatoração

PIET MONDRIAN. QUADRO Nº 1, 1921-1925.

O pintor holandês Piet Mondrian (1872-1944) criou obras de arte compondo e decompondo quadrados e retângulos de forma estética. Também compondo e decompondo esses quadriláteros em outras figuras, vamos explorar alguns resultados que chamaremos produtos notáveis. Nesta unidade ampliaremos nosso conhecimento sobre cálculo algébrico, estudando produtos como os apresentados na próxima página e a fatoração de polinômios.

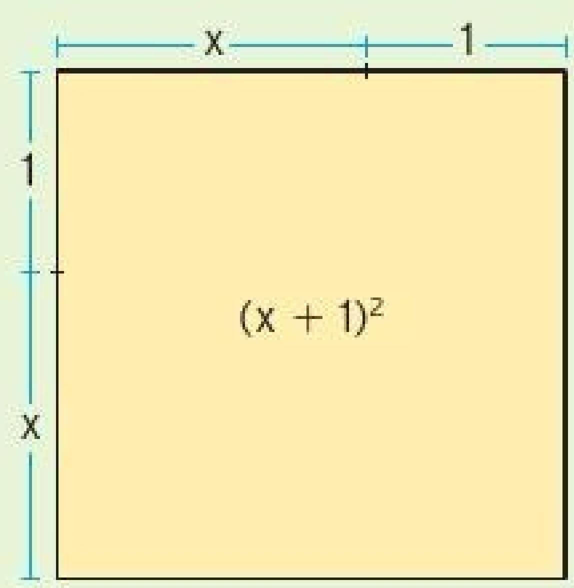
Nesta unidade...

Piet Mondrian – *Tableau nº 1*, 1921-1925. Óleo sobre tela, 75,5 × 65,5 cm.

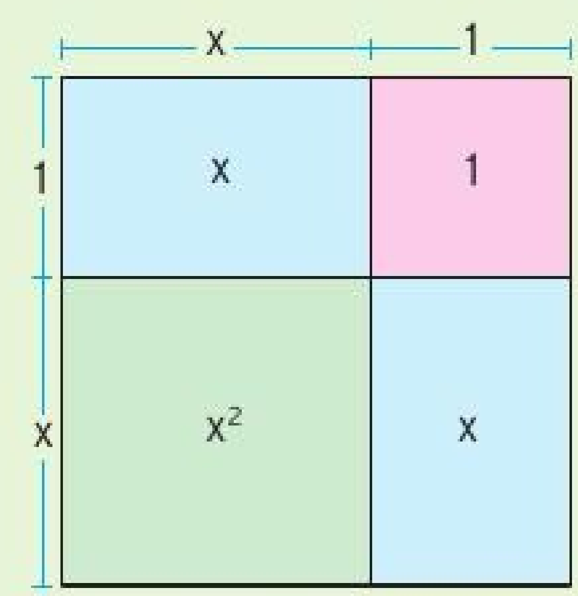
Você já sabe que alguns polinômios são resultados de produtos de dois binômios, por exemplo.

Esse tipo de decomposição auxilia na determinação de soluções em muitos problemas que envolvem polinômios.

Uma interpretação geométrica de produtos e da fatoração de polinômios pode ser obtida compondo e decompondo retângulos, quadrados e cubos em outras figuras. Segundo essa interpretação, um polinômio representa a área ou o volume de figuras e os fatores são expressões de medidas de lados dos quadriláteros

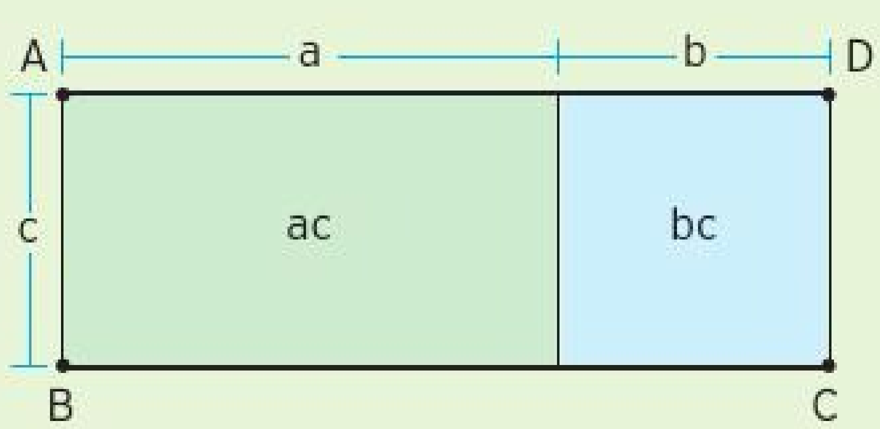


$(x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1)$



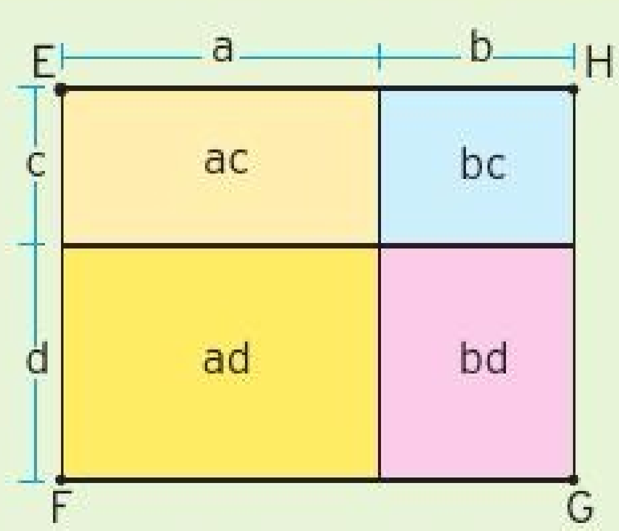
Área $= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

$(x + 1)^2$ é a forma fatorada de $x^2 + 2x + 1$



$ac + bc = c \cdot (a + b)$

$c \cdot (a + b)$ é a forma fatorada de $ac + bc$



$ac + bc + ad + bd = (a + b) \cdot (c + d)$

$(a + b) \cdot (c + d)$ é a forma fatorada de $ac + bc + ad + bd$

O que você já sabe?

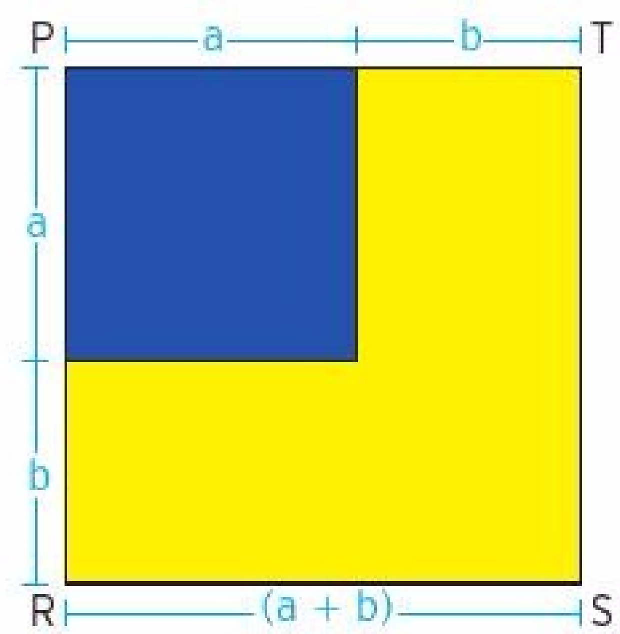
- Que expressão indica a medida dos lados de um quadrado que tem como área $(x + 1)^2$? $x + 1$
- A expressão $(x + 1)^2$ é o produto de quais binômios? $(x + 1)$ e $(x + 1)$
- Que trinômio é igual ao quadrado da soma de x com 1? $x^2 + 2x + 1$
- Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $c \cdot (a + b)$, qual é a expressão que se obtém? $ac + bc$

1 Produtos notáveis

Quadrado da soma de dois termos

Para refletir e responder

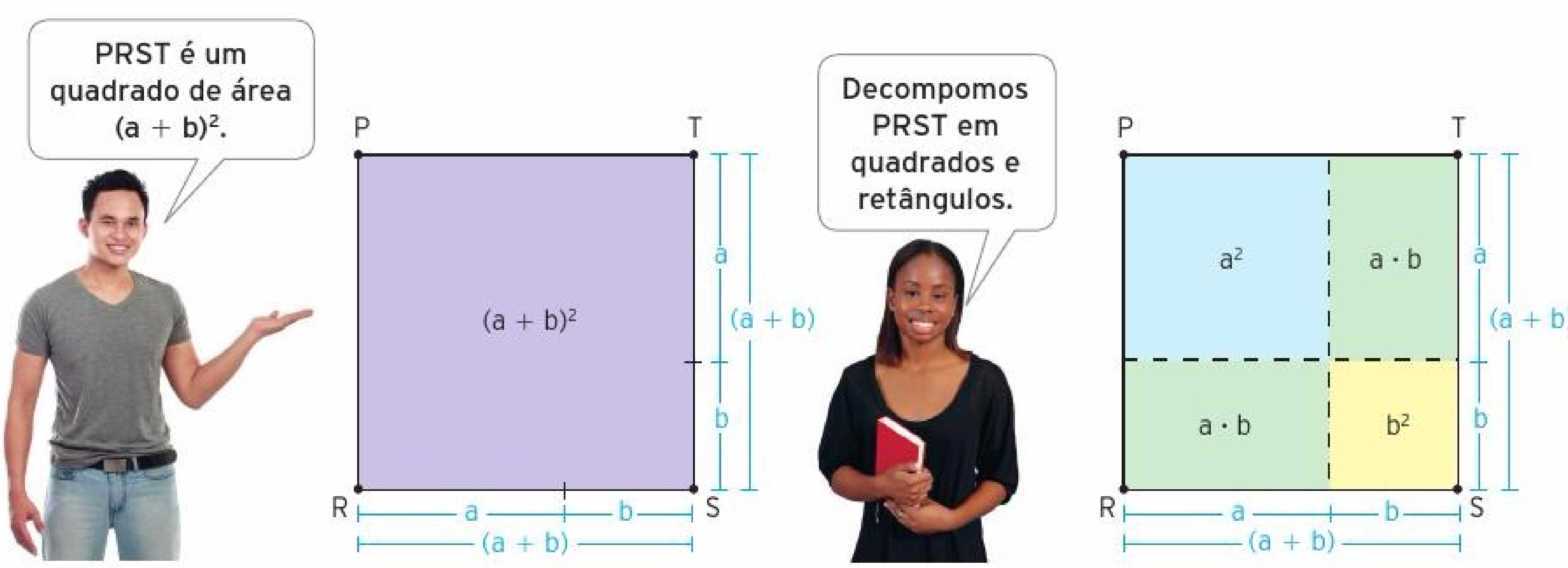
As letras **a** e **b** representam termos que expressam as medidas dos lados desta figura.



Medidas na mesma unidade.

- Que potência de (a + b) representa a área do quadrado PRST? Que polinômio representa essa área?
  $(a + b)^2$, $a^2 + 2ab + b^2$

A área do quadrado PRST pode ser representada pela potência $(a + b)^2$. O polinômio que representa essa área pode ser determinado usando-se áreas de quadrados e retângulos. Observe as duas figuras:



FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Na decomposição feita, temos:

- dois quadrados: um com lados medindo **a** e outro com lados medindo **b**; suas áreas são $\mathbf{a^2}$ e $\mathbf{b^2}$, respectivamente;
- dois retângulos iguais com lados medindo **a** e **b**. A área de cada um deles é $\mathbf{a \cdot b}$.

Adicionamos as áreas das partes e obtemos:

$$\text{Área de PRST} = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Conclusão:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a + b)^2$ é um **produto notável.**

Na prática:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1º termo

2º termo

quadrado do 2º termo

duas vezes o 1º termo pelo 2º termo

quadrado do 1º termo

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo e mais o quadrado do segundo termo.

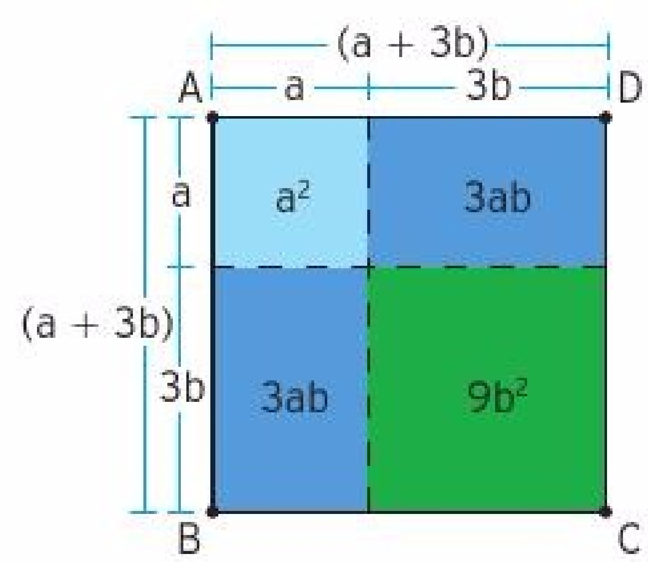
O polinômio $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ é um trinômio e é chamado, também, de **trinômio quadrado perfeito**, porque é igual ao quadrado de a + b.

Exemplos:

- Cálculo de $(a + 3b)^2$ utilizando áreas de quadrados e retângulos.

ABCD é um quadrado cujo lado mede (a + 3b).

THINKSTOCK/GETTY IMAGES



Área de ABCD $= (a + 3b)^2$

Área de ABCD $= a^2 + 3ab + 3ab + 9b^2$

$$(a + 3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2$$

a^2

$2 \cdot a \cdot 3b$

$(3b)^2$

$$\mathbf{(a + 3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2}$$

- Cálculo de $\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$, utilizando a regra prática.

  Em $\frac{x}{2} + 5$, o 1º termo é $\frac{x}{2}$ e o 2º termo é 5:

$$\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cancel{2}^{1} \cdot \frac{x}{\cancel{2}_{1}} \cdot 5 + 5^2 = \frac{x^2}{4} + 5x + 25$$

$$\mathbf{\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2 = \frac{x^2}{4} + 5x + 25}$$

- Sendo $y^2 + n^2 = 53$ e $yn = 14$, determine o valor de $(y + n)^2$.

  Desenvolvemos o produto notável $(y + n)^2$:

$$(y + n)^2 = y^2 + 2yn + n^2 = \underbrace{y^2 + n^2}_{53} + \underbrace{2yn}_{2 \cdot 14} =$$

$$= 53 + 28 = \mathbf{81}$$

  O valor de $(y + n)^2$ é 81.

Quadrado da diferença de dois termos

Para determinar o trinômio que é o quadrado da diferença (**a − b**), podemos utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica.

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = \overset{a\cdot a}{\underset{-a\cdot b}{a\cdot(a-b)}} - \overset{-b\cdot a}{\underset{-b\cdot -b}{b\cdot(a-b)}} = a^2 - a\cdot b - \underbrace{b\cdot a}_{a\cdot b} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Na prática:

Observe com os alunos que basta conhecer o desenvolvimento de $(a + b)^2$ e entender $(a - b)^2$ como $[a + (-b)]^2$. Nesse caso, **a** é o 1º termo e **−b** é o 2º termo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1º termo

2º termo

quadrado do 2º termo

duas vezes o 1º termo pelo 2º termo

quadrado do 1º termo

O **quadrado da diferença de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo e mais o quadrado do segundo termo.

O polinômio **$a^2 - 2ab + b^2$** é um trinômio e é chamado, também, de **trinômio quadrado perfeito**, porque é igual ao quadrado de $(a - b)$.

Exemplo:

Desenvolvimento de $\left(y^3 - \frac{1}{4}y\right)^2$ usando a regra prática.

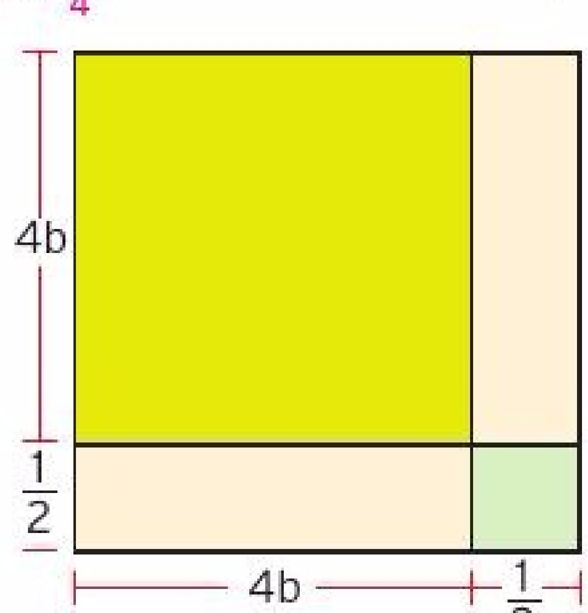
$$\left(y^3 - \frac{1}{4}y\right)^2 = \left(y^3\right)^2 - 2\cdot y^3\cdot\frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{4}y\right)^2 = y^6 - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot y^3\cdot y + \frac{1}{16}y^2 = y^6 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{16}y^2$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Copie esta figura, escreva as expressões que representam as áreas dos quadrados e retângulos e utilize-as para calcular $\left(4b + \frac{1}{2}\right)^2$.

$16b^2 + 4b + \frac{1}{4}$



2. Desenhe uma tabela como esta e complete-a.

Quadrado do binômio	Quadrado do 1º termo	2 vezes o 1º termo pelo 2º termo	Quadrado do 2º termo	Resultado
$(x - 2y)^2$	x^2	$4xy$	$4y^2$	$x^2 - 4xy + 4y^2$
$(m^2 + n)^2$	m^4	$2m^2n$	n^2	$m^4 + 2m^2n + n^2$
$(x^2 - 2y)^2$	x^4	$4x^2y$	$4y^2$	$x^4 - 4x^2y + 4y^2$
$(x^3 - 3x)^2$	x^6	$6x^4$	$9x^2$	$x^6 - 6x^4 + 9x^2$

3. Analise cada uma das igualdades e indique as que estão corretas. Reescreva as incorretas, de modo que sejam verdadeiras.

a) $(y^3 + 6)^2 = y^6 + 12y^3 + 36$

b) $(4x^3 + x)^2 = 16x^3 + 8x^4 + x$

c) $\left(\dfrac{x}{3} + y\right)^2 = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{2xy}{3} + y^2$

d) $(2 - ab^3)^2 = 4 - 4ab^3 + a^2b^6$

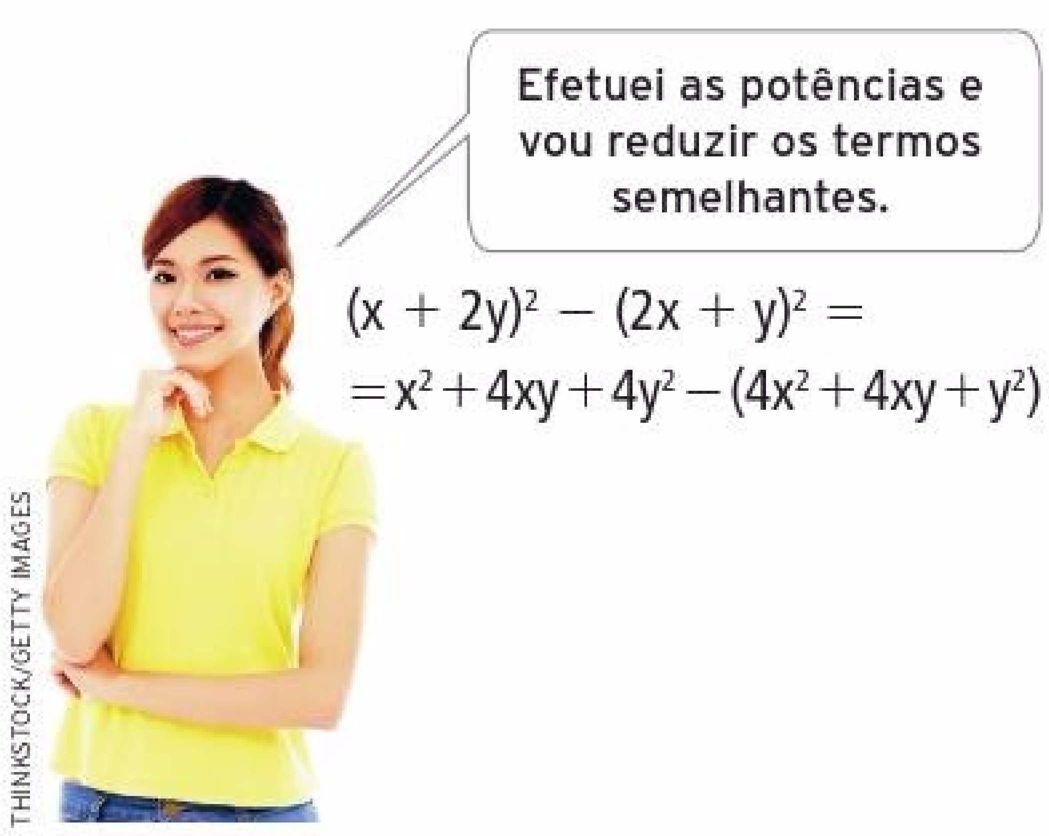
e) $(9y - y^3)^2 = 81y^2 - 18y^3 + y^3$

f) $\left(\dfrac{2xy}{9} - \dfrac{xy^2}{4}\right)^2 = \dfrac{4x^2y^2}{9} - \dfrac{x^2y^2}{9} + \dfrac{x^2y^2}{16}$

Corretas: a, c e d.
b) $16x^6 + 8x^4 + x^2$
e) $81y^2 - 18y^4 + y^6$
f) $\dfrac{4x^2y^2}{81} - \dfrac{x^2y^3}{9} + \dfrac{x^2y^4}{16}$

4. Ao resolver um problema, Alberto obteve o resultado $(x + 2y)^2 - (2x + y)^2$. Mas, ao conferir sua resposta com a que a professora forneceu, ficou surpreso, pois esta indicava $-3x^2 + 3y^2$. Como Alberto poderia chegar a esse resultado?

Veja como Simone pensou e começou a resolver:



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$(x + 2y)^2 - (2x + y)^2 =$
$= x^2 + 4xy + 4y^2 - (4x^2 + 4xy + y^2) = ...$

Complete os cálculos de Simone e verifique se confere com a resposta da professora.
$x^2 - 4x^2 + 4y^2 - y^2 = -3x^2 + 3y^2$. Confere com a resposta da professora.

5. Que polinômio obtemos quando efetuamos as potências e os produtos e reduzimos os termos semelhantes da expressão $(2 + a)^2 - 2a \cdot (2 - 2a)$? $5a^2 + 4$

6. Desenvolva os produtos notáveis e obtenha a forma reduzida de $(2n + 9)^2 - (2n - 1)^2$. $40n + 80$

7. A professora de Matemática quis saber que monômio deve ser adicionado ao binômio $4a^2 + 4ab^2$ para obter $(2a + b^2)^2$.

Pedro calculou o produto notável $(2a + b^2)^2$ e comparou o resultado com o binômio $4a^2 + 4ab^2$.

$(2a + b^2)^2 = \quad 4a^2 + 4ab^2 + b^4$
$\qquad\qquad\qquad\ \ \downarrow \qquad \downarrow$
binômio — $4a^2 + 4ab^2$

Que monômio deve ser acrescentado para que a resposta de Pedro seja correta? b^4

8. Que monômio deve ser subtraído do binômio $x^4 + 9y^2$ para obter $(x^2 - 3y)^2$? $\frac{1}{4}a^2$

Analise esta resolução:

Representando o monômio desconhecido pela letra M, temos:

$(x^4 + 9y^2) - M = (x^2 - 3y)^2$

$M = (x^4 + 9y^2) - (x^2 - 3y)^2 =$ Quadrado da diferença

$= \cancel{x^4} + \cancel{9y^2} - \cancel{x^4} + 6x^2y - \cancel{9y^2} = 6x^2y$

Agora verifique se a resposta está correta. Resposta correta.

9. Que monômio deve ser subtraído do trinômio $x^2 - 2xy + 4y^2$ para que ele seja o quadrado de $(x - 2y)$? $2xy$

10. Consulte as informações dadas:

$4m^2 + n^2 = 85$ $\qquad$ $mn = -21$

- Agora, encontre o valor de $(2m + n)^2$. 1

11. Sabendo que $m^2 + n^2 = 52$ e $m \cdot n = 24$, responda:

a) Que expressão algébrica corresponde a $(m - n)^2$? $m^2 - 2mn + n^2$

b) Qual é o valor de $(m - n)^2$? 4

12. Se $a \cdot b = 96$ e $a^2 + b^2 = 208$, responda:

a) Qual é o valor do quadrado de $a + b$? 400

b) Quais são os valores de a e b? -8 e -12 ou 8 e 12.

13. Dados $A = 3x - 1$ e $B = 3x + 1$, calcule:

a) $A^2 - B^2$ $-12x$

b) $(A - B)^2$ 4

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

O produto de dois números positivos é igual a 12 e a soma de seus quadrados é 25.

- Qual é o quadrado da soma desses números? 49

O produto de dois números é igual a 36 e a soma de seus quadrados é 97.

- Qual é o quadrado da diferença desses números? 25

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

O quadrado de qualquer número que termina em **5** termina em **25**.

- Então, experimente com estes números:

15	25	35	85
225	625	1 225	7 225

- Teste com outros valores. O que se pode concluir?
  De fato, os quadrados dos números terminam em 25.

Podemos calcular, mentalmente, os quadrados de números que terminam em 5.

Exemplos:

$85^2 = 7225$
- termina em 25
- $8 \cdot (8 + 1) = \underbrace{8 \cdot 9}_{\text{produto de 8 pelo seu sucessor}}$

$95^2 = 9025$
- termina em 25
- $9 \cdot (9 + 1) = \underbrace{9 \cdot 10}_{\text{produto de 9 pelo seu sucessor}}$

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

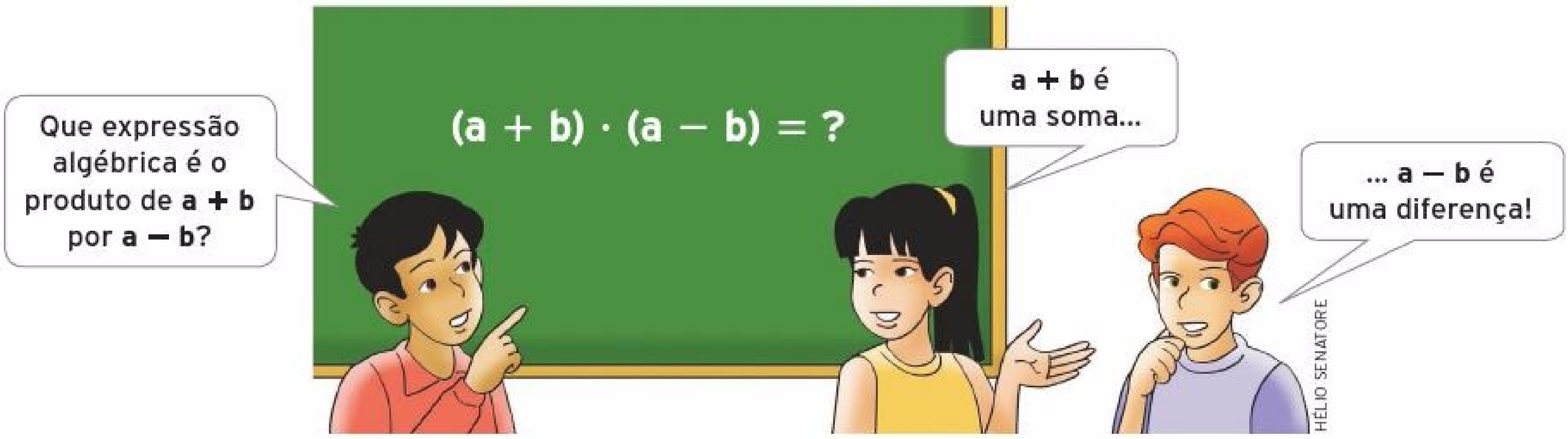
$$95^2 = (90 + 5)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 5 + 5^2$$
$$95^2 = 8\,100 + 900 + 25$$
$$95^2 = 9\,000 + 25$$
$$95^2 = \underbrace{9 \cdot 10}_{9 \cdot (9+1)} \cdot 100 + \underbrace{25}_{\text{termina em } \mathbf{25}} \text{ —— } \mathbf{95^2 = \underbrace{9\,025}_{9 \cdot 10 \cdot 100 + 25}}$$

- Agora, expliquem como calcular mentalmente 75^2. O quadrado de 75 é um número com quatro algarismos: termina em 25 e os dois primeiros algarismos representam o produto de 7 pelo seu sucessor, que é 8. $75^2 = 5\,625$
- Calcule estes mentalmente:

45^2	105^2	195^2
2 025	11 025	38 025

Procure certificar-se de que os alunos percebem a aplicação de produtos notáveis na justificativa de recursos de cálculo mental.

Produto da soma pela diferença de dois termos



Podemos obter a expressão algébrica aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica:

$$(a+b)\cdot(a-b) = \underset{-a\cdot b}{\overset{a\cdot a}{a\cdot(a-b)}} + \underset{-b\cdot b}{\overset{b\cdot a}{b\cdot(a-b)}} = a^2 - a\cdot b + \underbrace{b\cdot a}_{a\cdot b} - b^2 = a^2 - b^2$$

Na prática:

$$(a+b)\cdot(a-b) = \overbrace{a^2}^{\text{quadrado do 1º termo}} - \overbrace{b^2}^{\text{quadrado do 2º termo}}$$

$(a + b) \cdot (a - b)$ é um **produto notável**.

O produto da soma de dois termos pela diferença desses mesmos termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Note que em $\mathbf{a^2 - b^2}$ os termos representam quadrados de números reais e, por isso, dizemos que $\mathbf{a^2 - b^2}$ é uma **diferença de quadrados**.

Exemplos:

- Cálculo do produto de $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Aplicando a regra prática, temos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{4}$$

- Que polinômio é o produto de $[(a + b) + 1]$ por $[(a + b) - 1]$?

$$[(a+b)+1]\cdot[(a+b)-1]$$

$[(a + b) + 1] \cdot [(a + b) - 1]$ é o produto da soma de $(a + b)$ com 1 pela diferença desses termos. É um produto notável.

$$\underbrace{[(a + b)}_{1^{\text{o}}\text{ termo}} + \underbrace{1]}_{2^{\text{o}}\text{ termo}} \cdot [(a + b) - 1] = \underbrace{(a + b)^2}_{\text{quadrado do }1^{\text{o}}\text{ termo}} - \underbrace{1^2}_{\text{quadrado do }2^{\text{o}}\text{ termo}}$$

$[(a + b) + 1] \cdot [(a + b) - 1] = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2 - 1}$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

14. Desenhe uma tabela como esta e complete-a.

Produto da soma pela diferença	Quadrado do 1º termo	Quadrado do 2º termo	Resultado
$(a^2 - b) \cdot (a^2 + b)$	a^4	b^2	$a^4 - b^2$
$(2 + xy) \cdot (2 - xy)$	4	x^2y^2	$4 - x^2y^2$

15. Sabe-se que $P = x^2y - xy^2$ e $Q = x^2y + xy^2$. Qual é o polinômio $P \cdot Q$? $x^4y^2 - x^2y^4$

16. Efetue os produtos notáveis e reduza os termos semelhantes da expressão: $-36b^2 + 12b + \frac{1}{4}$

$$\left(6b + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(6b - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(6b - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(6b + \frac{1}{2}\right)$$

17. Efetuando as operações indicadas e reduzindo os termos semelhantes desta expressão, que resultado se obtém? $2y^4$

$$(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) + 2x^2y^2$$

18. Que expressão se deve adicionar a $(a^2 + b^4)$ para se obter o quadrado de $(a - b^2)$? $-2ab^2$

19. Se $A = 2m^2 - m$ e $B = m^2 - 5m$, qual é o resultado da diferença $A^2 - B^2$? $3m^4 + 6m^3 - 24m^2$

20. Qual é o quociente de $(2a + y^2) \cdot (2a - y^2)$ por $4a^2 - y^4$, para $4a^2 \neq y^4$? 1

21. Calcule o valor de $m^2 - n^2$, sendo: -44

$$(m + n) = 22$$
$$m - n = -2$$

Pista: Desenvolva o produto $(m + n) \cdot (m - n)$.

22. A soma de dois números **a** e **b** é igual a -9 e a diferença entre esses números é 15. Qual é o valor de $a^2 - b^2$? -135

23. Observe esta expressão:

$$[3 + (x - y)] \cdot [3 - (x - y)]$$

Desenvolvendo o produto, que polinômio se obtém? $9 - x^2 - y^2$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Produtos notáveis e potências

A máquina imaginária desenhada ao lado simplifica expressões algébricas. Ela possui três fases: na primeira, efetua os produtos notáveis; na segunda, reduz os termos semelhantes; e, na última, determina os valores numéricos da expressão quando são dados valores para as variáveis.

FRANCISCO VILACHA

Vamos experimentar essa máquina?

- Use a máquina e simplifique a expressão $(x + 4)^2 + (x + 2)^2 - (x + 3)^2 - (x + 1)^2$. $4x + 10$
- Que valor atribuir a **x** na expressão algébrica do item anterior para obter $104^2 + 102^2 - 103^2 - 101^2$? 100
- Que valor numérico a máquina daria para a expressão algébrica do primeiro item, se atribuísse a **x** o valor obtido no item anterior? 410
- Qual é o valor da soma que está neste quadro? 130 $34^2 + 32^2 - 33^2 - 31^2$

Produto do tipo $(x + a) \cdot (x + b)$

Para refletir e responder

$$(x + a) \cdot (x + b) = ?$$

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual é o resultado desse produto? $x^2 + ax + bx + ab$

O produto do binômio **(x + a)** pelo binômio **(x + b)** é também um produto notável. Ele resulta em um **trinômio do 2º grau**.

Esse produto pode ser obtido usando o esquema da multiplicação de polinômios.

$$\begin{array}{rr}
 & x + a \\
\times & x + b \\
\hline
 & bx + ba \\
+ & x^2 + xa \qquad \\
\hline
 & x^2 + bx + xa + ba \\
\text{ou} & x^2 + ax + bx + ab \\
\text{ou} & x^2 + (a + b)x + ab
\end{array}$$

$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + ax + bx + ab$ ou $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + ab$

Na prática, podemos escrever esse resultado da seguinte forma:

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + S \cdot x + P$$

$P \rightarrow a \cdot b \longrightarrow$ Produto de **a** por **b**

$S \rightarrow a + b \longrightarrow$ Soma de **a** com **b**

> O produto de $(x + a)$ por $(x + b)$ é do tipo $\mathbf{x^2 + S \cdot x + P}$, em que **S** representa a soma $\mathbf{a + b}$ e **P**, o produto $\mathbf{a \cdot b}$.

O trinômio $x^2 + Sx + P$ é um trinômio de 2º grau.

Exemplos:

- Cálculo do produto $(x + 6) \cdot (x + 3)$.

Podemos calcular aplicando a regra prática:

$(x + 6) \cdot (x + 3)$ é do tipo $(x + a) \cdot (x + b)$, em que $a = 6$ e $b = 3$.

O resultado é do tipo $x^2 + Sx + P$:

$S = a + b = 6 + 3 = 9$ $\qquad$ $P = a \cdot b = 6 \cdot 3 = 18$

Portanto, $(x + 6) \cdot (x + 3) = x^2 + 9x + 18$.

- Cálculo do produto $(x - 9) \cdot (x + 7)$ usando a regra prática.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + Sx + P$

$S = a + b = -9 + 7 = -2$

$P = a \cdot b = (-9) \cdot 7 = -63$

Portanto, $(x - 9) \cdot (x + 7) = x^2 - 2x - 63$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

24. Identifique as sentenças verdadeiras e corrija as falsas. Verdadeiras: b e c.

a) $(x + 6) \cdot (x + 2) = x^2 + 12x + 8$ $x^2 + 8x + 12$

b) $(x - 4) \cdot (x - 7) = x^2 - 11x + 28$

c) $(x - 10) \cdot (x + 9) = x^2 - x - 90$

d) $(x + 5) \cdot (x - 12) = x^2 - 12x + 60$ $x^2 - 7x - 60$

25. Que trinômio de 2º grau é o resultado de $(x - 5) \cdot (x + 8)$? $x^2 + 3x - 40$

26. Desenvolva estes produtos:

a) $(x - 8) \cdot (x - 13)$ $x^2 - 21x + 104$

b) $(y - 15) \cdot (y + 10)$ $y^2 - 5y - 150$

c) $(z + 18) \cdot (z - 7)$ $z^2 + 11z - 126$

d) $\left(a + \frac{3}{5}\right) \cdot \left(a + \frac{2}{5}\right)$ $a^2 + a + \frac{6}{25}$

27. Que monômio deve ser adicionado ao binômio $(x^2 - 80)$ para que ele seja o resultado do produto $(x - 8) \cdot (x + 10)$? $2x$

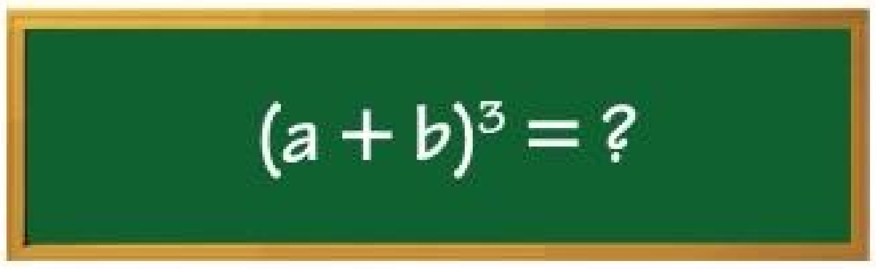
28. A e B são dois binômios. Consulte o quadro abaixo e determine qual é o binômio **B**. $x + 8$

> $A \cdot B = x^2 + 10x + 16$
> $A = x + 2$

29. O produto de dois binômios é $x^2 - 6x - 27$, dos quais um é igual a $x + 3$. Determine o outro. $x - 9$

Cubo da soma de dois termos

Para refletir e responder



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- Qual é o cubo da soma $(a + b)$? $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

A expressão $(a + b)^3$ é igual a $(a + b)^2 \cdot (a + b)$. Determinamos primeiro o quadrado da soma:

$$(a + b)^3 = \underbrace{(a + b)^2}_{a^2 + 2ab + b^2} \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b).$$

Em seguida, efetuamos $(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$:

$$\begin{array}{rrl}
 & a^2 + 2ab + b^2 & \leftarrow (a + b)^2 \\
\times & a + b & \\
\hline
 & a^2b + 2ab^2 + b^3 & \leftarrow + b \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \\
+ & a^3 + 2a^2b + ab^2 \quad & \leftarrow a \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \\
\hline
 & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \leftarrow \text{produto}
\end{array}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(a + b)^3$ é um produto notável.

- a: 1º termo
- b: 2º termo
- a^3: cubo do 1º termo
- $3a^2b$: três vezes o produto do quadrado do 1º termo pelo 2º termo
- $3ab^2$: três vezes o produto do 1º termo pelo quadrado do 2º termo
- b^3: cubo do 2º termo

O **cubo da soma de dois termos** é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo e mais o cubo do segundo termo.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

30. Faça uma tabela como esta e complete-a.

Cubo do binômio	Cubo do 1º termo	3 vezes o quadrado do 1º termo pelo 2º termo	3 vezes o 1º termo pelo quadrado do 2º termo	Cubo do 2º termo	Resultado
$(2x + 5)^3$	$8x^3$	$3 \cdot 4x^2 \cdot 5 = 60x^2$	$3 \cdot 2x \cdot 25 = 150x$	125	$8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
$(3x - 4z)^3$	$27x^3$	$3 \cdot 9x^2 \cdot 4z = 108x^2z$	$3 \cdot 3x \cdot 16z^2 = 144xz^2$	$64z^3$	$27x^3 - 108x^2z + 144xz^2 - 64z^3$
$(2a^2 + a)^3$	$8a^6$	$3 \cdot 4a^4 \cdot a = 12a^5$	$3 \cdot 2a^2 \cdot a^2 = 6a^4$	a^3	$8a^6 + 12a^5 + 6a^4 + a^3$
$(x^2 - x)^3$	x^6	$3 \cdot x^4 \cdot x = 3x^5$	$3 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3x^4$	x^3	$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$

31. Analise o desenvolvimento de cada potência e indique as que estão corretas. Corrija as incorretas.
Corretas: a, c.

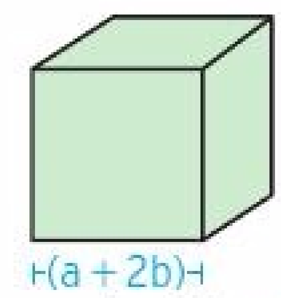
a) $(2y + 1)^3 = 8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$

b) $(x^3 + x)^3 = x^9 + 3x^6 + 3x^2 + x^3$
b) $x^9 + 3x^7 + 3x^5 + x^3$

c) $(x - 3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

d) $\left(\dfrac{2m}{3} - 1\right)^3 = \dfrac{8m^3}{27} - \dfrac{4m^2}{3} - 2m^2 - 1$
d) $\dfrac{8m^3}{27} - \dfrac{4m^2}{3} - 2m + 1$

32. Neste cubo a medida da aresta é representada pelo binômio $(a + 2b)$.
Obtenha o polinômio que representa o volume desse cubo.
$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$



33. Efetue as operações indicadas e represente esta expressão em uma forma reduzida: $4ac^2$

$$(a + c)^3 - a \cdot (a + c)^2 - c \cdot (a - c)^2.$$

34. Se $P = x^3 - 3x^2 - 2$ e $Q = 3x + 1$, a expressão $P + Q$ é igual a $(x - 2)^3$ ou igual a $(x - 1)^3$? $(x - 1)^3$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

35. Efetue as operações utilizando os produtos notáveis:

a) $[(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c]$ $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

b) $(x - y + z) \cdot (x - y - z)$ $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$

36. Qual é a forma reduzida da expressão algébrica $(x + 3y)^2 + (3x - y)^2$? $10x^2 + 10y^2$

37. Simplifique a expressão $(x - 2y)^3 - (x^3 + y^3)$ e calcule seu valor numérico para $x = 1$ e $y = -1$.
$-9y^3 - 6x^2y + 12xy^2$; 27.

38. Copie as expressões algébricas a seguir. Substitua o ■ para obter trinômios quadrados perfeitos.

a) $4x^2 + 4x +$ ■ 1

b) $m^2 -$ ■ $+ 9$ 6m

39. Dona Alice confecciona tapetes. Ela já tem, quase pronto, um lindo tapete quadrado. Ana quer comprar o tapete, mas pediu para dona Alice aumentar 10 cm em cada lado. De quanto será o aumento na área do tapete em que **a** representa a medida do lado do original, em centímetros? $20a + 100$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Expressões cruzadas

Nesta cruzadinha, monômios completam as horizontais e as verticais.

- Desenhe um quadriculado como este e escreva um monômio em cada quadrinho.

	1	2	3	4	5
1			−		
2		+		+	
3	−		−		
4		+			
5	+		+		
6		+		−	
7					

Horizontal Ver resposta no final do livro.

1. O produto $a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$.
2. O quadrado de $(x + 2)$.
3. A expressão $-3 \cdot (2a + 1) \cdot (2a - 1) - 6$ na forma reduzida.
4. O produto $y \cdot (6x + 1)$.
5. A expressão $(a + 50) \cdot (a - 2) + 10^2$ na forma simplificada.
6. A expressão $(3y - 2)^2$ na forma simplificada.
7. O quadrado de 8.
O valor de **x** para que o binômio $x - 1$ seja igual a zero.

Vertical

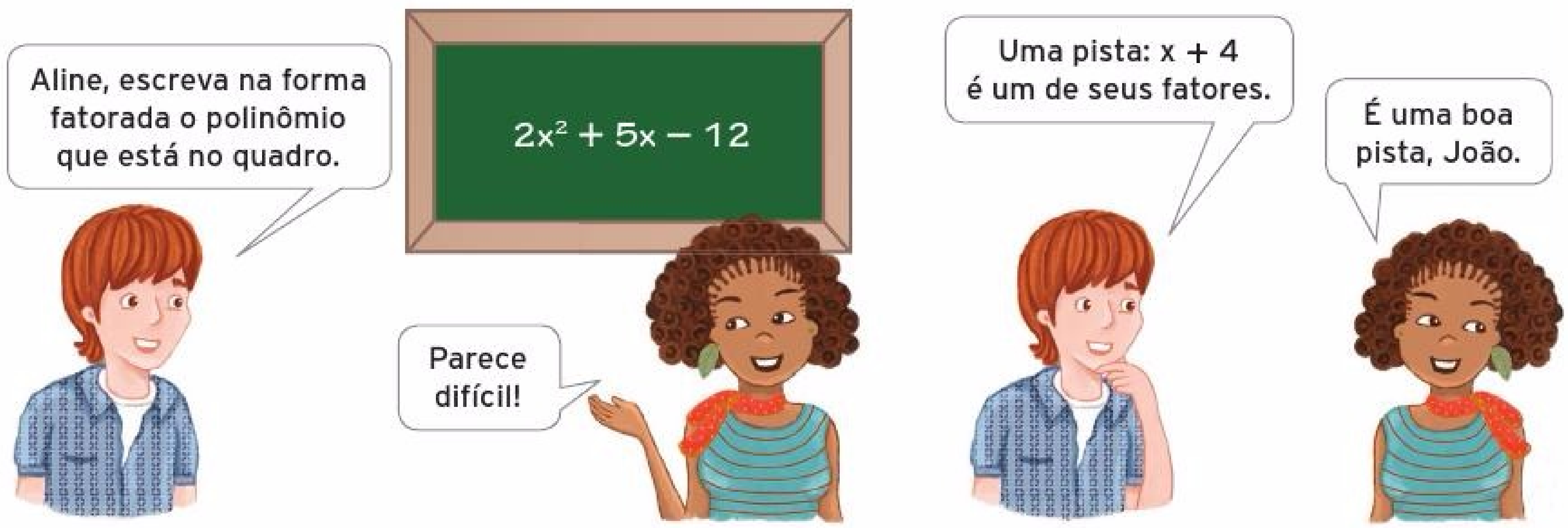
1. O quadrado de $(x - 3y)$.
2. O cubo de $(a + 4)$.
3. O quociente $(48x^2 + 12xy - 48x) : (-12x)$.
4. O quociente $(a^2 - 9) : (a - 3)$.
O produto $(a + 1) \cdot (a - 1)$.
5. O valor numérico de $(x - 36)^2$ para $x = 38$.
O monômio que adicionado a $36 + y^2$ seja igual a $(6 + y)^2$.

2 Fatoração de polinômios

O que é fatoração?

Existem polinômios que podem ser decompostos em um produto de outros polinômios.

Para refletir e responder



ILUSTRAÇÕES: ELIANA DELARISSA

- Siga a pista de João e escreva $2x^2 + 5x - 12x$ na forma fatorada. $(x + 4) \cdot (2x - 3)$

Escrever polinômios em uma forma fatorada poderá ser útil, por exemplo, para resolver equações, determinar raízes e em situações de cálculo algébrico.

Seguindo a sugestão de João, como o binômio $\mathbf{x + 4}$ é um dos fatores, basta dividir o polinômio $\mathbf{2x^2 + 5x - 12}$ por $\mathbf{x + 4}$. Este é um dos caminhos para se obter o outro fator.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2x^2 + 5x - 12 & x + 4 \\
\cline{3-3}
 & -\,2x^2 - 8x & 2x - 3 \\
\cline{2-2}
 & -3x - 12 & \\
 & +3x + 12 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
\qquad 2x^2 + 5x - 12 = (x + 4) \cdot (2x - 3)
$$

O produto $(x + 4) \cdot (2x - 3)$ é uma forma fatorada do polinômio $2x^2 + 5x - 12$.

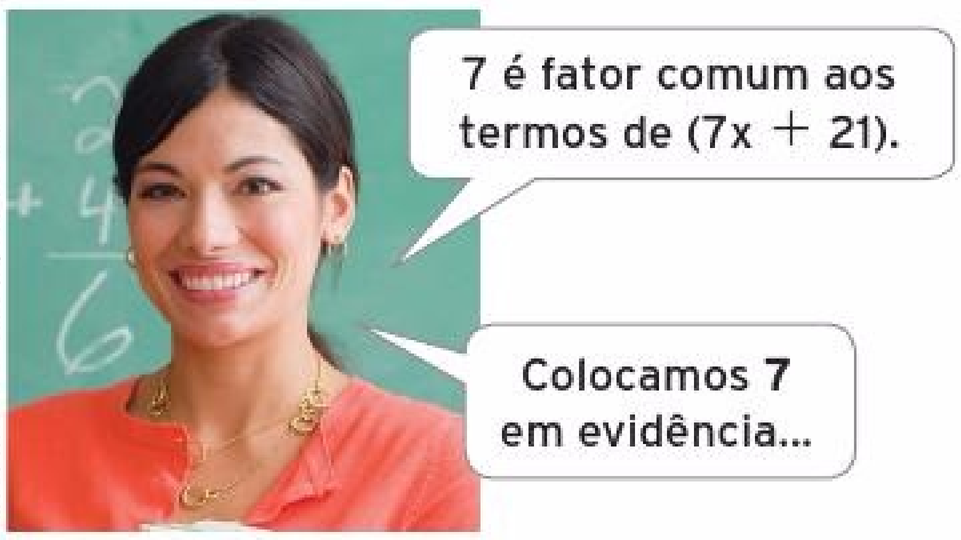
> Fatorar um polinômio escrito na forma de uma soma algébrica consiste em transformá-lo em um produto de polinômios.

Casos de fatoração

Para ajudá-lo na tarefa de transformar um polinômio em um produto de dois ou mais polinômios, vamos estudar alguns casos de fatoração.

Fator comum em evidência

Para escrever o binômio $7x + 21$ em uma forma fatorada, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica.



JOSE LUIS PELAEZ INC/GETTY IMAGES

$$7x + 21 =$$
$$= 7 \cdot (x + 3) \qquad 7 \cdot 3 = 21 \qquad \frac{7x}{7} \quad \frac{21}{7}$$

$$\underbrace{\mathbf{7x + 21}}_{\text{polinômio}} = \underbrace{\mathbf{7 \cdot (x + 3)}}_{\text{forma fatorada}}$$

$7 \cdot (x + 3)$ é uma forma fatorada de $7x + 21$.

Nessa situação, dizemos que o **fator comum 7** foi **colocado em evidência**. Dividindo $7x + 21$ por 7, calculamos $\mathbf{x + 3}$, que é o outro fator.

$$\begin{array}{r|l} 7x + 21 & 7 \\ \hline 0 & x + 3 \end{array}$$

Outros exemplos:

- Qual é o fator comum e qual é uma forma fatorada do trinômio $18m^4 - 24m^2n - 12m^2$?

BOUNCE/GETTY IMAGES

$$18m^4 - 24m^2n - 12m^2 =$$
$$= 6 \cdot 3 \cdot m^2 \cdot m^2 - 6 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot n - 6 \cdot 2 \cdot m^2 =$$
$$= 6 \cdot m^2 \cdot 3 \cdot m^2 - 6 \cdot m^2 \cdot 4 \cdot n - 6 \cdot m^2 \cdot 2 =$$
$$= 6m^2 \cdot (3m^2 - 4n - 2)$$

$6m^2$ é fator comum aos termos

Colocando $6m^2$ em evidência, temos: $18m^4 - 24m^2n - 12m^2 = \underbrace{6m^2 \cdot (3m^2 - 4n - 2)}_{\text{forma fatorada}}$

- Fatore a expressão do quadro: $x \cdot (2a - 1) - 5 \cdot (2a - 1)$

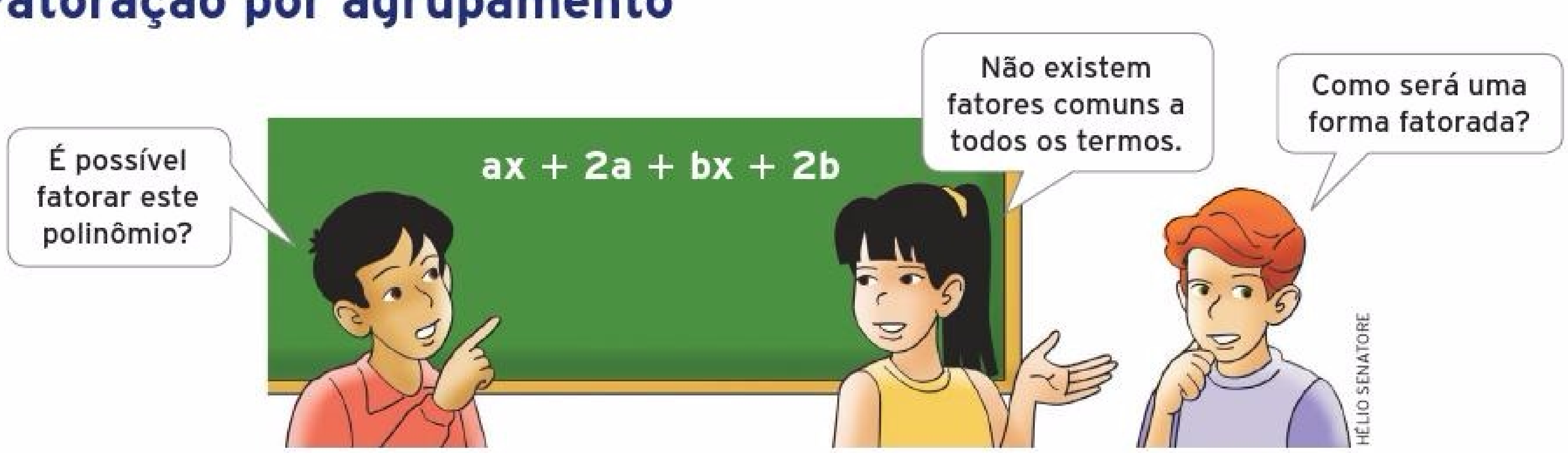
$$x \cdot (2a - 1) - 5 \cdot (2a - 1) = (2a - 1) \cdot (x - 5)$$

Portanto, colocando $(2a - 1)$ em evidência, temos:

$$x \cdot (2a - 1) - 5 \cdot (2a - 1) = \underbrace{(2a - 1) \cdot (x - 5)}_{\text{forma fatorada}}.$$

Uma forma fatorada de $x \cdot (2a - 1) - 5 \cdot (2a - 1)$ é $(2a - 1) \cdot (x - 5)$.

Fatoração por agrupamento



HÉLIO SENATORE

Observando a expressão algébrica, percebemos que é possível agrupar os termos de "dois em dois"; por exemplo, **ax** com **2a** e **bx** com **2b**. Em cada grupo existe um fator comum que poderá ser colocado em evidência.

ax e 2a

Fator comum: **a**.
Fatoração:
$ax + 2a = a \cdot (x + 2)$.

bx e 2b

Fator comum: **b**.
Fatoração:
$bx + 2b = b \cdot (x + 2)$.

Então, primeiro fatoramos agrupando os termos e, em seguida, colocando em evidência o binômio comum.


SHUTTERSTOCK

Colocamos (x + 2) em evidência.

$$\underbrace{ax + 2a}_{a \cdot (x+2)} + \underbrace{bx + 2b}_{b \cdot (x+2)} = a \cdot (x + 2) + b \cdot (x + 2) =$$

(x + 2) é o fator comum.

$$= (x + 2) \cdot (a + b)$$

$$\underbrace{ax + 2a + bx + 2b}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x + 2) \cdot (a + b)}_{\text{forma fatorada}}$$

Podemos também agrupar os termos de outra maneira: **ax** com **bx** e **2a** com **2b**.

ax e bx

Fator comum: **x**.
$ax + bx = x \cdot (a + b)$.

2a e 2b

Fator comum: **2**.
$2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$.

Fatorando o polinômio, temos:

$$ax + 2a + bx + 2b = ax + bx + 2a + 2b =$$

(a + b) é o fator comum.

$$= x \cdot (a + b) + 2 \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (x + 2)$$

$$\underbrace{ax + 2a + bx + 2b}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(a + b) \cdot (x + 2)}_{\text{forma fatorada}}$$

O polinômio **ax + 2a + bx + 2x** foi **fatorado** por **agrupamento de seus termos**.

Outro exemplo:

Qual é uma forma fatorada do polinômio $8m^2n - mn + 8m - 1$?


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Vamos agrupar, de dois em dois, os termos desse polinômio.

$$8m^2n - mn + 8m - 1 =$$

$$= 8 \cdot m \cdot \underline{m \cdot n} - \underline{m \cdot n} + 1 \cdot 8 \cdot m - 1 =$$

$$= mn \cdot \underline{(8m - 1)} + 1 \cdot \underline{(8m - 1)} =$$

(8m − 1) é o fator comum.

$$= (8m - 1) \cdot (mn + 1)$$

$$\mathbf{8m^2n - mn + 8m - 1 = \underbrace{(8m - 1) \cdot (mn + 1)}_{\text{forma fatorada}}}$$

Fatoração da diferença de dois quadrados

Fatoramos uma diferença entre dois quadrados seguindo o "caminho de volta" feito para obter essa diferença quando estudamos produtos notáveis, ou seja, transformamos a expressão em um produto de uma soma de dois termos pela diferença desses termos.

Exemplo:

Fatore o binômio $\mathbf{a^2 - 25}$.

Note que esse binômio é uma diferença entre dois quadrados, que são $\mathbf{a^2}$ e **25**, e 25 é igual a 5^2.

$$\underbrace{a^2 - 25}_{\text{binômio}} = \underbrace{(a + 5) \cdot (a - 5)}_{\text{forma fatorada}}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

40. Observe este binômio: $54ma^2 - 9b$.

a) Quais são os fatores comuns a esses termos? 9

b) Escreva uma forma fatorada desse binômio. $9 \cdot (6ma^2 - b)$

41. Considere o polinômio: $12x^4y^2 - 48x^3y^2 + 60x^2y^5$.

a) Quais são os fatores comuns das partes numéricas desses termos? 12

b) Quais são os fatores comuns das partes literais desses termos? x^2y^2

c) Escreva uma forma fatorada desse polinômio. $12x^2y^2 \cdot (x^2 - 4x + 5y^3)$

42. Anote as respostas corretas e corrija as que estão erradas. Uma forma fatorada do polinômio: Corretas: b; e.

a) $16x^2 - 32xy$ é $16 \cdot (x - 2y)$ $16x \cdot (x - 2y)$

b) $18a^2b - 27a^3b + 36a^4b$ é $9a^2b \cdot (2 - 3a + 4a^2)$

c) $15a^3 - 25a^2 + 30a$ é $5a \cdot (3a^2 - 25a + 6)$ $5a \cdot (3a^2 - 5a + 6)$

d) $-14x^2y^2 - 16xy^5 - 10xy^2$ é $-2xy^2 \cdot (7x^2 - 8y^3 - 5)$ $-2xy^2 \cdot (7x + 8y^3 + 5)$

e) $\frac{3}{5}x^3 - \frac{6}{5}x^5y^2 + \frac{3}{5}x^2$ é $\frac{3}{5}x^2 \cdot (x - 2x^3y^2 + 1)$

43. Represente esta expressão em uma forma fatorada: $9 \cdot (b - 5) - a \cdot (b - 5)$. $(b - 5) \cdot (9 - a)$

44. Considere a expressão $6x^2y - 12x + xy^2 - 2y$.

a) Agrupe os termos em binômios com um fator comum. $(6x^2 - 12x) + (xy^2 - 2y)$. Há outras respostas possíveis.

b) Escreva uma forma fatorada de $6x^2y - 12x + xy^2 - 2y$. $(xy - 2) \cdot (6x + y)$

45. Ricardo escreveu os polinômios seguintes na forma fatorada. Apenas uma está correta. Destaque-a e corrija as demais.

a) $a^3 + a^2b + ab + b^2 = (a^2 + b) \cdot (a + b^2)$ $(a^2 + b) \cdot (a + b)$

b) $am - bm + an - bn = (m + n) \cdot (a - b)$ correta

c) $x^2y + x^3 + 3y + 3x = (x^2 + 3) \cdot (y + x^2)$ $(x^2 + 3) \cdot (y + x)$

46. Qual é o produto que se obtém fatorando a expressão $\frac{4}{25} - m^6$? $\left(\frac{2}{5} + m^3\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - m^3\right)$

47. Fatorando o binômio $81 - y^2$, que produto se obtém? $(9 + y) \cdot (9 - y)$

48. Observe este binômio: $16m^4 - a^2$.

a) Escreva uma forma fatorada desse binômio. $(4m^2 + a) \cdot (4m^2 - a)$

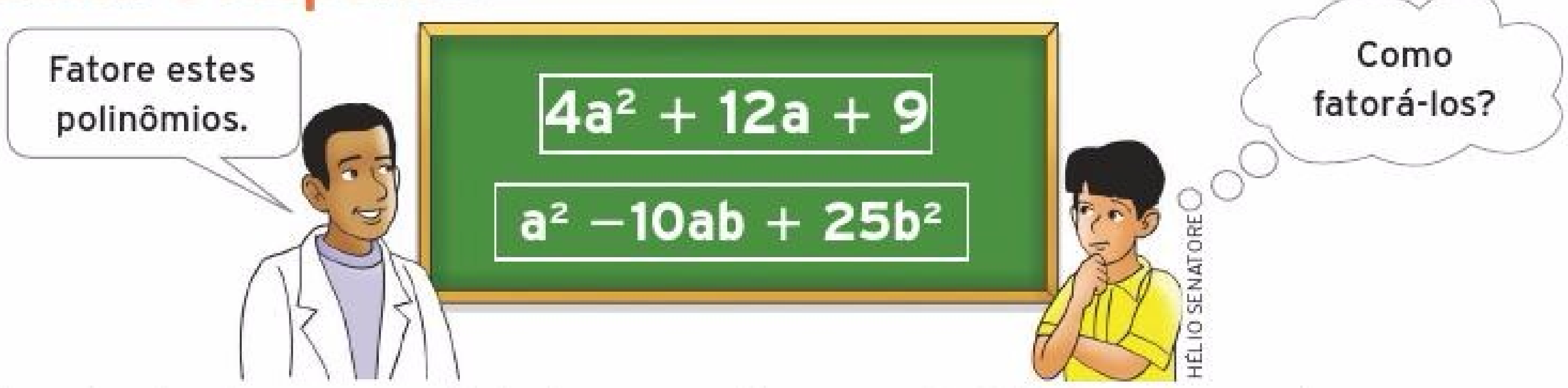
b) Qual é o valor numérico desse binômio para $4m^2 + a = 40$ e $4m^2 - a = 8$? 320

Procure certificar-se de que os alunos conseguem verificar se um trinômio é um trinômio quadrado perfeito ou um trinômio de 2º grau. As atividades propostas permitirão que eles, posteriormente, obtenham as raízes de equações do 2º grau utilizando uma fatoração.

3 Fatoração de trinômios de 2º grau

Trinômio quadrado perfeito

Para refletir e responder



- E você, sabe fatorar os polinômios que estão no quadro? Faça uma tentativa.

$4a^2 + 12a + 9 = (2a + 3)^2$; $a^2 - 10ab + 25b^2 = (a - 5b)^2$

Para fatorar $\mathbf{4a^2 + 12a + 9}$, verificamos se é um trinômio quadrado perfeito observando seus termos.

- Identificamos dois termos que sejam quadrados perfeitos. Nesse caso, são $4a^2$ e 9, pois $4a^2 = (2a)^2$ e $9 = 3^2$.
- Verificamos se o dobro de $2a \cdot 3$ é igual ao outro termo do trinômio.

quadrados → $4a^2$ 9

$2a \cdot 2a$ $3 \cdot 3$

duas vezes o produto de 2a por 3 → $\underbrace{2 \cdot 2a \cdot 3}$

$12a$ ← outro termo do trinômio dado

Uma forma fatorada é o quadrado da soma de **2a** com **3**.

$$\underbrace{4a^2 + 12a + 9}_{\text{trinômio}} = \underbrace{(2a + 3)^2}_{\text{forma fatorada}}$$

$\mathbf{4a^2 + 12a + 9}$ é um **trinômio quadrado perfeito** e $\mathbf{(2a + 3)^2}$ é uma **forma fatorada** dele.

Da mesma forma, verificamos que $\mathbf{a^2 - 10ab + 25b^2}$ é um trinômio quadrado perfeito e uma forma fatorada é o quadrado da diferença entre **a** e **5b**.

$$\underbrace{a^2 - 10ab + 25b^2}_{\text{trinômio}} = \underbrace{(a - 5b)^2}_{\text{forma fatorada}}$$

Outro exemplo:

Que monômios podem ser acrescentados ao binômio $9x^2 + 49$ para que ele seja um trinômio quadrado perfeito? Qual é esse trinômio?

$$\underset{3x \cdot 3x}{9x^2} \text{ e } \underset{7 \cdot 7}{49} \text{ são quadrados perfeitos.}$$

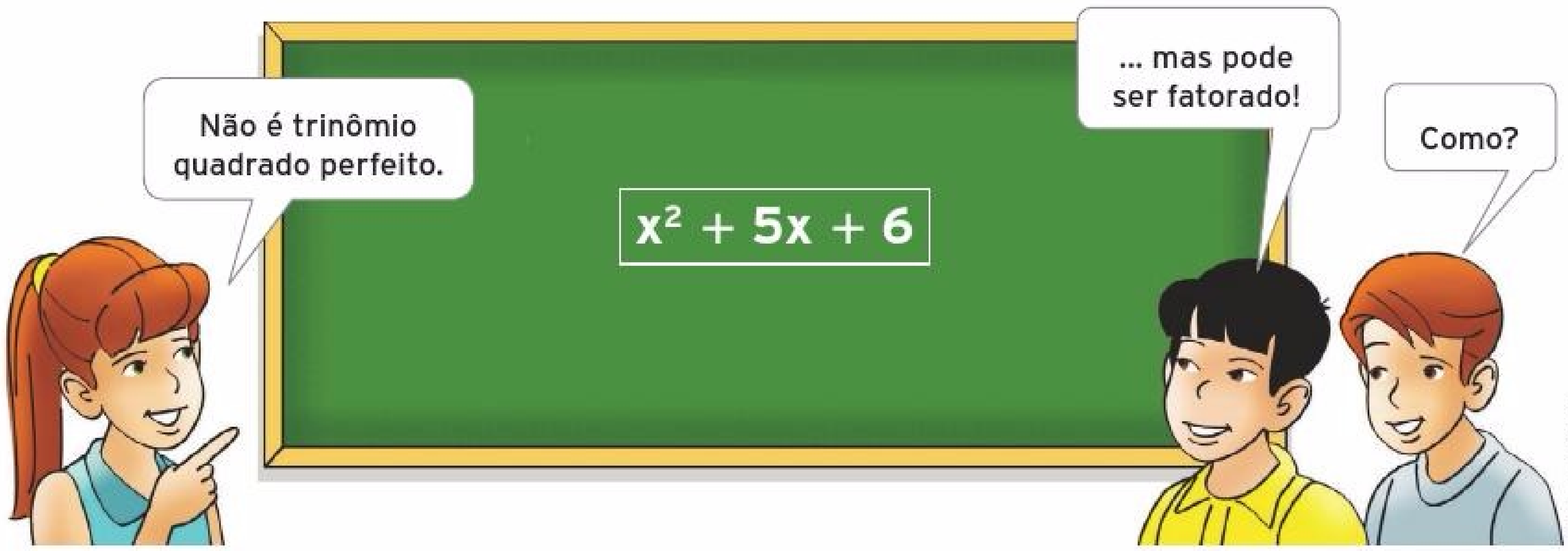
Para obtermos um trinômio quadrado perfeito, podemos acrescentar os monômios:

$$+2 \cdot 3x \cdot 7 = \mathbf{+42x} \text{ ou } -2 \cdot 3x \cdot 7 = \mathbf{-42x}$$

Os monômios que podemos acrescentar são $42x$ ou $-42x$, para obtermos os trinômios quadrados perfeitos $9x^2 + 42x + 49$ ou $9x^2 - 42x + 49$.

Trinômio de 2º grau

Observe o trinômio apresentado neste quadro:



HÉLIO SENATORE

O trinômio $x^2 + 5x + 6$ não é um trinômio quadrado perfeito, porque não tem dois termos que sejam quadrados perfeitos.

Observando os termos de $x^2 + 5x + 6$, percebemos que o coeficiente de x^2 é 1. Se existirem dois números cuja **soma** seja **5** e cujo **produto** seja **6**, então esse trinômio poderá ser fatorado em um produto do tipo **$(x + a) \cdot (x + b)$**.

$$\overbrace{x^2 + \underbrace{5x} + \underbrace{6}}^{\text{trinômio}} = \overbrace{(x + 3) \cdot (x + 2)}^{\text{forma fatorada}}$$

$$3 \cdot 2 = 6$$
$$3 + 2 = 5$$

$x^2 + 5x + 6$ é um **trinômio de 2º grau** e **$(x + 3) \cdot (x + 2)$** é sua **forma fatorada**.

Outro exemplo:

Qual é uma forma fatorada do trinômio ao lado? $x^2 - 7x + 12$

$x^2 - 7x + 12$ é um trinômio de 2º grau:

Forma fatorada —— $(x + a) \cdot (x + b)$

Soma: $a + b = -7$

Produto: $a \cdot b = 12$

Podemos encontrar os valores de **a** e de **b** elaborando uma tabela na qual listamos dois números cujo produto seja 12:

Esses números podem ser: 1 e 12, 2 e 6 ou 3 e 4. O produto é **+12**; logo, **a** e **b** têm sinais iguais.

a	-1	$+1$	-2	$+2$	-3
b	-12	$+12$	-6	$+6$	-4
a + b	-13	$+13$	-8	$+8$	-7

$a = -3$
$b = -4$
$a + b = -7$
$a \cdot b = 12$

Fatoramos o trinômio escrevendo: $\underbrace{x^2 - 7x + 12}_{\text{trinômio}} = \underbrace{(x - 3) \cdot (x - 4)}_{\text{forma fatorada}}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

49. Observe o trinômio dado.

$$36m^4n^2 + 12m^2n + 1$$

a) Que termos desse trinômio são quadrados perfeitos? $36m^4n^2$ e 1.

b) O polinômio $36m^4n^2 + 12m^2n + 1$ é um trinômio quadrado perfeito? Sim.

c) Escreva uma forma fatorada desse trinômio. $(6m^2n + 1)^2$

50. Escreva uma forma fatorada deste polinômio:

$$25m^6 + 10m^3 + 1 \quad (5m^3 + 1)^2$$

51. Considere o trinômio $x^2 + 13x + 42$.

a) Verifique se esse trinômio é quadrado perfeito. Este trinômio não é quadrado perfeito.

b) Existem dois números cujo produto é o termo independente de **x** e cuja soma é o coeficiente de **x**. Quais são esses números? 7 e 6.

c) Indique uma forma fatorada desse trinômio. $(x + 6) \cdot (x + 7)$

52. Determine os monômios que podemos acrescentar aos binômios para obtermos trinômios quadrados perfeitos.

a) $81x^2 + 16$ $72x$ ou $-72x$

b) $49y^4 + 1$ $14y^2$ ou $-14y^2$

c) $y^4 + \dfrac{2y^2}{3}$ $\dfrac{1}{9}$

d) $\dfrac{a^4}{16} + 4a^3$ $64a^2$

53. Copie e complete o quadro seguinte:

Trinômio	Forma fatorada
$x^2 + 11x + 24$	$(x + 3) \cdot (x + 8)$
$y^2 - 8y + 12$	$(y - 2) \cdot (y - 6)$
$a^2 - 3a - 10$	$(a - 5) \cdot (a + 2)$
$n^2 - n - 6$	$(n - 3) \cdot (n + 2)$
$t^2 + t - 30$	$(t + 6) \cdot (t - 5)$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

54. Qual é uma forma fatorada do polinômio $8m^2n - mn + 8m - 1$? $(8m - 1) \cdot (mn + 1)$.

55. Observe como Paula começou a fatoração do polinômio $21xy + 7y - 12x - 4$.

$21xy + 7y - 12x - 4 =$

$= 3 \cdot x \cdot \underbrace{7 \cdot y} + \underbrace{7 \cdot y} - 4 \cdot 3x - 4 =$

$= 7y \cdot (3x + 1) - 4 \cdot (3x + 1) = \ldots$ $(3x + 1)$ é o fator comum.

Complete essa resolução, escrevendo o polinômio na forma fatorada. $21xy + 7y - 12x - 4 = (3x + 1) \cdot (7y - 4)$

Agora, calcule o valor numérico do polinômio para $3x + 1 = -10$ e $7y - 4 = 8$. -80

56. Neste polinômio, **a** e **b** representam números reais: $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$.

Calcule o valor numérico desse polinômio, para $a - b = 10$ e $a^2 + b^2 = 292$. 2920

57. Qual é uma forma fatorada para o polinômio: $(a + b)^2 - 49$? $(a + b + 7) \cdot (a + b - 7)$.

58. O produto de dois ou mais fatores será igual a zero quando qualquer um de seus fatores for igual a zero.

$(x - 4) \cdot (x + 7) = 0$ para $x - 4 = 0$ ou $x + 7 = 0$.

$x - 4 = 0$ —— $x = 4$

$x + 7 = 0$ —— $x = -7$

Escrevemos duas equações para determinar o valor de x.

O produto é zero para $x = 4$ ou para $x = -7$.

Para que valores de x os produtos a seguir são iguais a zero?

a) $(x - 10) \cdot (x - 15)$ 10; 15

b) $(x + 1) \cdot \left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ -1; $-\dfrac{3}{2}$

c) $(x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7)$ -1; 3 e 7

59. Qual destes produtos é igual a zero para $x = 4$? b

a) $(4x - 1) \cdot (x + 4)$

b) $(2x - 8) \cdot (x - 1)$

60. Quais são os valores de x para os quais o valor numérico do trinômio $x^2 - 12x + 32$ é igual a zero? 4 e 8.

61. Escreva um polinômio de 2º grau, com uma variável, cujo valor numérico seja zero para o número 10. Resposta possível: $5x \cdot (x - 10) = 5x^2 - 50x$.

Leitura

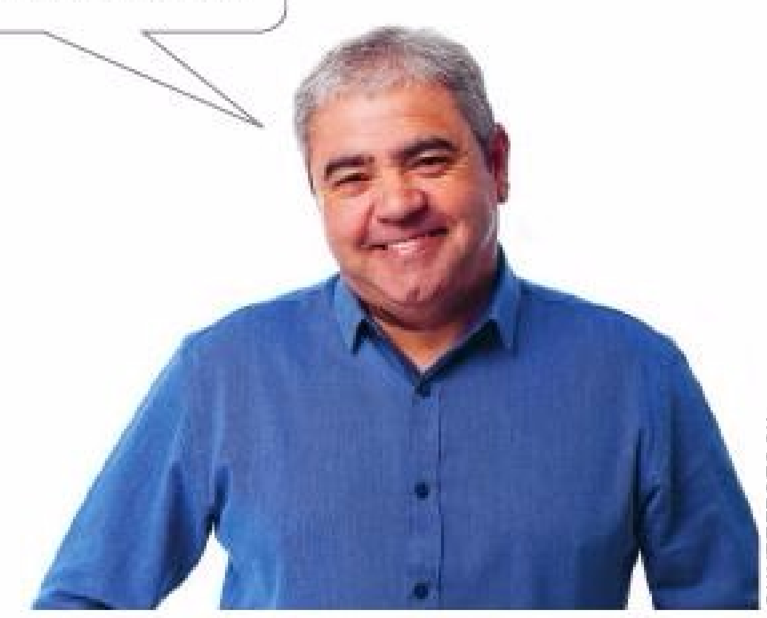
Generalização, produtos notáveis e fatoração

Proponha aos alunos que experimentem com outros números a generalização de um caso de fatoração dado nesta **Leitura**.

Posso usar esta igualdade para calcular a diferença entre quadrados de dois números...

SHUTTERSTOCK

Uma diferença entre os quadrados pode ser calculada de duas maneiras diferentes.



SHUTTERSTOCK

Afirmação

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

x e **y** representam números reais.

Atribuímos valores para **x** e para **y**, por exemplo, $x = 37$ e $y = 7$, e efetuamos os cálculos.

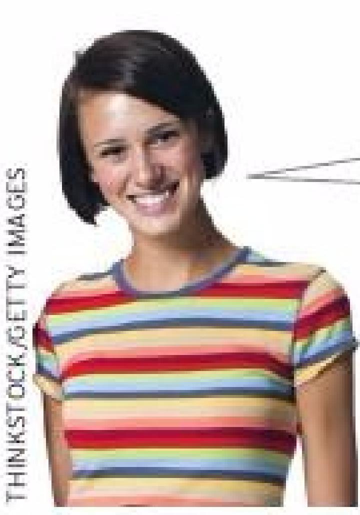
$37^2 = 1\,369$ $\qquad$ $(37 + 7) = 44$

$7^2 = 49$ $\qquad$ $(37 - 7) = 30$

$37^2 - 7^2 = 1\,369 - 49 = 1\,320$ $\qquad$ $(37 + 7) \cdot (37 - 7) = 44 \cdot 30 = 1\,320$

iguais

Logo, $37^2 - 7^2 = (37 + 7) \cdot (37 - 7) = 1\,320$.



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

E como escolher?

A escolha é sua e depende da situação de cálculo.

Que tal experimentar com outros números?

A igualdade $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$ é a generalização de uma propriedade que vale para quaisquer dois números reais **x** e **y**.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Considere os binômios:

$$M = 2m + 5 \text{ e } N = \frac{3}{2} - m.$$

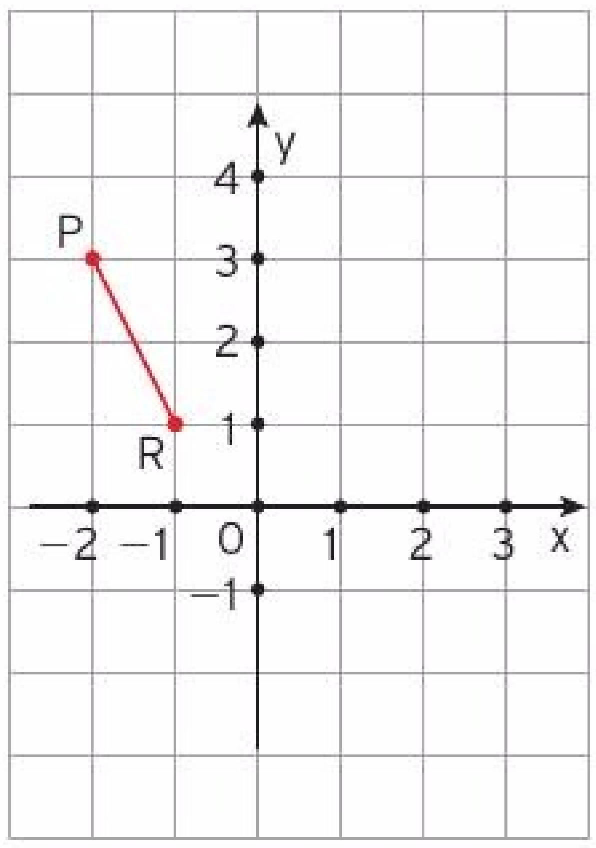
Que expressão algébrica corresponde a $M^2 - 8N$?

$4m^2 + 28m + 13$

2. Represente o polinômio $5m^5 + 10m^2 - m^3n - 2n$ em uma forma fatorada e calcule seu valor numérico para $5m^2 - n = -\frac{1}{3}$ e $m^3 + 2 = 6$.

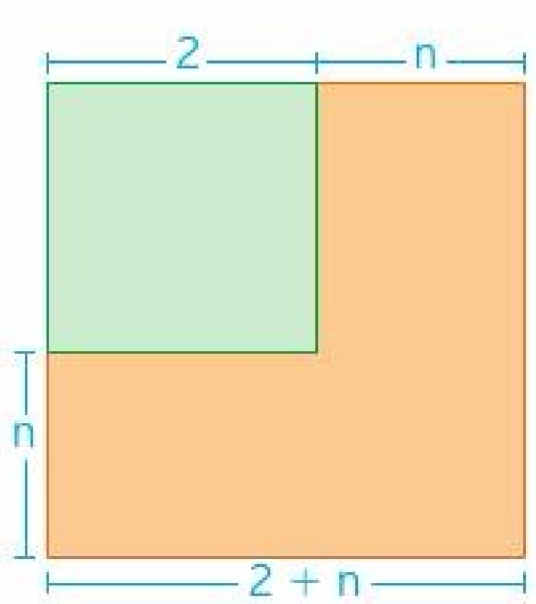
$(5m^2 - n) \cdot (m^3 + 2)$; -2

3. Em uma folha de papel quadriculado, faça um desenho como este:



Faça uma reflexão do segmento de reta $\overline{PR}$ em relação ao eixo **y**. Quais são as coordenadas das extremidades da imagem de $\overline{PR}$? (2, 3) e (1, 1).

4. Em uma fazenda, um pasto tem a forma de um quadrado. Os lados desse quadrado medem 2 km. O dono da fazenda vai aumentar o tamanho desse pasto, conservando a forma quadrada, como mostra a figura:



Medidas indicadas em quilômetros.

Qual será o aumento da área correspondente ao novo pasto? $n^2 + 4n$

5. Simplificando a expressão algébrica

$(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 2x^2y^2$, obtemos: a

a) $2y^4$

b) 0

c) $x^4 - y^4$

d) $2x^2y^2$

6. (Enem) Nos *X-Games Brasil,* em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a: d

a) uma volta completa.

b) uma volta e meia.

c) duas voltas completas.

d) duas voltas e meia.

e) cinco voltas completas.

7. (Saresp) Considere as expressões

$$A = +3x^4 - 2x^2 + 1$$

$$B = -3x^4 - 2x^2 - 1$$

É correto dizer que A + B equivale a: c

a) $-6x^4$

b) $+ 6x^4 + 2$

c) $-4x^2$

d) 0

8. A expressão algébrica que se adiciona ao binômio $a^2 + b^4$ para obter o quadrado de $a - b^2$ é: a

a) $-2ab^2$

b) $2a^2b$

c) $2ab^2$

d) $-2a^2b$

9. Qual é uma forma fatorada deste polinômio? c

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2$$

a) $(a + b + c)(a - b - c)$

b) $(a - b + c)(a + b + c)$

c) $(a - b + c)(a - b - c)$

d) $(a - b - c)^2$

UNIDADE 8 Retas coplanares e ângulos

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Retas paralelas são coplanares e estão presentes em quase todas as edificações feitas pelo ser humano, daí a importância de conhecer propriedades relacionadas a elas. Esse é o assunto que será explorado nesta unidade.

Nesta unidade...

1. Retas coplanares
2. Relações entre ângulos
3. Retas paralelas e ângulos de um triângulo

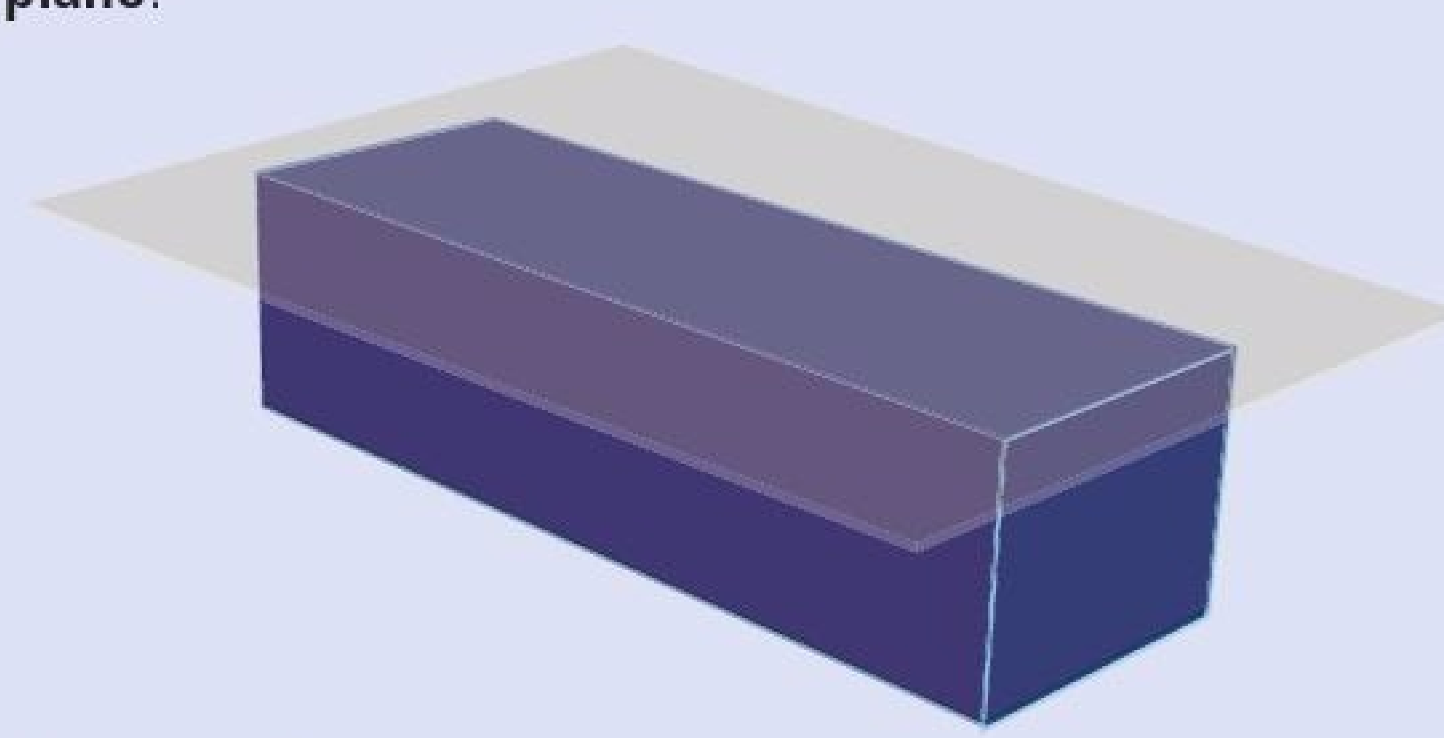
A sinalização feita sobre o asfalto em um trecho de rodovia em linha reta lembra retas paralelas.

Atualmente, embalagens são produzidas nas mais variadas formas geométricas, como estas que lembram poliedros.

FABIO R. MARTINS

Observe uma das embalagens que tem a forma de um paralelepípedo.

Imagine uma face dessa embalagem se estendendo em todas as direções e sem espessura. Isso nos dá a ideia de **plano**.



O que você já sabe?

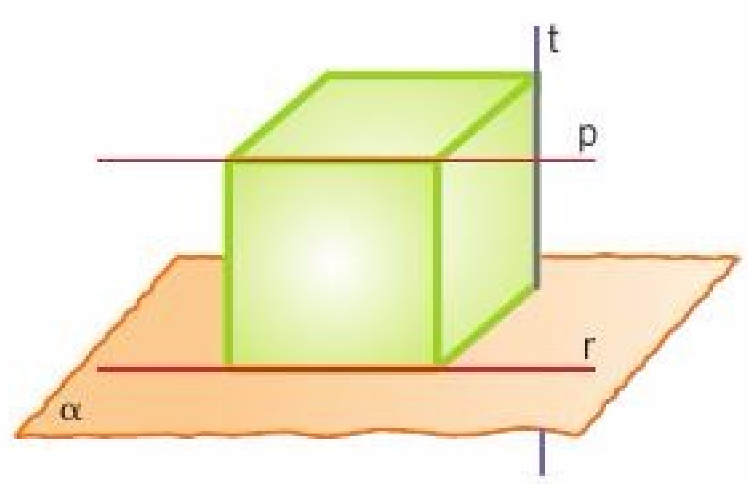
- Em que situação a ideia de plano está presente em seu dia a dia? Respostas possíveis: Quando se produz um desenho em uma folha de papel, no tampo de uma carteira onde se apoiam objetos, entre outros.
- Imagine uma aresta de um cubo estendendo-se nas duas direções. Isso nos dá ideia de qual figura geométrica? Reta.

1 Retas coplanares

O que são retas coplanares?

Duas retas podem pertencer, ou não, a um mesmo plano. Quando pertencem a um mesmo plano, dizemos que elas são **coplanares**.

Por exemplo, na figura abaixo, foram destacadas as retas **t**, **p** e **r**. As retas **p** e **r** pertencem ao plano suporte de uma das faces do cubo: elas são retas **coplanares**. Planos são nomeados com letras gregas.



α é uma letra grega
Lê-se *alfa*.

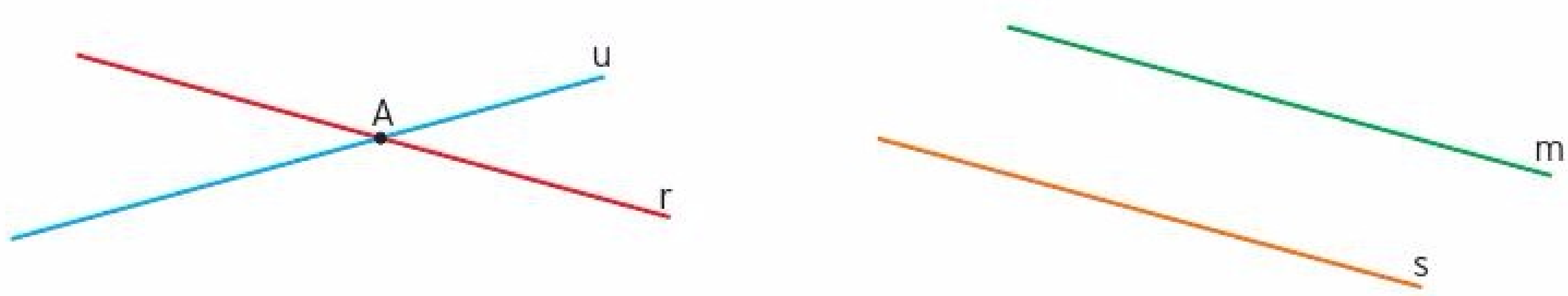
Posições relativas de duas retas coplanares

Neste momento, não há necessidade de enfatizar a nomenclatura, mas insista na percepção da congruência entre alguns pares de ângulos que se formam em situações como as descritas no texto.

Para refletir e responder

Nas figuras a seguir, as retas **r** e **u** são coplanares e têm um único ponto em comum.

As retas **m** e **s** também são coplanares, mas não têm pontos comuns entre si.



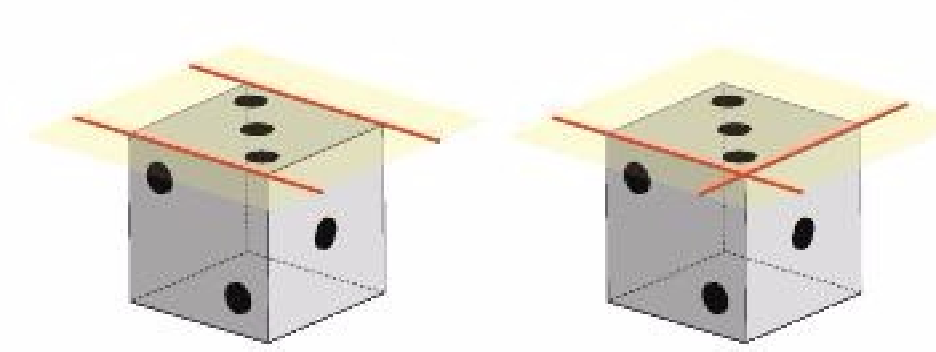
- Como são denominadas as retas coplanares que têm um único ponto em comum? E as retas coplanares que não têm pontos em comum? Em sua opinião, duas retas concorrentes são sempre coplanares? Retas concorrentes. Retas paralelas. Sim.

Já parou para pensar em quanta "geometria" existe em alguns brinquedos?

Nas pipas, por exemplo, há varetas que se cruzam e outras que não se cruzam.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Duas arestas de uma face de um dado podem seguir o mesmo "rumo" ou seguir "rumos" diferentes.



Na situação das retas coplanares apresentadas anteriormente:

r e **u** têm **um só ponto em comum**: o ponto **A**. **r** e **u** são **retas concorrentes**.

m e **s** não têm pontos comuns. **m** e **s** são **retas paralelas**. Indica-se: m//s.

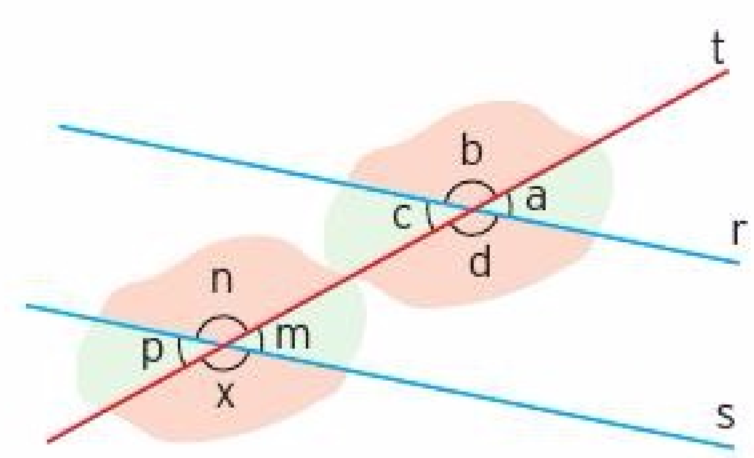
Em algumas situações, duas retas coplanares também poderão ser **coincidentes**. Nesse caso, elas terão **todos os pontos em comum**.

Duas retas coplanares podem ser **paralelas**, **concorrentes** ou **coincidentes**.

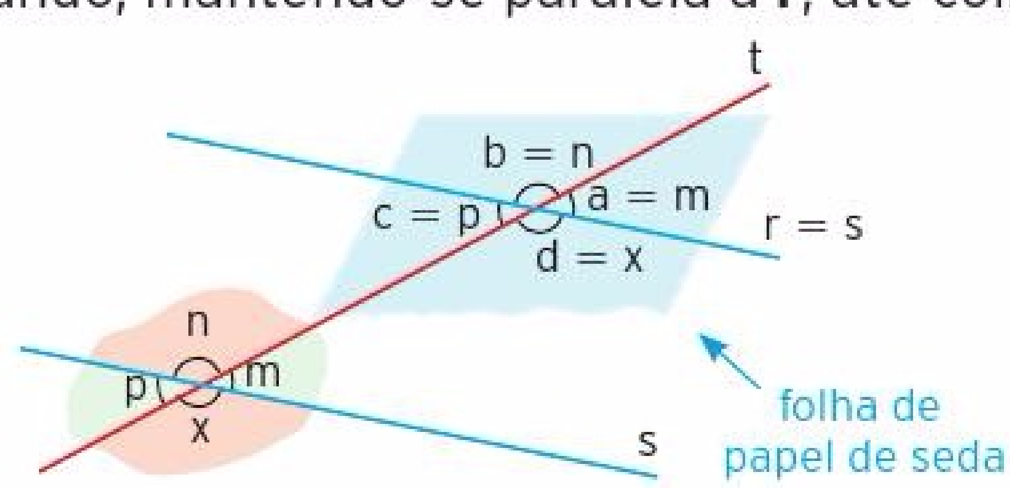
Duas retas concorrentes, assim como duas retas paralelas, são sempre coplanares.

Retas paralelas interceptadas por uma transversal

Na figura apresentada a seguir, foram desenhadas **duas retas paralelas** e **uma transversal** em relação a elas. Desse modo, formaram-se oito ângulos. Esses ângulos estão relacionados entre si. Leia o que diz a jovem.



Copiar os ângulos $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{p}$ e $\hat{x}$ e sobrepô-los aos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$, respectivamente, é como aplicar uma translação sobre $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{p}$ e $\hat{x}$ até que eles se sobreponham a $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$, ou seja, a reta **s** vai se deslocando, mantendo-se paralela a **r**, até coincidir com **r**.



Fazendo esse movimento, podemos observar que $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{p}$ e $\hat{x}$ e $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ têm, respectivamente, medidas iguais.

Então, podemos afirmar que se duas retas, **r** e **s**, paralelas entre si, são interceptadas por uma transversal **t**:

- todos os **ângulos agudos** são **congruentes** entre si;
- todos os **ângulos obtusos** são **congruentes** entre si;
- todos os pares de ângulos em que um é **agudo** e o outro é **obtuso** são **ângulos suplementares**.

$\hat{a} \equiv \hat{c}$ $\quad$ $\hat{c} \equiv \hat{m}$
$\hat{a} \equiv \hat{m}$ $\quad$ $\hat{c} \equiv \hat{p}$
$\hat{a} \equiv \hat{p}$ $\quad$ $\hat{m} \equiv \hat{p}$

$\hat{b} \equiv \hat{d}$ $\quad$ $\hat{b} \equiv \hat{n}$ $\quad$ $\hat{d} \equiv \hat{n}$
$\hat{b} \equiv \hat{x}$ $\quad$ $\hat{d} \equiv \hat{x}$ $\quad$ $\hat{n} \equiv \hat{x}$

$a + d = 180°$ $\quad$ $b + p = 180°$
$a + x = 180°$ $\quad$ $c + n = 180°$
$m + d = 180°$ $\quad$ $p + n = 180°$

Note que passamos a indicar:

med $\hat{a}$ = a $\qquad$ med $\hat{m}$ = m $\qquad$ med $\hat{d}$ = d $\qquad$ med $\hat{n}$ = n.

Vamos mostrar, por exemplo, que:

"$\hat{d}$ e $\hat{x}$ são ângulos congruentes e $\hat{a}$ e $\hat{x}$ são ângulos suplementares".

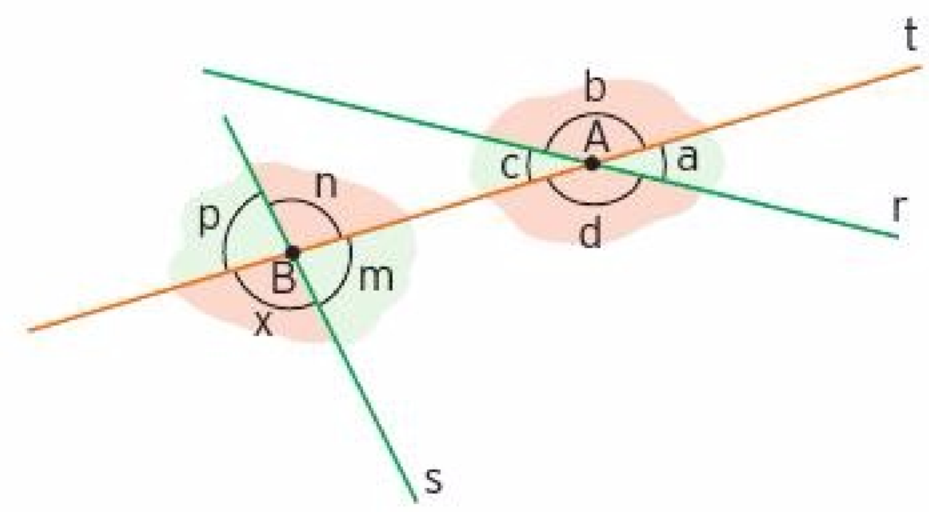
$a + d = 180°$
$m + x = 180°$ $\Rightarrow$ $a + d = m + x$ —— Como $\hat{a} \equiv \hat{m}$, temos $d = x$, ou seja, $\hat{d} \equiv \hat{x}$.

$a + d = 180°$
$d = x$ $\Rightarrow$ $a + x = 180°$ —— $180°$, ou seja, $\hat{a}$ e $\hat{x}$ são suplementares.

Retas não paralelas e uma reta transversal

Vamos explorar esse assunto examinando uma situação na qual duas retas, **r** e **s**, não são paralelas e são interceptadas por uma reta transversal **t**.

SHUTTERSTOCK



Vamos comparar pares de ângulos, um com vértice em **A** e outro em **B**.

Dois agudos	Dois obtusos	Um agudo e outro obtuso
$a = 30°$ $m = 80°$	$b = 150°$ $x = 100°$	$c = 30°$ $n = 100°$
As medidas não são iguais.	As medidas não são iguais.	As medidas não somam 180°.

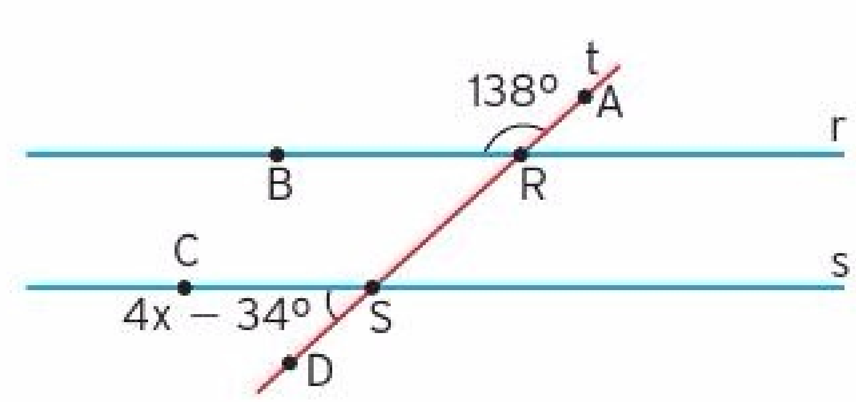
Temos:

r e **s** são retas **não paralelas**.
A reta **t** é a reta transversal a **r** e a **s**.

- Dois ângulos agudos não são congruentes.
- Dois ângulos obtusos não são congruentes.
- Um ângulo agudo e outro obtuso não são suplementares.

Muitos problemas que envolvem retas paralelas são resolvidos aplicando as propriedades exploradas e o cálculo algébrico. Veja um exemplo:

Nesta figura, **r** e **s** são retas paralelas e **x** é uma medida em graus. Vamos calcular o valor de **x** observando os ângulos formados pelas retas **r**, **s** e **t**.



- **r//s**; **t** é transversal a **r** e **s**.
- $B\hat{R}A$ é um ângulo obtuso.
- $C\hat{S}D$ é um ângulo agudo.

Logo: med $B\hat{R}A$ + med $C\hat{S}D = 180°$

$$138° + 4x - 34° = 180°$$

$$4x = 76° \text{ ——— } \mathbf{x = 19°}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Analise cada uma das afirmações e indique as que estão corretas. Reescreva as afirmações incorretas, de modo que fiquem corretas. Correta: c.

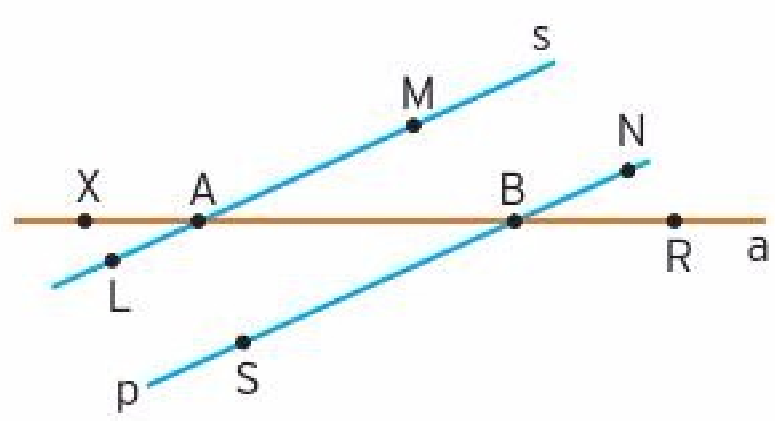
a) Duas retas coplanares **m** e **r** são concorrentes se possuem todos os pontos em comum. Duas retas coplanares **m** e **r** são concorrentes se possuem apenas um ponto em comum.

b) Se as retas **a** e **b** não têm ponto em comum, elas são concorrentes. Resposta possível: Retas concorrentes têm um único ponto em comum.

c) Se **m** e **t** são retas coplanares e não têm ponto em comum, elas são paralelas.

d) Duas retas **c** e **d** são coincidentes se possuem um só ponto em comum. Duas retas **c** e **d** são coincidentes se possuem todos os pontos em comum.

2. Nesta figura, s//p e **a** é uma reta transversal a elas. Identifique um par de ângulos, um com vértice em **A**, outro em **B**, e que sejam:



a) congruentes; Resposta possível: $M\hat{A}R$ e $N\hat{B}R$.

b) suplementares. Resposta possível: $L\hat{A}B$ e $A\hat{B}S$.

3. Observando novamente a figura da atividade anterior, responda às questões:

s // p, **a** é transversal.

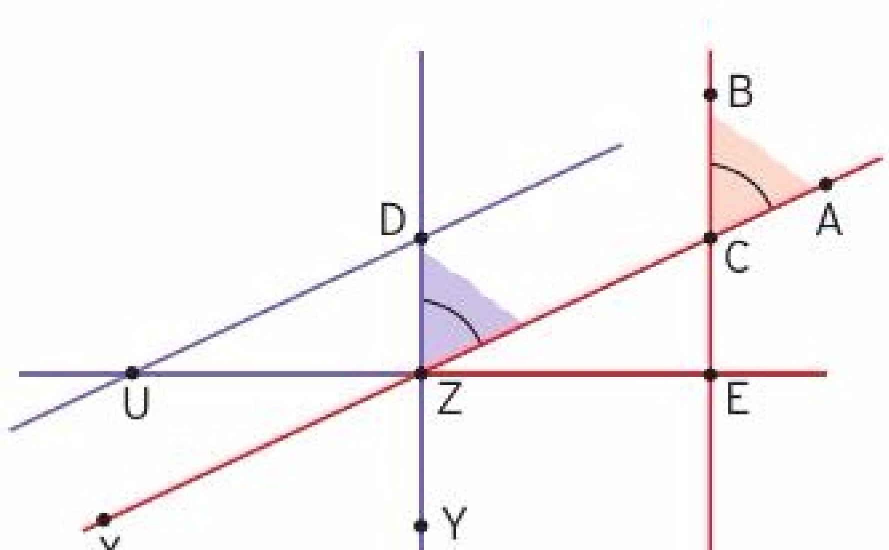
a) Resposta possível: Porque **s // p**, **a** é transversal e $M\hat{A}X$ e $B\hat{A}L$ são dois ângulos obtusos.

a) Por que med $M\hat{A}X$ = med $B\hat{A}L$?

b) Por que med $M\hat{A}X$ = med $R\hat{B}S$? Porque **s // p**, **a** é transversal e $M\hat{A}X$ e $R\hat{B}S$ são ângulos obtusos.

c) O que podemos dizer sobre med $M\hat{A}X$ e med $N\hat{B}R$? Resposta possível: med $M\hat{A}X$ + med $N\hat{B}R$ = 180°.

4. Na figura a seguir, foi desenhado o triângulo DUZ e, em seguida, foi feita uma translação de DUZ para obter o triângulo CZE.



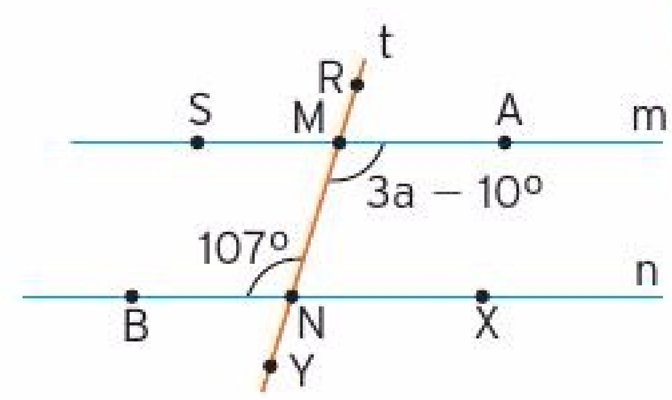
a) Em que direção e sentido foi feita a translação do triângulo DUZ? Na direção da reta $\overleftrightarrow{UZ}$ e de **U** para **Z**.

b) Identifique duas retas paralelas nessa figura. Resposta possível: $\overleftrightarrow{DZ}$ e $\overleftrightarrow{CE}$.

c) Identifique três pares de ângulos congruentes. Resposta possível: $D\hat{Z}C \equiv B\hat{C}A$; $X\hat{Z}D \equiv Z\hat{C}B$; $U\hat{D}Z \equiv Z\hat{C}E$.

d) O que podemos dizer sobre os ângulos $D\hat{Z}C$ e $Z\hat{C}B$? Explique por quê. Resposta possível: $D\hat{Z}C$ e $Z\hat{C}B$ são ângulos suplementares porque $\overleftrightarrow{DZ}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são retas paralelas, $\overleftrightarrow{AZ}$ é uma reta transversal a elas e um dos ângulos é agudo e o outro é obtuso.

5. Nesta figura, as retas **m** e **n** são paralelas e **t** é uma transversal a **m** e a **n**.



a) $A\hat{M}N$ e $M\hat{N}B$ são congruentes ou suplementares? Congruentes.

b) Qual é a medida de $A\hat{M}N$? 107°

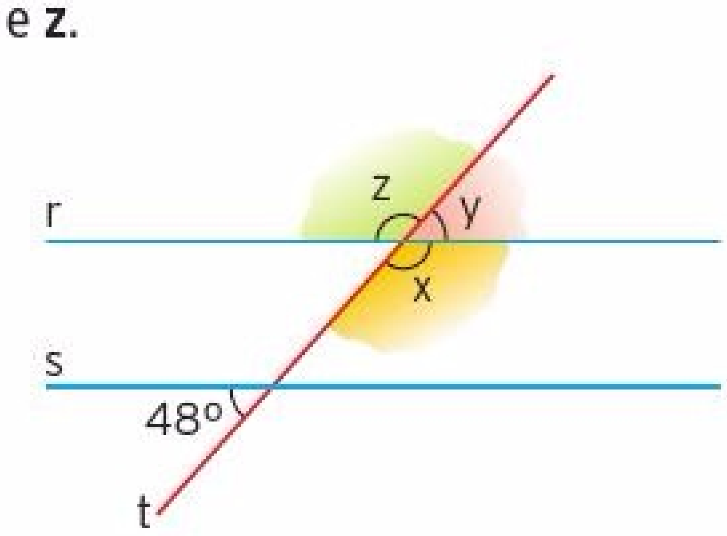
c) Qual é o valor de **a**? 39°

d) Qual é a medida de $S\hat{M}N$? Justifique sua resposta. Resposta possível: 73°; porque é o suplemento de 107°.

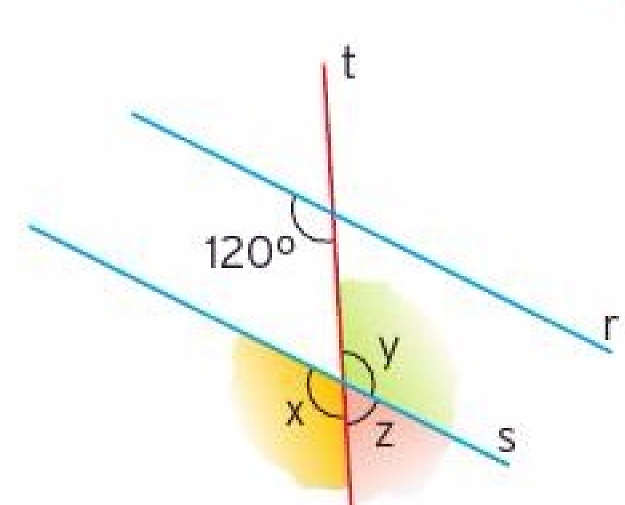
e) Identifique outro ângulo que tenha vértice em **N** e a mesma medida que $A\hat{M}N$. Resposta possível: $X\hat{N}Y$

6. Nesta figura r // s. Determine os valores de **x**, **y** e **z**.

x = 132°
y = 48°
z = 132°



7. As retas **r** e **s** são paralelas e **t**, uma reta transversal a elas. Calcule x + y + z. 300°

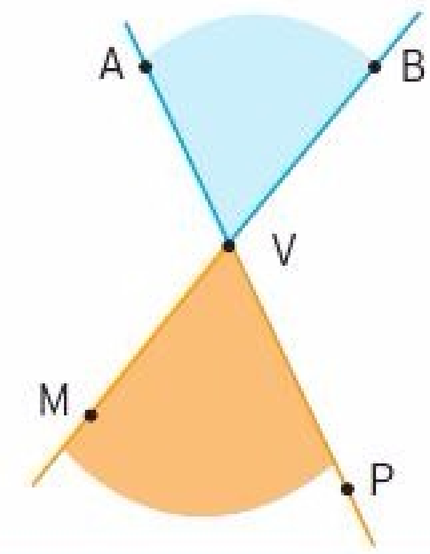


2 Relações entre ângulos

Ângulos opostos pelo vértice

Para refletir e responder

Na figura ao lado as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BM}$ são concorrentes e formam quatro ângulos.



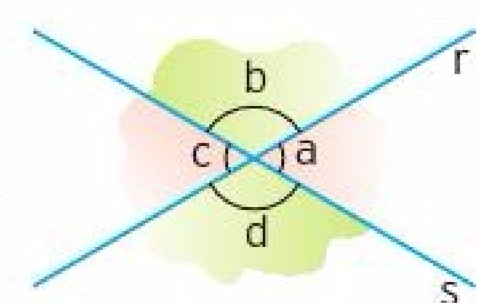
- Nomeie um par de ângulos em que os lados de um deles sejam prolongamentos dos lados do outro.

Resposta possível: $A\hat{V}M$ e $B\hat{V}P$.

Ângulos que têm vértice comum como $A\hat{V}B$ e $P\hat{V}M$ posicionados como esses, na figura acima, são chamados de ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos são **opostos pelo vértice (o.p.v.)** quando os lados de um são as semirretas opostas dos lados do outro.

Dois ângulos o.p.v. apresentam um padrão. Vamos identificar que padrão pode ser esse.



Vamos mostrar que $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos suplementares —— $a + b = 180°$

$\hat{b}$ e $\hat{c}$ são ângulos suplementares —— $b + c = 180°$

med $\hat{a} = a$
med $\hat{b} = b$
med $\hat{c} = c$

$a + b = 180°$ —— $b = 180° - a$

$b + c = 180°$ —— $b = 180° - c$

$$180° - a = 180° - c$$

$$-a = -c$$

$$a = c \text{ —— } \hat{a} \equiv \hat{c}$$

Generalizando:

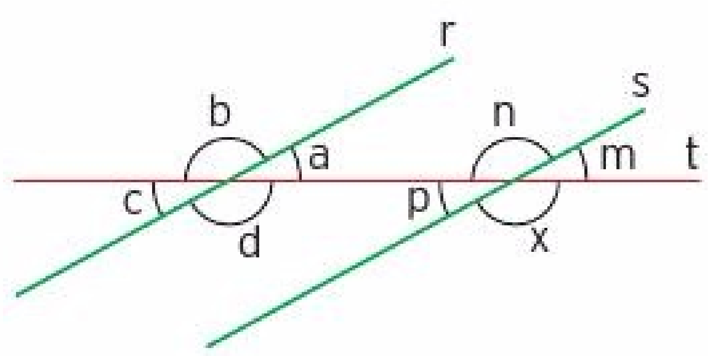
Dois ângulos o.p.v. são congruentes.

Note também que dois ângulos o.p.v. são coplanares.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

8. Observe esta figura:

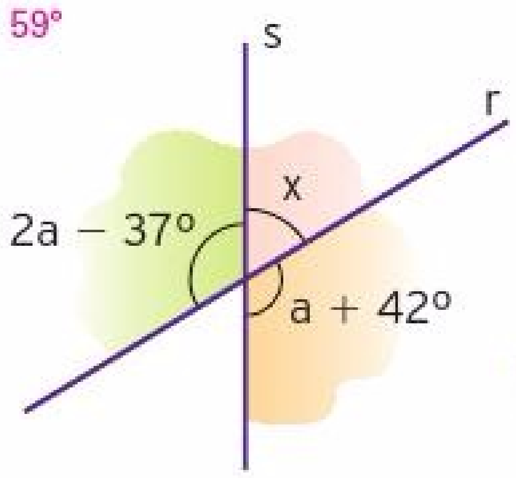


a) Identifique três pares de ângulos opostos pelo vértice. Resposta possível: $\hat{b}$ e $\hat{d}$; $\hat{a}$ e $\hat{c}$; $\hat{m}$ e $\hat{p}$.

b) Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são congruentes? Explique por quê. Sim, são ângulos o.p.v.

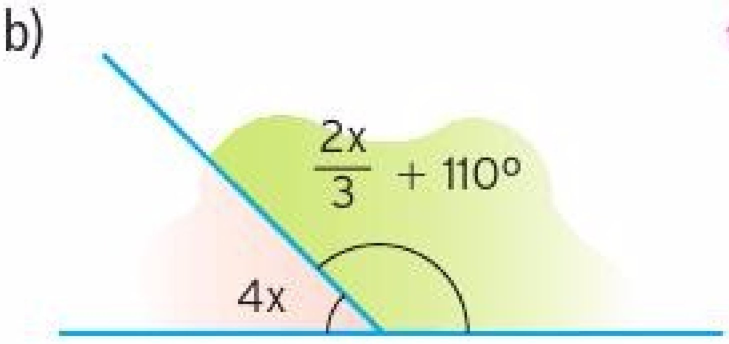
9. Nas figuras a seguir, **x** representa uma medida em graus. Determine o valor de **x** em cada situação.

a) 59°

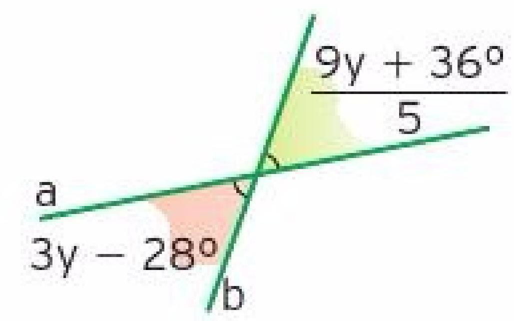


a é uma medida em graus.

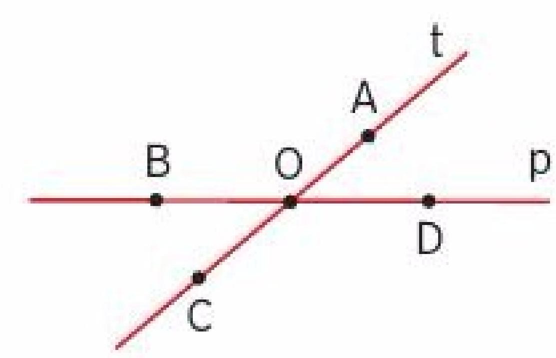
b) 15°



10. Nesta figura, **y** representa uma medida em graus. Qual é o valor de **y**? 29° 20′



11. Nesta figura, a medida de AÔB supera em 18° o triplo da medida de BÔC. Qual é a medida de CÔD? 139° 30′

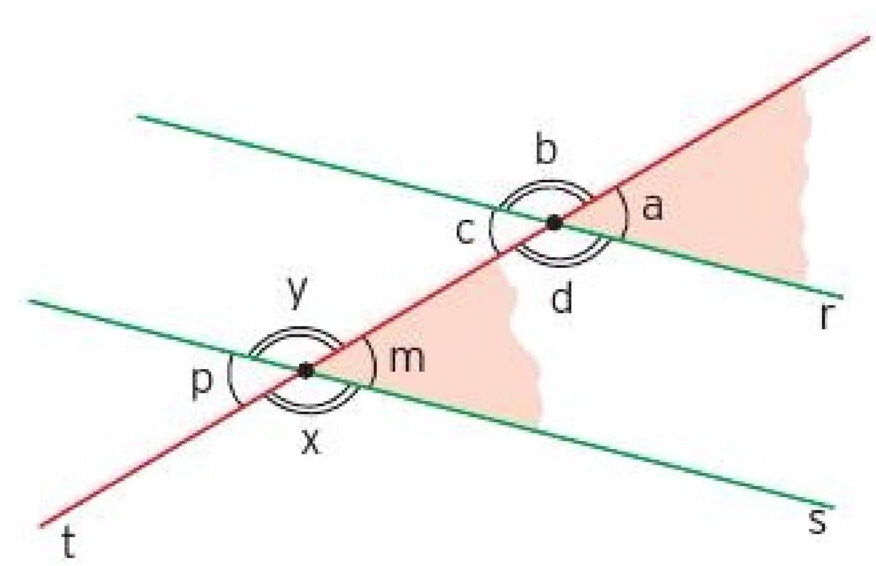


Ângulos correspondentes

Nesta figura, as retas **r** e **s** são paralelas e **t** é uma reta transversal a elas.

Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{m}$ estão no mesmo lado do plano em relação a **t**, $\hat{m}$ está "entre" as paralelas e $\hat{a}$, fora delas. Além disso, $\hat{a}$ tem vértice na reta **r** e $\hat{m}$, na reta **s**.

Dizemos que $\hat{a}$ e $\hat{m}$ são ângulos correspondentes.



Na figura apresentada existem outros pares de ângulos correspondentes: $\hat{b}$ e $\hat{y}$, $\hat{c}$ e $\hat{p}$ e $\hat{d}$ e $\hat{x}$. Em qualquer desses pares os dois ângulos são agudos ou são ambos obtusos. Portanto:

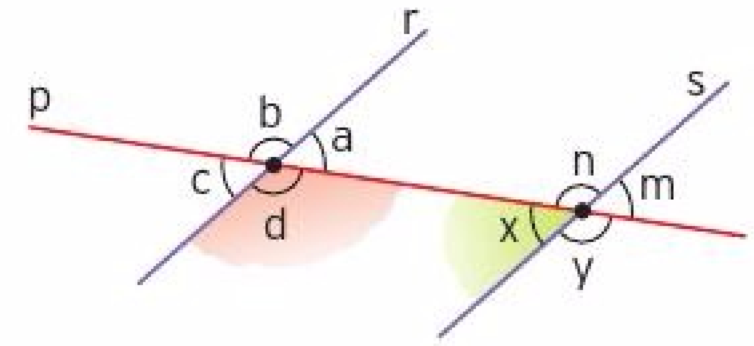
Não há necessidade de aprofundar o estudo da nomenclatura dos pares de ângulos em uma situação em que há retas paralelas interceptadas por uma reta transversal.

$a = m$ —— $\hat{a} \equiv \hat{m}$ $\quad$ $c = p$ —— $\hat{c} \equiv \hat{p}$

$b = y$ —— $\hat{b} \equiv \hat{y}$ $\quad$ $d = x$ —— $\hat{d} \equiv \hat{x}$

Duas retas paralelas formam, com uma reta transversal a elas, **ângulos correspondentes congruentes**.

Ângulos colaterais



Nesta figura, as retas **r** e **s** são paralelas e **p** é uma reta transversal a elas. Os ângulos $\hat{d}$, com vértice na reta **r**, e $\hat{x}$, com vértice na reta **s**, estão do mesmo lado do plano em relação à reta **p**, "entre" **r** e **s**.

$\hat{d}$ e $\hat{x}$ são ângulos colaterais internos.

Nesta situação, assim como $\hat{d}$ e $\hat{x}$, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{n}$ são **ângulos colaterais internos**. Como um deles é agudo e o outro é obtuso, eles são ângulos suplementares.

Ainda com relação à figura acima, $\hat{c}$ e $\hat{y}$ formam um par de **ângulos colaterais externos**, assim como $\hat{b}$ e $\hat{m}$. Como um deles é agudo e o outro é obtuso, eles são ângulos suplementares.

$d + x = 180°$

$a + n = 180°$

$c + y = 180°$

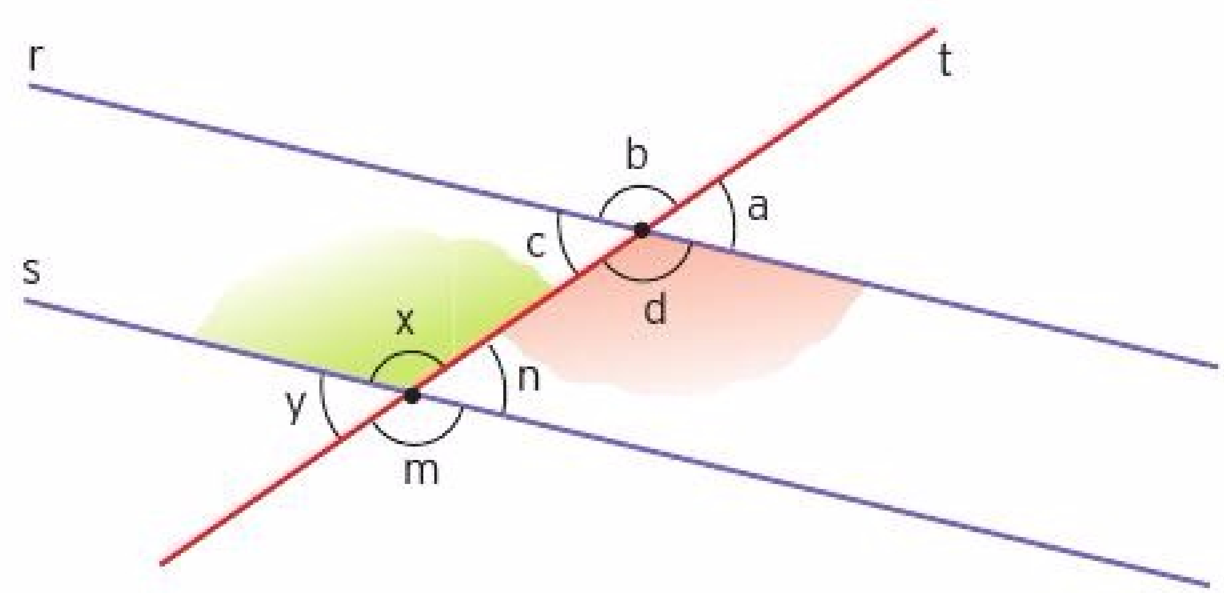
$b + m = 180°$

Duas retas paralelas formam com uma reta transversal a elas **ângulos colaterais internos** e **ângulos colaterais externos suplementares**.

Ângulos alternos

Nesta figura, as retas **r** e **s** são paralelas e **t** é uma reta transversal a elas.

Os ângulos $\hat{d}$, com vértice em **r**, e $\hat{x}$, com vértice em **s**, estão em lados opostos do plano em relação à reta **t**, "entre" **r** e **s**: $\hat{d}$ e $\hat{x}$ são ângulos **alternos internos**. Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{n}$ também formam um par de ângulos alternos internos.



Em cada um desses pares, ambos os ângulos ou são obtusos, ou são agudos. Portanto, $\hat{d}$ e $\hat{x}$ são congruentes, assim como $\hat{c}$ e $\hat{n}$.

Ainda com relação à figura anterior, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{y}$ e $\hat{b}$ e $\widehat{m}$ formam pares de **ângulos alternos externos**. Em cada um desses pares, ambos os ângulos ou são obtusos, ou são agudos. Portanto, $\hat{a}$ e $\hat{y}$ são congruentes, assim como $\hat{b}$ e $\widehat{m}$.

$d = x$ — $\hat{d} \equiv \hat{x}$

$c = n$ — $\hat{c} \equiv \hat{n}$

$a = y$ — $\hat{a} \equiv \hat{y}$

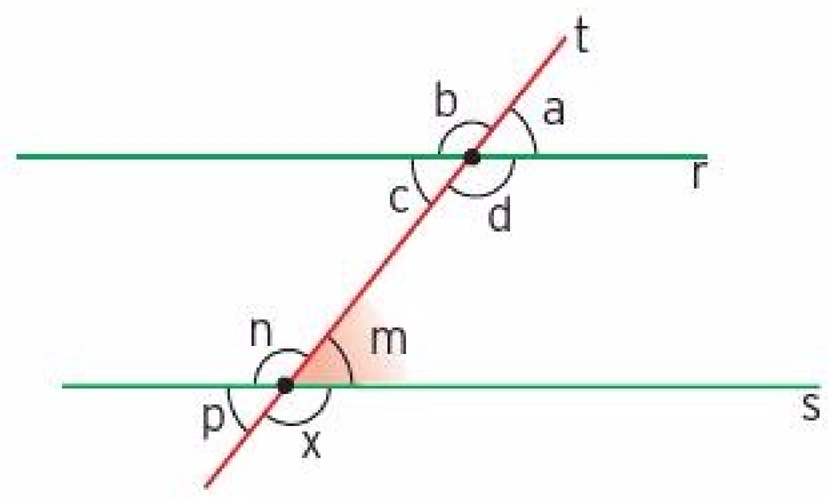
$b = m$ — $\hat{b} \equiv \widehat{m}$

Duas retas paralelas formam com uma reta transversal a elas **ângulos alternos internos** e **ângulos alternos externos congruentes**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

12. Nesta figura, temos r // s e $m = 52°$.



a) Identifique um par de ângulos alternos internos e um par de ângulos colaterais externos. Resposta possível: $\hat{c}$ e $\hat{m}$; $\hat{b}$ e $\hat{p}$.

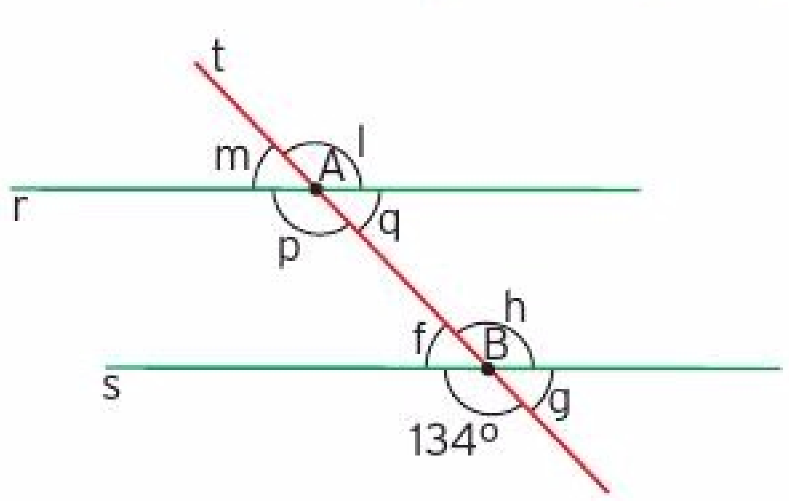
b) Em relação às retas paralelas **r** e **s** e à transversal **t**, que nome damos ao par de ângulos $\hat{d}$ e $\hat{m}$? $\hat{d}$ e $\hat{m}$ são ângulos colaterais internos.

c) Que tipos de ângulo formam $\hat{m}$ e $\hat{p}$? Ângulos o.p.v.

d) Quanto mede $\hat{p}$? E $\hat{x}$? $p = 52°$; $x = 128°$

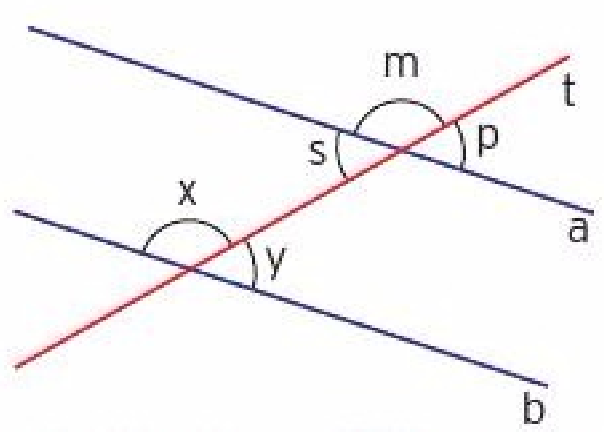
e) Ainda nessa figura, $\hat{m}$ e $\hat{x}$ têm em comum apenas um dos lados: eles são ângulos adjacentes. Identifique outro par de ângulos adjacentes. Resposta possível: $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

13. Nesta figura, quais são as medidas dos ângulos que têm vértice **A**? E daqueles que têm vértice **B**?
$l = p = h = 134°$; $m = q = f = g = 46°$



r // s

14. Nesta figura, qual é o nome dos pares de ângulos das alternativas?



a // b

a) $\hat{m}$ e $\hat{x}$. a) Correspondentes.

b) $\hat{s}$ e $\hat{x}$. b) Colaterais internos.

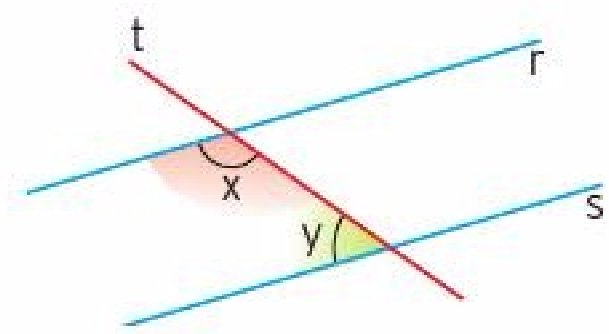
c) $\hat{p}$ e $\hat{y}$. c) Correspondentes.

d) $\hat{s}$ e $\hat{y}$. d) Alternos internos.

e) $\hat{x}$ e $\hat{y}$. e) Adjacentes.

f) $\hat{p}$ e $\hat{s}$. f) o.p.v.

15. Nesta figura, r // s, **x** e **y** são as medidas de dois ângulos colaterais internos.



a) Que relação existe entre **x** e **y**? $x + y = 180°$

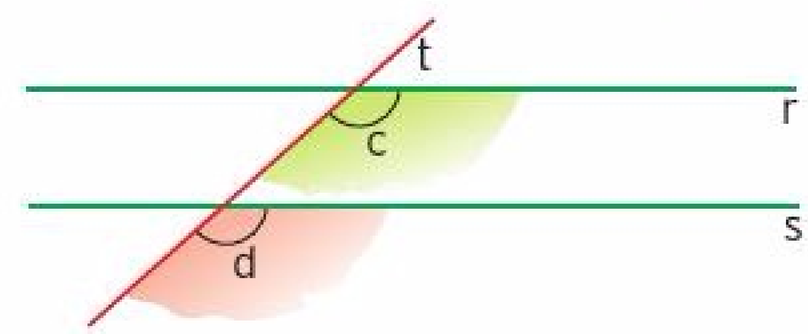
b) Qual o valor de **y**, se $x = 143°$? 37°

c) Se $x = y$, qual será a posição de **t** em relação a **r**? E em relação a **s**? Perpendicular a **r** e a **s**.

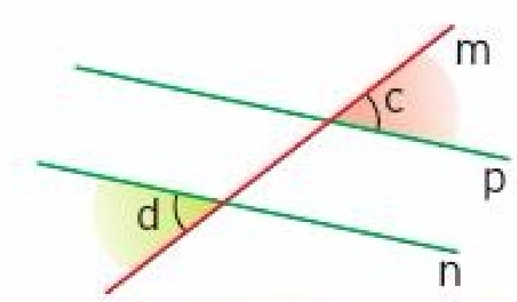
16. Nesta figura, **c** e **d** representam medidas dos ângulos destacados. Justifique e determine o valor de **y** e o valor de **c**.

$c = 3y - 48°$
$d = 138°$

Os ângulos **c** e **d** são correspondentes.
$c = d = 138°$
$c = 138°$ —— $3y - 48° = 138°$ —— $y = 62°$



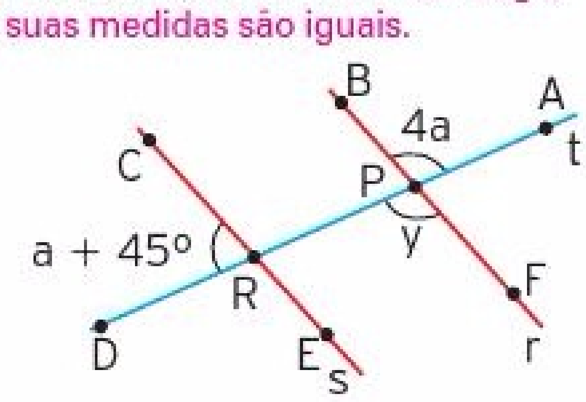
17. Nesta figura p // n, **m** é uma reta transversal a elas e **c** e **d** representam medidas dos ângulos destacados.



$c = 2y + 35°$
$d = 4y - 57°$

Podemos equacionar os dados do problema escrevendo a equação $2y + 35° = 4y - 57°$. Justifique essa afirmação e determine o valor de **y** e o valor de **c**. Resposta possível: **p // n**, **m** é uma reta transversal a elas e os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são alternos externos. Logo, suas medidas são iguais.

18. Nesta figura, **r** e **s** são retas paralelas e **t** é uma reta transversal a elas. As letras **a** e **y** representam medidas em graus.



a) $A\hat{P}B$ e $C\hat{R}D$ são ângulos congruentes ou suplementares? Suplementares.

b) Qual é o valor de **a**? 27°

c) Qual é a medida de $C\hat{R}D$? E de $A\hat{P}B$? 72°; 108°

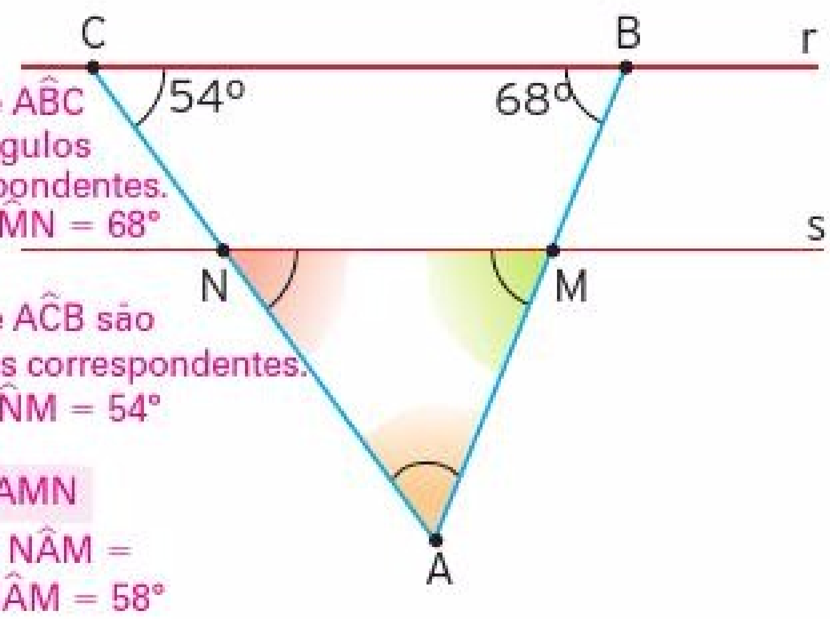
d) Qual é o valor de **y**? Justifique sua resposta. Resposta possível: 108°; $\hat{y}$ é o.p.v. de $A\hat{P}B$.

FAÇA NO CADERNO

19. Na figura abaixo, **r** e **s** são retas paralelas. Quais são as medidas dos ângulos do triângulo AMN? Justifique seus cálculos.

r // s
$\overleftrightarrow{AM}$ transversal] $A\hat{M}N$ e $A\hat{B}C$ são ângulos correspondentes. med $A\hat{M}N$ = 68°

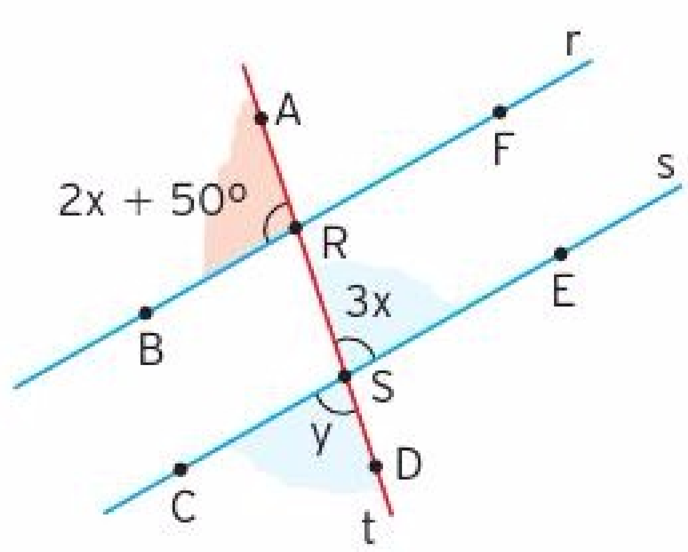
r // s
$\overleftrightarrow{AC}$ transversal] $A\hat{N}M$ e $A\hat{C}B$ são ângulos correspondentes. med $A\hat{N}M$ = 54°



No triângulo AMN

68° + 54° + med $N\hat{A}M$ = = 180° —— med $N\hat{A}M$ = 58°

20. Na figura abaixo, **r** e **s** são retas paralelas e **t** é uma reta transversal em relação a elas. As letras **x** e **y** representam medidas em graus.



a) Qual é o nome do par de ângulos $F\hat{R}S$ e $A\hat{S}E$ em relação às retas **r**, **s** e **t**? Ângulos colaterais internos.

b) O que podemos afirmar sobre as medidas de $F\hat{R}S$ e $A\hat{S}E$? med $F\hat{R}S$ + med $A\hat{S}E$ = 180°

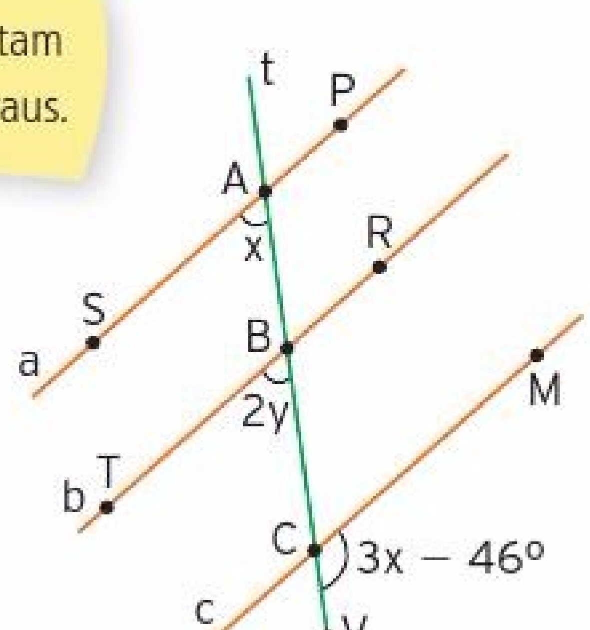
c) Qual é o nome do par de ângulos $A\hat{S}E$ e $C\hat{S}D$? O que podemos afirmar sobre 3x e **y**? c) Ângulos opostos pelo vértice; 3x = y

d) Qual é o valor de 3x? E de **y**? 78°; 78°

e) Qual é a medida de $A\hat{R}B$? 102°

21. Na figura abaixo, **a**, **b** e **c** são retas paralelas entre si e **t** é uma reta transversal a elas.

x e **y** representam medidas em graus.



a) Use a letra **x** em uma expressão que represente a medida de $P\hat{A}B$. (180° − x)

b) Qual é o nome do par de ângulos $P\hat{A}B$ e $M\hat{C}V$ em relação às retas **a**, **c** e **t**? Ângulos correspondentes.

c) Qual é o valor de **x**? 56° 30′

d) Qual é o valor da med $M\hat{C}V$? 123° 30′

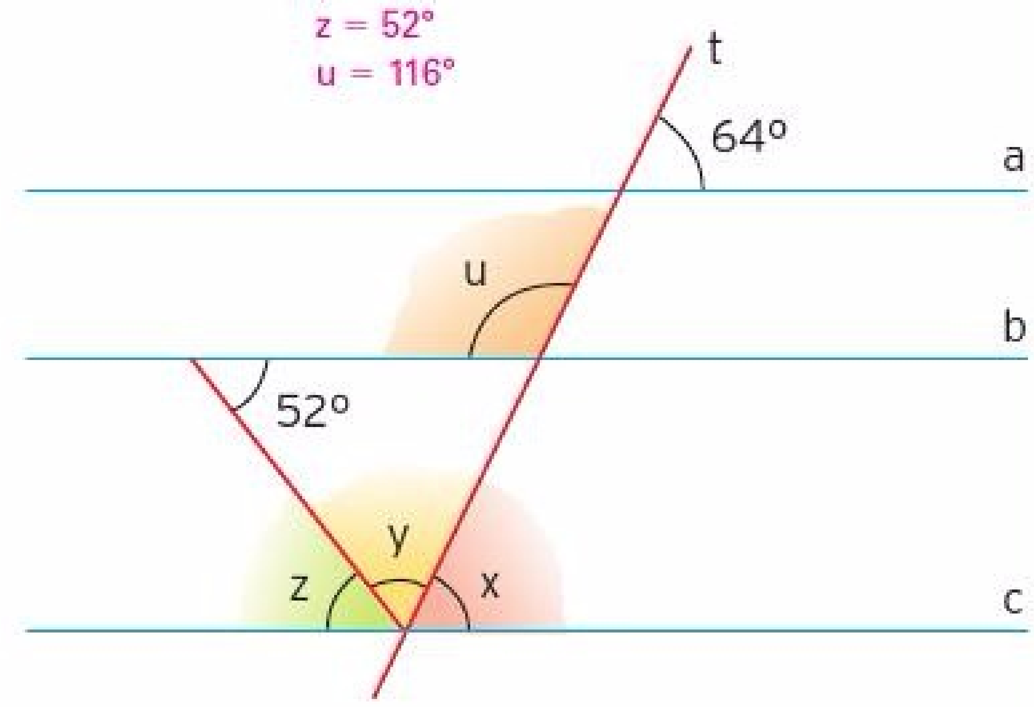
22. Na figura da atividade anterior, **b** // **c** e **t** é uma reta transversal a elas.

a) Qual é a medida de $R\hat{B}V$? 123° 30′

b) Qual é a medida de $T\hat{B}V$? 56° 30′

c) Qual é o valor de **y**? 28° 15′

23. Nesta figura, as retas **a**, **b** e **c** são paralelas duas a duas. x = 64° y = 64° z = 52° u = 116°

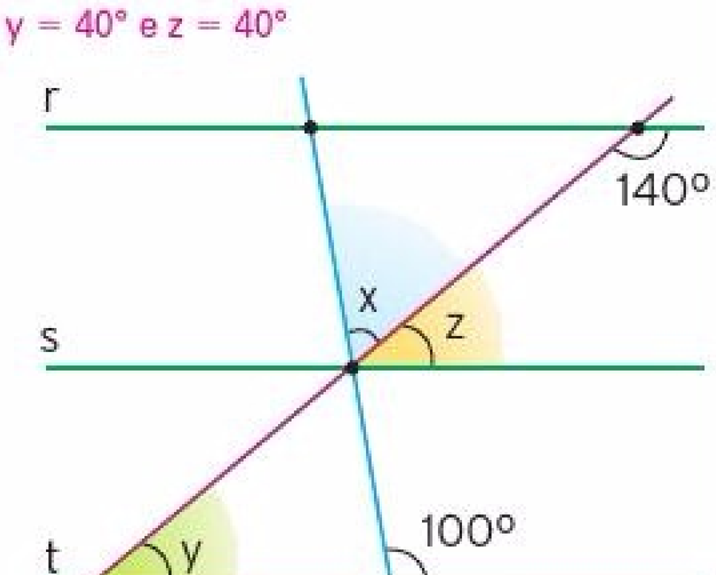


- Determine os valores de **x**, **y**, **z** e **u**.

24. Determine os valores de **x**, **y** e **z** nas figuras a seguir: x = 60°, y = 40° e z = 40°

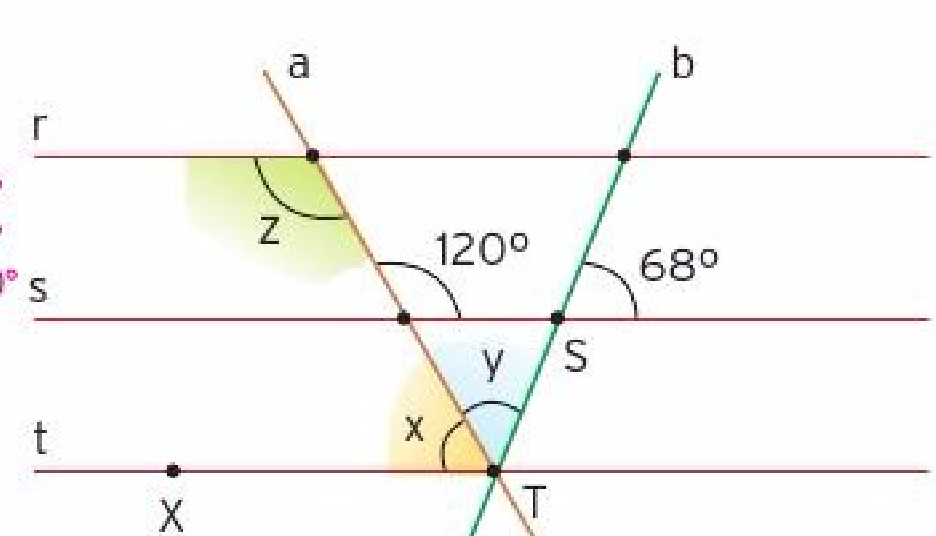
a)

r // s
s // t



b)

x = 60°
y = 52°
z = 120°

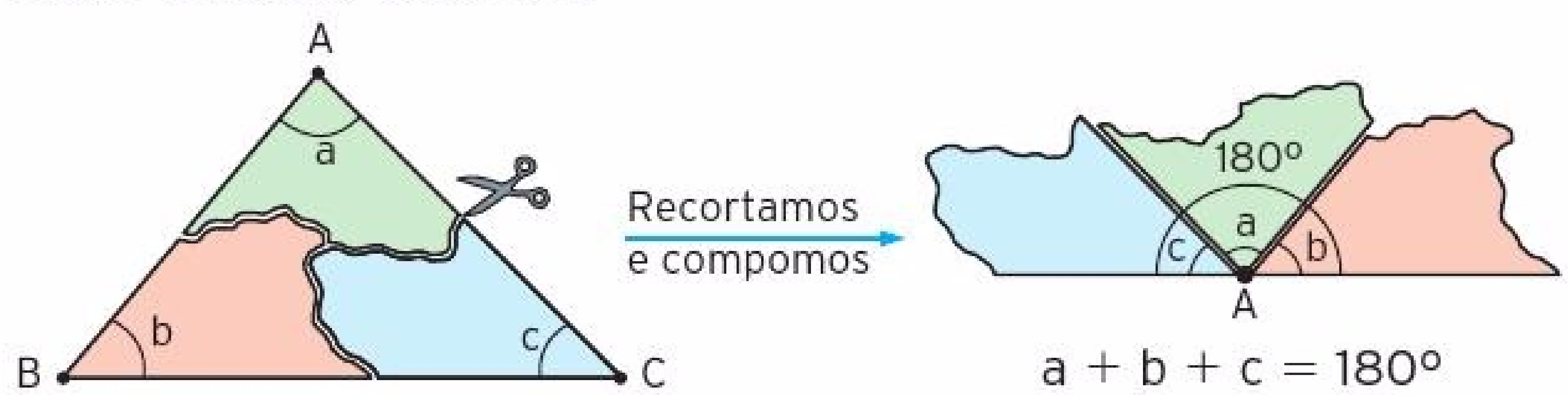


3 Retas paralelas e ângulos de um triângulo

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Uma verificação experimental dessa propriedade consiste em desenhar um triângulo qualquer, "recortar" seus ângulos e com eles compor um ângulo raso, cuja medida é 180°.

Observe como fazemos:



a, **b** e **c** representam medidas de ângulos.

Mas nem sempre procedemos dessa forma em Geometria. A partir de algumas propriedades consideradas verdadeiras, **demonstramos** outras, baseadas nas anteriores.

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

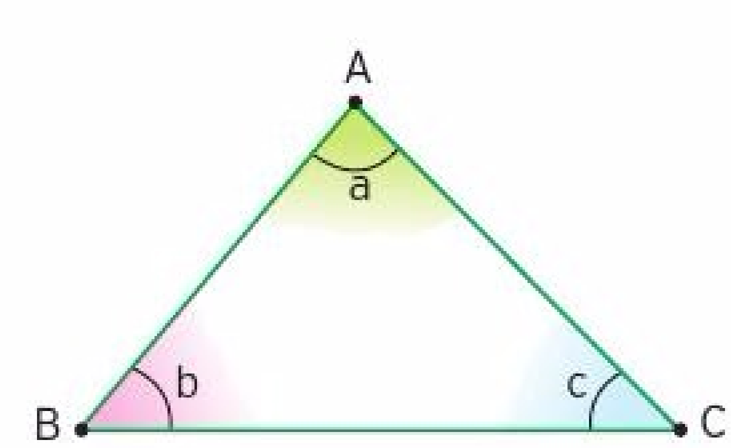
Para exemplificar, vamos **demonstrar** que:

> Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

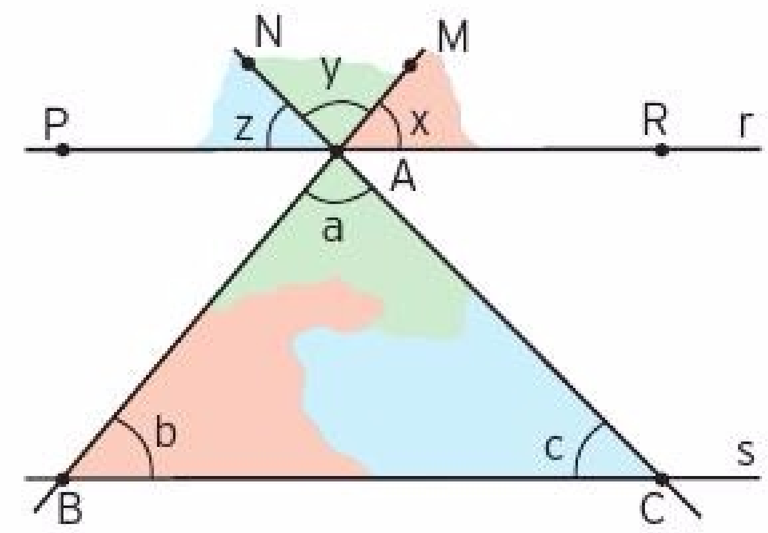
Hipóteses:
- **ABC** é um triângulo qualquer;
- **a**, **b** e **c** são as medidas dos ângulos do △ABC.

Demonstração

Tese: a + b + c = 180°



Para demonstrar essa propriedade, vamos desenhar novamente o triângulo ABC e traçar a reta **r** que passa por **A** e é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.



$M\hat{A}R$ e $M\hat{B}C$ são ângulos correspondentes.

$M\hat{A}R \equiv M\hat{B}C \rightarrow \boxed{x = b}$

r // s e $\overleftrightarrow{AB}$ é uma transversal.

$N\hat{A}M$ e $B\hat{A}C$ são ângulos o.p.v. —— $N\hat{A}M \equiv B\hat{A}C \rightarrow \boxed{y = a}$

r // s e $\overleftrightarrow{AB}$ é uma transversal.

$N\hat{A}P$ e $A\hat{C}B$ são ângulos correspondentes —— $N\hat{A}P \equiv A\hat{C}B \rightarrow \boxed{z = c}$

$\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ formam um ângulo raso —— $x + y + z = 180°$

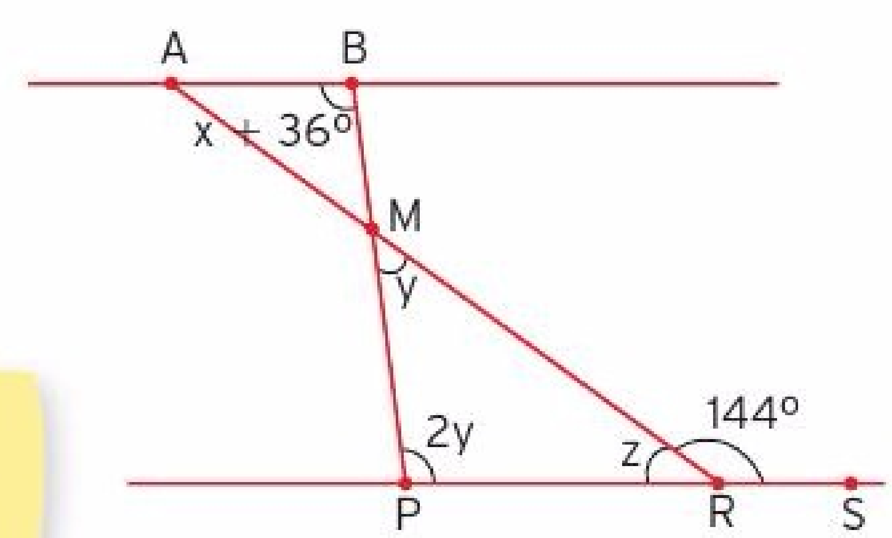
$b + a + c = 180°$ ou $\boxed{\mathbf{a + b + c = 180°}}$

A relação entre as medidas dos ângulos internos de um triângulo é utilizada em resolução de problemas que envolvem medidas desses ângulos e de outras propriedades já conhecidas.

Esta é uma das primeiras demonstrações em que são destacadas hipóteses e tese como se faz em demonstrações em Geometria. Destaque as hipóteses e esclareça que são os pressupostos considerados verdadeiros para o desenvolvimento da demonstração. Se for preciso, repita o procedimento mais uma vez.

Exemplo:

Nesta figura, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PR}$ são retas paralelas.



a) Quais são as medidas dos ângulos do triângulo MPR?

b) Qual é o valor de **x**?

- Primeiro calculamos o valor de **z** e de **y**:

  $z + 144° = 180°$

  $z = 180° - 144°$ —— $\boxed{\mathbf{z = 36°}}$

  $P\hat{R}S$ é um ângulo raso.

  No triângulo MPR, temos: $y + 2y + z = 180°$

  $3y + 36° = 180°$ —— $3y = 180° - 36°$

  $3y = 144°$ —— $\boxed{\mathbf{y = 48°}}$

  Os ângulos do triângulo MPR medem:

  $\boxed{\text{med } P\hat{M}R = y = 48°}$ $\boxed{\text{med } M\hat{P}R = 2y = 2 \cdot 48 = 96°}$ $\boxed{\text{med } P\hat{R}M = z = 36°}$

- Calculamos o valor de **x**, observando as retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PR}$ e a transversal $\overleftrightarrow{BP}$.

  $\text{med } A\hat{B}P = \text{med } B\hat{P}R$

  $x + 36° = 2y$ —— $\boxed{\mathbf{x = 60°}}$

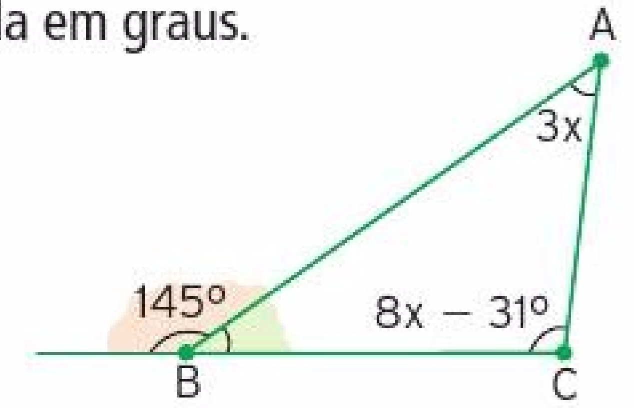
  $A\hat{B}P$ e $B\hat{P}R$ são ângulos alternos internos.

O valor de **z** é 36°, de **y** é 48° e de **x** é 60°, e as medidas dos ângulos do triângulo MPR são 48°, 96° e 36°.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

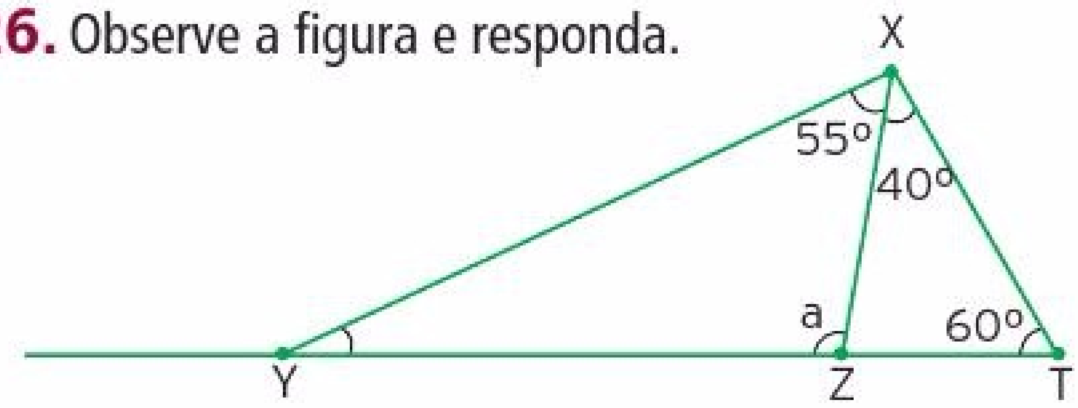
25. Neste triângulo ABC, a letra **x** representa uma medida em graus.



a) Qual é o valor de **x**? 16°

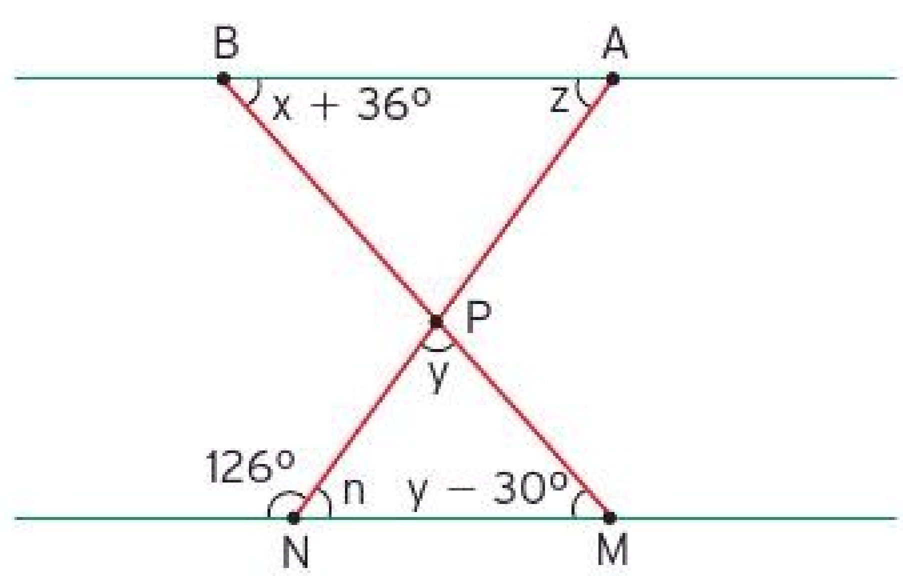
b) Qual é a medida de cada ângulo do △ABC? 48°; 35°; 97°

26. Observe a figura e responda.



Quais são as medidas dos ângulos do triângulo XYZ? 55°; 100°; 25°

27. Nesta figura, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ são retas paralelas. Observe-a e responda às questões.

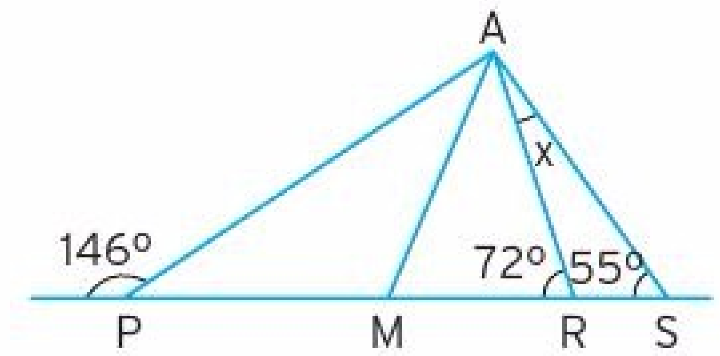


a) Quais os valores de **n**, de **y** e de **z**? 54°, 78°, 54°

b) Quais são as medidas dos outros ângulos do triângulo APB? med $A\hat{P}B$ = 78°; med $A\hat{B}P$ = 48°

c) Qual é o valor de **x**? 12°

28. Na figura a seguir, $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $P\hat{A}R$ e **x** representa uma medida em graus.



a) Qual é o valor de **x**? 17°

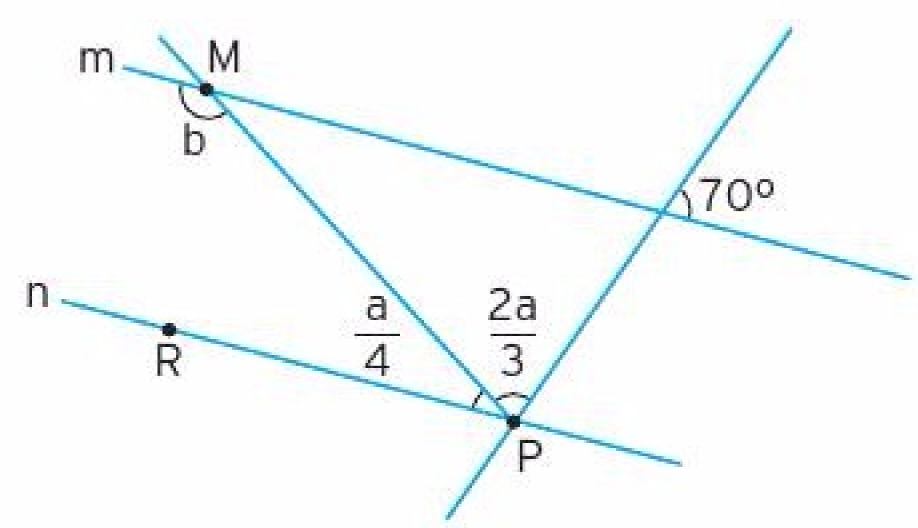
b) Qual é a medida de $P\hat{A}M$? 37°

c) Qual é a medida de $P\hat{A}S$? 91°

29. Nesta figura, **m** e **n** são retas paralelas e **a** e **b** representam medidas em graus.

a) Qual é a medida de $M\hat{P}R$? 30°

b) Qual é o valor de **b**? 150°

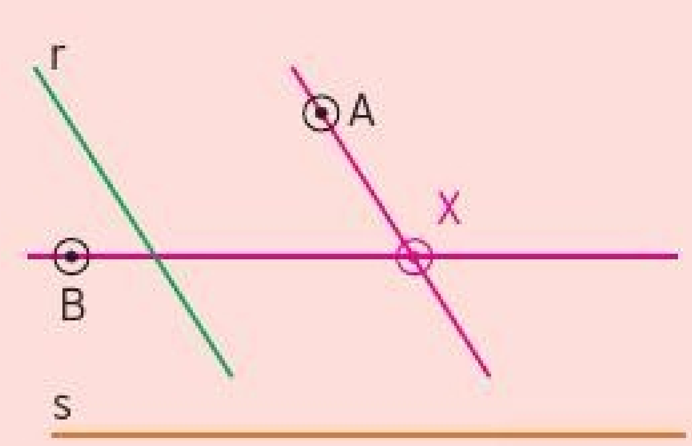


Desafio

FAÇA NO CADERNO

Onde está X?

Desenhe as retas **r** e **s** e os pontos **A** e **B**, como mostra a figura ao lado, e encontre o ponto **X**.



Use régua e esquadro ou dois esquadros.

Que bom!!! Temos algumas informações...

JUANMONINO/GETTY IMAGES

- **X** está numa reta paralela a **r** e que passa pelo ponto **A**.
- **X** está numa reta paralela a **s** e que passa pelo ponto **B**.

SHUTTERSTOCK

Leitura

BILWISSEDITION/AKG-IMAGES/LATINSTOCK

Euclides.

Euclides e retas paralelas

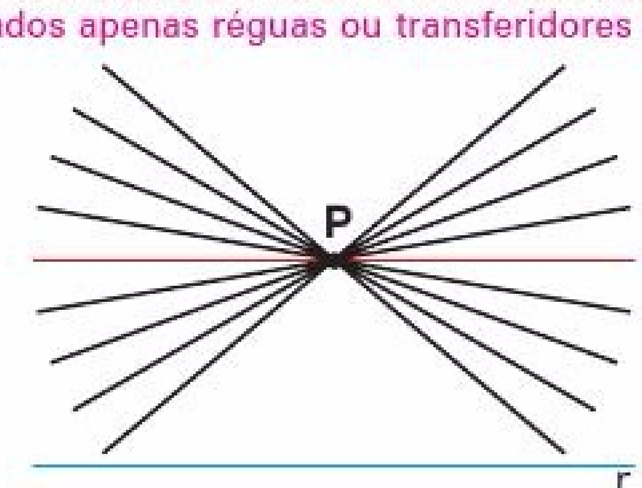
Euclides (300 a.C.), um matemático de Alexandria, é considerado o grande organizador da Geometria.

Ele reuniu e organizou todo o conhecimento sobre a Geometria da época em uma coleção de livros chamada Os Elementos. Deles constam os fundamentos da Geometria que estudamos apoiados em algumas informações e definições admitidas verdadeiras sem demonstrações. Essas afirmações e definições são utilizadas para demonstrar a validade de propriedades das figuras geométricas.

Certifique-se de que os alunos conseguem perceber que as construções geométricas com régua e compasso são necessárias quando o problema exige resposta com precisão; caso contrário, podem ser utilizados apenas réguas ou transferidores e esquadros.

Observe na figura ao lado a reta **r** e o ponto **P**. Existem infinitas retas que passam por **P**, mas **somente uma** delas é **paralela** a **r**.

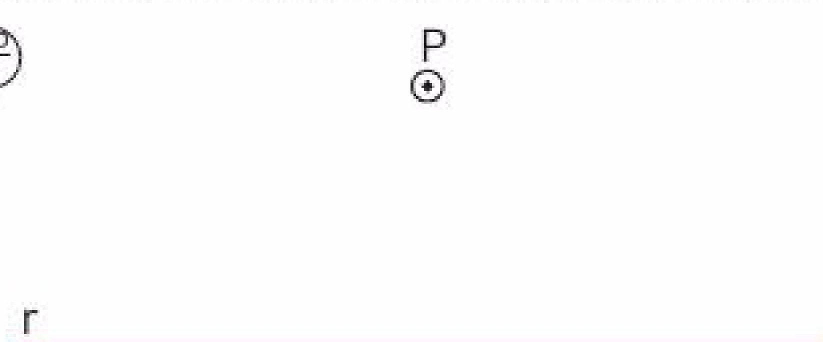
Essa é uma das afirmações de Euclides admitida como verdadeira.



Régua e compasso: construção de retas paralelas

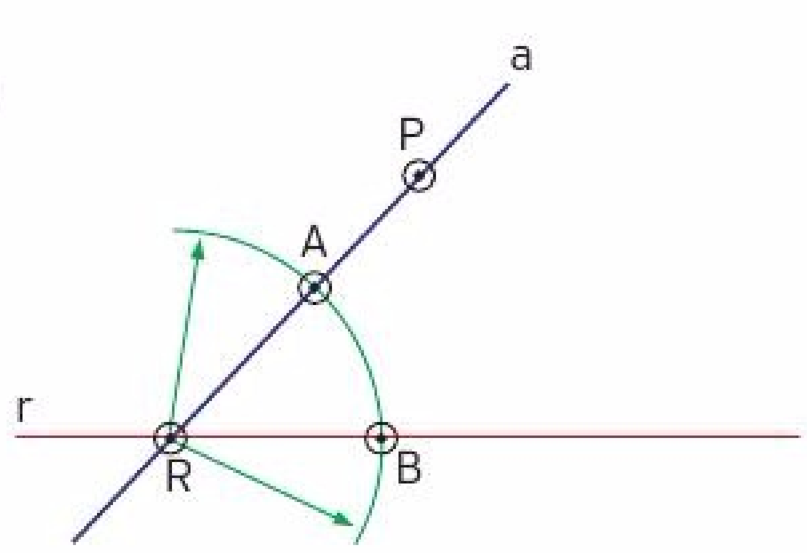
Veja como podemos desenhar a reta paralela a **r** e que contém o ponto **P** usando régua e compasso.

1º



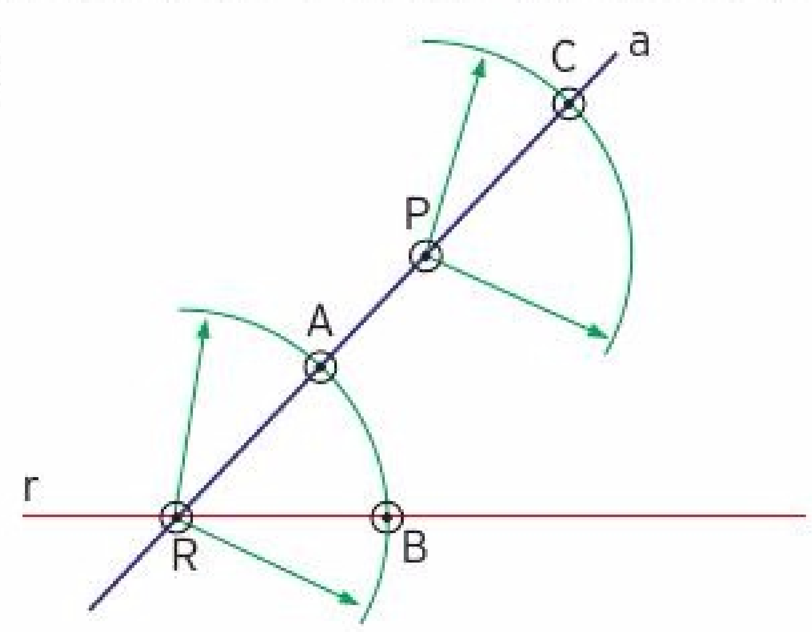
Traçamos uma reta **a** qualquer pelo ponto **P** e que encontre a reta **r** em um ponto **R**.

2º



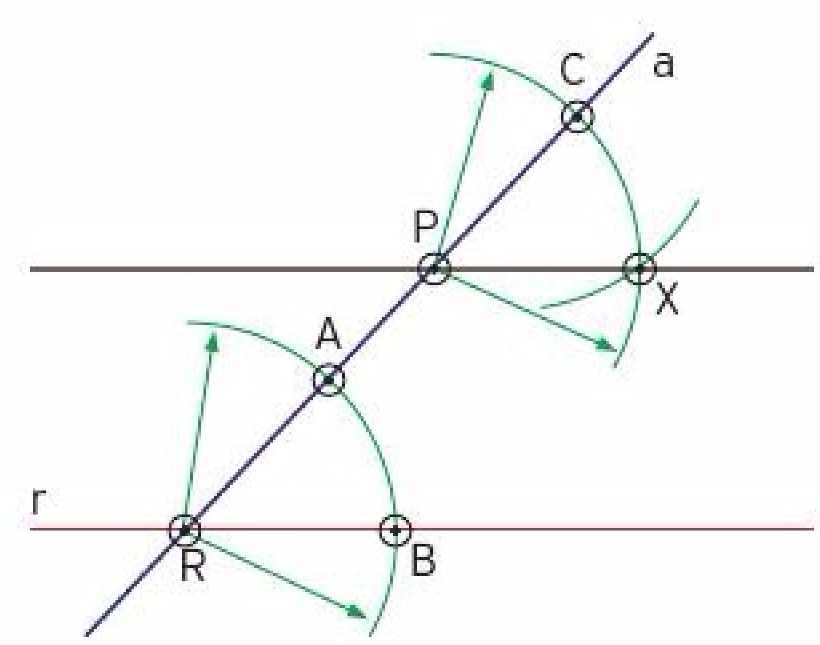
Com o compasso em uma abertura qualquer e com a ponta-seca em **R**, traçamos um arco que encontre **a** e **r** nos pontos **A** e **B**, respectivamente.

3º



Com o compasso nessa mesma abertura e com a ponta-seca em **P**, traçamos um arco que encontre **a** no ponto **C**.

4º



Ajustando o compasso com a abertura $\overline{AB}$ e com a ponta-seca em **C**, traçamos um arco que encontre o arco anterior em um ponto **X**.

É possível mostrar que os ângulos $A\hat{R}B$ e $C\hat{P}X$ são congruentes e, como esses formam um par de ângulos correspondentes, isso permite concluir que $\overleftrightarrow{PX}$ e $\overleftrightarrow{RB}$ são retas paralelas.

Revisão cumulativa e testes

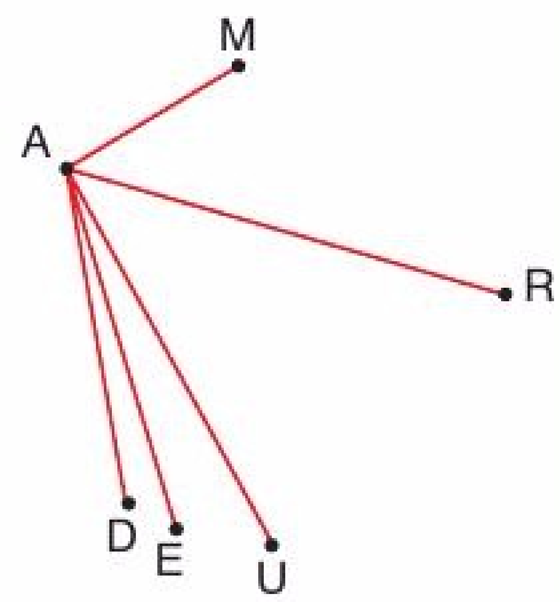
1. Calcule o valor das expressões numéricas a seguir:

a) $(-3)^3 - 2^3 \cdot (-2)^{-2}$ -29

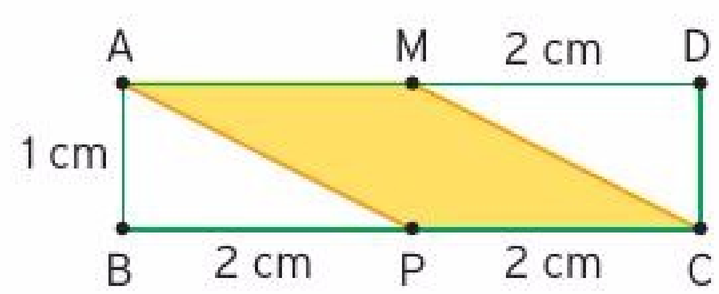
b) $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^1 - 8 \cdot 10^0$ 4472

c) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 : \left(\dfrac{8}{3}\right)^{-2} + 3^{-1} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\dfrac{1}{24}$

2. Nesta figura, cada ponto será ligado a um dos outros formando um segmento de reta. Ao final do trabalho, quantos segmentos de reta terão sido traçados?
15 segmentos de reta.



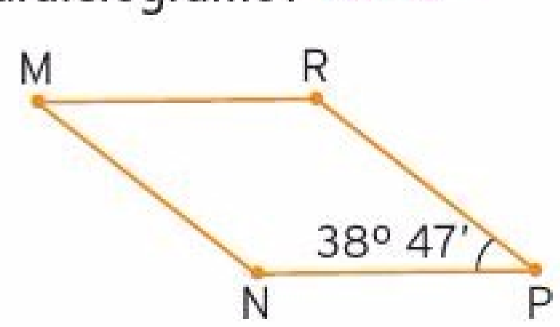
3. Nesta figura, ABCD é um retângulo.



a) Que tipo de polígono é o quadrilátero APCM? Paralelogramo.

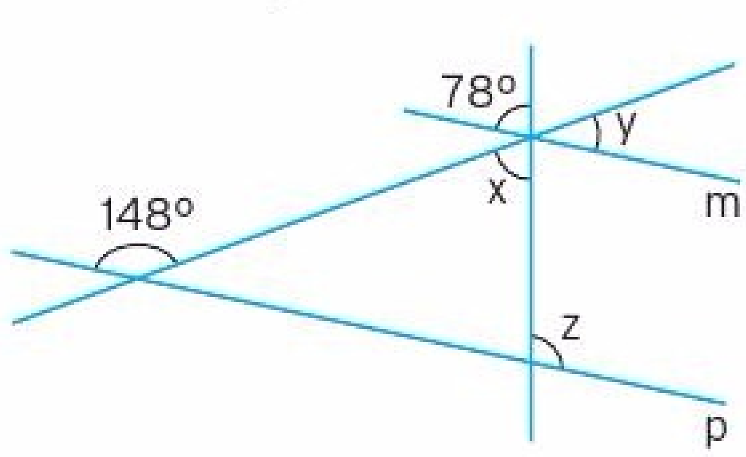
b) Qual é aproximadamente, com duas ordens decimais, o perímetro de APCM? 8,47 cm

4. Nesta figura, MNPR é um paralelogramo. Quais são as medidas dos ângulos obtusos desse paralelogramo? 141° 13′



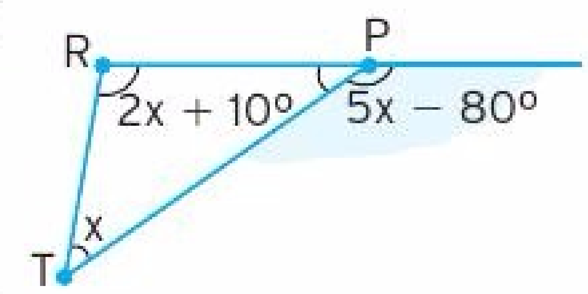
5. Nesta figura, **m** e **p** são retas paralelas e **x**, **y** e **z** são medidas em graus. Quais são essas medidas?

x = 70°
y = 32°
z = 102°



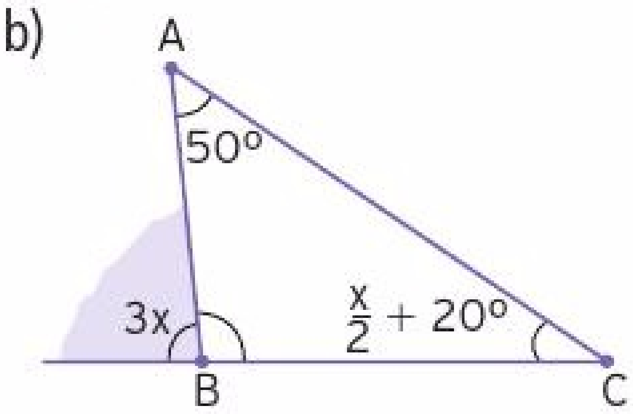
6. Nas figuras a seguir, determine as medidas dos ângulos dos triângulos:

a)



med $\hat{T}$ = 45°
med $\hat{R}$ = 100°
med $\hat{P}$ = 35°

b)



med $\hat{B}$ = 96°
med $\hat{C}$ = 34°

7. Qual a raiz da equação

$$\frac{-1-2x}{6} - \frac{x-5}{9} = -\frac{x-1}{2}?$$ c

a) 0 b) -2 c) 2 d) $\dfrac{2}{17}$

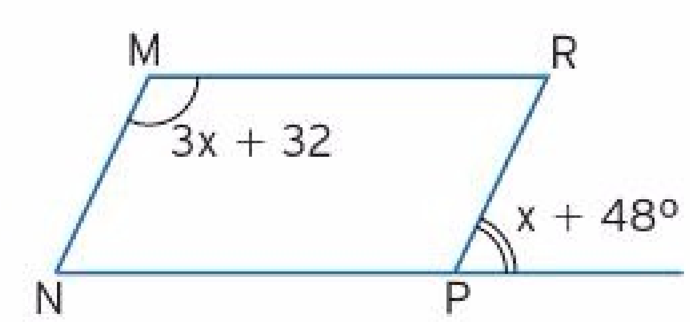
8. Na figura abaixo, MNPR é um paralelogramo e **x**, uma medida em graus. O valor de **x** é: b

a) 50°

b) 25°

c) 8°

d) Nenhum dos valores.



9. O valor de $37{,}5 \cdot 10^{-6}$ é: b

a) 37 500 000.

b) 0,0000 375.

c) 0,000375.

d) 375.

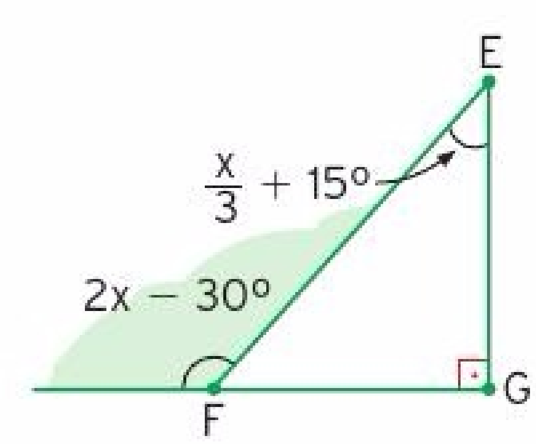
10. Nesta figura, **x** representa uma medida em graus. O ângulo $F\hat{E}G$ mede: d

a) 32°

b) 48°

c) 45°

d) 42°



11. Em um triângulo ABC, med $\hat{A}$ é a metade da med $\hat{B}$ e med $\hat{B}$ é um terço da med $\hat{C}$. As medidas dos ângulos do triângulo ABC na ordem med $\hat{A}$, med $\hat{B}$ e med $\hat{C}$ são: d

a) 40°, 20° e 120°.

b) 120°, 40° e 20°.

c) 40°, 120° e 20°.

d) 20°, 40° e 120°.

UNIDADE 9

Polígonos e propriedades

Há muitas formas poligonais na natureza. Elas inspiram o homem a estudá-las e a explorar suas propriedades.

Nesta unidade, serão exploradas tais propriedades.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Colmeia de abelhas com formas hexagonais.

Nesta unidade...

1. Polígonos
2. Soma das medidas dos ângulos de um polígono
3. Polígonos regulares

A imagem da página anterior mostra formas poligonais que aparecem na natureza.

O conhecimento sobre as formas geométricas é aplicado na decoração de pisos e na construção de edifícios pelo ser humano.


LAMBERTO SCIPIONI/KEYSTONE BRASIL

Edifício da Fiesp, São Paulo.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Calçada com ladrilhos.


SX70/GETTY IMAGES

Veja o belo resultado da combinação de formas geométricas nesse quadro produzido pelo artista plástico Victor de Vasarely (1908-1977).

O que você já sabe?

- Já aprendemos muita coisa sobre cubos. Cite duas características deles de que se lembra.
  Respostas possíveis: Todas as arestas são congruentes; todas as faces são quadradas.
- O quadrado é um polígono. Cite outros dois polígonos que você conhece.
  Respostas possíveis: Triângulo; hexágono.
- Retângulos e quadrados são quadriláteros particulares. Cite um padrão existente entre eles.
  Respostas possíveis: Eles têm lados paralelos dois a dois.

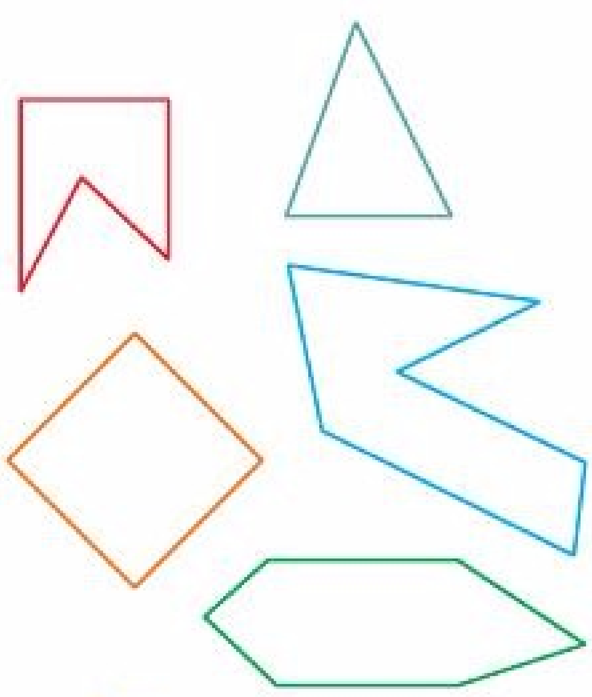
1 Polígonos

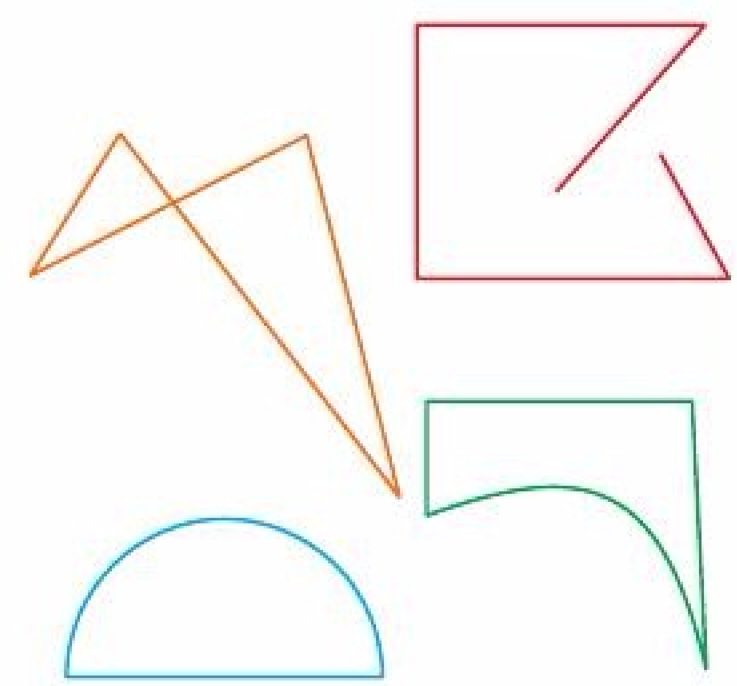
O que são polígonos?

Nesta unidade, procure explorar apenas os conceitos e as propriedades relevantes, pois os alunos terão outras oportunidades de estudá-los. Certifique-se de que eles desenvolvem generalizações, no caso das fórmulas, com compreensão e significado.

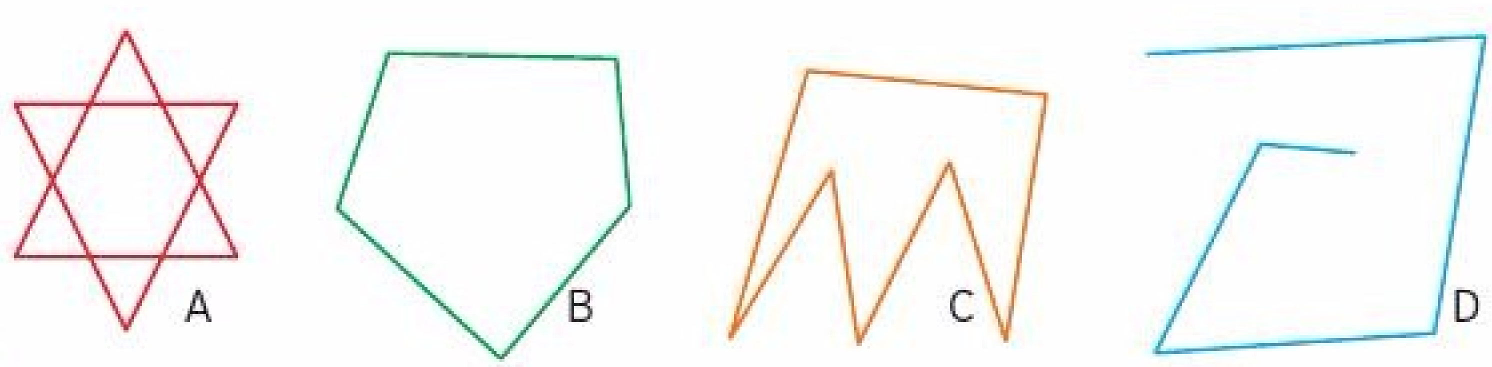
Para refletir e responder

Leia o que diz a professora sobre duas coleções de linhas planas e responda às questões.





- Identifique duas características dos polígonos. Resposta possível: Linhas planas fechadas; formados por segmentos de reta que não se cruzam.
- Entre as linhas planas a seguir, quais formam polígonos? **B** e **C**.



A palavra **polígono** vem da palavra grega *polygonon*.

Veja o significado da palavra **polígono**.

poli —— muitos

gono —— ângulo

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

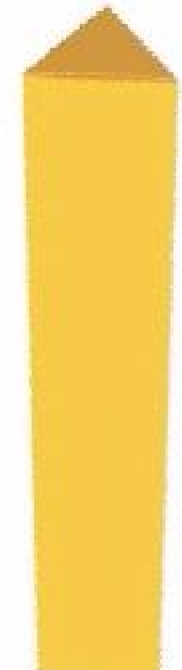
Observando os **polígonos** apresentados acima, notamos que:

- eles são linhas fechadas, planas;
- são formados somente por segmentos de reta que não se cruzam e têm em comum apenas uma das extremidades, ou seja, são segmentos de reta consecutivos;
- dois segmentos de reta consecutivos não são colineares.

Polígonos estão presentes nas faces destas embalagens.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

As faces da superfície dessa caixa têm a forma de retângulo.


FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

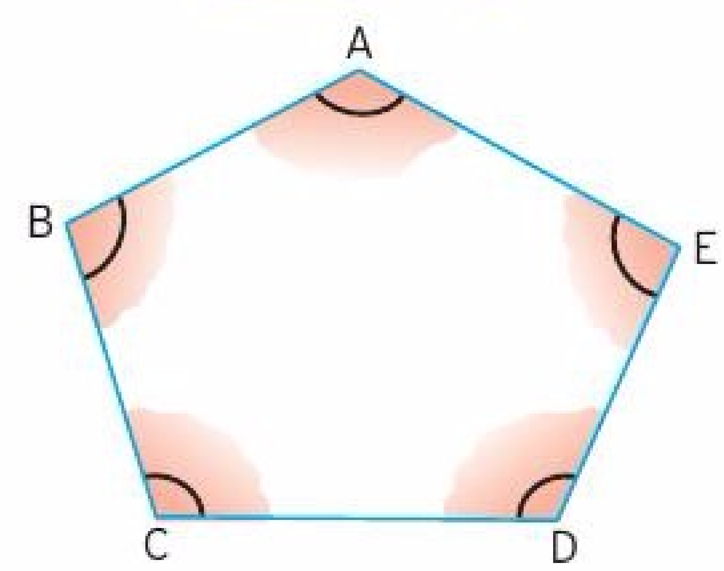
Duas das faces da superfície dessa caixa têm a forma de triângulo.


FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Na superfície dessa caixa, podemos identificar hexágonos e retângulos.

Vértices, lados e ângulos internos

Este é um **pentágono**.

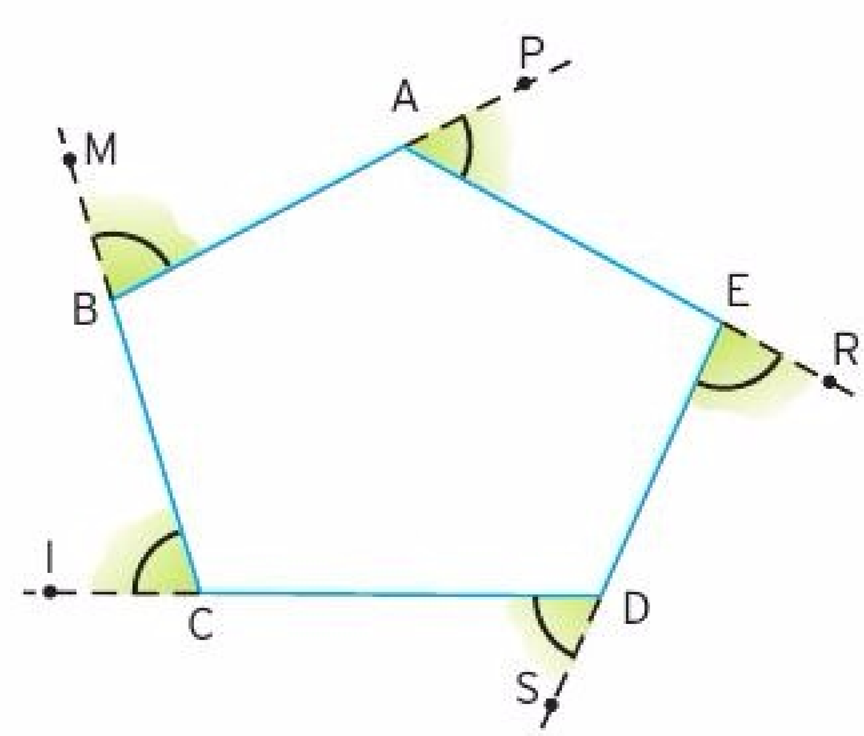


No pentágono ao lado podemos observar:

- **vértices** ______________ são os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Esse é o **polígono ABCDE**;
- **lados** ______________ são os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$;
- **ângulos internos** ______ são os ângulos formados por dois lados consecutivos: $E\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$ e $D\hat{E}A$.

Vértices, lados e ângulos internos são elementos de um polígono.

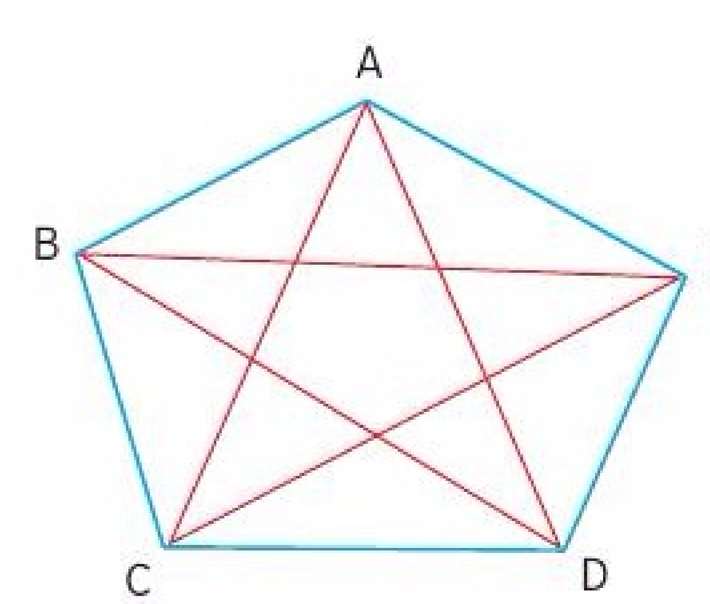
Ângulos externos



Um polígono tem também **ângulos externos**. São os ângulos formados por um lado e o prolongamento de um lado consecutivo a ele.

Ângulos externos de ABCDE: $E\hat{A}P$, $A\hat{B}M$, $B\hat{C}I$, $C\hat{D}S$ e $D\hat{E}R$.

Diagonais



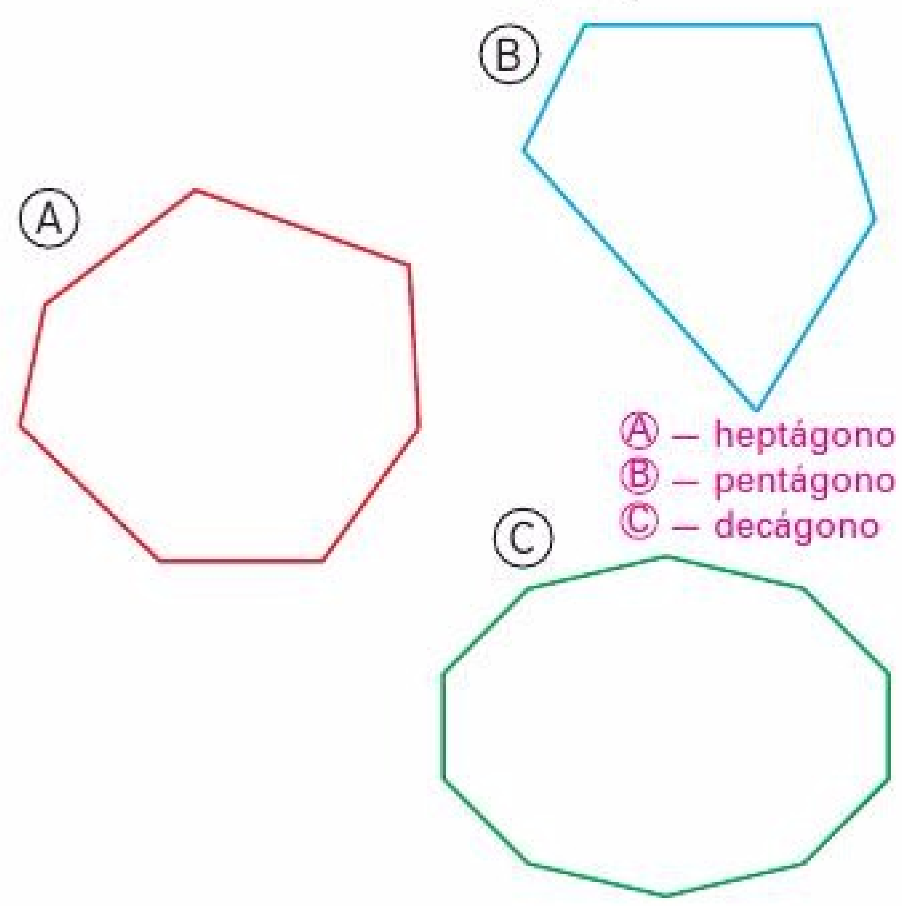
As **diagonais** de um polígono são os segmentos de reta que unem um vértice a outro não consecutivo a ele.

Diagonais de ABCDE: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Os prefixos gregos **tri**, **penta**, **hepta**, **octo** e **deca** significam, respectivamente, **três**, **cinco**, **sete**, **oito** e **dez**. Usando esses prefixos, que nomes são dados a estes polígonos?



Ⓐ — heptágono
Ⓑ — pentágono
Ⓒ — decágono

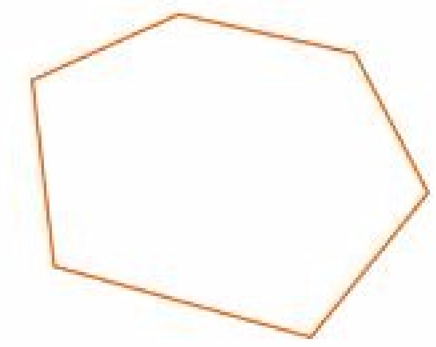
2. Identifique o número de vértices e de lados dos polígonos a seguir:

a) quadrilátero 4 vértices, 4 lados.

b) heptágono 7 vértices, 7 lados.

c) octógono 8 vértices, 8 lados.

3. Observe este polígono.



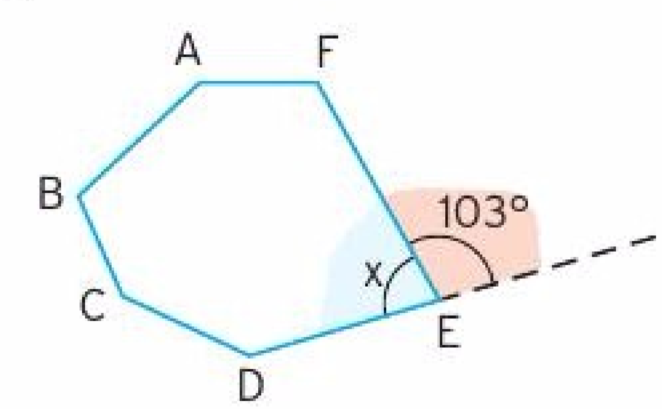
a) Quantos vértices ele tem? 6 vértices.

b) Quantas diagonais ele tem? 9 diagonais.

c) Desenhe um polígono como este e identifique três ângulos externos. Veja a resposta no final do livro.

4. Qual é o menor número de diagonais que um polígono convexo pode ter? Que polígono é esse? 2 diagonais; quadrilátero.

5. Neste hexágono, **x** representa uma medida em graus.



- Qual é o valor de x? 77°

Polígonos convexos

Para refletir e responder

Observe os polígonos e as retas a seguir:

Figura A

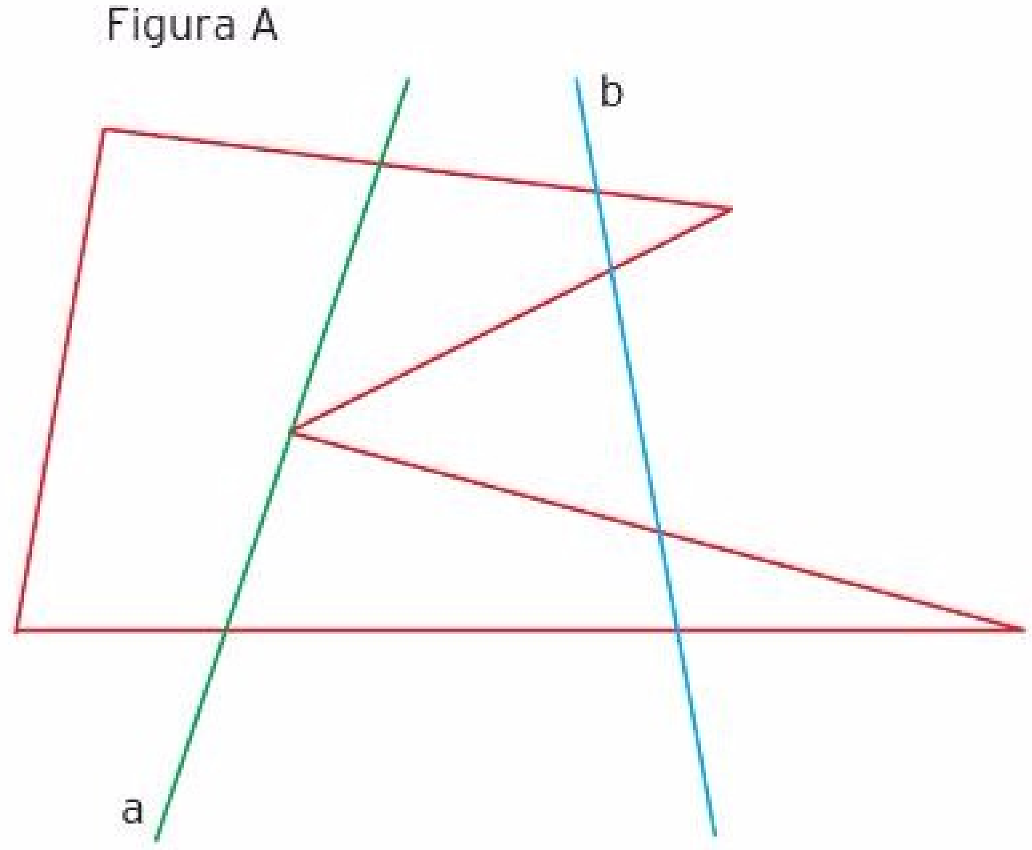
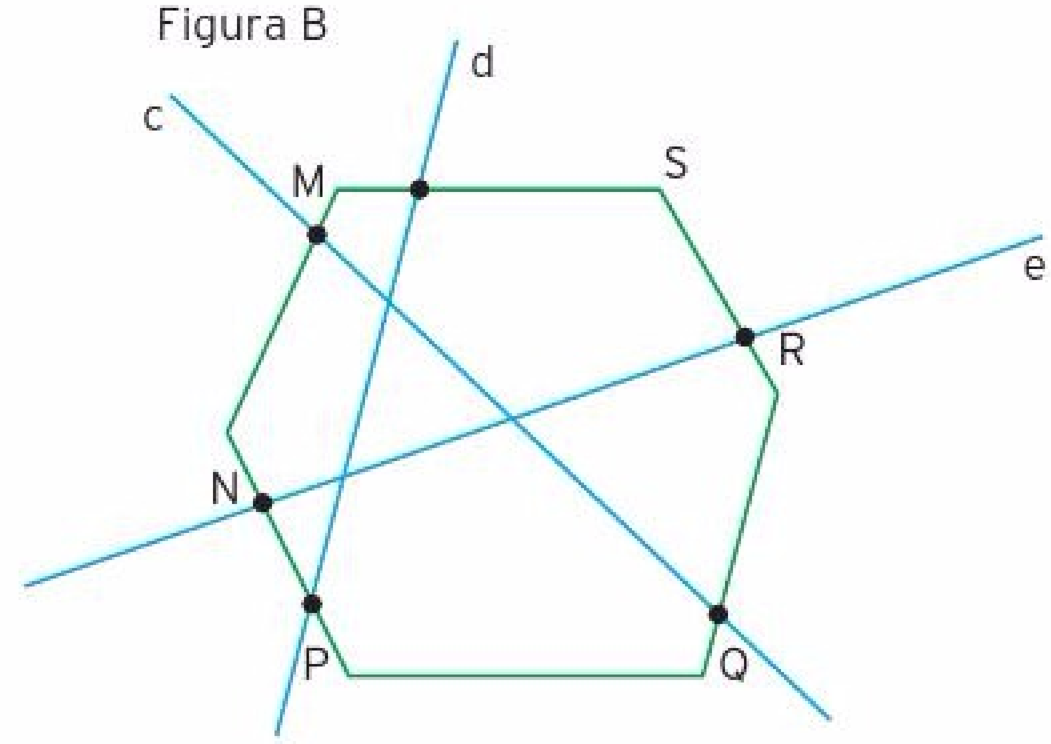


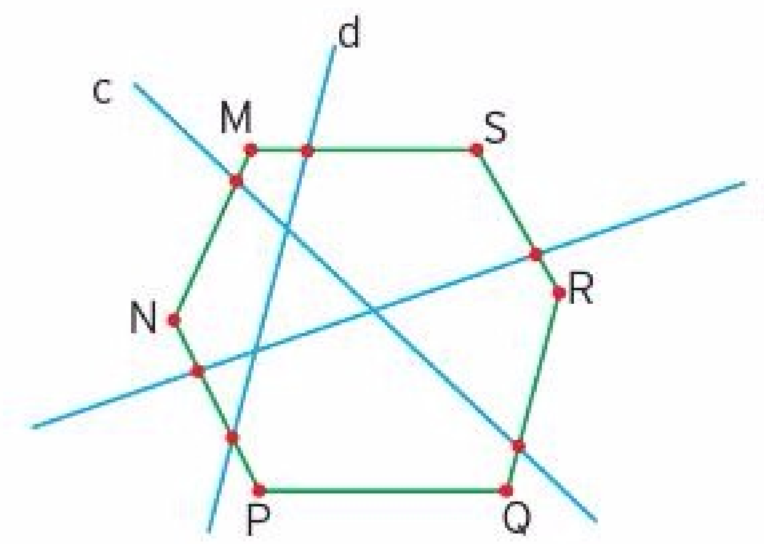
Figura B



- Quais são as retas que têm pontos comuns com o polígono da figura A? Quantos pontos comuns? **a** e **b**; reta **a** — 3 pontos; reta **b** — 4 pontos.
- Quais são as retas que têm pontos comuns com o polígono da figura B? Quantos pontos comuns? **c**, **d** e **e**; reta **c** — 2 pontos; reta **d** — 2 pontos; reta **e** — 2 pontos.
- É possível traçar alguma reta que tenha mais de dois pontos comuns com o polígono da figura B? Não.

Os polígonos podem ser separados em dois grupos observando seus contornos.

Em um dos grupos estão polígonos como MNPQRS, apresentado na página anterior.

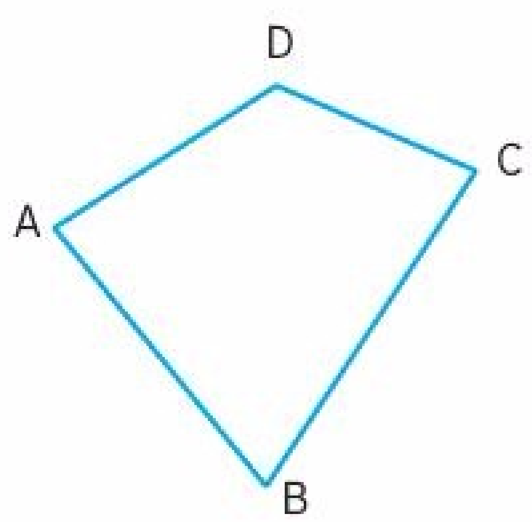


Note que as retas **c**, **d** e **e** encontram apenas dois dos lados de MNPQRS. Além disso, não é possível traçar uma reta que encontre MNPQRS em mais de dois lados.

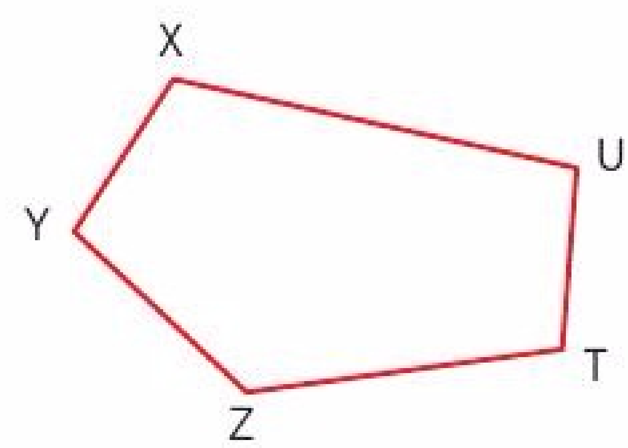
MNPQRS é um **polígono convexo**.

Polígonos como o da Figura A, da página anterior, são **não convexos**, ou **côncavos**.

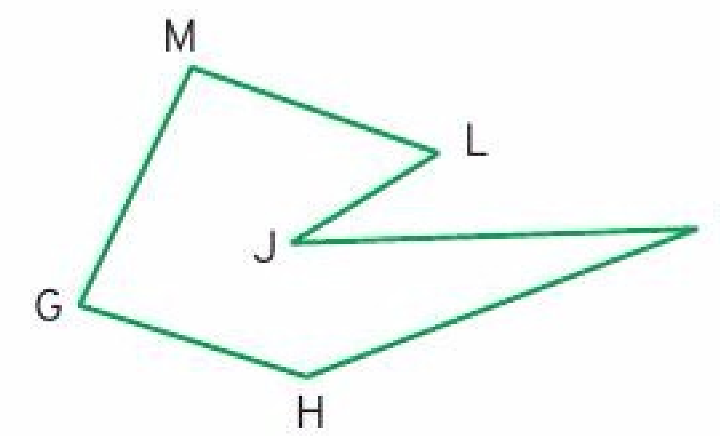
Outros exemplos:



ABCD é convexo.



XYZTX é convexo.

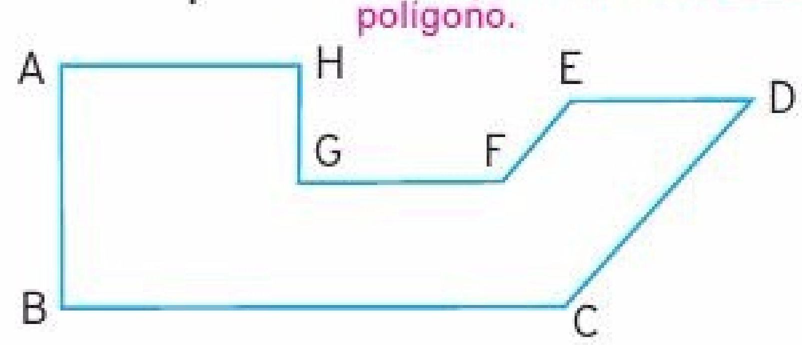


GHIJLM é não convexo.

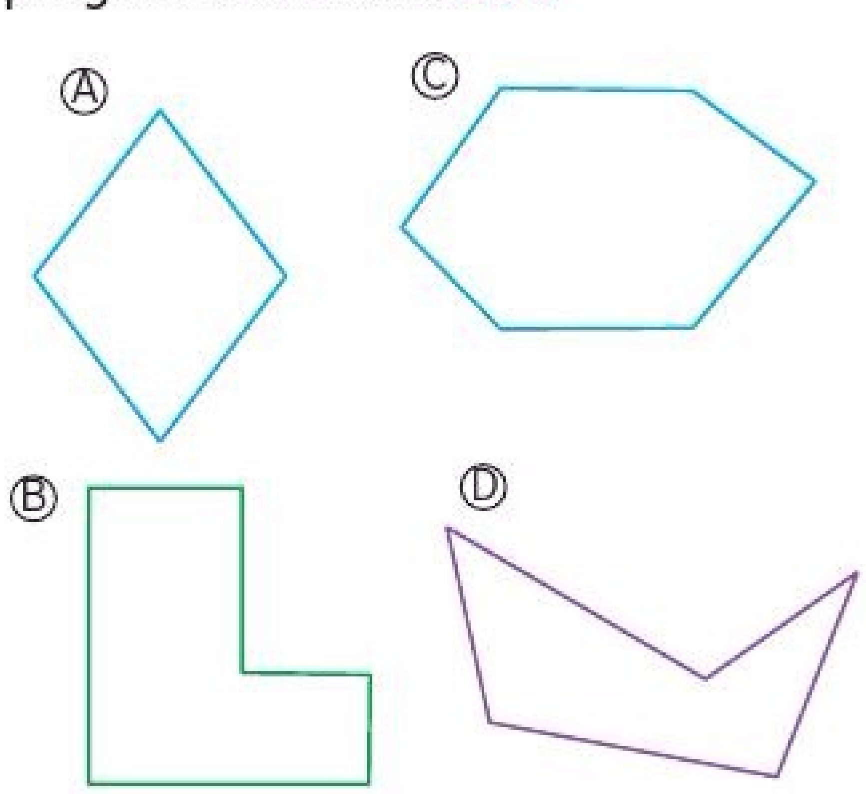
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

6. Desenhe um polígono como ABCDEFGH. Em seguida, trace várias retas que interceptam os lados de ABCDEFGH. Esse é um polígono convexo? Por quê? Não convexo; existem retas que interceptam mais de dois lados do polígono.

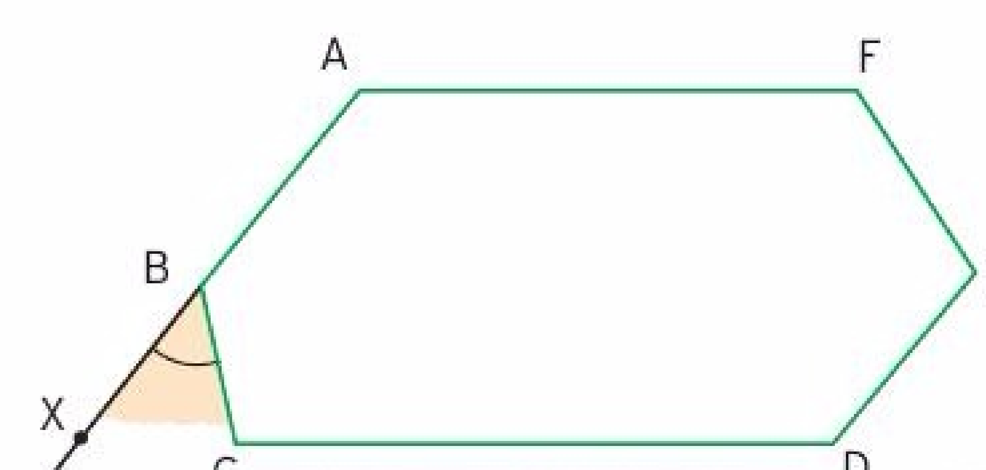


7. Entre as figuras a seguir, quais letras indicam polígonos convexos? A e C.



8. Existe algum polígono convexo que não tenha diagonais? Qual? Sim, triângulo.

9. Na figura abaixo $C\hat{B}X$ é um ângulo externo ao hexágono ABCDEF.



Lembre-se: Dois ângulos adjacentes têm um lado em comum e não têm ponto da região angular em comum.

a) $C\hat{B}X$ é um ângulo externo adjacente a que ângulo desse hexágono? $A\hat{B}C$

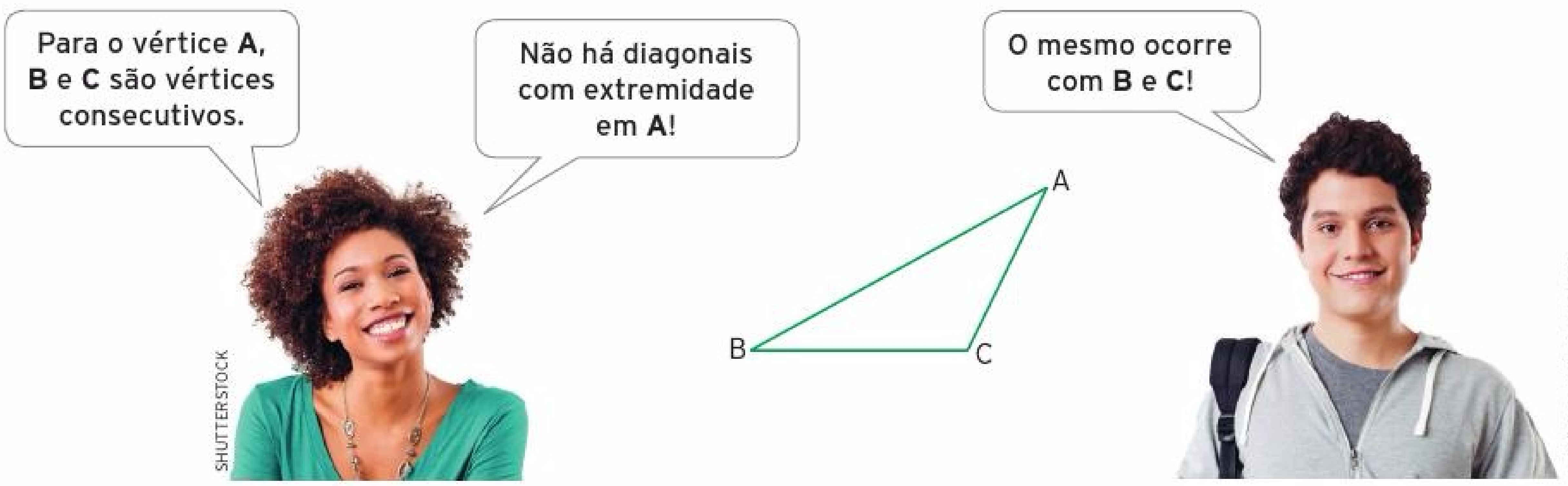
b) Se med $A\hat{B}C = 115°$, qual será a medida de $C\hat{B}X$? 65°

c) Se med $A\hat{B}C = \frac{3x}{5} + 53°$ e med $C\hat{B}X = \frac{x - 21°}{2}$, qual será o valor de x? Nesse caso, qual é a medida do ângulo interno adjacente a $C\hat{B}X$? 125°; 128°

Número de diagonais de um polígono convexo

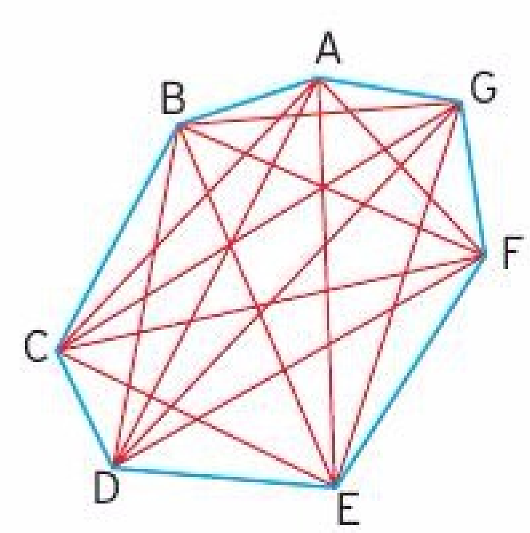
A partir deste momento, passaremos a analisar apenas os polígonos convexos e suas propriedades. O polígono convexo que tem o menor número de lados é o triângulo.

Observe o triângulo a seguir e note que ele não possui diagonais.



Como saber quantas diagonais tem um polígono qualquer?

Observe as diagonais do heptágono abaixo traçadas em vermelho.



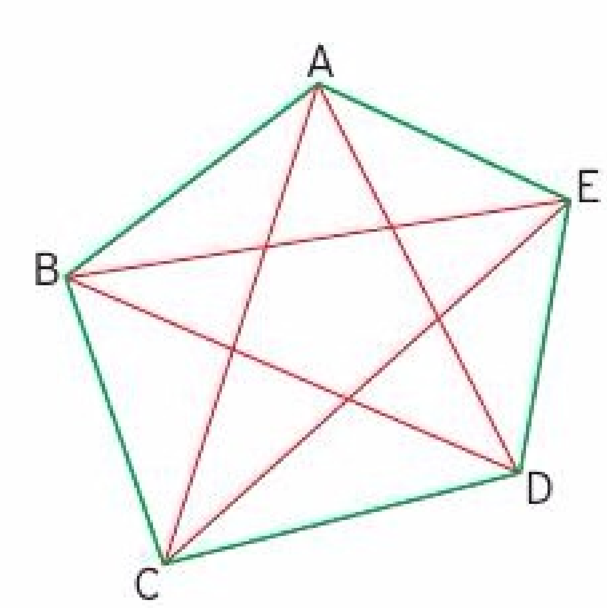
São 14 diagonais ao todo!

Contá-las uma a uma pode ser trabalhoso e ainda corre-se o risco de cometer erros.

Então, como saber o número de diagonais de um polígono sem ter de desenhá-las e contá-las uma a uma?

Vamos explorar esse assunto examinando alguns exemplos.

1) Começando com um **pentágono**.



- Número de diagonais com uma das extremidades em **A**: são duas, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ ou $\overline{CA}$ e $\overline{DA}$.

  Ou seja, dos 5 vértices, eliminamos 3: **A**, **B** e **E**.

- Número de diagonais com uma das extremidades em **B**: são duas, $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$ ou $\overline{DB}$ e $\overline{EB}$.

  Para o vértice **B**, também são eliminados 3 vértices: **A**, **B** e **C**.

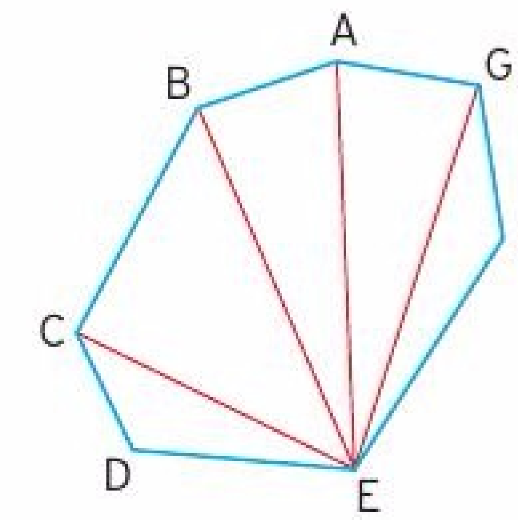
O que ocorre nos vértices **A** e **B** ocorrerá nos demais. Para o número de diagonais temos:

- em um vértice ——— $(5 - 3)$ diagonais;
- em cinco vértices ——— $5 \cdot (5 - 3)$ diagonais.

Cada diagonal foi contada **duas vezes**.

Número de diagonais $= \frac{\overset{\text{número de lados}}{5} \cdot (5 - 3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ ——— **número de diagonais = 5**

Portanto, qualquer pentágono convexo tem **5 diagonais**.



2) Cálculo do número de diagonais de um heptágono:

- em 1 vértice ——— $(7 - 3)$ diagonais;
- em 7 vértices ——— $7 \cdot (7 - 3)$ diagonais;
- cada diagonal foi contada duas vezes, por isso o número anterior é dividido por 2.

Número de diagonais $= \frac{7 \cdot (7 - 3)}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ ——— **número de diagonais = 14**

Qualquer heptágono convexo tem **14 diagonais**.

De modo geral:

Em um polígono convexo qualquer, representamos por **n** o número de vértices. Para o número de diagonais, temos:

- em um vértice ——— $(n - 3)$ diagonais;
- em **n** vértices ——— $n \cdot (n - 3)$ diagonais;
- cada diagonal foi contada duas vezes; o número anterior é dividido por 2.

Em um polígono convexo com **n** lados e, portanto, com **n** vértices, temos:

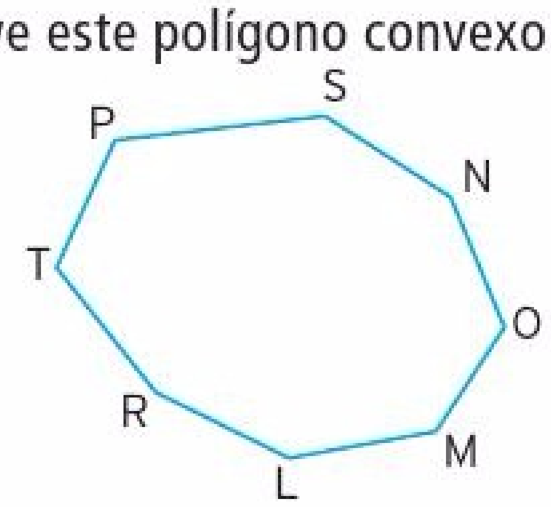
$$\textbf{número de diagonais} = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Quantas diagonais tem um decágono convexo qualquer? 35 diagonais.

11. Observe este polígono convexo e responda:



a) Que polígono é esse? Octógono.

b) Quantas diagonais tem esse polígono? 20 diagonais.

c) Como foi encontrada a resposta do item anterior? Resposta possível: Aplicando a fórmula que acabamos de conhecer.

12. Copie esta tabela em seu caderno e complete-a considerando polígonos convexos:

Número de lados	Fórmula (diagonais)	Total de diagonais
6	$\frac{6 \cdot (6-3)}{2}$	9
15	$\frac{15 \cdot (15-3)}{2}$	90
a	$\frac{a \cdot (a-3)}{2}$	$\frac{a \cdot (a-3)}{2}$
40	$\frac{40 \cdot (40-3)}{2}$	740
y	$\frac{y \cdot (y-3)}{2}$	$\frac{y \cdot (y-3)}{2}$

Usando a calculadora

- Calcule o número de diagonais de um polígono convexo de:

13 lados 65 diagonais. 18 lados 135 diagonais. 29 lados 377 diagonais.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Diagonais e apertos de mãos

Sônia adora festas e também um bom desafio.

Na festa de aniversário de seu pai, à medida que os convidados chegavam, cumprimentavam os outros com um aperto de mãos. Cada um cumprimentava o outro uma vez, e Sônia contava os apertos de mãos: “Um, dois, três, quatro, ...”.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

De repente, ela esbarrou em um convidado e perdeu a conta, mas deu um jeitinho e chegou ao número de apertos de mãos.

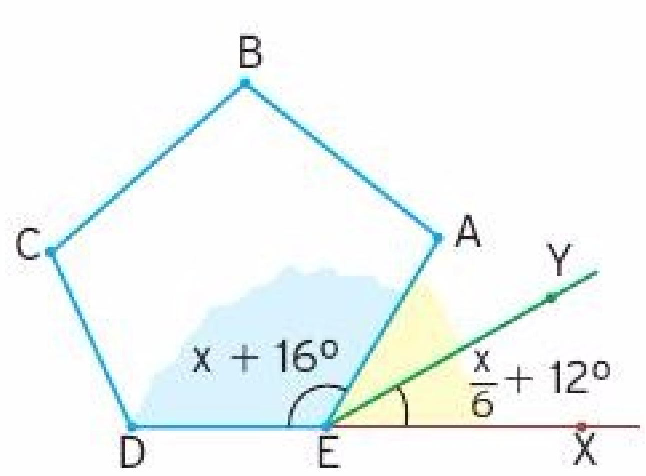
Responda: Dada a importância do desenvolvimento dos processos de observação de regularidades (padrões) e de generalização, por parte dos alunos, estude a possibilidade de explorar este **Desafio**. Ele poderá ser dado como lição de casa e discutido em sala de aula. Para mais esclarecimentos, leia comentários no **Manual do Professor**.

- Se havia 20 pessoas na festa, qual foi o número que Sônia calculou? 190
- Se fossem **n** pessoas, qual seria a fórmula do número de apertos de mãos? $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$
- Que semelhança existe entre os procedimentos usados para chegar a essa fórmula e a fórmula do número de diagonais? Resposta possível: Em lugar de vértices são pessoas e cada uma cumprimenta todos menos ela mesma: são (n−1) cumprimentos para cada um e o total deve ser dividido por 2.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

13. Nesta figura, $A\hat{E}X$ é um ângulo externo do pentágono ABCDE e $\overrightarrow{EY}$ é bissetriz desse ângulo.



a) Qual é o valor de **x**? 105°

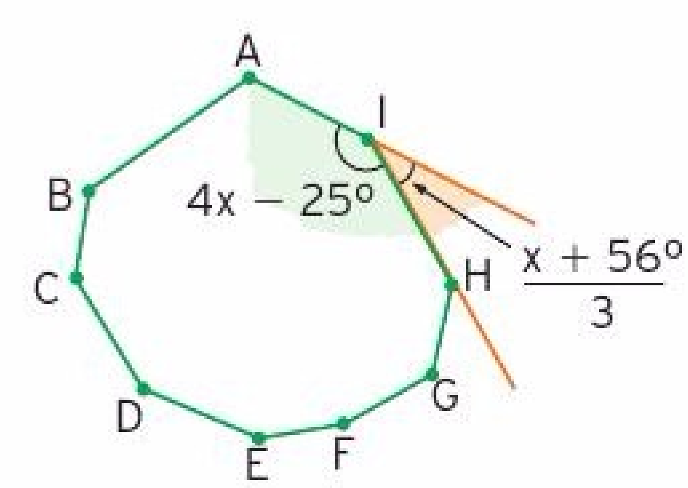
b) Qual é a medida do ângulo externo $A\hat{E}X$? E do ângulo interno $A\hat{E}D$? 59°; 121°

14. Um icoságono é um polígono que tem 20 lados.

a) Quantos vértices há em um icoságono? 20 vértices.

b) Quantas diagonais há em um icoságono? 170 diagonais.

15. Nesta figura, ABCDEFGHI é um eneágono convexo.



a) Quantos lados há em um eneágono convexo? 9 lados.

b) Quantas diagonais há em um eneágono convexo? 27 diagonais.

c) Qual é o valor de **x** nessa figura? 43°

d) Qual é a medida do ângulo externo adjacente ao ângulo $A\hat{I}H$? 33°

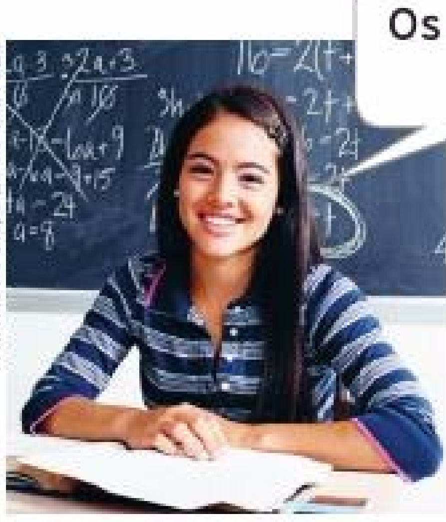
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, leiam, reflitam e resolvam.

Existe um polígono convexo em que o número de diagonais é igual ao número de lados.

- Que polígono é esse? Pentágono; n = 5.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Os números precisam ser iguais...

n ——— número de lados

$\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$ ——— número de diagonais

É só equacionar.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

16. Em que polígono o número de diagonais é o dobro do número de lados? Heptágono.

17. Quantos lados tem um polígono em que o número de diagonais é o triplo do número de lados? 9 lados.

18. Em um polígono, cada vértice é extremidade de 9 diagonais. Que polígono é esse? Dodecágono.

19. Em um polígono, cada vértice é extremidade de 17 diagonais. Que polígono é esse? Icoságono.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

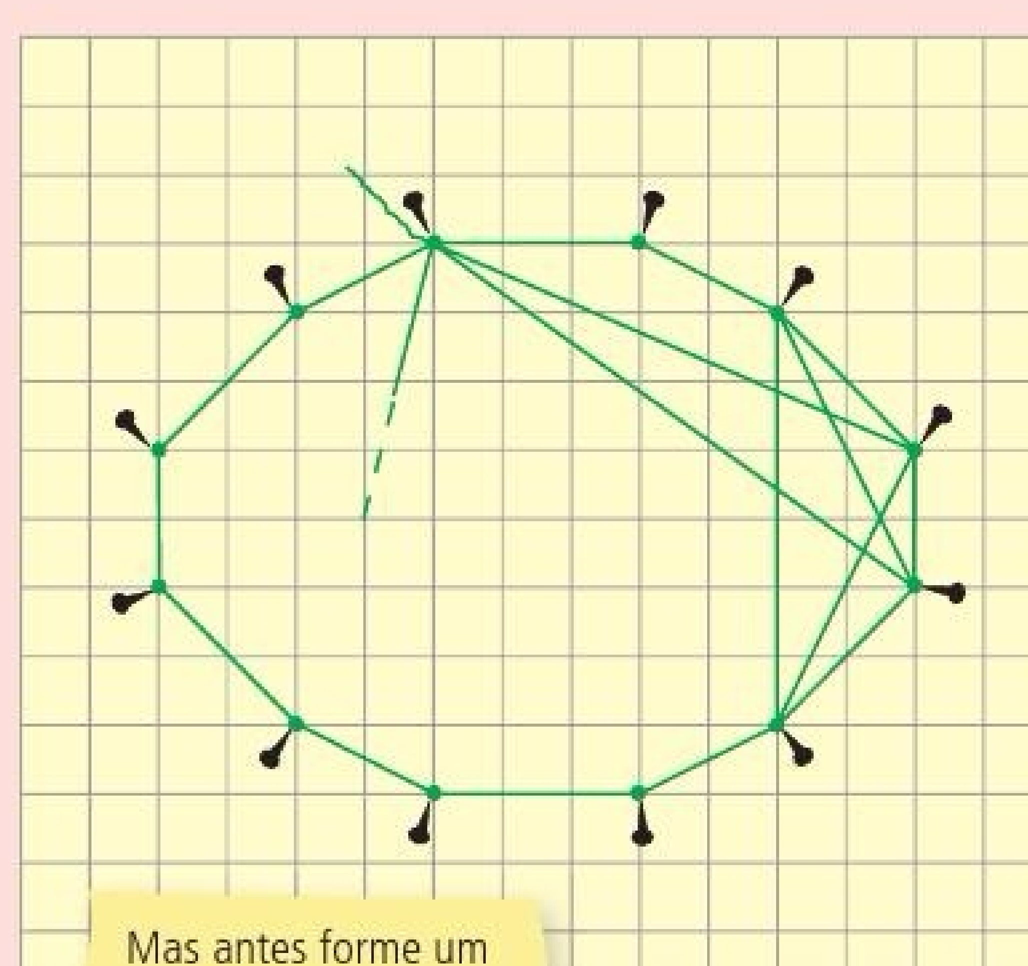
Polígonos, diagonais e trabalhos manuais

Estude a possibilidade de explorar este Desafio integrado com Educação Artística e ajustado ao seu plano pedagógico. É uma atividade lúdica que poderá auxiliar na compreensão do conteúdo estudado no texto.

- Providencie um pedaço de madeira quadrangular ou retangular e trace nele um quadriculado.
- Pregue tachinhas ou pequenos pregos em alguns vértices dos quadradinhos traçados.


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Neste foram colocados **12** pregos!



Mas antes forme um polígono convexo.

Arrume uma linha de bordar colorida e ligue um prego ao outro, como se estivesse traçando diagonais, passando a linha em volta deles.

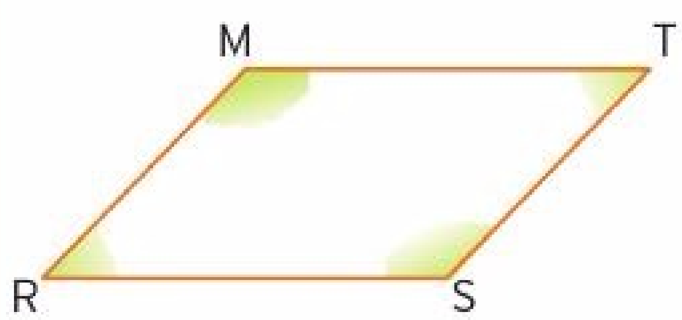
- E então, seu trabalho ficou legal? E os dos colegas?

2 Soma das medidas dos ângulos de um polígono

Revendo conhecimentos

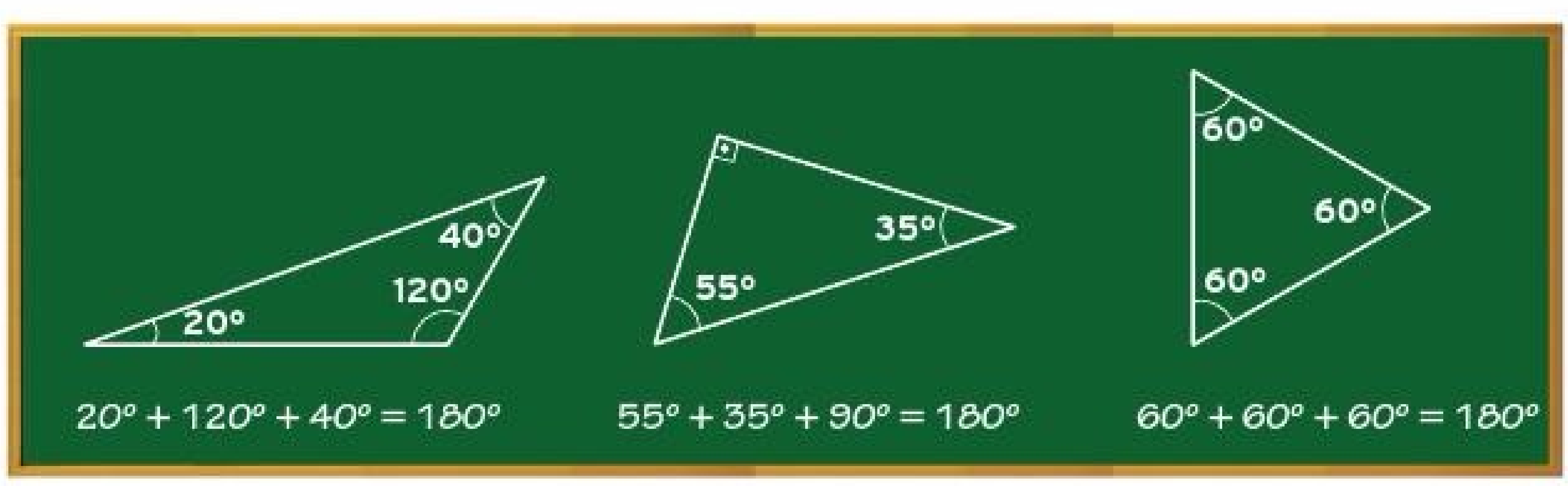
Para refletir e responder

Observe este paralelogramo e responda.



- Qual é a soma das medidas dos ângulos internos desse paralelogramo? 360°

Já sabemos que em qualquer triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é 180°.

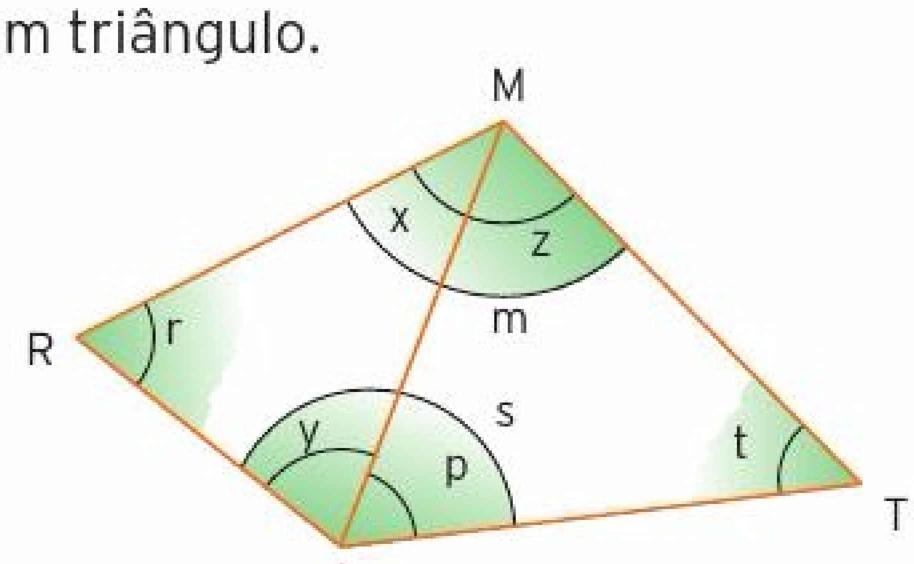


Além de obter a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, é possível calcular essa soma para outros polígonos convexos.

Certifique-se de que os alunos compreendem e utilizam os recursos da composição e decomposição para demonstrar propriedades e deduzir fórmulas.

Ângulos internos de um quadrilátero

Uma vez desenhado um quadrilátero qualquer MRST, é traçada uma das diagonais e determina-se a soma dos seus ângulos internos recorrendo-se à soma dos ângulos internos de um triângulo.



$\triangle TMS$ $\quad\quad$ $\triangle MRS$

$t + z + p = 180°$ $\quad\quad$ $x + r + y = 180°$

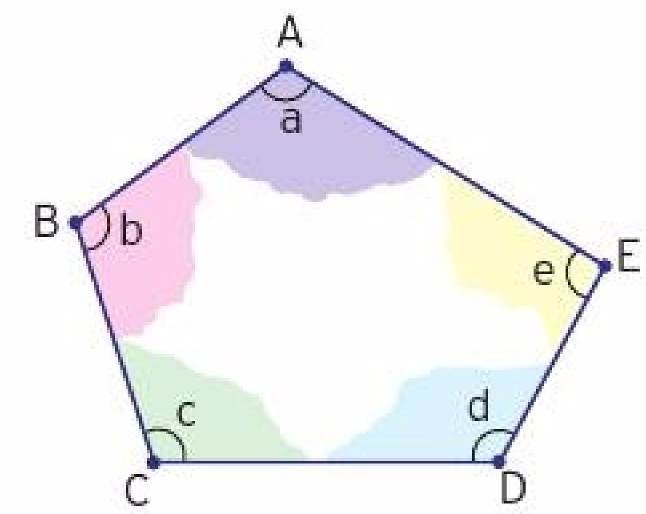
$\underbrace{t + z + p} + \underbrace{x + r + y} = 180° + 180°$

$t + \underbrace{z + x} + r + \underbrace{y + p} = 360°$

$\boxed{\mathbf{t + m + r + s = 360°}}$

Em qualquer quadrilátero convexo a soma das medidas dos ângulos internos é 360°.

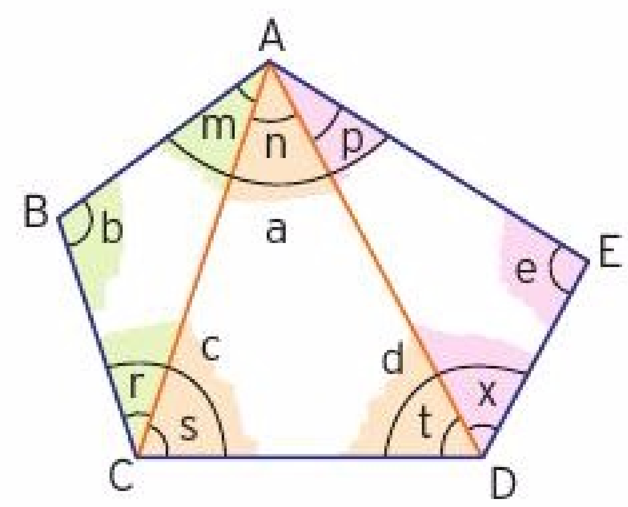
Ângulos internos de um pentágono



Nesta figura, ABCDE é um pentágono convexo.

Traçando as diagonais que têm uma das extremidades no vértice **A**, por exemplo, o pentágono fica decomposto em três triângulos.

Triângulos ABC, ACD e ADE.



São **5** vértices e **(5 − 2)** triângulos.

Em cada um desses triângulos, a soma das medidas dos ângulos internos é 180°.

$\triangle ABC$	$\triangle ACD$	$\triangle ADE$
$m + b + r = 180°$	$n + s + t = 180°$	$p + x + e = 180°$

Nos três triângulos…

$$m + b + r + n + s + t + p + x + e = 180° + 180° + 180°$$

ou: $\underbrace{m + n + p}_{\mathbf{a}} + b + \underbrace{r + s}_{\mathbf{c}} + \underbrace{t + x}_{\mathbf{d}} + e = 3 \cdot 180°$ ——— $\mathbf{a + b + c + d + e = 540°}$

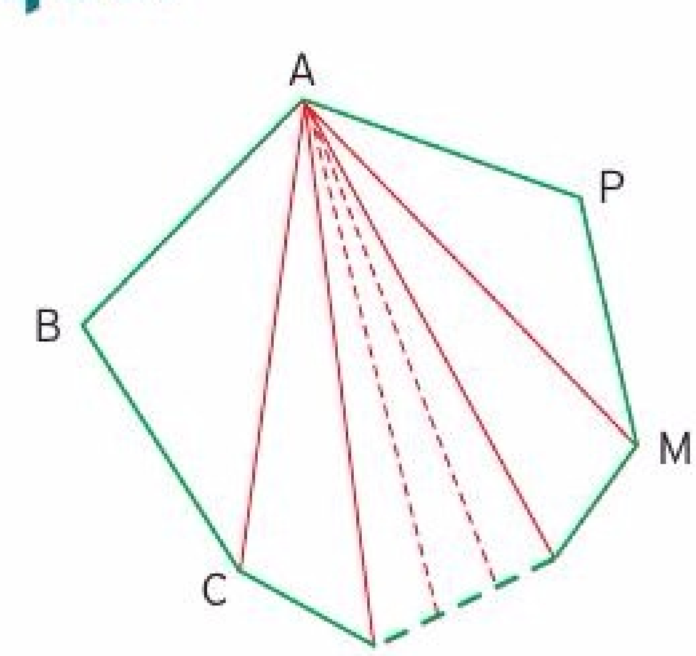
Em todo pentágono convexo, a soma das medidas dos ângulos internos é 540°.

Ângulos internos de um polígono qualquer

Se ABC ... MP é um polígono convexo com **n** lados e, portanto, com **n** ângulos, ele poderá ser decomposto, a partir de um de seus vértices, em **(n − 2)** triângulos.

A soma das medidas dos ângulos internos:

- em cada triângulo ——— 180°;
- em (n − 2) triângulos ——— (n − 2) · 180°.



n vértices;
(n − 2) triângulos.

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo com **n** lados é:

soma = (n − 2) · 180°

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

20. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um trapézio? 360°

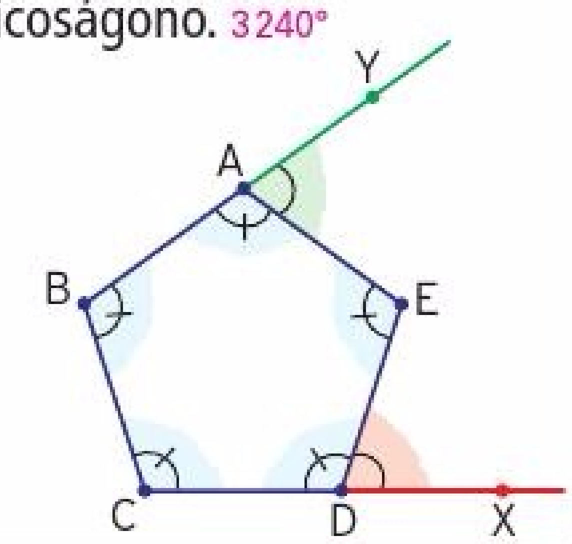
21. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um losango? 360°

22. Em um hexágono, se todos os ângulos internos forem congruentes, qual será a medida de cada um deles? 120°

23. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um:

a) decágono; 1 440° b) octógono; 1 080° c) icoságono. 3 240°

24. Neste pentágono, todos os ângulos internos são congruentes. Responda:



a) Qual é a medida de cada ângulo interno desse pentágono? 108°

b) Qual é a medida do ângulo externo $E\hat{D}X$? 72°

c) Qual é a medida do ângulo externo $E\hat{A}Y$? 72°

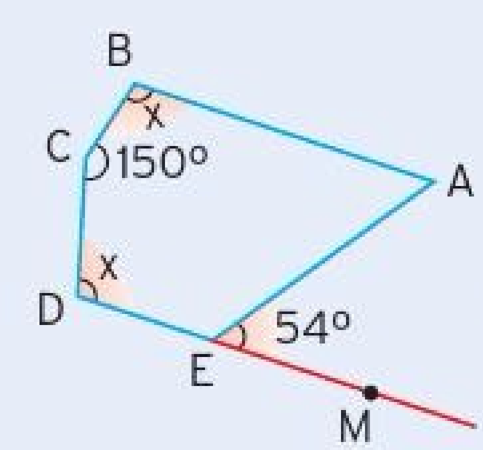
d) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos desse pentágono? 360°

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

No pentágono ABCDE, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos congruentes e $A\hat{E}M$ é um ângulo externo.



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

- Qual é o valor de **x**? 105°

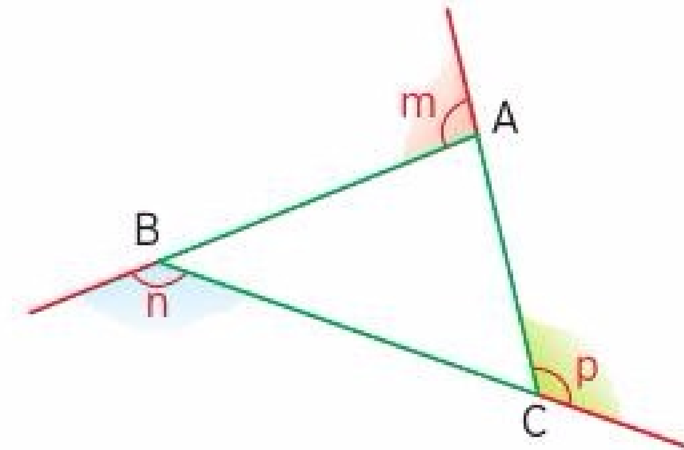
Soma das medidas dos ângulos externos

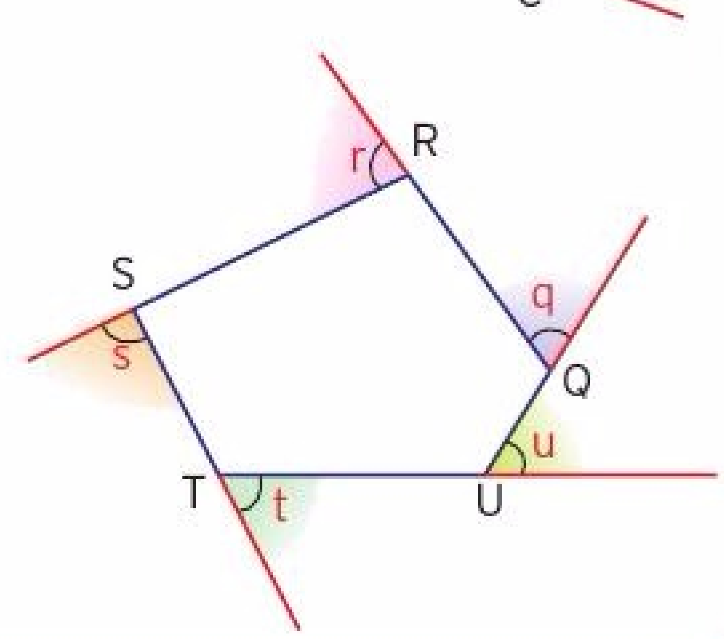
Para refletir e responder

Para os polígonos convexos, é também possível determinar a soma das medidas de seus ângulos externos.

Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do triângulo ABC?

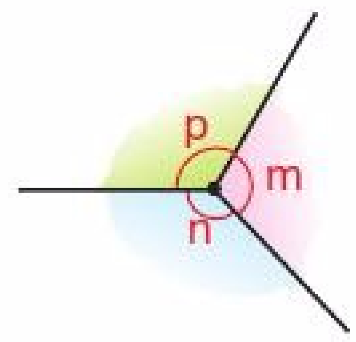
Desenhe, em uma folha de papel, um triângulo parecido com este e recorte os ângulos externos. Depois, faça uma composição com esses ângulos em torno de um ponto qualquer e determine a soma pedida.



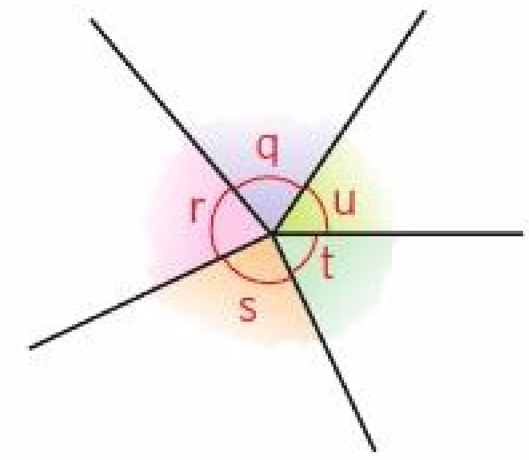


- Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do pentágono ao lado? 360°

Desenhando em uma folha à parte as figuras apresentadas e recortando os ângulos externos, podemos compô-los, em cada caso, em torno de um ponto fixo do plano. Veja:



Ângulos do triângulo ABC.

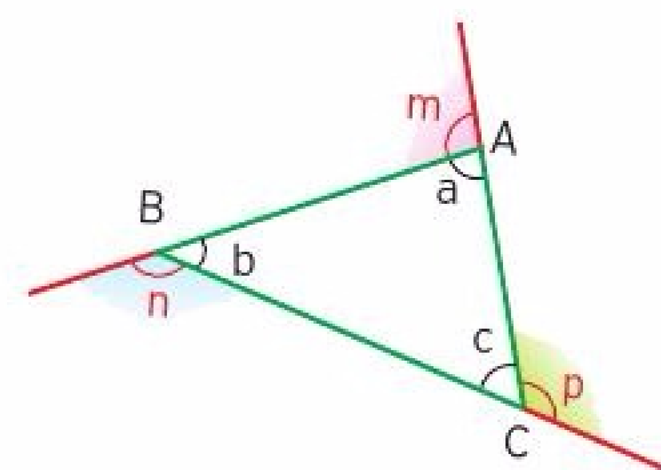


Ângulos do pentágono STUQR.

$\mathbf{m + n + p = 360^\circ}$ $\qquad$ $\mathbf{q + r + s + t + u = 360^\circ}$

Note que a soma das medidas dos ângulos externos tanto do $\triangle ABC$ como do pentágono STUQR é 360°. É possível mostrar que essa soma não depende de um triângulo particular nem de um pentágono particular.

Em um triângulo qualquer



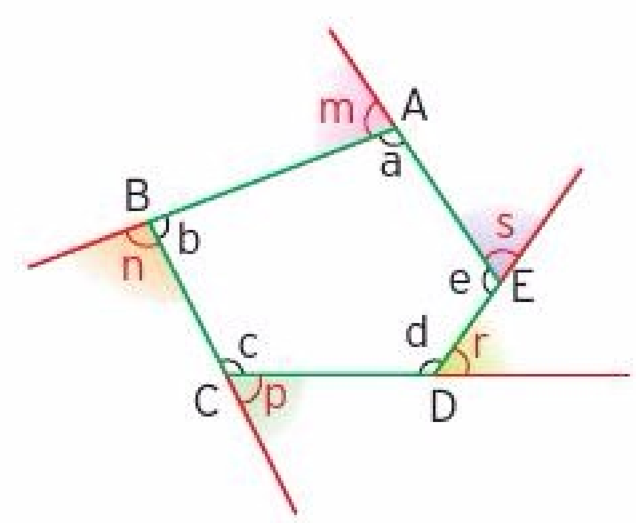
Observando um ângulo interno e o ângulo externo adjacente a ele no triângulo ao lado, pode-se escrever:

$$a + m = 180^\circ$$
$$b + n = 180^\circ$$
$$c + p = 180^\circ$$

$$a + m + b + n + c + p = 3 \cdot 180^\circ$$
$$\underbrace{a + b + c}_{180^\circ} + m + n + p = 540^\circ$$
$$180^\circ + m + n + p = 540^\circ$$
$$m + n + p = 540^\circ - 180^\circ$$
$$\mathbf{m + n + p = 360^\circ}$$

Adicionamos membro a membro as três igualdades.

Em um pentágono convexo qualquer



No pentágono ao lado, um ângulo interno e o ângulo externo adjacente a ele são ângulos suplementares:

$a + m = 180^\circ$ $\qquad$ $c + p = 180^\circ$ $\qquad$ $e + s = 180^\circ$

$b + n = 180^\circ$ $\qquad$ $d + r = 180^\circ$

Adicionando membro a membro as igualdades anteriores:

$$a + m + b + n + c + p + d + r + e + s = 5 \cdot 180^\circ$$
$$\underbrace{a + b + c + d + e}_{540^\circ} + m + n + p + r + s = 900^\circ$$
$$540^\circ + m + n + p + r + s = 900^\circ$$
$$m + n + p + r + s = 900^\circ - 540^\circ$$
$$\mathbf{m + n + p + r + s = 360^\circ}$$

De modo geral:

A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é **360°**.

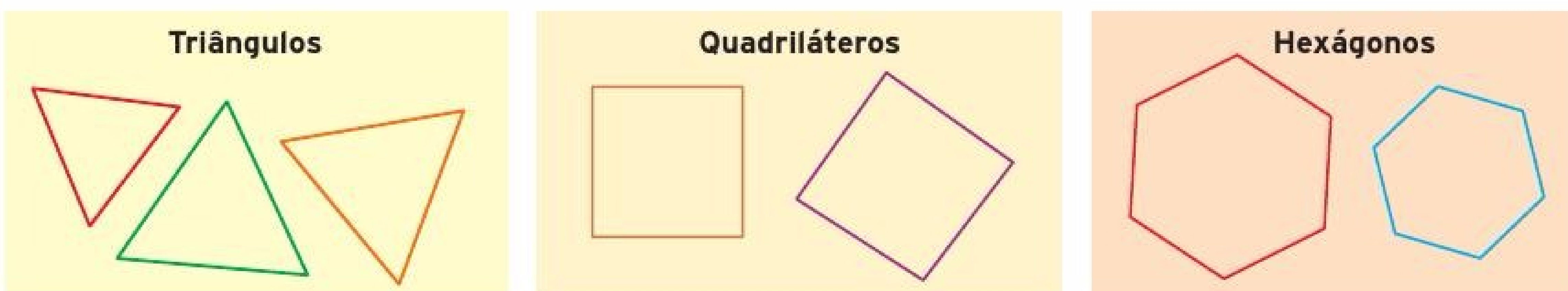
3 Polígonos regulares

Dada a importância dos polígonos regulares, certifique-se de que os alunos compreendem seu conceito, suas propriedades e suas aplicações.

O que são polígonos regulares?

Para refletir e responder

Observe os grupos de figuras a seguir.



- Em cada grupo, observe e compare os polígonos apresentados. O que eles têm em comum?

Em cada grupo, os polígonos têm lados e ângulos com medidas iguais.

Medindo os lados e os ângulos de cada polígono, constatamos que:

Nos **triângulos**:
- os lados têm medidas iguais;
- os ângulos têm medidas iguais.

Nos **quadriláteros**:
- os lados têm medidas iguais;
- os ângulos têm medidas iguais.

Nos **hexágonos**:
- os lados têm medidas iguais;
- os ângulos têm medidas iguais.

Esses **polígonos** são **regulares**, ou seja, são triângulos, quadriláteros e hexágonos regulares. Os triângulos regulares são chamados de **triângulos equiláteros** e os quadriláteros regulares, de **quadrados**.

Um **polígono** é **regular** quando todos os lados e todos os ângulos são congruentes entre si.

Muitos problemas que envolvem polígonos podem ser resolvidos aplicando as propriedades que conhecemos e as equações.

Exemplo: Em um polígono regular, os ângulos internos medem 135° cada um. Quantos lados tem esse polígono?

número de lados —— **x**

$$\underbrace{\text{medida de um ângulo interno}}_{135^\circ} = \frac{(x-2)\cdot 180^\circ}{x} \leftarrow \frac{\text{soma}}{x}$$

$$135^\circ = \frac{180^\circ \cdot x - 2 \cdot 180^\circ}{x}$$

$$\frac{135^\circ \cdot x}{x} = \frac{180^\circ \cdot x - 360^\circ}{x}$$

$$135^\circ x = 180^\circ x - 360^\circ$$

$$360^\circ = 45^\circ x \text{ —— } x = \frac{360^\circ}{45^\circ}$$

$$\mathbf{x = 8}$$

É um polígono com 8 lados. É um octógono.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

25. O retângulo é um quadrilátero regular? Por quê? Não; os lados nem sempre são congruentes entre si.

26. Que tipo de triângulo é um polígono regular? Explique por quê. Triângulo equilátero, porque tem todos os lados e todos os ângulos com medidas iguais.

27. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer hexágono é 720°. Qual é a medida de cada ângulo interno de um hexágono regular? 120°

28. Calcule as medidas dos ângulos internos e externos de um polígono regular de:

a) 8 lados; 135°; 45°

b) 15 lados; 156°; 24°

c) 20 lados. 162°; 18°

29. Quantos lados tem um polígono regular cujos ângulos internos medem 140° cada um? 9 lados.

30. Quantos lados tem um polígono regular cujos ângulos externos medem 30° cada um? 12 lados.

31. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é igual a 1 260°. Determine a medida de cada ângulo externo desse polígono. 40°

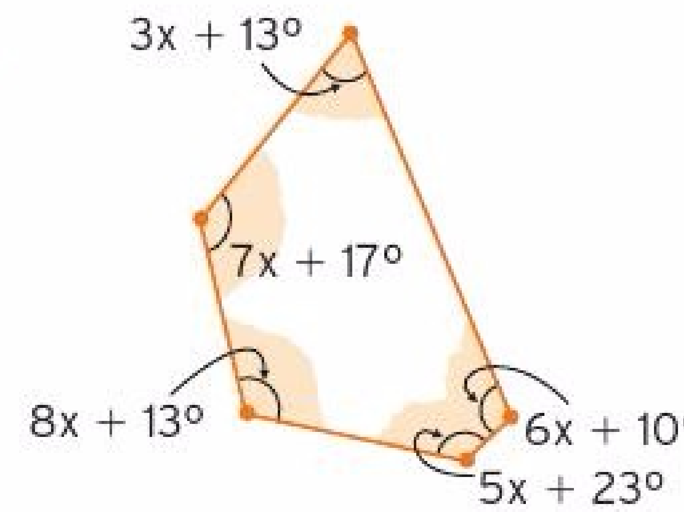
32. Qual é o polígono regular cuja medida de cada ângulo interno é igual à medida do ângulo externo adjacente a ele? Quadrado.

33. Em um polígono convexo, a soma das medidas dos ângulos internos é 2 880°. Quantos lados tem esse polígono? 18 lados.

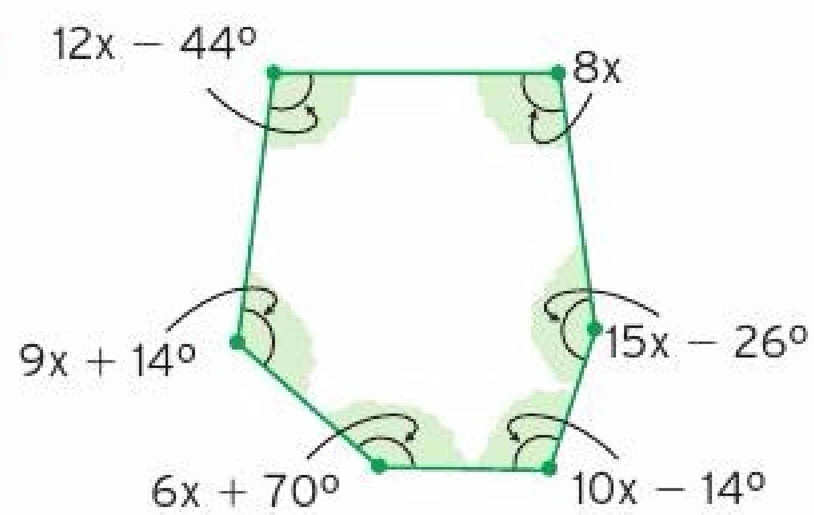
34. Quantos lados tem um polígono convexo cuja soma das medidas dos ângulos internos é 3 600°? 22 lados.

35. Calcule o valor de **x** nestas figuras:

a) 16°



b) 12°



36. Os ângulos internos de um quadrilátero convexo medem (3x + 28°), (8x + 43°), (2x + 42°) e (12x − 28°).

a) Qual é o valor de **x**? 11°

b) Quais são as medidas dos ângulos internos desse quadrilátero? 61°; 131°; 64°; 104°

37. Qual é o polígono regular cuja medida de cada ângulo interno é igual ao dobro da medida do ângulo externo adjacente a ele? Hexágono.

38. Qual é o polígono regular no qual a soma das medidas dos ângulos internos mais a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 900°? Pentágono.

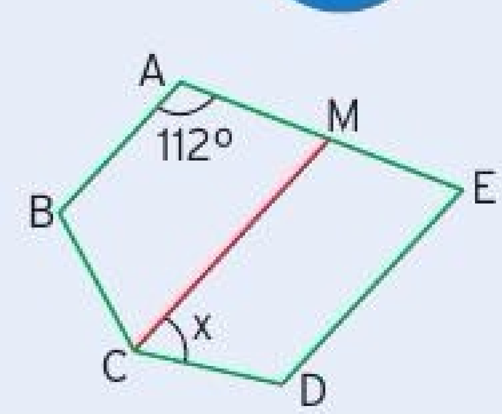
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Nesta figura, $\overline{BA}$, $\overline{CM}$ e $\overline{DE}$ são paralelas entre si; $\overline{CM}$ é bissetriz de $B\hat{C}D$ e med $A\hat{B}C$ é o dobro de med $B\hat{C}M$.

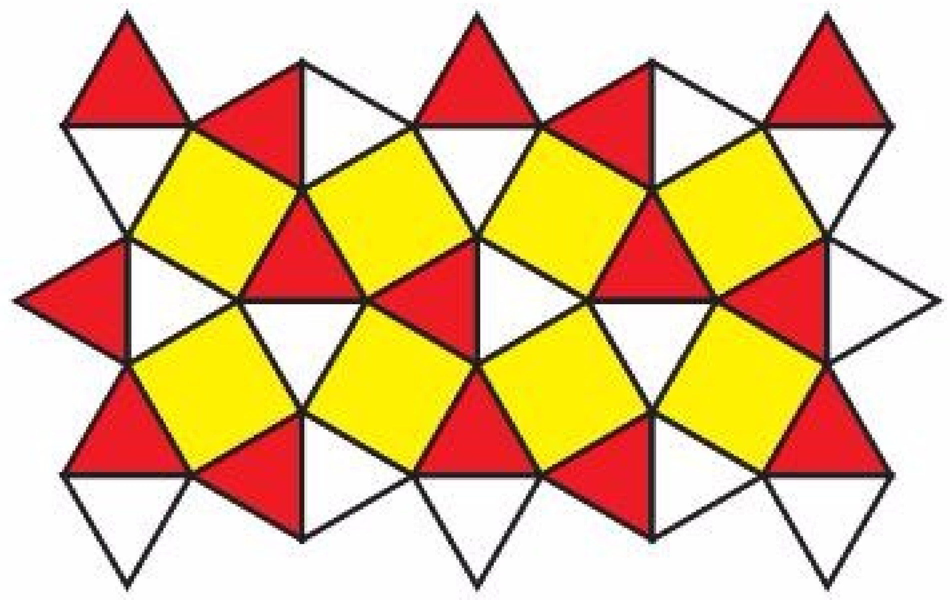
- Qual é o valor de **x**? 60°



Leitura

Polígonos regulares e ladrilhamento

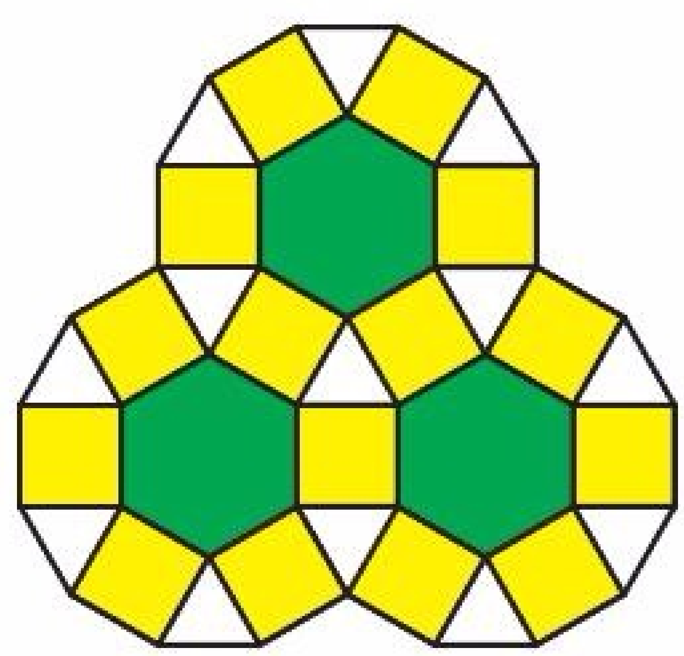
O recobrimento de um plano feito somente com polígonos, sem lacunas e sem sobreposições de figuras, semelhantes aos mosaicos, é o que chamamos em Matemática de ladrilhamento.



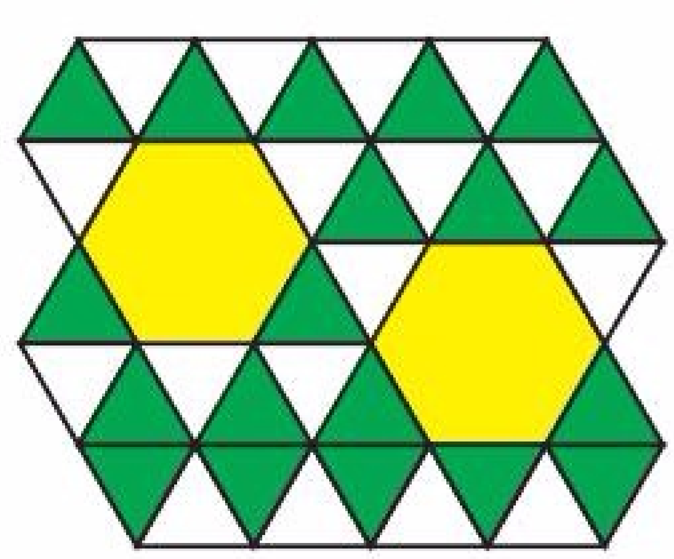
Os ladrilhamentos feitos somente com polígonos regulares já eram conhecidos pelos pitagóricos na Grécia. Atualmente, sabemos que existem somente **onze possibilidades** de combinar polígonos regulares diferentes e obter um ladrilhamento.

Podemos combinar, por exemplo:

- 1 hexágono regular com 1 triângulo equilátero e 2 quadrados;



- 2 hexágonos regulares com 2 triângulos equiláteros.



Achou interessante? Então, tente produzir ladrilhamentos combinando, por exemplo:

- 1 hexágono regular e 3 triângulos equiláteros;
- 2 octógonos regulares e 1 quadrado.

Fonte: *Revista do Professor de Matemática*, 40, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

Revisão cumulativa e testes

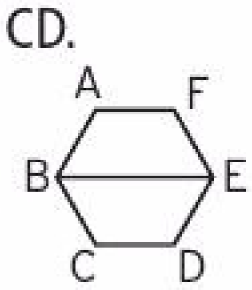
1. Resolva a equação considerando que y representa um número real. $y = -8$

$$\frac{1 + 2y}{3} + \frac{(3y + 4) \cdot (3y - 4)}{24} = \frac{y \cdot (3y + 7)}{8} - 2$$

2. Calcule, caso exista, o valor numérico de $\dfrac{-a^2 + 3b}{2a - b}$ para:

a) $a = 0$ e $b = -\dfrac{1}{6}$ -3 b) $a = -\dfrac{1}{2}$ e $b = -1$ Não existe.

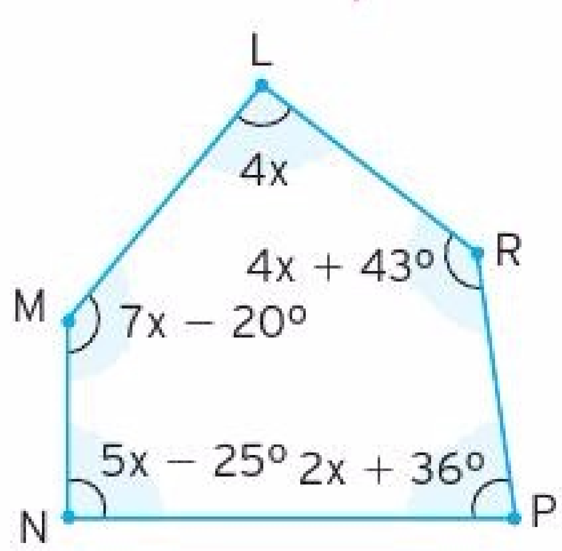
3. Nesta figura, ABCDEF é um hexágono regular e $\overline{BE}$ é paralelo a $\overline{CD}$.



a) Que polígono é BCDE? Quanto medem seus ângulos internos? Trapézio. Med $\hat{B}$ = med $\hat{E}$ = 60°; med $\hat{C}$ = med $\hat{D}$ = 120°

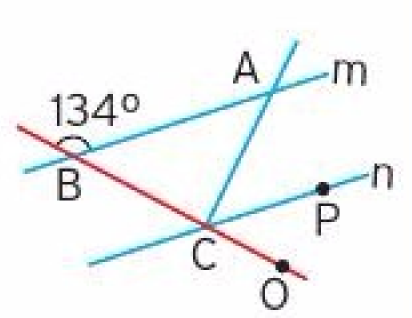
b) Quanto medem os ângulos internos de ABCDEF? 120°

4. O polígono LMNPR é um pentágono e **x** representa uma medida em graus. Qual é o valor de **x**? E da medida de $L\hat{M}N$? 23°; 90°



5. A diferença entre as medidas de um ângulo interno e de um ângulo externo de um polígono regular é 60°, e um ângulo interno é obtuso. Quantos lados tem esse polígono? 6 lados.

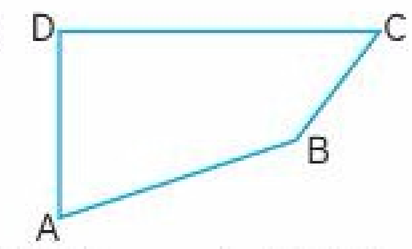
6. Nesta figura, as retas **m** e **n** são paralelas e $\overrightarrow{CP}$ é bissetriz $A\hat{C}O$. Qual é a medida de $B\hat{A}C$? 46°



7. Quantas diagonais tem o polígono regular cuja diferença entre as medidas de um ângulo interno e de um ângulo externo é 36°? 5 diagonais.

8. (Saresp) Considere o polígono.

A soma dos seus ângulos internos é: b

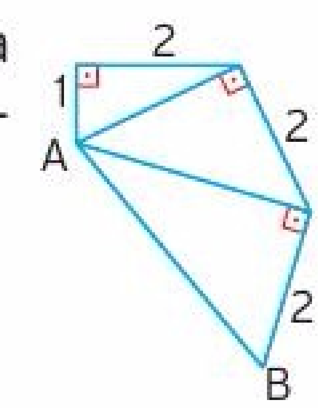


a) 180° b) 360° c) 720° d) 540°

9. Um percurso circular tem 18,5 km de diâmetro. Ao percorrer $\frac{3}{8}$ desse percurso, você terá percorrido, aproximadamente: c

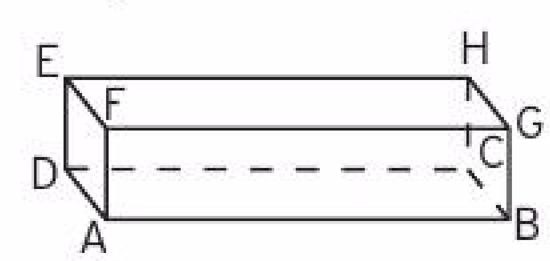
a) 43 568 m
b) 4 356 m
c) 21 784 m
d) 2 178 m

10. A medida de $\overline{AB}$ representada na figura ao lado, em centímetros, é: d



a) π cm
b) $\sqrt{11}$ cm
c) $\sqrt{10}$ cm
d) $\sqrt{13}$ cm

11. Observe o paralelepípedo retângulo e identifique a afirmação correta. c



a) A aresta $\overline{AD}$ é paralela à aresta $\overline{BG}$.

b) As faces ABCD e EFGH são perpendiculares entre si.

c) A aresta $\overline{EF}$ é perpendicular à aresta $\overline{DE}$.

d) As faces ABGF e ABCD são paralelas entre si.

12. Duzentas pessoas responderam a uma pesquisa, na qual indicaram o local que mais frequentam nos fins de semana. A distribuição das respostas está registrada na tabela a seguir:

	Shopping	Clube	Restaurante	Praia
Número de respostas	100	50	30	20

O gráfico de setores que representa o resultado dessa pesquisa pode ser: b

a)  b)  c)  d) 

UNIDADE

10 Inequações e sistemas de equações

ROGERIO REIS/TYBA

Nesta unidade...

1. Inequações de 1º grau com uma incógnita
2. Resolvendo inequações
3. Sistema de equações

Nesta unidade ampliaremos o conhecimento sobre a Álgebra, estudando as inequações com uma incógnita e as equações com duas variáveis.

A placa indica que as velocidades permitidas em quilômetros por hora, nessa estrada, podem ser expressas pela desigualdade $0 < v \leqslant 50$.

Em muitas situações cotidianas, são apresentados desafios como estes e que precisam ser resolvidos.

A solução de problemas em Matemática pode ser encontrada de várias maneiras. Usar a Aritmética é uma delas. Podem também ser feitas algumas estimativas e tentativas, ou seja, escolher um número ao acaso e verificar se ele é ou não solução da questão proposta.

Além disso, a solução procurada pode ser relacionada recorrendo-se às informações apresentadas e escrevendo igualdades que resultam em equações, ou desigualdades que resultam em inequações.

O que você já sabe?

- Como é chamada uma igualdade como esta que está no quadro ao lado? $2x - 4 = -5x + 10$
  Equação do 1º grau com uma incógnita.
- O número 20 é solução da questão proposta pelo jovem na primeira situação acima? Explique por quê.
  Não, porque metade de 20 é igual a 10, o triplo de 20 é igual a 60 e 10 + 60 é igual a 70, que não é menor que 70.
- Qual é o maior número natural que pode ser a solução do problema proposto pelo jovem? 19
- Indicando a massa de uma caixa por **x**, é possível escrever a situação da balança de dois pratos, por meio de uma das desigualdades abaixo. Qual delas? a

  a) $5x > 7$ b) $5x < 7$ c) $7 > 5x$

1 Inequações de 1º grau com uma incógnita

Desigualdade e inequações

Para refletir e responder

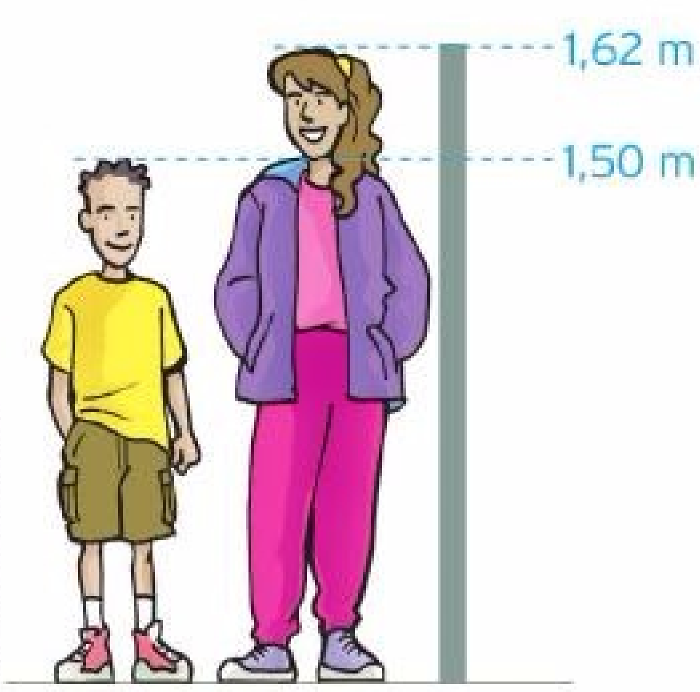
A festa na casa de Mariana foi um sucesso!

Muitas pessoas já estavam se divertindo quando chegaram mais 15. Com isso, o número de pessoas passou a ser maior que o dobro do número inicial.


JGI/JAMIE GRILL/GETTY IMAGES

- Indique o número de pessoas que já estavam na festa por y e escreva uma desigualdade que represente essa situação.
  Resposta possível: $y + 15 > 2y$.

Quando uma situação de comparação entre grandezas resulta em quantidades diferentes, ela pode ser expressa por uma **desigualdade**.



FRANCISCO VILACHÃ

A altura de Pedro é **diferente** da altura de Maria ______ $1,50 \neq 1,62$

A altura de Pedro é **menor** que a de Maria ______ $1,50 < 1,62$

A altura de Maria é **maior** que a de Pedro ______ $1,62 > 1,50$

Dessa forma, a situação da festa de Mariana pode ser representada pela desigualdade $y + 15 > 2y$.

$$\underbrace{\text{Número inicial de pessoas}}_{y}\ \underbrace{\text{acrescido de}}_{+}\ \underbrace{15}_{15}\ \underbrace{\text{é maior que}}_{>}\ \underbrace{\text{o dobro do número inicial de pessoas.}}_{2 \cdot y}$$

$y + 15 > 2y$ é uma **inequação de 1º grau** com uma incógnita.

Assim como as equações, as inequações têm dois membros.

$$\underbrace{y + 15}_{\text{1º membro}} > \underbrace{2y}_{\text{2º membro}}$$

Para essa situação, também é possível escrever a inequação:

$$2y < y + 15$$

O dobro do número inicial de pessoas é menor que esse número acrescido de 15 pessoas.

Uma **inequação** é expressa por uma **desigualdade** entre **expressões algébricas** que envolvem operações com números e números representados por letras.

Propicie aos alunos outras situações-problema que possam ser traduzidas por inequações e verifique se eles compreendem o significado das inequações escritas na linguagem matemática.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Identifique as desigualdades que são inequações de 1º grau com uma incógnita. a, b

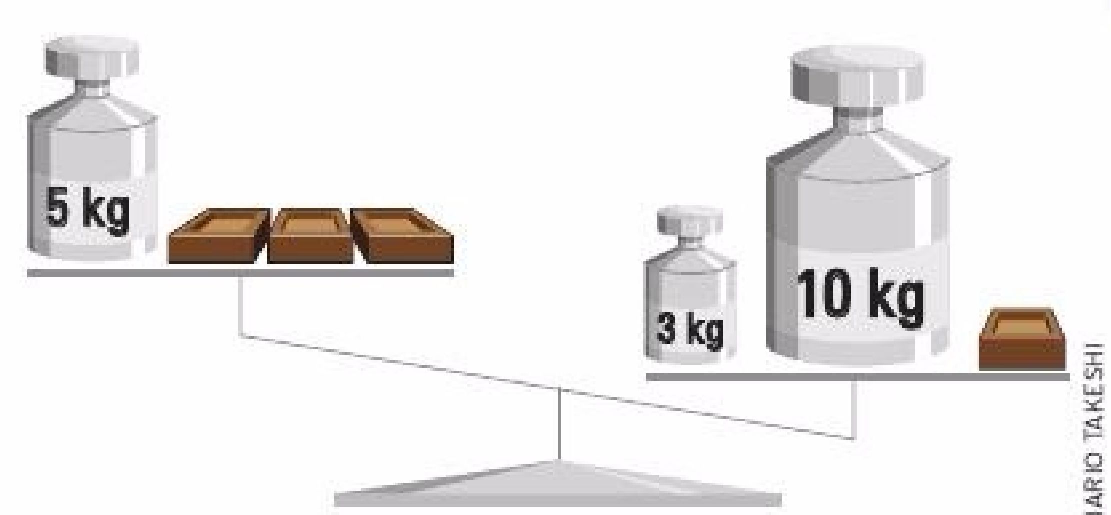
a) $9 - 12x < 17$ b) $y < \frac{8}{3}y + 21$ c) $2m^2 + 1 < m$ d) $9x - y < 43$

2. O quádruplo do aluguel de um apartamento acrescido de R$ 50,00 é mais que R$ 900,00. Identifique as inequações que podem traduzir essa situação. c, d

a) $4x > 900$ b) $4x + 50 < 900$ c) $4x + 50 > 900$ d) $900 < 4x + 50$

3. Os tijolos que estão na balança têm massas iguais e ela está desequilibrada: o prato que contém apenas um tijolo está abaixo do outro prato. Represente essa situação por meio de uma inequação.

Resposta possível: $5 + 3x < 13 + x$.



4. Copie o quadro a seguir em seu caderno e complete-o.

Inequação	Situação
$\frac{m}{3} - 10 > m$	A terça parte de um número subtraída de 10 é maior que esse número.
$\frac{3x}{4} < 42$	Três quartos de estudantes de uma turma é menor que 42.
$5a < 4\,200$	Renato quer comprar uma moto que custa R$ 4 200,00. O quíntuplo de seu salário é menor que o preço dessa moto.
$4n + 3 > 25$	O quádruplo da idade de meu irmão acrescido de 3 é maior que 25.

Respostas possíveis.

2 Resolvendo inequações

Solução de uma inequação de 1º grau com uma incógnita

Para refletir e responder

João está brincando na barraca "Derrube a bola certa".

Quando se aciona um dos botões, uma das bolas numeradas de 1 a 6 cai em um prato. Esses números representam as massas das bolas em quilogramas. Uma campainha toca e João ganha um brinde quando a massa da bola adicionada à massa do prato ultrapassa 6 quilogramas. Resposta possível: $x + 3 > 6$

- Indique a massa da bola por **x** e escreva uma inequação que represente essa situação.

Diferentemente das equações de 1º grau com uma incógnita, que costumam ter uma única solução, as inequações, quando têm solução, costumam ter várias delas.

$\mathbf{x + 3 > 6}$ é uma inequação que traduz o problema proposto acima.

Na inequação $x + 3 > 6$, pode-se atribuir a **x** qualquer um dos valores que representam as massas das bolas: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Alguns deles transformam a inequação em uma sentença verdadeira e outros, em uma sentença falsa.

Vamos atribuir a **x** os valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 na inequação $x + 3 > 6$.

x	$x + 3 > 6$	Sentença	Campainha
1	$1 + 3 > 6$	Falsa	Não toca
2	$2 + 3 > 6$	Falsa	Não toca
3	$3 + 3 > 6$	Falsa	Não toca
4	$4 + 3 > 6$	Verdadeira	Toca
5	$5 + 3 > 6$	Verdadeira	Toca
6	$6 + 3 > 6$	Verdadeira	Toca

Os números 4, 5 e 6 representam as massas das bolas que fazem a campainha tocar. Esses números são as **soluções** da inequação $\mathbf{x + 3 > 6}$ no problema proposto acima.

Como encontrar as soluções de uma inequação?

Encontramos as soluções de uma inequação resolvendo-a, ou seja, determinando os valores da variável que transformam a sentença em uma desigualdade verdadeira.

No processo de resolução de uma inequação podem ser aplicadas as propriedades das desigualdades, que não serão demonstradas neste momento.

É possível mostrar que, em uma inequação, podemos:

- adicionar ou subtrair um mesmo número real aos dois membros da inequação que o sentido da desigualdade não muda;

  Exemplos:

  ✓ $x + 3 > 6$ ——— $x + 3 + 10 > 6 + 10$

  ✓ $8 - 5x < 2x$ ——— $8 - 5x - 8 < 2x - 8$

- multiplicar ou dividir os dois membros da inequação por um mesmo número real, positivo, que o sentido da desigualdade não muda;

  Exemplos:

  ✓ $7x + 21 > -10$ ——— $2 \cdot (7x + 21) > 2 \cdot (-10)$

  ✓ $7x + 21 > -10$ ——— $\frac{7}{7}x + \frac{21}{7} > -\frac{10}{7}$

- multiplicar ou dividir os dois membros da inequação por um mesmo número inteiro negativo e, nesse caso, muda o sentido da desigualdade.

  Exemplos:

  o sinal de desigualdade muda de sentido

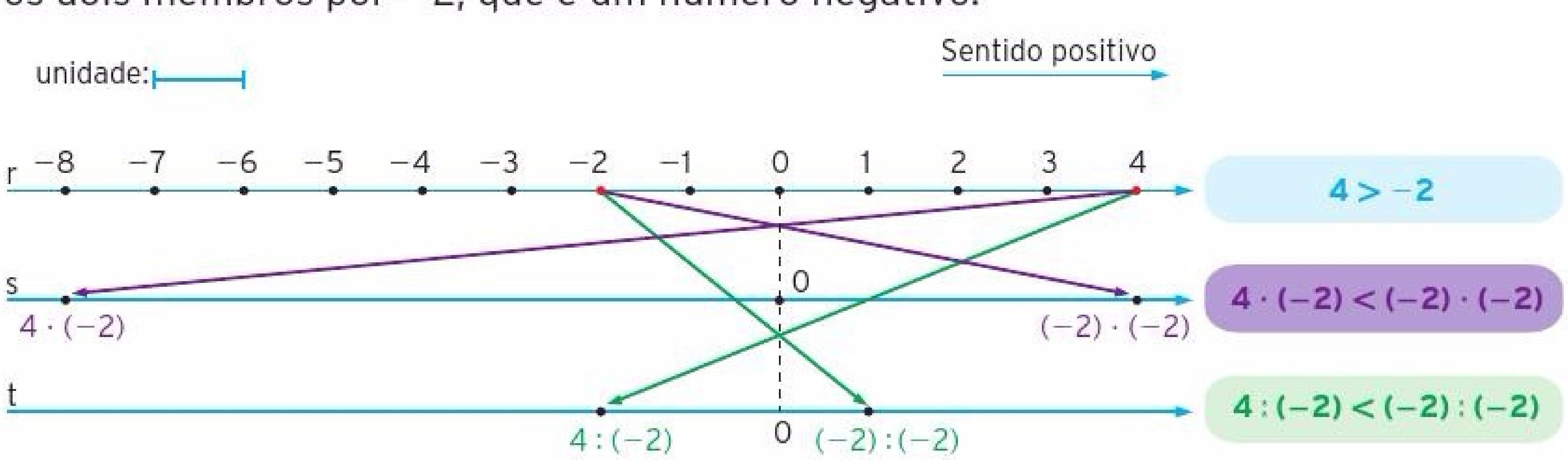
  ✓ $x + 3 > 6$ ——— $-5 \cdot (x + 3) < -5 \cdot 6$

  ✓ $-10x \leq 50$ ——— $\frac{-10x}{-10} \geq \frac{50}{-10}$

  o sinal de desigualdade muda de sentido

  ✓ Neste caso, veja um exemplo com números.

  Observe o que ocorre com a desigualdade **4 > −2** quando multiplicamos ou dividimos os dois membros por −2, que é um número negativo.



As desigualdades obtidas têm sentido contrário ao sentido da desigualdade inicial.

Ou seja:

Multiplicando por número negativo

$$4 > -2$$

multiplicando cada membro por **−2** → $4 \cdot (-2) < (-2) \cdot (-2)$

$$-8 < 4$$

Como $4 > -2$, então $4 \cdot (-2) < (-2) \cdot (-2)$.

Dividindo por um número negativo

$$4 > -2$$

$4 : (-2) < (-2) : (-2)$ ← dividindo cada membro por **−2**

$$-2 < 1$$

Como $4 > -2$, então $4 : (-2) < (-2) : (-2)$.

Lembre-se: as mesmas observações feitas acima valem para desigualdade entre números reais.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

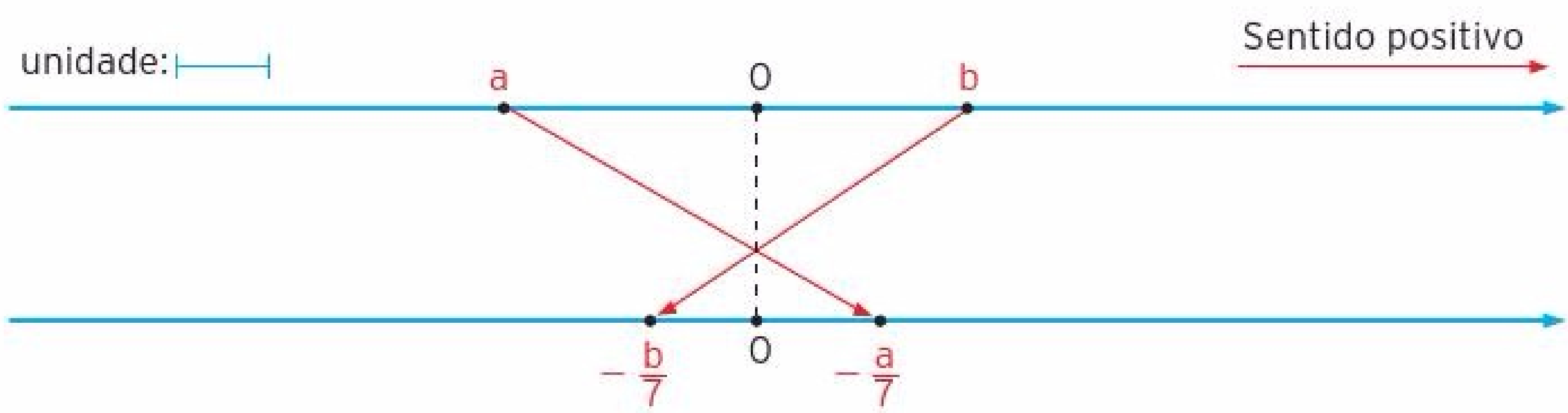
5. Analise cada uma das afirmações e indique as que estão corretas. Reescreva as afirmações incorretas, de modo que se tornem verdadeiras.

a) Adicionando -20 aos dois membros de $-12 < 18$, a nova desigualdade tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

b) Subtraindo -10 dos dois membros de $25 < 33$, a nova desigualdade tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

c) Multiplicando por $-\frac{3}{4}$ os dois membros de $0 > -10$, a nova desigualdade tem o mesmo sentido da desigualdade inicial. Corretas: a, b. c) Multiplicando por $-\frac{3}{4}$ os dois membros de $0 > -10$, a nova desigualdade tem sentido contrário ao da desigualdade inicial.

6. Observe estas retas numeradas:



a) Compare **a** e **b** usando o símbolo $>$. $b > a$

b) Compare $-\frac{a}{7}$ e $-\frac{b}{7}$ usando $<$ ou $>$. $-\frac{b}{7} < -\frac{a}{7}$ ou $-\frac{a}{7} > -\frac{b}{7}$

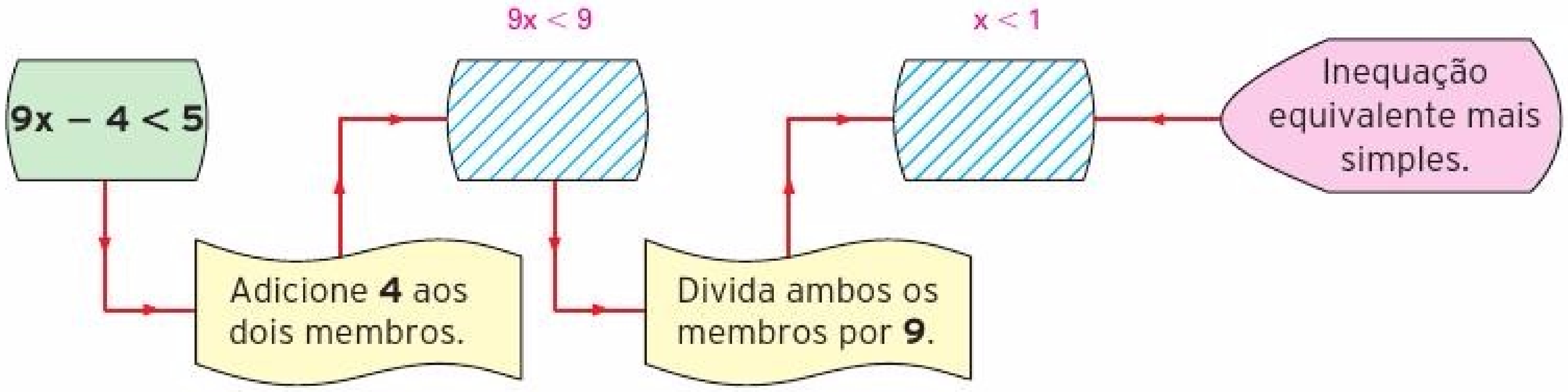
c) Como pode ser obtida a desigualdade encontrada no item **b**, a partir da desigualdade encontrada no item **a**? Resposta possível: Dividindo os dois membros da desigualdade do item **a** por -7.

7. Anote os números que são soluções da inequação $9x - 4 < 5$. -10, 0

-10	0	7

8. Escreva três números que são soluções da inequação $9x - 4 < 5$, considerando o conjunto dos números racionais positivos como conjunto de números que podem ser atribuídos a **x**. Respostas possíveis: 0,25; $\frac{1}{2}$; 0

9. Desenhe um esquema como este, siga as instruções dos quadros e complete-os. Ao final, você terá uma inequação mais simples do que a inicial com as mesmas soluções que ela e que é equivalente à inequação inicial.



Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam e respondam.

Dona Antonieta é a professora de Matemática de Carlos. Como ele é um garoto indiscreto, perguntou-lhe a idade. Dona Antonieta respondeu: "O dobro da minha idade adicionado a 54 é menor que o triplo dela mesma".

- Quais seriam as possíveis idades de Dona Antonieta? Resposta possível: 55, 55 e meio, 56, 57...

Resolução de inequações

Resolver uma inequação de 1º grau com uma incógnita significa determinar suas soluções. Exemplos:

- Resolução da inequação $3x - 4 > x - 8$, sendo **x** um número real.

$$3x - 4 > x - 8$$

$$3x - 4 + 4 > x - 8 + 4$$

$$3x > x - 4$$

$$3x - x > x - 4 - x$$

$$2x > -4$$

$$\frac{\cancel{2x}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1}} > -\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}}$$

$$\mathbf{x > -2}$$

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Os valores possíveis para **x** são todos os números reais maiores que -2.

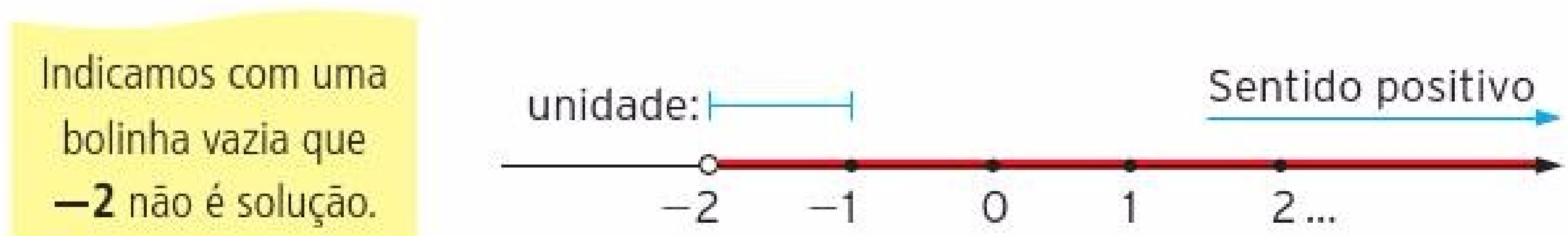
Na prática, nem sempre são escritas todas as passagens.

$$3x - 4 > x - 8$$

$$3x - x > -8 + 4$$

$$2x > -4 \longrightarrow \mathbf{x > -2}$$

Lembrando que **x** representa um número real, podemos apresentar as soluções dessa inequação na reta numerada:



Essas inequações que apareceram no procedimento de resolução têm as mesmas soluções e dizemos que elas são equivalentes.

$3x - x > -8 + 4$	$2x > -4$	$x > -2$

A inequação mais simples equivalente a $3x - 4 > x - 8$ é $\mathbf{x > -2}$.

- Paulo pensou em um número inteiro.

Qual deles deu a resposta correta? Todos deram a resposta correta.

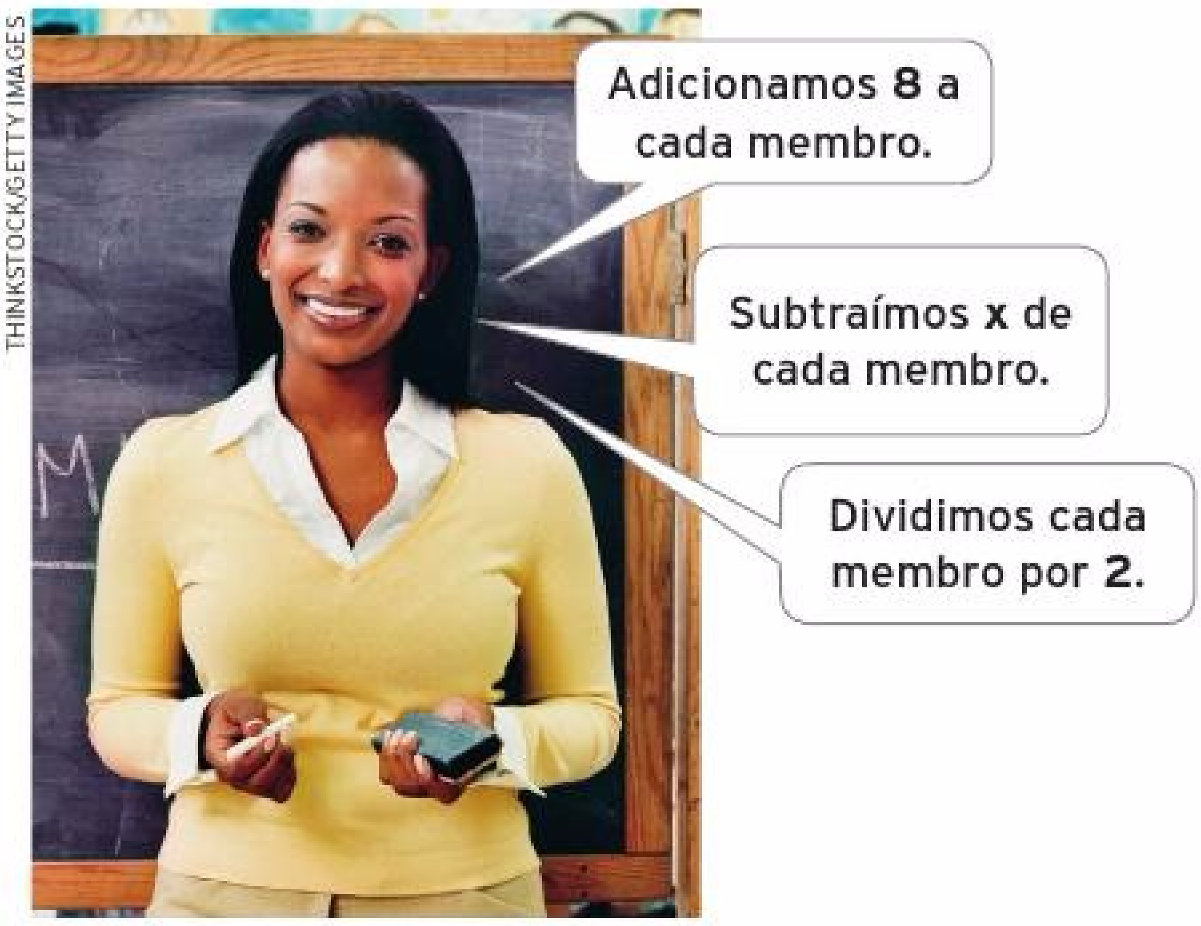
Na situação acima, Paulo pode ter pensado em qualquer número inteiro maior que 4 e o problema proposto por ele tem infinitas soluções. Veja como resolver o problema escrevendo e resolvendo uma inequação do 1º grau.

x ——— número inteiro em que Paulo pensou

3 · x ——— o triplo desse número

O triplo de um número inteiro menos 8 unidades é maior que o número.

$$\underbrace{\text{O triplo de um número inteiro}}_{3x}\ \underbrace{\text{menos}}_{-}\ \underbrace{\text{8 unidades}}_{8}\ \underbrace{\text{é maior que}}_{>}\ \underbrace{\text{o número.}}_{x}$$



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$3x - 8 > x$$
$$3x - 8 + 8 > x + 8$$
$$3x > x + 8$$
$$3x - x > x + 8 - x$$
$$2x > 8$$
$$\frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$$
$$\mathbf{x > 4}$$

Muitas inequações apresentam expressões com parênteses e denominadores. Elas podem ser resolvidas aplicando o que já aprendemos sobre o assunto.

Exemplos:

- $-2 \cdot (y + 8) \leqslant 3 \cdot (2y - 1) - 1$

y representa um número inteiro.

Podemos começar eliminando os parênteses:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$$-2 \cdot (y + 8) \leqslant 3 \cdot (2y - 1) - 1$$

$$-2y - 16 \leqslant 6y - 3 - 1$$

Escolhemos o 1º membro para isolar **y**

$$-2y - 6y \leqslant -3 - 1 + 16$$

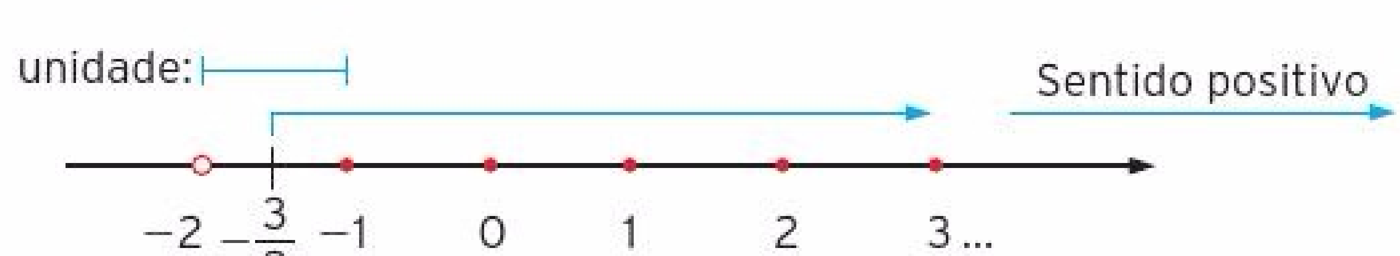
$$-8y \leqslant 12$$

Invertemos o sentido da desigualdade

$$\frac{\cancel{-8}^{1}y}{\cancel{-8}_{1}} \geqslant \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{-8}_{2}} \text{ ——— } \mathbf{y \geqslant -\frac{3}{2}}$$

Os valores possíveis para **y** são os números inteiros maiores ou iguais a $-\frac{3}{2}$, ou seja, −1, 0, 1, 2, ...

Vamos representar as soluções na reta numerada:



As soluções de uma inequação podem ser indicadas por meio de **linguagem simbólica**, como se vê abaixo.

Solução: $y \in \mathbb{Z},\ y \geqslant -\dfrac{3}{2}$

- $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{5x+1}{2} > 3$ **x** representa um número natural.

Reduzimos todos os termos da inequação ao menor denominador comum.

$$\frac{2 \cdot (x-2) - 3 \cdot (5x+1)}{6} > \frac{6 \cdot 3}{6}$$

m.m.c. (3, 2) = 6

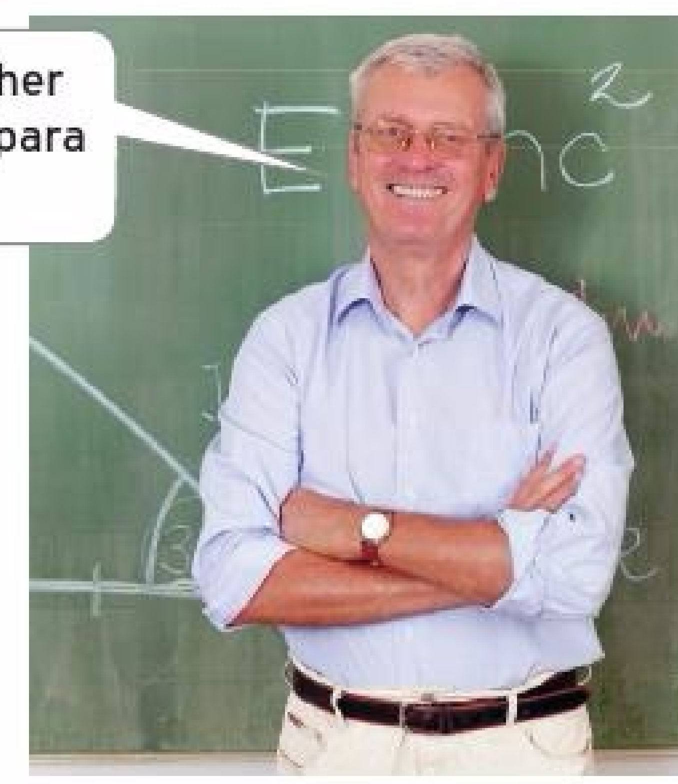
$$\cancel{6}^{1} \cdot \frac{2 \cdot (x-2) - 3 \cdot (5x+1)}{\cancel{6}_{1}} > \frac{6 \cdot 3}{\cancel{6}_{1}} \cdot \cancel{6}^{1}$$

$$2 \cdot (x-2) - 3 \cdot (5x+1) > 18$$

$$2x - 4 - 15x - 3 > 18$$

$$-4 - 3 - 18 > -2x + 15x \text{ ——— } -25 > 13x$$

$$13x < -25 \text{ ——— } \mathbf{x < -\frac{25}{13}}$$



THINKSTOCK/GETTY IMAGES

O valor de **x** deve ser menor que $-\dfrac{25}{13}$. Como $-\dfrac{25}{13}$ é um número negativo e **x** representa um **número natural**, a inequação $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{5x+1}{2} > 3$ **não tem solução** no conjunto dos números naturais.

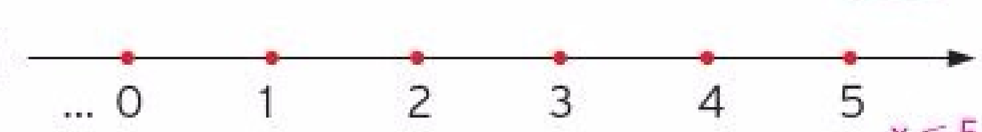
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Os números destacados nesta reta numerada representam as soluções de uma inequação na incógnita **x**. As reticências significam que os números inteiros 3, 4, 5, ... também são soluções da inequação. Anote as inequações cujas soluções estão representadas nessa reta numerada: b; d.

a) $x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 2$
b) $x \in \mathbb{Z},\ x \leqslant 2$
c) $x \in \mathbb{Z},\ x < 3$
d) $x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant -2$

11. Os números inteiros representados nas retas numeradas a seguir são soluções de uma inequação. Qual é a inequação mais simples equivalente a cada uma? Respostas possíveis.

a)


$x \leqslant 5$

b)


$x > -5$

12. Nestas atividades, os valores que podem ser atribuídos a **y** são números reais. Represente cada inequação em uma reta numerada:

a) $y \geqslant -5$ -5
b) $y \leqslant \dfrac{3}{4}$ $\dfrac{3}{4}$

13. A letra **x** representa um número natural na inequação $6x - 5 < 2x - 1$.

a) Quais são as soluções dessa inequação? $x \in \mathbb{N},\ x < 1$
b) Represente na reta numerada as soluções.

14. Resolva estas inequações do 1º grau com uma incógnita:

Quando não for citado, a incógnita representa um número do conjunto mais amplo que se conhece, que é $\mathbb{R}$.

a) $3x - 1 < 5$, no qual **x** representa um número natural. $x \in \mathbb{N}, x < 2$

b) $2y - 21 > 9y$, no qual **y** representa um número inteiro. $y \in \mathbb{Z}, y < -3$

c) $m - 2 \geqslant 6m - 13$, no qual **m** representa um número racional. $m \in \mathbb{Q}, m \leqslant \frac{11}{5}$

d) $-4 \cdot (3x + 1) - 8 \leqslant 1 - (5x - 3)$ $x \in \mathbb{R}, x \geqslant -\frac{16}{7}$

e) $10x - (2x - 5) > -3 \cdot (1 - 6x)$ $x \in \mathbb{R}, x < \frac{4}{5}$

15. Quais são os números inteiros que são soluções da inequação $-5(x - 1) + 2 < 2(x + 2) - 1$? $x \in \mathbb{Z}, x > \frac{4}{7}$

16. A letra **y** representa um número racional na inequação $3(y - 1) - 2(y + 2) \geqslant 1 - y$. Quais são as soluções dessa inequação? $y \in \mathbb{Q}, y \geqslant 4$

17. Qual o maior número inteiro que é solução da inequação $\frac{x}{6} + 3 > \frac{2x - 3}{4}$? 11

18. Resolva estas inequações:

a) $\frac{x - 1}{10} - \frac{x - 3}{5} < \frac{1}{2}$ $x \in \mathbb{R}, x > 0$

b) $\frac{2(-x - 1)}{4} > 1 - \frac{2 - x}{18}$ $x \in \mathbb{R}, x < -\frac{5}{2}$

c) $\frac{6x - 7}{2} - \frac{27 - x}{10} \geqslant 0$ $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 2$

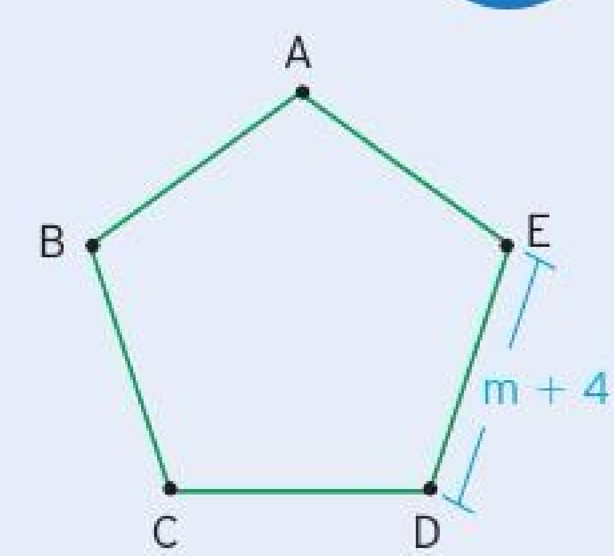
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Para que o triplo da medida do lado do pentágono adicionado a 12 cm seja menor que 39 cm, qual é o maior número inteiro que se pode atribuir a **m**? 4

ABCDE é um pentágono regular.

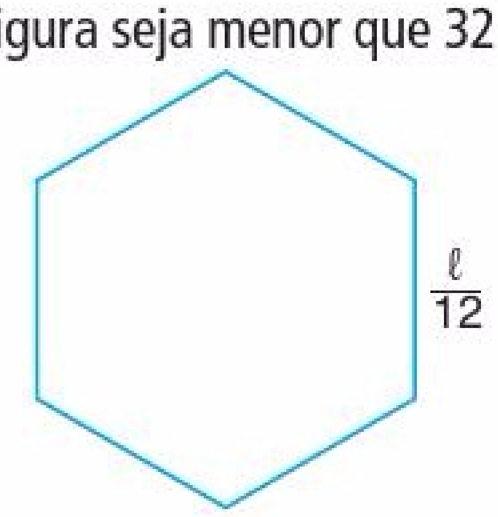


Exercícios complementares

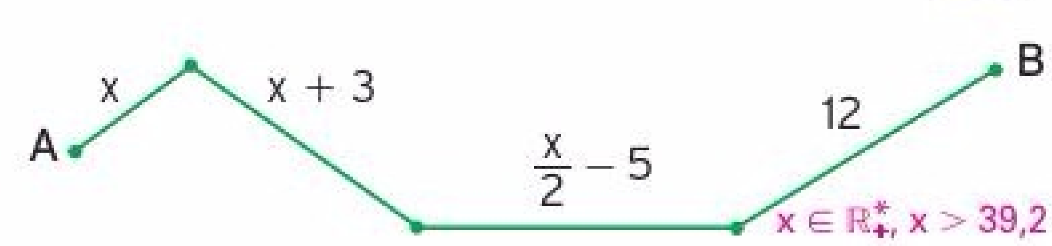
FAÇA NO CADERNO

19. Nesta figura, todos os lados têm medidas iguais e a letra ℓ representa uma medida em centímetros. Que valores podem ser atribuídos a ℓ para que o perímetro da figura seja menor que 32 cm?

ℓ é um número real positivo, $\ell < 64$.



20. Que valores podem ser atribuídos a **x** para que o caminho traçado de **A** até **B** seja maior que 108 cm?



$x \in \mathbb{R}_+^*, x > 39{,}2$

21. Considere a inequação $4(6y - 3) < 78y + 6$ no conjunto dos números racionais e responda:

a) Zero é solução da inequação dada? Por quê? Sim; $0 > -\frac{1}{3}$

b) Indique três números racionais que sejam soluções da inequação dada. $-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, 27$ Respostas possíveis.

c) Se a letra **y** representasse um número inteiro, quais seriam as soluções dessa inequação? Respostas possíveis: $y \in \mathbb{Z}, y > -\frac{1}{3}$

22. Resolva as inequações:

a) $x - \frac{x}{2} > 1 - \frac{3(5 - x)}{4}$ $x \in \mathbb{R}, x < 11$

b) $\frac{1}{12}(4x + 10) - 2 \leqslant \frac{1}{9}(x - 2)$ $x \in \mathbb{R}, x \leqslant \frac{17}{4}$

23. Que números inteiros são solução ao mesmo tempo das inequações $x - 2 \leqslant 6x - 12$ e $\frac{x}{3} + 9 < 17$? 2, 3, 4, 5, 6, ..., 23

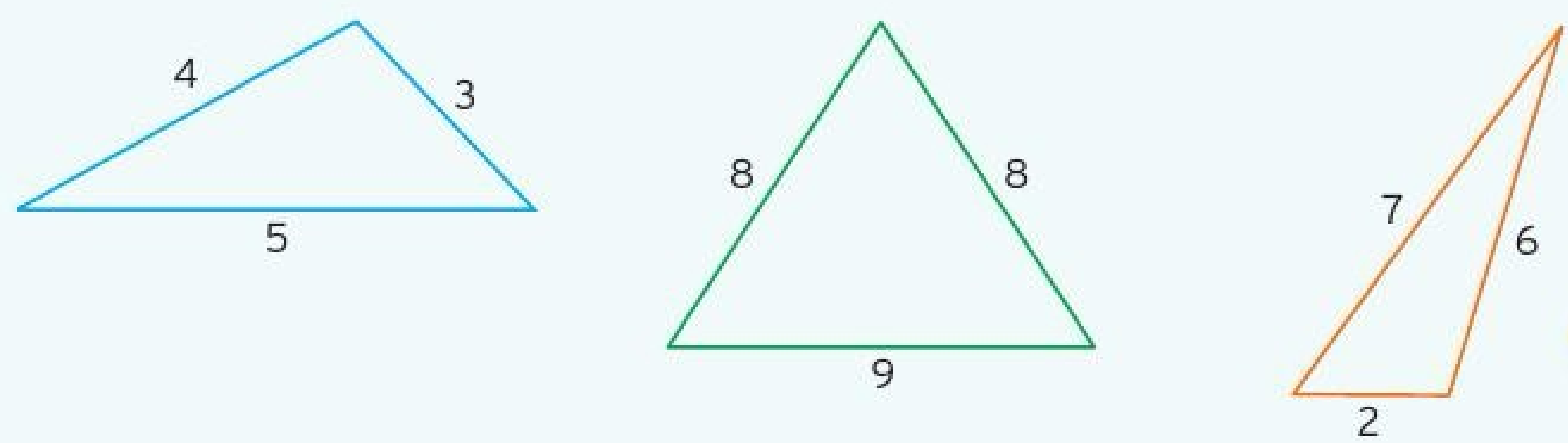
Investigue e explique

Espera-se que com esta atividade os alunos conheçam a propriedade que garante a existência de um triângulo. Leve-os a perceber que não há necessidade de verificar as três desigualdades propostas. Basta verificar a relação proposta para o maior lado do triângulo. Se julgar conveniente, explore a construção de triângulos usando régua e compasso.

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam.

Nos triângulos a seguir, compare a soma das medidas de dois lados com a medida do terceiro lado.



As medidas estão indicadas em centímetros.

- Faça tabelas como estas em seu caderno e registre nelas seus cálculos.

Soma de dois lados	Símbolo	Terceiro lado
4 + 5	>	3
5 + 3	>	4
3 + 4	>	5

Soma de dois lados	Símbolo	Terceiro lado
8 + 9	>	8
8 + 8	>	9
9 + 8	>	8

Soma de dois lados	Símbolo	Terceiro lado
2 + 6	>	7
6 + 7	>	2
7 + 2	>	6

- Observe os dados das tabelas construídas e encontre um padrão que envolva as medidas dos lados de um triângulo. Resposta possível: A soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.
- É possível construir um triângulo com lados medindo 12 cm, 3 cm e 6 cm? Explique por quê. Não, porque $6 + 3 < 12$.
- Considere que **a**, **b** e **c** indicam as medidas dos lados de um triângulo e que **a** é maior que **b** e que **c**. Escreva uma desigualdade envolvendo essas medidas. $b + c > a$.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Triângulos e possibilidades

As medidas, indicadas em centímetros, dos lados de um triângulo são $(4x + 3)$, $(x + 21)$ e $(3x + 8)$.

- Determine os possíveis valores de **x** para obter um triângulo isósceles. 5 cm, 6 cm e 6,5 cm.
- Qual deverá ser o valor de **x** para que o perímetro de um triângulo isósceles seja o maior possível? Quanto medirá esse perímetro? 6,5 cm; 84 cm.

3 Sistema de equações

Revendo o que já aprendemos

Para refletir e responder

Sessenta e cinco moedas estão sobre a mesa abaixo. Leia o que dizem estes jovens e responda.

- Quantos tipos de moedas estão sobre a mesa? Represente a quantidade de moedas de R$ 1,00 por **x** e a de R$ 0,50 por **y** e escreva uma equação relacionando as quantidades de moedas. Depois, faça uma estimativa e encontre a quantidade de moedas de R$ 0,50.

Dois tipos. $x + y = 65$.30 moedas.

A situação descrita acima envolve quantidades de moedas de dois valores diferentes e cada uma delas poderá ser representada por uma letra, ou seja, por uma variável.

x —— moedas de R$ 1,00 $\qquad$ y —— moedas de R$ 0,50

A quantidade de moedas pode ser relacionada por $\mathbf{x + y = 65}$, que é **uma equação do 1º grau com duas variáveis**.

A quantia total de R$ 50,00 pode ser relacionada aos valores de cada moeda da seguinte forma:

Nº de moedas	Valor (R$)	
x moedas de R$ 1,00	$1 \cdot x$	$1 \cdot x + 0,5 \cdot y + 50$ ou $\mathbf{x + 0,5y = 50}$
y moedas de R$ 0,50	$0,5 \cdot y$	

Essas duas equações formam o **sistema de equações de 1º grau com duas variáveis**, indicado abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x + 0,5y = 50 \end{cases}$$

Resolução de sistema de equações

O método da adição é novidade para os alunos e, geralmente, o que apresenta maior dificuldade para eles. Assim, auxilie-os na compreensão e proporcione-lhes mais tempo para aprender esse método.

Existem várias maneiras de resolver um sistema de equações de 1º grau com duas variáveis. Já conhecemos algumas delas. Vamos rever o que aprendemos e conhecer um novo método de resolução.

Método da substituição

Nesse método, uma das variáveis é isolada em uma das equações do sistema e a expressão obtida é colocada em lugar dela na outra equação do sistema.

Exemplo:

Vamos resolver o sistema apresentado na página anterior isolando **y** na primeira equação.

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x + 0{,}5y = 50 \end{cases}$$

$$x + y = 65 \text{ ——— } y = 65 - x$$

Na outra equação do sistema, **y** é substituído pela expressão $65 - x$ e obtém-se, dessa forma, uma equação do 1º grau com uma incógnita.

Resolvendo essa equação tem-se o valor de **x**.

$$x + 0{,}5 \cdot y = 50$$

$$x + 0{,}5 \cdot (65 - x) = 50$$

$$x + 32{,}5 - 0{,}5 \cdot x = 50$$

$$0{,}5 \cdot x + 32{,}5 = 50$$

$$0{,}5 \cdot x = 17{,}5$$

$$\mathbf{x = 35}$$

valor de **y** ⟶ $y = 65 - x$ ——— $y = 65 - 35 = 30$ ——— $\mathbf{y = 30}$

Verificação: Atribuímos os valores 35 a **x** e 30 a **y** nas duas equações do sistema e verificamos se as sentenças obtidas são verdadeiras.

$x = 35$ e $y = 30$

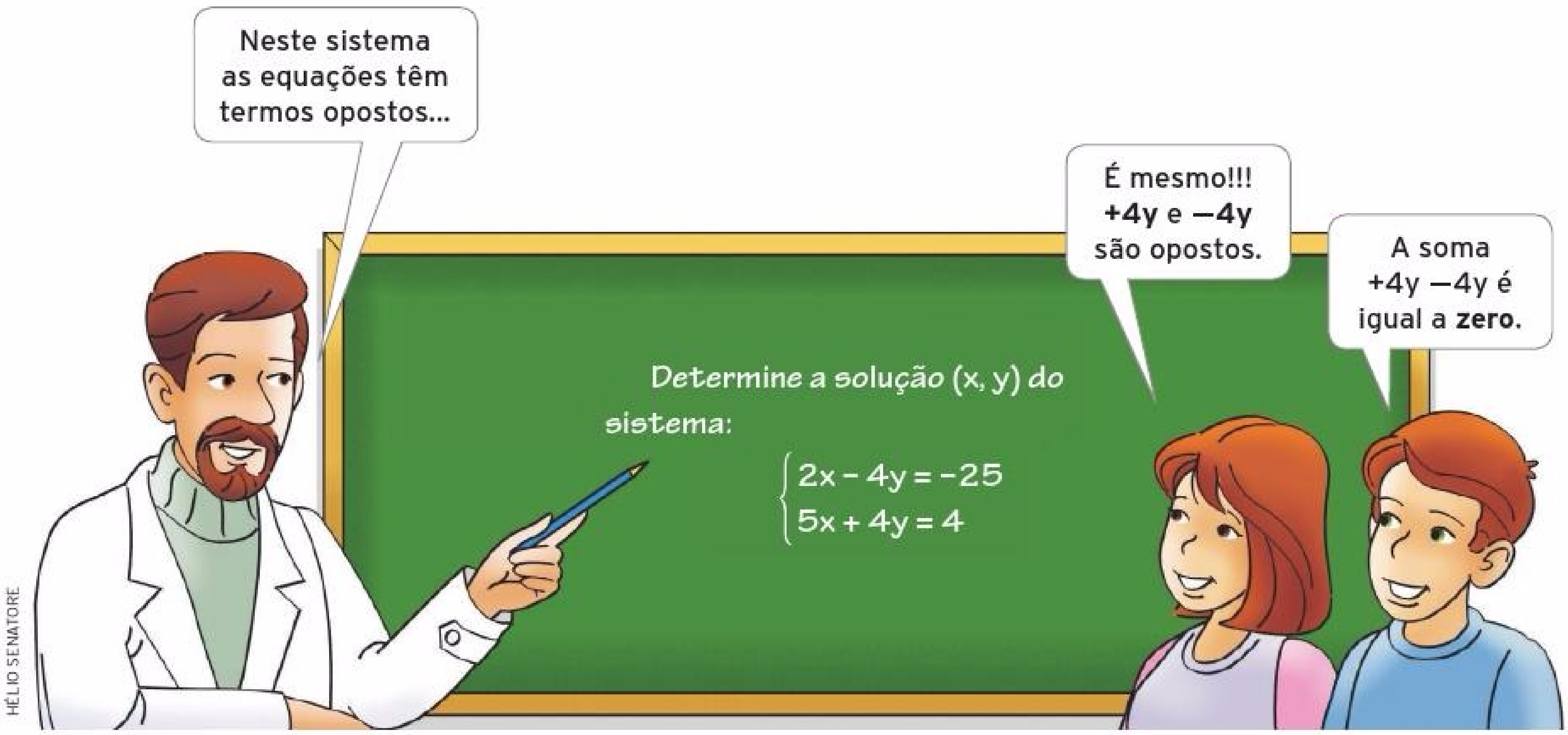
- $x + y = 65$ ——— $35 + 30 = 65$ (Verdadeira)
- $x + 0{,}5 \cdot y = 50$ ——— $35 + 0{,}5 \cdot 30 = 50$ (Verdadeira)

Note que o sistema resolvido está relacionado ao problema das moedas apresentado na página anterior. Então, nessa situação, há sobre a mesa 35 moedas de R$ 1,00 e 30 moedas de R$ 0,50.

Método da adição

Como indica o próprio nome, nesse método as duas equações do sistema são adicionadas membro a membro, resultando em outra equação de 1º grau com uma incógnita.

Exemplo:



As equações são adicionadas membro a membro e **−4y** e **+4y** são cancelados.

Dessa forma, a variável **y** é eliminada e o resultado é uma equação do 1º grau com incógnita **x**.

$$\begin{array}{r} 2x - \cancel{4}y = -25 \\ +\ 5x + \cancel{4}y = \quad 4 \\ \hline 7x + 0y = -21 \\ 7x = -21 \end{array} \text{——} \ \mathbf{x = -3}$$

O valor de **y** é calculado substituindo **x** por −3 em uma das equações desse sistema:

Escolhemos $5x + 4y = 4$

$$5 \cdot (-3) + 4y = 4$$
$$-15 + 4y = 4$$
$$4y = 4 + 15 \text{ —— } y = \frac{19}{4} \text{ ou } \mathbf{y = 4{,}75}$$

A solução desse sistema de equações, na forma de par ordenado (x, y), é $\left(-3; \frac{19}{4}\right)$ ou (−3; 4,75).

Apenas para lembrar, essa solução pode ser representada geometricamente. Para isso, as duas equações do sistema são representadas em um plano cartesiano por retas. O ponto comum a elas representa a solução do sistema.

Na resolução geométrica dos sistemas de equações, proponha aos alunos que verifiquem se alguns pares ordenados são soluções das equações que traduzem os problemas. Certifique-se de que eles percebem que os pontos que representam os pares ordenados estão sobre uma mesma reta. Sugira, também, que considerem valores que não sejam soluções e verifiquem que os pontos correspondentes a eles não estão nessa reta.

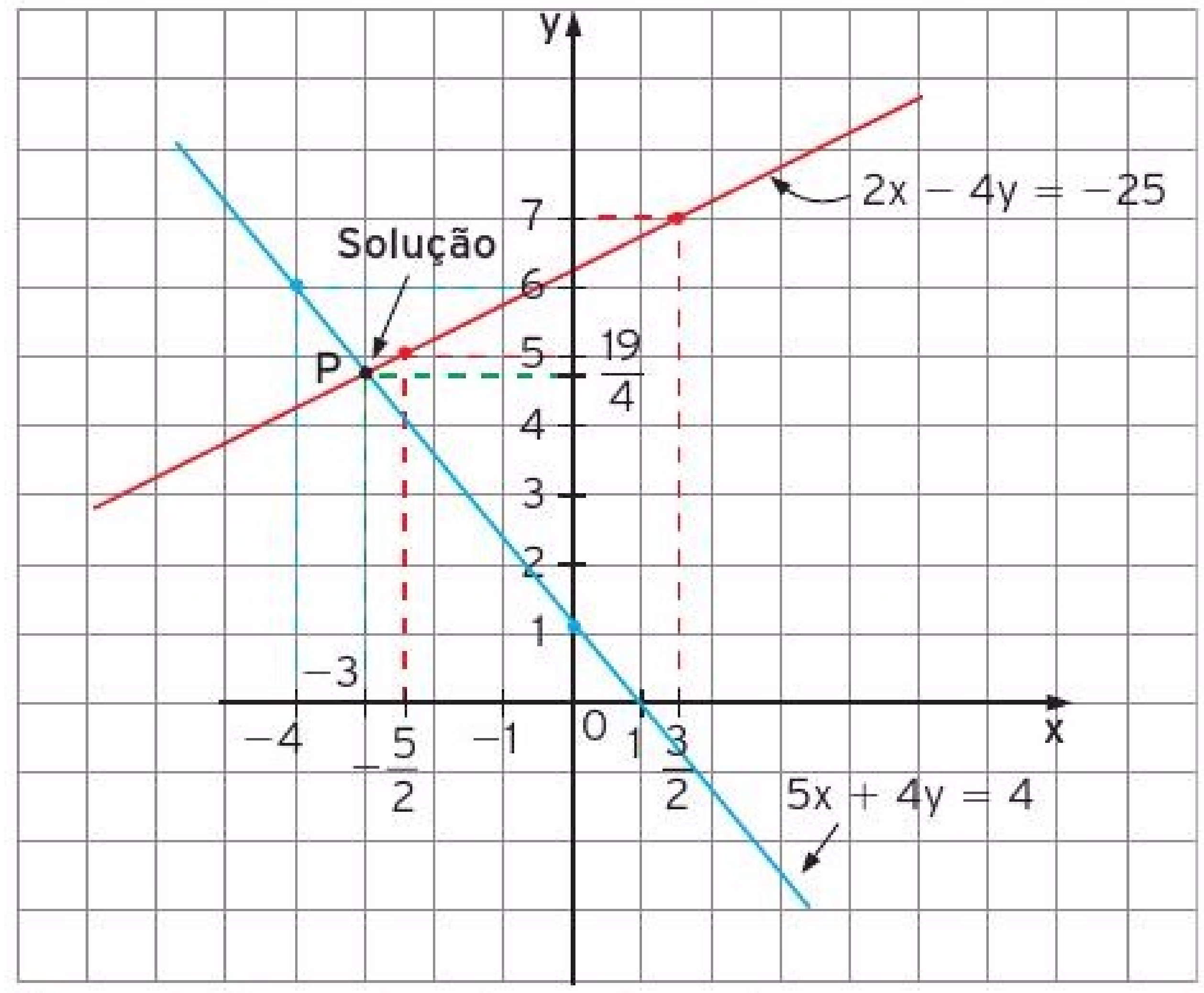
Exemplo:

$2x - 4y = -25$

Valores		Pares ordenados
x	**y**	**(x, y)**
$-\frac{5}{2}$	5	$\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$
$\frac{3}{2}$	7	$\left(\frac{3}{2}, 7\right)$

$5x + 4y = 4$

Valores		Pares ordenados
x	**y**	**(x, y)**
-4	6	$(-4, 6)$
0	1	$(0, 1)$



É na resolução geométrica de equações e sistemas que ocorrem os primeiros contatos dos alunos com a Geometria Analítica.

O ponto **P** tem coordenadas $\left(-3, \frac{19}{4}\right)$ e representa a solução do sistema.

Veja outro exemplo:

Resolução do sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 104 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ usando o método da adição.

Note que não há termos opostos nessas equações: na primeira equação, temos o termo **2x** e, na segunda, **x**. Então, multiplicando a segunda equação por **−2**, obtemos **−2x**, que é o oposto de **2x**.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 104 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x + 2y = 104 \\ -2 \cdot x - (-2) \cdot 3y = (-2) \cdot 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 104 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

Adicionamos as equações.

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} + 2y = 104 \\ + \; -\cancel{2x} + 6y = -8 \\ \hline 0x + 8y = 96 \end{array} \longrightarrow y = \frac{96}{8} \qquad y = 12$$

Substituindo **y** por 12 na segunda equação do sistema, calculamos o valor de **x**:

$x - 3y = 4 \longrightarrow x - 3 \cdot 12 = 4 \longrightarrow x - 36 = 4 \longrightarrow y = 40$

O par ordenado (40, 12) é a solução do sistema dado.

Lembre-se: de modo geral, resolvemos um sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis pelo método da adição, adicionando, membro a membro, as duas equações e obtendo uma terceira. É conveniente que a equação obtida tenha uma só incógnita. Isso ocorrerá quando o sistema de equações tiver termos com a mesma variável e que sejam **opostos**, pois, nesse caso, a soma desses termos é igual a zero.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

24. Resolva os sistemas a seguir utilizando o método da substituição:

a) $\begin{cases} 5x = 2y \\ x - y = 3 \end{cases}$ $(x, y) = (-2, -5)$

b) $\begin{cases} 4x = 3y \\ x - 2y = 10 \end{cases}$ $(x, y) = (-6, -8)$

c) $\begin{cases} m + 3n = -1 \\ m + 4n = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$ $(m, n) = \left(-\dfrac{17}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

25. Escolha um método de resolução e encontre a solução destes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 22 \\ 2x - y = 20 \end{cases}$ $(14, 8)$

b) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ $(1, -2)$

c) $\begin{cases} 7x - y = -2 \\ x + 5y = -26 \end{cases}$ $(-1, -5)$

26. Resolva o sistema $\begin{cases} 5x + 2y = -7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ usando o método da adição.

Pista: Multiplique os termos da primeira equação por 2 e os termos da segunda equação por -5.

$$\begin{matrix} 2 \leftarrow \\ -5 \leftarrow \end{matrix} \begin{cases} 5x + 2y = -7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$\left(-\dfrac{23}{11}, \dfrac{19}{11}\right)$

27. Nos sistemas a seguir, **x** e **y** representam números reais. Resolva cada um deles utilizando o método da adição.

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 4 \\ 3x + 4y = 78 \end{cases}$ $(10, 12)$

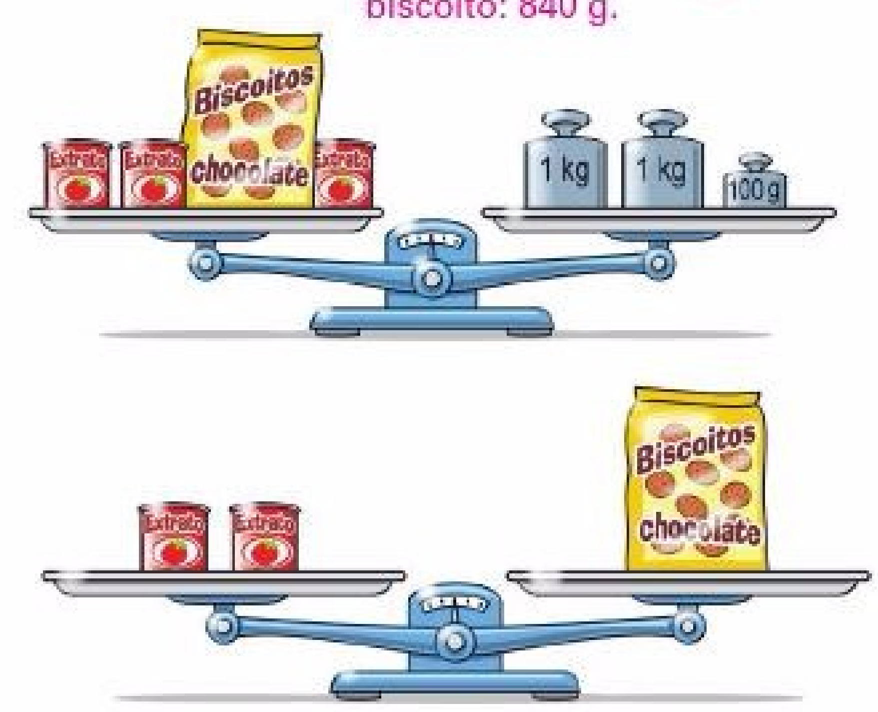
b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 7x - 2y = 19 \end{cases}$ $\left(\dfrac{59}{17}, \dfrac{45}{17}\right)$

c) $\begin{cases} 18x + 3y = -96 \\ 5y + 6x = -40 \end{cases}$ $(-5, -2)$

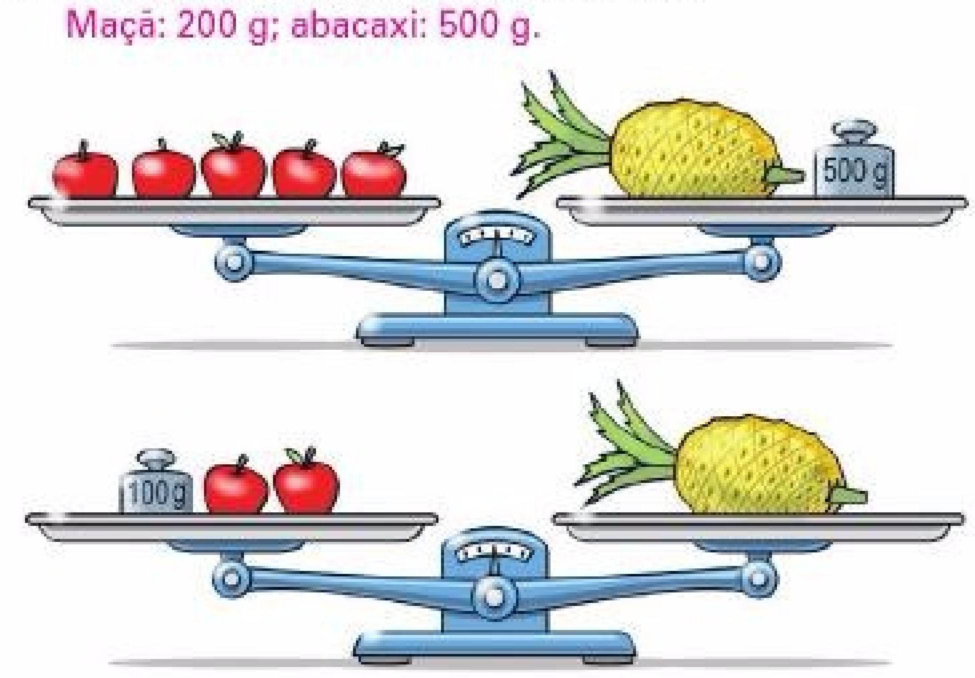
d) $\begin{cases} 5x - 4y = -9 \\ -2x + 3y = 12 \end{cases}$ $(3, 6)$

28. As balanças apresentadas nestas situações estão equilibradas. Resolva cada problema usando um sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis:

a) Qual é a massa da lata de tomate? E a da caixa de biscoitos? Lata de tomate: 420 g; biscoito: 840 g.



b) Qual é a massa de cada fruta? Maçã: 200 g; abacaxi: 500 g.



ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Um número natural é escrito com dois algarismos. A soma desses algarismos é 6.

Subtraindo 18 unidades desse número, obtém-se outro com os mesmos algarismos em ordem invertida.

- Que número é esse? 42

algarismo das dezenas ——— x

algarismo das unidades ——— y

número ——— $\underbrace{x}_{D}\underbrace{y}_{U} = 10x + y$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

29. A diferença entre dois números naturais é 20. Um deles é $\frac{2}{7}$ do outro. Que números são esses? 8; 28

30. A soma de dois números racionais é 70 e um deles é o sêxtuplo do outro. Determine esses números. 10; 60

31. A razão entre dois números inteiros é de 12 para 7 e a diferença entre eles é 25. Que números são esses? 60; 35

32. Determine o par ordenado (a, b) que é solução de cada um dos sistemas de equações a seguir:

a) $\begin{cases} 5a + 2b = -18 - b \\ 3b = a + 26 \end{cases}$ $\left(-\frac{22}{3}, \frac{56}{9}\right)$

b) $\begin{cases} 10a + 8b = 5a - 12b - 13 \\ 15a - 4b = 16b + 21 \end{cases}$ $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}\right)$

33. Escolha um dos métodos explorados e resolva estes sistemas:

a) $\begin{cases} 5 \cdot (x + y) - 2 \cdot (2x - 1) = 1 \\ 2 \cdot (x + y) - (x - 2y) = 3 \end{cases}$ $(19; -4)$

b) $\begin{cases} \frac{6x}{5} = -5 - \frac{y}{4} \\ 2 \cdot (x + 2) = 3 \cdot (y - 6) \end{cases}$ $(-5, 4)$

c) $\begin{cases} \frac{16x + 9y}{4} = 6(x + y) \\ 3y = \frac{-1 - 6x}{5} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{15}\right)$

d) $\begin{cases} \frac{x - 8y}{4} = 1 \\ \frac{6x + 2y + 1}{5} = 0 \end{cases}$ $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

34. A soma dos números da casa em que mora Mônica e de onde mora sua mãe é 132. Esses números são escritos com os mesmos dois algarismos, porém em posições trocadas, e a diferença entre esses algarismos é 2. Qual é o número da casa de cada uma delas? 57; 75

35. Um número é escrito com dois algarismos. O quociente do algarismo das dezenas pelo das unidades é 3. Invertendo a ordem dos algarismos, obtemos um novo número, que tem 36 unidades a menos que o primeiro. Que número é esse? 62

36. João tem R$ 315,00 na carteira em cédulas de R$ 10,00 e de R$ 5,00. A quantidade de cédulas de R$ 10,00 é o triplo da quantidade de cédulas de R$ 5,00. Quantas cédulas de R$ 10,00 ele tem na carteira? E de R$ 5,00? 27 cédulas de R$ 10,00 e 9 cédulas de R$ 5,00.

37. Paulo e Mariana gastaram R$ 48,00 tomando lanche juntos. Tirando-se R$ 6,00 do que cada um pagou, o restante da quantia paga por Paulo é o dobro do que restou da despesa de Mariana. Quanto gastou cada um deles? Paulo gastou R$ 30,00 e Mariana, R$ 18,00.

38. Um estacionamento cobra por período os valores marcados no quadro a seguir. Certo dia, ao final do período da manhã, o caixa registrou R$ 581,00 para um total de 47 carros e motos que usaram o estacionamento.

Quantos carros usaram o estacionamento nesse período?

E quantas motos? 28 carros; 19 motos.

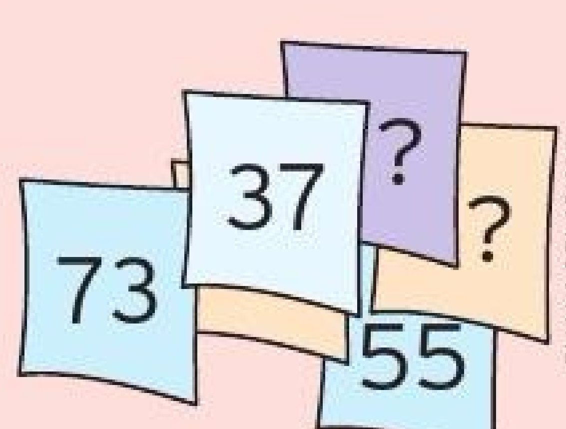
Estacione	Período R$
Moto	7,00
Carro	16,00

Desafio

FAÇA NO CADERNO

O número escondido na cartela

Um número escrito em uma cartela tem dois algarismos cuja soma é 10. Trocando os algarismos de lugar, o novo número será 18 unidades menor que o número que está na cartela.



ELIANA DELARISSA

64

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Leitura

Descartes e o plano cartesiano

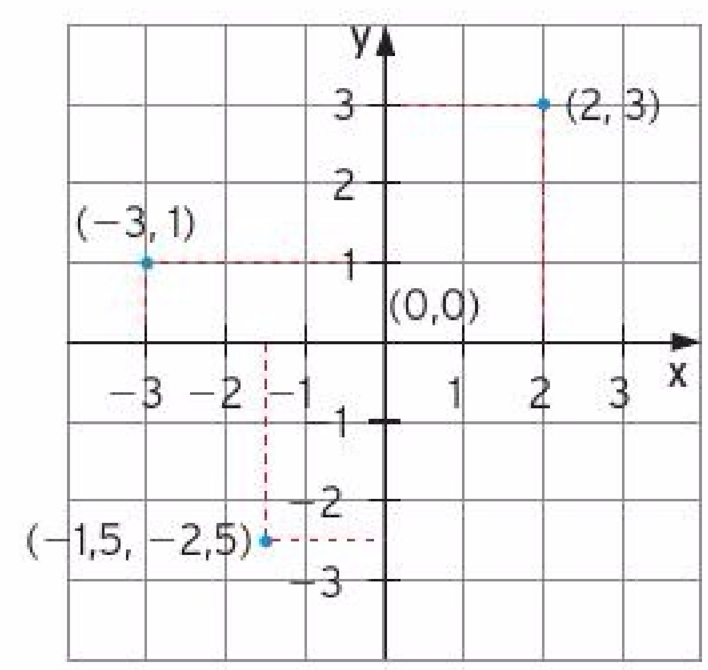
FRANZ HALS. RETRATO DE RENÉ DESCARTES, C. 1649.

René Descartes.

René Descartes nasceu na cidade de La Haye, em Touraine, França, em 1596.

Ele é chamado por muitos de "o fundador da filosofia moderna". É considerado também o **pai da Matemática moderna** e um dos pensadores mais importantes e influentes da História do Pensamento Ocidental.

O reconhecimento matemático foi obtido por sugerir a fusão da Álgebra com a Geometria, o que deu origem a uma parte importante da Matemática chamada Geometria Analítica e ao **sistema de coordenadas cartesianas**. A palavra "cartesiana" tem origem no seu nome. Seus trabalhos permitiram, também, o desenvolvimento de outras áreas científicas, como a cartografia, por exemplo.



Com um sistema de coordenadas cartesianas em um plano é possível localizar pontos desse plano tendo como referência abscissas e ordenadas estabelecidas em dois eixos perpendiculares.

René Descartes faleceu em 1650, na cidade de Estocolmo, Suécia.

Revisão cumulativa e testes

1. Uma campanha de vacinação durou três semanas. Consulte as informações apresentadas no gráfico de setores e responda:

a) Quantas crianças foram vacinadas na 2ª semana? 700 crianças.

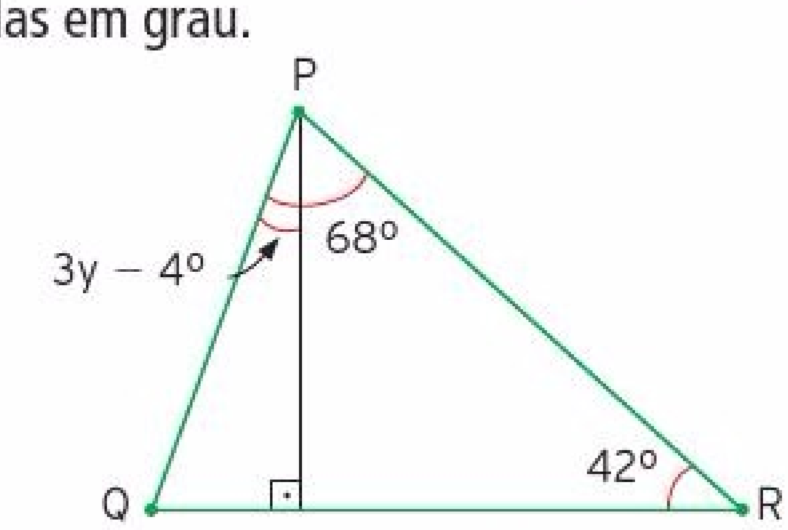
b) Se 186 crianças ficaram sem ser vacinadas, quantas crianças foram vacinadas na 3ª semana dessa campanha? Aproximadamente 402 crianças.

2. Resolva a inequação a seguir em $\mathbb{Z}$: $t \in \mathbb{Z},\ t \leqslant -\frac{13}{23}$

$$\frac{-3t-4}{2} - \frac{1+t}{5} \geqslant \frac{7t-1}{4}.$$

3. Em uma fábrica $\frac{3}{7}$ dos funcionários têm menos que 35 anos e $\frac{2}{5}$ do restante têm entre 36 e 45 anos. Os demais 576 funcionários têm mais de 46 anos. Quantos funcionários há nessa fábrica? 1 680 funcionários.

4. No triângulo PQR, as letras **x** e **y** representam medidas em grau.



a) Qual é o valor de med $\widehat{Q}$? 70°

b) Qual é o valor de **y**? 8°

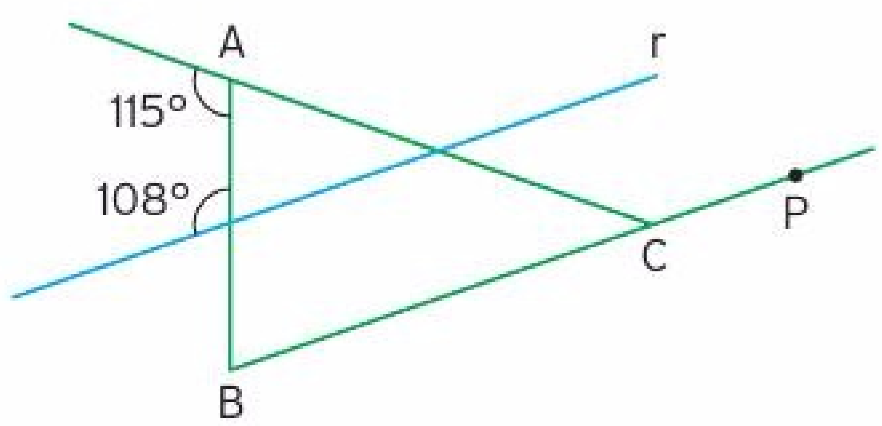
5. Resolva estas inequações:

a) $-(5x-3)+\frac{45x-7}{6}>\frac{5+3x}{4}$ $x \in \mathbb{R}, x > -\frac{1}{3}$

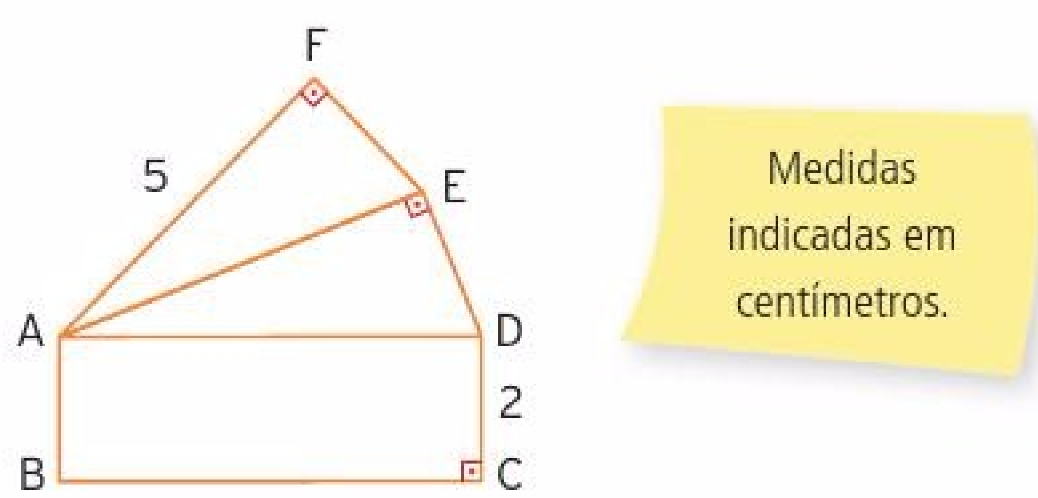
b) $(2x-3)(2x+3)-4x(x-5) \leqslant -5$ $x \in \mathbb{R}, x \leqslant \frac{1}{5}$

c) $\frac{y-2}{2y+5}-\frac{1}{2y-5}<\frac{2(y^2-5)}{4y^2-25}$ $y \in \mathbb{R}, y > \frac{15}{11}$

6. Nesta figura, a reta **r** é paralela a $\overline{BC}$. Qual é a medida do ângulo $A\hat{C}P$, externo ao $\triangle ABC$? 137°



7. Nesta figura, os segmentos de reta $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são congruentes e ABCD é um retângulo. Qual é o perímetro aproximado de ABCD, considerando duas ordens decimais? 15,50 cm



8. Em um treino, um ciclista realizou um percurso circular em 3 horas. Na primeira hora ele fez $\frac{3}{5}$ do percurso e, na segunda hora, $\frac{1}{4}$ do percurso restante. Se ele percorreu 14 700 m na terceira hora, quantos quilômetros mede aproximadamente o diâmetro do percurso que ele realizou? Aproximadamente 15,61 km.

9. Quais são os números racionais que são soluções destas inequações?

a) $6-4x>1-2x$ $x \in \mathbb{Q}, x < \frac{5}{2}$

b) $12x-2(1+3x) \leqslant -8$ $x \in \mathbb{Q}, x \leqslant -1$

10. Determine os pares ordenados (x, y) que são soluções dos sistemas de equações a seguir. Escolha o método que quiser.

a) $\begin{cases} -3x = y \\ 2x+4y=-15 \end{cases}$ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

b) $\begin{cases} 3y-2x=-4 \\ -5x+2y=1 \end{cases}$ $(-1, -2)$

11. Uma conta de R\$ 180,00 foi paga com cédulas de R\$ 20,00 e R\$ 5,00, totalizando 24 cédulas. Quantas cédulas de cada tipo foram usadas? 4 cédulas de R\$ 20,00 e 20 cédulas de R\$ 5,00.

12. No retângulo ABCD, o comprimento tem 3 unidades a mais que a largura. Represente o perímetro desse retângulo pela letra **y** e:

a) escreva uma equação do 1º grau, com as variáveis **x** e **y**, que represente o perímetro desse retângulo; $y = 4x + 6$

b) apresente três soluções (x, y) dessa equação. Respostas possíveis: (1; 10); (2,5; 16); (3; 18).

13. Qual é o polígono convexo no qual a soma dos ângulos internos é o dobro da soma dos ângulos externos? Hexágono.

14. Se Paulo gastar $\frac{2}{3}$ do que ganha mais R\$ 268,00, ele ainda ficará com 20% do seu salário. Qual é o salário de Paulo? R\$ 2 010,00

15. Uma circunferência tem 20 m de diâmetro. Qual é o comprimento aproximado de um arco dessa circunferência correspondente a um ângulo central de 60°? 10,50 m

16. (Saresp) A soma das mesadas de Marta e João é R\$ 200,00. No mês passado, Marta gastou R\$ 70,00 e João gastou R\$ 40,00 e, ao final do mês, estavam com as mesmas quantias. A mesada de Marta é: a

a) R\$ 115,00

b) R\$ 120,00

c) R\$ 135,00

d) R\$ 152,00

17. (Saresp) Ao lançar dois dados de cores diferentes, o número total de resultados possíveis é: d

a) 6

b) 12

c) 18

d) 36

18. (UF-PE) Se o numerador de uma fração é acrescido de uma unidade, o valor da fração resultante é $\frac{2}{3}$. Se ambos, numerador e denominador, são acrescidos de 5 unidades, o valor da fração resultante é $\frac{7}{10}$. Indique o produto do numerador pelo denominador da fração original. d

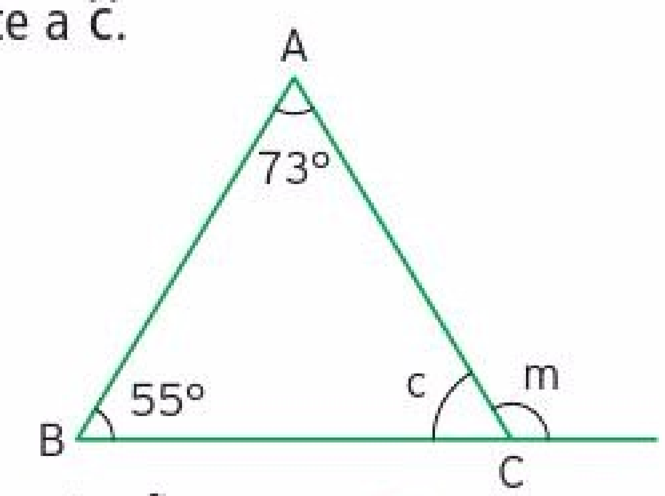
a) 64

b) 65

c) 125

d) 135

19. Nesta figura, **m** é um ângulo externo adjacente a $\hat{c}$.



É correto afirmar que: c

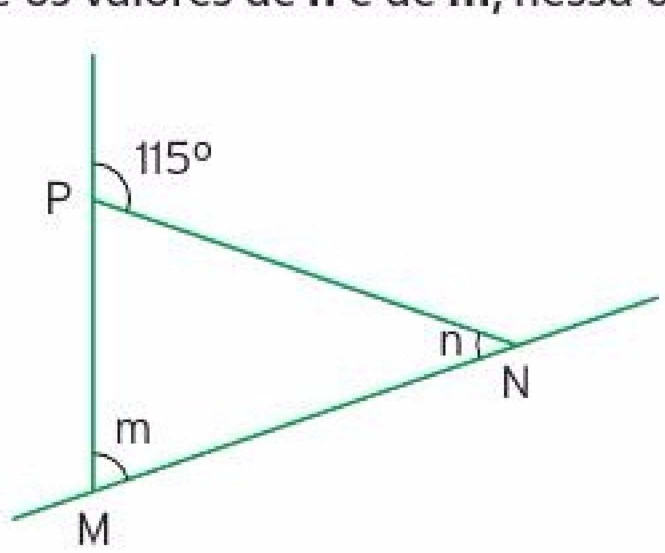
a) $m = 73° + c$

b) $m = 55° + c$

c) $m = 73° + 55°$

d) $m = 180° + c$

20. Nesta figura, **m** é $\frac{2}{3}$ de **n**. Podemos afirmar que os valores de **n** e de **m**, nessa ordem, são: b



a) 66° e 44°.

b) 69° e 46°.

c) 60° e 40°.

d) 63° e 42°.

21. (Saresp) João está treinando para uma corrida. Seu instrutor solicitou que fizesse um treino seguindo a série:

- 30 s de trote rápido;
- 10 min de trote moderado;
- 5 min de caminhada.

Esta série deveria ser **repetida 7 vezes**. Quanto tempo João treinou? c

a) 15 min e 30 s.

b) 40 min e 10 s.

c) 1 h, 48 min e 30 s.

d) 2 h e 20 min.

22. Considerando o sistema $\begin{cases} 3p - t = 10 \\ -p + 2t = -5 \end{cases}$, o valor de $2p - 4t$ é: d

a) -10 b) -14 c) 14 d) 10

23. (PUC-SP) Um certo número de alunos fazia prova em uma sala. Em um dado momento, retiraram-se da sala 15 moças, ficando o número de rapazes igual ao dobro do número de moças. Em seguida, retiraram-se 31 rapazes, ficando na sala igual número de moças e rapazes. O total de alunos que fazia prova nessa sala era: c

a) 96 b) 98 c) 108 d) 116 e) 128

24. (Saresp) A tabela mostra a distribuição dos alunos dos 3 turnos de uma escola, de acordo com o sexo.

	1º turno	2º turno	3º turno
Meninas	135	120	105
Meninos	120	115	125

É correto afirmar que: d

a) todos os turnos têm o mesmo número de alunos.

b) a escola tem um total de 360 alunos.

c) o número de meninas é maior que o de meninos.

d) o 3º turno tem 230 alunos.

UNIDADE 11

Triângulos e propriedades

ALEXANDRE TOKITAKA/PULSAR IMAGENS

Nesta unidade...

1. Estudando triângulos
2. Congruência de triângulos
3. Triângulos isósceles, equiláteros e propriedades

Por ser uma forma rígida, o triângulo está presente na estrutura metálica das construções de maneira geral, proporcionando-lhes firmeza. É o caso, por exemplo, do teto dessa estação de trem. Nesta unidade, serão explorados os triângulos: suas propriedades e as relações entre seus elementos.

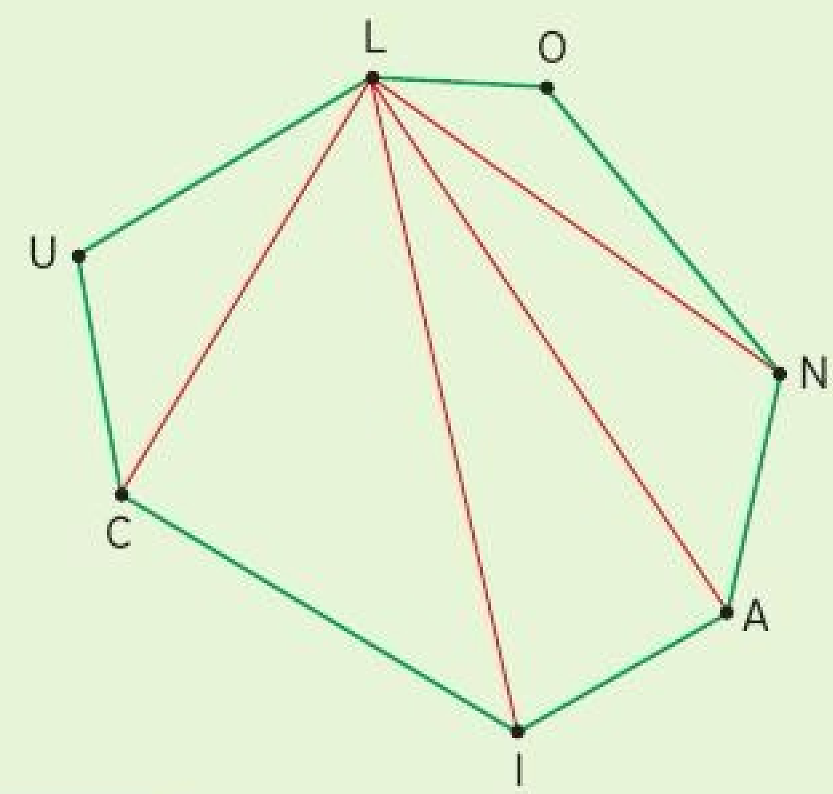
Teto da Estação da Luz, em São Paulo (SP). 2010.

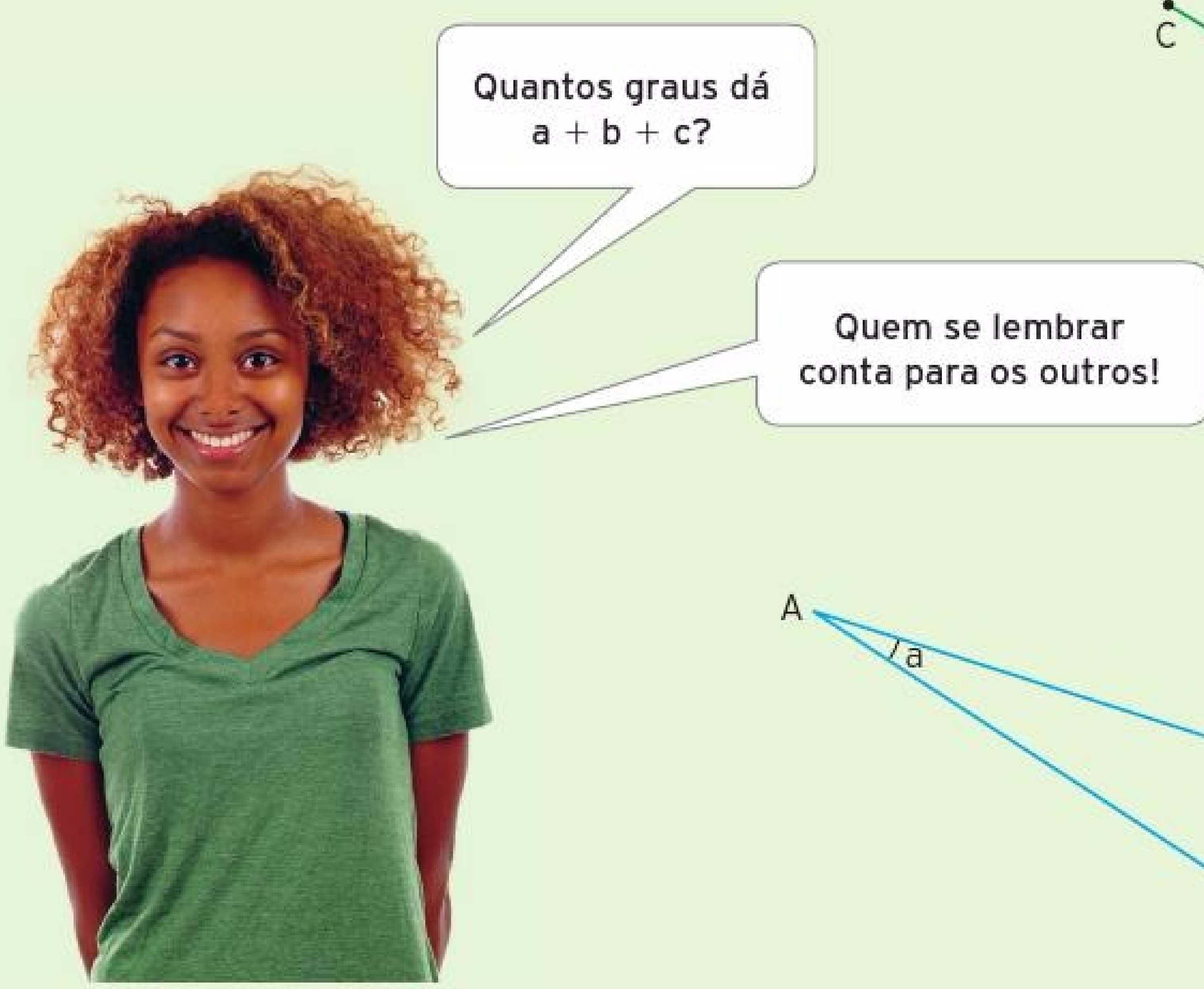
Triângulos são os polígonos com o menor número de lados e os mais simples.

Os triângulos são também importantes no estudo de propriedades das demais formas geométricas e em diversas aplicações práticas, como, por exemplo, no cálculo de distâncias, na construção civil e na Astronomia.

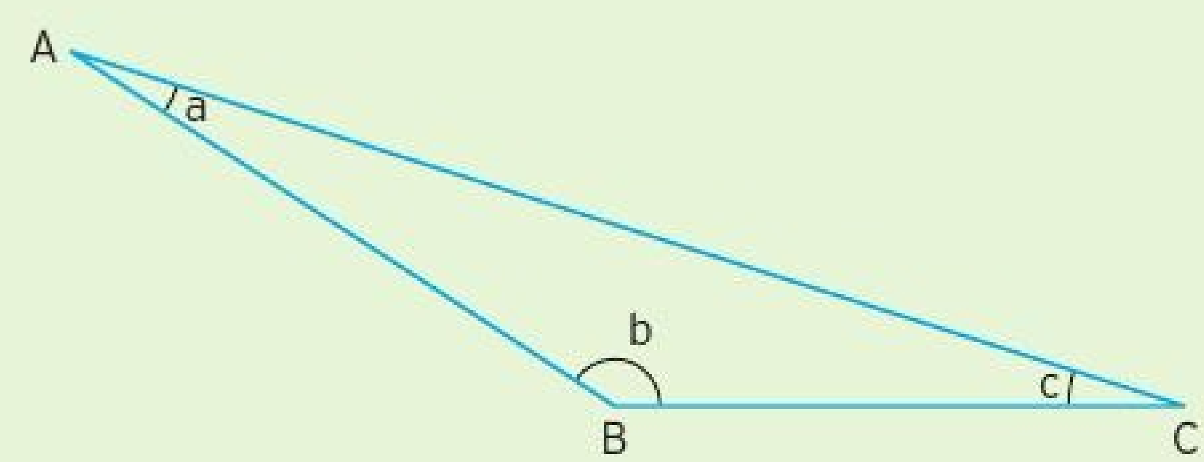
Vamos aprofundar nosso conhecimento sobre eles, revendo propriedades e conhecendo outras.

Qualquer polígono com mais de três lados pode ser decomposto em triângulos. O heptágono, ao lado, foi decomposto em cinco triângulos a partir de um de seus vértices.





SHUTTERSTOCK



Apenas para relembrar, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º.

O que você já sabe?

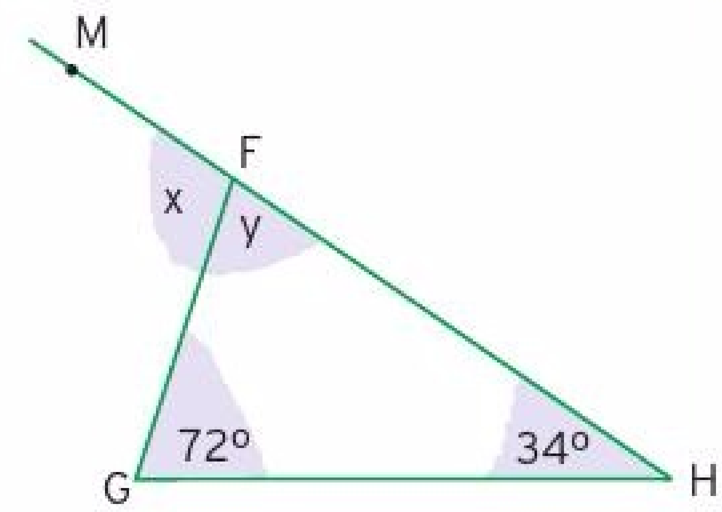
- A partir de um de seus vértices, em quantos triângulos pode ser decomposto um hexágono? 4 triângulos.
- Considere que $(2x + 24°)$ e $4x$ representam medidas dos ângulos de um triângulo e que o terceiro ângulo mede 56°. O valor de **x** pode ser igual a 24°? Não.
- Em um triângulo retângulo, um dos ângulos mede 48°. Quais são as medidas dos outros ângulos desse triângulo? 90°; 42°.

1 Estudando triângulos

Relação entre as medidas de um ângulo externo e os ângulos internos

Para refletir e responder

Nesta figura, $M\hat{F}G$ é um dos ângulos externos do $\triangle FGH$ e adjacente ao ângulo HFG e **x** representa sua medida em graus.



- Qual é o valor de **x**? 106°

A relação entre as medidas de um ângulo interno e o ângulo externo adjacente a ele é utilizada em resolução de problemas que envolvem medidas de ângulos de um triângulo.

Observe que:

$\hat{x}$ e $\hat{y}$ são ângulos adjacentes suplementares —— $x + y = 180°$

$$\triangle FGH \text{ ——— } y + 72° + 34° = 180°$$

$$\cancel{y} + 72° + 34° = x + \cancel{y}$$

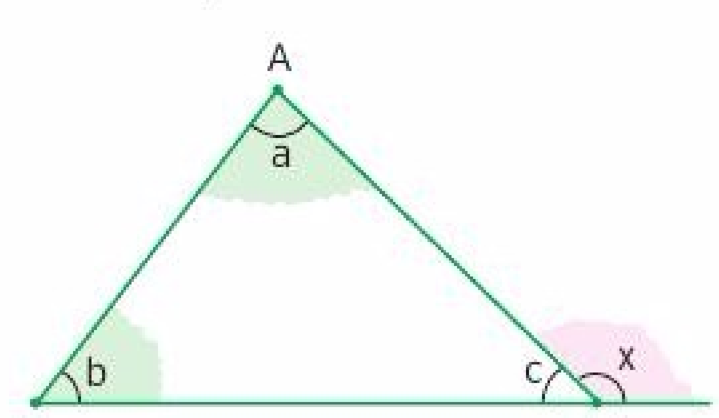
$$x = 72° + 34°$$

Concluímos que med $M\hat{F}G$ é a soma das medidas dos ângulos internos de $\triangle FGH$, não adjacentes a ele.

Vamos demonstrar que:

> Em todo triângulo, a medida de qualquer **ângulo externo** é igual à **soma** das medidas dos **dois ângulos internos**, **não adjacentes** a ele.

No triângulo ABC, **a**, **b**, **c** e **x** representam medidas em graus.



$\hat{x}$ é o ângulo externo não adjacente aos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

$a + b + c = 180°$ —— Soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$.

$c + x = \underbrace{180°}_{a + b + c}$ —— $\hat{c}$ e $\hat{x}$ são ângulos adjacentes suplementares.

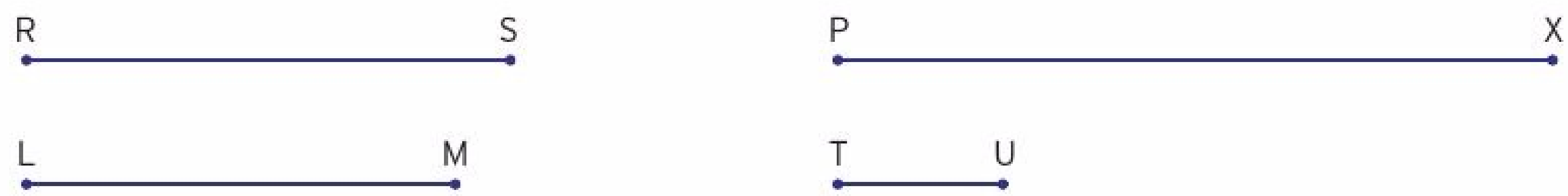
$c + x = a + b + c$ —— $x = a + b + c - c$ —— $\mathbf{x = a + b}$

Condição de existência de um triângulo

Muitas vezes não é possível construir um triângulo com três segmentos de reta quaisquer. Por que isso acontece? Vamos ver.

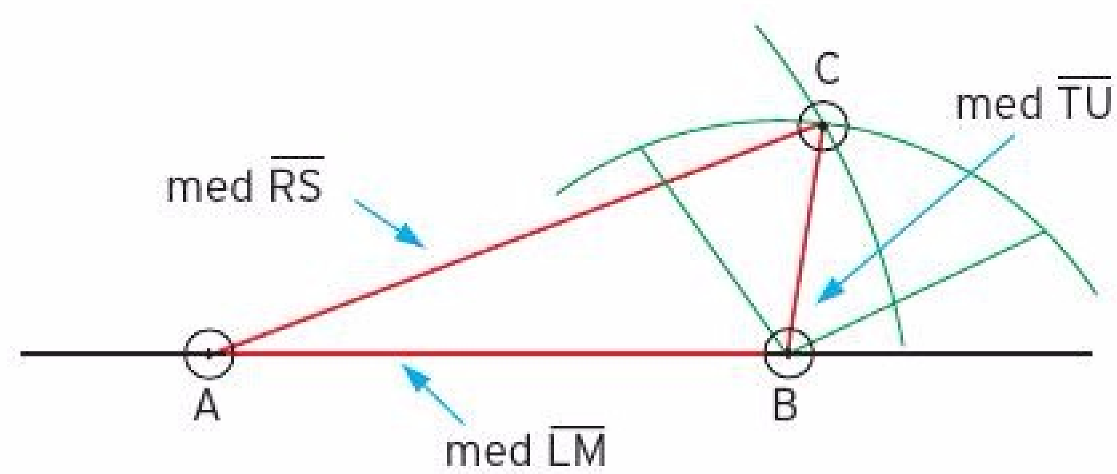
Exemplo:

Artur foi desafiado a construir um triângulo, escolhendo três destes segmentos de reta:



Veja os resultados obtidos:

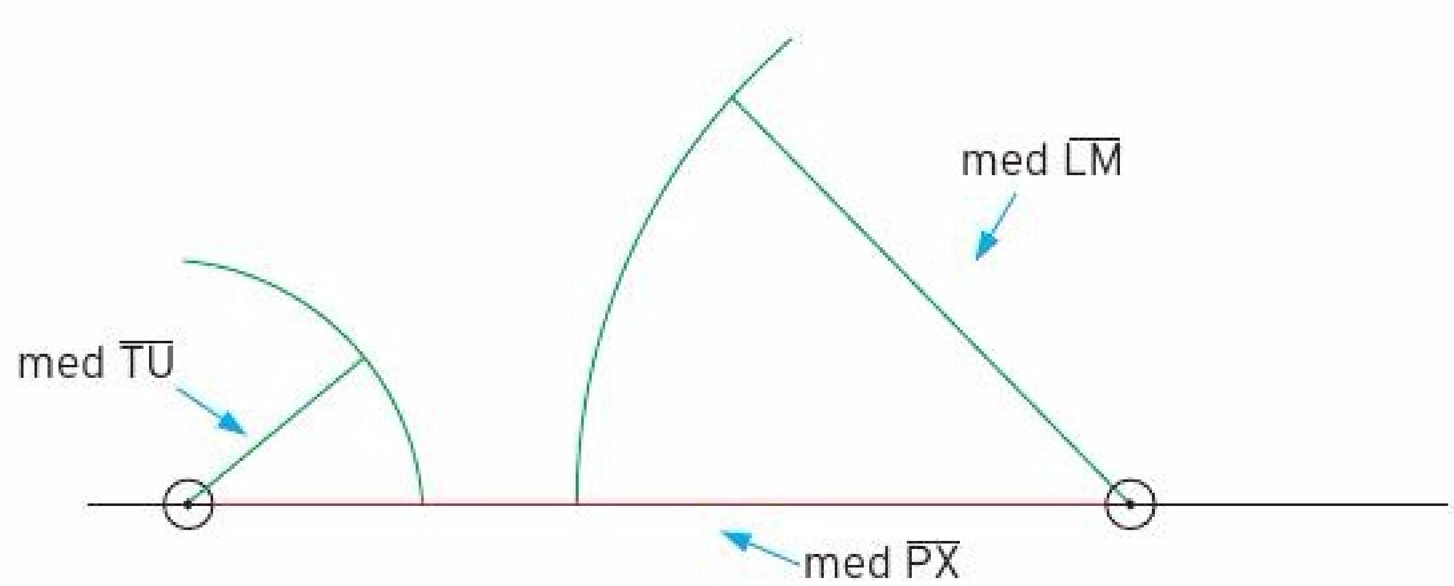
Escolhendo os segmentos de reta $\overline{LM}$, $\overline{RS}$ e $\overline{TU}$, Artur conseguiu construir o triângulo.



Isso ocorre porque a medida do segmento de reta $\overline{RS}$ é menor que a soma das medidas dos outros dois: med $\overline{RS} <$ med $\overline{LM}$ + med $\overline{TU}$.

Mas o mesmo não aconteceu ao escolher os segmentos de reta $\overline{PX}$, $\overline{LM}$ e $\overline{TU}$.

Isso ocorre porque a medida do segmento de reta $\overline{PX}$ é **maior** que a soma das medidas dos segmentos de reta $\overline{TU}$ e $\overline{LM}$.



De modo geral:

Em todo triângulo a medida de um lado deve ser sempre menor que a soma das medidas dos outros dois, ou, ainda, a medida do maior lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Uma professora fez este desenho no quadro e alguns alunos registraram algumas igualdades. Observe a figura e preste atenção ao que ela diz.

Célia: a = 60° + 40°	Bia: a − 60° = 40°
João: a − 40° = 60°	Edu: a = 100°

- Quem respondeu corretamente? Todos.

2. Nesta figura, **x**, **y** e **z** representam medidas em graus. É correto afirmar que: III; IV

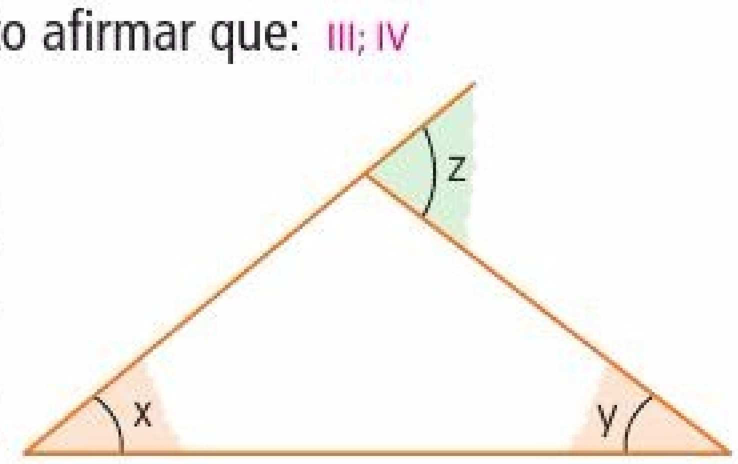
I) $x = y + z$

II) $y = x + z$

III) $z = x + y$

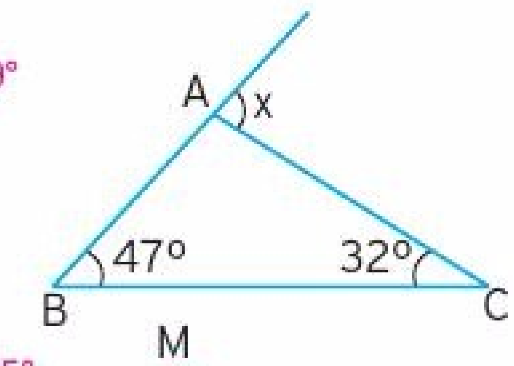
IV) $z - y = x$

V) $x + y = 180°$

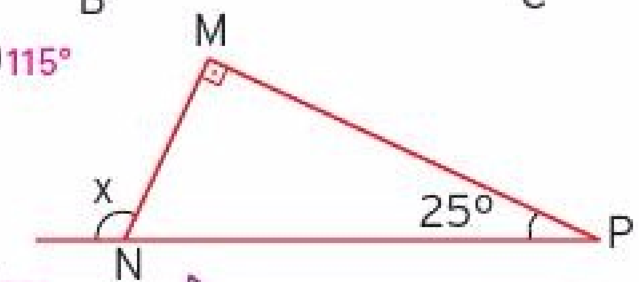


3. Determine o valor de **x** em cada situação:

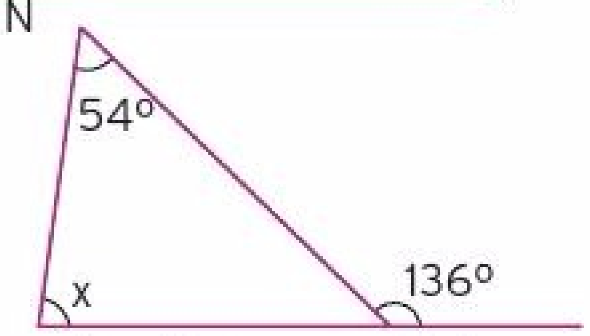
a) 79°



b) 115°

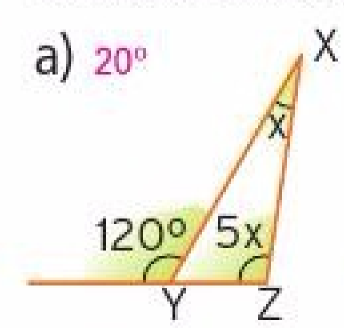


c) 82°

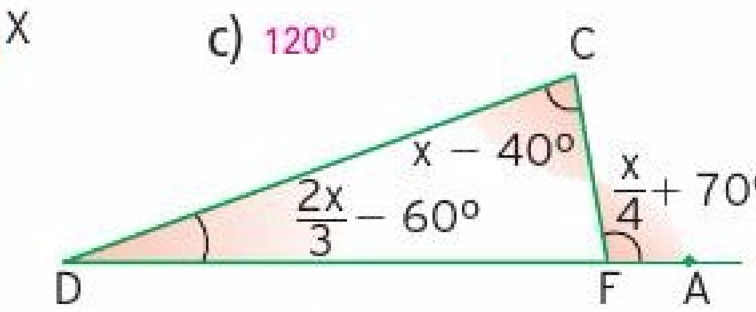


4. Observe estas figuras e calcule o valor de **x**:

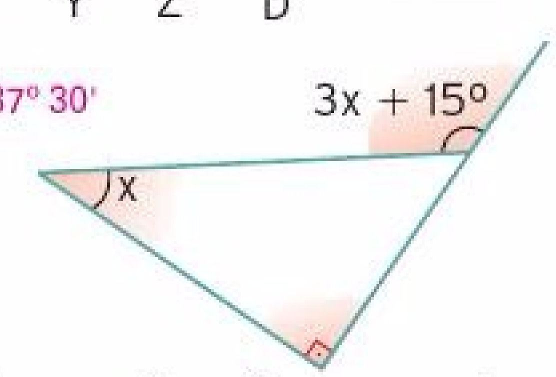
a) 20°



c) 120°



b) 37° 30'



5. Entre as situações a seguir, em quais delas não é possível traçar um triângulo com lados que tenham as medidas dadas? b,c

a)	b)	c)	d)
4,7 cm	6,8 cm	8,0 cm	10,0 cm
6,8 cm	2,5 cm	4,6 cm	12,5 cm
5,0 cm	3,0 cm	3,4 cm	13,8 cm

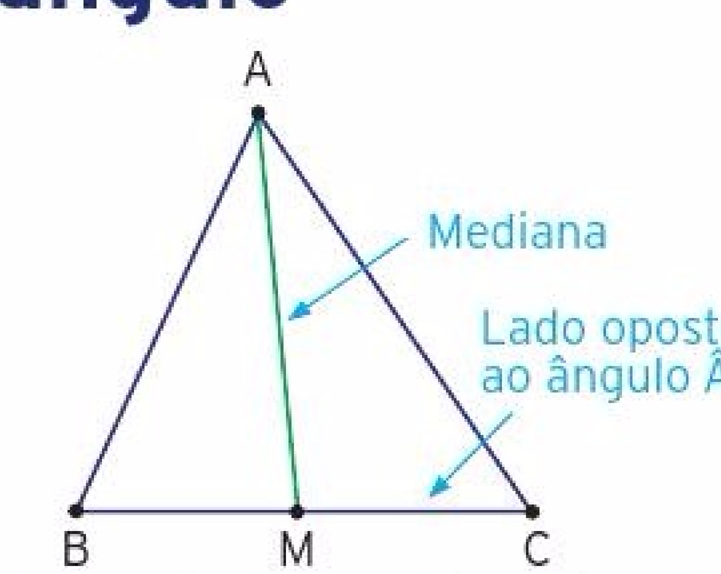
Mediana, altura e bissetriz de um triângulo

Mediana

No $\triangle ABC$ ao lado:

M ——— é o ponto médio de $\overline{BC}$ ——— med $\overline{BM}$ = med $\overline{MC}$.

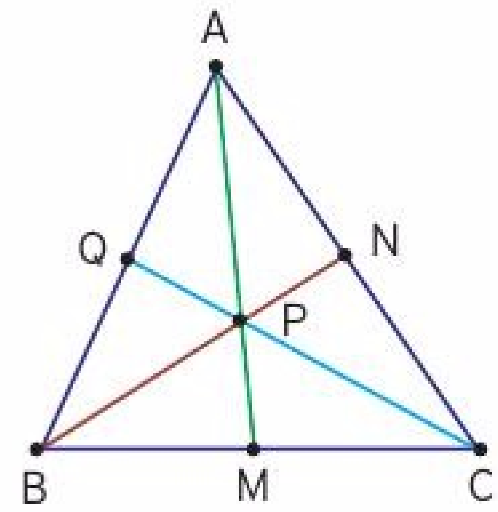
$\overline{AM}$ ——— é a **mediana** relativa ao lado $\overline{BC}$.



$\overline{AM}$ é um segmento de reta com uma extremidade no vértice **A** e outra no ponto médio de $\overline{BC}$, que é o lado oposto ao ângulo **A**.

Como um triângulo tem três lados, existem **três medianas**, cada uma relativa a um dos lados desse triângulo.

No $\triangle ABC$, as três medianas encontram-se em um único ponto:



$\overline{AM}$ —— Mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

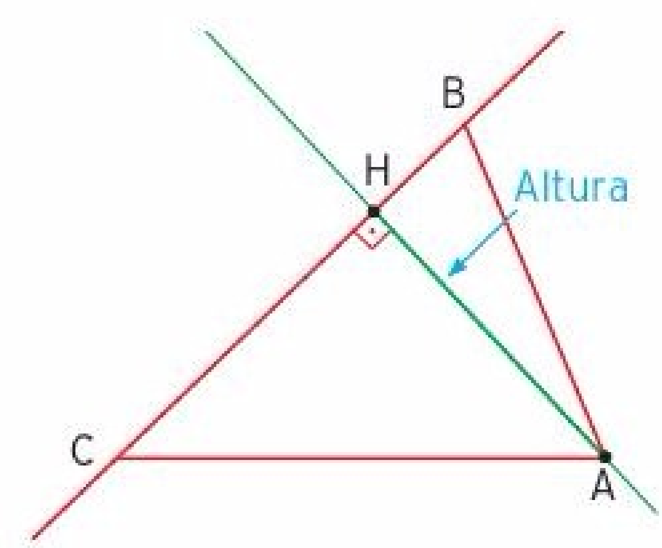
$\overline{BN}$ —— Mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

$\overline{CQ}$ —— Mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

Isso ocorre em qualquer outro triângulo.

As medianas de um triângulo qualquer têm um ponto comum que chamamos de **baricentro**. Na figura anterior, **P** é o baricentro do triângulo ABC.

Altura



No $\triangle ABC$ ao lado, $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são retas perpendiculares.

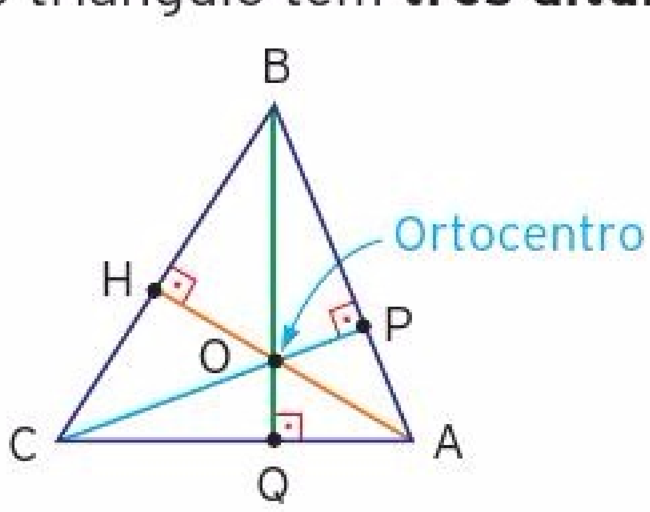
H —— é o ponto de intersecção das perpendiculares $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

$\hat{H}$ —— é um ângulo reto.

$\overline{AH}$ —— é um segmento de reta com uma extremidade no vértice **A** e outra na intersecção das retas perpendiculares $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

$\overline{AH}$ é a **altura** relativa ao lado $\overline{BC}$.

Todo triângulo tem **três alturas**, cada uma relativa a um dos lados do triângulo.



$\overline{AH}$ —— Altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

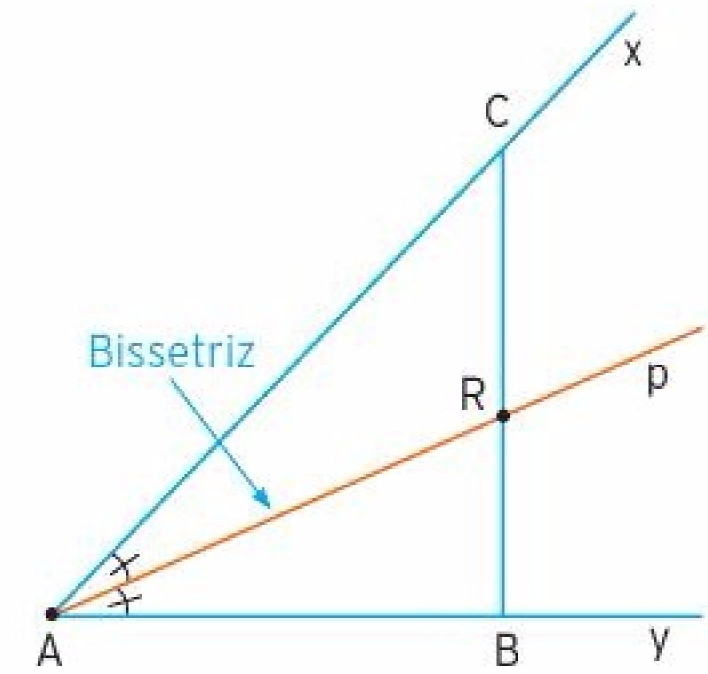
$\overline{BQ}$ —— Altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

$\overline{CP}$ —— Altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Em um triângulo qualquer, as três alturas têm um ponto comum que chamamos de **ortocentro**. Na figura anterior, **O** é o ortocentro do triângulo ABC.

Bissetriz

No △ABC abaixo:



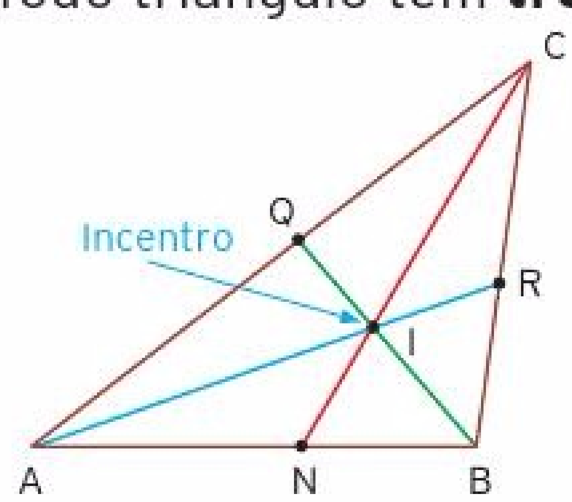
$\overrightarrow{AR}$ —— é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

med $B\hat{A}R$ = med $R\hat{A}C$

R —— é a intersecção da bissetriz do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$.

$\overline{AR}$ —— é um segmento de reta com uma extremidade no vértice **A** e outra na intersecção da bissetriz do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$, oposto a $\hat{A}$. $\overline{AR}$ é **bissetriz** do △ABC relativa ao ângulo $\hat{A}$.

Todo triângulo tem **três bissetrizes**, cada uma relativa a um dos ângulos do triângulo.



No △ABC: $\overline{AR}$ —— bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

$\overline{BQ}$ —— bissetriz relativa ao ângulo $\hat{B}$.

$\overline{CN}$ —— bissetriz relativa ao ângulo $\hat{C}$.

As três bissetrizes de um triângulo qualquer têm um ponto comum que chamamos de **incentro**. Na figura acima, **I** é o incentro do triângulo ABC.

Fazer e aprender

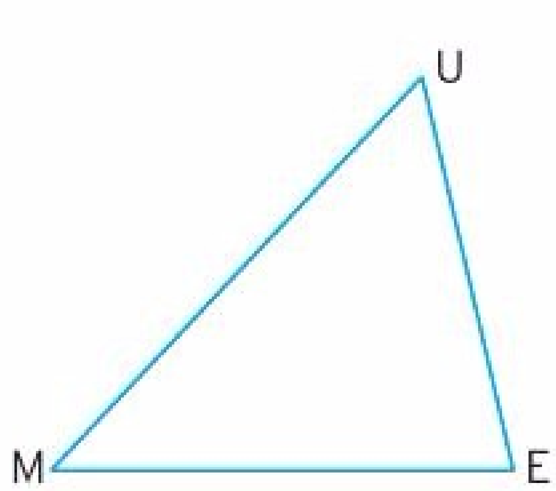
FAÇA NO CADERNO

6. Desenhe três triângulos como MEU:

a) Em um deles, trace as três medianas. Que nome damos ao ponto comum às três medianas? Resposta pessoal. Baricentro.

b) No outro triângulo, trace as três alturas. Que nome damos ao ponto comum às três alturas? Resposta pessoal. Ortocentro.

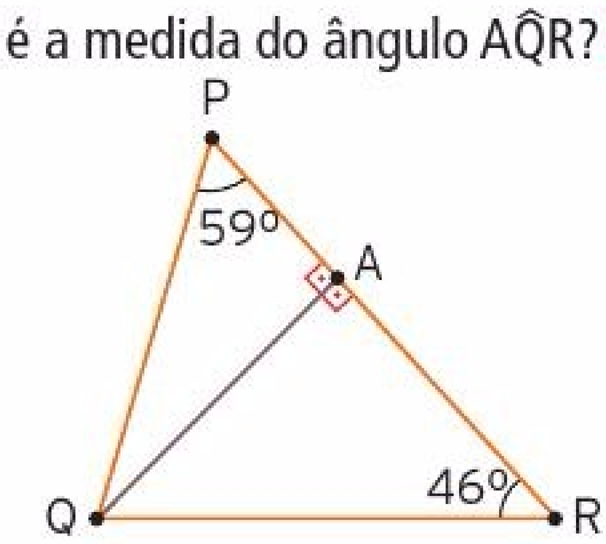
c) No terceiro triângulo, determine o incentro usando régua e compasso. Resposta pessoal. Ponto comum às três bissetrizes. O que é o incentro desse triângulo?



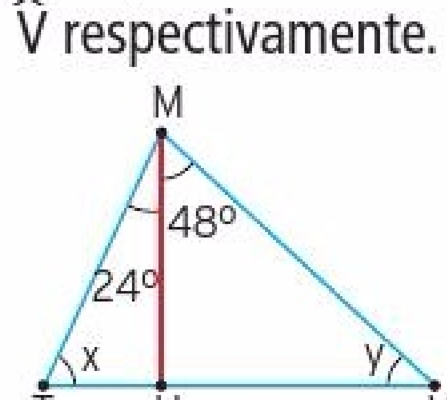
7. Dois ângulos do △PQR medem 59° e 46° e $\overline{QA}$ é a altura relativa a $\overline{PR}$.

a) Qual é a medida do ângulo $P\hat{Q}A$? 31°

b) Qual é a medida do ângulo $A\hat{Q}R$? 44°



8. No △MTV, $\overline{MH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{TV}$. As letras x e y representam as medidas dos ângulos $\hat{T}$ e $\hat{V}$ respectivamente.



É correto afirmar que: a; e; f

a) $x + 24° = 90°$

b) $x + y = 90°$

c) $y + 24° = 90°$

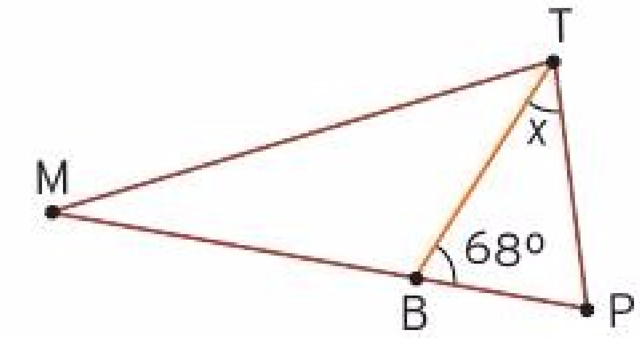
d) $y + 48° = 180°$

e) $y + 48° = 90°$

f) $x + y = 180° - 72°$

9. Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa forma com um dos catetos um ângulo de 36°. Quais são as medidas dos ângulos agudos desse triângulo? 54°; 36°
Faça um desenho e anote os dados nele.

10. O ângulo $\hat{T}$ do $\triangle PMT$ mede 78°. $\overline{TB}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $P\hat{T}M$.



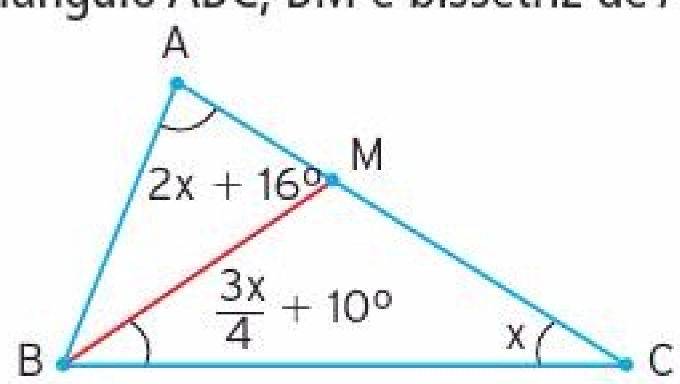
a) Qual é o valor de **x**? 39°

b) Quais são as medidas dos outros ângulos desse triângulo? 73°; 29°

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

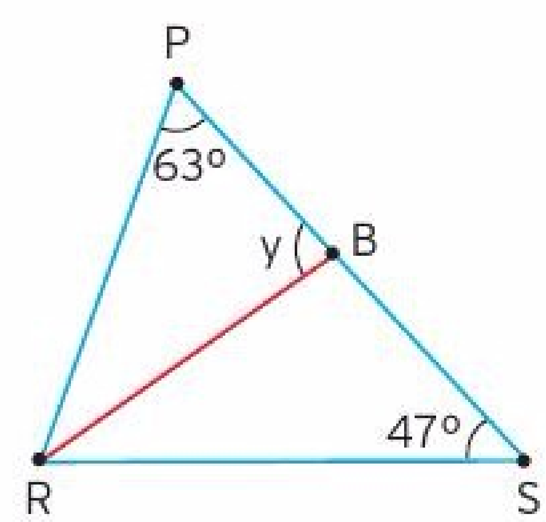
11. No triângulo ABC, $\overline{BM}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$.



a) Qual é o valor de **x**? 32°

b) Qual é a medida de cada ângulo desse triângulo? med $\hat{A}$ = 80°, med $\hat{B}$ = 68° e med $\hat{C}$ = 32°

12. No $\triangle PRS$, $\overline{RB}$ é uma das bissetrizes e **y** representa uma medida em graus.

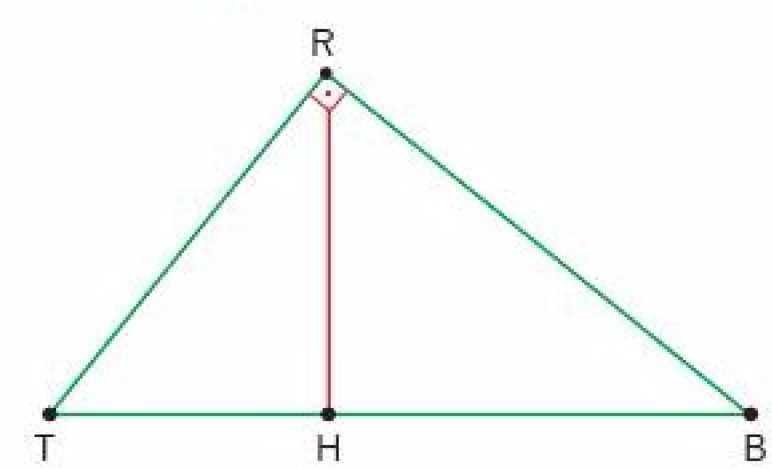


a) Qual é a medida de $P\hat{R}S$? 70°

b) Qual é o valor de med $P\hat{R}B$? 35°

c) Qual é o valor de y? 82°

13. No triângulo retângulo RTB, $\overline{RH}$ é a altura relativa à hipotenusa e o ângulo $\hat{B}$ mede 38°. Determine a medida do ângulo que $\overline{RH}$ forma com o cateto $\overline{RT}$. 38°



Desenhe um triângulo e assinale os dados na figura.

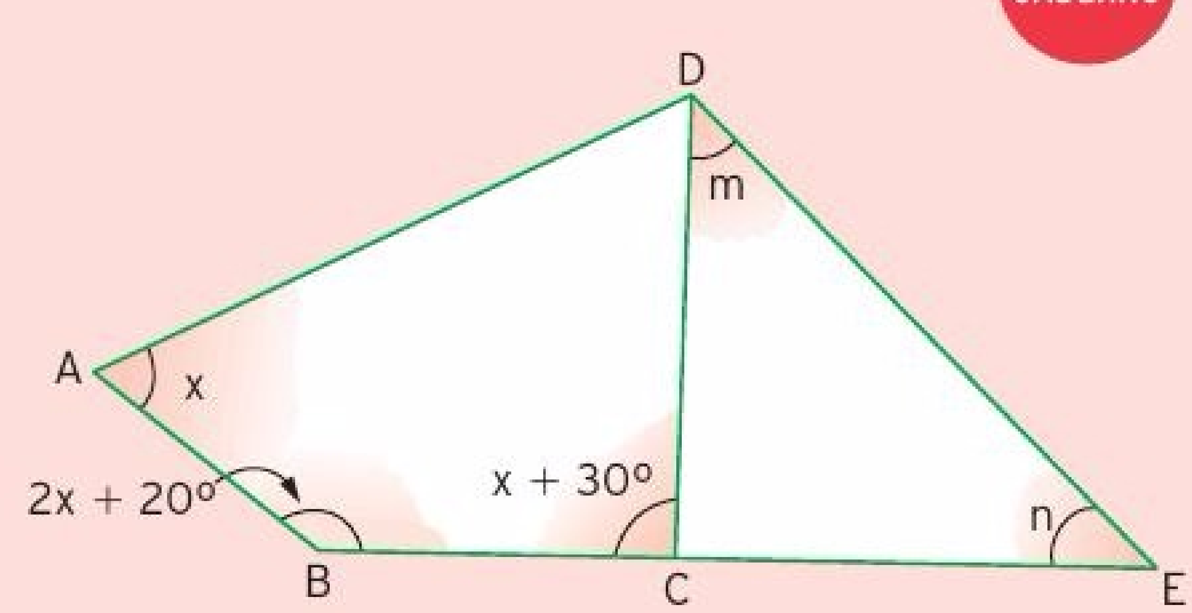
14. No $\triangle FEL$ os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{L}$ medem 64° e 42°, respectivamente. $\overline{FH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{EL}$ e $\overrightarrow{FS}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{F}$. Qual é a medida do ângulo $H\hat{F}S$ formado por essa altura e por essa bissetriz? 11°

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Triângulos e quadriláteros

No quadrilátero ABCD, $B\hat{A}D$ e $A\hat{D}C$ são ângulos congruentes.



- Qual é o valor de m + n? 92°

2 Congruência de triângulos

O conceito de congruência é fundamental no trabalho com a Geometria. Certifique-se de que os alunos conseguem compreender esse conceito e os casos de congruência.

Para refletir e responder

Márcio notou que o triângulo ABC e o triângulo PMN desenhados em uma folha eram muito parecidos.

Para conferir, copiou o triângulo ABC em um papel de seda e o sobrepôs ao triângulo PMN: os vértices de um coincidiram com os vértices do outro.

- O que se pode afirmar sobre os lados do $\triangle ABC$ e do $\triangle PMN$? E sobre os ângulos?

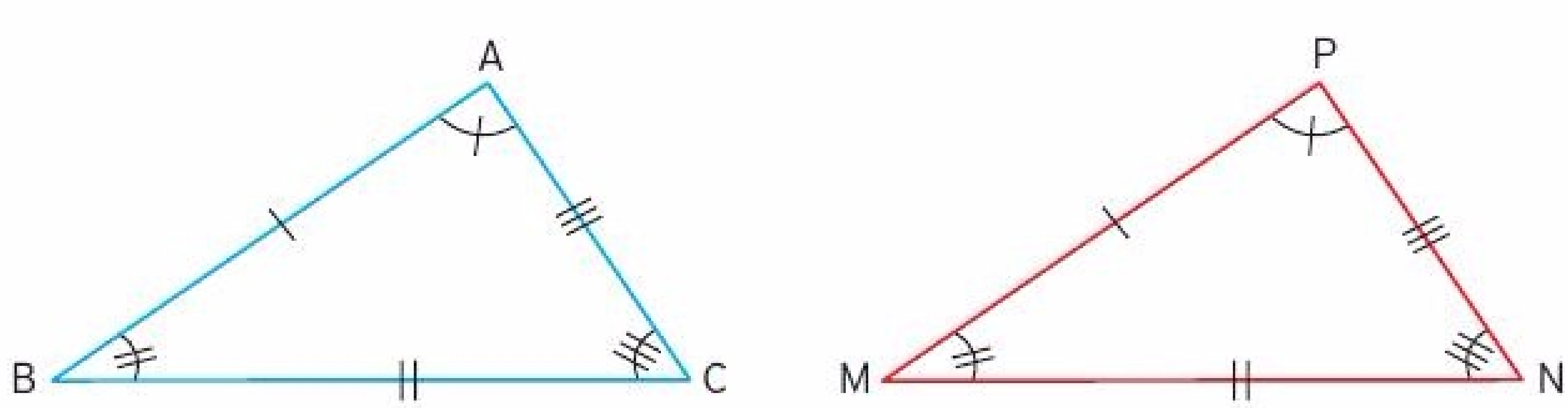
As medidas são iguais. As medidas são iguais.

Ao realizar essa tarefa, Márcio fez um ou mais movimentos sobre o triângulo ABC que já conhecemos: translação, reflexão e rotação.

Sobrepondo a cópia do $\triangle ABC$ ao $\triangle PMN$, foi possível verificar que os triângulos não só eram parecidos como também tinham o mesmo tamanho: as medidas dos lados e dos ângulos de um deles tinham, respectivamente, as mesmas medidas dos lados e dos ângulos do outro.

Nesse caso, dizemos que $\triangle ABC$ e $\triangle PMN$ são **congruentes**.

Indicamos:
$\triangle ABC \equiv \triangle PMN$.



Os elementos congruentes são marcados com o mesmo número de traços.

lados $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{PM} \\ \overline{BC} \equiv \overline{MN} \\ \overline{CA} \equiv \overline{NP} \end{cases}$ e **ângulos** $\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \hat{B} \equiv \hat{M} \\ \hat{C} \equiv \hat{N} \end{cases}$ então **triângulos** $\triangle ABC \equiv \triangle PMN$

Dois **triângulos** são **congruentes** quando os lados e os ângulos de um deles são respectivamente congruentes aos lados e aos ângulos do outro.

Casos de congruência entre triângulos

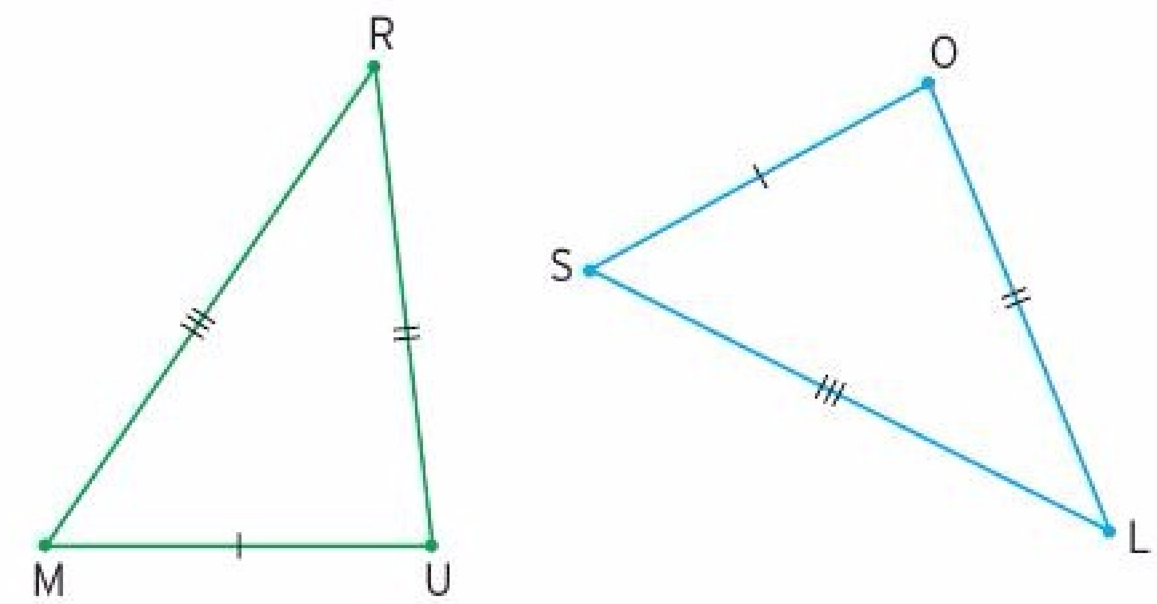
Na prática, não é preciso verificar as seis congruências para se certificar de que dois triângulos são congruentes. Bastam apenas três delas, desde que uma envolva um dos lados; são os chamados **casos de congruência de triângulos**. Vamos conhecê-los.

1º caso

Dois triângulos que têm os três lados respectivamente congruentes são triângulos congruentes.

lado — lado — lado
LLL

$$\left.\begin{array}{l} \overline{MU} \equiv \overline{SO} \text{ (L)} \\ \overline{UR} \equiv \overline{OL} \text{ (L)} \\ \overline{RM} \equiv \overline{LS} \text{ (L)} \end{array}\right] \text{——} \triangle MUR \equiv \triangle SOL$$

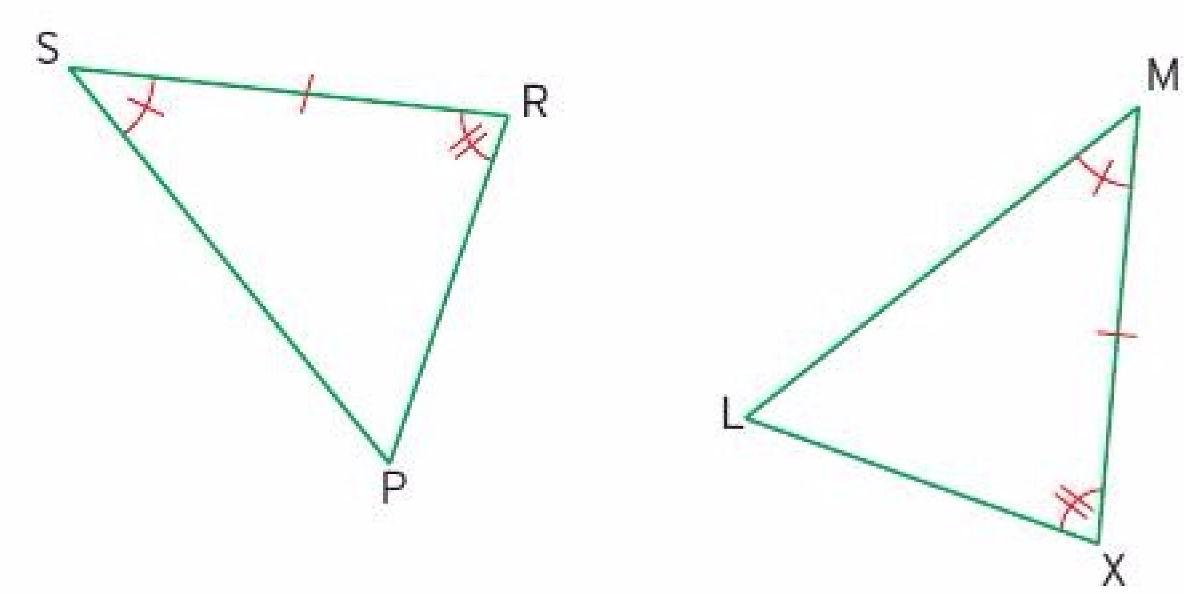


2º caso

Dois triângulos que têm um lado e os ângulos adjacentes a esse lado respectivamente congruentes são triângulos congruentes.

ângulo — lado — ângulo
ALA

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S} \equiv \hat{M} \text{ (A)} \\ \overline{SR} \equiv \overline{MX} \text{ (L)} \\ \hat{R} \equiv \hat{X} \text{ (A)} \end{array}\right] \text{——} \triangle SPR \equiv \triangle MLX$$

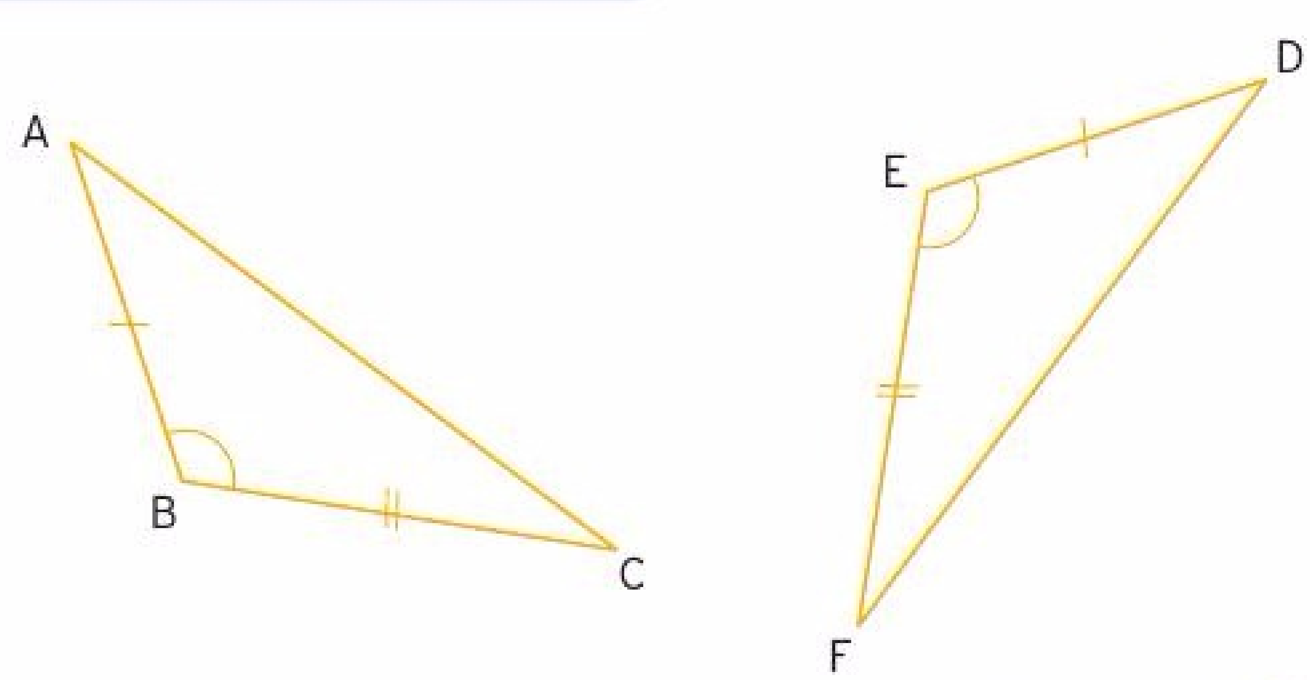


3º caso

Dois triângulos que têm dois lados e o ângulo compreendido por esses lados respectivamente congruentes são triângulos congruentes.

lado — ângulo — lado
LAL

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \text{ (L)} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \text{ (A)} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \text{ (L)} \end{array}\right] \text{——} \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

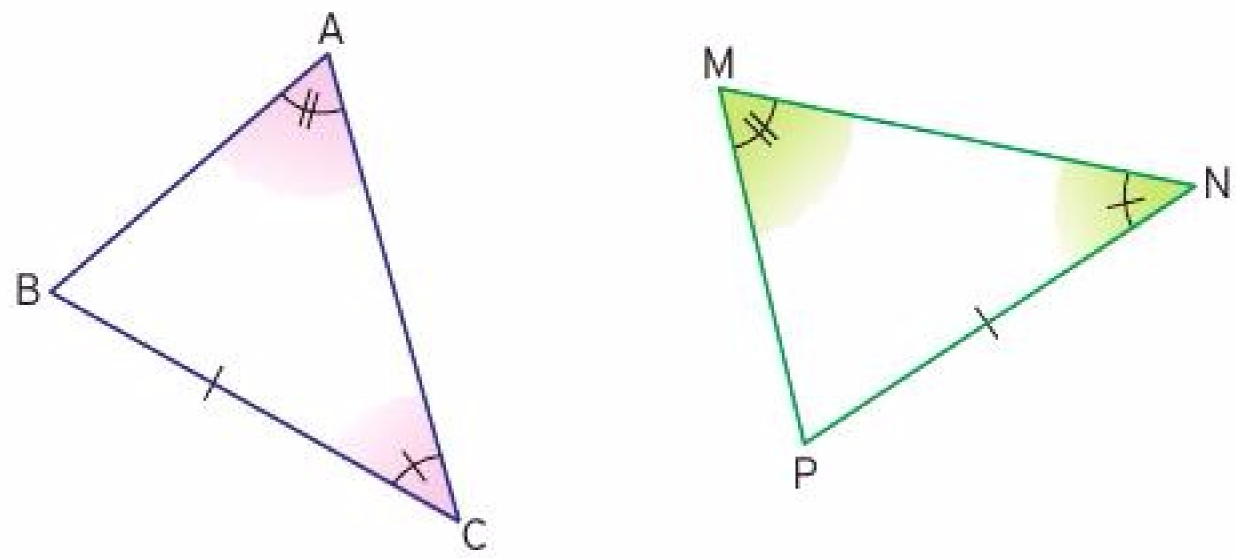


4º caso

Dois triângulos que têm um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes são triângulos congruentes.

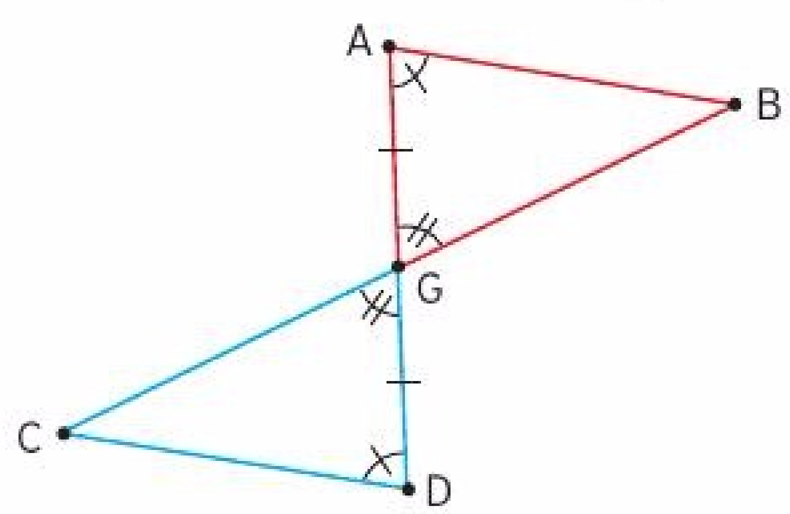
lado — ângulo — ângulo oposto
LAA_o

$$\left.\begin{array}{lr} \overline{BC} \equiv \overline{PN} & (L) \\ \hat{C} \equiv \hat{N} & (A) \\ \hat{A} \equiv \hat{M} & (A_o) \end{array}\right] \text{———} \triangle ABC \equiv \triangle MPN$$



Exemplo:

Nesta figura, **G** é ponto médio de $\overline{AD}$ e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são congruentes. Mostre que $\triangle AGB$ e $\triangle DGC$ são triângulos congruentes.



$\hat{A} \equiv \hat{D}$ (A)

G é ponto médio de $\overline{AD}$ ——— $\overline{AG} \equiv \overline{DG}$ (L)

$A\hat{G}B$ e $D\hat{G}C$ (o.p.v.) ——— $A\hat{G}B \equiv D\hat{G}C$ (A)

$\triangle AGB \equiv \triangle DGC$, pelo caso ALA.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

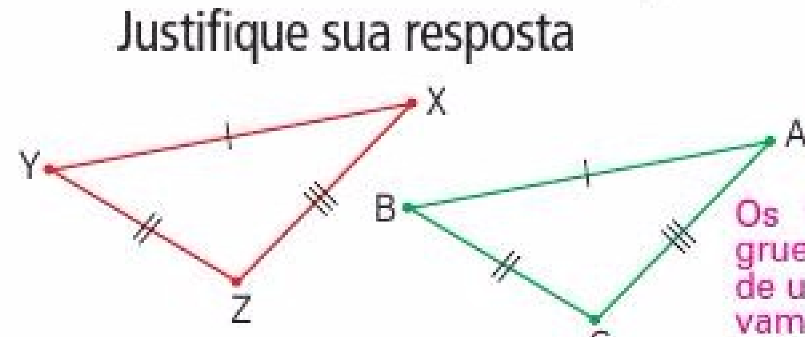
15. Explique, com suas palavras, o significado da frase: "O triângulo ABC é congruente ao triângulo PMN". Resposta pessoal.

16. Os triângulos a seguir têm os lados respectivamente congruentes. O que podemos afirmar sobre esses triângulos? Justifique sua resposta

$\overline{AB} \equiv \overline{XY}$

$\overline{BC} \equiv \overline{YZ}$

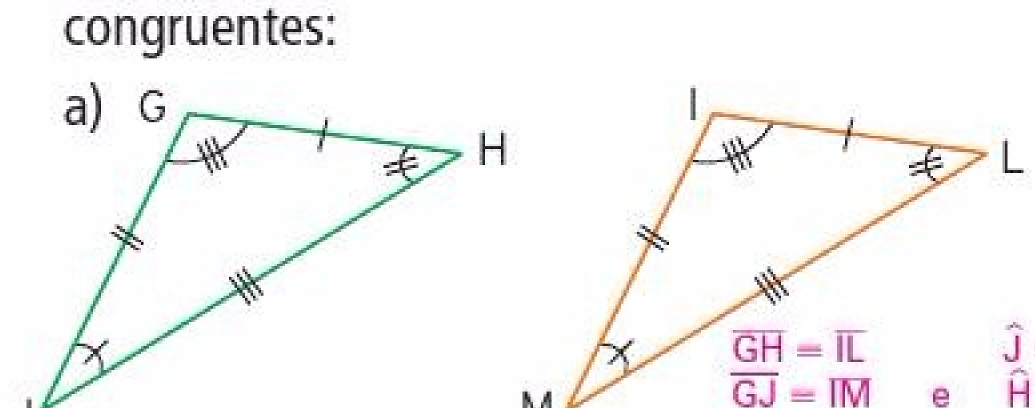
$\overline{CA} \equiv \overline{ZX}$



Os triângulos são congruentes, porque os lados de um deles são respectivamente congruentes aos lados do outro. Caso LLL.

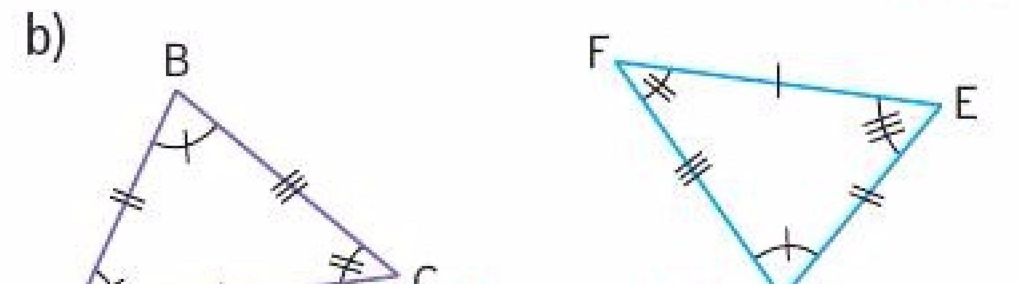
17. Os pares de triângulos a seguir são congruentes. Em cada caso, identifique os elementos congruentes:

a)



$\overline{GH} \equiv \overline{IL}$, $\overline{GJ} \equiv \overline{IM}$, $\overline{JH} \equiv \overline{ML}$ e $\hat{J} \equiv \hat{M}$, $\hat{H} \equiv \hat{L}$, $\hat{G} \equiv \hat{I}$

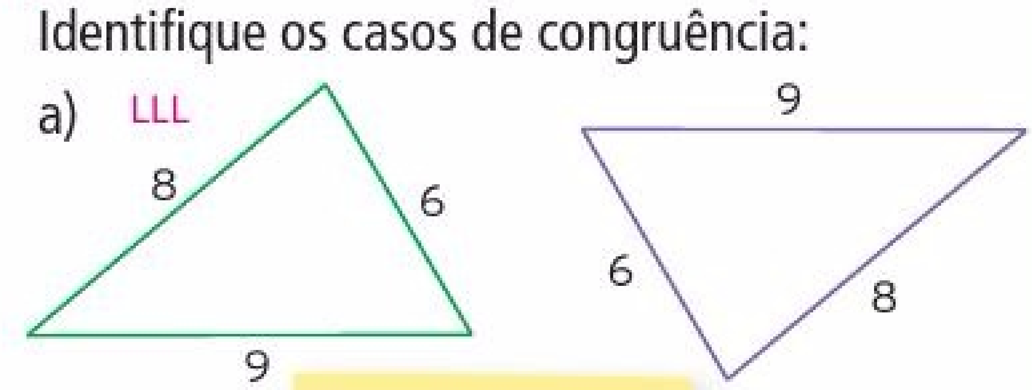
b)



$\overline{AC} \equiv \overline{EF}$, $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$, $\overline{BC} \equiv \overline{DF}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$, $\hat{A} \equiv \hat{E}$

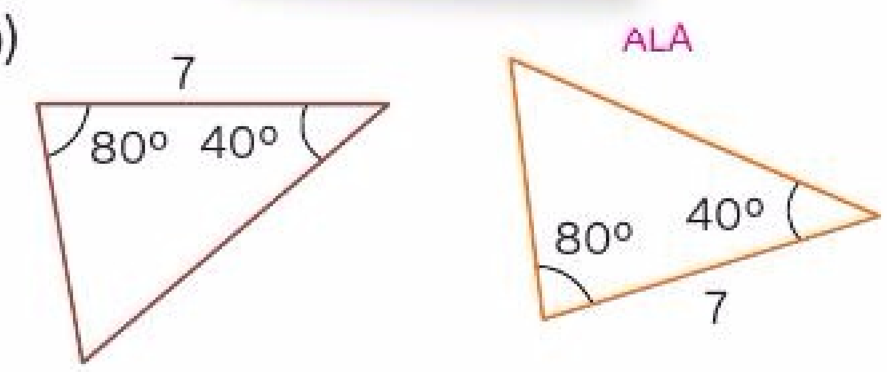
18. Estes pares de triângulos são congruentes. Identifique os casos de congruência:

a) LLL



Medidas indicadas em cm.

b) ALA



Investigue e explique

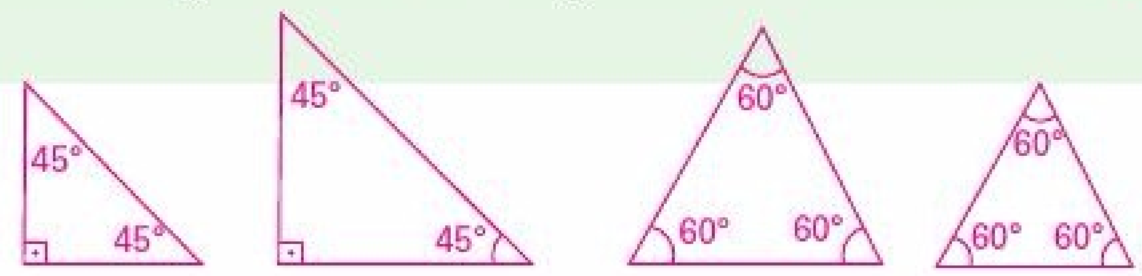
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam sobre a questão e respondam.

— Desenhem três triângulos retângulos em que os ângulos agudos medem 45°.

— Façam o mesmo com triângulos equiláteros.

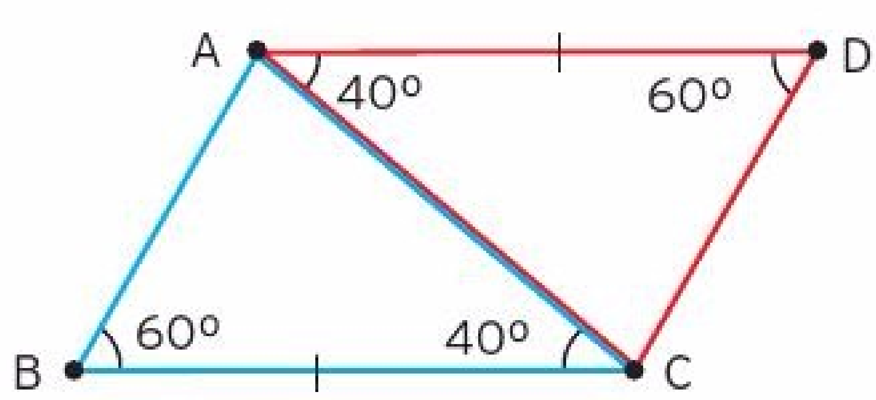
- Os triângulos desenhados são congruentes?
- A frase: "Dois triângulos que têm os ângulos congruentes são congruentes" é verdadeira? Não.



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

19. Observe as marcações da figura e note que $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.

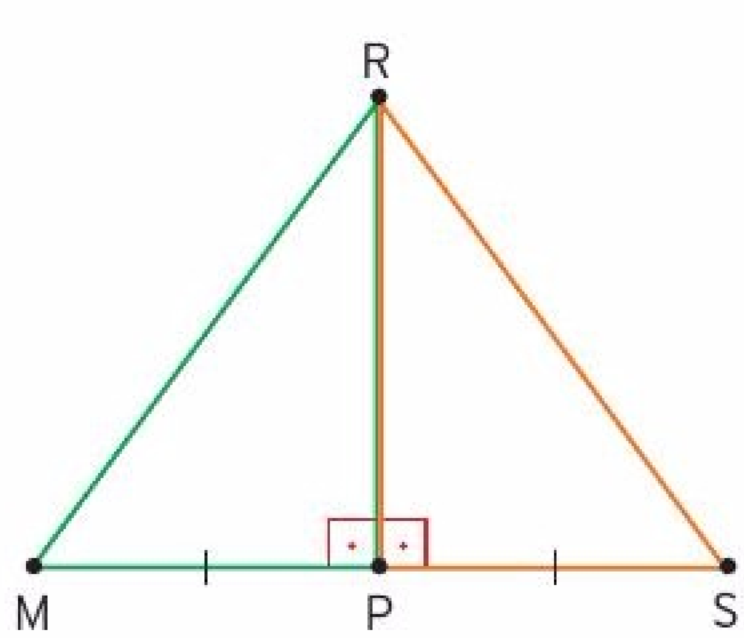


a) Entre os lados do $\triangle CDA$, qual é congruente a $\overline{AB}$? E a $\overline{AC}$? $\overline{CD}$; $\overline{CA}$

b) Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$? E de $D\hat{C}A$? 80°; 80°

c) Que caso permite escrever essa congruência? LAL (ou ALA)

20. Observando as marcações da figura, temos $\triangle RMP \equiv \triangle RSP$.

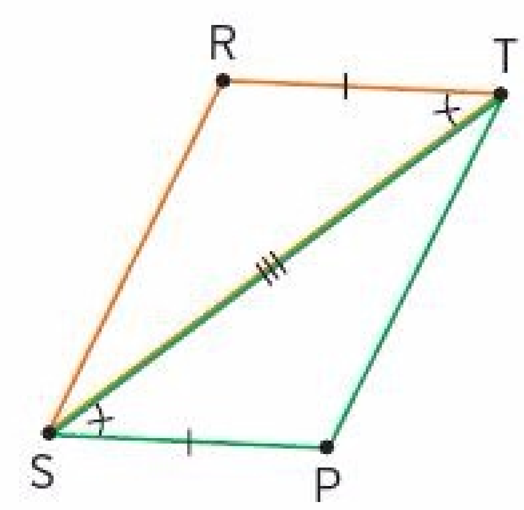


a) Que caso permite concluir essa congruência? LAL

b) Entre os ângulos do $\triangle RMP$, qual é congruente a $R\hat{S}P$? E a $S\hat{R}P$? $R\hat{M}P$; $M\hat{R}P$

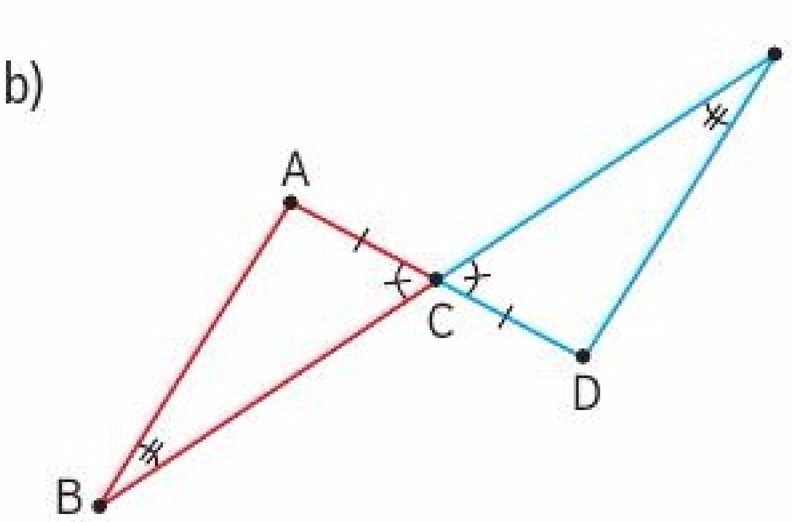
21. Entre os três pares de triângulos congruentes, em qual deles se aplica o caso LAA_o? b

a)



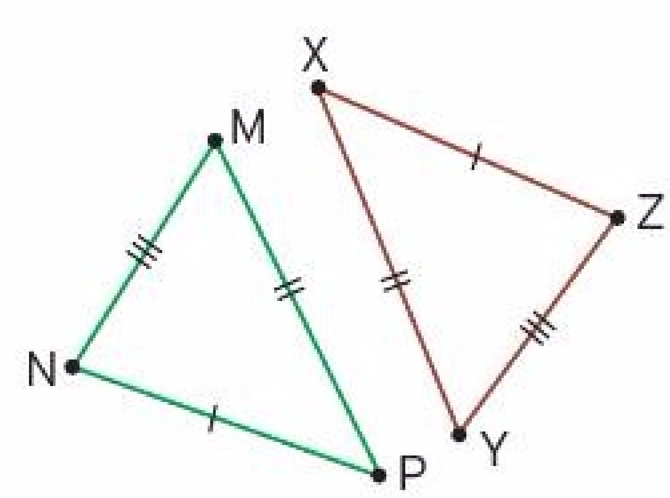
$\triangle RST \equiv \triangle PTS$

b)



$\triangle ABC \equiv \triangle DEC$

c)

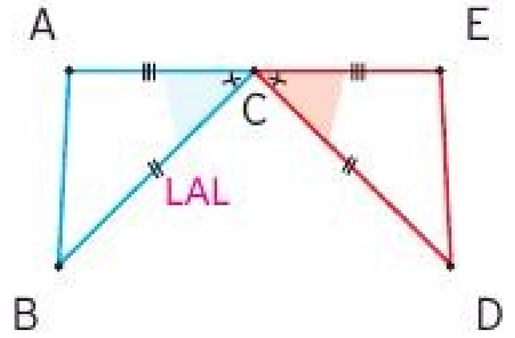


$\triangle MNP \equiv \triangle YZX$

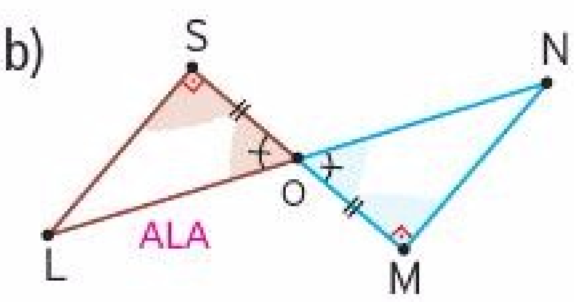
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

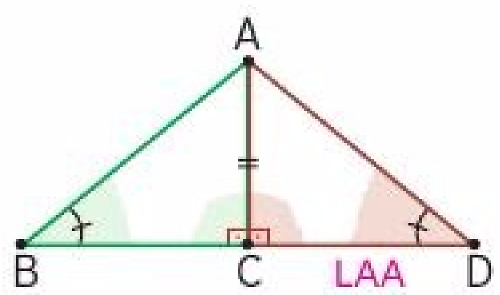
22. Nas figuras a seguir, os pares de triângulos são congruentes. Observe os pares de elementos congruentes assinalados e identifique o caso de congruência. Em seguida, copie as sentenças substituindo o ■ de modo que elas sejam verdadeiras:

a) 

$\triangle ABC \equiv$ ■ $\triangle EDC$

b) 

$\triangle SLO \equiv$ ■ $\triangle MNO$

c) 

$\triangle ABC \equiv$ ■ $\triangle ADC$

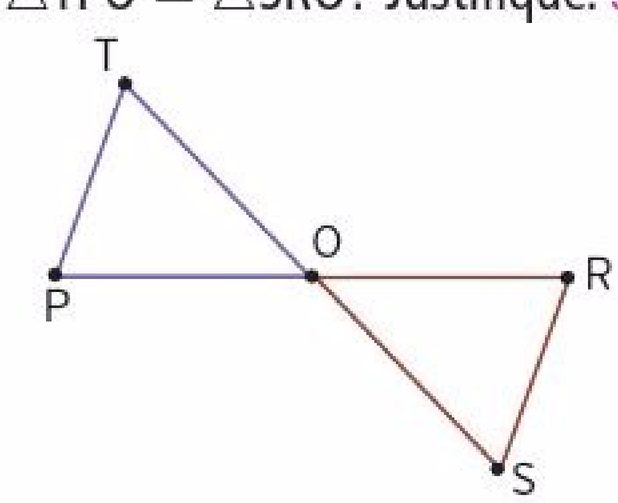
23. Nesta figura, o ponto O é ponto médio de $\overline{TS}$ e de $\overline{PR}$. Responda:

a) $\overline{PO} \equiv \overline{RO}$? Por quê? Sim, porque **O** é ponto médio de $\overline{PR}$.

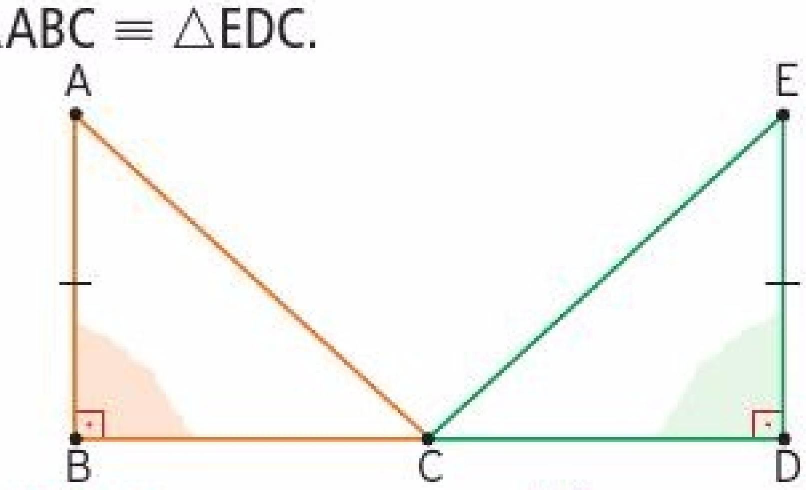
b) $T\hat{O}P \equiv S\hat{O}R$? Por quê? Sim, porque são o.p.v.

c) $\overline{TO} \equiv \overline{SO}$? Por quê? Sim, porque **O** é ponto médio de $\overline{TS}$.

d) $\triangle TPO \equiv \triangle SRO$? Justifique. Sim; caso LAL.

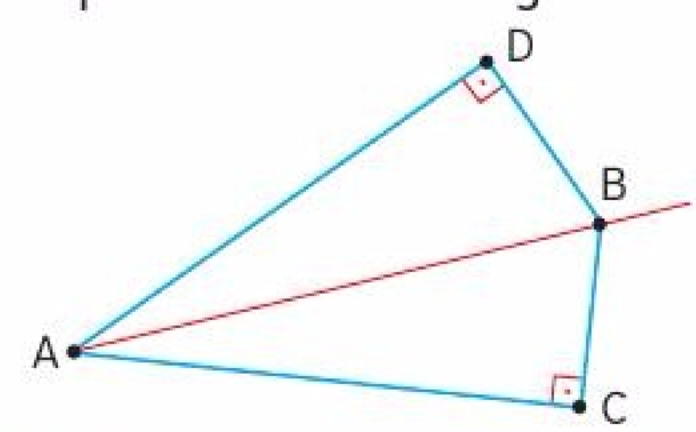


24. Nesta figura, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{ED}$ são retas perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$ são segmentos de reta congruentes e C é ponto médio de $\overline{BD}$. Mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$.



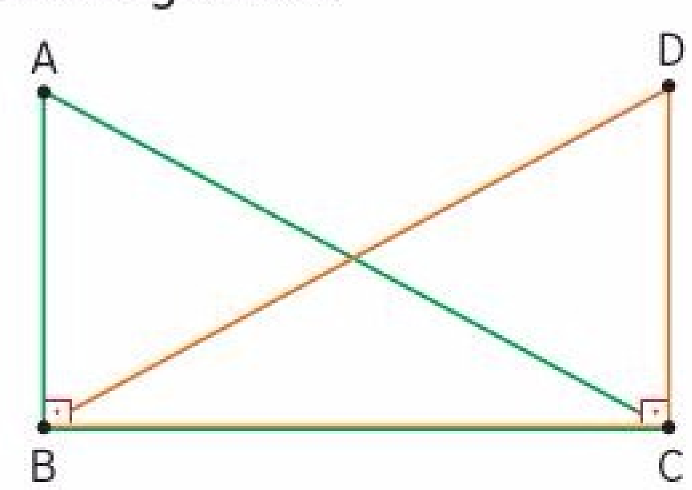
$\overline{AB} \equiv \overline{ED}$ (L)
$\hat{B} \equiv \hat{D}$ (A)
$\overline{BC} \equiv \overline{DC}$ (C é ponto médio) (L)
$\triangle ABC \equiv \triangle EDC$

25. Nesta figura, $\overrightarrow{AB}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$, $\overline{DB}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. Mostre que $\overline{DB}$ e $\overline{CB}$ são congruentes.



$\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (lado comum) (L)
$B\hat{A}D \equiv B\hat{A}C$ ($\overrightarrow{AB}$ é bissetriz)(A)
$B\hat{D}A \equiv B\hat{C}A$ (ângulos retos)(A_o)
$\triangle ABD \equiv \triangle ABC$ ⇓ $\overline{DB} \equiv \overline{CB}$

26. Nesta figura, $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são segmentos de reta congruentes. Mostre que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ também são congruentes.

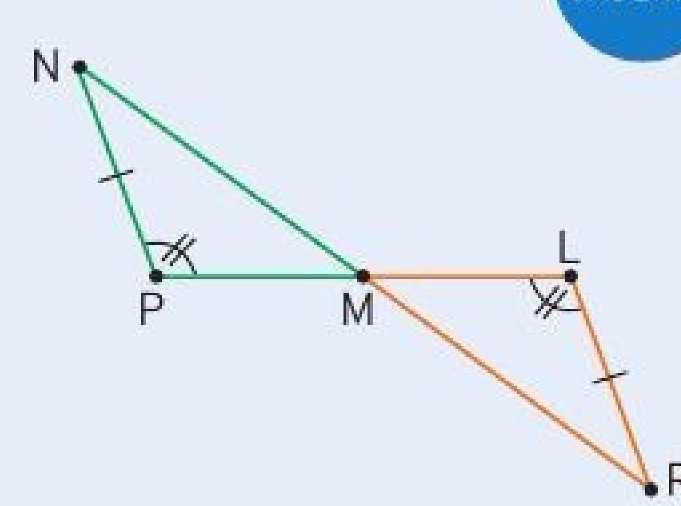


$\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ (L)
$\hat{B} \equiv \hat{C}$ (ângulos retos) (A)
$\overline{BC} \equiv \overline{BC}$ (lado comum) (L)
$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ ⇓ $\hat{A} \equiv \hat{D}$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre a questão e respondam.
Nesta figura, $\overline{NP} \equiv \overline{RL}$ e $\hat{P} \equiv \hat{L}$.
Mostre que **M** é ponto médio de $\overline{PL}$.
Pista: demonstre que $\overline{PM} \equiv \overline{LM}$. Resposta no final do livro.



3 Triângulos isósceles, equiláteros e propriedades

As propriedades dos triângulos isósceles e dos triângulos equiláteros são muito utilizadas em demonstração de propriedades de outras figuras geométricas. Também são aplicadas na resolução de vários problemas nos quais desejamos determinar as medidas de lados e de ângulos de figuras.

Propriedades dos triângulos isósceles

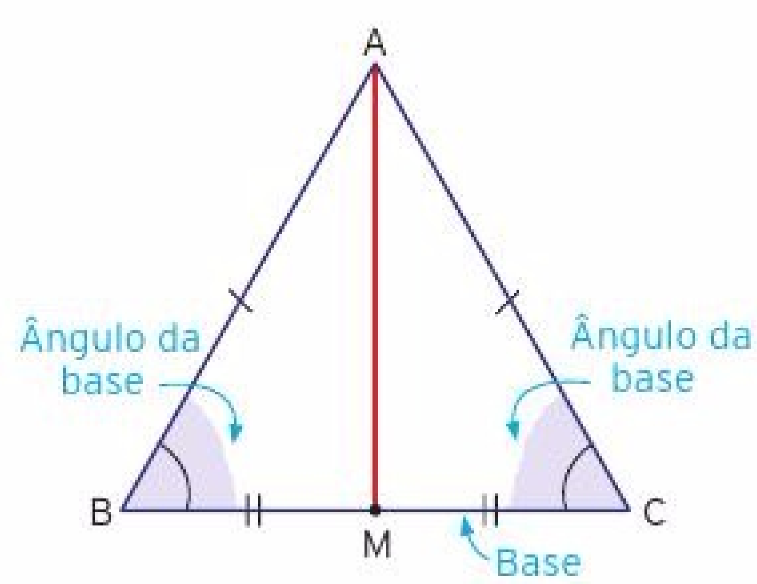
Vamos explorar duas propriedades dos triângulos isósceles.

1ª propriedade

Consideremos um triângulo isósceles ABC em que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes.

Vamos mostrar que $\hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{C}}$.

Ao traçarmos a mediana $\overline{AM}$, relativa à base $\overline{BC}$, determinamos dois triângulos: $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$.



Vamos combinar:
No $\triangle ABC$, em que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, $\overline{BC}$ é a base e $\hat{A}$ é o ângulo de vértice A.

Observando esses triângulos, temos:

$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ —— informação dada. (**L**)

$\overline{BM} \equiv \overline{CM}$ —— **M** é ponto médio de $\overline{BC}$. (**L**)

$\overline{AM} \equiv \overline{AM}$ —— lado comum. (**L**)

$\triangle AMB \equiv \triangle AMC$

$\hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{C}}$

Os ângulos da base de todo triângulo isósceles são congruentes.

2ª propriedade

Consideremos um triângulo ABC que tem dois ângulos de medidas iguais.

Vamos mostrar que $\triangle$**ABC é isósceles**.

Ao traçarmos a bissetriz $\overline{AP}$ do ângulo **A**, determinamos dois triângulos: $\triangle APB$ e $\triangle APC$.

Observando esses triângulos, temos:

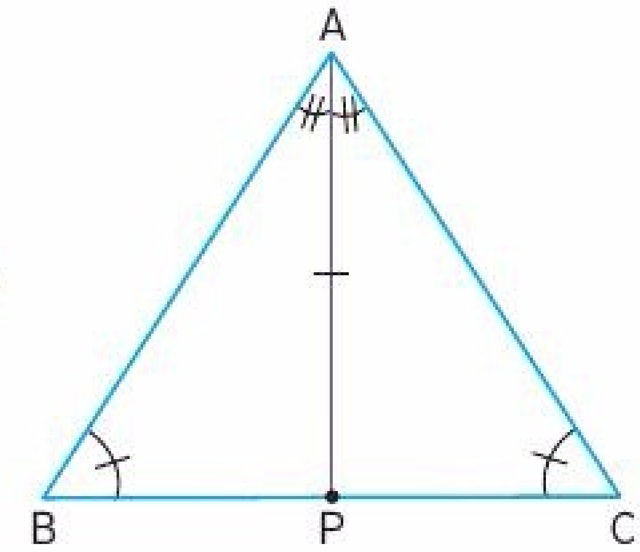
$\overline{AP} \equiv \overline{AP}$ ——— lado comum. (**L**)

$B\hat{A}P \equiv C\hat{A}P$ ——— $\overline{AP}$ é bissetriz. (**A**)

$\hat{B} \equiv \hat{C}$ ——— informação dada. ($\mathbf{A_o}$)

$\triangle APB \equiv \triangle APC$

$\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{AC}}$



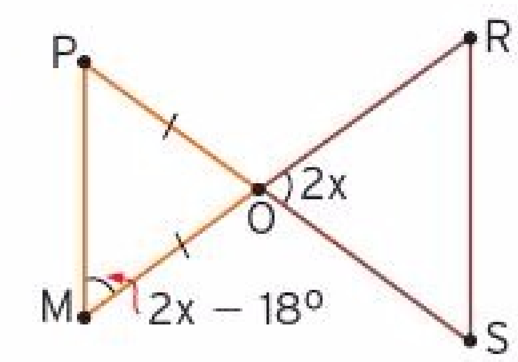
$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ ——— $\triangle$**ABC** é um triângulo **isósceles**.

> Todo triângulo que possui dois ângulos congruentes tem dois lados congruentes, ou seja, é isósceles.

Nesta figura, o triângulo PMO é isósceles. Qual é o valor de **x**?

$\triangle$PMO isósceles ——— $\hat{M} \equiv \hat{P}$ ——— med $\hat{P} = 2x - 18°$

$R\hat{O}S \equiv M\hat{O}P$, são ângulos opostos pelo vértice. ——— med $M\hat{O}P = 2x$



A soma dos ângulos internos do $\triangle$PMO é 180°, ou seja:

$2x - 18° + 2x - 18° + 2x = 180°$ ——— $6x - 36° = 180°$

$6x = 180° + 36°$

$6x = 216°$ ——— $x = \dfrac{216°}{6}$ ——— $\mathbf{x = 36°}$

O valor de **x** é 36°.

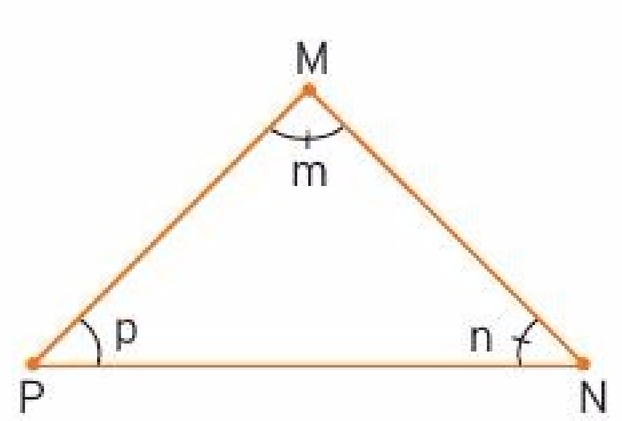
Ao explorar atividades como estas, procure observar se os alunos fazem conjecturas e têm argumentos que as confirmem.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Se ABC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, o que podemos afirmar sobre os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$?
$\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos congruentes.

28. Neste triângulo, os ângulos $\hat{M}$ e $\hat{N}$ são congruentes. a; e; f



Então, é correto afirmar que:

a) $\overline{MP} \equiv \overline{NP}$

b) $\overline{MP} \equiv \overline{MN}$

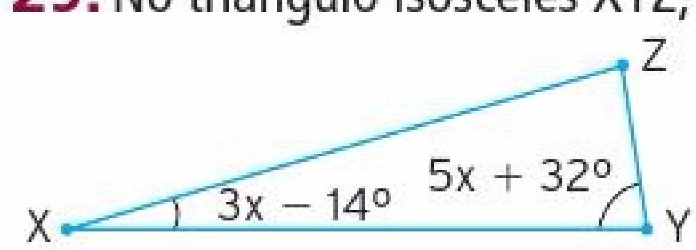
c) $\overline{MP} \equiv \overline{NP} \equiv \overline{NM}$

d) $\hat{M} \equiv \hat{P} \equiv \hat{N}$

e) $m + p + n = 180°$

f) $m = \dfrac{180 - p}{2}$

29. No triângulo isósceles XYZ, $\overline{YZ}$ é a base.



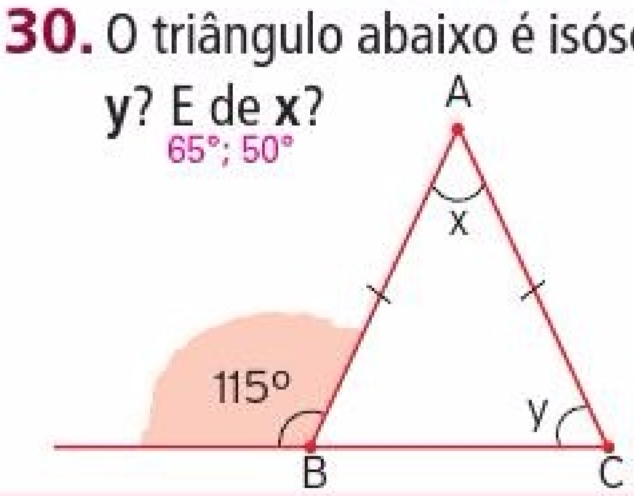
x é uma medida em graus.

a) Que expressão algébrica representa a medida de $\hat{Z}$? 5x + 32°

b) Qual é o valor de **x**? 10°

c) Qual é a medida de cada ângulo interno do $\triangle$XYZ? 82°; 82°; 16°

30. O triângulo abaixo é isósceles. Qual é o valor de **y**? E de **x**?
65°; 50°



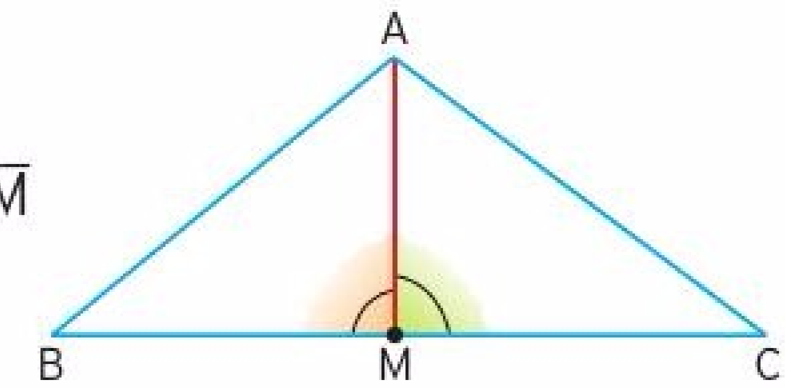
x e **y** representam medidas em graus.

Mediana, altura e bissetriz de um triângulo isósceles

Vamos demonstrar que:

> Em um triângulo isósceles qualquer, a mediana relativa à base é também a altura relativa a essa base e é bissetriz do ângulo de vértice oposto a essa base.

$\triangle ABC$ isósceles, base $\overline{BC}$ — $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{AC} \\ \hat{B} \equiv \hat{C} \end{cases}$



$\overline{AM}$ mediana — **M** é ponto médio de $\overline{BC}$ — $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$

$\triangle ABM$		$\triangle ACM$	
$\overline{AB}$	$\equiv$	$\overline{AC}$	(**L**)
$\overline{BM}$	$\equiv$	$\overline{CM}$	(**L**)
$\overline{AM}$	$\equiv$	$\overline{AM}$	(**L**)

— $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ — $A\hat{M}B \equiv A\hat{M}C$

$$\text{med } A\hat{M}B + \text{med } A\hat{M}C = 180°$$

$$2 \cdot \text{med } A\hat{M}B = 180°$$

$$\textbf{med } \mathbf{A\hat{M}B = 90°}$$

med $A\hat{M}B$ = med $A\hat{M}C = 90°$ — $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ — $\overline{AM}$ é altura relativa a $\overline{BC}$.

$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ — $B\hat{A}M \equiv C\hat{A}M$ — $\overline{AM}$ é bissetriz de $B\hat{A}C$.

Também é possível demonstrar que:

> Em qualquer triângulo isósceles, a altura relativa à base é, também, a mediana relativa a essa base e a bissetriz do ângulo de vértice.

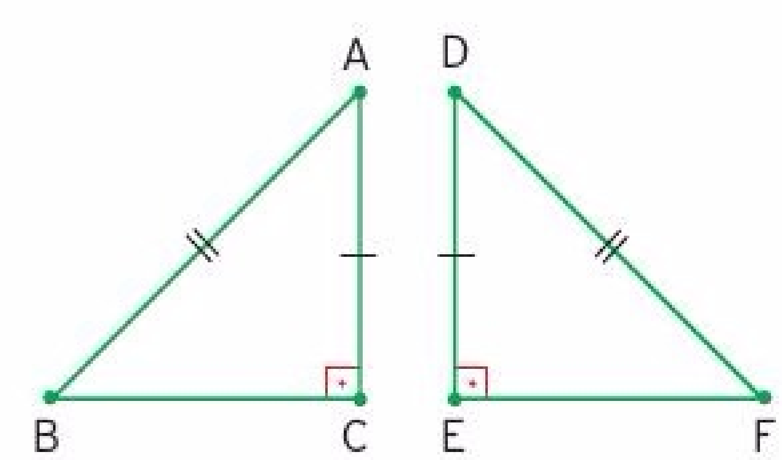
> Em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo de vértice é, também, a altura e a mediana relativas à base.

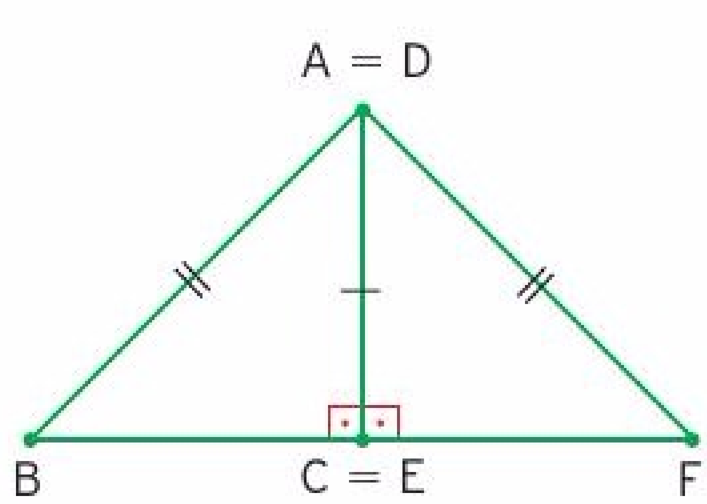
Exemplo:

Prove que dois triângulos retângulos são congruentes quando têm a hipotenusa e um dos catetos respectivamente congruentes.

$\overline{AB} \equiv \overline{DF}$

$\overline{AC} \equiv \overline{DE}$





Com os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DFE$ compomos o $\triangle ABF$, que é isósceles e no qual $\overline{AC}$ é a altura relativa à base $\overline{BF}$.

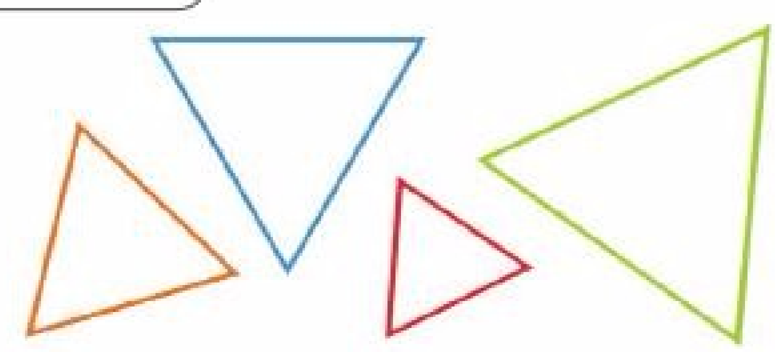
Como $\triangle ABF$ é isósceles, $\overline{AC}$ é também a mediana e $\overline{BC} \equiv \overline{CF}$ ou $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$.

Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle AFC$ ou $\triangle ABC \equiv \triangle DFE$ pelo caso **LLL**.

Propriedades dos triângulos equiláteros

Para refletir e responder

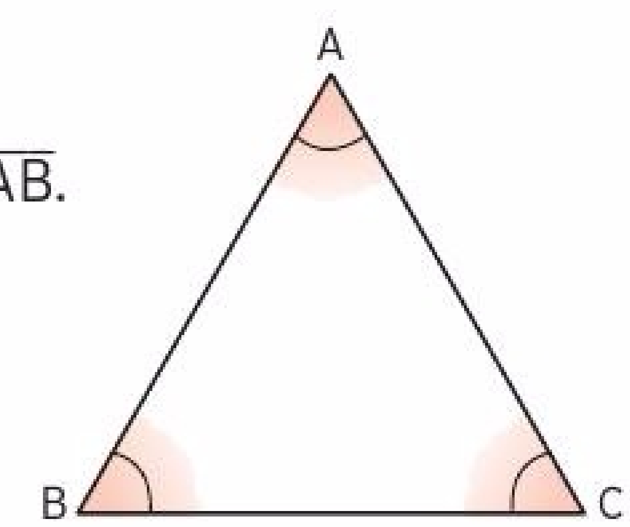
Os triângulos desenhados a seguir são equiláteros.



- Encontre a resposta fazendo dobraduras.

É interessante incentivar os alunos a comprovar as propriedades dos triângulos equiláteros e isósceles por meio de dobraduras, por ser uma atividade lúdica. Mas lembre-se de alertá-los sobre a importância das demonstrações.

O $\triangle ABC$ da figura ao lado é equilátero.



Vamos mostrar que $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{A} \equiv \hat{C}$, ou seja, $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$.

$\triangle ABC$ equilátero —— $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ —— $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$.

$\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$ —— $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Do mesmo modo, mostramos que $\hat{A} \equiv \hat{C}$.

Portanto $\mathbf{\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}}$.

Note que, como os três ângulos de um triângulo equilátero são congruentes entre si, temos:

$$\text{med } \hat{A} + \underbrace{\text{med } \hat{B}}_{\downarrow} + \underbrace{\text{med } \hat{C}}_{\downarrow} = 180°$$

$$\text{med } \hat{A} + \text{med } \hat{A} + \text{med } \hat{A} = 180°$$

$$3 \cdot \text{med } \hat{A} = 180° \text{ —— } \text{med } \hat{A} = \frac{180°}{3} = 60°$$

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Portanto:

$\text{med } \hat{A} = 60°$ $\quad$ $\text{med } \hat{B} = 60°$ $\quad$ $\text{med } \hat{C} = 60°$

Em qualquer triângulo equilátero os três ângulos internos são congruentes entre si e cada um deles mede 60°.

Também é possível demonstrar que:

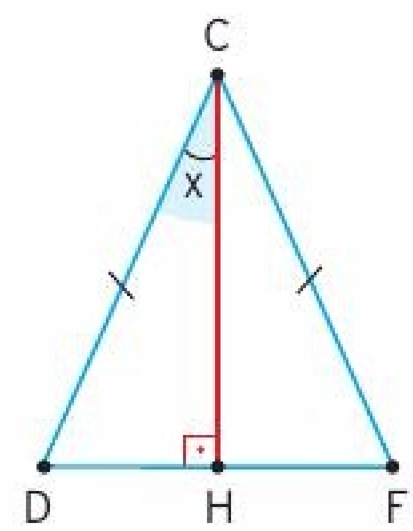
Todo triângulo que tem os três ângulos congruentes é equilátero.

Não há necessidade de esgotar toda a série de exercícios em um primeiro momento. Selecione aqueles que poderão ser realizados ao longo do trabalho com Geometria e administre-os de acordo com seu plano pedagógico.

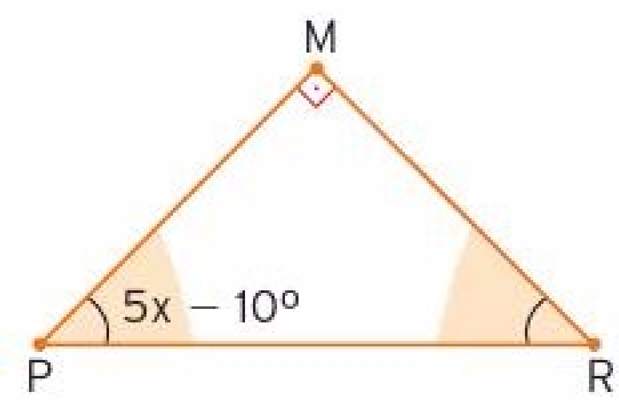
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

31. O $\triangle CDF$ é isósceles, o ângulo $C\hat{D}F$ mede 66° e $\overline{CH}$ é a altura relativa à base. Calcule, em graus, o valor de x. 24°



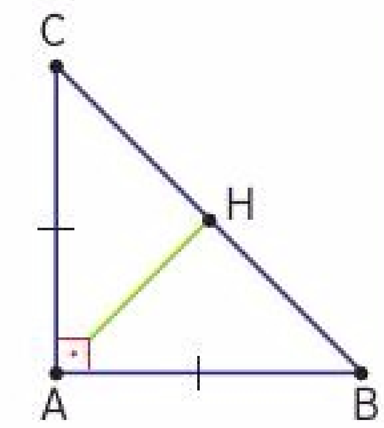
32. Nesta figura, $\hat{M}$ é um ângulo reto e $\triangle MPR$ é isósceles.



a) Quais são as medidas dos ângulos $M\hat{P}R$ e $M\hat{R}P$? São iguais a 45°.

b) Qual é o valor de **x**? 11°

33. O triângulo ABC é retângulo e isósceles. $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa e a medida de $\overline{BC}$ é o dobro da medida de $\overline{AH}$. Copie as sentenças verdadeiras referentes a esse triângulo: b; c; e; f



a) $\triangle ABH$ é escaleno.

b) $\triangle ABH$ é isósceles.

c) $\overline{AH}$ é bissetriz de $C\hat{A}B$.

d) med $\hat{B} = 60°$.

e) med $\hat{B}$ + med $\hat{C} = 90°$.

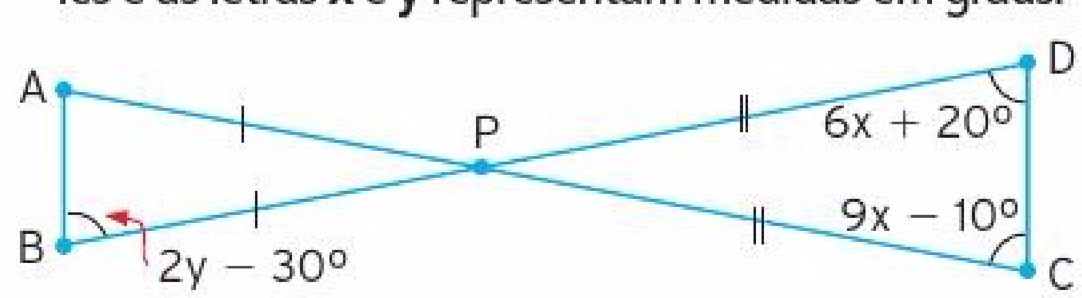
f) med $\hat{C} = 45°$.

34. Qualquer triângulo equilátero é também um triângulo isósceles? Por quê?
Sim, porque, tendo três lados congruentes entre si, tem dois lados congruentes entre si, o que o caracteriza como isósceles. Há outras respostas possíveis.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

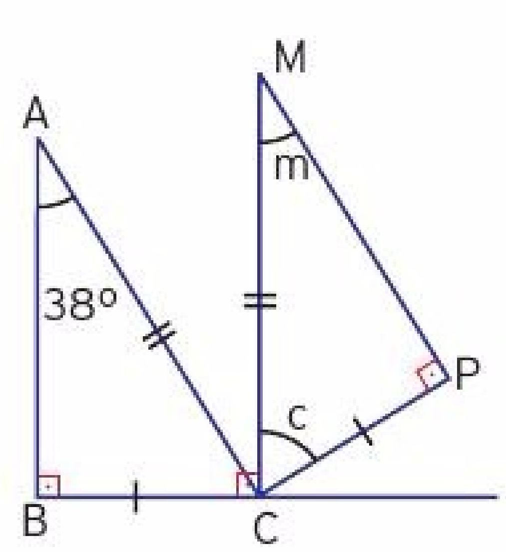
35. Nesta figura, $\triangle ABP$ e $\triangle PCD$ são triângulos isósceles e as letras **x** e **y** representam medidas em graus.



a) Quais são as medidas dos ângulos internos do $\triangle PCD$? 20°; 80°; 80°

b) Os triângulos ABP e CDP têm ângulos respectivamente congruentes? Eles são triângulos congruentes? Sim; não.

36. Nesta figura, $\triangle ABC$ e $\triangle MPC$ são triângulos retângulos. Os lados respectivamente congruentes estão assinalados de formas iguais. Anote apenas as afirmações verdadeiras: a; c; e; f



a) $B\hat{A}C \equiv P\hat{M}C$

b) med $M\hat{C}P = 38°$

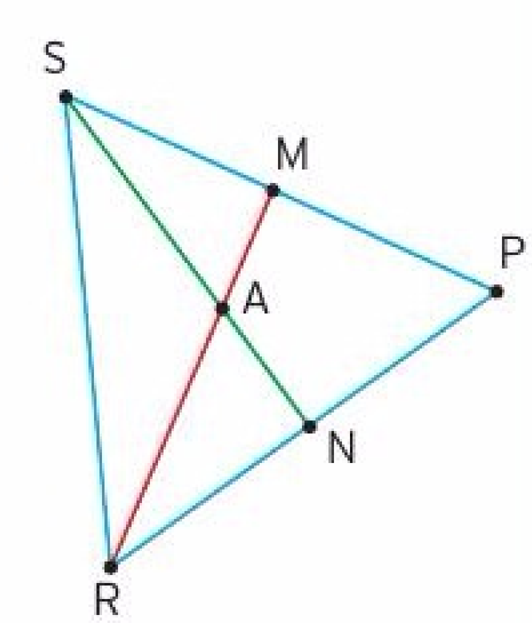
c) $\triangle ABC \equiv \triangle MPC$

d) $\overline{AB} \equiv \overline{MC}$

e) $m + c = 90°$

f) $\overline{AB} \,//\, \overline{MC}$

37. No triângulo equilátero PSR, $\overline{RM}$ e $\overline{SN}$ são medianas relativas aos lados desse triângulo e determinam os triângulos MSR e NRS.



Nessas condições:

a) Mostre que os triângulos MSR e NRS são congruentes. Caso LAL.

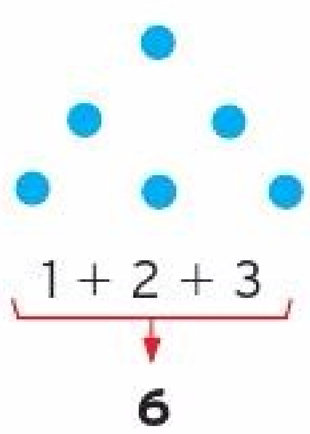
b) Mostre que $N\hat{S}R$ e $M\hat{R}S$ são ângulos congruentes.
$\triangle MSR \equiv \triangle NRS$, logo $N\hat{S}R \equiv M\hat{R}S$.

c) Que tipo de triângulo é o $\triangle ASR$? Isósceles.

Leitura

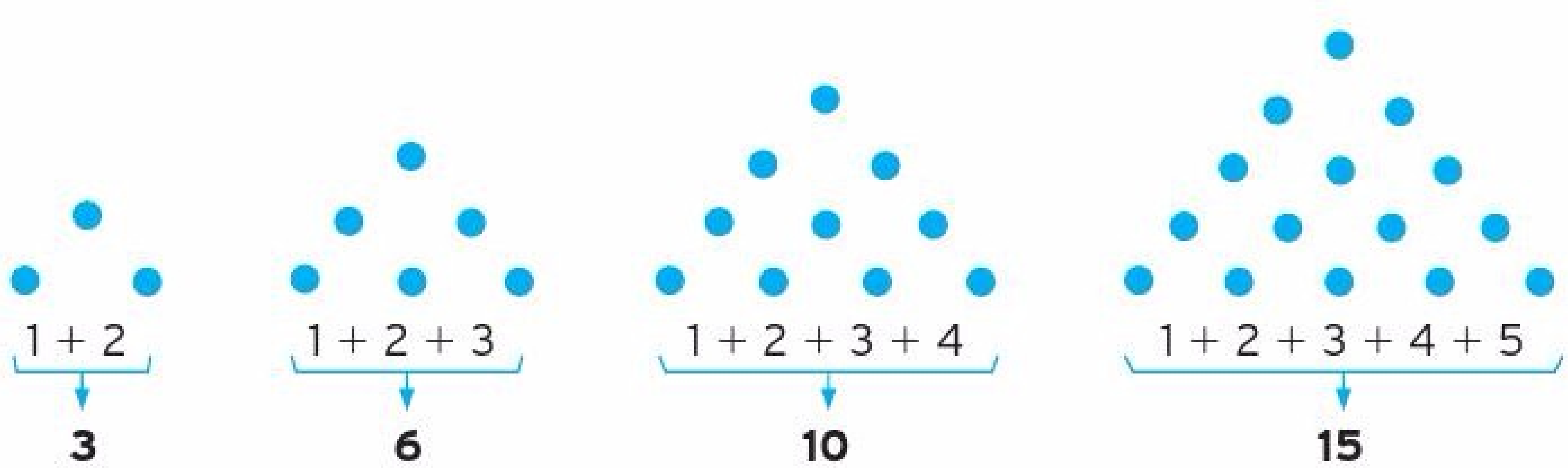
Números triangulares

Pitágoras, o matemático e filósofo grego que viveu no século VI a.C., e seus seguidores, os pitagóricos, estudaram os chamados "números figurados". O desenho abaixo representa um desses números: o número **6**.



Os pitagóricos chamavam o número **6** de "número triangular", pois ele pode ser representado em forma triangular.

Observe parte da sequência dos "números triangulares":

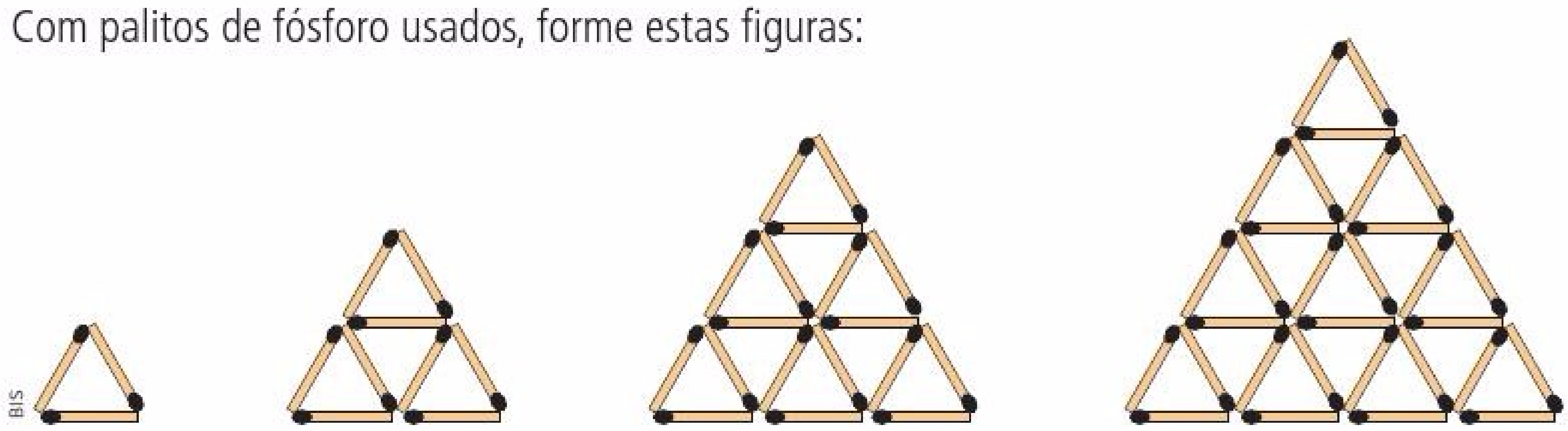


Existe um **padrão geométrico** e um **padrão numérico** nessas representações.

A busca de padrões é importante quando aprendemos e produzimos Matemática.

Então, vamos identificar padrões?

Com palitos de fósforo usados, forme estas figuras:



Observe que, a partir da 2ª figura, a quantidade de palitos de fósforo usados em cada uma é:

[(nº posição) · 3 + (nº de palitos da figura anterior)].

Revisão cumulativa e testes

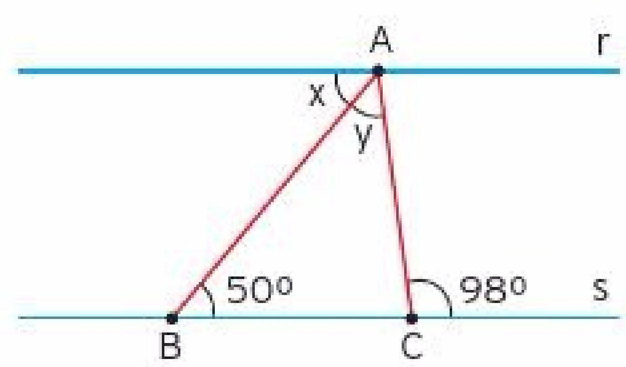
FAÇA NO CADERNO

1. Calcule o valor da expressão $\dfrac{0,\overline{5} - (-3)^{-2}}{(-1)^3 + 0,888...}$. -4

2. Considerando $P = x - 2y$ e $R = x(3x + y)$, responda: Qual é a expressão $P^2 - 3R$? $-8x^2 - 7xy + 4y^2$

3. Pedro e Mariana fizeram compras. O triplo da quantia gasta por Pedro excede em R$ 260,00 a quantia gasta por Mariana. Se a quantia total gasta pelos dois foi de R$ 1 856,00, quanto gastou cada um deles?
Pedro: R$ 529,00; Mariana: R$ 1 327,00.

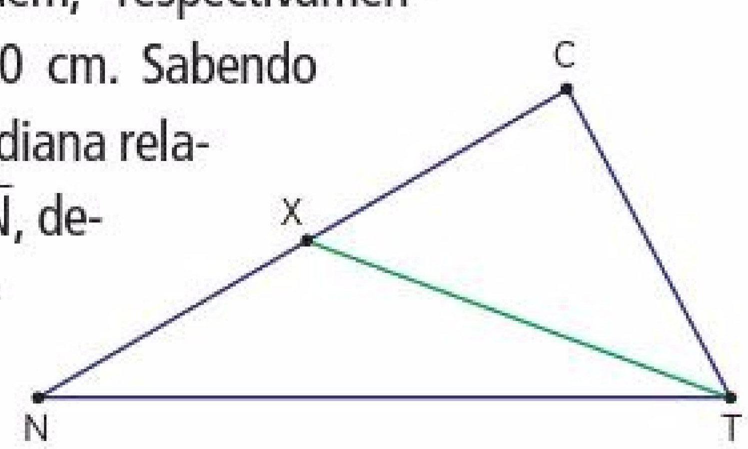
4. Nesta figura, as retas **r** e **s** são paralelas. A reta **r** passa por um dos vértices do triângulo ABC e a reta **s** contém o lado oposto a esse vértice.



a) Qual é o valor de **x**? 50°

b) Quais as medidas dos outros dois ângulos internos desse triângulo? med $\hat{C} = 82°$; med $\hat{A} = 48°$

5. O perímetro do $\triangle CNT$ é igual a 95 cm e os lados $\overline{TC}$ e $\overline{TN}$ medem, respectivamente, 20 cm e 40 cm. Sabendo que $\overline{TX}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{CN}$, determine a medida de $\overline{CX}$.
17,5 cm.



6. Uma campanha de reciclagem na escola de João foi um sucesso. João registrou em uma tabela a quantidade, em quilogramas, de latas de alumínio recolhidas durante alguns meses:

Meses	Mar.	Abr.	Jun.	Ago.	Set.	Out.
kg	58	125	100	184	116	95

a) Quantos quilogramas foram recolhidos, em média, durante esses meses? 113 kg.

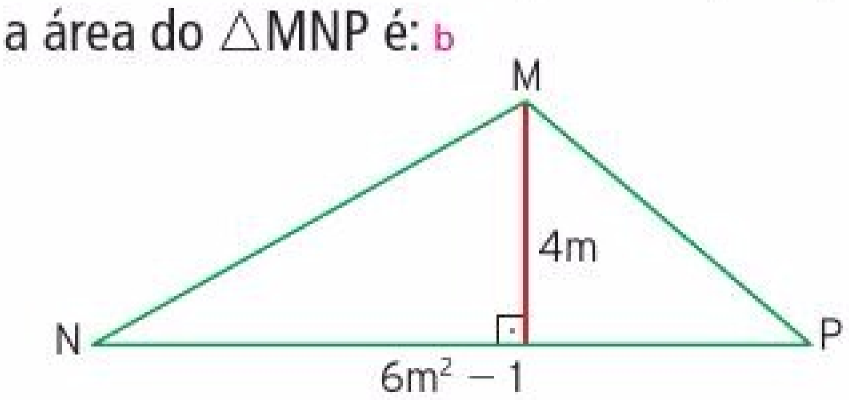
b) O que significa o valor encontrado no item anterior? Significa que, se fosse coletada a mesma quantidade todos os meses, em cada mês seriam coletados 113 kg.

7. Resolva o sistema de equações em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2(m - 3n) - 3m + n = -2n - 4 \\ \dfrac{n - m}{4} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{-m + n}{10} \end{cases}$$

$(m, n) = \left\{-1, \dfrac{5}{3}\right\}$

8. Nesta figura, **m** representa um número real positivo. Uma expressão algébrica que representa a área do $\triangle MNP$ é: b



a) $24m^3$.
b) $12m^3 - 2m$.
c) $24m^3 - 4m$.
d) $12m^3$.

9. (Saresp) O valor de **x** que satisfaça a equação $\dfrac{x}{5} - 5 = 5$ é: d

a) 0. b) 5. c) 10. d) 50.

10. (PUC-PR) Numa divisão o quociente é 3 e o resto é 6. A soma do dividendo, do divisor, do quociente e do resto é 107. Qual é a diferença entre o dividendo e o divisor? c

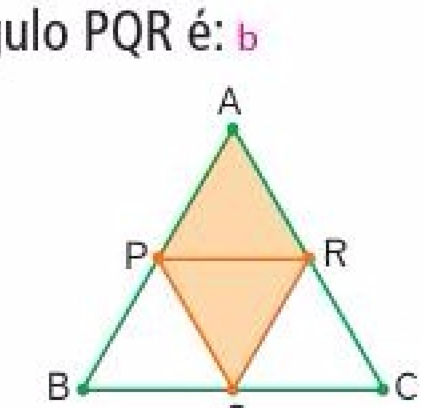
a) 0. b) 75. c) 52. d) 58.

11. (USF-SP) O número **s** do sapato que uma pessoa calça está relacionado com o comprimento **p**, em centímetros, de seu pé pela fórmula: $s = \dfrac{5p + 28}{4}$. Qual é o comprimento do pé de uma pessoa que calça sapatos de número 41? e

a) 41 cm
b) 35,2 cm
c) 30,8 cm
d) 29,5 cm
e) 27,2 cm

12. (Saresp) O triângulo da figura abaixo é equilátero. Sabe-se que sua área é 2 cm² e que P, Q e R são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. A área do triângulo PQR é: b

a) 0,25 cm².
b) 0,5 cm².
c) 1,0 cm².
d) 1,5 cm².



UNIDADE 12

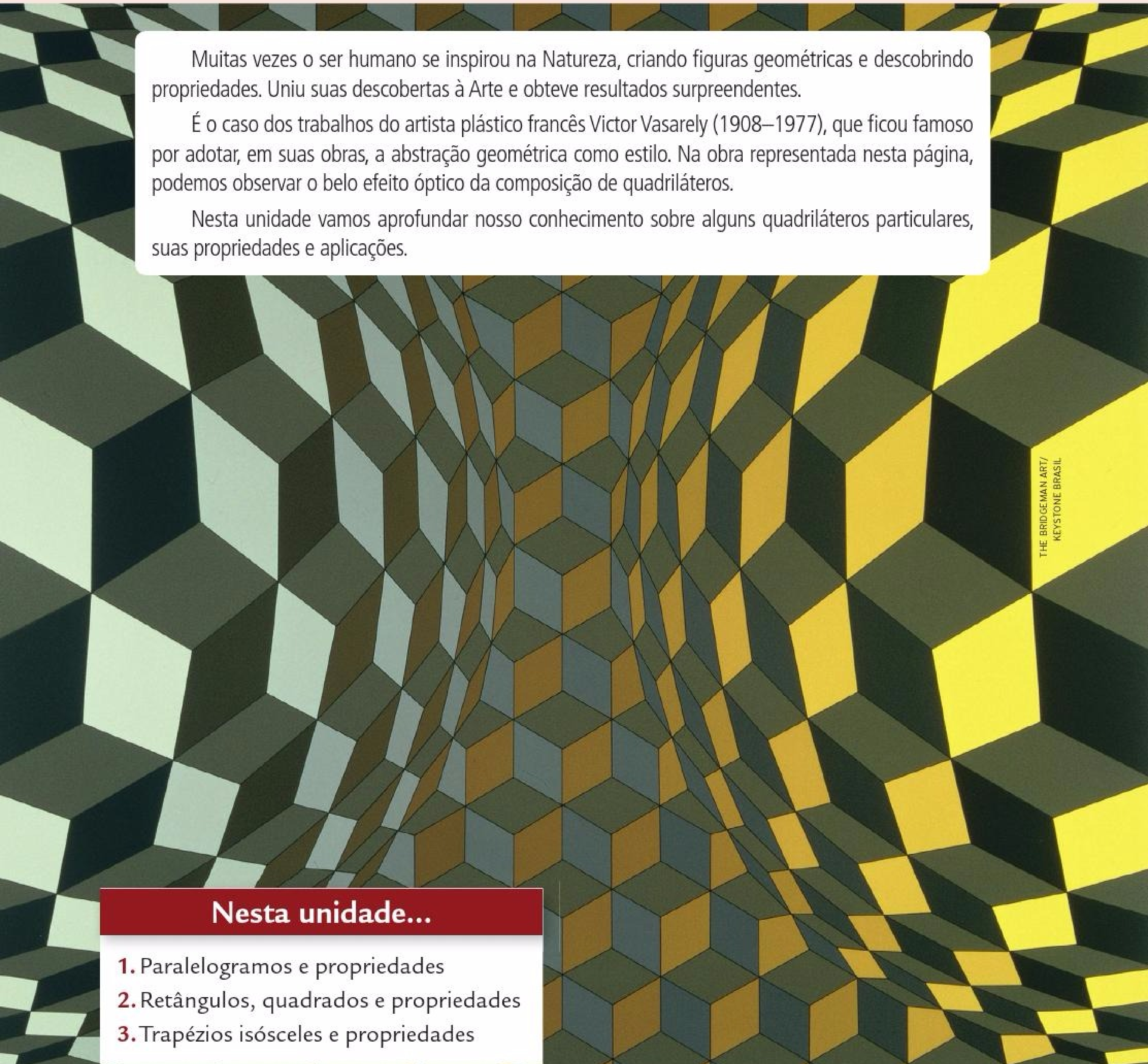
Quadriláteros e propriedades

Muitas vezes o ser humano se inspirou na Natureza, criando figuras geométricas e descobrindo propriedades. Uniu suas descobertas à Arte e obteve resultados surpreendentes.

É o caso dos trabalhos do artista plástico francês Victor Vasarely (1908–1977), que ficou famoso por adotar, em suas obras, a abstração geométrica como estilo. Na obra representada nesta página, podemos observar o belo efeito óptico da composição de quadriláteros.

Nesta unidade vamos aprofundar nosso conhecimento sobre alguns quadriláteros particulares, suas propriedades e aplicações.

Nesta unidade...



THE BRIDGEMAN ART/ KEYSTONE BRASIL

Victor Vasarely, Strineu, 1973-1975.

Os quadriláteros são polígonos utilizados nos mais variados setores de trabalho, de jogos e diversões, e de exploração das demais figuras geométricas.

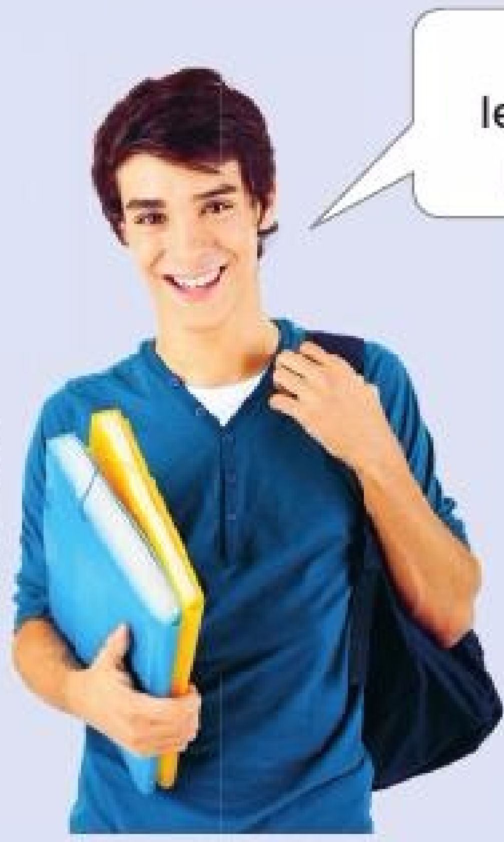
Pela praticidade que resulta de sua forma, eles também são usados em diversas aplicações práticas, como, por exemplo, na engenharia.

PAULO FRIDMAN/PULSAR IMAGENS

Ponte Hercílio Luz em Florianópolis, SC.

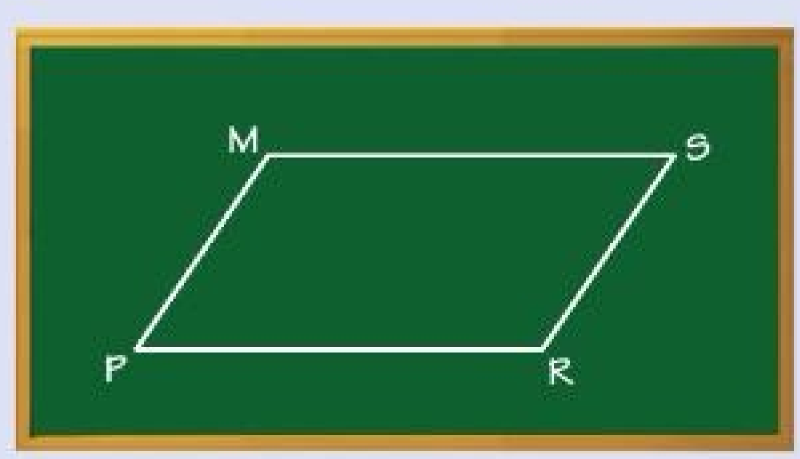
Na ponte Hercílio Luz, em Florianópolis, SC, podem-se ver as formas que lembram triângulos e quadriláteros nas barras de aço que compõem as torres.

Que tal rever alguns conhecimentos sobre esses polígonos?



SHUTTERSTOCK

Mariana, você lembra o que é um **paralelogramo**?



$\overline{PR} \parallel \overline{MS}$

É claro!
É um quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

$\overline{MP} \parallel \overline{SR}$

É isso mesmo, Mariana está certa.

Nos paralelogramos os lados paralelos são chamados lados opostos.

Além do que afirmou Mariana, sabemos que em todo quadrilátero a soma das medidas dos ângulos internos é 360º.

O que você já sabe?

- Por que o paralelogramo é um quadrilátero? Porque é um polígono com quatro lados e quatro ângulos.
- Quais os ângulos do paralelogramo MPRS acima? $M\hat{P}R$, $P\hat{R}S$, $R\hat{S}M$ e $S\hat{M}P$.
- Cite dois outros quadriláteros particulares que você conhece. Resposta possível: Retângulo e quadrado.

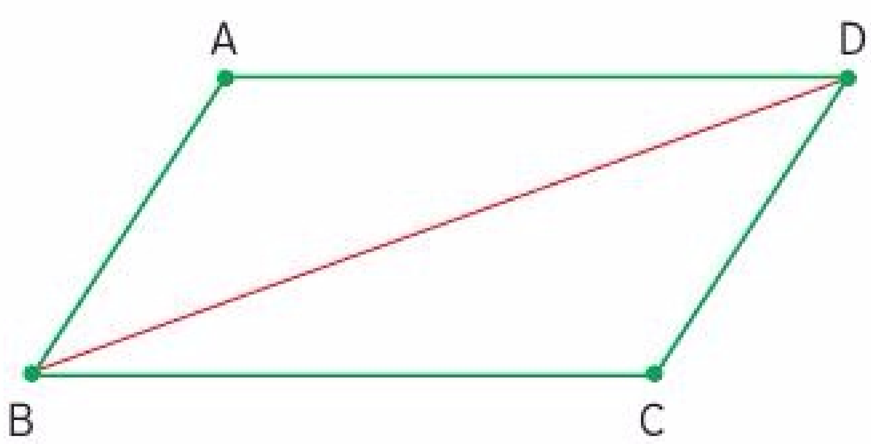
1 Paralelogramos e propriedades

Propriedades dos lados e das diagonais

Os paralelogramos possuem propriedades importantes. Vamos conhecê-las?

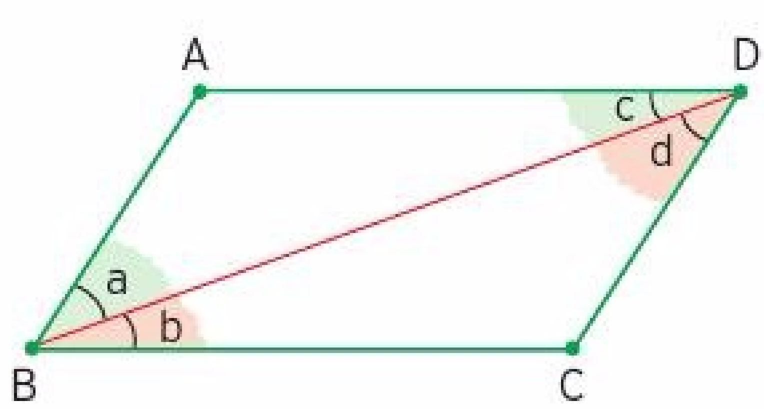
Para refletir e responder

Nesta figura, o paralelogramo ABCD foi decomposto, pela diagonal BD, em dois triângulos: $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$.



- Demonstre que $\overline{AD}$ é congruente a $\overline{BC}$ e que $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$. Não deixe de tentar! Resposta pessoal.

Na situação apresentada, pode-se concluir que os lados opostos são congruentes demonstrando que $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$.



$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são lados paralelos e $\overline{BD}$ é uma transversal.

$\hat{c} \equiv \hat{b}$ são ângulos alternos internos.

$c = b$

$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são lados paralelos e $\overline{BD}$ é uma transversal.

$\hat{a} \equiv \hat{d}$ são ângulos alternos internos.

$a = d$

Pelo caso ALA de congruência de triângulos temos: $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$:

$\hat{a} \equiv \hat{d}$ (**A**)

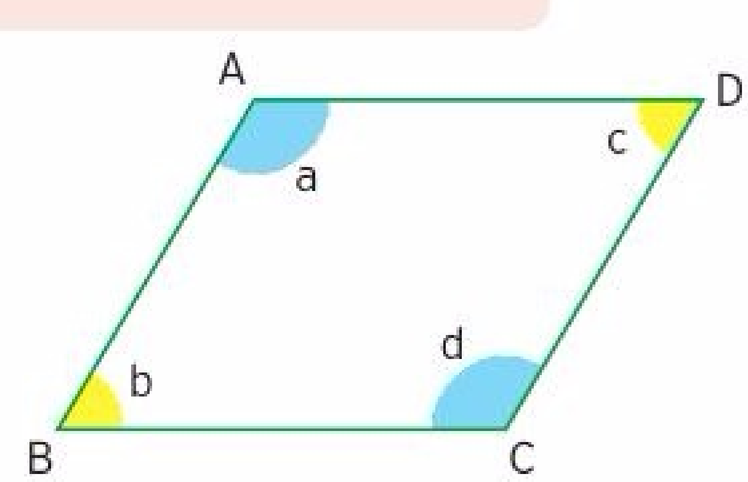
$\overline{BD} \equiv \overline{BD}$ (lado comum) (**L**)

$\hat{c} \equiv \hat{b}$ (**A**)

Logo, os lados correspondentes são congruentes: $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$.

1ª propriedade Em todo paralelogramo os **lados opostos** são **congruentes**.

Podemos também demonstrar que em paralelogramos os ângulos opostos têm medidas iguais. Vamos demonstrar que $\hat{b} \equiv \hat{c}$:



$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são lados paralelos e $\overline{AB}$ é uma transversal.

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos suplementares pois são ângulos colaterais internos:

$$a + b = 180^o \;\_\_\_\_\_\_\; b = 180^o - a \;(1)$$

$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são lados paralelos e $\overline{AD}$ é uma transversal.

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos suplementares, pois são ângulos colaterais internos:

$$a + c = 180^o \;\_\_\_\_\_\_\; c = 180^o - a \;(2)$$

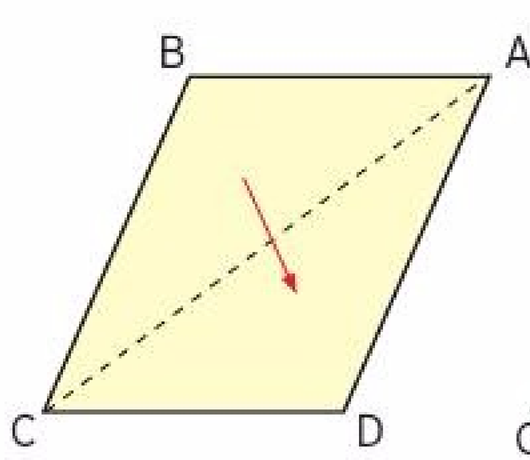
Comparando (1) e (2) temos: $\hat{b} = \hat{c}$ ou $\hat{b} \equiv \hat{c}$.

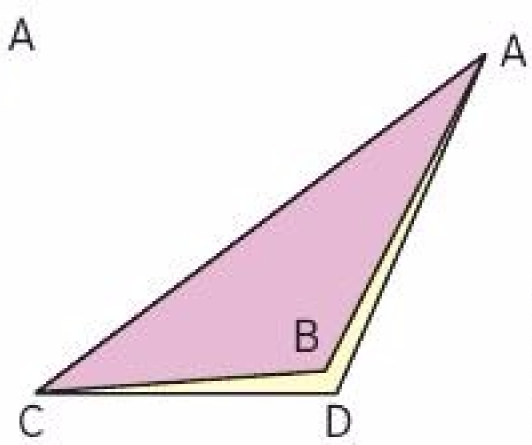
Da mesma forma demonstramos que $\hat{a} \equiv \hat{d}$.

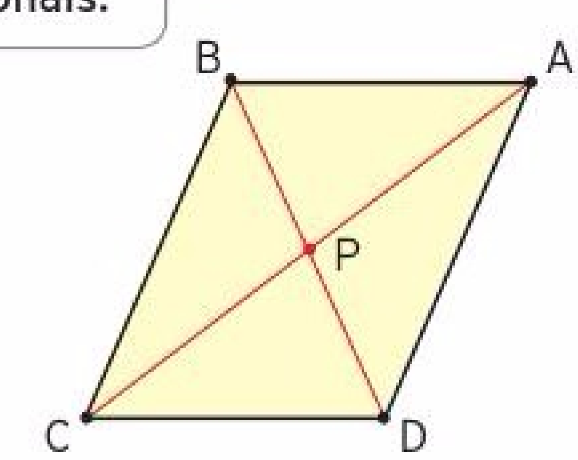
2ª propriedade Em todo paralelogramo os **ângulos opostos** são **congruentes**.

Para refletir e responder

Desenhe, em uma folha de papel, um paralelogramo parecido com este e recorte-o.



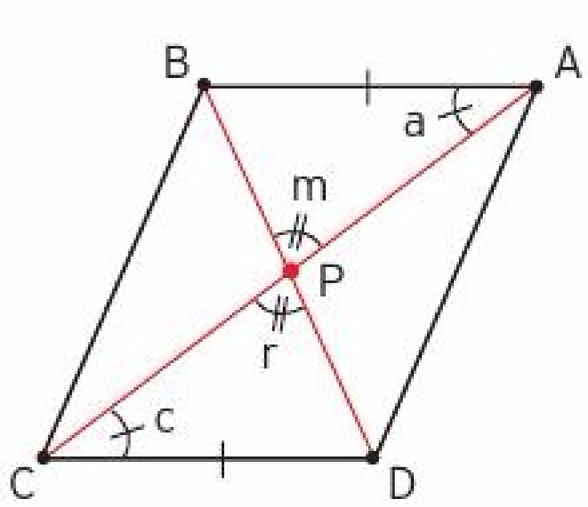




As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm um ponto comum: o ponto **P**.

- O que podemos afirmar sobre os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$? E sobre os segmentos de reta $\overline{BP}$ e $\overline{DP}$? São congruentes; são congruentes.

Nessa situação, concluímos que **P** é **ponto médio** das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, demonstrando que $\triangle ABP$ e $\triangle CDP$ são congruentes.



$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados opostos do paralelogramo ABCD. ______ $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (L)

$B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ são ângulos alternos internos. ______ $\hat{a} \equiv \hat{c}$ (A)

$B\hat{P}A$ e $D\hat{P}C$ são ângulos o.p.v. ______ $\hat{m} \equiv \hat{r}$ (A_o)

$\Delta ABP \equiv \Delta CDP$ (caso LAA_o)

$\overline{BP} \equiv \overline{DP}$ ______ **P** é ponto médio de $\overline{BD}$.

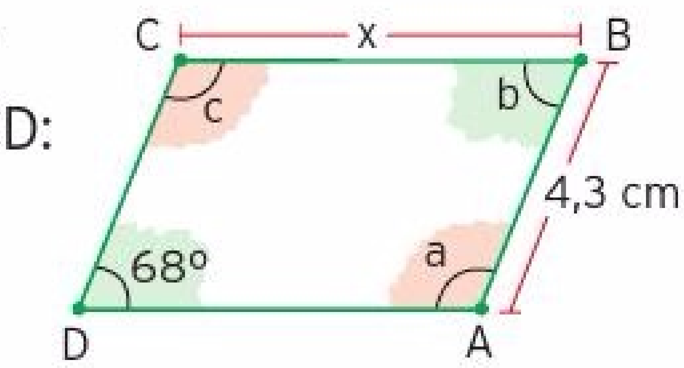
$\overline{AP} \equiv \overline{CP}$ ______ **P** é ponto médio de $\overline{AC}$.

3ª propriedade Em todo paralelogramo as **diagonais interceptam-se no ponto médio** de cada uma delas.

As propriedades têm várias aplicações.

Exemplo:

No paralelogramo ABCD, um ângulo agudo mede 68° e o perímetro é igual a 21 cm. Determine as medidas dos ângulos e dos lados desse paralelogramo.



Primeiro calcule as medidas dos ângulos do paralelogramo ABCD:

$C\hat{D}A$ e $A\hat{B}C$ são ângulos opostos ——— $b = 68°$

$B\hat{C}D$ e $D\hat{A}B$ são ângulos opostos ——— $c = a$

A soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360°.

$68° + 68° + a + c = 360°$ ——— $136° + 2a = 360°$ ——— $a = 112°$

Em seguida, calcule as medidas dos lados do paralelogramo.

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados paralelos. ——— med $\overline{CD}$ = med $\overline{AB}$ = 4,3 cm

$\overline{BC}$ e $\overline{DA}$ são lados paralelos. ——— med $\overline{DA}$ = med $\overline{BC}$ = **x**

$$\text{perímetro de ABCD} = 4{,}3 + 4{,}3 + x + x = 21$$

$$2x + 8{,}6 = 21$$

$$2x = 21 - 8{,}6$$

$$2x = 12{,}4$$

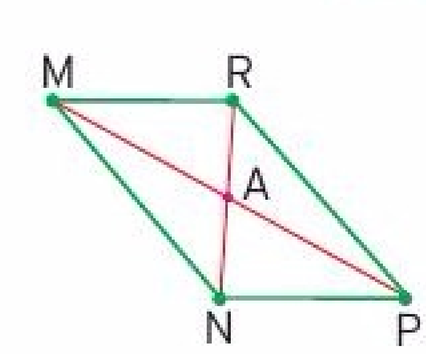
$$x = 6{,}2 \text{ cm}$$

Os ângulos agudos medem 68° e os obtusos, 112°. Os lados medem 6,2 cm; 6,2 cm; 4,3 cm e 4,3 cm.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Observe o paralelogramo MNPR e responda às questões:



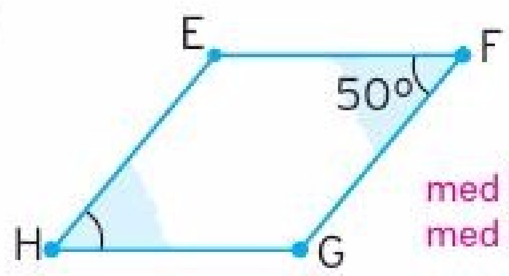
a) O que se pode concluir da informação "MNPR é um paralelogramo", em relação ao paralelismo dos lados? $\overline{MN} \parallel \overline{RP}$ e $\overline{NP} \parallel \overline{MR}$.

b) O que podemos afirmar sobre o ponto A? A é o ponto médio de $\overline{MP}$ e de $\overline{NR}$.

c) Identifique três pares de segmentos de reta congruentes nessa figura.
$\overline{MN}$ e $\overline{RP}$; $\overline{NA}$ e $\overline{RA}$; $\overline{MA}$ e $\overline{PA}$. Há outras respostas possíveis.

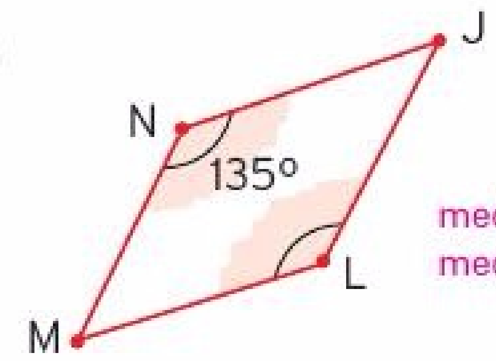
2. Determine as medidas dos ângulos dos paralelogramos.

a)



med $\hat{E}$ = med $\hat{G}$ = 130°
med $\hat{H}$ = med $\hat{F}$ = 50°

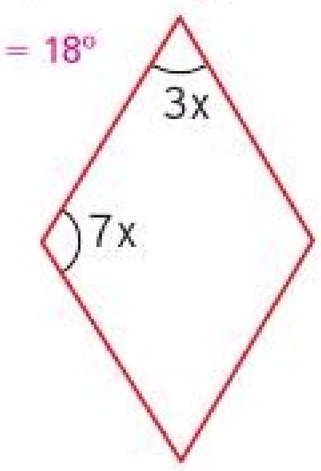
b)



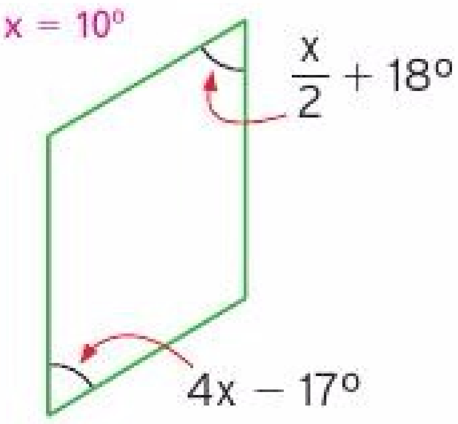
med $\hat{N}$ = med $\hat{L}$ = 135°
med $\hat{M}$ = med $\hat{J}$ = 45°

3. Nos paralelogramos seguintes a letra **x** representa uma medida em graus. Calcule o valor de **x**:

a) $x = 18°$



b) $x = 10°$



4. No paralelogramo MNPQ, o lado menor mede 3,25 cm e o lado maior mede o quádruplo do lado menor. Determine o perímetro do paralelogramo. 32,5 cm

Medida indicada em cm

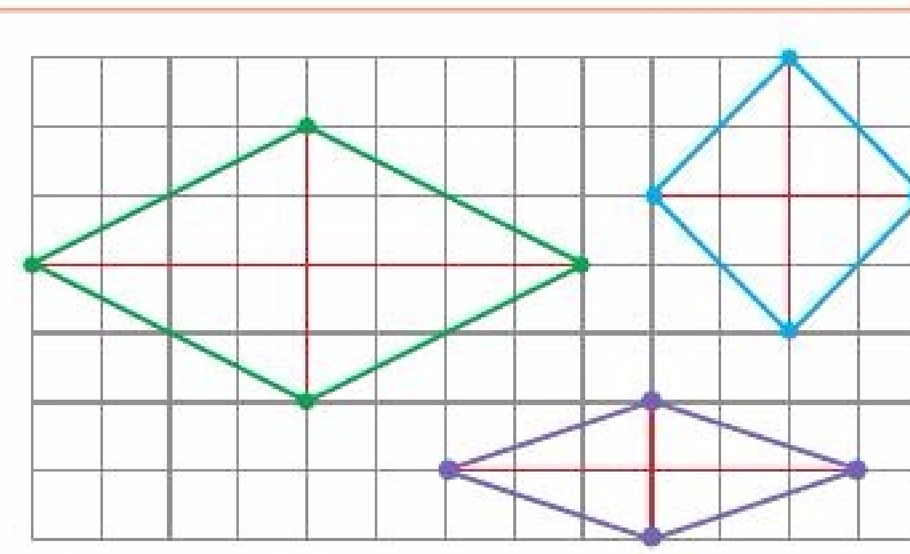
5. Em um paralelogramo, um ângulo agudo mede um quarto do ângulo obtuso. Calcule a diferença entre as medidas de um ângulo obtuso e de um agudo. 108°

6. As medidas de dois ângulos opostos de um paralelogramo, em grau, são representadas pelas expressões $(12x - 23)°$ e $(7x + 32)°$. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.
71°; 71°; 109° e 109°.

Losangos: propriedades

Para refletir e responder

Na malha quadriculada ao lado temos alguns quadriláteros.



- Que quadriláteros são esses? O que se pode concluir sobre os lados desses quadriláteros? E sobre as diagonais?

Losangos. Respostas possíveis: Os lados são congruentes. Elas se interceptam no ponto médio.

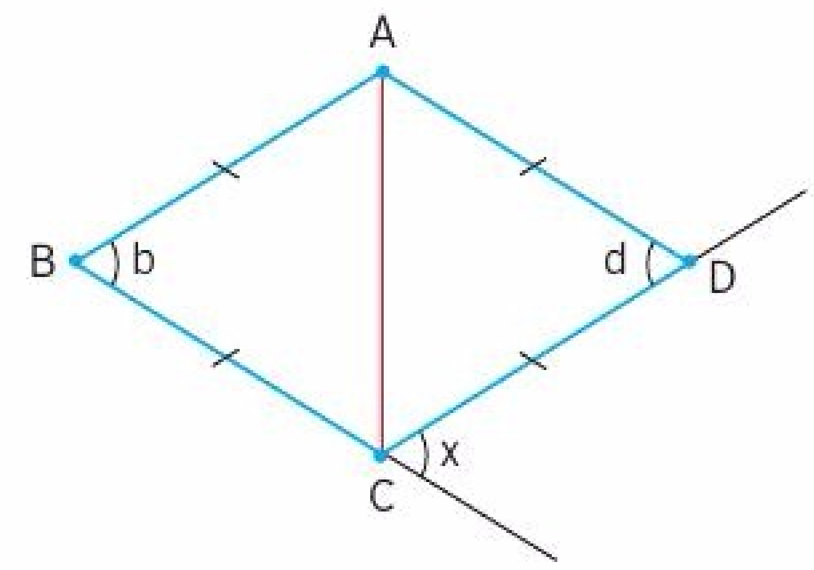
Os quadriláteros apresentados são paralelogramos. Em cada um deles, todos os lados congruentes entre si: são **losangos**. Em relação a eles é possível demonstrar que as diagonais estão sobre as bissetrizes dos seus ângulos. Veja:

Como ABCD é um paralelogramo, em particular losango, podemos afirmar que os ângulos opostos são congruentes:

Portanto, b = d

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{AD}\ (\mathbf{L}) \\ \hat{B} \equiv \hat{D}\ (\mathbf{A}) \\ \overline{BC} \equiv \overline{CD}\ (\mathbf{L}) \end{array}\right] \triangle ABC \equiv \triangle ADC \text{ ——— } B\hat{A}C \equiv D\hat{A}C$$



$$B\hat{C}A \equiv A\hat{C}D$$

$\overleftrightarrow{AC}$ é bissetriz de $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$.

Da mesma forma demonstra-se que a outra diagonal é bissetriz de **B** e de **D**.

As diagonais estão sobre as bissetrizes dos ângulos dos losangos.

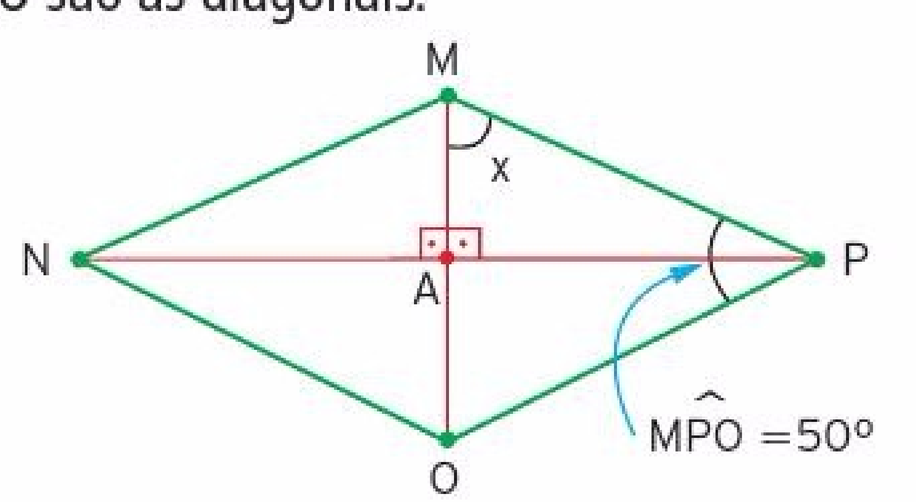
É possível, também, demonstrar que:

As diagonais são perpendiculares entre si.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

7. O quadrilátero MNOP é um losango e $\overline{NP}$ e $\overline{MO}$ são as diagonais.

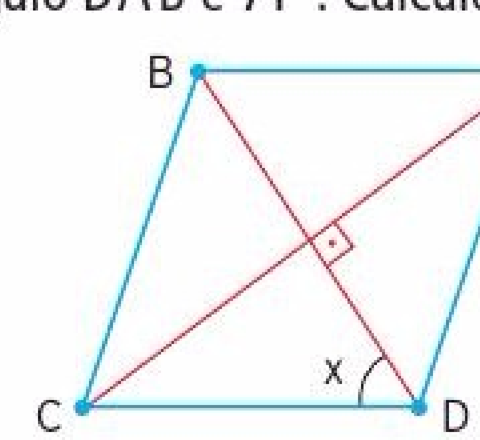


a) Qual é o valor de x? 65°

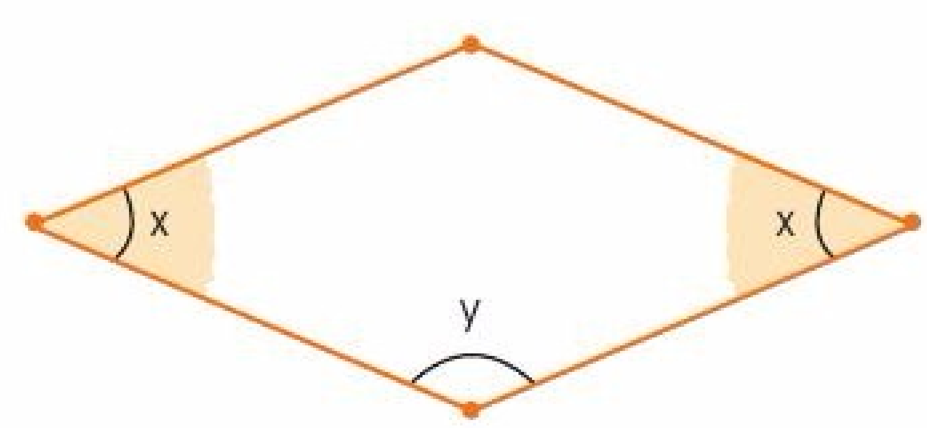
b) Qual é a medida de $P\hat{M}N$? 130°

c) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do losango MNOP? 360°

8. O quadrilátero ABCD é um losango e a medida do ângulo $D\hat{A}B$ é 71°. Calcule o valor de **x**. 54° 30′



9. Os ângulos agudos de um losango são complementares.



a) Qual é a medida de cada um deles? 45°

b) Qual é a medida de cada ângulo obtuso desse losango? 135°

10. Desenhe um losango qualquer e trace as diagonais.

a) O losango que foi desenhado tem algum eixo de simetria? Sim.

b) Caso a figura desenhada seja simétrica, quantos eixos de simetria ela tem? Quais são eles? Dois eixos de simetria; estão sobre as diagonais do losango desenhado.

2 Retângulos, quadrados e propriedades

Retângulos e quadrados são figuras geométricas bastante conhecidas dos alunos. Procure explorar o conhecimento que eles possuem e propor a redescoberta de propriedades, se possível por meio de atividades lúdicas, pesquisas e discussões em sala de aula.

Retângulos e quadrados

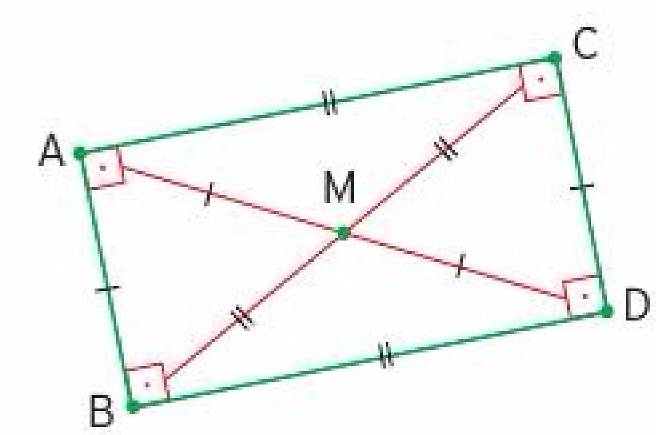
Retângulos e quadrados, junto com os triângulos, são as formas geométricas mais encontradas e utilizadas no cotidiano das pessoas.

FOTOGRAFIAS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Retângulos: propriedades

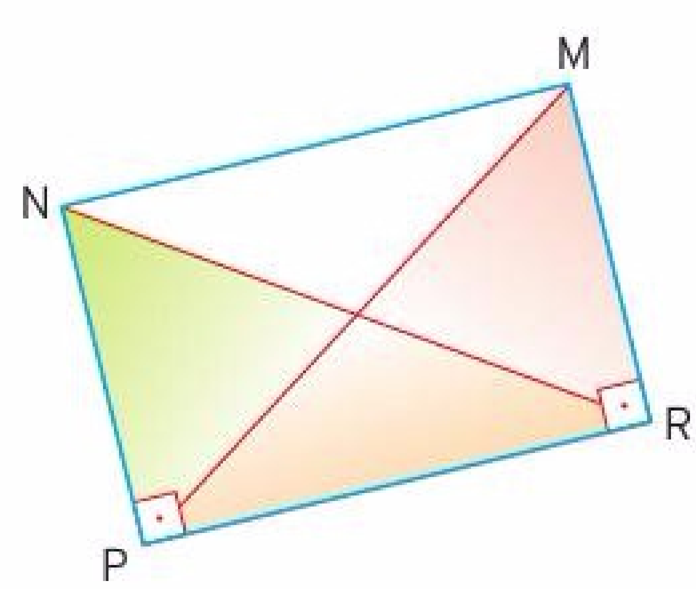
Retângulos são paralelogramos. Por isso, em qualquer retângulo:

- os lados opostos são congruentes;
- os ângulos opostos são congruentes;
- as diagonais interceptam-se no ponto médio.



Além dessas propriedades, é possível demonstrar que, em um retângulo qualquer, as diagonais são congruentes.

Pode-se chegar a essa conclusão demonstrando a congruência entre os triângulos $\triangle NPR$ e $\triangle MRP$.



$\triangle NPR$		$\triangle MRP$		
$\overline{NP}$	$\equiv$	$\overline{MR}$	(lados opostos de MNPR)	(**L**)
$N\hat{P}R$	$\equiv$	$M\hat{R}P$	(ângulos retos)	(**A**)
$\overline{PR}$	$\equiv$	$\overline{PR}$	(lado comum)	(**L**)

Pelo caso LAL de congruência de triângulos temos:

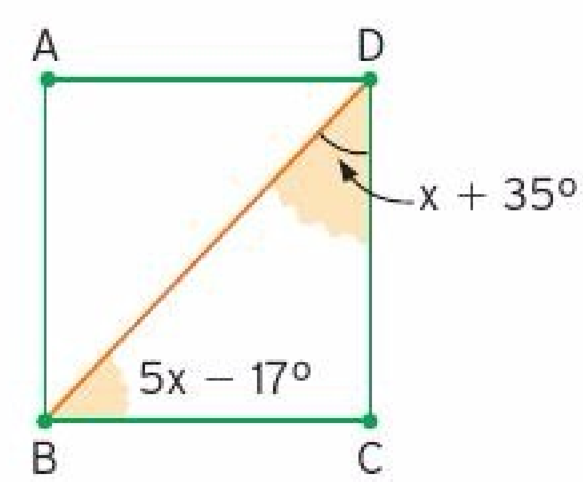
$\triangle NPR \equiv \triangle MRP$

Logo $\overline{NR} \equiv \overline{MP}$

Propriedade: Em qualquer **retângulo** as diagonais são congruentes.

Exemplo de aplicação das propriedades:

No retângulo ABCD, qual é a medida do ângulo formado pela diagonal $\overline{BD}$ e pelo lado $\overline{BC}$?



Cálculo do valor de **x**:

No $\triangle BCD$ ___ med $\hat{C} = 90°$ ___ med $D\hat{B}C$ + med $C\hat{D}B = 90°$

$5x - 17° + x + 35° = 90°$ ___ $6x + 18° = 90°$ ___ $x = 12°$

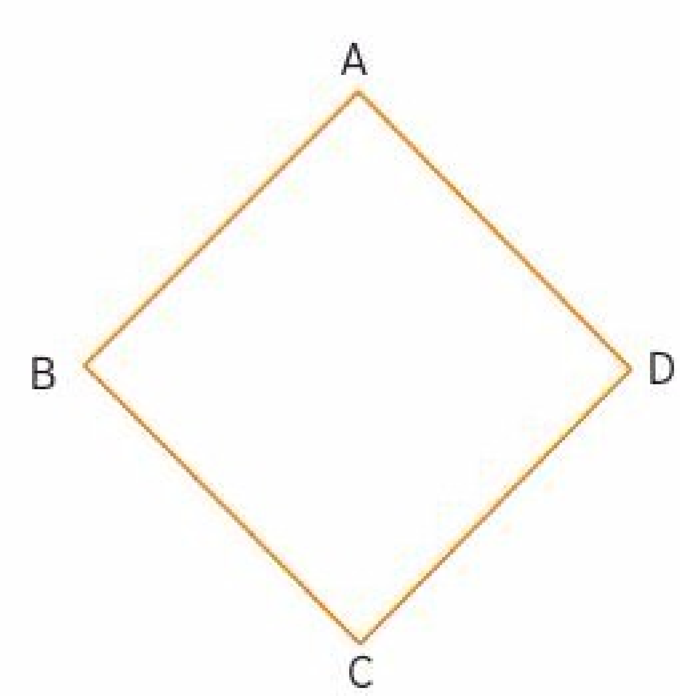
med $D\hat{B}C = 5x - 17° = 5 \cdot 12° - 17°$ ___ med $D\hat{B}C = 43°$

A medida do ângulo formado pela diagonal $\overline{BD}$ e o lado $\overline{BC}$ é 43°.

Quadrados: propriedades

Para refletir e responder

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado.



- ABCD é um retângulo? ABCD é um losango?

Sim. Sim.

Um quadrado é um paralelogramo em que os lados são congruentes entre si e os ângulos são congruentes entre si. Portanto:

$\overline{MS} \equiv \overline{SR} \equiv \overline{RP} \equiv \overline{PM}$ ——— Todo quadrado é também um losango.

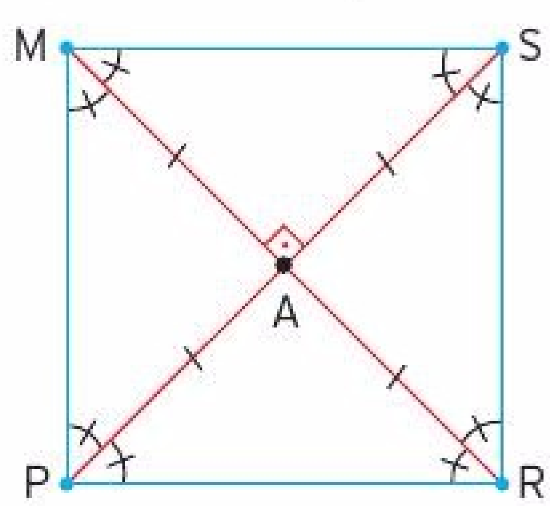
$\hat{M} \equiv \hat{S} \equiv \hat{R} \equiv \hat{P}$ ——— Todo quadrado é também um retângulo.

Um quadrado qualquer tem todas as propriedades de um paralelogramo, de um retângulo e de um losango. E também a seguinte propriedade:

> As diagonais de um quadrado interceptam-se no ponto médio, são congruentes, são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos de cada vértice.

Exemplo:

MPRS é um quadrado.

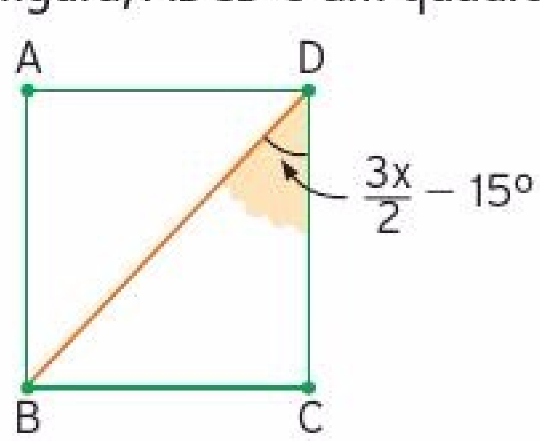


- A é o ponto médio das diagonais:
  $\overline{MA} \equiv \overline{AR}$ e $\overline{PA} \equiv \overline{AS}$
- $\overline{MR} \equiv \overline{PS}$
- $\overline{MR} \perp \overline{PS}$
- $\overleftrightarrow{PS}$ é bissetriz de $\hat{P}$. $\overleftrightarrow{MR}$ é bissetriz de $\hat{M}$.
- $\overleftrightarrow{SP}$ é bissetriz de $\hat{S}$. $\overleftrightarrow{RM}$ é bissetriz de $\hat{R}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

11. Nesta figura, ABCD é um quadrado.

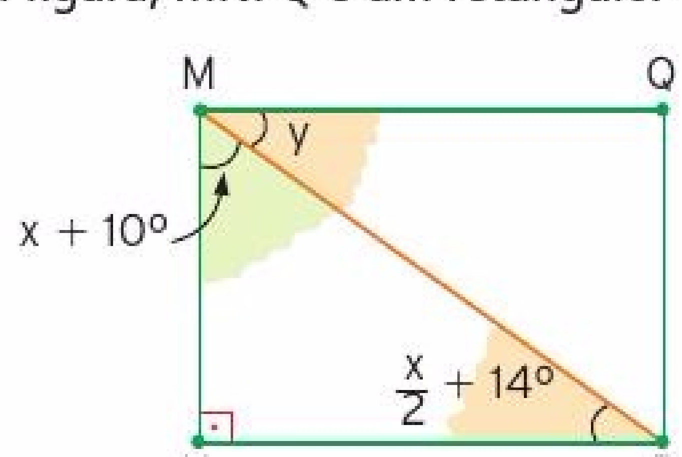


a) O que é $\overrightarrow{DB}$ em relação ao ângulo $C\hat{D}A$? Bissetriz.

b) Qual é o valor de med $C\hat{D}B$? 45°

c) Qual é o valor de x? 40°

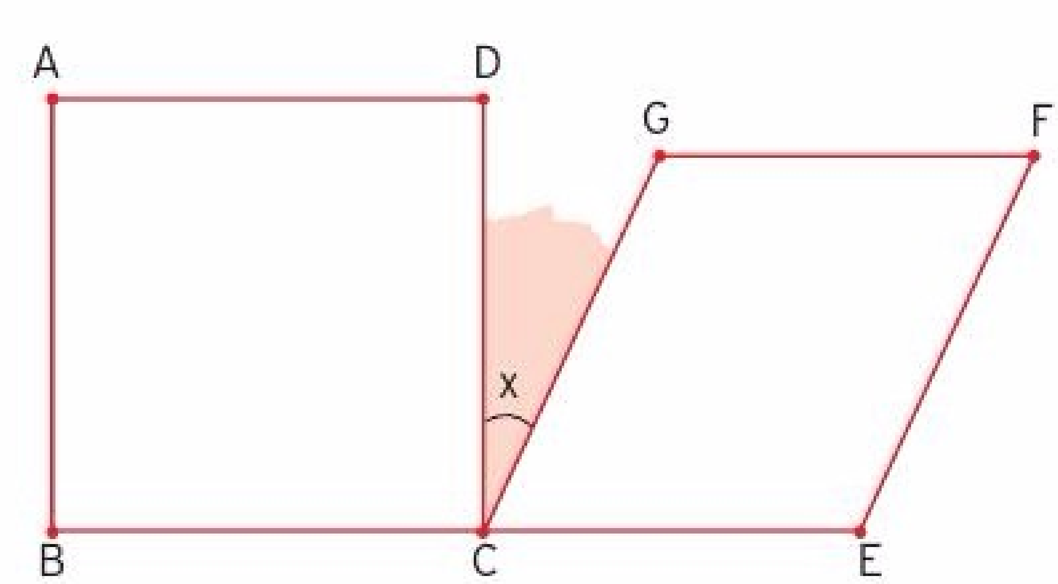
12. Nesta figura, MNPQ é um retângulo.



a) Qual é o valor de x? 44°

b) Qual é o valor de y? 36°

13. Nesta figura, B, C e E são pontos colineares, ABCD é um quadrado e CEFG é um losango que tem um ângulo obtuso medindo 116°. Calcule o valor de x. 26°



14. Em um retângulo, uma das diagonais forma um ângulo de 68° com o lado menor. Determine a medida do ângulo agudo formado pelas diagonais. 44°

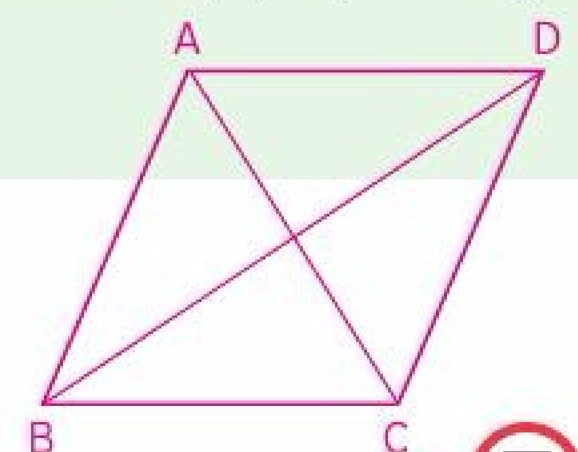
15. Em um retângulo, uma diagonal forma com um dos lados um ângulo de 52°. Calcule as medidas dos ângulos formados pelas diagonais. 76° e 104°.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam sobre as questões propostas e respondam.

- Em um paralelogramo qualquer as diagonais são congruentes? Apresente exemplos, desenhando alguns paralelogramos em seu caderno.
  Não. Por exemplo, no paralelogramo ABCD, $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ não são congruentes.
- Há algum paralelogramo que tenha diagonais congruentes? Em caso afirmativo, que paralelogramo é esse? Retângulo. E quadrado, já que o quadrado é um retângulo particular.



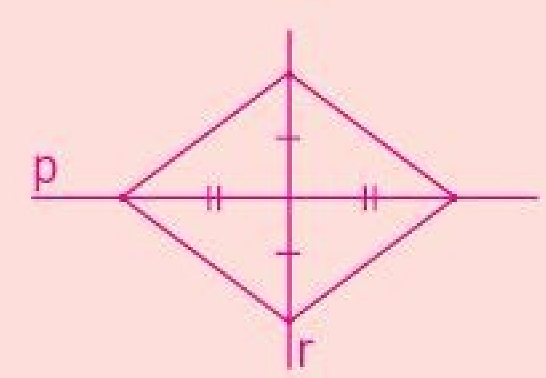
Desafio

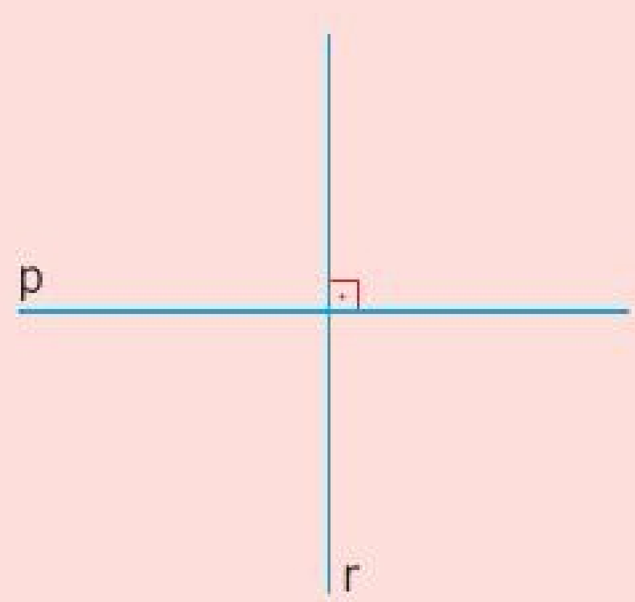
FAÇA NO CADERNO

Construções com régua e compasso

O desafio a seguir envolve construções geométricas.

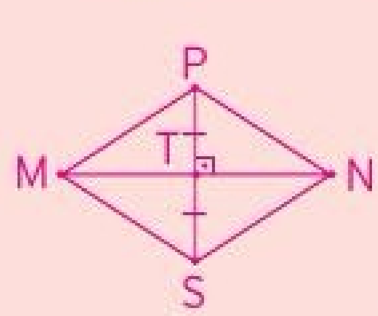
Observe a figura e faça o que se pede a seguir.





Desenhe as retas **p** e **r** no caderno.

- As retas **p** e **r** são perpendiculares. Desenhe um losango cujas diagonais sejam segmentos de reta contidos em **p** e em **r**. (Existem outras respostas.)
- Desenhe um losango cujas diagonais sejam congruentes aos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



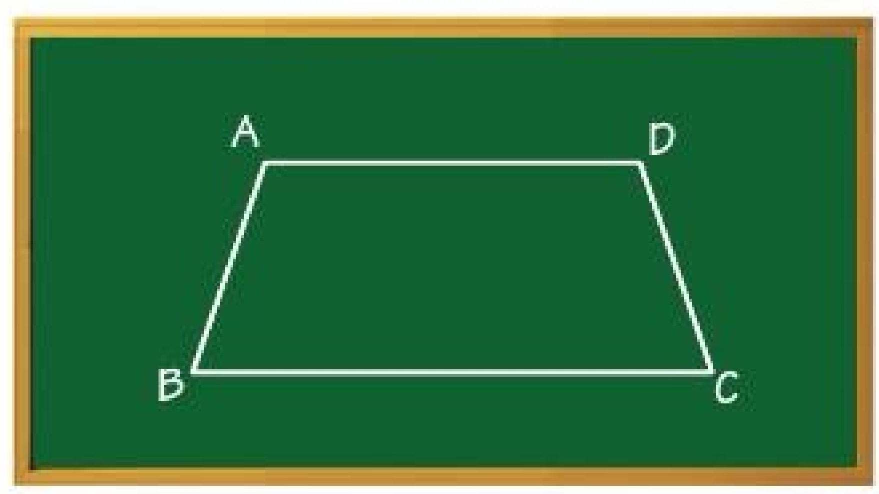
$\overline{PS} \equiv \overline{AB}$; $\overline{MN} \equiv \overline{CD}$; $\overline{PS} \perp \overline{MN}$ pelo ponto médio de $\overline{MN}$(T); $\overline{PT} \equiv \overline{ST}$ e med $\overline{PT} = \dfrac{\text{med } \overline{AB}}{2}$.

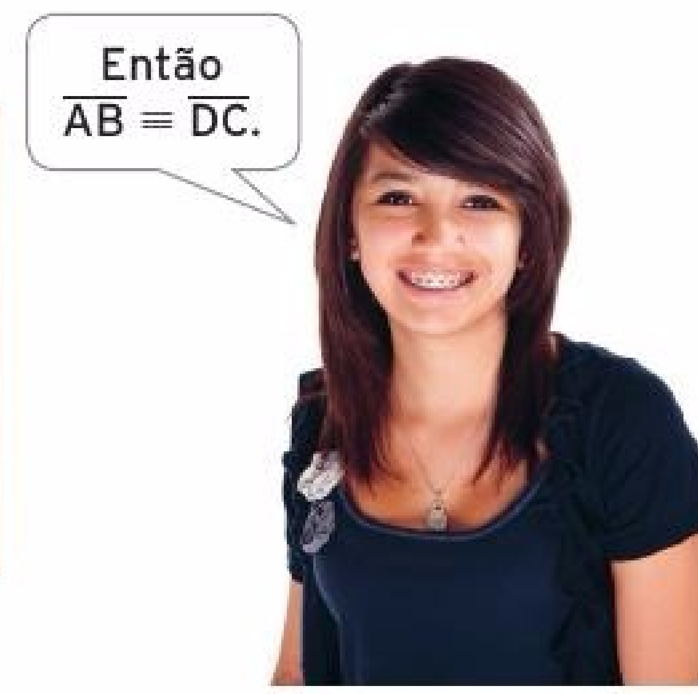
3 Trapézios isósceles e propriedades

O que é um trapézio isósceles?

Lembra-se? Trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos e o trapézio isósceles é aquele no qual os lados não paralelos são congruentes.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

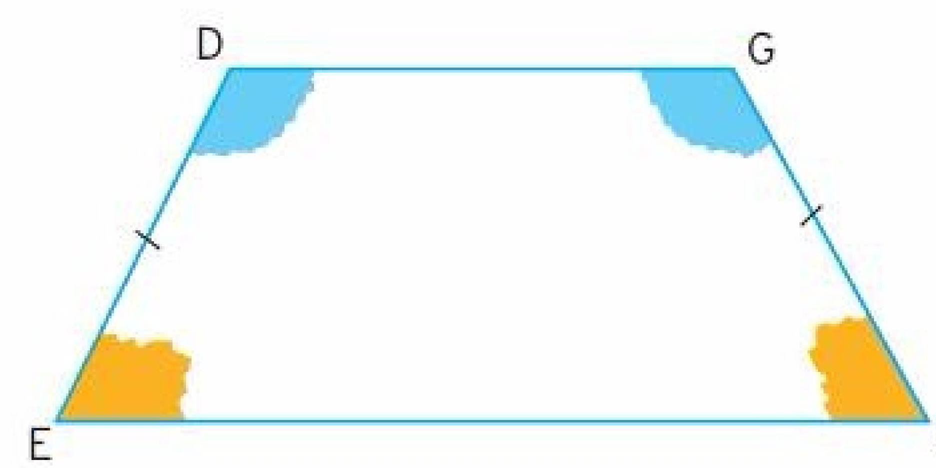




SHUTTERSTOCK

Os trapézios isósceles têm duas propriedades que podem ser verificadas por meio de congruência.

1ª propriedade



Se DEFG é um trapézio isósceles, então

$\hat{D} \equiv \hat{G}$ e $\hat{E} \equiv \hat{F}$.

Para demonstrar essa propriedade, traça-se

$\overline{DH}$ paralelo a $\overline{GF}$.

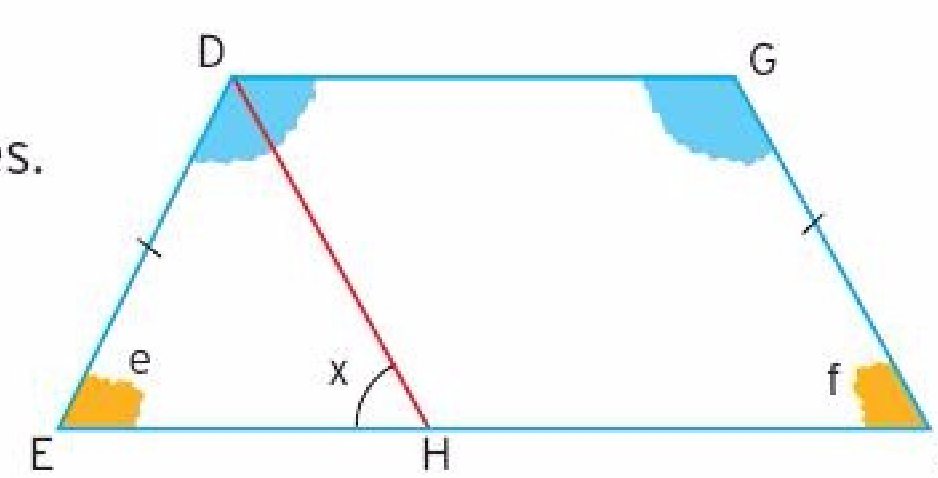
DHFG é um paralelogramo.

$\overline{DH} \equiv \overline{GF}$, $\overline{DE} \equiv \overline{GF}$ e $\overline{DH} \equiv \overline{DE}$ ____ $\triangle$DEH isósceles.

Como $\triangle$DEH é isósceles temos: $e = x$.

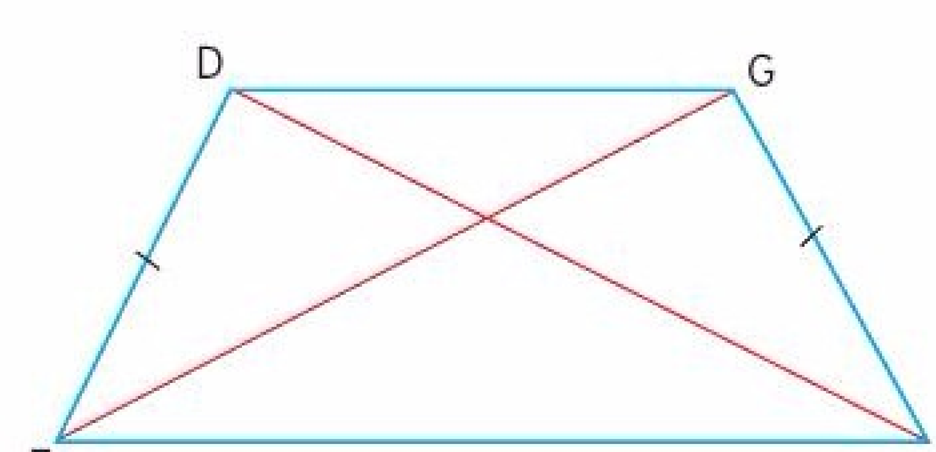
Os ângulos $\hat{H}$ e $\hat{F}$ são correspondentes.

Temos: $x = f$. Logo, $e = f$.



Em um trapézio isósceles, os ângulos formados juntos à mesma base são congruentes.

2ª propriedade



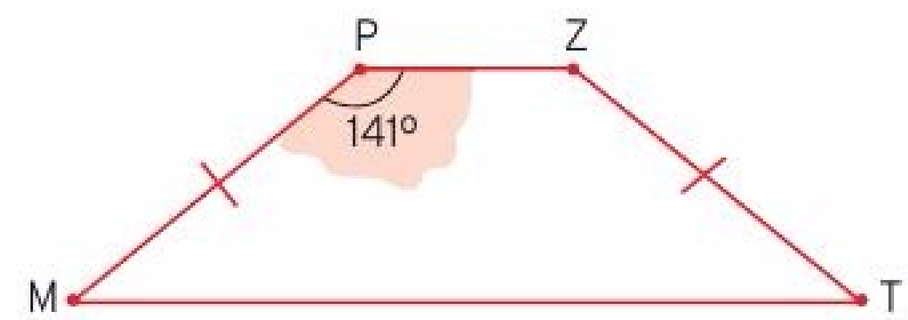
Nesta figura, o trapézio isósceles DEFG é isósceles e as diagonais são $\overline{DF}$ e $\overline{GE}$. Justifica-se que elas têm medidas iguais, provando que os triângulos DEF e GEF são congruentes pelo caso LAL.

$\overline{DF} \equiv \overline{GE}$ ou med $\overline{DF}$ = med $\overline{GE}$

Em um trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.

Exemplo:

O trapézio PMTZ é isósceles. Determine as medidas de seus ângulos.



Como med $\hat{P}$ = 141º, então med $\hat{Z}$ = 141º.

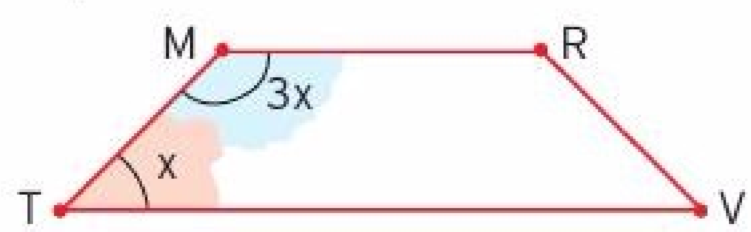
med $\hat{P}$ + med $\hat{M}$ = 180º são colaterais internos, $\overline{PZ} \,/\!/\, \overline{MT}$ e $\overline{PM}$ é uma transversal.

141º + med $\hat{M}$ = 180º ——— med $\hat{M}$ = 39º ——— med $\hat{M}$ = med $\hat{T}$ ——— med $\hat{T}$ = 39º

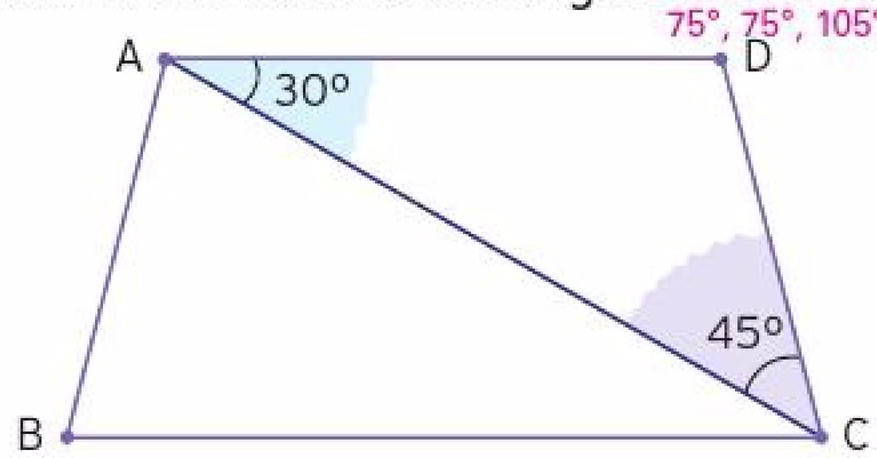
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

16. O trapézio MTVR é isósceles e a medida de um ângulo obtuso é o triplo da medida de um ângulo agudo. Quais são as medidas dos ângulos desse trapézio? 45°, 45°, 135° e 135°.



17. Nesta figura, o trapézio ABCD é isósceles. Determine as medidas dos ângulos desse trapézio. 75°, 75°, 105° e 105°.



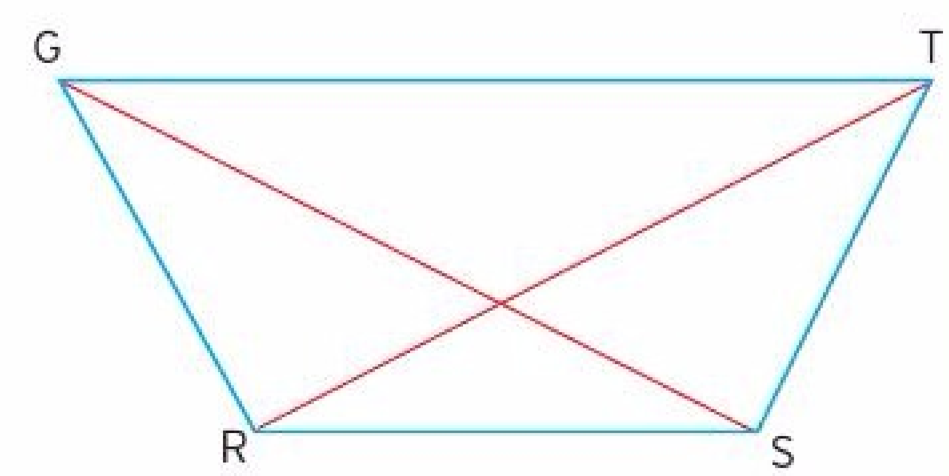
18. Calcule as medidas de três ângulos de um trapézio isósceles, sabendo que um deles mede 51°. 129°, 129° e 51°.

19. No trapézio isósceles GRST, $\overline{GS}$ e $\overline{RT}$ são as diagonais que medem respectivamente: $13x - 53$ e $11x + 15$. Determine:

Medidas indicadas em cm.

a) o valor de x. 34 cm

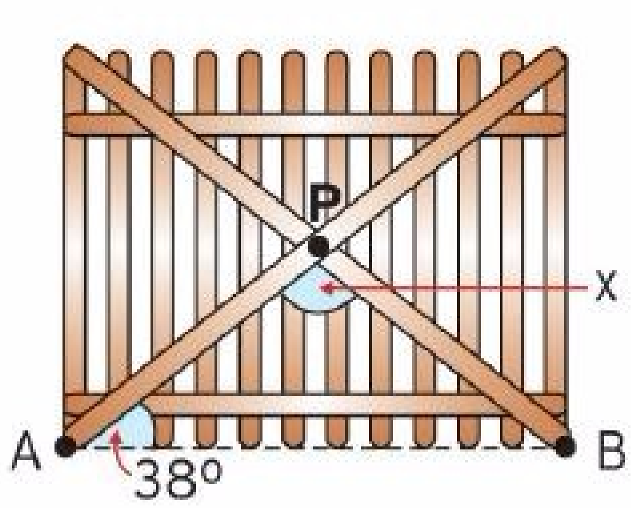
b) as medidas das diagonais. 389 cm



Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

20. Para manter a forma retangular de um portão feito com ripas de madeira, Pedro fixou duas ripas transversais, como mostra o desenho abaixo:



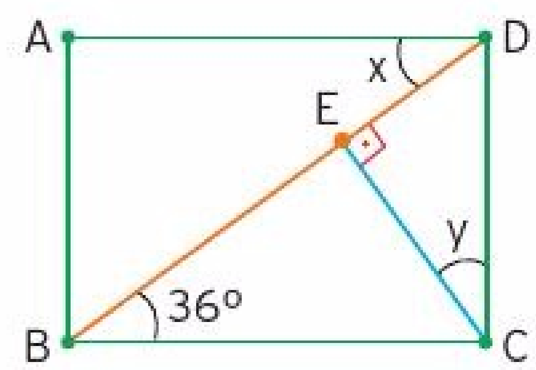
a) Demonstre que o △PAB é isósceles. Veja resposta no final do livro.

b) Calcule a medida do ângulo obtuso formado pelas ripas transversais desse portão. 104°

21. Em um paralelogramo, o lado menor mede 9 cm e o lado maior excede-o em 6 cm. Qual é o perímetro desse paralelogramo? 48 cm

22. Em um paralelogramo, o perímetro mede 45,20 cm, e a diferença das medidas dos dois lados consecutivos é 11 cm. Calcule as medidas desses dois lados. 5,8 cm e 16,8 cm.

23. Nesta figura, $\overline{BD}$ é uma diagonal do retângulo ABCD e $\overline{CE}$ é perpendicular a essa diagonal. Sabendo que x e y representam medidas em graus, responda:



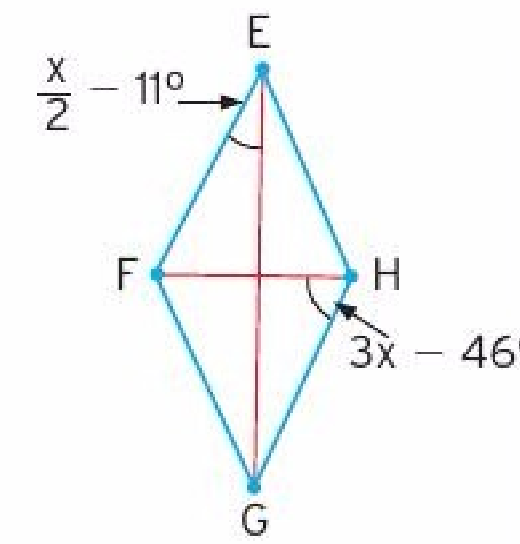
a) Qual é o valor de x? 36°

b) Qual é o valor de y? 36°

c) O que se pode concluir sobre x e y? São iguais.

24. Em um trapézio retângulo ABCD, o ângulo agudo mede 45°. Se a base menor mede 6 cm e a base maior mede 10 cm, calcule a medida da altura $\overline{AB}$. 4 cm.

25. No losango EFGH, $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ são as diagonais. Determine:



a) a medida do ângulo formado pela diagonal $\overline{EG}$ e pelo lado $\overline{EF}$. 10°

b) a medida do ângulo formado pela diagonal $\overline{FH}$ e pelo lado $\overline{GH}$. 80°

26. Em um trapézio, a soma das medidas de dois ângulos opostos é 170° e sua diferença é igual a 30°. Calcule as medidas dos quatro ângulos. 70°, 80°, 100° e 110°.

27. Em um trapézio isósceles EFGH, a diagonal $\overline{EG}$ forma com a base menor $\overline{EH}$ um ângulo de 32° e, com o lado $\overline{HG}$, um ângulo de 48°. Quanto mede cada um dos ângulos desse trapézio? 80°, 80°, 100° e 100°.

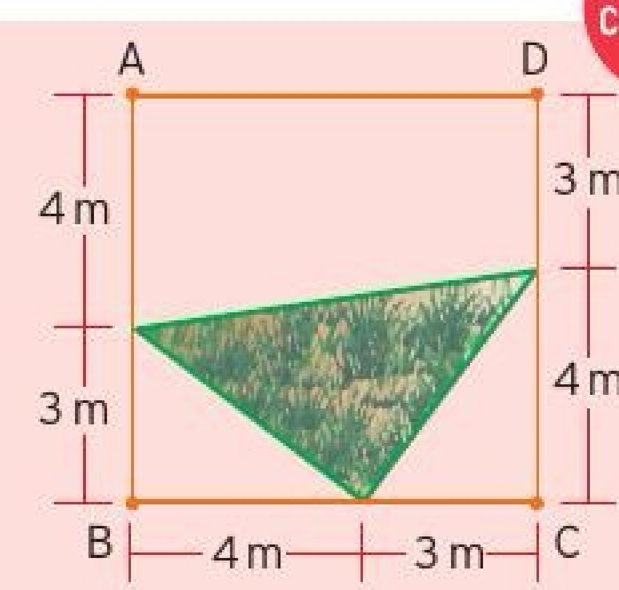
Desafio

FAÇA NO CADERNO

Jardim triangular em praça quadrada

Um jardim triangular foi construído em uma praça quadrada, como mostra a figura ao lado.

Qual é a área desse jardim? 12,5 m².



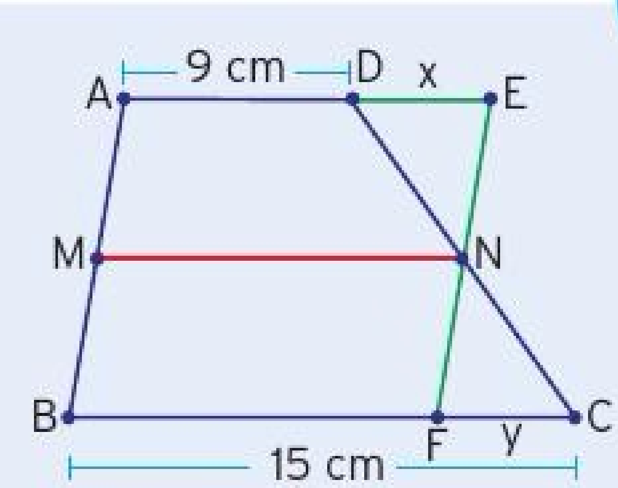
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre a questão e respondam.

Nesta figura, ABCD é um trapézio, **M** é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do lado $\overline{CD}$.

Se $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{AB}$, qual é o caso de congruência que permite escrever $\triangle DNE \equiv \triangle CNF$? Nessas condições, responda: ALA ou LAAo.



$\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e a $\overline{BC}$. $\overline{MN}$ é a base média do trapézio.

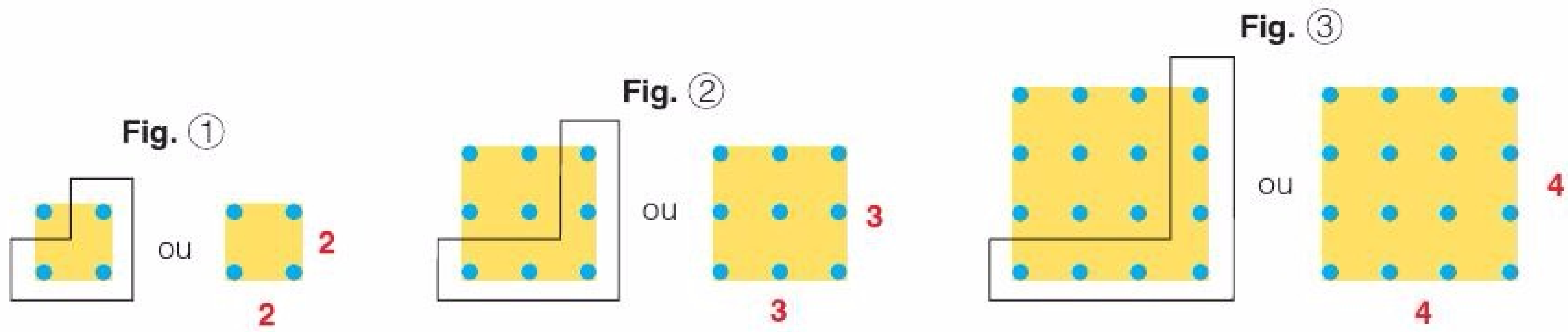
- $x = y$? Explique por quê. Sim, porque $\Delta DNE \equiv \Delta CNF$.
- Qual é o valor de x? E de y? 3 cm e 3 cm.
- Qual é a medida de $\overline{MN}$? 12 cm.
- Com o resultado obtido no item anterior, verifique se med $\overline{MN} = \dfrac{\text{med }\overline{AD} + \text{med }\overline{BC}}{2}$ Sim.

Leitura

Números quadrangulares

A representação de alguns números por pontos por meio de padrões geométricos pelos pitagóricos se estendeu também aos números quadrangulares, como, por exemplo: 4, 9 e 16.

Veja por que, observando as sequências de figuras e números:



$1 + 3 = 4$ $\quad 2^2 = 4$ $\quad 1 + 3 + 5 = 9$ $\quad 3^2 = 9$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ $\quad 4^2 = 16$

Note que:

$1 + 3 = 4 = 2^2$ A soma dos 2 primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ A soma dos 3 primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 3.

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ A soma dos 4 primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 4.

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ A soma dos **n** primeiros números ímpares consecutivos é igual ao quadrado de n.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Classifique estes números decimais em racional ou irracional.

a) 0,333 555 333 555 333 555... Racional.

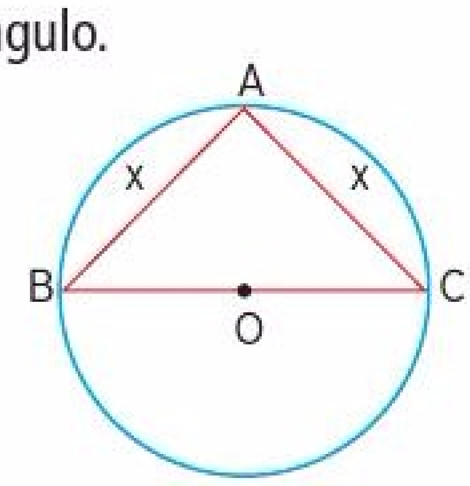
b) 1, 1 10 100 1000... Irracional.

c) 2, 468 864 468 864 468 864... Racional.

d) 3, 25 255 2555... Irracional.

2. Nesta circunferência o ponto **O** é o centro e o $\triangle ABC$ é isósceles e retângulo.

Que expressão algébrica representa o quadrado do diâmetro dessa circunferência? $2x^2$



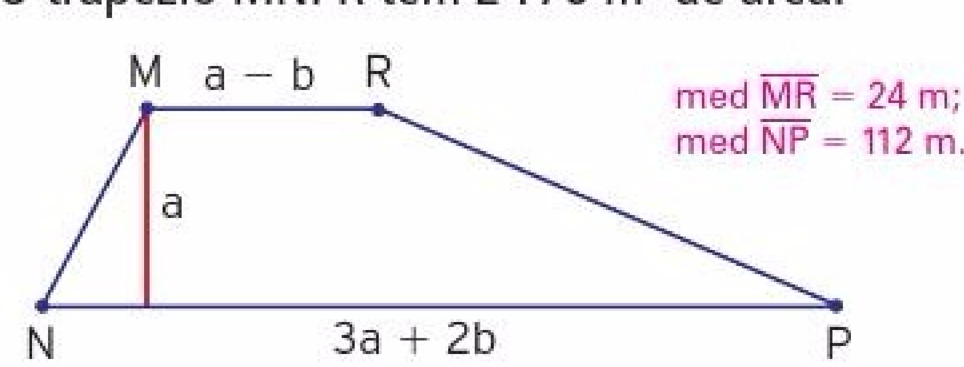
3. Considere a expressão algébrica e responda:

$$(5y + 4y)^2 - (5y - 4y)^2$$

a) Ela é um monômio? Qual? Sim; $80y^2$

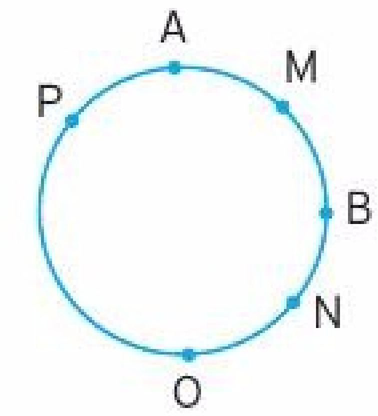
b) Qual é o valor numérico da expressão para $y = -3$? 720

4. O trapézio MNPR tem $2\,176\ m^2$ de área.



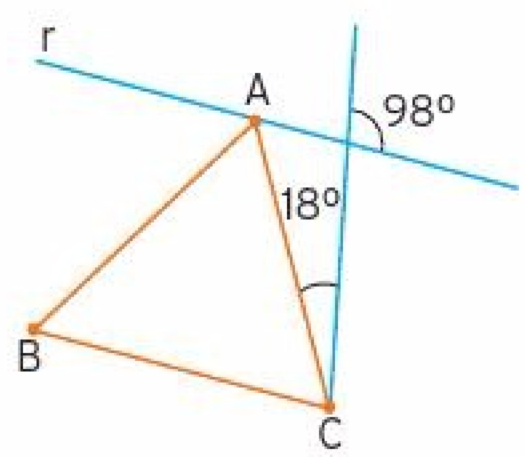
Calcule as medidas das bases desse trapézio sabendo que a é o quádruplo de b.

5. Em uma circunferência que circunda uma praça, com 436 m de diâmetro, foram colocados um banco (**A**), um bebedouro (**B**) e um ponto de ônibus (**O**).



$\widehat{AMB}$ e $\widehat{BNO}$ têm medidas iguais e a medida de $\widehat{OPA}$ é o triplo da medida $\widehat{AMB}$. Quantos metros aproximadamente uma pessoa percorrerá indo do ponto de ônibus ao banco percorrendo a calçada circular no sentido horário? 273,8 m.

6. Nesta figura, $r // \overline{BC}$ e $\triangle ABC$ é isósceles. Qual é a medida do ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$? 52°



7. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3 240°.

a) Quantos lados tem esse polígono? 20 lados.

b) Qual é a medida de cada ângulo interno desse polígono? 162°

c) Qual é a medida de um ângulo externo desse polígono? 18°

8. Um motorista leva 4 horas para ir de uma cidade a outra. Dirige à velocidade média de 70 km/h e, no caminho, dá uma parada de meia hora para lanchar. Qual a distância entre as duas cidades? c

a) 175 km
b) 200 km
c) 245 km
d) 260 km

9. (PUC-MG) Um cofre contém x moedas de R$ 1,00, y moedas de R$ 0,50 e 12 moedas de R$ 0,25, totalizando R$ 22,00. Se $x + 2y = 49$, o valor de x é: c

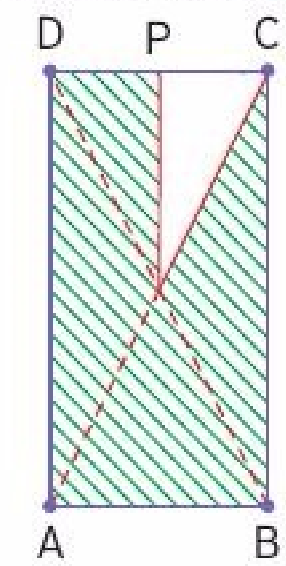
a) 5. b) 7. c) 9. d) 12.

10. (Saresp) Juliana tem três saias: uma de couro, uma de jeans e uma de *lycra*. Para combinar com qualquer uma destas saias, ela tem duas blusas: uma preta e uma branca. Contou o número de combinações possíveis que pode fazer e obteve: b

a) 5. b) 6. c) 10. d) 12.

11. (Saresp) Considere o retângulo ABCD, onde P é o ponto médio de $\overline{CD}$, med AB = 2 cm e med BC = = 4 cm. A área da parte hachurada é: b

a) 6 cm².
b) 7 cm².
c) 11 cm².
d) 12 cm².



12. Entre as afirmações a seguir, qual é verdadeira? d

a) Todo paralelogramo é um retângulo.

b) Todo retângulo é um quadrado.

c) Em qualquer paralelogramo as diagonais são congruentes.

d) Em retângulos e quadrados as diagonais são congruentes.

13. Na equação: $\frac{1}{2}(-1 + 8my) - \frac{2y}{5} + m = 5m - \frac{1}{10}$ a incógnita é y. A raiz dessa equação é: c

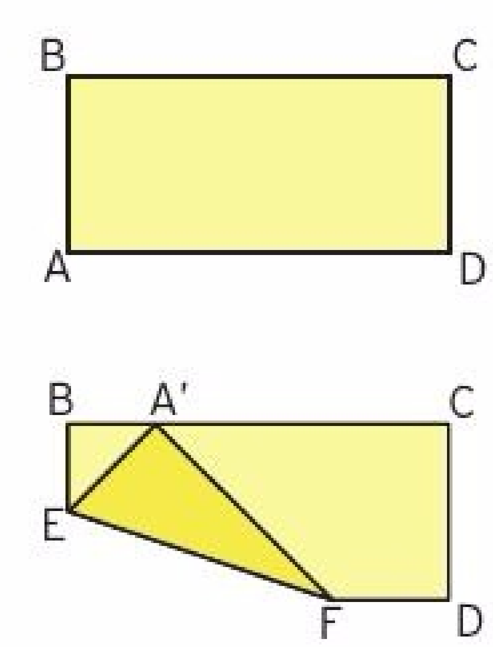
a) $\frac{m + 1}{m - 1}$, com $m \neq 1$

b) $\frac{10m - 1}{10m + 1}$, com $m \neq -\frac{1}{10}$.

c) $\frac{10m + 1}{10m - n}$, com $m \neq \frac{1}{10}$.

d) 1.

14. (Saresp) O vértice A de uma folha de papel retangular será dobrado sobre o lado BC de forma que as medidas BE e BA′ sejam iguais, como mostra a figura. Nas condições dadas, a medida do ângulo, que é um dos ângulos internos do triângulo BA′E, é: a

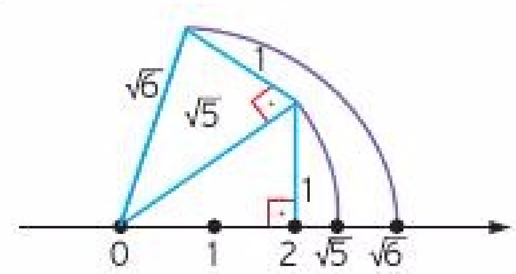


a) 45°
b) 60°
c) 100°
d) 120°

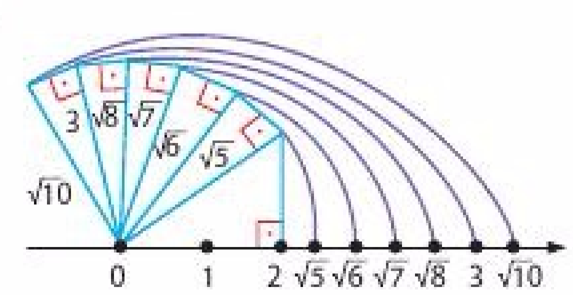
Respostas

Unidade 1 – Números reais

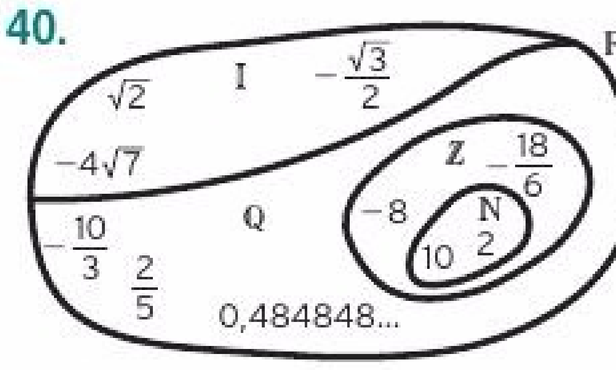
1. 13 vezes
2. a, b, d.
3. 999
4. 50 números
5. a) 50 e 57. b) 1 c) Não.
6. 21 947
7. a) 309 b) − 309
c) Resposta possível: Não, porque essa conclusão depende dos sinais e desses números.
8. 0,009 cm
9. a) 1 pacote de 250 g
b) 1 pacote de 750 g; 1 pacote de 250 g e 1 pacote de 500 g; 3 pacotes de 250 g; 5 pacotes de 100 g e 1 de 250 g.
10. a) Não;
b) Dia 6;
c) 6, 12, 18, 24 e 30.
11. a) Prejuízo.
b) Segunda-feira e quinta-feira.
c) Lucro de R$ 2 105,00.
12. Não, porque $\frac{245}{110} = 2{,}227272...$ não é um decimal exato; e $\frac{17}{34} = 0{,}5$ e $\frac{19}{40} =$
$= 0{,}475$ são decimais exatos.
13. I e D; II e A; III e F; IV e C; V e B; VI e E.
14. $\frac{11}{4}$
15. $\frac{2}{3}$
16. $\frac{33}{5}$
17. b, c
18. a, c, d
19. Respostas possíveis:
a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{11}{6}$
20. $12^2 + 16^2 = 20^2$ ou $144 + 256 = 400$
21. Verdadeira. Triângulo retângulo em Â.
22. 13; 18; 10
23. $\sqrt{13}$ cm
24. 3 cm
25. a) $\sqrt{10}$
$3^2 + 1^2 = (\text{hipotenusa})^2$
$9 + 1 = (\sqrt{10})^2$
b) 3,16 cm
26. $\sqrt{32}\,u \cong 5{,}66\,u$
27.



28. a) −3 e −2
b) Resposta possível: O ponto simétrico em relação ao "ponto zero" que representa $\sqrt{6}$.
29.



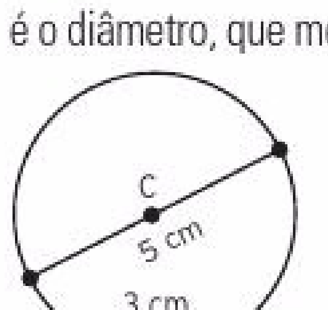
30. − 36
31. Corretas: **a** e **b**
Corrigindo **c**: para x = 2,
$\sqrt{\frac{x^2}{9}} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{2}{3} - \frac{6}{4} =$
$= -\frac{5}{6}$
32. a) 32
b) 81
c) 2,4
d) Aproximadamente 1,538
33. b, e , f
34. a) $\in$ d) $\notin$
b) $\in$ e) $\notin$
c) $\in$ f) $\in$
35. $-\frac{32}{9}$
36. a) $\subset$ d) $\subset$
b) $\not\subset$ e) $\subset$
c) $\subset$ f) $\subset$
37. Resposta possível: 5,5; $\sqrt{27}$.
38. a) 3,1234567891112... e 3,1234567891011...
b) Resposta possível:
3,1234567891012... e
3,1234567891111...
39. $-\pi < -1{,}999... < \frac{1}{4} < 1{,}24681012... <$
$< \sqrt{6} < 3$
40.



Desafio p. 24
Número áureo
- 1,618

Unidade 2 – A circunferência e o número π

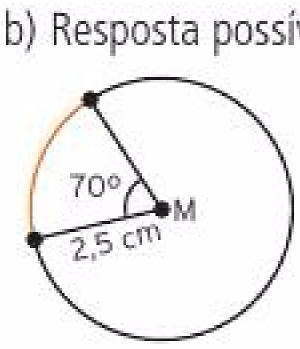
1. a) $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$. c) $\overline{AD}$ e $\overline{EB}$.
b) $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{EB}$.
2. Resposta possível: Não foi possível traçar uma corda de 6 cm, porque a maior corda é o diâmetro, que mede 5 cm.



3. A medida do comprimento de uma circunferência e a medida de um de seus diâmetros.
4. Aproximadamente 99,20 m.
5. Aproximadamente 11,304 km.

Desafio p. 34
Cinco pontos, quantas cordas?
- 10 cordas
- 15 cordas

6. a) $\overset{\frown}{RQT}$ e $\overset{\frown}{TPR}$.
b) $\overset{\frown}{PRQ}$ e $\overset{\frown}{QTP}$.
7. a) Pontos internos: **A**, **P** e **R**; pontos externos: **G** e **S**.
b) Resposta possível: **R**, **D** e **A**.
8.



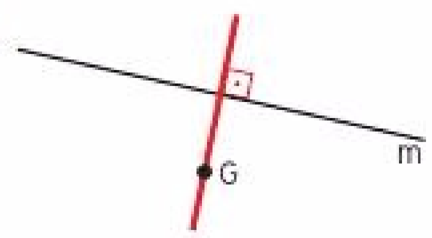
9. a) Menor.
b) Maior.
10. 1,8 cm
11. Sim, porque os lados $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ são raios e têm medidas iguais.
12. a) x = 5 cm
b) x > 5 cm
c) x < 5 cm
13. Aproximadamente 5 000 voltas.
14. $\frac{2}{5}$
15. 2 vezes.
16. 17,5 cm
17. 9,42 cm e 28,26 cm.

18. 3,925 cm

19.

Resposta possível.

20.



Desafio p. 39

Retas perpendiculares

- Resposta pessoal.
- $\overleftrightarrow{PR}$ é perpendicular à reta t.
- $\overline{AR}$ e $\overline{RB}$ têm medidas iguais.

21. Reta **c**.

22. O ponto **H** é o ponto médio de $\overline{XY}$.

23.

24. a) 3 cm; 3 cm.
As medidas são iguais.

b) Triângulo isósceles.

c) Resposta possível:
As medidas são iguais.

d) Triângulo isósceles.

Desafio p. 41

Uma surpresa para você

- Elas têm um ponto comum.
- Obtém-se uma circunferência que passa pelos pontos **A**, **B** e **C**.

Unidade 3 – Estatística e probabilidade

1. 7,25; 7,26; 7,27; 7,28; 7,29; 7,31; 7,32; 7,33; 7,34.

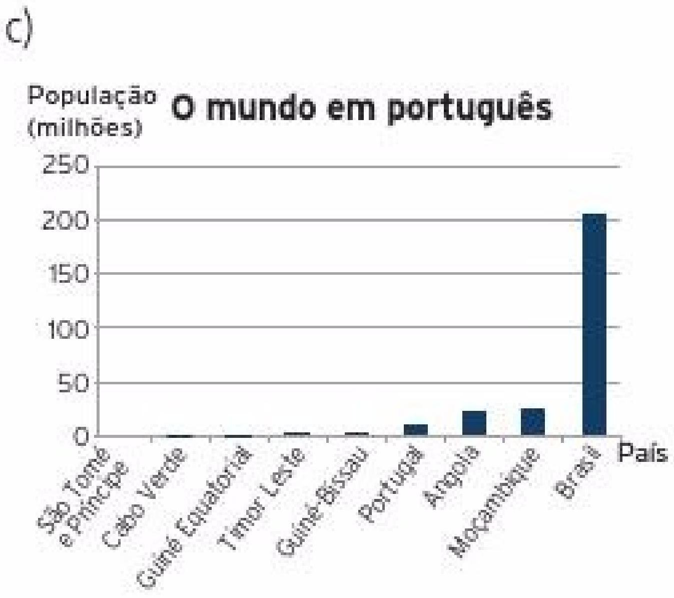
2. 2,1 m

3. a) Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Guiné Equatorial, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor Leste.

b) **O mundo em português**

País	População (milhões)
São Tomé e Príncipe	0
Cabo Verde	1
Guiné Equatorial	1
Timor Leste	1
Guiné-Bissau	2
Portugal	11
Angola	22
Moçambique	26
Brasil	202

c)



4. a)

Bacias hidrográficas brasileiras

Bacia	Área (100 mil km²)		%
Amazônia	39,84467	40	47
Tocantins	8,03250	8	9
São Francisco	6,31133	6	7
Paraná	8,91309	9	11
Outras	22,01769	22	26
Total	85,11928	85	100

b)

5. a)

Taxa de fecundidade total – Brasil – 2000 a 2003

Ano	Número de filhos	Ano	Número de filhos
2000	2,4	2007	2,0
2001	2,3	2008	2,0
2002	2,3	2009	1,9
2003	2,2	2010	1,9
2004	2,1	2011	1,8
2005	2,1	2012	1,8
2006	2,0	2013	1,8

b)

c) A taxa de fecundidade diminuiu ano a ano.

d) Resposta pessoal.

6. a) As temperaturas subiram.

b) No 5º dia.

c) A temperatura foi a menor registrada nesse perído.

7. a) 35%; 7%; a de 14 anos ou menos.

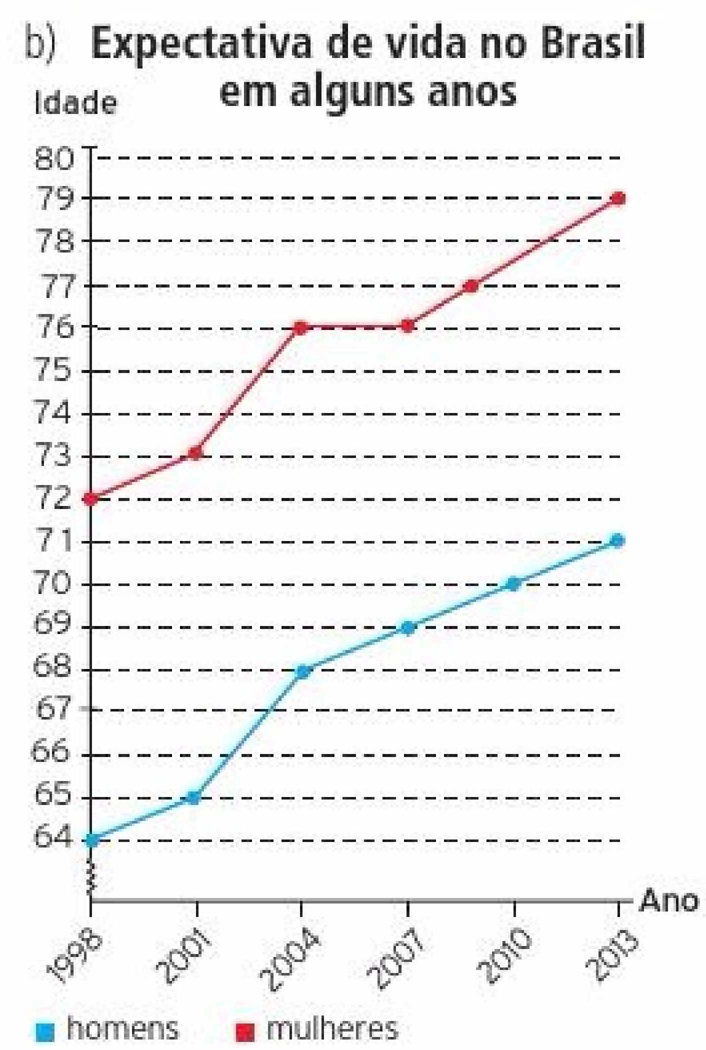
b) Entre 2020 e 2030. c) 17%

8. a)

Expectativa de vida no Brasil no período de 1998 a 2013

Ano	Homens	Mulheres
1998	64	72
2001	65	73
2004	68	76
2007	69	76
2010	70	77
2013	71	79

b)



9. Resposta possível: Distribuição por frequências é uma forma de organizar um grande número de dados junto com as frequências correspondentes a eles.

10. **Quantas pessoas formam sua família?**

Nº de pessoas	Frequência	fr (%)
1	2	10
2	2	10
3	4	20
4	4	20
5	4	20
6	3	15
8	1	5
Total	20	100

11. Respostas pessoais.

12. a) **Lançamento de dado**

Número (face superior)	f	fr (%)
1	12	24,0
2	7	14,0
3	10	20,0
4	7	14,0
5	5	10,0
6	9	18,0
Total	50	100,0

b) 1
c) 12
d) 20%
e) 19
f) 38%
g) 1

13. a) **Notas de Língua Portuguesa – 1º bimestre**

Nota	f	fa	fr (%)	far(%)
4,0	7	7	14	14
4,5	6	13	12	26
5,0	5	18	10	36
5,5	6	24	12	48
6,0	8	32	16	64
6,5	10	42	20	84
7,0	8	50	16	100
Total	50		100	

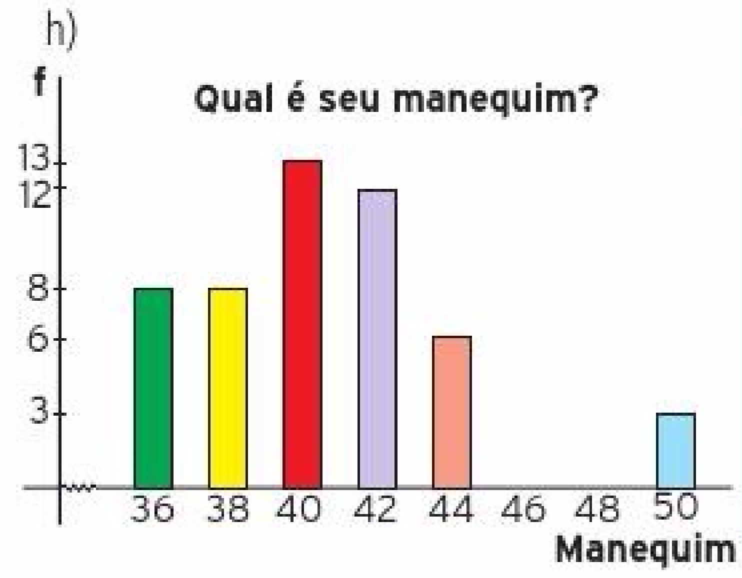
b) 16%
c) 32 alunos.
d) 18 alunos.

e) 26%

14. a) **Qual é seu manequim?**

Número	f	fr (%)	fa	far (%)
36	8	16,0	8	16,0
38	8	16,0	16	32,0
40	13	26,0	29	58,0
42	12	24,0	41	82,0
44	6	12,0	47	94,0
50	3	6,0	50	100,0
Total	50	100,0		

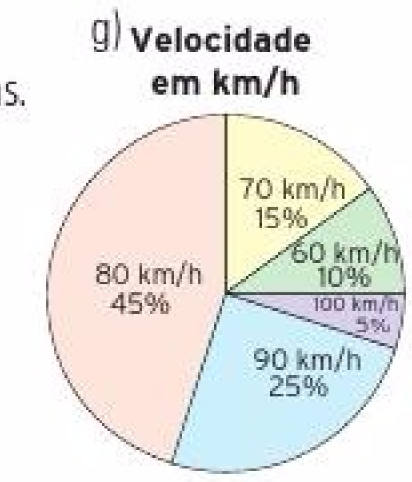
b) 50 pessoas.
c) 12
d) 24,0%
e) 41
f) 82,0%
g) 26,0%; 29; 58,0%.
h)



15. a)

Vel. (km/h)	f	fr (%)	fa	far (%)
60	6	10,0	6	10,0
70	9	15,0	15	25,0
80	27	45,0	42	70,0
90	15	25,0	57	95,0
100	3	5,0	60	100,0
Total	60	100,0		

b) 60 veículos.
c) 15 motoristas.
d) 25%
e) 70%
f) 30%
g)



16. {A, B, C, D, E, F}

17. {cara, coroa}

18. 25%

19. $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ ou 40%.

20. $\frac{17}{100}$ ou 17%.

Desafio p. 63

Capitã ou capitão?

- $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$
- Chamando mais 5 meninas para que sejam candidatas. Há outras respostas possíveis.

Unidade 4 – Cálculo algébrico

1. Ana: C; Laura: A; Rita: D; Beatriz: B.

2. a) O triplo de um número.
b) A raiz quadrada de um número.
c) A terça parte do cubo de um número.
d) A raiz quadrada do dobro de um número.

3. a) R$ 25,00; R$ 67,00.
b)

Nº de brinquedos utilizados	Gasto (R$)
1	13
2	19
3	25
6	43
8	55
10	67
15	97

c) $7 + 6 \cdot n$, em que **n** representa o número de brinquedos utilizados.

4. $3n + 3$

5. $b^2 = a^2 + 36$.
Há outras respostas possíveis.

6. $2 \cdot d$; $3 \cdot d$; $4 \cdot d$; $2 \cdot t \cdot d$.

7. a) $x^2 + y$
b) $\frac{a^2}{b^2}$, com $b \neq 0$.
c) $(x - y)^2$

8. 18

9. 0

10. b

11. 20; 14; 5; −12; 25,5

12. a) O perímetro da circunferência.
b) 12,56 cm; 18,84 cm; 35,168 cm; 62,8 cm.

13. Mariana.

14. a) 8 b) $-\frac{1}{6}$ c) -2

15. $\frac{1}{8}$

16. (A) $p = 4\ell$
$A = \ell^2$
(B) $p = 2a + 2b$
$A = a \cdot b$

17. a) $A = \frac{b \cdot h}{2}$ b) 10,5 cm^2

18. 168 m; 315,4 m.

19. a) $V = a \cdot b \cdot c$
b) 60 cm^3; significa o volume do bloco retangular para os valores dados.

20. a) Cubo.
b) $V = a^3$, em que a representa a medida da aresta.
c) 729 m^3

21.

Língua portuguesa	Expressão algébrica
O dobro do produto de um número real por outro.	$2 \cdot a \cdot b$
O produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.	$(m + n) \cdot (m - n)$
O quadrado da diferença entre dois números reais.	$(x - y)^2$

22. $2 \cdot 4 \cdot g$ e $8 \cdot g$

23. −20 °C

24. a) $\frac{47}{4}$
b) Não existe.
c) 1

25.

	a^3	my	x^2	$\frac{m}{t^2}$
-10	$-10a^3$	$-10my$	$-10x^2$	$-10\frac{m}{t^2}$
$-1,2$	$-1,2a^3$	$-1,2my$	$-1,2x^2$	$-1,2\frac{m}{t^2}$
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}a^3$	$-\frac{2}{3}my$	$-\frac{2}{3}x^2$	$-\frac{2}{3}\cdot\frac{m}{t^2}$

26. Não, porque eles têm partes literais diferentes.

27. Resposta possível: $12y^2$, $-3y^2$.

28. Quando tem coeficiente igual a zero.

29. Respostas possíveis.
a) $2ab^4$; $-\frac{3}{5}ab^4$; $10ab^4$.
b) $-3,5x$; $-3,5a^2b$; $-3,5c$.

30. a, e; b, d; c, f.

31. a) $3x$ b) $3x^2$
c) Não. Porque eles têm partes literais diferentes.

32. Forma reduzida: $30x^3$; $-4x^7$; $-\frac{4}{3}xy^2$; xy; $0x^2$.
Coeficiente: 30; -4; $-\frac{4}{3}$; 1; 0.
Parte literal: x^3; x^7; xy^2; xy; x^2.

33. a) $-12x^2$; $2x^2$.
b) $9ay^3$; $-11ay^3$.
c) $\frac{1}{4}xy^2$; $\frac{5}{4}xy^2$.
d) $\frac{11}{15}x^2y$; $-\frac{1}{15}x^2y$.
e) $-1,2ax^4$; $-0,8ax^4$.
f) $-\frac{17}{30}bmx^3$; $-\frac{67}{30}bmx^3$.

34. $-\frac{5}{8}x^3y^2$

35. a) $15xy$ b) $4b$

36. $\frac{23y^2}{6}$ **37.** $21a^2b$

38. $-18xy$

39. a) $\frac{7}{4}m^2n$ b) 0

40. a) $25x^2$ b) $\frac{3}{2}y^5$ c) xy^2

41. a) $6a^2$ c) $3x^4y^3$
b) $-\frac{1}{4}m^6n^4$

42. $-\frac{9}{10}xy$

43. a) $-7x$
b) 4
c) $-\frac{1}{4}ab^2$

44. a) $-27x^6y^9$
b) $0,00032y^{10}z^5$
c) $-\frac{m^3n^9}{64}$
d) $0,09\,a^2y^8$
e) $1,44\,a^8b^4$
f) $0,0001x^4y^{24}$

45. a) $-4ax^2$ c) $-20,8a^2y^3 + y^3$
b) $\frac{7}{9}x^4y^2$

46. A – Cada monômio, a partir de $6x^2$, é o anterior multiplicado por -3.
B – Cada monômio, a partir de $32a^2$, é o anterior multiplicado por $\frac{1}{2}a$.
C – Cada monômio, a partir de $\frac{1}{125}x^3$, é o anterior multiplicado por 5.
a) A: $54x^2$; $-162x^2$; $486x^2$; $-1\,458x^2$.
B: $8a^4$; $4a^5$; $2a^6$; a^7.
C: $\frac{1}{5}x^3$; x^3; $5x^3$; $25x^3$.
b) A; C.

47. a) $6a^3$ c) $4m^3n^2$
b) $8x^3y^3$

48. a) $64a^2$ b) $31x^2$

Desafio – p. 83

Amizade: a palavra-chave

1. $2ax^2$
2. $-3xmy$
3. $-1irt$
4. $5z$
5. $-29ac$
6. $-dm$
7. $4ey^2$

Unidade 5 – Polinômios e operações

1. a) $2a + 5b + 7c$ b) $\frac{3}{2}m + 12n$

2. $2a + a^4 + 3a^3$

3. a) $\frac{2}{3}$; $-4a^3b$; $\frac{b^3}{2}$ c) $\frac{xy^4}{3}$
b) $-x^2y$; $2xy$; $-3y^2$; xy^2

4. $x^3 - 4x^2y + 3xy^2$

5. a) $-\frac{3}{10}abc - \frac{9}{5}ab$ b) Binômio.

6. a) $\frac{5p^2}{4}$; sim. b) $a^2 + ab$; não.

7. -4

8. $\frac{13}{16}$

9. $y = 4$

10. 6

Usando a calculadora p. 90

- 4
- -144
- -9

11. Sim. A variável é z e o grau 3.

12. João.

13. a) Grau: 2; coeficientes: 8, 2 e 7.
Polinômio incompleto.
b) Grau: 3; coeficientes: $\frac{2}{9}$, 0, $-\frac{3}{5}$ e 4.
Polinômio incompleto.

14. $m = 2$ e $n = \frac{1}{2}$.

15. a) $\frac{15}{2}b^2 + 3b$ b) Grau 2; incompleto.

16. c

17. a) 8 b) -39

18. $-9a + 3ab$ **19.** $5a - 13b$

20. a, b

21. a) $4y^2 + 9y$ b) 80,5 cm

22. $\frac{3}{4}ab - \frac{5}{6}$

23. $-9a^3 - 13a^2 - 2a + 15$

24. $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{24}$

25. a) $3x^2 - 4xy$
b) 2
c) $-3x^2 + 4xy$
d) -2 e 2 são simétricos

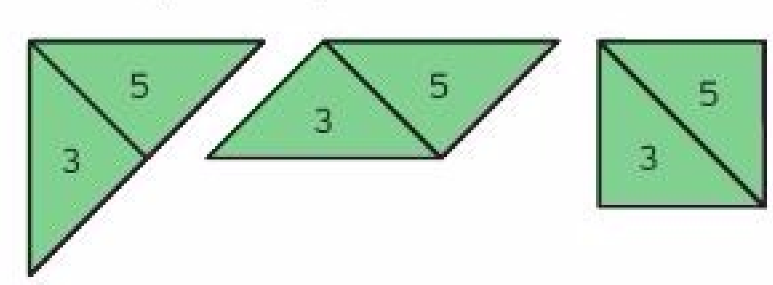
26. a) $-11y^3 - y + 18$
b) $15y^3 - 30y^2 + y + 18$
c) -72

27. $-7a^4$

Desafio – p. 97

Peças do tangram e expressões algébricas

- 2: paralelogramo; 3, 5, 6, 7: triângulos retângulos; 4: quadrado.



- $4a^2$
- 1, 2 e 4: $\frac{a^2}{2}$; 3 e 5: $\frac{a^2}{4}$; 6 e 7: a^2.
- Área 1 + área 2 + área 4 + área 3 + área 5 + área 6 + área 7 = $\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2 + a^2 =$
$= \frac{2a^2 + 2a^2 + 2a^2 + a^2 + a^2 + 4a^2 + 4a^2}{4} =$
$= 4a^2 \rightarrow$ Área do quadrado inicial

28. a) $10x^2y^2 + 2y^2$
b) 220,5

29. $26a^2b^2 - 65ab^3 + 39a^3b^3 + 78ab^2$

30. $4\pi a + 2\pi b$

31. a) $-\frac{9}{5}m^3n + \frac{27}{10}m^2n^3 - 2m^3n^2 + \frac{54}{5}m^2n$

b) zero

32. a) $9x^2 + 18x + 5$

b) $x^3 + 8$

c) $24x^3 - 12x + 3$

d) $70y^4 + 48y^3 - 8$

33. $\frac{100x^5}{3} - 12x^3$

34. a) $243a^5 - 3a$

b) $18a^5 - \frac{2}{9}a$

35. a) $x^3 - x$ c) $x^2 - 2x + 1$

b) $x^3 + x^2$ d) $-2x$

36. a) $2a^2 - 10a - b^2 + 12$

b) $-x - 6$

37. a) $-14x + 10$

b) $182x - 130$

38. $a^2 + 8a + 16$

39. $6x^4 - 2x^3$

40. $a^2 - 3a + \frac{1}{2}$

41. $27a^3 - 7$

42. a) $\frac{2}{5}y^2 - y - \frac{3}{5}$

b) 25; 4,4

c) 110

43. $-8x + 4$; -18

44. $6x^3 + 2x^2 + 8x - 3$; 0

45. a) $-7x^2 + 3x - 4$

b) -38

c) Sim; porque o resto é zero.

46. $27x^3 - 15x + 4$

47. $-6x^3 + 16x^2 - 2$

48. $-10y^2 + 3y - 1$; $3y - 9$

49. $B = 32x^3 - 2x - 5$

Desafio p. 104

Teste o seu raciocínio

- $P = -6x + 7$ e $R = 0$.

Unidade 6 – Simetria, movimentos e padrões em Geometria

1. **M** – 1,5 cm; **A** – 2,2 cm; **R** – 1,5 cm; **L** –3 cm; **U** – 1,5 cm; **B** – 1,5 cm.

a) **M** e **U**.

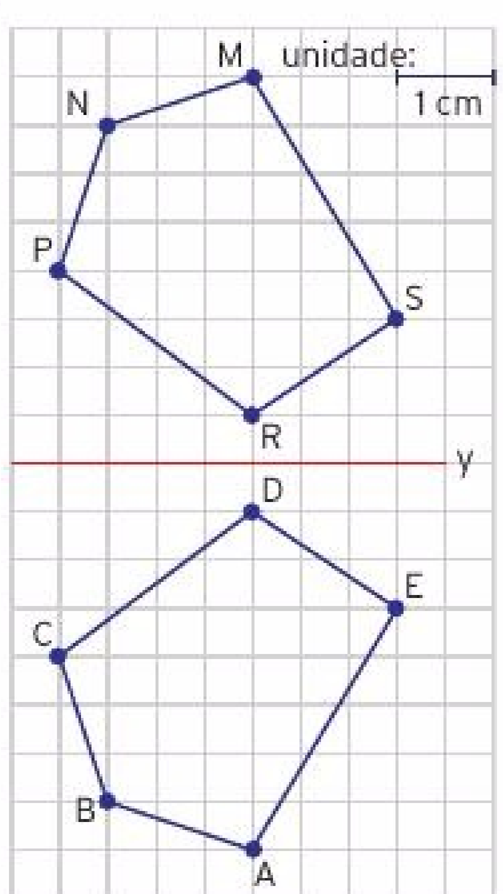
b) Não; não estão na mesma reta perpendicular a **s**.

2. a) Simetria central.

b) Simetria axial.

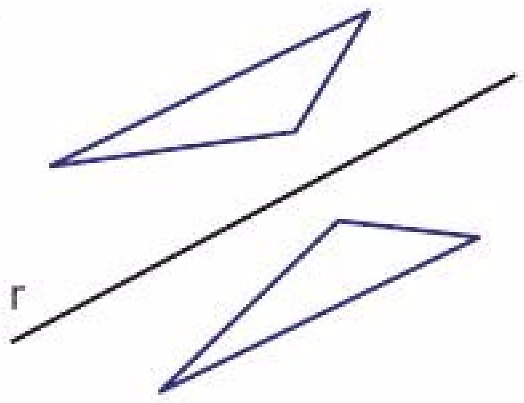
3. c

4. a)

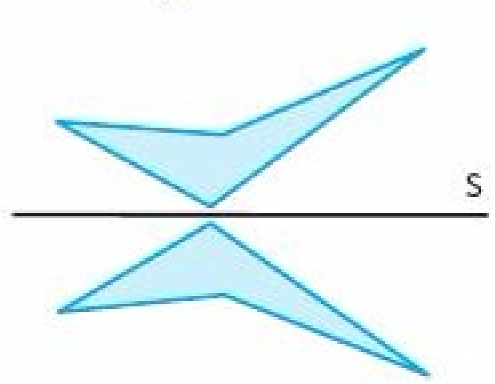


b) Resposta pessoal.

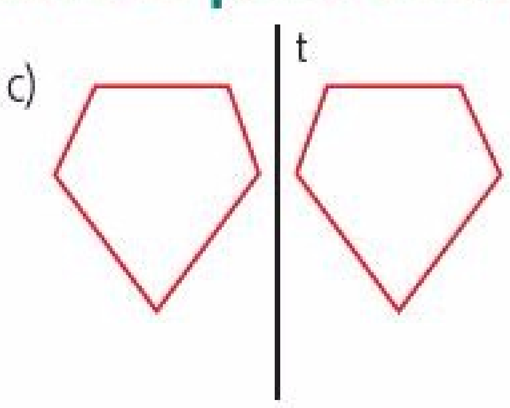
5. a)



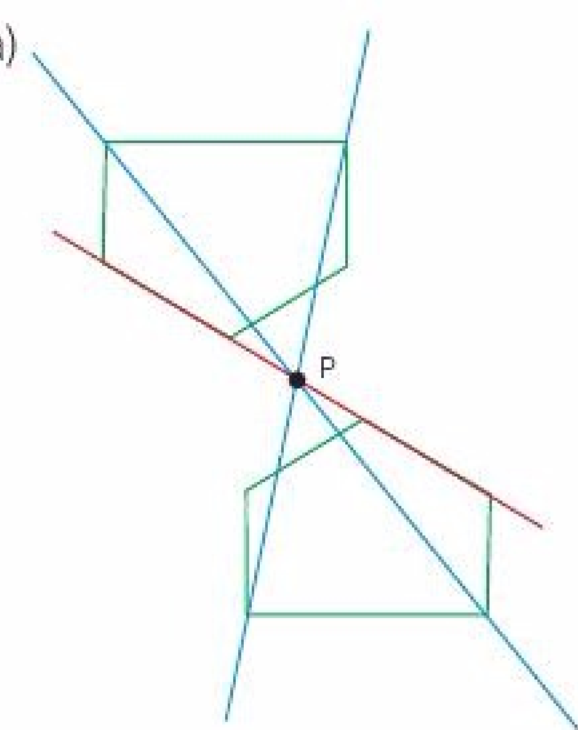
b)



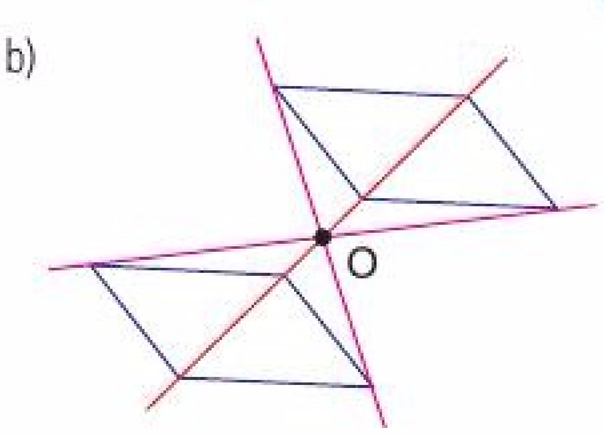
c)



6. a)



b)



7. a) Sim. b) Lado $\overline{AC}$. c) $A\hat{C}H$

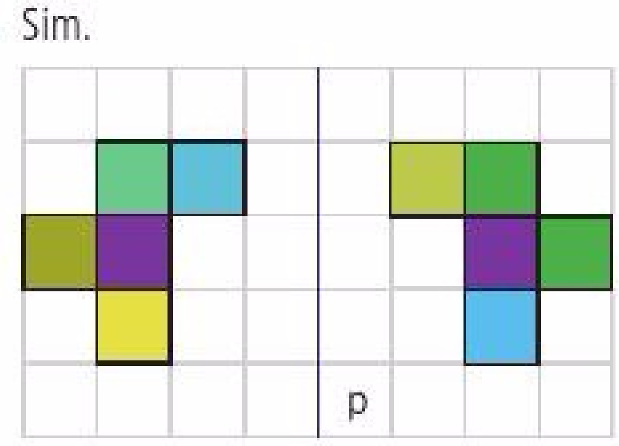
8. São retas paralelas.

9. São iguais. **10.** Reflexão.

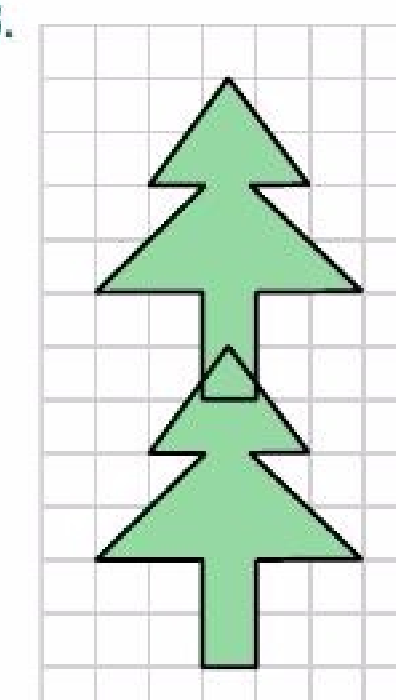
11. a) Reflexão. c) Translação.

b) Rotação.

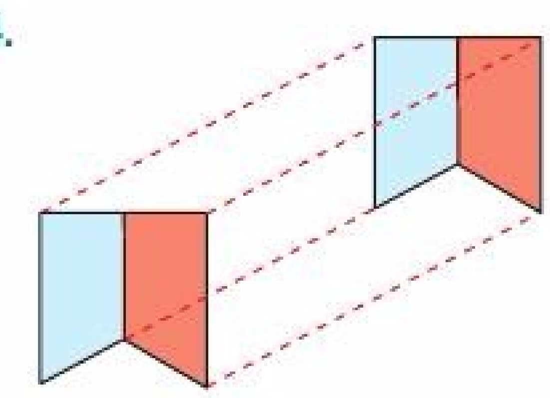
12. Sim.



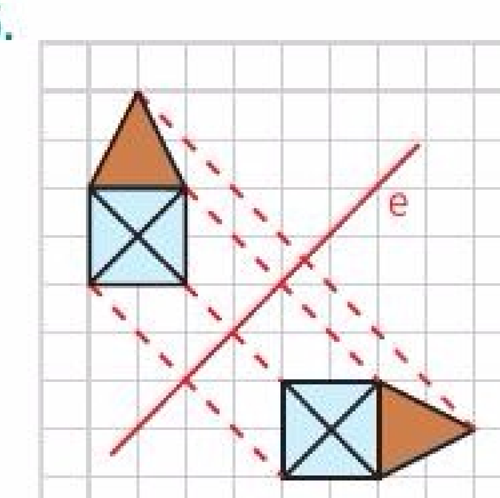
13.



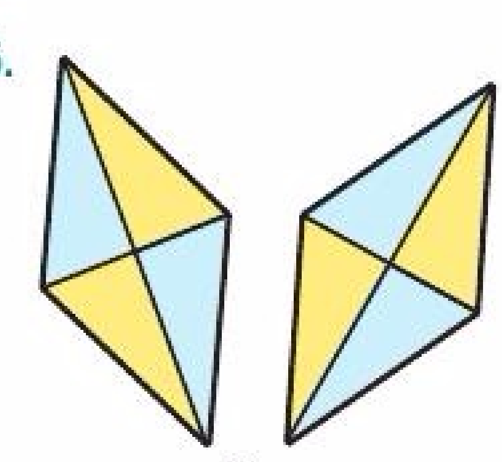
14.



15.



16.



Desafio p. 120

Movimentos e figuras geométricas produzindo arte

- Reflexão.
- Resposta pessoal.

17. O triângulo ABC é congruente ao MNP.

18. Resposta possível: São dois triângulos com formas iguais e tamanhos iguais.

19. Quando os lados correspondentes são respectivamente congruentes e os ângulos correspondentes também são respectivamente congruentes.

20. a) Respostas possíveis: $C\hat{E}M$ e $A\hat{P}M$; $E\hat{M}C$ e $P\hat{M}A$.

b) Respostas possíveis: $\overline{EM}$ e $\overline{PM}$; $\overline{CE}$ e $\overline{AP}$.

21. a) b) c) Resposta pessoal.

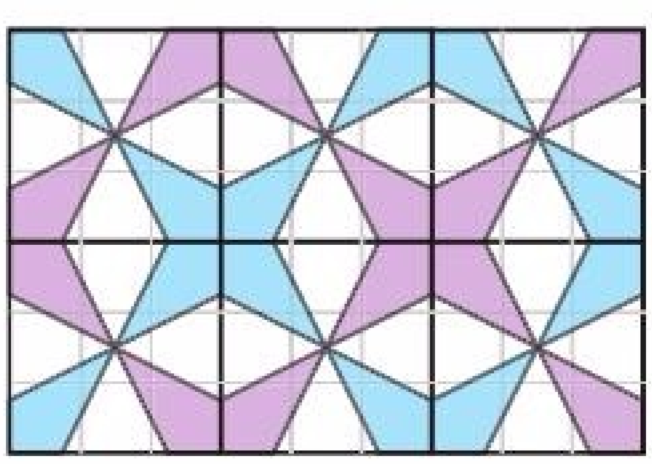
22. a) b) Resposta pessoal.

23. 40°

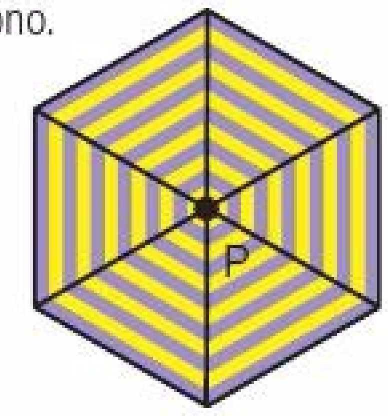
24. a) 106°

b) São ângulos suplementares.

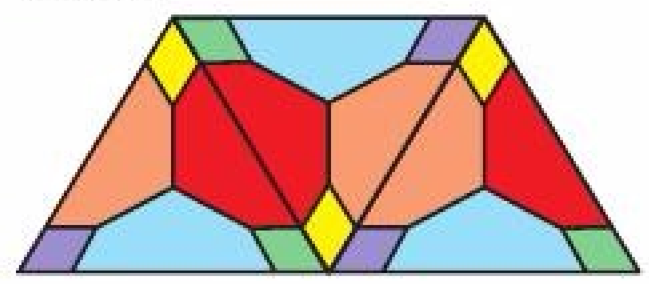
25.



26. Hexágono.

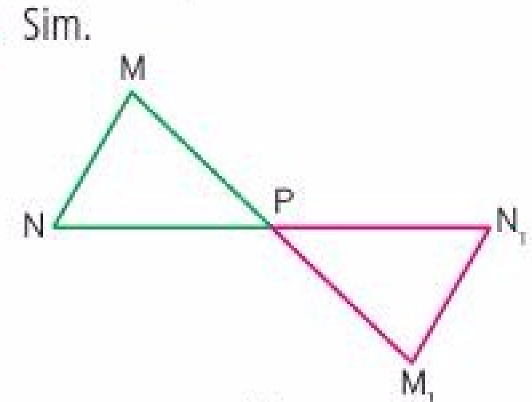


27. Trapézio.

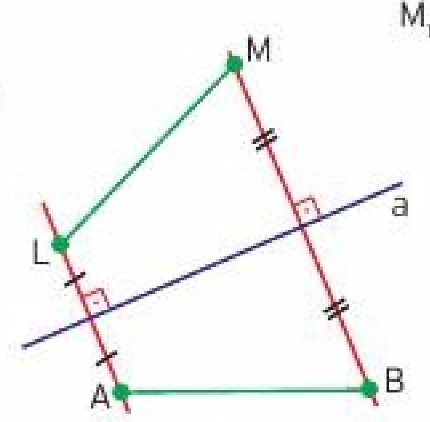


28. Resposta pessoal.

29. Sim.

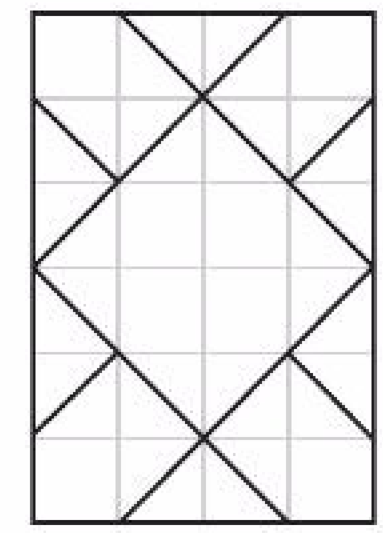


30.



31. Sim, porque os lados e os ângulos correspondentes são respectivamente congruentes.

32. Translação de 4 unidades, da esquerda para a direita.



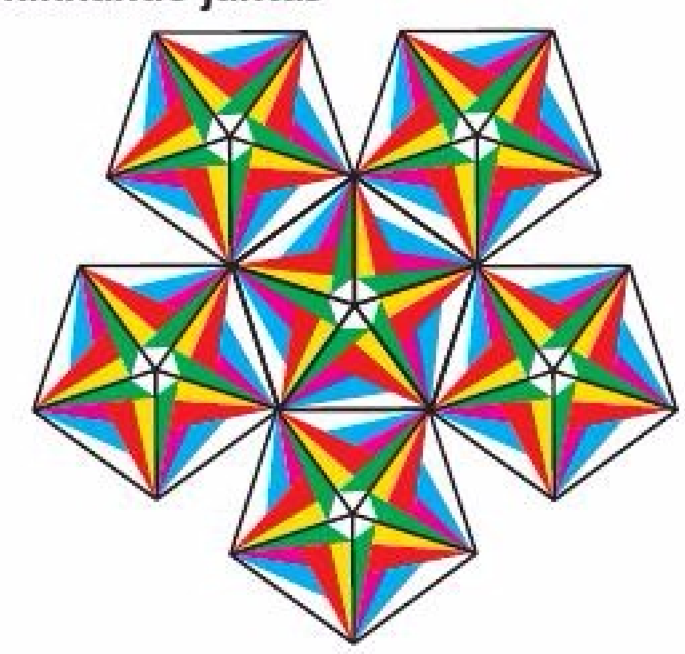
33. a) O; 120°.

b) $\overline{MS}$ e $\overline{NP}$. Sim.

34. Os lados e os ângulos são congruentes.

Desafio p. 128

A arte e a geometria caminhando juntas

- 
- Dodecaedro.
- Resposta pessoal.

Unidade 7 – Produtos notáveis e fatoração

1. $16b^2 + 4b + \frac{1}{4}$

2.

Quadrado do 1º termo	2 vezes o 1º termo pelo 2º termo	Quadrado do 2º termo	Resultado
x^2	$4xy$	$4y^2$	$x^2 - 4xy + 4y^2$
m^4	$2m^2n$	n^2	$m^4 + 2m^2n + n^2$
x^4	$4x^2y$	$4y^2$	$x^4 - 4x^2y + 4y^2$
x^6	$6x^4$	$9x^2$	$x^6 - 6x^4 + 9x^2$

3. Corretas: a, c e d.

b) $16x^6 + 8x^4 + x^2$

e) $81y^2 - 18y^4 + y^6$

f) $\frac{4x^2y^2}{81} - \frac{x^2y^3}{9} + \frac{x^2y^4}{16}$

4. $x^2 - 4x^2 + 4y^2 - y^2 = -3x^2 + 3y^2$
Confere com a resposta da professora.

5. $5a^2 + 4$

6. $40n + 80$

7. b^4

8. $\frac{1}{4}a^2$
Resposta correta.

9. $2xy$

10. 1

11. a) $m^2 - 2mn + n^2$ b) 4

12. a) 400 b) -8 e -12 ou 8 e 12.

13. a) $-12x$ b) 4

14.

Produto da soma pela diferença	Quadrado do 1º termo	Quadrado do 2º termo	Resultado
$(a^2 - b) \cdot (a^2 + b)$	a^4	b^2	$a^4 - b^2$
$(2 + xy) \cdot (2 - xy)$	4	x^2y^2	$4 - x^2y^2$

15. $x^4y^2 - x^2y^4$

16. $-36b^2 + 12b + \frac{1}{4}$

17. $2y^4$

18. $-2ab^2$

19. $3m^4 + 6m^3 - 24m^2$

20. 1

21. -44

22. -135

23. $9 - x^2 - y^2$

Desafio p. 141

Produtos notáveis e potências

- $4x + 10$
- 100
- 410
- 130

24. Verdadeiras: b e c.

a) $x^2 + 8x + 12$

d) $x^2 - 7x - 60$

25. $x^2 + 3x - 40$

26. a) $x^2 - 21x + 104$

b) $y^2 - 5y - 150$

c) $z^2 + 11z - 126$

d) $a^2 + a + \frac{6}{25}$

27. $2x$

28. $x + 8$

29. $x - 9$

30. $8x^3$; $3 \cdot 4x^2 \cdot 5 = 60x^2$; $3 \cdot 2x \cdot 25 = 150x$; 125; $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$.
$27x^3$; $3 \cdot 9x^2 \cdot 4z = 108x^2z$; $3 \cdot 3x \cdot 16z^2 = 144xz^2$; $64z^3$; $27x^3 - 108x^2z + 144xz^2 - 64z^3$.
$8a^6$; $3 \cdot 4a^4 \cdot a = 12a^5$; $3 \cdot 2a^2 \cdot a^2 = 6a^4$; a^3; $8a^6 + 12a^5 + 6a^4 + a^3$.
x^6; $3 \cdot x^4 \cdot x = 3x^5$; $3 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3x^4$; x^3; $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$.

31. Corretas: a e c.
b) $x^9 + 3x^7 + 3x^5 + x^3$
d) $\frac{8m^3}{27} - \frac{4m^2}{3} - 2m + 1$

32. $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

33. $4ac^2$

34. $(x - 1)^3$

35. a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
b) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$

36. $10x^2 + 10y^2$

37. $-9y^3 - 6x^2y + 12xy^2$; 27.

38. a) 1
b) $6m$

39. $20a + 100$

Desafio p. 144

Expressões cruzadas

	1	2	3	4	5
1		a^3	−	a	
2	x^2	+	$4x$	+	4
3	−	$12a^2$	−	3	
4	$6xy$	+	y		
5	+	$48a$	+	a^2	
6	$9y^2$	+	4	−	$12y$
7		64		1	

40. a) 9
b) $9 \cdot (6ma^2 - b)$

41. a) 12 c) $12x^2y^2 \cdot (x^2 - 4x + 5y^3)$
b) x^2y^2

42. Corretas: b; e.
a) $16x \cdot (x - 2y)$
c) $5a \cdot (3a^2 - 5a + 6)$
d) $-2xy^2 \cdot (7x + 8y^3 + 5)$

43. $(b - 5) \cdot (9 - a)$

44. a) $(6x^2 - 12x) + (xy^2 - 2y)$. Há outras respostas possíveis.
b) $(xy - 2) \cdot (6x + y)$

45. Correta: b.
a) $(a^2 + b) \cdot (a + b)$
c) $(x^2 + 3) \cdot (y + x)$

46. $\left(\frac{2}{5} + m^3\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - m^3\right)$

47. $(9 + y) \cdot (9 - y)$

48. a) $(4m^2 + a) \cdot (4m^2 - a)$
b) 320

49. a) $36m^4n^2$ e 1 c) $(6m^2n + 1)^2$
b) Sim.

50. $(5m^3 + 1)^2$

51. a) Esse trinômio não é quadrado perfeito.
b) 7 e 6.
c) $(x + 6) \cdot (x + 7)$

52. a) $72x$ ou $-72x$. c) $\frac{1}{9}$
b) $14y^2$ ou $-14y^2$. d) $64a^2$

53.

Trinômio	Forma fatorada
$x^2 + 11x + 21$	$(x + 3) \cdot (x + 8)$
$y^2 - 8y + 12$	$(y - 2) \cdot (y - 6)$
$a^2 - 3a - 10$	$(a - 5) \cdot (a + 2)$
$n^2 - n - 6$	$(n - 3) \cdot (n + 2)$
$t^2 + t - 30$	$(t + 6) \cdot (t - 5)$

54. $(8m - 1) \cdot (mn + 1)$

55. $21xy + 7y - 12x - 4 = (3x + 1) \cdot (7y - 4)$; -80

56. 2 920

57. $(a + b + 7) \cdot (a + b - 7)$.

58. a) 10; 15 b) -1; $-\frac{3}{2}$ c) -1; 3 e 7

59. b

60. 4 e 8.

61. Resposta possível:
$5x \cdot (x - 10) = 5x^2 - 50x$

Unidade 8 – Retas coplanares e ângulos

1. Correta: c
a) Duas retas coplanares **m** e **r** são concorrentes se possuem apenas um ponto em comum.
b) Resposta possível: Retas concorrentes têm um único ponto em comum.
d) Duas retas **c** e **d** são coincidentes se possuem todos os pontos em comum.

2. a) Resposta possível: $M\hat{A}R$ e $N\hat{B}R$.
b) Resposta possível: $L\hat{A}B$ e $A\hat{B}S$.

3. a) Resposta possível: Porque **s**//**p**, **a** é transversal e $M\hat{A}X$ e $B\hat{A}L$ são dois ângulos obtusos.
b) Porque **s**//**p**, **a** é transversal e $M\hat{A}X$ e $R\hat{B}S$ são ângulos obtusos.
c) Resposta possível:
med $M\hat{A}X$ + med $N\hat{B}R = 180°$.

4. a) Na direção da reta $\overleftrightarrow{UZ}$ e de **U** para **Z**.
b) Resposta possível: $\overleftrightarrow{DZ}$ e $\overleftrightarrow{CE}$.
c) Resposta possível: $D\hat{Z}C \equiv B\hat{C}A$; $X\hat{Z}D \equiv Z\hat{C}B$; $U\hat{D}Z \equiv Z\hat{C}E$.
d) Resposta possível: $D\hat{Z}C$ e $Z\hat{C}B$ são ângulos suplementares porque $\overleftrightarrow{DZ}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são retas paralelas, $\overleftrightarrow{AZ}$ é uma reta transversal a elas e um dos ângulos é agudo e o outro é obtuso.

5. a) Congruentes. b) 107° c) 39°
d) Resposta possível: 73°; porque é o suplemento de 107°.
e) Resposta possível: $X\hat{N}Y$.

6. $x = 132°$ $y = 48°$ $z = 132°$

7. 300°

8. a) Resposta possível: $\hat{b}$ e $\hat{d}$; $\hat{a}$ e $\hat{c}$; $\hat{m}$ e $\hat{p}$.
b) Sim, são ângulos o.p.v.

9. a) 59° b) 15°

10. 29° 20′

11. 139° 30′

12. a) Resposta possível: $\hat{c}$ e $\hat{m}$; $\hat{b}$ e $\hat{p}$.
b) $\hat{d}$ e $\hat{m}$ são ângulos colaterais internos.
c) Ângulos o.p.v.
d) $p = 52°$; $x = 128°$.
e) Resposta possível: $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

13. $l = p = h = 134°$; $m = q = f = g = 46°$

14. a) Correspondentes. d) Alternos internos.
b) Colaterais internos. e) Adjacentes.
c) Correspondentes. f) o.p.v.

15. a) $x + y = 180°$
b) 37°
c) Perpendicular a **r** e a **s**.

16. Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são ângulos correspondentes.
$c = d = 138°$
$c = 138°$
$3y - 48° = 138°$
$y = 62°$

17. Resposta possível: p // n, m é uma reta transversal a elas e os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são alternos externos. Logo, suas medidas são iguais. $y = 46°$; $c = 127°$

18. a) Suplementares.
b) 27°
c) 72°; 108°.
d) Resposta possível:
108°; $\hat{y}$ é o.p.v. de $A\hat{P}B$.

19.
r // s; $\overleftrightarrow{AM}$ transversal $\Big]$ $A\widehat{M}N$ e $A\widehat{B}C$ são ângulos correspondentes. $\rightarrow$ med $A\widehat{M}N = 68°$
r // s; $\overleftrightarrow{AC}$ transversal $\Big]$ $A\widehat{N}M$ e $A\widehat{C}B$ são ângulos correspondentes. $\rightarrow$ med $A\widehat{N}M = 54°$
No triângulo AMN:
$68° + 54° +$ med $N\widehat{A}M = 180° \rightarrow$ med $N\widehat{A}M = 58°$

20. a) Ângulos colaterais internos.
b) med $F\hat{R}S$ + med $A\hat{S}E = 180°$
c) Ângulos opostos pelo vértice; $3x = y$.
d) 78°; 78°.
e) 102°

21. a) $(180° - x)$
b) Ângulos correspondentes.
c) 56° 30′
d) 123° 30′

22. a) 123° 30′
b) 56° 30′
c) 28° 15′

23. $x = 64°$; $y = 64°$; $z = 52°$; $u = 116°$.

24. a) $x = 60°$, $y = 40°$ e $z = 40°$.
b) $x = 60°$, $y = 52°$ e $z = 120°$.

25. a) 16°
b) 48°; 35°; 97°

26. 55°; 100°; 25°

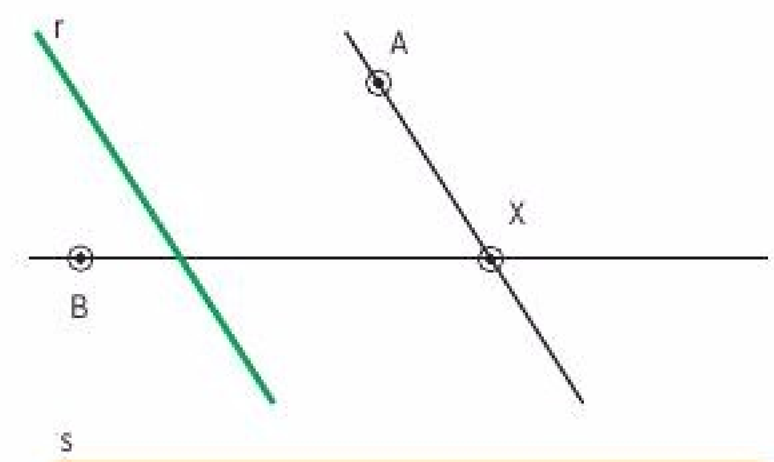
27. a) 54°, 78°, 54°
b) med $A\hat{P}B = 78°$;
med $A\hat{B}P = 48°$.
c) 12°

28. a) 17°,
b) 37°
c) 91°

29. a) 30°
b) 150°

Desafio p. 167

Onde está X?

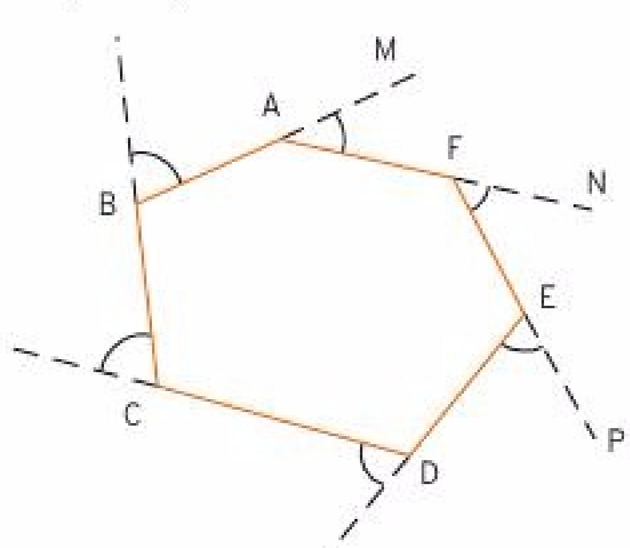


Unidade 9 – Polígonos e propriedades

1. Ⓐ — heptágono
Ⓑ — pentágono
Ⓒ — decágono

2. a) 4 vértices, 4 lados.
b) 7 vértices, 7 lados.
c) 8 vértices, 8 lados.

3. a) 6 vértices.
b) 9 diagonais.
c) Resposta possível: $M\hat{A}F$; $N\hat{F}E$; $P\hat{E}D$.



4. 2 diagonais; quadrilátero.

5. 77°

6. Não convexo; existem retas que interceptam mais de dois lados do polígono.

7. **A** e **C**.

8. Sim, triângulo.

9. a) $A\hat{B}C$
b) 65°
c) 125°; 128°

10. 35 diagonais.

11. a) Octógono.
b) 20 diagonais.
c) Resposta possível: aplicando a fórmula que acabamos de conhecer.

12.

Número de lados	Fórmula (diagonais)	Total de diagonais
6	$\frac{6 \cdot (6-3)}{2}$	9
15	$\frac{15 \cdot (15-3)}{2}$	90
a	$\frac{a \cdot (a-3)}{2}$	$\frac{a \cdot (a-3)}{2}$
40	$\frac{40 \cdot (40-3)}{2}$	740
y	$\frac{y \cdot (y-3)}{2}$	$\frac{y \cdot (y-3)}{2}$

Usando a calculadora p. 178

- 65 diagonais; 135 diagonais; 377 diagonais.

Desafio p. 178

Diagonais e apertos de mão

- 190
- $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$
- Resposta possível: Em lugar de vértices são pessoas e cada uma cumprimenta todos menos ela mesma: são $(n - 1)$ cumprimentos para cada um e o total deve ser dividido por 2.

13. a) 105° b) 59°; 121°

14. a) 20 vértices. b) 170 diagonais.

15. a) 9 lados. c) 43°
b) 27 diagonais. d) 33°

16. Heptágono.

17. 9 lados.

18. Dodecágono.

19. Icoságono.

Desafio p. 179

Polígonos, diagonais e trabalhos manuais

- Resposta pessoal.

20. 360°

21. 360°

22. 120°

23. a) 1 440° c) 3 240°
b) 1 080°

24. a) 108° c) 72°
b) 72° d) 360°

25. Não; os lados nem sempre são congruentes entre si.

26. Triângulo equilátero, porque tem todos os lados e todos os ângulos com medidas iguais.

27. 120°

28. a) 135°; 45° c) 162°; 18°
b) 156°; 24°

29. 9 lados.

30. 12 lados.

31. 40°

32. Quadrado.

33. 18 lados.

34. 22 lados.

35. a) 16°
b) 12°

36. a) 11°
b) 61°; 131°; 64°; 104°.

37. Hexágono.

38. Pentágono.

Unidade 10 – Inequações e sistemas de equações

1. a, b.

2. c, d.

3. Resposta possível: $5 + 3x < 13 + x$.

4. Respostas possíveis:

Inequação	Situação
$\frac{m}{3} - 10 > m$	A terça parte de um número subtraída de 10 é maior que esse número.
$\frac{3x}{4} < 42$	Três quartos de estudantes de uma turma é menor que 42.
$5a < 4\,200$	Renato quer comprar uma moto que custa R$ 4 200,00. O quíntuplo de seu salário é menor que o preço dessa moto.
$4n + 3 > 25$	O quádruplo da idade de meu irmão acrescido de 3 é maior que 25.

5. Corretas: **a** e **b**.
c) Multiplicando por $-\frac{3}{4}$ os dois membros de $0 > -10$, a nova desigualdade tem sentido contrário ao da desigualdade inicial.

6. a) $b > a$
b) $-\frac{b}{7} < -\frac{a}{7}$ ou $-\frac{a}{7} > -\frac{b}{7}$
c) Resposta possível: Dividindo os dois membros da desigualdade do item **a** por -7.

7. -10, 0

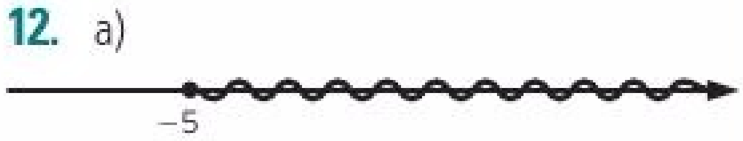
8. Respostas possíveis: 0,25; $\frac{1}{2}$; 0.

9. $9x < 9$; $x < 1$

10. b; d.

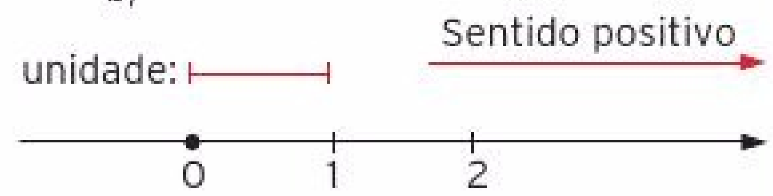
11. Respostas possíveis:
a) $x \leqslant 5$ b) $x > -5$

12. a)



b)

13. a) $x \in \mathbb{N}, x < 1$
b)



14. a) $x \in \mathbb{N}, x < 2$
b) $y \in \mathbb{Z}, y < -3$
c) $m \in \mathbb{Q}, m \leqslant \frac{11}{5}$
d) $x \in \mathbb{R}, x \geqslant -\frac{16}{7}$
e) $x \in \mathbb{R}, x < \frac{4}{5}$

15. $x \in \mathbb{Z}, x > \frac{4}{7}$

16. $y \in \mathbb{Q}, y \geqslant 4$

17. 11

18. a) $x \in \mathbb{R}, x > 0$
b) $x \in \mathbb{R}, x < -\frac{5}{2}$
c) $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 2$

19. ℓ é um número real posititivo, $\ell < 64$.

20. $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > 39{,}2$.

21. a) Sim; $0 > -\frac{1}{3}$.
b) Respostas possíveis: $-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, 27$.
c) Respostas possíveis: $y \in \mathbb{Z}, y > -\frac{1}{3}$.

22. a) $x \in \mathbb{R}, x < 11$ b) $x \in \mathbb{R}, x \leqslant \frac{17}{4}$

23. 2, 3, 4, 5, 6, ..., 23.

Desafio p. 200

Triângulos e possibilidades

- 5 cm, 6 cm e 6,5 cm.
- 6,5 cm; 84 cm.

24. a) $(x, y) = (-2, -5)$
b) $(x, y) = (-6, -8)$
c) $(m, n) = \left(-\frac{17}{5}, \frac{4}{5}\right)$

25. a) (14, 8) b) (1, −2) c) (−1, −5)

26. $\left(-\frac{23}{11}, \frac{19}{11}\right)$

27. a) (10, 12)
b) $\left(\frac{59}{17}, \frac{45}{17}\right)$
c) (−5, −2)
d) (3, 6)

28. a) Lata de tomate: 420 g;
biscoito: 840 g.
b) Maçã: 200 g; abacaxi: 500 g.

29. 8; 28

30. 10; 60

31. 60; 35

32. a) $\left(-\frac{22}{3}, \frac{56}{9}\right)$
b) $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}\right)$

33. a) (19, −4) c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{15}\right)$
b) (−5, 4) d) $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

34. 57; 75

35. 62

36. 27 cédulas de R$ 10,00 e 9 cédulas de R$ 5,00.

37. Paulo gastou R$ 30,00 e Mariana, R$ 18,00.

38. 28 carros; 19 motos.

Desafio p. 206

O número escondido na cartela

- 64

Unidade 11 – Triângulos e propriedades

1. Todos.

2. III; IV.

3. a) 79°
b) 115°
c) 82°

4. a) 20°
b) 37° 30′
c) 120°

5. b, c.

6. a) Resposta pessoal. Baricentro.
b) Resposta pessoal. Ortocentro.
c) Resposta pessoal. Ponto comum às três bissetrizes.

7. a) 31°
b) 44°

8. a; e; f.

9. 54°; 36°

10. a) 39°
b) 73°; 29°

11. a) 32°
b) $med(\hat{A}) = 80°$, $med(\hat{B}) = 68°$ e $med(\hat{C}) = 32°$.

12. a) 70°
b) 35°
c) 82°

13. 38°

14. 11°

Desafio p. 217

Triângulos e quadriláteros

- 92°

15. Resposta pessoal.

16. Os triângulos são congruentes, porque os lados de um deles são respectivamente congruentes aos lados do outro. Caso LLL.

17. a) $\overline{GH} \equiv \overline{IL}$ $\hat{J} \equiv \hat{M}$
$\overline{GJ} \equiv \overline{IM}$ e $\hat{H} \equiv \hat{L}$
$\overline{JH} \equiv \overline{ML}$ $\hat{G} \equiv \hat{I}$

b) $\overline{AC} \equiv \overline{EF}$ $\quad \hat{B} \equiv \hat{D}$
$\overline{AB} \equiv \overline{ED}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$
$\overline{BC} \equiv \overline{DF}$ $\quad \hat{A} \equiv \hat{E}$

18. a) LLL
b) ALA

19. a) $\overline{CD}$; $\overline{CA}$
b) 80°; 80°.
c) LAL (ou ALA).

20. a) LAL.
b) $R\hat{M}P$; $M\hat{R}P$.

21. b

22. a) LAL; $\triangle EDC$.
b) ALA; $\triangle MNO$.
c) LAA; $\triangle ADC$.

23. a) Sim, porque **O** é ponto médio de $\overline{PR}$.
b) Sim, porque são o.p.v.
c) Sim, porque **O** é ponto médio de $\overline{TS}$.
d) Sim, caso LAL.

24. $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$ (L)
$\hat{B} \equiv \hat{D}$ (A)
$\overline{BC} \equiv \overline{DC}$ (C é ponto médio) (L)
Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$.

25. $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (lado comum) (L)
$B\hat{A}D \equiv B\hat{A}C$ ($\overrightarrow{AB}$ é bissetriz) (A)
$B\hat{D}A \equiv B\hat{C}A$ (ângulos retos) (A_0)
$\triangle ABD \equiv \triangle ABC$. Portanto, $\overline{DB} \equiv \overline{CB}$

26. $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ (L)
$\hat{B} \equiv \hat{C}$ (ângulos retos) (A)
$\overline{BC} \equiv \overline{BC}$ (lado comum) (L)
$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$. Portanto, $\hat{A} \equiv \hat{D}$

27. $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos congruentes.

28. a; e; f.

29. a) $5x + 32°$
b) 10°
c) 82°; 82°; 16°.

30. 65°; 50°

31. 24°

32. a) São iguais a 45°. b) 11°

33. b; c; e; f.

34. Sim, porque, tendo três lados congruentes entre si, tem dois lados congruentes entre si, o que o caracteriza como isósceles. Há outras respostas possíveis.

35. a) 20°; 80°; 80°
b) Sim; não.

36. a; c; e; f.

37. a) Caso LAL.
b) $\Delta MSR \equiv \Delta NRS$, logo $N\hat{S}R \equiv M\hat{R}S$.
c) Isósceles.

Unidade 12 – Quadriláteros e propriedades

1. a) $\overline{MN} \,//\, \overline{RP}$ e $\overline{NP} \,//\, \overline{MR}$.
b) **A** é o ponto médio de $\overline{MP}$ e de $\overline{NR}$.
c) $\overline{MN}$ e $\overline{RP}$; $\overline{NA}$ e $\overline{RA}$; $\overline{MA}$ e $\overline{PA}$.
Há outras respostas possíveis.

2. a) med $\hat{E}$ = med $\hat{G}$ = 130°; med $\hat{H}$ = = med $\hat{F}$ = 50°.
b) med $\hat{N}$ = med $\hat{L}$ = 135°;
med $\hat{M}$ = med $\hat{J}$ = 45°.

3. a) x = 18°
b) x = 10°

4. 32,5 cm

5. 108°

6. 71°; 71°; 109° e 109°.

7. a) 65°
b) 130°
c) 360°

8. 54° 30′

9. a) 45°
b) 135°

10. a) Sim.
b) Dois eixos de simetria; estão sobre as diagonais do losango desenhado.

11. a) Bissetriz.
b) 45°
c) 40°

12. a) 44°
b) 36°

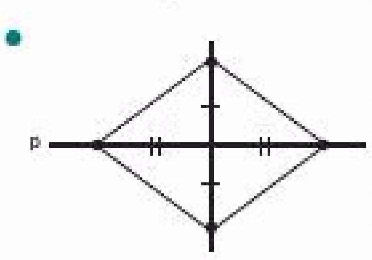
13. 26°

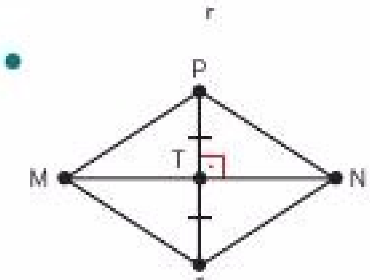
14. 44°

15. 76° e 104°.

Desafio p. 240

Construções com régua e compasso

- 

- 

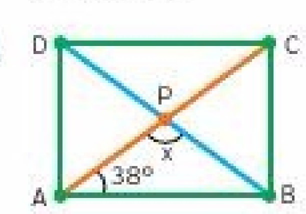
(Existem outras respostas).
$\overline{PS} \equiv \overline{AB}$; $\overline{MN} \equiv \overline{CD}$;
$\overline{PS} \perp \overline{MN}$ pelo ponto médio de $\overline{MN}$ (T);
$\overline{PT} \equiv \overline{ST}$ e
med $\overline{PT} = \dfrac{\text{med } \overline{AB}}{2}$.

16. 45°, 45°, 135° e 135°.

17. 75°, 75°, 105° e 105°.

18. 129°, 129° e 51°.

19. a) 34 cm
b) 389 cm

20. 

a) ABCD é retângulo: **P** é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Dessa forma, $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$. Portanto, $\triangle PAB$ é isósceles.
b) 104°

21. 48 cm

22. 5,8 cm e 16,8 cm.

23. a) 36°
b) 36°
c) São iguais.

24. 4 cm.

25. a) 10° b) 80°

26. 70°, 80°, 100° e 110°.

27. 80°, 80°, 100° e 100°.

Desafio p. 243

Jardim triangular em praça quadrada

12,5 m^2

Indicação de leituras complementares para os alunos

Berloquin, P. *100 jogos lógicos*. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2002. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *100 jogos numéricos*. Lisboa: Gradiva, 1999. Coleção O Prazer da Matemática.

Bolt, B. *Actividades matemáticas*. Trad. Leonor Moreira. Lisboa: Gradiva, 1991. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *Mais actividades matemáticas*. Trad. Luisa Carreira. Lisboa: Gradiva, 1992. Coleção O Prazer da Matemática.

Cândido, Suzana Laino. *Formas num mundo de formas*. São Paulo: Moderna, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

Guelli, Oscar. *A invenção dos números*. 9. ed. São Paulo: Ática, 1998. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Equação*: o idioma da Álgebra. 11. ed. São Paulo: Ática, 1999. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Jogando com a Matemática*. 8. ed. São Paulo: Ática, 2005. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *História de potências e raízes*. 9. ed. São Paulo: Ática, 2002. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Números com sinais:* uma grande invenção. São Paulo: Ática, 2013. Coleção Contando a História da Matemática.

Guzmán, M. de. *Contos com contas*. Trad. Jaime Carvalho e Silva. Lisboa: Gradiva, 1991. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *Aventuras matemáticas*. Trad. João Filipe Queiró. Lisboa: Gradiva, 1997. Coleção O Prazer da Matemática.

Imenes, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 2004. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Problemas curiosos*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 2001. Coleção Vivendo a Matemática.

Imenes, Luiz Márcio; Lellis, Marcelo. *Descobrindo o teorema de Pitágoras*. 13. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Geometria dos mosaicos*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Os números na história da civilização*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 2006. Coleção Vivendo a Matemática.

Imenes, Luiz Márcio; Jakubo, José; Lellis, Marcelo. *Álgebra*. 16. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Equação do 2º grau*. 17. ed.São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Geometria*. 16. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Ângulos*. 17. ed. São Paulo: Atual, 2005. Coleção Pra que Serve a Matemática?

Machado, Nilson José. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Polígonos, centopeias e outros bichos*. 9. ed. São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Lógica? É lógico*! 10. ed. São Paulo: Scipione, 2006.

Rosa Neto, Ernesto. *Em busca das coordenadas*. 11. ed. São Paulo: Ática, 2001. Coleção A Descoberta da Matemática.

Silva, Maria Cecília Costa e. *Padrões numéricos e sequências*. São Paulo: Moderna, 2000.

______. *Padrões numéricos e funções*. São Paulo: Moderna, 1999.

MANUAL DO PROFESSOR
Orientações Didáticas

Colegas,

Nesta edição da coleção para o Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano, destacamos as múltiplas aplicações da Matemática nas ciências e no cotidiano, enriquecidas com fotografias e ilustrações. O desenvolvimento dos conceitos enfoca ora os acontecimentos históricos da Matemática, ora a resolução de situações-problema. Com uma abordagem mais atualizada, esperamos auxiliar os alunos a vencer o desafio de aprender Matemática e, dessa maneira, mudar a imagem estereotipada que se construiu sobre essa disciplina – "uma ciência para **poucos**" –, além de criar condições para a inserção dos alunos em um mundo marcado por mudanças sociais, econômicas, científicas e tecnológicas.

Procuramos também um projeto gráfico que proporcionasse um visual mais arejado e que tornasse a leitura dos textos mais eficiente, o que contribui para uma melhoria no aprendizado.

A abordagem dos conceitos é feita em espiral, explorando os temas e retomando-os ao longo dos quatro livros desta coleção. Às seções já existentes, como **Leitura**, **Troquem ideias e resolvam**, **Revisão cumulativa e testes**, foram acrescidas as seções **Para refletir e responder**, **Desafio** e **Investigue e explique**. Dessa forma, estamos certas de que o interesse e o envolvimento dos alunos, quando instigamos sua curiosidade, desafiando-os com problemas, convidando-os a raciocinar e a resolvê-los, levarão a um melhor desempenho e ao gosto por essa disciplina, tão importante no mundo de hoje.

Esperamos que esta coleção contribua para desenvolver nos alunos uma postura que os leve a se tornarem solucionadores de problemas, formuladores de hipóteses e questões, para que tenham chance de vencer desafios com os quais certamente se defrontarão durante e após os estudos e que demandam a utilização do raciocínio e do conhecimento matemático.

Acreditamos que tanto os professores quanto os alunos conseguirão otimizar a proposta desta coleção e alcançarão os objetivos maiores – melhorar o **pensar**, o **falar**, o **escrever** e o **produzir** Matemática.

Críticas que possam enriquecer esta proposta são bem-vindas, para que, juntos, busquemos novos caminhos para o ensino e o aprendizado da Matemática.

As autoras

Sumário

O que apresentamos neste Manual

As orientações apresentadas neste Manual pretendem torná-lo um material de apoio prático e eficiente, claro e objetivo ao trabalho docente a ser desenvolvido não só em períodos de planejamento escolar, mas também ao longo do ano em sala de aula. Elas visam, também, contribuir para o desenvolvimento pedagógico do dia a dia do professor, esclarecendo os pressupostos metodológicos adotados, apresentando informações, textos de aprofundamento e sugestões de atividades que possam enriquecer o trabalho do professor.

As orientações foram organizadas da seguinte forma:

- Pressupostos metodológicos;
- Conteúdos deste Manual;
- Estrutura da obra;
- Blocos de conteúdos e orientações didáticas;
- Avaliação em Matemática;
- Conteúdos propostos em cada ano;
- Indicações para a formação continuada do professor;
- Resolução de algumas atividades.

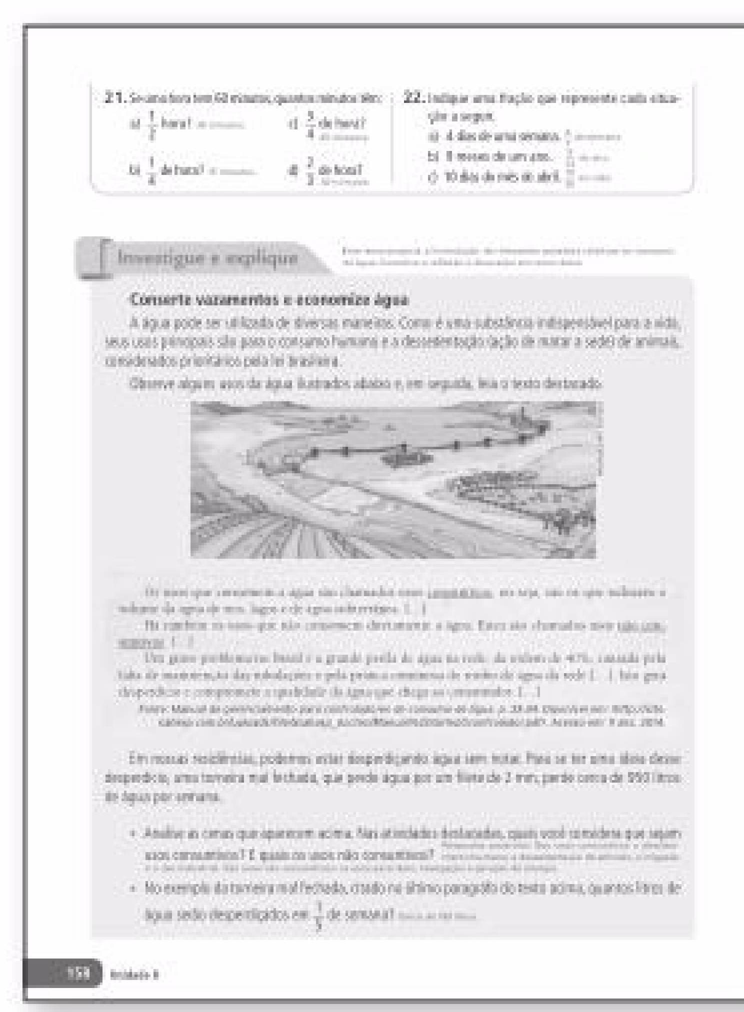
Pressupostos metodológicos

É consenso que não existe uma única metodologia identificada como a melhor para o ensino de qualquer disciplina e, em particular, da Matemática. Existem, sim, diversas possibilidades de trabalho em sala de aula. Mas, para que os alunos aprendam Matemática com significado, é importante que eles estabeleçam conexões entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento de maneira que possam mobilizar esses conhecimentos em situações escolares e no dia a dia.

Com esse propósito, esta coleção aborda temas relacionados a saúde, meio ambiente, sustentabilidade e pluralidade cultural, que são explorados e problematizados de forma a conduzir à reflexão, o que pode contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de exercício da cidadania.

A compreensão de questões sociais relacionadas à saúde, ao saneamento básico e às condições de trabalho, assim como o acompanhamento do próprio desenvolvimento físico, são alguns dos assuntos que poderão ser trabalhados para alcançar tal objetivo. É muito importante também o conhecimento de problemas envolvidos em questões ambientais, pois isso proporciona a conscientização e uma visão mais clara deles, além da tomada de decisões e de possíveis intervenções.

Esses temas, em geral, podem ser extraídos de jornais, revistas, internet e ampliados de acordo com o interesse dos alunos. Convide-os a selecionar os temas, permitindo que assumam responsabilidades e atuem de forma participativa, opinando, resolvendo conflitos e propondo possíveis soluções para os problemas encontrados.



Esta coleção procura desenvolver uma metodologia que almeja ser eficaz e atual, tanto em relação aos **conteúdos** do 6º ano ao 9º ano, quanto em relação à **abordagem metodológica** e às **atividades propostas**. Essa metodologia procura contemplar as necessidades dos alunos, tendo como pressupostos básicos os conhecimentos matemáticos e não matemáticos de que dispõem.

Espera-se que os alunos caminhem em direção a um processo constante de elaboração e reelaboração de conceitos, descoberta e redescoberta de conhecimentos matemáticos e de desenvolvimento de competências para analisar um problema ou desafio e tomar as decisões necessárias à sua resolução.

Com a elaboração e a reformulação desta coleção, procura-se responder a algumas questões:

- Qual Matemática é significativa na aprendizagem?
- O que é relevante no processo ensino-aprendizagem?
- Qual o encaminhamento metodológico?

Qual Matemática é significativa na aprendizagem?

A coleção tem como pressuposto que o conhecimento é resultado da compreensão e da vivência. Além disso, a Matemática também é resultado da resolução de situações-problema.

Os acontecimentos ao longo da história das ciências mostram que a produção teórica tem suas raízes nos problemas que surgem na prática, no dia a dia.

Atualmente, muitos matemáticos produzem conhecimentos puramente teóricos, mas não resta dúvida de que, muitas vezes, esses conhecimentos também subsidiam as soluções práticas, ainda que para o aluno isso venha a ocorrer apenas no futuro.

Um dos objetivos deste trabalho é a formação de um indivíduo autônomo, que externe suas opiniões e seja criativo, fruto da sua **capacidade** de pensar, raciocinar e resolver problemas. Busca-se a formação de um indivíduo que se apropria de um conhecimento matemático e usa esse conhecimento para **ler** o mundo à sua volta, **interferir** positivamente nesse mundo, **produzir** novos conhecimentos e também – por que não? – **produzir Matemática**, pois a Matemática tem pontos de conexão com todas as áreas do conhecimento humano, sejam elas de natureza física ou social.

O que é relevante no processo ensino-aprendizagem?

Partindo da premissa de que cabe ao professor pensar o planejamento didático das atividades e a avaliação do trabalho, em suas circunstâncias específicas, a coleção apresenta uma proposta metodológica em que:

- a técnica é desenvolvida com o apoio da **compreensão** e da **construção** dos procedimentos e conhecimentos matemáticos, aliadas a uma proposta metodológica que pode ser adequada a cada realidade;
- a resolução de problemas tem um destaque especial por meio da resolução de desafios e situações-problema;
- investe-se no desenvolvimento de algumas **ideias fundamentais**, como:
  - **padrões, regularidades e generalizações** – padrões que se repetem em fenômenos físicos, nas formas geométricas, em números e na Álgebra, resultando em propriedades matemáticas;
  - **proporcionalidade** – fundamental na análise da interdependência da variação de uma grandeza em relação a outra, em ampliações e reduções de figuras, mapas, plantas e especificamente no estudo da semelhança entre figuras;
  - **equivalência** – presente no estudo de números racionais, de equações, de áreas ou de volumes de figuras planas ou espaciais;
  - **ordem** – referência básica nos conjuntos numéricos, na construção de algoritmos, na representação geométrica de números;
  - **combinatória** – aparece especificamente na abordagem do princípio multiplicativo, nos problemas de contagem e de combinação. É um estudo inicial do bloco Estatística e Probabilidade.

Além disso, é recomendação atual que os alunos aprendam a **linguagem matemática** e seus **símbolos** e desenvolvam um procedimento de **comunicação de ideias matemáticas** por meio deles. Esse é um pressuposto básico que deverá compor qualquer planejamento conectado às tendências atuais em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Qual o encaminhamento metodológico?

Uma listagem de conteúdos por ano não garante a apreensão desses conteúdos por parte da maioria dos alunos. Assim, a coleção apresenta uma proposta que poderá complementar o que já é feito em sala de aula, pois é possível adaptar à sua realidade.

Além disso, empregando uma linguagem simples e acessível, propõe um tratamento diferenciado tanto para os novos conteúdos como para os tradicionais, como os pontos destacados a seguir.

PROBLEMAS E OPERAÇÕES – cada tema é introduzido com a proposta de uma ou mais situações-problema, que têm como objetivo despertar o interesse do aluno para o assunto. Esse é um momento de socialização do conhecimento e de participação ativa do aluno na construção dos conceitos. Sempre que possível, são situações-problema que fazem parte da realidade dos alunos e que poderão ser adaptadas de acordo com a classe.

Assim, exploramos o significado das operações de várias maneiras.

Ao estudarmos os números naturais ($\mathbb{N}$), sistematizamos o conhecimento que os alunos adquiriram nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No trabalho com números inteiros ($\mathbb{Z}$), utilizamos a representação geométrica na reta numerada como auxiliar na compreensão e construção das regras de sinais das operações, a partir de situações-problema concretizadas por essa representação.

No estudo dos números racionais ($\mathbb{Q}$), recorremos à composição e à decomposição de figuras, enfatizando o todo-referência ou inteiro, fundamental para a compreensão das novas regras de cálculo com números racionais na forma de fração. Damos destaque especial à multiplicação e à divisão, em que apenas regras sem o significado não resultam em aprendizagem. Não há necessidade de enfatizar cálculos trabalhosos com a forma de fração, mas é preciso um trabalho mais longo e profundo com a escrita numérica decimal. Isso é decorrente do desenvolvimento da tecnologia nos tempos atuais.

Iniciamos o estudo dos números reais (ℝ) com a exploração do teorema de Pitágoras, em uma proposta que percorre o caminho histórico do surgimento dos números irracionais. Recorremos mais uma vez à representação geométrica na reta numerada de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

GEOMETRIA E MEDIDAS — mereceram um tratamento exploratório e bastante intuitivo no início e uma sistematização gradativa dos conceitos e das propriedades, visando a uma formalização ao longo dos quatro livros. Exploramos inicialmente objetos e formas do espaço e mais tarde trabalhamos com a Geometria Euclidiana Plana, sem explicitar os axiomas. É uma proposta na qual as propriedades surgem de um trabalho empírico que tem como pressuposto o axioma da medição.

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE — foram abordadas, no início, partindo dos conhecimentos que os alunos possuem sobre o assunto, adquiridos por intermédio dos meios de comunicação. Em cada volume, esse conteúdo foi distribuído e interligado aos conteúdos propostos e às questões relacionadas aos Temas Transversais, como políticas públicas de saúde e educação, questões ambientais, consumo, migração e família.

O conteúdo foi desenvolvido de modo que os alunos percebam a importância desse tema atualmente, uma vez que favorece a integração com outras áreas e disciplinas.

ÁLGEBRA — iniciamos com a Pré-Álgebra no livro do 6º ano e a abordamos de forma gradativa a partir do volume do 7º ano, quando os alunos estão mais preparados para compreender e trabalhar uma Matemática mais formal. Demos ênfase à Álgebra como **generalização** da Aritmética, como **ferramenta** importante na resolução de problemas usando equações como **linguagem** que expressa com precisão o desenvolvimento do raciocínio no processo de resolução de um problema. É importante lembrar que o ser humano levou muitos séculos para generalizar a Aritmética e criar a Álgebra, mas, depois que ela foi criada, houve um grande avanço na Matemática e nas demais ciências.

CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVAS, ARREDONDAMENTOS E APROXIMAÇÕES — são abordados para oferecer aos alunos instrumentos e procedimentos de cálculo nas situações mais variadas do dia a dia e, também, para que possam desenvolver e sistematizar estratégias de verificação e controle de resultados. Pela diversidade dos caminhos possíveis, o uso frequente de procedimentos de cálculo mental, estimativas, arredondamentos e aproximações permite que os alunos desenvolvam ferramentas para manipular as propriedades das operações, apropriar-se delas e desenvolver instrumentos necessários às aquisições mais formalizadas.

Esperamos que esta proposta lhe permita — tendo diagnosticado sua realidade — aprofundar todas as ideias ou dar prioridade a uma em relação a outra. Cabe a você, professor, dirigir sua prática de sala de aula, tendo esta coleção como um material didático dentre outros, para que possa contribuir no processo de construção do conhecimento matemático dos alunos.

O conteúdo deste Manual

Aulas tradicionais versus *alunos sujeitos de sua aprendizagem*

Além das observações pedagógicas indicadas no Livro do Professor, expomos neste Manual:

- **estrutura da obra**, em que apresentamos cada seção do livro com comentários sobre suas funções;
- **blocos de conteúdo** e **orientações didáticas**, em que são abordados em espiral os temas desenvolvidos, ou seja, retomando-os várias vezes em níveis diferenciados de aprofundamento. Acreditamos que dessa forma os alunos poderão elaborar e reelaborar os conceitos, aprimorando seus conhecimentos matemáticos. Expomos, também, comentários sobre os pressupostos teóricos e algumas indicações metodológicas que poderão ser utilizadas com sucesso;
- **avaliação em Matemática**, em que apresentamos concepções teóricas e práticas sobre o tema, dentro de uma visão atual;
- **conteúdos propostos em cada ano,** em que sugerimos as expectativas de aprendizagem para cada unidade; orientações didáticas; resolução das seções **Desafios**, **Troque ideias e resolva, Investigue e explique**; textos de aprofundamento; sugestões de atividades complementares com subsídios específicos que esperamos que se somem ao seu trabalho;
- **indicações para a formação continuada do professor** e **contribuições para a ação em sala de aula**. Pensando na formação do educador como um processo que não termina com a graduação, mas se constitui em um contínuo aperfeiçoamento, recomendamos algumas obras de referência que contribuirão para sua prática de ensino, bem como algumas leituras complementares para os alunos.

Estrutura da obra

Para viabilizar esta proposta, cada volume da obra é composto por unidades: no volume 6, por exemplo, existem 12 unidades. Cada unidade começa com uma abertura em página dupla. De modo geral, na página par é apresentada uma imagem e a página ímpar é composta por um pequeno texto, ambos relacionados ao assunto que será desenvolvido, e a seção "O que você já sabe?".

No decorrer dessas unidades, os assuntos foram agrupados em **capítulos** e você encontrará as seções a seguir:

- Para refletir e responder
- Fazer e aprender
- Usando a calculadora
- Investigue e explique
- Troquem ideias e resolvam
- Exercícios complementares
- Desafio
- Leitura
- Revisão cumulativa e testes

Primeira seção de cada unidade

A seção **O que você já sabe?** é proposta na página ímpar após um pequeno texto e apresenta questões que têm como objetivo principal proporcionar espaço para que os alunos explicitem conhecimentos de que dispõem sobre o tema que será tratado ao longo da unidade. Essa seção poderá ser desenvolvida oralmente em forma de painel de discussões. Esse momento propicia um diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos e, por consequência, um ajuste do seu planejamento, caso seja necessário.

Desenvolvimento dos conceitos

De modo geral, os conceitos matemáticos são abordados por meio de situações-problema que envolvem temas do dia a dia em uma seção denominada **Para refletir e responder**. Acreditamos que, dessa forma, propiciam-se a reflexão e a discussão sobre o conceito em questão. As resoluções desses problemas constituem o ponto de partida para a construção dos conceitos.

Em um primeiro momento, os alunos são convidados a opinar sobre as situações propostas. Se preferir, peça aos alunos que leiam os problemas com antecedência em casa, ou que façam uma leitura silenciosa em sala de aula, e depois promova uma discussão, encerrando com uma síntese do tema tratado.

Em seguida, o aluno encontrará um pequeno texto, escrito em uma linguagem clara e acessível, com as conclusões sobre o conceito que foi abordado.

Acreditamos que melhorar a capacidade de ler, interpretar e resolver problemas faz parte da construção do conhecimento matemático, além de contribuir para o desenvolvimento da comunicação de ideias matemáticas. Além disso, explorar assuntos do interesse dos alunos despertará sua curiosidade, envolvendo-os na busca por novos conhecimentos e enriquecendo os já adquiridos.

Vamos lembrar que, nessa fase de aprendizagem, os conceitos matemáticos não são necessariamente expressos em uma linguagem formal, podendo-se usar um vocabulário mais próximo e acessível, sem abrir mão do rigor matemático necessário. Além disso, esses conceitos serão retomados e consolidados ao longo do período escolar.

Fazer e aprender

Nessa seção, apresentamos exercícios de fixação, de aplicação da teoria estudada e atividades dispostas em grau crescente de complexidade.

Sempre que possível, acompanhe os alunos no momento em que estiverem resolvendo essas atividades e problemas. Dessa observação resultarão indicadores dos avanços quanto à apropriação dos conhecimentos, que contribuirão para uma avaliação qualitativa e para o encaminhamento de seu trabalho.

Usando a calculadora

Nessa seção, a calculadora é utilizada como uma ferramenta de apoio para a resolução de atividades que envolvem problemas significativos, propostos com o objetivo de introduzir e consolidar conceitos e procedimentos.

Além de ser útil na resolução de problemas relacionados a situações reais, há outras vantagens no uso desse equipamento:

- constatar que o cálculo, por si só, não é importante, mas uma parte fundamental na resolução de um problema;
- explorar propriedades numéricas;
- observar padrões ou regularidades numéricas;
- utilizar diferentes métodos de cálculos numéricos, como na resolução de equações;
- possibilitar a comparação entre procedimentos e o levantamento de hipóteses.

Investigue e explique

Essa seção tem como objetivo principal explorar situações de natureza investigativa, em que os estudantes são solicitados a formular conjecturas sobre o que está sendo investigado.

"As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração".

Fonte: PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2006, p. 10.

A realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais:

- reconhecimento da situação;
- formulação de conjecturas;
- realização de testes;
- argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

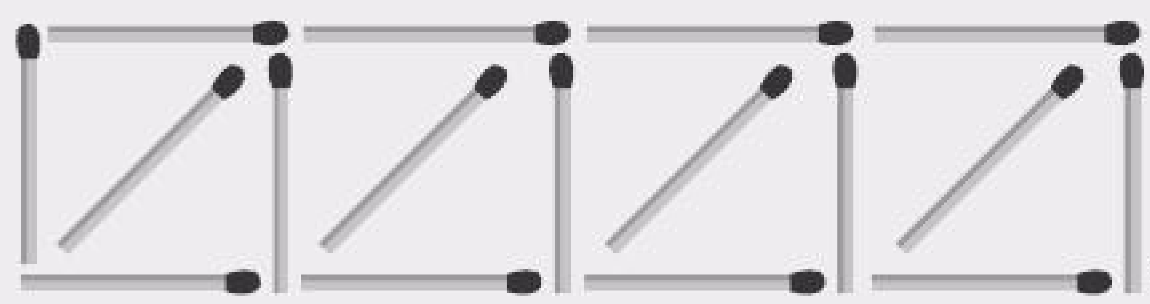
Veja um exemplo de uma situação de investigação com uma atividade proposta na página 19, do Volume do 6º ano.

Investigue e explique

Palitos e quadrados

Junte-se a um colega e reflitam sobre a questão a seguir:

Com 17 palitos de fósforo usados, pode-se montar quadrados com uma de suas diagonais como mostra a figura.


BIS

- Procedendo da mesma maneira, quantos quadrados como esses podem ser montados usando 85 palitos de fósforo? Expliquem como chegaram a esse resultado. Resposta possível: 21 quadrados.

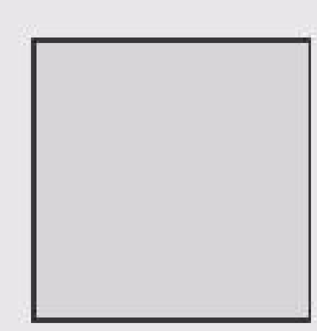
Troquem ideias e resolvam

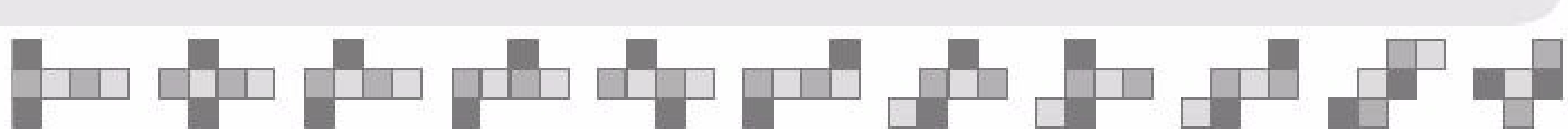
Essas seções aparecem intercaladas às atividades. Nelas, as atividades propostas assumem um caráter dinâmico e de socialização, uma vez que possibilitam uma discussão em grupo (ou com a classe) em que ocorram troca de conhecimentos e descobertas entre os alunos.

Um exemplo que ilustra essa seção pode ser visto na página 43 do volume do 6º ano.

Troquem ideias e resolvam

Junte-se a um colega e experimentem:

- Desenhem 6 quadrados em folhas avulsas e, usando a tesoura, obtenham recortes como este.

- Montem um cubo, utilizando os recortes. Usem fita adesiva para fechá-lo.
- Mudando a posição dos recortes quadrados, podemos obter diversas planificações do cubo. É possível obter 11 planificações diferentes.
- Desenhem, em uma folha quadriculada, todas as planificações possíveis de um cubo. Usem três cores em cada uma e pintem da mesma cor as faces opostas do cubo.



Exercícios complementares

Nessa seção, são propostos atividades e problemas que ampliam o estudo dos temas estudados, bem como questões de aprofundamento dos conteúdos tratados. Quando possível, eles estão inter-relacionados a outras disciplinas que aplicam conceitos da Matemática. Algumas atividades dessa sequência propõem situações novas que, para serem solucionadas, requerem que o aluno utilize conhecimentos já adquiridos em outras situações.

As atividades dessa seção poderão ser feitas em sala de aula ou em casa, individualmente ou em grupo, com intervenções adequadas sempre que necessário.

É importante ressaltar que a seção tem por função complementar as atividades desenvolvidas, contribuindo para que todos os alunos adquiram os conhecimentos fundamentais para cada ano, considerados imprescindíveis para a formação conceitual dos estudantes de Matemática.

Desafio

Na seção **Desafio** são propostas atividades de cálculo mental e estimativas, problemas não rotineiros, brincadeiras e jogos.

Os problemas não rotineiros costumam exigir dos alunos mais reflexão, suscitar discussões em sala de aula ou instigar a curiosidade e o interesse. As resoluções podem percorrer caminhos diferentes, às vezes surpreendentes. Observe as estratégias de seus alunos e socialize aquelas que achar interessantes.

Sugerimos que crie um programa "Problemas do Mês", por exemplo. Nesse caso, prepare-se para aceitar problemas que seus alunos trarão de outras fontes. Não se preocupe em ter as soluções prontas, pois haverá tempo para pesquisar e resolvê-los.

As atividades dessa seção são apropriadas para o trabalho em grupo.

Leitura

Nessa seção, tratamos de assuntos extracurriculares e interdisciplinares com temas que contam um pouco a história de pessoas que criaram a Matemática, os processos de construção dos conceitos matemáticos, lendas e fatos curiosos, além de mostrar as aplicações da Matemática nas demais ciências. Tratamos também de assuntos que envolvem Temas Transversais.

É conveniente planejar situações coletivas em que os estudantes possam expor e trocar interpretações sobre os textos lidos.

A seguir, algumas sugestões de abordagem dessa seção que poderão auxiliá-lo.

Solicite aos alunos que façam:

- Leitura em grupo na sala de aula, seguida de ampla discussão com a classe.
- Leitura em casa.
- Leitura complementada por anotações resultantes de pesquisas em revistas, jornais, livros e na internet e desenvolvimento de amplo painel em sala de aula ou exposição dos resultados das pesquisas realizadas.
- Leitura complementada por palestras, vídeos ou visitas a exposições e museus.
- Leitura e aprofundamento do tema tratado, fazendo um trabalho integrado com outras disciplinas.

Seguem comentários sobre alguns temas abordados ao longo dos quatro volumes desta coleção, nas seções **O que você já sabe?, Desafio, Leitura, Troquem ideias e resolvam** e **Investigue e explique**.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Matemática faz parte da história do ser humano, pois foi construída por ele ao longo dos séculos e está viva e em constante transformação. Ao revelar a Matemática como construção do ser humano ao longo da história da humanidade, e não como um conhecimento pronto e acabado, mostrando as várias necessidades e preocupações de diversas culturas, em diferentes momentos históricos, são criadas condições para uma aprendizagem mais significativa por parte dos alunos.

Assim, a História da Matemática pode ser usada em sala de aula, destacando-se as relações existentes entre ela e as outras ciências. Por exemplo, na arte, na cultura e na vida dos povos, podemos observar:

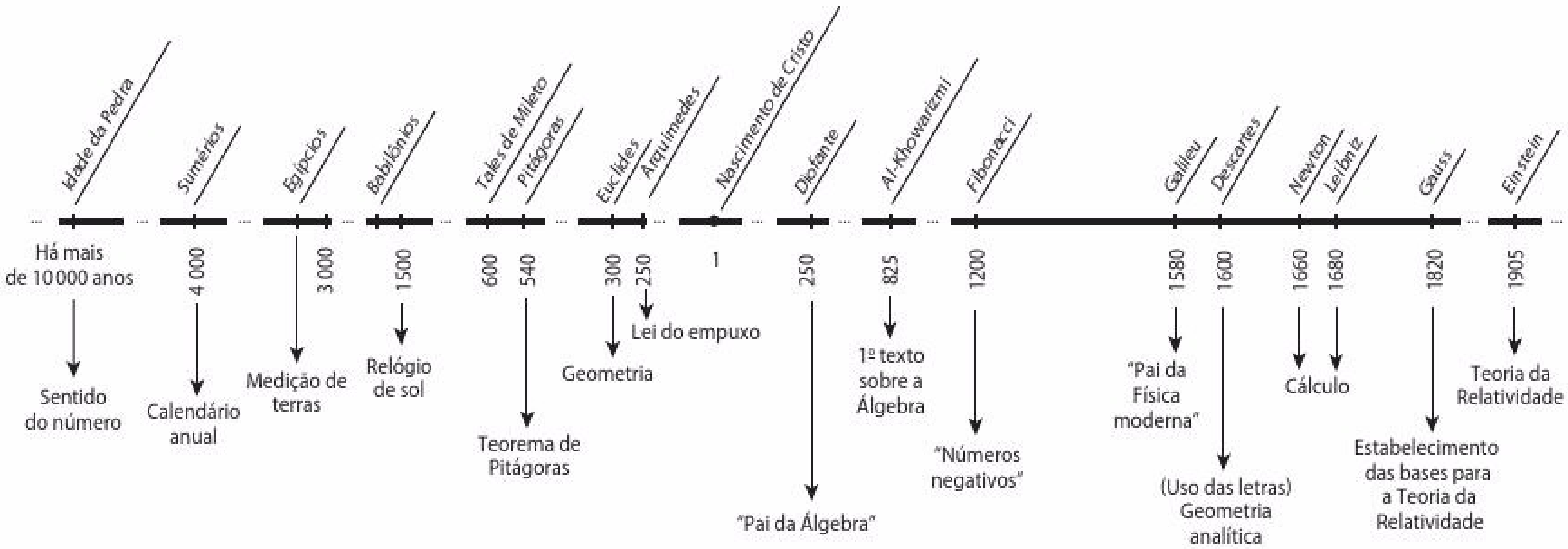
– os conhecimentos de Geometria na época das construções de templos e pirâmides;

– o uso das razões áureas pelos gregos e na arte renascentista;

– a utilização da Astronomia para a elaboração de calendários e para o planejamento das viagens marítimas etc.

Dessa forma, a abordagem por meio da História da Matemática pode contribuir para motivar os alunos a observar o modo como se deu a evolução das ideias matemáticas e procurar reproduzir nas aulas como ocorreram as passagens dessa evolução. Afinal, a Matemática é construída continuamente pelos alunos a cada novo aprendizado.

Veja o desenvolvimento do conhecimento matemático na linha do tempo a seguir:



- **"É preciso contar: filhos, ovelhas, objetos"** – o ser humano inventou o número e um processo rudimentar de contagem – é o começo da Matemática.
- **Há 5 000 anos – Egípcios** – As frequentes enchentes no rio Nilo fizeram com que fosse necessária a criação da medição de terras: é o começo da Geometria. Era uma Geometria preocupada apenas com as aplicações práticas.
- **Durante muitos séculos, a Aritmética** – a "ciência dos números" – **e a Geometria** – a "ciência das formas" – desenvolveram-se por meio de **padrões**, isto é, estudando as regularidades dos **fenômenos físicos**, das **formas** e das **ideias**, e foram os dois grandes eixos da Matemática.
- **Há mais de 3 000 anos**, os babilônios dividiram o ano em 360 dias. Para os egípcios, um ano tinha 365 dias. O ano bissexto, a cada quatro anos, surgiu mais tarde no calendário egípcio.
- **1500 a.C.** – já se conhecia o relógio de sol: era possível medir o movimento aparente do Sol observando a sombra de um pedaço de madeira colocado verticalmente no chão.
- **600 a.C. – Tales de Mileto**, vendedor de azeite e grande matemático, foi o primeiro grego a pensar uma Geometria que trilhasse o **caminho da abstração**, das **demonstrações** e da **dedução lógica**.
- **540 a.C. – Pitágoras**, discípulo de Tales de Mileto, deixou grandes contribuições à Geometria e à Matemática, desde o fundamento das escalas musicais até o teorema de Pitágoras, além de uma descoberta que ele mesmo e a escola que ele fundou tentaram ignorar: o número irracional.
- **300 a.C. – Euclides**, de Alexandria, o grande mestre da Geometria, reuniu pela primeira vez os conhecimentos existentes sobre a Geometria e os organizou, estabelecendo seus axiomas e postulados e demonstrando seus teoremas, realizando, assim, o sonho de Tales de Mileto.
- **250 a.C. – Arquimedes**, de Siracusa, fez descobertas tão fantásticas e criativas que é considerado o "pai da Engenharia prática". Calculou o volume da esfera, formulou a Lei do empuxo, a Lei das alavancas, os métodos para determinar o centro da gravidade de um corpo, entre outros feitos.
- **Ano 1 – Nascimento de Cristo**.
- **250 – Diofante**, matemático grego, foi o primeiro a abreviar sistematicamente seu pensamento com símbolos matemáticos, por meio de equações. É considerado o "pai da Álgebra".
- **825 – Al-Khowarizmi**, matemático árabe, além de divulgar a escrita numérica decimal, que usamos hoje, escreveu o primeiro texto sobre a Álgebra – uma Álgebra que já havia sido vislumbrada pelos egípcios há mais de 4 000 anos.
- **1200 – Fibonacci (Leonardo de Pisa)**, matemático italiano, desvendou os "mistérios dos números negativos". Admitiu a existência desses números como soluções de problemas que envolviam lucros e perdas.
- **1580 – Galileu Galilei**, astrônomo e físico italiano, nasceu em Pisa. Sua grande contribuição à Ciência foi ter resgatado o método experimental, muito utilizado nos tempos de Arquimedes. É considerado por muitos o "pai da Física moderna". Seus estudos contribuíram decisivamente para as invenções do telescópio, do termômetro, do relógio de pêndulo etc. Fez grandes descobertas no campo da Astronomia e defendeu a teoria de Copérnico, na qual ele afirma que "a Terra não é o centro do universo".
- **1600 – René Descartes**, filósofo e matemático francês, criou a notação de potência. Seu grande mérito foi unir a Aritmética, a Álgebra e a Geometria em um único campo de estudo – a **Geometria Analítica** –, o campo da representação dos números por meio de pontos em um plano, com a conversão de equações em gráficos e gráficos em equações. A partir disso, não houve mais limites para a produção do conhecimento matemático e da tecnologia: a Análise, o Cálculo, a Probabilidade, a Estatística, outras geometrias, a energia atômica, os computadores etc.
- **1660 – Newton**, físico inglês, produziu uma das ideias mais fantásticas – o **Cálculo** –, que pela primeira vez permitiu medir e analisar os movimentos e as mudanças constantes de um mundo onde "nada escapa às mudanças". Elaborou as **Leis dos movimentos e da gravitação**, fundamentais na Física, e definiu a **aceleração** nos processos que envolvem movimentos físicos.
- **1680 – Gottfried Leibniz**, matemático alemão, foi um gênio em várias áreas do conhecimento. Publicou sua versão do **Cálculo**, em 1684, sem conhecer os trabalhos de Newton.

- **1820** – **Carl Friedrich Gauss**, gênio alemão, dominou a Matemática do século XIX e, segundo alguns estudiosos, foi o "último gênio a dominar todas as matemáticas". Inovou na Análise e na Geometria e estabeleceu as bases para a **relatividade** e a **Teoria Atômica** do século XX. Inventou o telégrafo, junto com Weber, e cerca de dois anos antes de Morse. Encheu páginas e páginas de seus cadernos com uma Matemática de criação própria.
- **Por volta de 1900** – **Albert Einstein**, nascido na Alemanha, é considerado um dos maiores gênios da Física, "o fundador da Física moderna". Baseou-se nas ousadas ideias de Gauss e Riemann e produziu sua **Teoria da Relatividade** para descrever o universo real: "o tempo, o tamanho e o peso não são constantes, mas variam de acordo com a velocidade". Sugeriu, também, um universo com quatro dimensões, em que o **tempo** é a quarta dimensão. Criou a famosa equação da energia nuclear, $\mathbf{E = mc^2}$, em que "a energia **E**, em uma porção de matéria, é igual à massa **m** multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz, **c**".
- **Do final do século XIX até os dias de hoje** – o ritmo da evolução das ciências foi tão fantástico que fica difícil citar apenas alguns gênios, pois são muitos os grandes: Jules Henri Poincaré, que estudou sobre probabilidade e equações diferenciais; David Hilbert, que estudou espaços abstratos; Giuseppe Peano, que fundou o simbolismo formal; além de outros nomes, como Augustin Louis, Cauchy, Bernard Bolzano, Georg Cantor e Kurt Gödel, por exemplo.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Nesta coleção, a comunicação de ideias matemáticas foi feita de forma gradual e contextualizada. Diante das preocupações com a linguagem e a notação matemática, há a necessidade e a importância de os alunos compreenderem a notação científica, presente em textos e artigos que tratam de assuntos das ciências.

A necessidade de operar com números que, comparados com a unidade, são muito grandes ou muito pequenos e a inconveniência de representá-los com uma notação com muitas casas decimais levaram os cientistas a utilizar a notação científica. É uma forma de representação que usa um número entre 0 e 10 multiplicado por uma potência de base 10, que representa qualquer número real. Essa representação é vantajosa, pois ocupa menos espaço, elimina a necessidade de contar zeros e facilita os cálculos.

DESENHO GEOMÉTRICO

Além de sua contribuição no estudo da Geometria, o desenho geométrico é uma ferramenta importante para profissionais que, por exemplo, fazem projetos, desenham plantas e representam muitos objetos.

A construção de figuras geométricas requer o uso de materiais de desenho como régua, esquadro e compasso. Nesta coleção, são apresentadas diferentes atividades em que são necessários esses materiais, o que favorece a construção pelo aluno dos conceitos relacionados às noções básicas necessárias à aprendizagem de Geometria, além dos aspectos lúdicos que envolvem esse tipo de atividade.

CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVAS, ARREDONDAMENTOS E APROXIMAÇÕES

Os alunos podem se tornar aptos a efetuar rapidamente cálculos aproximados, medir, verificar se uma solução é razoável, examinar conjecturas ou tomar decisões, desenvolvendo habilidades de cálculo mental e recursos de estimativa.

Com isso, eles aprendem a conferir e validar suas respostas aos problemas. Às vezes, devido a erros aritméticos ou de outra natureza, os resultados de um problema matemático podem ser interpretados de forma equivocada.

Por meio de cálculo mental, estimativas, aproximações e arredondamentos, os alunos poderão rever os cálculos, constatar se as respostas são coerentes e decidir quando um resultado específico é suficientemente preciso para o objetivo desejado. Ao valorizarmos o hábito de verificar e controlar os resultados, podemos ajudá-los a ter confiança em suas possibilidades e a desenvolver a capacidade de perseverança na busca de resultados e uma postura crítica diante deles. Dessa maneira, conduzimos os alunos a um melhor desempenho em Matemática.

REGULARIDADES, PADRÕES NUMÉRICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS – GENERALIZAÇÕES

A importância do trabalho com padrões e com a observação de regularidades é reconhecida pela sua contribuição na construção do conceito de número, dos conceitos geométricos e na apreensão das propriedades numéricas e geométricas. O trabalho com regularidades também representa uma estratégia útil e difundida de resolução de problemas. Explorar sequências numéricas é um caminho para introduzir a Pré-Álgebra, assim como observar padrões geométricos facilita a compreensão dessa parte da Matemática devido ao apelo visual. Modificar e estender os padrões são atividades que ajudam no desenvolvimento da Álgebra.

À medida que os alunos buscam regularidades, eles aprendem a fazer suas próprias investigações sobre os conceitos matemáticos, ensaiam possíveis organizações e tentam verificar se elas são válidas em todos os casos.

A descoberta de regularidades, a análise e o uso de padrões tornam disponíveis aos alunos recursos que permitem formular leis gerais em um processo de busca de generalizações.

Nesta coleção, há uma preocupação em atender a todos esses aspectos, o que é feito de modo significativo ao longo dos quatro volumes. Atividades com esses objetivos serão encontradas em diferentes seções, em especial na seção **Investigue e explique**, e em atividades que envolvem a observação e a criação de padrões de repetição numéricos ou geométricos.

Essas atividades são bastante criativas e enriquecedoras na medida em que os alunos participam, criam seus próprios padrões e os associam a mosaicos e às sequências.

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

A resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática. Conceitos, ideias e procedimentos são abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. São situações que estimulam a curiosidade e a investigação, possibilitando que eles utilizem experiências anteriores e que adquiram novos conhecimentos ampliando, dessa forma, os que já possuem.

Resolver problemas é uma atividade complexa que envolve a coordenação de conhecimento, experiência anterior, intuição e confiança, entre outras habilidades. Não se reduz ao uso específico de um algoritmo pelo qual os alunos seguem regras preestabelecidas para chegar à solução. Envolve habilidades fundamentais como a capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler ideias matemáticas, interpretar significados e pensar de forma criativa.

Nesta coleção, são propostos problemas que fazem parte do dia a dia dos alunos: alguns de aplicação imediata dos conceitos e procedimentos abordados, outros relacionados a vários conceitos e procedimentos já estudados, além dos problemas não convencionais. Estes se caracterizam como diferenciadores e têm extrema relevância no processo de aprendizagem, pois desenvolvem a capacidade de planejar e elaborar estratégias variadas, permitem que os alunos aceitem as diversas soluções dos colegas e compreendam a lógica de outras soluções.

APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS

Nos diferentes meios de comunicação, são comuns assuntos que envolvem conceitos e procedimentos matemáticos, como problemas de economia, gastos com produção, despesas e lucros, comparação de preços cobrados em lojas e dados estatísticos.

Temas como Meio Ambiente, Saúde e Educação podem ser utilizados para envolver os alunos na discussão de problemas sociais e provocar sua mobilização em busca de soluções.

Muitas vezes, essas buscas incentivam os alunos a aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos, favorecendo a interdisciplinaridade.

Sabemos que a instrumentação para a vida depende, em uma democracia, de uma preparação para o pleno exercício da cidadania e, para isso, é necessário desenvolver a capacidade de analisar e interpretar dados estatísticos, possuir noções de Economia, resolver situações de conflito e ser capaz de tomar uma decisão. Nesse sentido, esta coleção é permeada por problemas que possibilitam essas discussões e o desenvolvimento dessas habilidades.

ATIVIDADES LÚDICAS E JOGOS

Atualmente, tem-se dado relevância às atividades lúdicas e aos jogos no ensino e na aprendizagem da Matemática. Nessas atividades, os alunos passam a lidar com regras que lhes permitem a compreensão do conjunto de conhecimentos veiculados socialmente, fornecendo-lhes novos elementos para apreenderem os conhecimentos futuros. Os jogos favorecem o aprendizado, pois sabemos que, ao brincar, os alunos apreendem a estrutura lógica do material e, desse modo, a estrutura matemática presente.

As atividades lúdicas e os jogos também favorecem o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Eles dão aos alunos a oportunidade de estabelecer um plano de ação para atingir determinados objetivos, executar jogadas segundo esse plano e avaliar a eficácia dessas jogadas nos resultados obtidos.

Algumas atividades lúdicas e alguns jogos realizados em grupo privilegiam o tratamento de aspectos afetivos e podem contribuir para a formação de atitudes que valorizam o trabalho coletivo.

Revisão cumulativa e testes

Seção apresentada ao final de cada unidade com o objetivo principal de rever conteúdos estudados em unidades anteriores, na própria unidade e até mesmo em anos anteriores. As questões são apresentadas em duas formas: discursivas e testes. A proposição de testes tem como objetivo principal preparar os alunos para os vários tipos de avaliação a que são submetidos, atualmente, nos sistemas educacionais municipais, estaduais e nacional.

O livro do aluno não traz as respostas desses testes, o que possibilita seu uso para avaliação. Essa coleção de respostas se encontra nas últimas páginas do Manual.

Blocos de conteúdo e orientações didáticas

Ao longo dos quatro livros da coleção, são abordados os blocos de conteúdos:

- Números e Operações;
- Geometria;
- Grandezas e Medidas;
- Álgebra;
- Estatística e Probabilidade.

Números e Operações

Qual é a idade da nossa linguagem numérica?

É quase impossível responder a essa pergunta. Existem muitos indícios de que ela é milhares de anos mais antiga que a linguagem escrita: a gênese do número perde-se nas idades pré-históricas.

Em algum momento da História, o ser humano aprendeu a **contar**, e foi a **contagem** que produziu extraordinários efeitos na evolução dos conhecimentos científico e não científico acumulados ao longo do tempo. Os números constituem ferramentas fundamentais nessa evolução.

As pessoas estão cercadas de números: número da cédula de identidade, horário de trabalho, estatísticas diversas, impostos, distâncias, velocidade do automóvel, recordes de jogos etc.

Os números são empregados em diversas situações e também têm diferentes finalidades. As principais funções dos números são: **contar**, **medir**, **ordenar** e **codificar**. Para responder à pergunta "Quantos alunos há na sala?", utilizamos um **número cardinal** depois de realizar a **contagem**. O resultado de algumas **medidas** também é expresso com números cardinais: distâncias entre cidades, capacidades etc.

Já a posição dos pilotos vencedores de uma corrida automobilística é indicada com **números ordinais**.

Os números são empregados ainda como **código** e, nesse caso, podem identificar pessoas ou objetos. Esses números não expressam necessariamente uma quantidade, são números convencionais. Por exemplo, os números das placas dos automóveis, os números de telefones, os números de documentos de identidade, os números das contas bancárias e os códigos de barras.

Ao longo dos quatro livros desta coleção, organizamos os números dentro de uma estrutura (não explícita) de conjuntos numéricos, partindo dos números naturais até chegar aos números reais. Da contagem resultaram os números naturais, da medição resultaram os números racionais e os reais e da formalização das operações surgiram os números inteiros, formando os quatro conjuntos numéricos que estudamos no Ensino Fundamental e Médio.

O objetivo é fazer com que os alunos percebam uma extensão do conceito de número, adquirido ao longo dos anos iniciais de estudo, e a ampliação que se faz de um conjunto numérico para outro. Nessas ampliações, mantêm-se as propriedades já estudadas em cada conjunto numérico, e cada um deles é inserido em outro, como subconjunto.

Com essa abordagem, esperamos que os alunos construam o conceito de número, compreendam o Sistema de Numeração Decimal, construam os algoritmos, desenvolvam as habilidades com o cálculo escrito, o cálculo mental e o uso da calculadora, aprendam a estimar resultados e desenvolvam habilidades para resolver problemas.

Os procedimentos de cálculo permitem que os alunos os percebam como ferramentas na resolução de problemas, enquanto as atividades numéricas proporcionam ocasiões para o desenvolvimento de algumas estratégias gerais.

Esses temas são ampliados quanto à abordagem e à profundidade ao longo dos quatro livros da coleção. Alguns deles serão sistematizados até o final do Ensino Fundamental.

Os itens a seguir fornecem elementos para poder esclarecer os alunos quanto à importância do tema e das habilidades numéricas, geométricas e algébricas à medida que forem adquiridas. O objetivo é levar os alunos a ampliar as aplicações dessas habilidades no dia a dia.

O estudo das propriedades das operações propõe levar os alunos a descobrir as regularidades, em procedimentos (compor e decompor, arredondar, estimar) e na aplicação de estratégias de cálculo mental e escrito, sem dar ênfase à nomenclatura.

Ainda nesse tema, tratamos das operações com números inteiros, números racionais nas formas fracionária e decimal, números irracionais na forma de radical, sugerindo-se que leve em conta o ritmo e as experiências dos alunos.

Os problemas propostos nesta coleção são variados e exploram os diferentes significados das operações, além de possibilitar o reconhecimento das relações entre os diferentes tipos de números e entre as diversas operações.

Além do cálculo escrito, que favorece a compreensão dos algoritmos e das propriedades, destaca-se o cálculo mental, que está diretamente ligado a aspectos da vida cotidiana, assim como a estimativa, que permite fazer previsões e tomar decisões.

Nessas situações, é conveniente que os alunos saibam usar outros recursos, como as calculadoras, para auxiliá-los na análise e checagem de resultados e na resolução de problemas com dados reais que, de modo geral, são mais complexos, pois nem sempre trabalham com valores exatos. Pode-se, desse modo, usar o tempo que seria destinado aos cálculos para análise e discussão dos resultados.

Antecipando a introdução da linguagem algébrica, para que os alunos se sintam familiarizados com o sentido dos números e com o significado das operações, são propostas situações-problema para que eles identifiquem as operações estudadas, apliquem propriedades e determinem o elemento desconhecido, de modo que expressem a relação entre as operações.

Por exemplo:

$72 - 13 = \mathbf{n}$ quer dizer o mesmo que $13 + n = 72$ e

$21 : 7 = \mathbf{n}$ quer dizer o mesmo que $7 \cdot n = 21$.

Geometria

A Geometria é, inicialmente, o conhecimento imediato da nossa relação com o espaço. Começa com a visão e caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido, e os problemas colocados por esse conhecimento nos levam à construção gradativa do saber geométrico.

Esse bloco está estruturado de modo a articular percepção e concepção, construção e representação, considerando a importância de uma inter-relação desses aspectos.

São realizadas atividades de manipulação, que se iniciam com formas tridimensionais.

Observando e experimentando objetos do mundo físico, idealizam-se esses objetos como formas geométricas. Descobrem-se relações e adquire-se um sentido espacial ao construir, desenhar, medir, visualizar, comparar, transformar e classificar formas geométricas.

As atividades geométricas proporcionam contextos adequados para o desenvolvimento de habilidades, procedimentos e estratégias de caráter geral, a partir:

- da percepção espacial, que é a habilidade de se orientar no espaço e coordenar diferentes ângulos de observação de objetos no espaço;
- da habilidade de observação do espaço tridimensional e da elaboração dos meios (representações) de se comunicar a respeito desse espaço;
- de habilidades do raciocínio lógico e de argumentação, buscando responder a questões como "o que acontecerá se...", que ajudam a aprender a analisar um argumento e a reconhecer os argumentos válidos e os não válidos no contexto das formas geométricas e, por extensão, nos problemas da vida diária;
- de habilidades de desenho e representações geométricas, utilizando modelos para visualizar certas propriedades, analisar e resolver problemas. As interpretações geométricas podem contribuir para que se entenda melhor uma representação abstrata (simbólica).

A integração e a aplicação da Geometria em outros campos do conhecimento permitem instigar ideias e propor aplicações práticas para que possamos enfrentar problemas reais, em geral, de natureza interdisciplinar. O trabalho feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, escultura e artesanato possibilitará que os alunos estabeleçam conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

O estudo de Geometria por meio das **construções geométricas** é desenvolvido a partir da resolução de problemas e com o uso de vários instrumentos e operações. A construção de figuras geométricas requer a manipulação de materiais de desenho como régua, esquadro e compasso.

É possível que essa manipulação subsidie a construção dos conceitos da Geometria, não de uma maneira axiomática, mas a partir de uma proposta que se inicia empiricamente — medindo, experimentando, analisando — até chegar a um trabalho que exige um raciocínio lógico-dedutivo.

É uma proposta que não implica uma falta de rigor conceitual, mas que tem como pressuposto básico que o conhecimento é adquirido em uma elaboração e reelaboração constante dos conceitos, como revela a própria história da Geometria.

Também é abordada a Geometria das transformações, que trata das translações, rotações, reflexões, enfim, dos movimentos, das isometrias e das homotetias.

O conceito de **transformação geométrica** é trabalhado com ênfase na intuição e na verificação experimental de algumas conjecturas. O trabalho proposto não se resume à transmissão de postulados, teoremas e definições logicamente organizados, apresentados de forma dogmática, sem possibilidade de discussão; ele é significativo e funcional no dia a dia.

Grandezas e Medidas

Medida é uma importante aplicação de número. Medir é uma habilidade que se origina nas atividades comuns do ser humano e está presente no pensamento matemático. Medir **grandezas** tem por objetivo quantificar o mundo que nos rodeia.

As atividades com medidas propostas nesta coleção são desenvolvidas por meio de relações com a proporcionalidade, os conceitos geométricos, as noções numéricas e as representações gráficas, vinculando, assim, Grandezas e Medidas com Números, com Geometria e com Estatística e Probabilidade, de modo simultâneo.

O trabalho com medidas também é desenvolvido de forma a ampliar a noção de números. Os números racionais (na forma decimal ou fracionária) estão ligados às medidas. As frações surgiram há muitos séculos para expressar medidas que não podiam ser indicadas por números naturais.

Para os pitagóricos, as frações eram apenas relações de tamanho entre grandezas de mesma espécie, pois consideravam números apenas os inteiros. Acreditavam que, dadas duas grandezas quaisquer, sempre seria possível encontrar uma unidade de medida que coubesse um número inteiro de vezes nas duas grandezas, ou seja, para eles só existiam grandezas comensuráveis. Mais tarde, descobriram que existiam grandezas incomensuráveis, não importando até que ponto fosse pequena a unidade de medida.

Os matemáticos da Antiguidade foram capazes de fazer medições de grandes distâncias, semelhantes às que são realizadas hoje por cientistas com seus poderosos e sofisticados instrumentos, obtendo resultados que surpreendem por sua exatidão. Para isso, era utilizada uma ideia simples, porém brilhante: a semelhança de triângulos.

Desde o momento em que o ser humano sentiu a necessidade de efetuar medidas, tentou estabelecer sistemas que possibilitassem medir comprimento, massa e volume.

De início, não se media, apenas comparavam-se volumes, comprimentos e massas. Com a evolução da humanidade, as necessidades foram mudando e buscou-se uma padronização de unidades, caracterizando o desenvolvimento da noção de medir.

Para unidades de comprimento usava-se o "pé", a "polegada" e a "jarda", unidades que na época derivavam do tamanho das partes do corpo do rei de cada região.

Essas unidades de medida não eram comuns a todos: o pé do rei de determinado lugar podia ser maior ou menor que o pé do rei de outro lugar. Isso acarretava uma série de dificuldades que prejudicavam tanto o comércio entre povos como as comparações de dados científicos já conhecidos na época. Começava-se, então, a pensar em unidades de medidas que fossem bem definidas e reconhecidas mundialmente.

Surge dessa forma a necessidade de se trabalhar com unidades convencionais relacionadas ao problema da comunicação. Para efetuar uma medição, escolhe-se uma unidade de medida de mesma natureza da grandeza que se deseja medir. Somente grandezas de mesma natureza são comparadas em situações de medição.

Ao construírem as unidades padrão, os alunos precisam perceber que certos comprimentos, ou outros tipos de medida, não são mensuráveis com apenas uma única unidade e que a partir de uma poderão ser criadas outras. Assim, eles começarão a perceber a adequação das unidades de medida às grandezas que se deseja medir e a descobrir as equivalências entre as unidades criadas em um mesmo sistema de medida.

As atividades propostas também procuram explicitar as diferenças de natureza entre medidas de comprimento, massa, capacidade, tempo, superfície e volume e levá-los a justificar a necessidade da unidade padrão. Ao apresentar as unidades padrão para essas grandezas, são propostas situações que possibilitam aos alunos estabelecerem relações entre unidades de medida e empregarem múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais. Procure enfatizar apenas as unidades mais comuns no dia a dia dos alunos.

As habilidades para o uso de instrumentos apropriados para medir diversas grandezas vão se refinando gradativamente.

Álgebra

A Álgebra caracteriza-se pelo conjunto de conceitos, propriedades e procedimentos que empregam letras e expressões literais para estabelecer relações e realizar operações.

Nas expressões algébricas, as letras desempenham funções muito diferentes: podem representar um número qualquer, um número desconhecido, uma variável ou uma relação entre conjuntos de números ou símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. As funções das expressões algébricas estão relacionadas com as várias interpretações possíveis da Álgebra:

- Álgebra como generalização da Aritmética;
- Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas;
- Álgebra como estudo de relações entre quantidades;
- Álgebra como estudo das estruturas.

O uso das letras facilita pensar em ideias matemáticas e permite representar, para qualquer número, ideias ou relações que valem para números específicos. Por exemplo, sabemos que, se $10 + 6 = 16$, então $16 - 6 = 10$ ou $16 - 10 = 6$. Se usarmos **a**, **b** e **c** para representar quaisquer números, poderemos dizer que, se $a + b = c$, então $c - b = a$ ou $c - a = b$.

Em Aritmética, buscamos respostas numéricas particulares; em Álgebra, procuramos estabelecer procedimentos e relações e expressá-los em uma forma geral.

Na concepção da **Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas**, o tema central é a resolução de equações. Nesse caso, as letras são incógnitas específicas.

Em seu manual de Álgebra *Aritmética universal*, Isaac Newton (1642-1727) escreveu: "O idioma da Álgebra é a equação. Para resolver um problema referente a números ou relações abstratas de quantidades, basta traduzir o tal problema, do inglês ou de outra língua, para o idioma algébrico".

No entanto, essa tradução não é tão simples, uma vez que exige uma explicitação prévia das relações matemáticas entre a incógnita e os demais dados do problema. Para resolvê-lo, depois de obtida a equação, é preciso aplicar sobre ela determinado algoritmo de cálculo para chegar ao valor da incógnita.

Por exemplo: "João tem 46 moedas. Se o dobro da quantidade de moedas de Mariana, adicionado à quantidade de moedas de João, for igual a 76, quantas moedas terá Mariana?".

Ao usarmos uma letra para representar a quantidade de moedas de Mariana, **x**, por exemplo, temos a equação:

$2x + 46 = 76$

Na concepção da **Álgebra como estudo de relações entre quantidades**, as letras não são incógnitas. Elas descrevem certos aspectos de um objeto ou um fenômeno, possibilitando compreender seu funcionamento ou mesmo deduzir novas propriedades.

Nessa interpretação, as letras assumem o sentido completo de variável, isto é, as variáveis "variam". Existem as noções de *variável independente* e *variável dependente*, e a relação entre elas pode ser uma função.

Por exemplo:

- a fórmula da área de um retângulo ($A = b \cdot h$) é uma relação entre as variáveis comprimento e largura;
- na função representada pela expressão $y = 5x - 3$, o valor de **y** depende de **x**.

Na concepção da **Álgebra como estudo das estruturas**, as letras são consideradas símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Ou seja, elas constituem elementos pertencentes a estruturas algébricas, tais como grupos, anéis ou corpos, que fundamentam a teoria da Álgebra.

Nesta coleção, a Álgebra é explorada desde o 6º ano.

Estatística e Probabilidade

A importância de conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória é reconhecida hoje nos mais diversos campos, das pesquisas científicas e sociais ao mundo dos negócios, constituindo, assim, uma ferramenta para outras disciplinas.

Esse eixo de conteúdos permite que os professores tragam para a sala de aula o cotidiano presente nos diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e internet, e na vida dos cidadãos.

É possível que os alunos se sintam mais motivados a estudar as noções básicas de Estatística, já que a maioria dos assuntos referentes a esse bloco de conteúdos é veiculada pelos meios de comunicação e faz parte do cotidiano deles.

Como o mundo que nos rodeia é apresentado por meio de informações estatísticas, é indispensável que cada cidadão saiba selecioná-las e interpretá-las para desenvolver a capacidade de análise, crítica, tomada de decisões e intervenções. Disso depende a possibilidade de se obter um avanço na formação para a cidadania.

Com esse tema, esperamos subsidiar os alunos com uma pequena bagagem de conhecimentos para que possam fazer uma leitura mais crítica dos artigos que, muitas vezes, se utilizam da Estatística para manipular dados, induzindo o leitor a conclusões que interessam ao seu autor.

Nesse trabalho, são empregados gráficos e tabelas de textos jornalísticos e textos próprios para a formulação de questões e problemas.

Esse bloco de conteúdos envolve também possibilidades e chances, como elementos do estudo de Probabilidade, além de problemas de contagem que englobam o princípio multiplicativo.

Os problemas de contagem objetivam levar os alunos a lidar com situações que envolvem diferentes tipos de agrupamentos, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo.

Problemas que envolvem possibilidades são trabalhados desde o volume 6, como, por exemplo, o problema dos apertos de mãos, em que os alunos são levados a quantificar as possibilidades.

Com relação ao estudo de Probabilidade, a principal finalidade é a de que os alunos compreendam que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se pode identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da chance de ocorrência de um deles.

O ensino das noções sobre Probabilidade pode ser realizado mediante uma metodologia heurística e ativa, por meio de experimentação, como, por exemplo, lançando dados e moedas.

O que se pretende nessa etapa do Ensino Fundamental é que o conceito de Probabilidade seja entendido como a razão, nesta ordem, entre o número de resultados possíveis de um experimento e o número de todos os resultados possíveis, ao se realizar um experimento aleatório (espaço amostral).

A Teoria de Probabilidades é um assunto difícil, do ponto de vista teórico e do ponto de vista técnico.

Por causa das dificuldades inerentes ao estudo de Probabilidades, fazemos uma sugestão de trabalho em sala de aula com o objetivo de que as pessoas comecem a "pensar probabilisticamente".

Avaliação em Matemática

Avaliar significa ir além da busca de resultados, é um **processo** de observação e verificação de como os alunos apreendem os conhecimentos matemáticos e do que pensam sobre a Matemática.

Como parte do próprio processo de ensino/aprendizagem, o objetivo da avaliação é aprimorar a qualidade dessa aprendizagem. Ela deve ser contínua, dinâmica e, com frequência, informal, para que, por meio de uma série de observações sistemáticas, se possa emitir um juízo de valor sobre a evolução do aluno no aprendizado da Matemática e tomar as atitudes necessárias.

A avaliação do desempenho dos alunos tem como finalidades:

a) Em relação ao aluno:

- verificar e mensurar seu conhecimento matemático;
- acompanhar o desenvolvimento de seus procedimentos matemáticos;
- observar sua postura diante da Matemática;
- possibilitar a reflexão sobre seus êxitos e dificuldades.

b) Em relação ao professor:

- colher informações para orientação e tomada de decisões em relação à atuação docente;
- identificar as áreas em que alguns alunos apresentam dificuldades e reorientar o trabalho.

A avaliação centrada basicamente em provas, nas quais os alunos devem mostrar sua destreza nas técnicas adquiridas e a capacidade de memorizar regras, fatos e definições, tem função seletiva e promocional e não fornece todas as informações sobre a aprendizagem efetiva dos alunos.

Avaliar não é só construir um instrumento de verificação, mas também transformá-lo em registro adequado para acompanhar e comprovar o grau de aquisição da aprendizagem, tornando-se uma referência para a reflexão e a conscientização dos alunos e dos professores. Segundo essa concepção, destacamos os componentes da avaliação: conceitos matemáticos, procedimentos matemáticos, atitudes e raciocínios.

Componentes da avaliação	Espera-se que os alunos
Conceitos matemáticos	• nomeiem, identifiquem e definam os conceitos; • reconheçam os diversos significados e interpretações dos conceitos e os diferenciem; • identifiquem as propriedades; • apliquem os diversos conceitos em outras situações; • busquem interdependências entre conceitos.
Procedimentos matemáticos	Comunicação: • utilizem as mais variadas formas para representar situações matemáticas; • interpretem e utilizem diferentes linguagens: numérica, geométrica, gráfica e algébrica; • empreguem vocabulário matemático e notações para representar ideias e descrever relações. Algoritmos de cálculo: • estimem e comparem resultados; • utilizem os algoritmos tradicionais de cálculo; • reconheçam quando um algoritmo é adequado e eficaz. Construções geométricas: • estimem e comparem medidas; • utilizem de maneira correta os instrumentos de medida habituais; • realizem construções geométricas; • entendam os conceitos sobre os quais se apoia um processo de construção geométrica; • saibam quando aplicar as construções geométricas.

Componentes da avaliação	Espera-se que os alunos
Atitudes	Apreciação da Matemática: • reconheçam e valorizem os conhecimentos matemáticos para representar, comunicar ou resolver diferentes situações da vida cotidiana; • desenvolvam confiança na própria capacidade para resolver problemas matemáticos; • demonstrem curiosidade e interesse para resolver situações matemáticas; • desenvolvam a perseverança na busca de soluções; • demonstrem interesse em aprimorar a apresentação de seus trabalhos, de modo que facilitem a análise e a compreensão; • se interessem pelas diferentes estratégias de resolução de problemas; • desenvolvam a criticidade com relação ao seu trabalho e ao de seus colegas; • valorizem o trabalho coletivo.
Raciocínios	• realizem especulações; • busquem regularidades na ação existente por ocasião da apresentação ou construção de um conhecimento matemático; • analisem situações matemáticas e sintetizem fatos já analisados; • apliquem o método indutivo com o objetivo de buscar regularidades e generalizações; • apliquem o método dedutivo para determinar ou verificar resultados significativos; • formalizem conhecimentos por meio de evoluções dos códigos de linguagem criados ou construídos como um processo final na aquisição ou construção de um conhecimento.

E como avaliar?

PROCEDIMENTOS PARA COLETAR DADOS

É muito difícil observar diariamente todos os alunos de maneira sistemática. Porém, é necessário fazer observações com regularidade. Os registros precisam ser compreensíveis e ser mais do que um grupo de qualificações numéricas ou listagens. Podem incluir anotações breves ou amostras de trabalhos dos alunos.

O procedimento de registro precisa ser simples, rápido e ter como base:

- as respostas dos alunos, quando eles manifestarem de forma implícita ou explícita suas certezas, dúvidas e erros;
- as observações das ações e discussões efetuadas durante as tarefas individuais, em grupos pequenos ou com a classe toda;
- a análise de provas, tarefas feitas em casa, diários e trabalhos escritos.

No processo de construção do saber matemático, espera-se que os alunos façam inferências sobre o que observam, formulem hipóteses e não necessariamente encontrem uma resposta certa. Deve-se considerar na avaliação o processo, e não apenas o seu resultado. Nesta coleção, as aberturas e as seções **Desafio**, **Troquem ideias e resolvam**, **Investigue e explique** e **Revisão cumulativa e testes** podem proporcionar elementos para a avaliação continuada.

Instrumentos

A avaliação não pode se apoiar em um só instrumento ou em uma só técnica. O modo de avaliação pode ser escrito ou oral. As atividades que os alunos realizam proporcionam um amplo rol de possibilidades para demonstrar sua iniciativa e capacidade e, por isso, é conveniente que sejam utilizadas como fonte de informações para avaliá-los.

Tipos de instrumentos

- exercícios, problemas, pesquisas, resumos, esquemas, cadernos de classe;
- atividades extraclasse, como trabalhos em casa, projetos, dramatizações e exposições em feiras de ciências;
- provas de tipos variados com respostas discursivas curtas, abertas ou testes de múltipla escolha.

Conteúdos propostos em cada ano

Apresentaremos mais adiante os conteúdos, por unidades e expectativas de aprendizagem. Você encontrará também as seções:

Orientações didáticas

Nas orientações didáticas, sugerimos alguns cuidados que poderão ser tomados na introdução dos temas tratados em cada unidade. Também apontamos dificuldades que poderão ocorrer durante o processo de aprendizagem dos conteúdos propostos e sugerimos algumas alternativas que poderão auxiliá-lo a superá-las, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas.

Textos de aprofundamento

Reunimos textos relacionados à Matemática no dia a dia, à história da Matemática, à fundamentação teórica, à aplicação em outras disciplinas e a temas da Matemática que serão tratados formalmente em níveis mais avançados.

Os textos são subsídios que poderão complementar as suas aulas, instigando a curiosidade e despertando o interesse dos alunos.

Comentários e resolução de atividades

Neste espaço, são resolvidas e comentadas as atividades das seções **Investigue e explique**, **Troquem ideias e resolvam** e **Desafio**, destacando propostas e alguns desdobramentos que poderão ocorrer a partir das propostas apresentadas: problemas parecidos, outros problemas, investigações, generalizações e fórmulas. Fica a critério do professor decidir pelo aproveitamento ou não das situações sugeridas.

Observe todas as sugestões apresentadas pelos alunos. Converse com a classe sobre os vários caminhos que existem na solução de um problema. Isso mostrará a eles que a criatividade e a imaginação não são limitadas, sobretudo em Matemática. A percepção e a consciência da liberdade de pensamento em Matemática poderão melhorar o desenvolvimento do raciocínio de seus alunos.

Sugestões de atividades complementares

Nesta seção são propostos, como sugestões complementares, problemas não rotineiros, jogos e quebra-cabeças que poderão ser utilizados de acordo com a disponibilidade de tempo.

Indicações para a formação continuada do professor

BALDINO, R. R. *Ensino de Matemática ou educação matemática? Temas e debates*. Blumenau, SBEM, vol. IV, n. 3, 1991.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais – Introdução. Temas transversais, 3º e 4º ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

____. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática, 1º e 2º ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

____.*Parâmetros curriculares nacionais – Matemática, 3º e 4º ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BUSHAW, D. *Aplicações da Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, T. N. *Aprender pensando*. 19. ed. São Paulo: Vozes, 2008.

Coleção Matemática sem problemas. Rio de Janeiro/São Paulo: José Olympio/Melhoramentos, 1972.

D'AMBROSIO, Beatriz S. *Conteúdo e metodologia na formação de professores*. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática:* investigando e teorizando a partir da prática. 1. ed. São Paulo: Musa Editora, 2005.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução da Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

DANTZIG, T. *Número*: a linguagem da ciência. Trad. Sérgio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVIS, P. J. *A experiência matemática*. Trad. João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

____; HERSH, R. *O sonho de Descartes*. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação matemática*: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. As concepções de educação algébrica. In: *Proposições*. São Paulo: Cortez, v. 4, n. 1 (10): 39-54, mar. 1993.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. (Org.). *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Unicamp, 2001.

FIORENTINI, D. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*. Revista Zetetiké, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. São Paulo: Globo, 1970.

IFRAH, G. *Os números*: a história de uma grande invenção. 5. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1992.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1998.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Romulo & GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática.)

LOPES, M. L. L.; NASSER, L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

____. *Matemática e realidade*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1987.

MOISE, E.; DOWNS, F. L. *Geometria moderna*. Trad. Renate Watanabe. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

MURRIE, Z. F (Org.). *Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/INEP, 2002.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 1988.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.)

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática* – pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática*: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

____. *Números naturais e operações*. São Paulo: Melhoramentos, 2013. (Coleção Como eu ensino.)

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciências, 1978.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PROPOSTAS CURRICULARES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA, 1º grau dos vários estados do Brasil.

SACRISTAN, J. G. *O currículo*: uma reflexão sobre a prática. Trad. Ernani F. da F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências matemáticas*. São Paulo: SE/CENP, 1984.

____. *Prática pedagógica*: Matemática 1º grau. São Paulo: SE/CENP, 1993. v. 4.

SOARES, M. G. (Coord.). *Geometria experimental*. São Paulo: MEC/IMECC/PREMEN/SE/CENP, 1980.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *A Educação Matemática em Revista*. Publicações de 1993 a 2005.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática*. Publicações de 1988 a 2005.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. de S. V. *Álgebra*: das variáveis às equações e funções. 2. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 1996.

STRUIK, D. J. *História concisa das Matemáticas*. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

TAHAN, M. *As maravilhas da Matemática*. 6. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

____. *Matemática divertida e curiosa*. 24. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

TINOCO, L. A. A. (Coord.). *Razões e proporções*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1996.

Centros de formação continuada

Caem – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Rua do Matão, 1010, Bloco B, sala 167, Cidade Universitária, São Paulo/SP, CEP 05508-900, tel./fax: (0xx11) 3091-6160; http://www.ime.usp.br/caem; e-mail: caem@ime.usp.br

Cempem – Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Rua Bertrand Russell, 801, Cidade Universitária, Campinas/SP, CEP 13083-970, tel.: (0xx19) 3788-5587; http://www.cempem.fae.unicamp.br; e-mail: cempem@grupos.com.br

CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Secretaria de Estado da Educação. Praça da República, 53, térreo, sala 63, São Paulo/SP, CEP 01045-903, tel.: (0xx11) 3237-2115; http://cenp.edunet.sp.gov.br; e-mail: cenpgabinete@edunet.sp.gov.br

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento de Educação. Diretoria de Ações Educacionais. Coordenação Geral dos Programas do Livro, SBS, Quadra 2, Bloco F, Edifício FNDE, sala 1401, Brasília/DF, CEP 70070-929, tels.: (0xx61) 3966-4919/4915; http://www.fnde.gov.br; e-mail: cac@fnde.gov.br

Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Instituto de Educação da UFRRJ, sala 30, Rod. BR 465, km 7, Seropédica/RJ, CEP 23890-000, tel./fax: (0xx21) 2682-1841; http://www.gepem.ufrrj.br; e-mail: gepem@ufrrj.br

LEM – Laboratório de Ensino de Matemática. Universidade Estadual de Campinas. Caixa Postal 6065, Campinas/SP, CEP 13083-970, tel.: (0xx19) 3521-6017; http://www.ime.unicamp.br; e-mail: lem@ime.unicamp.br

MEC – Secretaria de Educação Básica. Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5º andar, sala 510, Brasília/DF, CEP 70047-901, tel.: (0xx61) 2104-8612/8617, fax: (0xx61) 2104-9269; http://portal.mec.gov.br

Centro de Referência Virtual – Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. Avenida Amazonas, 5855, CEP: 30510-000, tel: (0xx31) 3379-8429; http://crv.educacao.mg.gov.br; e-mail: crv@educacao.mg.gov.br

Proem – Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, São Paulo/SP, CEP 013013-050, tel.: (0xx11) 3256-1622 – ramal 215; http://www.proem. pucsp.br; e-mail: proem@pucsp.br

Projeto Fundão – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22295-900, tel.: (0xx21) 2562-7511; http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica; e-mail: pfundao@im.ufrj.br

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Universidade de Brasília. *Campus* Darcy Ribeiro, Caixa Postal 4332 - AC UNB, CEP 70904-970; http://www.sbem.com.br; e-mail: sbem@sbem.com.br

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Estrada Dona Castorina, 110, sala 109 - Fone: (0xx21) 2529-5095, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22460-320; http://www.sbm.org.br

____ Revista Professor de Matemática Online (PMO); http://pmo.sbm.org.br/pmo-h.html

____ Revista Professor de Matemática; http://rpm.org.br/

____ Coleção Explorando o Ensino; http://rpm.org.br/

Sites

- www.apm.pt. *Site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal, um grupo ativo de discussões sobre o ensino da Matemática.
- www.eduquenet.net/jogosmatematicos. Portal com jogos matemáticos.
- www.history.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html. Este *site* apresenta biografias de matemáticos.
- www.hsw.uol.com.br. *Site* que explica como tudo funciona. Além de texto, há infográficos e animações que analisam cada tópico de maneira clara, simples e objetiva.
- www.ibge.gov.br. *Site* do IBGE que apresenta seções voltadas ao uso de estatísticas.
- www.inep.gov.br/basica/saeb/matrizes/matematica. O *site* do Inep traz a Matriz de Referência de Matemática.
- www.pt.khanacademy.org. O *site* é estruturado para usuários individuais: crianças com conhecimentos iniciantes de Matemática, estudantes da educação básica, estudantes universitários, concurseiros e para professores usarem na sala de aula, acompanhando o progresso de cada aluno.

UNIDADE 1 Números reais

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Ampliação dos conjuntos numéricos Números que já conhecemos Números naturais Números inteiros Números racionais O que são dízimas periódicas? Cálculo de uma fração geratriz de uma dízima periódica **2. Números irracionais** Pitágoras e os triângulos retângulos $\sqrt{2}$, um número irracional $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e a representação na reta numerada **3. Números reais** Números que formam o conjunto dos números reais Comparação de números reais **Leitura:** Números reais: dos gregos aos matemáticos modernos	Espera-se que os alunos: • identifiquem dízimas periódicas e estabeleçam relações entre a representação decimal e fracionária de dízimas periódicas; • desenvolvam habilidades em determinar uma fração geratriz de uma dízima periódica; • apliquem o teorema de Pitágoras em situações-problema; • reconheçam números irracionais (não racionais), em diferentes contextos como uma representação decimal infinita e não periódica; • ampliem o conceito de número com o reconhecimento dos números irracionais; • representem e localizem alguns números irracionais na reta numerada, com auxílio de régua e compasso.

Orientações didáticas

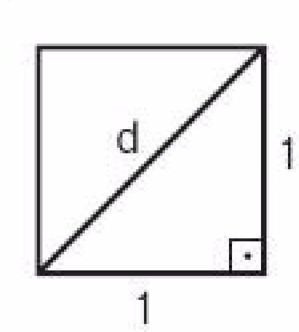
Apesar de ser muito antiga a convivência do ser humano com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados. O que está por trás de tal tema é o conceito de continuidade, que, embora tenha sido discutido por mais de 25 séculos, recebeu um tratamento rigoroso, somente a partir de 1872 com a obra de Richard Dedekind, *Continuidade e números irracionais*.

Até este momento os alunos têm explorado os conjuntos numéricos de maneira isolada um do outro sem identificar as ampliações que são realizadas de um para o outro. Espera-se que nesta unidade, ao recorrer a uma revisão desses conjuntos, eles reconheçam as razões que determinaram essas ampliações.

O ponto de partida para colocar os alunos em contato com os números irracionais é a abordagem das escritas decimais, considerando que:

- as escritas decimais finitas representam números racionais;
- as escritas decimais infinitas e periódicas representam números racionais;
- as escritas decimais infinitas e não periódicas representam números irracionais.

O reconhecimento de números irracionais, ou seja, de números não racionais, é feito a partir da exploração do número $\sqrt{2}$ apoiada no cálculo da medida da diagonal de um quadrado com 1 unidade de lado. Espera-se que a representação geométrica de números como esses possa auxiliar na compreensão do significado dos mesmos.



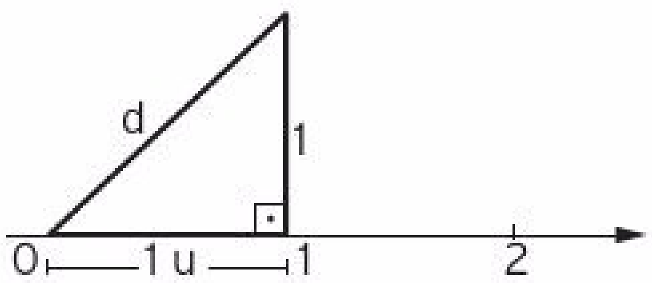
A diagonal de um quadrado com 1 u (unidade) de lado divide-o em dois triângulos retângulos em que os catetos medem 1 u e a medida da hipotenusa (diagonal do quadrado) é igual à medida **d** indicada na figura acima. Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \text{ —— } d^2 = 2 \text{ —— } d = \sqrt{2}\text{ u}$$

Representamos o comprimento da diagonal por $\sqrt{2}$ e associamos esse número ao ponto da reta cuja distância da origem é igual ao comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 u.

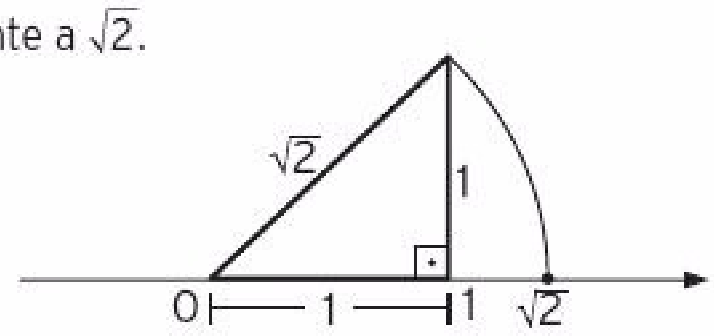
Podemos localizar $\sqrt{2}$ sobre a reta real, com auxílio de régua e compasso, da seguinte forma:

- Em uma reta numerada, construímos um triângulo retângulo de catetos iguais a 1 u cuja hipotenusa medirá:

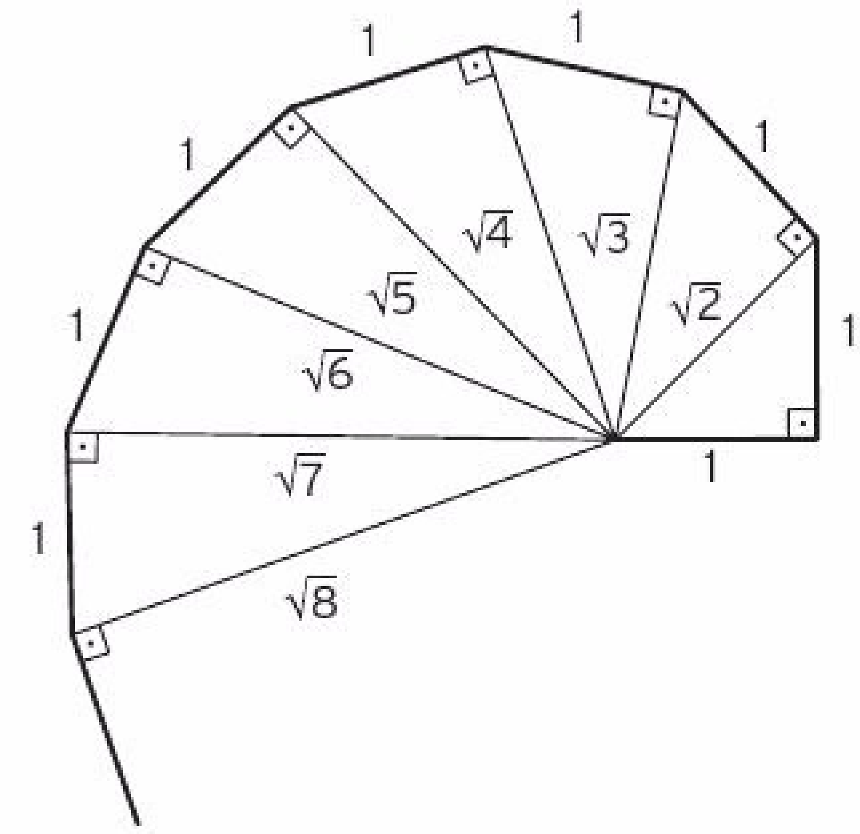


$x^2 = 1^2 + 1^2$ —— $x = \sqrt{2}$

- Usando o compasso com centro na origem O e raio $\sqrt{2}$ u, traçamos um arco de circunferência que corta a reta numerada no ponto correspondente a $\sqrt{2}$.



Podemos também obter, de forma semelhante, um segmento de reta de medida $\sqrt{3}$ u a partir de um triângulo retângulo de lados que medem $\sqrt{2}$ u e 1 u. Ao seguirmos esse mesmo procedimento, poderemos encontrar $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ...



O símbolo para a raiz quadrada de 2 passou a ser adotado somente a partir do século XII, inicialmente pelos indianos.

Texto de aprofundamento

Um pouco da história dos números racionais

Os números naturais são abstrações que surgem do processo de contar coleções finitas de objetos. Mas as necessidades do dia a dia requerem, além da contagem de objetos individuais, medições como comprimento, massa e tempo. Para satisfazer tais necessidades básicas, referentes a medições, podemos usar números racionais. Entretanto, há medidas que não podem ser expressas por esses números, por exemplo, a da diagonal do quadrado cujos lados medem 1 unidade. Nesse caso, surge a ideia de número irracional.

A descoberta da existência desses números foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos, que, a princípio, só conheciam $\sqrt{2}$ como número irracional. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, ... também eram números irracionais.

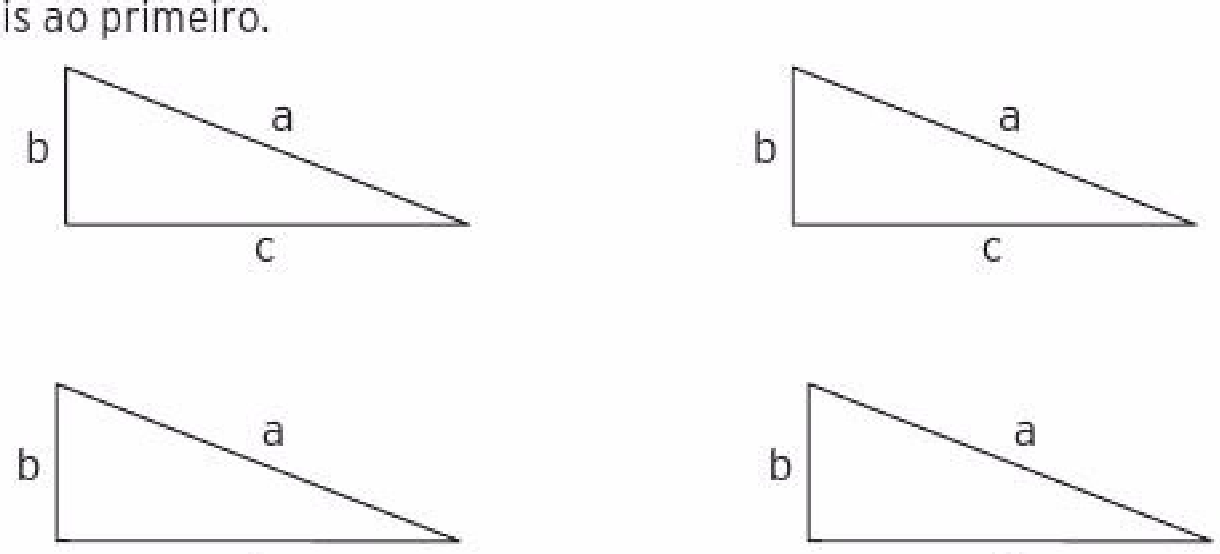
Por volta de 370 a.C., a questão dos números irracionais foi resolvida por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, por meio de uma nova definição de proporção. O tratamento dos incomensuráveis (números irracionais), formulado por Eudoxo, é abordado no quinto livro de *Os Elementos* de Euclides e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Richard Dedekind em 1872, muitos séculos depois.

Usando o método dedutivo

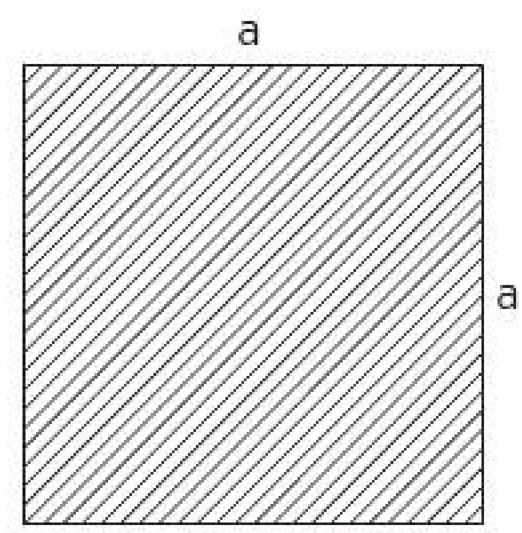
Várias demonstrações do teorema de Pitágoras foram elaboradas por muitos matemáticos da Grécia Antiga. Com o passar do tempo, novas demonstrações foram desenvolvidas. Conheça uma delas que poderá ser proposta aos alunos:

Vamos provar, dedutivamente, que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

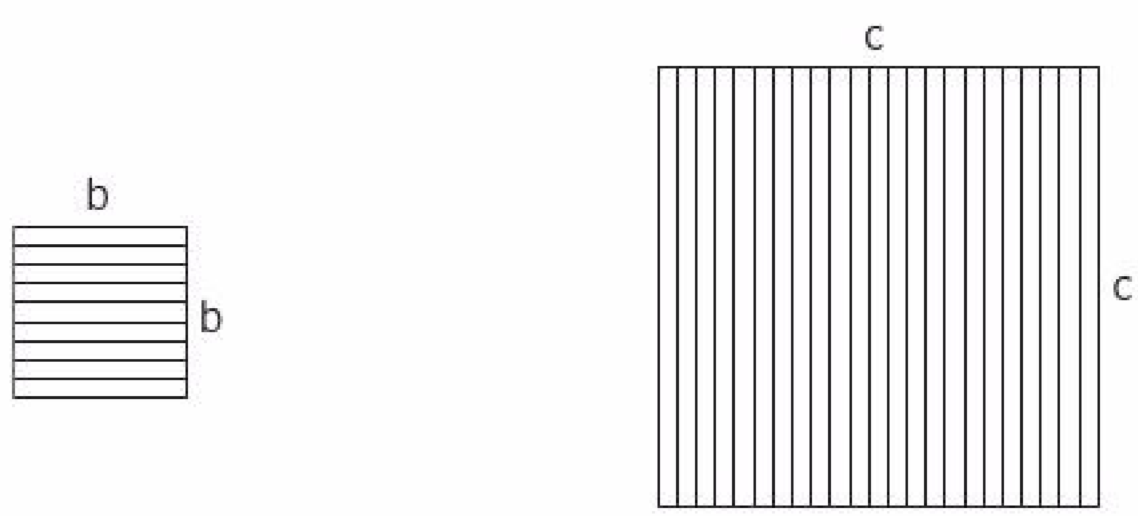
Solicite aos alunos que, em uma folha de cartolina, desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer, sem importar as medidas de seus lados. Vamos representá-las por letras: **a** é a medida da hipotenusa e **b** e **c** são as medidas dos catetos. Em seguida, recorte outros três triângulos iguais ao primeiro.



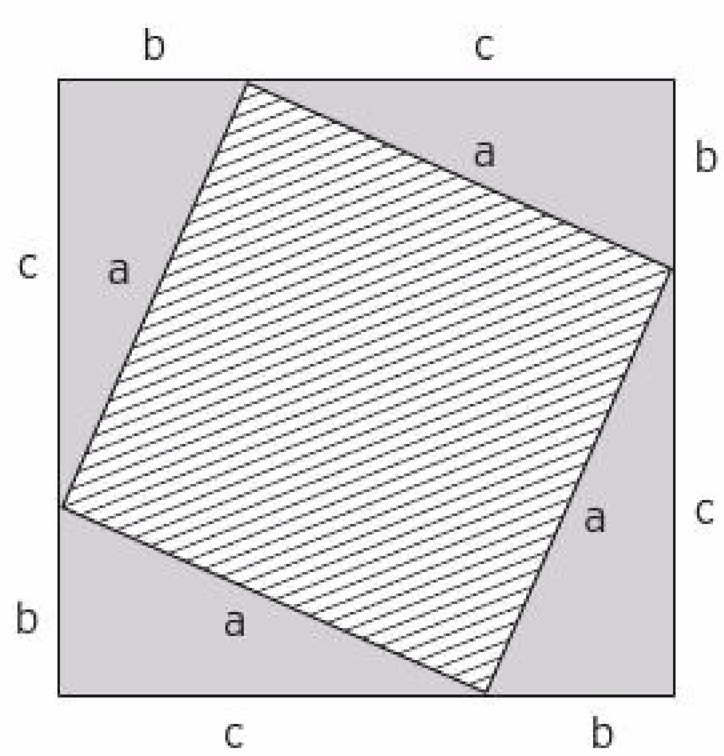
Peça a eles que desenhem e recortem um quadrado cuja medida do lado seja igual à da hipotenusa (**a**) dos triângulos retângulos.



Desenhem e recortem mais dois quadrados: um de lado **b** e outro de lado **c**.

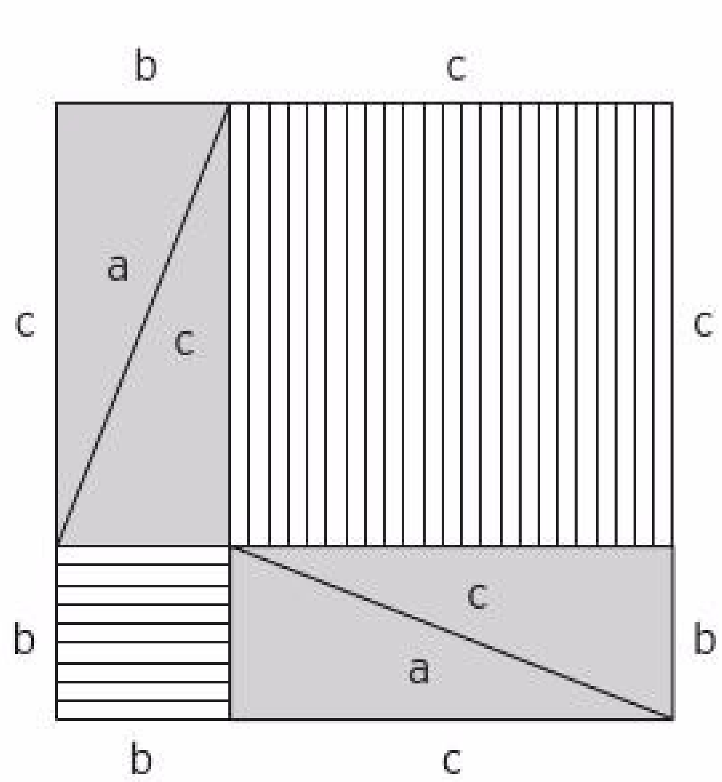


Com o quadrado de lado **a** e os quatro triângulos, é possível formar um quadrado como este:



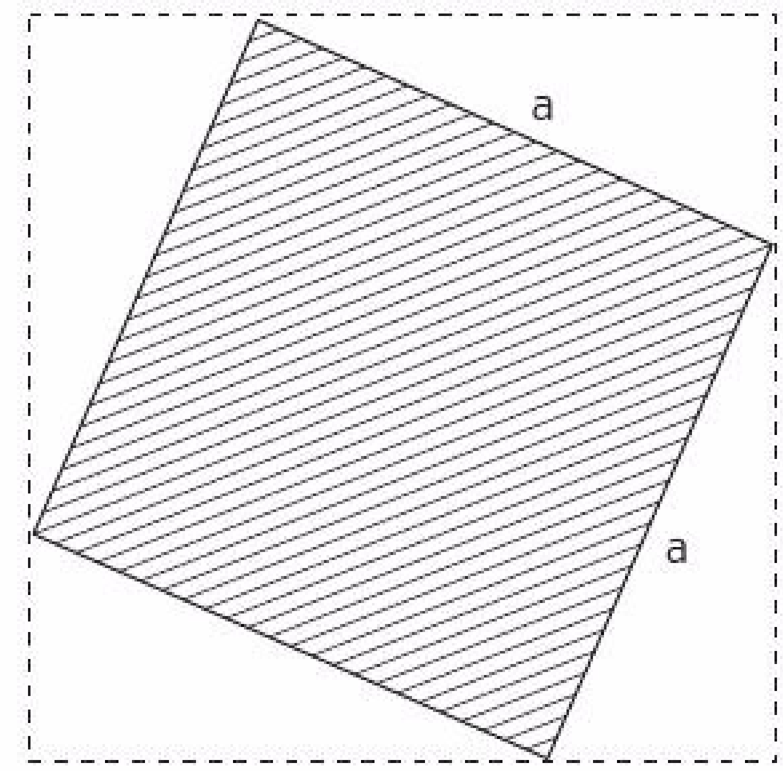
Chame a atenção dos alunos para observarem que esse quadrado tem lado b + c.

Usando agora os mesmos quatro triângulos e os dois quadrados de lados **b** e **c**, pode-se construir esta figura:

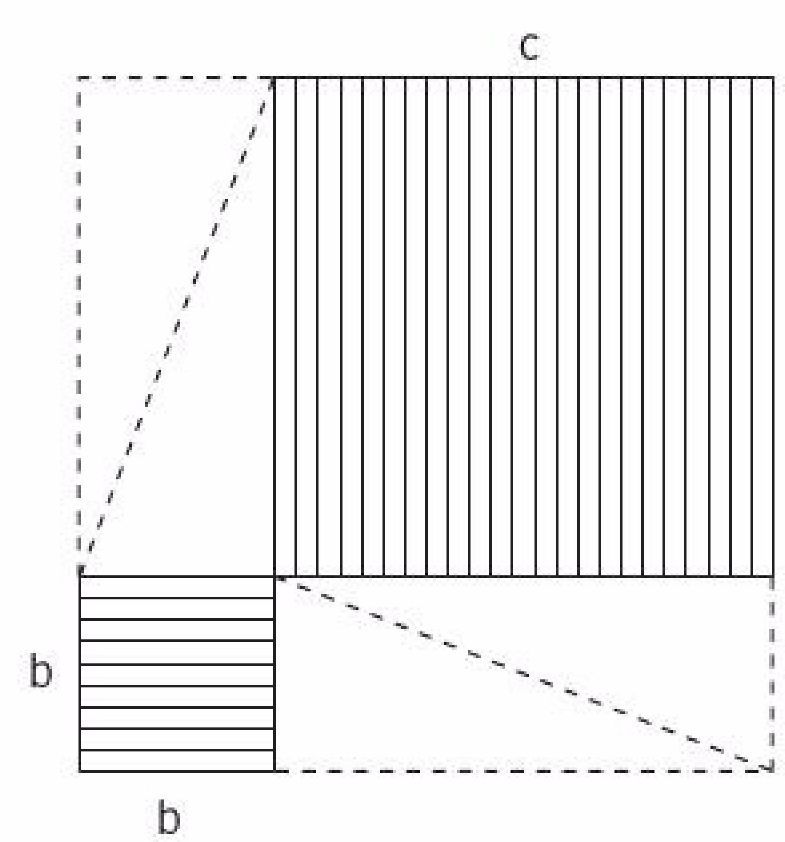


Temos outra vez um quadrado de lado b + c. Portanto, as duas figuras anteriores têm medidas iguais.

Se do primeiro quadrado de lado b + c eliminarmos os quatro triângulos, sobrará o quadrado de lado **a**, cuja área é igual a a^2.



Se do segundo quadrado de lado b + c eliminarmos os mesmos quatro triângulos, sobrarão dois quadrados de lados **b** e **c**, que, juntos, têm área igual a $b^2 + c^2$.



Logo, a área do que sobrou do primeiro quadrado de lado b + c é igual à área do que sobrou do segundo. Assim:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstramos que **em um triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos**.

As afirmações que são demonstradas como verdadeiras por meio do método dedutivo são chamadas **teoremas**.

Fonte: IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Descobrindo o teorema de Pitágoras*. 13. ed. São Paulo: Scipione, 1987 (Coleção Vivendo a Matemática).

Comentários e resolução de atividades

Troquem ideias e resolvam (p. 12)

Esta atividade envolve combinações e possibilidades de escolhas presentes em uma situação. Espera-se que os alunos possam encontrar as respostas sem descrever todas as combinações possíveis.

Resolução

- Podem ser escolhidos três algarismos diferentes para ocupar a ordem das dezenas: 3, 5 e 7.
- Escolhendo-se uma das cartelas numeradas restam duas delas que poderão preencher a ordem das unidades.
- O primeiro algarismo poderá ser escolhido de 3 maneiras diferentes e o segundo algarismo de 2 maneiras diferentes. Assim, existem ao todo 6 possibilidades (3×2) de compor números com dois algarismos diferentes com as cartelas que Pedro tem.

Investigue e explique (p. 16)

Resolução

- Todas as dízimas periódicas apresentadas têm parte inteira igual a zero. Uma fração geratriz de cada uma delas poderá ser encontrada seguindo a regra prática: uma fração geratriz de uma dízima periódica simples, em que a parte inteira é zero, tem numerador igual ao período da dízima e denominador com tantos algarismos nove quantos forem os algarismos do período da dízima. Note que esse é também um padrão presente nas respostas encontradas.

✓ $0{,}55555... = \frac{5}{9}$	✓ $0{,}77777... = \frac{7}{9}$
✓ $0{,}66666... = \frac{6}{9}$	✓ $0{,}88888... = \frac{8}{9}$

- Seguindo o padrão encontrado na primeira questão, uma fração geratriz de 0,99999... é $\frac{9}{9}$, que é igual a 1. Portanto, a afirmação apresentada é verdadeira.

Desafio - Número áureo (p. 24)

Informe aos alunos que eles precisam digitar as teclas **5** e **√** para obter o valor de $\sqrt{5}$.

Resolução

Em uma calculadora comum:

✓ $\sqrt{5} = 2{,}2360679... \cong 2{,}236$

✓ $1 + \sqrt{5} \cong 1 + 2{,}236 = 3{,}236$

✓ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong \frac{3{,}236}{2} = 1{,}618$

Sugestões de atividades complementares

Descobrindo se é um retângulo

Para que as paredes "fiquem no esquadro", como se costuma dizer, um pedreiro amarrou fios de náilon e tentou fazer um retângulo com lados de medidas 30 m e 40 m. Para verificar se o retângulo estava correto, ele mediu a diagonal e obteve 62 m. A figura feita pelo pedreiro é realmente um retângulo? Justifique sua resposta.

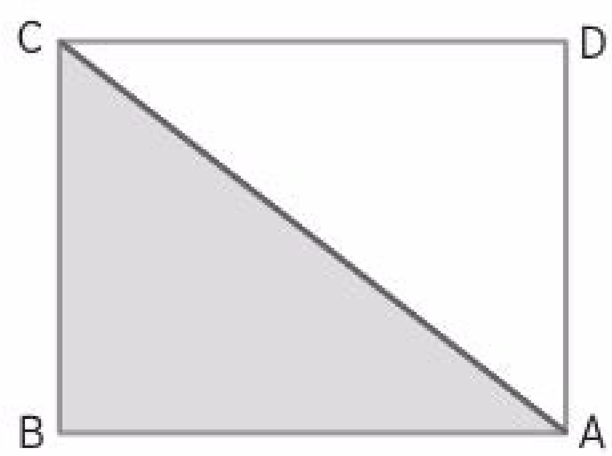
Resposta

Não, para que a figura seja um retângulo, as dimensões do triângulo formado pela diagonal e pelos dois lados do retângulo devem verificar a relação de Pitágoras. Como $30^2 + 40^2$ é diferente de 62^2, o ângulo formado pelos lados que medem 30 m e 40 m não é reto.

Esse paralelogramo é um retângulo?

No paralelogramo ABCD a seguir, o lado $\overline{AB}$ mede 34 cm e o lado $\overline{BC}$, 25,5 cm. A diagonal $\overline{AC}$, de 42,5 cm, divide o paralelogramo em dois triângulos.

- Esse paralelogramo é um retângulo? Justifique sua resposta.



Resposta

$(\text{med } \overline{AC})^2 = (\text{med } \overline{AB})^2 = (\text{med } \overline{BC})^2$

$(42,5)^2 = 34^2 + (25,5)^2$

$1806,25 = 1156 + 650,25$

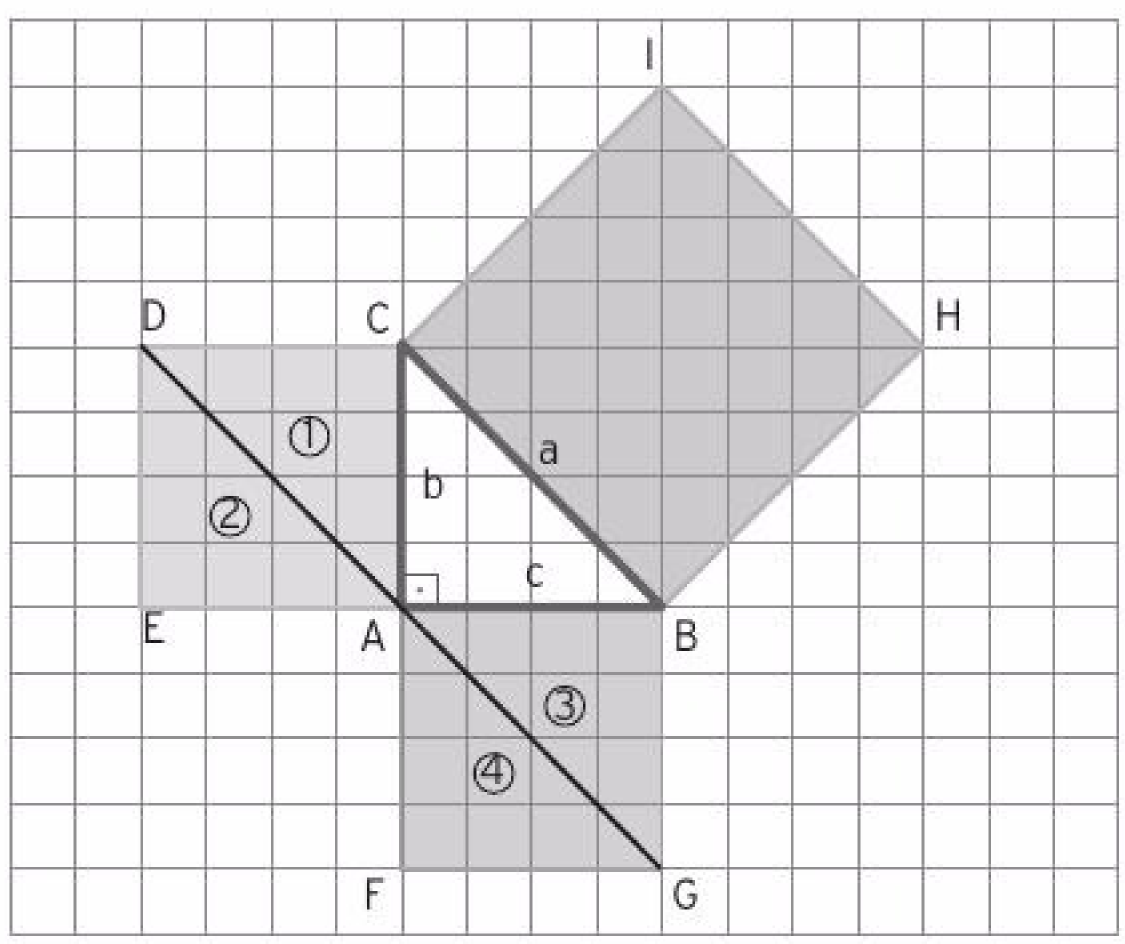
$1806,25 = 1806,25$

Sentença verdadeira.

Portanto, o paralelogramo é retângulo.

Teorema de Pitágoras

Observe a figura e responda às questões. Se desejar, construa a figura em uma cartolina e recorte-a.



- Que tipo de polígono é CDEA? E AFGB?
- Em que figuras eles foram decompostos?
- Qual é a área de CDEA? E de AFGB? E de ICBH?
- Ao recortar os triângulos ①, ②, ③ e ④, é possível compor o quadrado ICBH?
- O que podemos concluir ao final desta atividade?

Resposta

- Quadrado; quadrado.
- Triângulos retângulos isósceles.
- b^2; c^2; a^2.
- Sim.
- Podemos concluir que $b^2 + c^2 = a^2$.

Prova dos nove

Número de participantes: 2.

Material necessário: calculadora, lápis e papel.

Desenvolvimento: O jogador **A** pensa em um número de dois algarismos e o escreve em uma folha de papel. O jogador **B** tentará adivinhar esse número, em no máximo oito tentativas, procedendo da seguinte forma: escreve os números de 1 a 9 em outra folha e escolhe dois deles, riscando-os. Usando uma calculadora, efetua com os números escolhidos uma das quatro operações (+, −, · ou :), mostrando o resultado que aparece no visor ao jogador **A**. Caberá a este dizer **certo**, se o resultado for igual ao número pensado, **alto**, se o resultado for menor que o número pensado ou **baixo** se o resultado for menor que o número pensado. Caso não acerte na primeira tentativa, o jogador **B** deverá escolher mais um número da lista, dentre aqueles que não foram riscados, efetuar uma operação qualquer com o resultado anterior e o número escolhido e mostrar o novo resultado ao jogador **A**, até descobrir o número oculto ou se esgotarem as oito tentativas de que dispõe. Em seguida, invertem-se os papéis. Se um dos jogadores não conseguir descobrir o número e o outro sim, este será o vencedor. Se ambos descobrirem, vencerá quem tiver descoberto o número com menos tentativas.

Veja um exemplo. O número pensado é 33.

Tentativas	Jogador B	Jogador A
1ª	$4 \cdot 7 = 28$	baixo
2ª	$28 \cdot 2 = 56$	alto
3ª	$56 - 9 = 47$	alto
4ª	$47 - 8 = 39$	alto
5ª	$39 - 6 = 33$	certo

Nesse caso, o jogador **B** descobriu o número em cinco tentativas.

UNIDADE 2 A circunferência e o número π

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Explorando circunferência e círculo π... um número famoso! Comprimento da circunferência Arcos Círculo **2. Construções geométricas** Perpendicular a uma reta por um ponto não pertencente a ela Mediatriz de um segmento de reta **Leitura:** π: um número diferente	Espera-se que os alunos: • identifiquem o número π como sendo um número irracional; • reconheçam procedimentos de cálculo relacionados a uma circunferência e que levam à determinação do valor de π; • desenvolvam habilidades no cálculo de medida do comprimento (perímetro) de uma circunferência; • identifiquem arcos; • identifiquem a mediatriz de um segmento de reta como um lugar geométrico; • desenvolvam habilidades em traçados geométricos da mediatriz de um segmento de reta.

Orientações didáticas

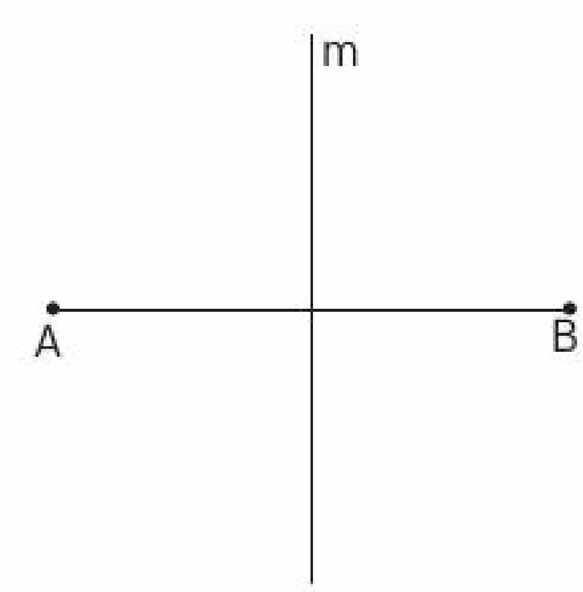
A circunferência é considerada, por muitos estudiosos, a figura plana perfeita e a única com infinitos eixos de simetria. A importância de estudos sobre a ideia de circunferência é confirmada pela sua presença em diversas áreas do conhecimento como nas Engenharias, na Matemática, na Física, na Química, na Biologia, na Arquitetura, na Astronomia, na Arte, entre outras.

Nesta unidade serão retomados os conteúdos já explorados sobre a circunferência e o círculo ampliando-os sob o ponto de vista de lugar geométrico e com o cálculo da medida do comprimento (perímetro) da circunferência que envolve um "novo" número irracional: o número π.

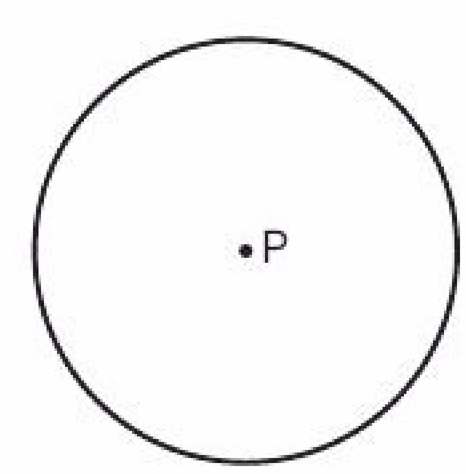
Os primeiros vestígios de uma estimativa desse número podem ser encontrados no **Papiro de Rhind**, escrito, aproximadamente, em 1700 a.C. Ao longo da história, houve muitos métodos para calcular o π e aumentar o conhecimento sobre o número de casas decimais que ele teria.

É importante que os alunos utilizem construções geométricas para se apropriarem de alguns conceitos e elaborarem noções intuitivas de **lugar geométrico** como conjunto de pontos que têm uma propriedade comum.

Por exemplo, o conjunto dos pontos que são equidistantes de dois pontos dados é um lugar geométrico a que chamamos de mediatriz do segmento de reta que une esses dois pontos.



Dessa forma, a circunferência pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto, que podemos assumir como centro, é sempre a mesma. Em outras palavras, dizemos, simplesmente, que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto dado no mesmo plano.



Comentários e resolução de atividades

Desafio - Cinco pontos, quantas cordas? (p. 34)

Resolução

- A partir do desenho, temos as seguintes informações:
  - ✓ são 5 pontos na circunferência;
  - ✓ em cada ponto podem ser desenhadas 4 cordas com uma das extremidades nesse ponto;
  - ✓ nos 5 pontos: são $5 \cdot 4$, ou seja, 20 cordas;
  - ✓ total de cordas traçadas: cada corda do último item foi contada duas vezes, portanto o total de cordas com extremidades nesses pontos é igual a $20 : 2$, ou seja, 10 cordas.
- Nesse caso, temos:
  - ✓ são 6 pontos na circunferência;
  - ✓ em cada ponto podem ser desenhadas 5 cordas com uma das extremidades nesse ponto;
  - ✓ nos 6 pontos: são $6 \cdot 5$, ou seja, 30 cordas;
  - ✓ total de cordas traçadas: cada corda do último item foi contada duas vezes, portanto o total de cordas com extremidades nesses pontos é igual a $30 : 2$, ou seja, 15 cordas.

Desdobramentos

- ✓ Se na situação apresentada anteriormente forem destacados 20 pontos, quantas cordas poderão ser traçadas?
- ✓ É possível encontrar uma fórmula considerando que são **n** pontos destacados nessa situação?

Investigue e explique (p. 36)

Nesta atividade explora-se uma propriedade presente em ângulos inscritos em uma semicircunferência. Apesar de o conceito de ângulos inscritos em circunferências ainda não ter sido explorado, espera-se que os alunos reconheçam, intuitivamente, a propriedade inerente a ângulos particulares como os apresentados nesta situação.

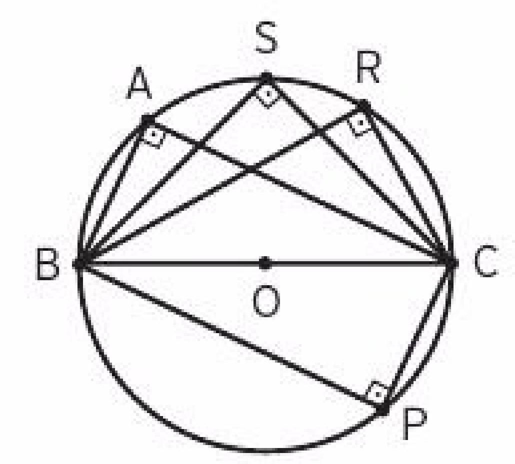
Oriente os alunos no entendimento da questão que está sendo objeto de investigação, lendo a introdução da situação-problema: determinação da medida de ângulos inscritos em uma semicircunferência.

Espera-se que eles formulem a hipótese de que qualquer ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto e que possam validar tal hipótese de maneira empírica por meio de medições. Se julgar conveniente, procure generalizar tal fato e informe aos alunos que ele será demonstrado em séries posteriores.

Resolução

Como o ponto A do $\triangle ABC$ foi construído de maneira aleatória, provavelmente as medidas dos ângulos agudos, calculadas por meio de um transferidor, serão aproximadas, mas espera-se que os alunos verifiquem que a med $B\hat{A}C$ é igual a 90º, ou seja, $B\hat{A}C$ é um ângulo reto.

Conclusão semelhante deve ocorrer nas demais figuras construídas.



Desafio – Retas perpendiculares (p. 39)

Resolução

- Nesta questão, convide alguns alunos para que apresentem um plano de construção com régua e compasso e analise com eles as sugestões apresentadas.

  Caso essas sugestões não resultem em obtenção da reta perpendicular a **t** e que passa por **R**, lance a pergunta: "O ponto **R** pode ser considerado ponto médio de um segmento de reta que está contido na reta **t**?".
- Faça uma demonstração da construção geométrica, no quadro de giz, seguindo as etapas apresentadas. Em seguida, oriente os alunos para que cada um desenvolva a questão seguindo essas etapas.

Desafio – Uma surpresa para você (p. 41)

Nesta atividade os alunos têm a oportunidade de reconhecer que existe uma circunferência que passa por três pontos não colineares.

Resolução

Desenvolva, ao mesmo tempo que alunos, as etapas indicadas fazendo um registro no quadro de giz. Ao final da construção geométrica centre um compasso no ponto de intersecção das mediatrizes e com abertura desse ponto até um dos pontos destacados trace uma circunferência: ela deverá conter os três pontos destacados inicialmente.

Desdobramento

Material: para cada aluno, meia folha de papel sulfite com uma circunferência desenhada sobre ela, sem destaque do centro da mesma.

Proponha a cada aluno que encontre o centro da circunferência que recebeu.

Sugestão de atividade complementar

Valor aproximado de π

Verifique experimentalmente o valor aproximado de π, a partir da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Para isso:

- desenhe, com o compasso, algumas circunferências de raios conhecidos, porém diferentes;
- contorne as circunferências com pedaços de barbantes, cortando-os na medida exata da volta completa;
- estique os barbantes, meça seus comprimentos e coloque os valores encontrados em uma tabela como esta e calcule a razão entre o comprimento e o diâmetro:

Diâmetro da circunferência	Comprimento da circunferência	Razão $= \frac{C}{d} = \pi$
4		
6		
10		
...		

Que valores você obteve?

UNIDADE 3 Estatística e probabilidade

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Gráfico de linha Arredondamento e gráficos Gráficos de linhas **2. Estatística** Organização de informações Distribuição por frequências Frequência relativa Frequência acumulada Frequência acumulada relativa **3. Probabilidade** Noções de probabilidade Experimento aleatório Espaço amostral Evento Probabilidade **Leitura:** Um toque de arte	Espera-se que os alunos: • desenvolvam estratégias para elaborar pesquisas; • desenvolvam habilidades em coleta e organização de dados de uma pesquisa; • representem e analisem dados em tabelas ou gráficos, fazendo prognósticos a partir deles; • diferenciem e determinem tipos de frequências; • construam tabelas de distribuição de frequências; • compreendam o significado dos termos experimento aleatório, espaço amostral e evento; • identifiquem situações do cotidiano dos alunos nas quais se emprega a probabilidade; • resolvam situações-problema envolvendo o cálculo das chances de ocorrência de um evento.

Orientações didáticas

A Estatística é um tema que permite trazer para a sala de aula a realidade presente nos jornais, nas revistas, na internet e na sua comunidade.

Nesta unidade, o objetivo principal é dar uma orientação sobre como explorar esse cotidiano. Aprofundar ou não a discussão do tema em destaque em uma reportagem dependerá do trabalho que cada professor deseja desenvolver com seu grupo de alunos.

Esperamos, com este estudo inicial, dar subsídio aos alunos com uma pequena bagagem de conhecimento para que possam fazer uma leitura mais crítica dos artigos publicados em jornais, revistas e na internet, que, muitas vezes, se utilizam da Estatística para manipular dados, induzindo o leitor a chegar a conclusões do interesse de seu autor.

Ainda nesta unidade serão exploradas noções de probabilidade e a principal finalidade é que os estudantes compreendam que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles.

A Teoria de Probabilidades é um assunto difícil do ponto de vista teórico e do ponto de vista técnico. Por causa disso, uma sugestão de trabalho em sala de aula com o objetivo de que os alunos comecem a "pensar probabilisticamente" é fazer experiências.

Texto de aprofundamento

Por que Estatística?

Há indícios de que em 3000 a.C. já se faziam censos na Babilônia, na China e no Egito. A palavra **censo** deriva de *censere*, que, em latim, significa taxar, e **Estatística** vem de *status*, que quer dizer Estado. Em meados do século XVIII, a palavra Estatística foi utilizada para denominar a "ciência dos negócios do Estado", tendo em vista que seus primeiros organizadores estavam ligados a departamentos criados por governantes.

Hoje sabemos que não somente governos, mas também empresas particulares e todos os ramos de estudo lidam com alguma espécie de investigação estatística. Como toda ciência, podemos dizer que sua essência é a observação e seu objetivo básico é a inferência.

A importância da Estatística é reconhecida hoje, seja no campo das pesquisas científicas e sociais, seja no mundo dos negócios. É o campo da Matemática que estuda os processos de obtenção, organização e análise de dados e os métodos de tirar conclusões e de fazer previsões sobre um fenômeno em estudo.

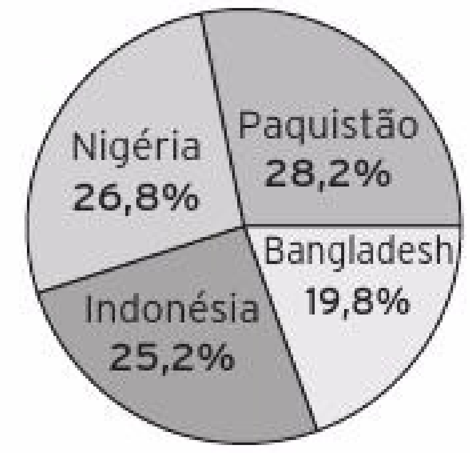
Jornais, revistas, internet, artigos científicos e reportagens em televisão recorrem à Estatística para avaliar e traduzir a matéria em destaque em uma linguagem que agiliza sua leitura e torna a visualização mais agradável. Assim, se o mundo que nos rodeia é apresentado com dados estatísticos, é importante saber interpretá-los para desenvolver a capacidade de análise, crítica e intervenção.

Os gráficos e as tabelas contidos em textos jornalísticos e os próprios textos podem ser utilizados para formular questões e problemas. Com essa atividade, espera-se que os alunos desenvolvam a habilidade de distinguir em uma situação-problema os dados importantes e necessários daqueles que não são úteis para a sua resolução. A motivação dos alunos torna-se natural por serem abordados assuntos do seu meio.

Além de fazerem parte do cotidiano escolar como um sistema de representação de funções e conceitos afins, os gráficos ditos cartesianos são um instrumento importante de ilustração de notícias veiculadas pela mídia impressa, que os usa como parte de um discurso argumentativo a fim de enfatizar relações quantitativas entre variáveis, demonstrar tendências de comportamento e estabelecer previsões.

O objetivo do exemplo a seguir é explorar o uso do gráfico como um meio de conhecimento matemático e de interpretação de fatos do dia a dia.

O gráfico abaixo ilustra uma previsão, segundo relatório de 2014 publicado pela ONU (Organização das Nações Unidas) para o ano de 2050, sobre o crescimento populacional em países pouco desenvolvidos como Paquistão, Nigéria, Indonésia e Bangladesh.



Além do objetivo específico de quantificação dos dados apresentados, o gráfico pode levar o leitor à formulação de questões a respeito de economia, controle de natalidade, saúde, entre outras, dos países mencionados e até mesmo fazer comparações com nosso país.

A maioria das situações propostas é baseada em dados reais (o mais atualizados possível) referentes, principalmente, aos aspectos da realidade brasileira: demografia, economia, saúde, educação, consumo e meio ambiente, por exemplo. Isso se deve ao fato de, além de possibilitar que os alunos entrem em contato e interpretem dados referentes à nossa realidade, esse trabalho auxiliar na compreensão de outras disciplinas do currículo, favorecendo a interdisciplinaridade e o estudo de temas essenciais para a formação do cidadão.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 52)

O tema abordado faz parte do cotidiano da maioria dos alunos e, assim, é possível que se sintam mais motivados a estudar as noções básicas de Estatística por meio de um processo investigativo pelo qual o estudante manuseie dados desde sua coleta até a construção de gráficos.

Após a coleta de dados, peça aos alunos que os organizem em tabelas segundo o conceito de frequência e completem-nas com os cálculos de frequência relativa, frequência acumulada.

Aproveite também para fazer algumas perguntas tais como: os assuntos que mais interessam a eles na internet, se os pais têm controle sobre o que eles fazem *on-line*; como se conectam à internet.

Desafio – Capitã ou capitão? (p. 63)

Uma sugestão é que o conceito básico de probabilidade seja repetidamente trabalhado, para que os alunos tenham condições de, nos casos mais simples, descrever todos os casos possíveis, identificando entre eles os casos favoráveis.

Esta atividade explora a noção de probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis de ocorrer um determinado evento e o número total de casos possíveis.

Como existem 15 (10 meninos e 5 meninas) resultados possíveis e o evento "ocorrer um menino" tem 10 casos favoráveis, dizemos que a probabilidade de a equipe ter um capitão é $\frac{10}{15}$ ou $\frac{2}{3}$ e a probabilidade de a equipe ter uma capitã é $\frac{5}{15}$ ou $\frac{1}{3}$.

Os meninos e as meninas poderiam ter chances iguais de serem sorteados nesse processo se mais 5 meninas fossem convidadas para serem candidatas ou se fossem retirados 5 meninos do sorteio. Existem outras respostas para este problema.

Troquem ideias e resolvam (p. 63)

A chance de se "obter coroa" em uma moeda não viciada é igual à chance de se "obter cara". Essa expectativa nem sempre se verifica em uma experiência com poucos lançamentos, pois é possível que as frequências relativas não sejam iguais a 0,5. Quanto mais lançamentos forem feitos, mais próximas de 0,5 estarão as frequências relativas.

O evento "ocorrer coroa" ou o evento "ocorrer cara" são eventos **equiprováveis**, ou seja, cada um deles tem **a mesma probabilidade** de ocorrer quando um experimento é realizado.

Sugestão de atividade complementar

Um roteiro para um trabalho de pesquisa

A pesquisa tem por finalidade obter dados por meio de processos adequados que possibilitem o conhecimento de determinada situação ou fenômeno. Permite, também, verificar uma hipótese ou solucionar um problema.

Para organizar e elaborar uma pesquisa, é necessário:

- decidir a respeito dos dados a serem coletados, dependendo da pesquisa que se deseja fazer;
- decidir se será utilizada toda a população ou apenas uma amostra. Por exemplo: se a população está definida como os alunos da sala, é perfeitamente possível trabalhar com toda ela;
- organizar os dados: usar símbolos de fácil visualização, tabular os dados (rol de dados em ordem crescente), fazer a distribuição por frequência (dados apresentados em porcentagem), usar tabelas, gráficos etc.;
- analisar quantitativamente os dados, determinando as medidas de distribuição: média aritmética, mediana, moda;
- fazer uma análise qualitativa dos dados com possíveis tomadas de decisão, conclusões, novas atitudes, propostas de soluções etc.

Escolha um tema, siga o roteiro apresentado e faça você uma pesquisa. Sugestões de pesquisa: "Quantos irmãos você tem?", "Quantas horas você estuda por dia?", "Que tipo de música você prefere?", "A que gênero de filme você gosta de assistir?" e assim por diante.

UNIDADE 4

Cálculo algébrico

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Expressões algébricas O que é expressão algébrica? Valor numérico Medidas e fórmulas **2. Monômios** O que são monômios? Forma reduzida Monômios semelhantes **3. Operações entre monômios** Adição e subtração Multiplicação e divisão Potenciação Simplificação de expressões algébricas **Leitura:** O uso de letras para decifrar o desconhecido	Espera-se que os alunos: • identifiquem monômios semelhantes; • compreendam que as expressões algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades numéricas e propriedades das operações aritméticas; • construam procedimentos para desenvolver técnicas e habilidades para o cálculo algébrico com monômios.

Orientações didáticas

No ensino de Álgebra empregamos letras para representar números. As letras são usadas como incógnitas nas equações e como variáveis nas identidades e nas fórmulas. Mas, nas fórmulas, é importante lembrar que uma variável pode se transformar, também, em incógnita.

Observe, por exemplo, a fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer:

$$a = \frac{b \cdot h}{2} \text{ ——— } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{h} \text{ são variáveis.}$$

Nela, **a** representa a área, **b**, a medida de um dos lados (base), e **h**, a medida da altura relativa a esse lado.

Se soubermos o valor de **a** e de **b**, por exemplo, poderemos escrever uma equação em que a incógnita será **h**:

$$\left.\begin{array}{l} a = 90 \text{ cm}^2 \\ b = 15 \text{ cm} \end{array}\right] \quad 90 = \frac{15 \cdot h}{2}$$

Outro aspecto relevante e fundamental para o bom desempenho dos alunos nesse campo da Matemática refere-se à compreensão da Álgebra como generalização da Aritmética.

Para dar maior significado e ajudar na compreensão das técnicas operatórias próprias da Álgebra, é necessário um tratamento comparativo entre operações e propriedades das expressões algébricas e operações e propriedades dos números. O ensino da Álgebra decorre da compreensão e da aplicação das operações e da busca de generalizações das propriedades das operações com números inteiros, racionais e reais.

A utilização de áreas de quadrados e retângulos, como diagramas e recursos gráficos que possam concretizar as situações das operações, auxilia no processo de abstração. Porém, devemos lembrar que esse recurso é limitado, pois nem sempre conseguimos um modelo geométrico para explicá-las.

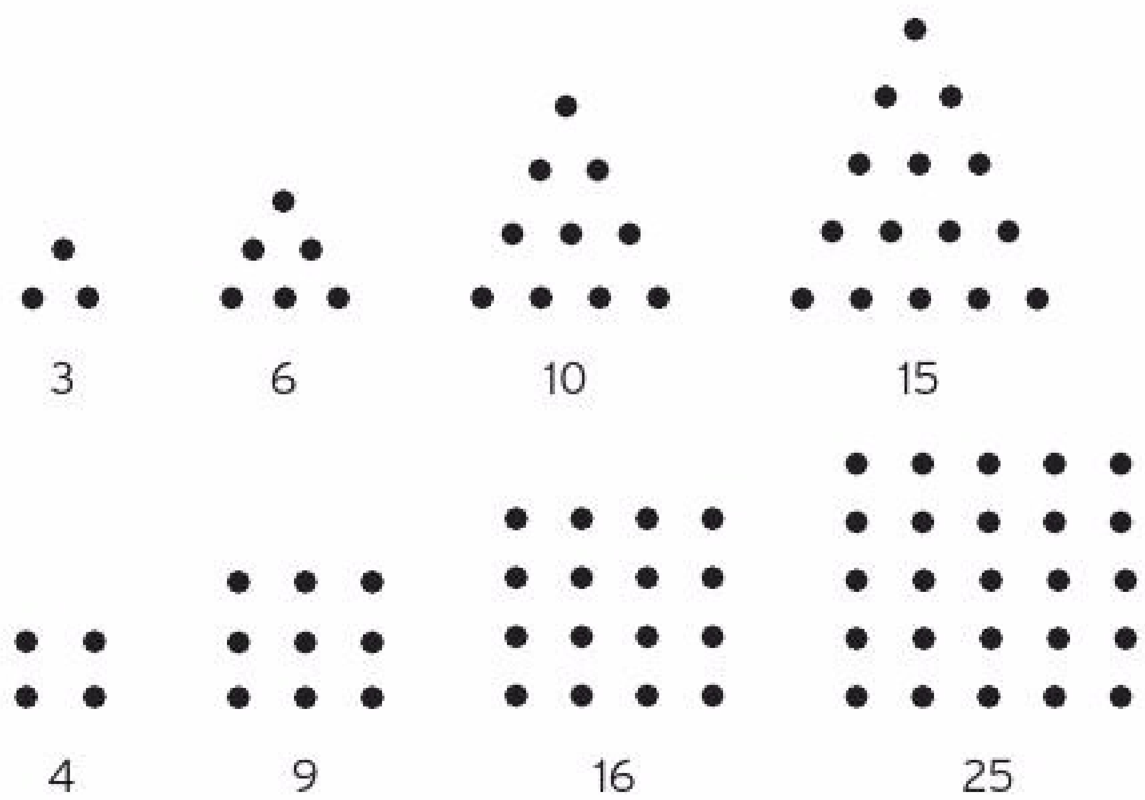
Texto de aprofundamento

Quando três era o casamento

Ao que se sabe, a Astrologia precedeu a Astronomia, a Química nasceu da Alquimia e a ciência dos números teve sua origem em uma espécie de Numerologia, que existe ainda nos dias de hoje. Nessa rota da história, por volta do século VI a.C., encontramos Pitágoras e seus discípulos, os **pitagóricos**, para quem as coisas perfeitas eram regidas pelos números naturais. Os números pares eram femininos, por serem solúveis, e os números ímpares, masculinos, por serem insolúveis. Eles atribuíam uma qualidade humana a cada número:

- o número 1 representava a razão, por ser imutável;
- o número 2, a opinião;
- o número 3, o casamento, por ser a soma do primeiro número feminino com o primeiro número masculino;
- o número 4, a justiça, por ser um quadrado perfeito, o produto de dois números iguais.

Nos tempos da Grécia clássica os números eram representados por pontos. Os números 3, 6, 10 e 15 eram **números triangulares**, por serem representados por triângulos, e os números 4, 9, 16 e 25 eram **números quadrangulares**, por serem representados por quadrados. Observe as configurações desses números:



Os pitagóricos já sabiam nessa época que "um número quadrangular de qualquer ordem é igual ao número triangular da mesma ordem, adicionado ao seu antecessor". Demonstravam esse fato observando os pontos nessas configurações e contando-os.

Hoje procedemos da seguinte forma:

- um número triangular de ordem **n** é igual à soma 1 + 2 + + 3 + ... + n, que é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão igual a 1 e que pode ser representada por $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$;
- da mesma forma, seu antecessor pode ser representado por $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$;
- adicionando os dois números, temos:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = n^2;$$

- n^2 é o quadrado de **n**, que é o quadrado de ordem **n**.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 72)

O processo de generalização está baseado na observação e caracteriza-se pela descoberta de regularidades que permitem levar à formulação de leis gerais.

Vamos apresentar duas resoluções para o problema.

1º modo

✓ Para 4 pessoas:

Cada pessoa dá 3 apertos de mão, então 4 pessoas dão $4 \times 3 = 12$.

Como cada aperto foi contado 2 vezes, temos: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

✓ Para 5 pessoas:

Cada pessoa dá 4 apertos de mão, então 5 pessoas dão 5 x 4 = 20.

Como cada aperto foi contado 2 vezes, temos: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

✓ Para 10 pessoas:

Cada pessoa dá 9 apertos de mão, então 10 pessoas dão $10 \times 9 = 90$.

Como cada aperto foi contado 2 vezes, temos: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

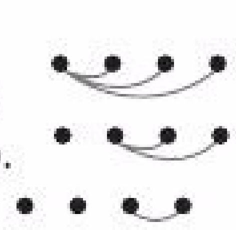
✓ Para **n** pessoas:

Cada pessoa dá (n − 1) apertos de mão, então **n** pessoas dão $(n \cdot (n-1))$.

Como cada aperto foi contado 2 vezes, temos:
$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

2º modo

✓ Para 4 pessoas:



A 1ª pessoa dá três apertos de mão.
A 2ª pessoa dá dois apertos de mão.
A 3ª pessoa dá um aperto de mão.
A 4ª pessoa já recebeu apertos de mão de todas as outras.

O número total de apertos de mão é igual a 3 + 2 + 1 = 6.

✓ Para 5 pessoas:

A 1ª pessoa dá quatro apertos de mão.
A 2ª pessoa dá três apertos de mão.
A 3ª pessoa dá dois apertos de mão.
A 4ª pessoa dá um aperto de mão.
A 5ª pessoa já recebeu apertos de mão de todas as outras.

O número total de apertos de mão é igual a 4 + 3 + 2 + 1 = 10.

✓ Para 10 pessoas:

O número total de apertos de mão é igual a 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45.

✓ Para **n** pessoas:

O número total de apertos de mão é igual a (n − 1) + (n − 2) + + ... + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.

Ao representarmos essa soma por **S**, verificaremos que **S** é a soma dos (n − 1) primeiros números naturais (P.A. de razão 1).

Logo, $S = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Pode-se propor aos alunos este problema:

- Vinte pessoas compareceram a um baile. Maria dançou com sete rapazes; Olga, com oito; Vera, com nove, e assim por diante, até Nina, que dançou com todos eles. Quantos rapazes havia na festa?

Troquem ideias e resolvam (p. 74)

Nesta atividade, enfatize que o raciocínio é muito importante, e não apenas a resposta. Por isso, solicite aos alunos que descrevam suas resoluções procurando registrar todas as passagens.

Resolução

$\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$.

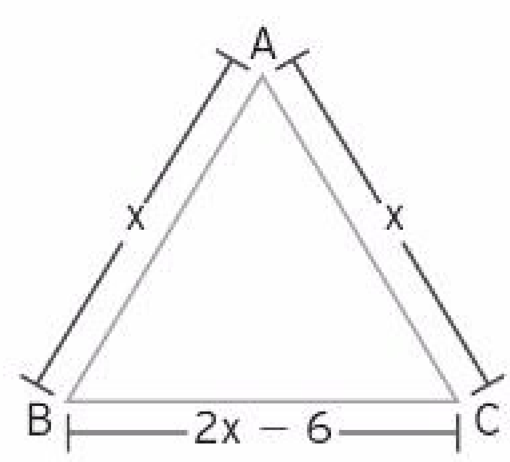
$x = \text{med}\,\overline{CA} = \text{med}\,\overline{AB}$

$\text{med}\,\overline{BC} = 2x - 6$

- O perímetro do $\triangle ABC$ é:

$\text{med}\,\overline{AB} + \text{med}\,\overline{BC} + \text{med}\,\overline{CA} =$

$= x + 2x - 6 + x = 4x - 6$



O perímetro do $\triangle ABC$ é representado por $4x - 6$.

- Para $x = 4{,}8$ cm, o perímetro desse triângulo é:

  $4x - 6 = 4 \cdot 4{,}8 - 6 = 19{,}2 - 6 = 13{,}2$ cm

  Para $x = 4{,}8$ cm, o perímetro é igual a 13,2 cm.

- Para perímetro igual a 26 cm, temos:

  $26 = 4x - 6$

  Resolvendo a equação de 1º grau:

  $4x = 26 + 6$ —— $x = \dfrac{32}{4}$ —— $x = 8$ cm

  $\text{med}\,\overline{AB} = x = 8$ cm

  $\text{med}\,\overline{BC} = 2x - 6 = 10$ cm

  Para um perímetro de 26 cm, o valor de x é igual a 8 cm. Nesse caso, os lados do triângulo medem 8 cm, 8 cm e 10 cm.

Desafio - Amizade: a palavra-chave (p. 83)

Esta atividade procura, de forma lúdica, dar oportunidade aos alunos para que expressem seus conhecimentos, identifiquem e apresentem suas dúvidas. Ajude-os a recuperar, organizar e aplicar as noções matemáticas já adquiridas.

Sugestão de atividade complementar

Soma de números consecutivos

Observe a seguir alguns números escritos como a soma de números consecutivos:

- 33 pode ser escrito como uma soma de três números consecutivos.
  $33 = 3 \cdot 11 = 11 + 11 + 11 = 10 + 11 + 12$
- 50 pode ser escrito como uma soma de cinco números consecutivos.
  $50 = 5 \cdot 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 8 + 9 + 10 + 11 + 12$
- 72 pode ser escrito como uma soma de:
  - ✓ três números consecutivos: $72 = 3 \cdot 24 = 23 + 24 + 25$
  - ✓ nove números consecutivos: $72 = 9 \cdot 8 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$

Agora, escreva os números 9, 28 e 30 como a soma de números consecutivos.

Resposta

Respostas possíveis:

$9 = 3 \cdot 3 = 2 + 3 + 4$ (três números consecutivos)

$28 = 4 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ (sete números consecutivos)

$30 = 6 \cdot 5 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ (cinco números consecutivos)

UNIDADE 5 Polinômios e operações

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Polinômios Binômios, trinômios e polinômios Polinômio na forma reduzida Valor numérico de um polinômio **2. Polinômio com uma variável** Ampliando o estudo de polinômios Grau de um polinômio com uma variável Polinômios completos **3. Adição e subtração de polinômios** Adição Subtração Relação entre adição e subtração **4. Multiplicação e divisão de polinômios** Multiplicação de monômio por polinômio Multiplicação de polinômio por polinômio Divisão de polinômio por monômio Divisão de polinômio por polinômio Relação entre a multiplicação e a divisão **Leitura:** Álgebra e generalizações	Espera-se que os alunos: • reconheçam polinômios completos e incompletos; • efetuem operações com polinômios e monômios; • desenvolvam técnicas e habilidades de cálculos com polinômios.

Orientações didáticas

Nesta unidade, não damos ênfase ao trabalho com polinômios com muitos termos e com mais de duas variáveis. Os expoentes das variáveis, na maioria das vezes, não excedem a três. A ênfase a ser dada é ao trabalho com expressões simples, com uma ou duas variáveis que possuam expoentes **1** e **2**, pois a maior parte do cálculo literal que se emprega no Ensino Fundamental e no Médio se reduz a expressões desse tipo.

Além disso, para concretizar as situações das operações com polinômios, a utilização de áreas de quadrados e retângulos, como diagramas e recursos gráficos, auxilia no processo de abstração. É importante que as justificativas antecedam as regras práticas, pois isso possibilita maior compreensão dessas regras.

Texto de aprofundamento

A história da linguagem algébrica

No processo de evolução da escrita algébrica é possível destacar três fases: retórica, sincopada e simbólica.

A **fase retórica** ou verbal compreende o período que vai de 1700 a.C. a 250 d.C.

Os documentos de que dispomos sobre essa fase foram extraídos dos tabletes babilônicos e dos papiros egípcios. E as operações eram indicadas com palavras por escrito, o que originava processos muito complicados.

Somente os egípcios representavam, em algumas ocasiões, um par de pernas andando em direção à escrita, para expressar a soma, e um par de pernas invertidas, para expressar a diferença.

Até o século III da nossa era, essa foi a maneira de trabalhar com os problemas algébricos. Nesse século, viveu Diofanto de Alexandria, o mais importante algebrista grego, e com ele teve início a **fase sincopada** da Álgebra. Nessa fase, introduzem-se paulatinamente algumas abreviações de palavras comuns para simplificar a resolução de problemas.

A fase sincopada ou abreviada vai desde o século III d.C. até o século XVI. Durante todo esse período as ciências, e particularmente a Álgebra, no mundo ocidental, passam por uma fase de obscurantismo, em que as únicas contribuições que chegaram a nós foram feitas por hindus e árabes, sem que introduzissem, no entanto, grandes diferenças na escrita algébrica.

A **fase simbólica** teve início no século XVI e foi criada em 1591 por François Viète (1540-1603), matemático francês que introduziu a notação algébrica nos estudos da Geometria e sistematizou a utilização de sinais e operações.

Em 1638, aparece a obra do filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), que empregou as primeiras letras do alfabeto (**a**, **b** e **c**) para designar as quantidades conhecidas e as últimas letras (**x**, **y** e **z**) para designar as incógnitas. Posteriormente, foram usados também a notação exponencial e os símbolos com sintaxe própria. Com isso, conclui-se o longo processo evolutivo do simbolismo algébrico.

Seria interessante solicitar aos alunos que construam uma linha do tempo assinalando cada período e destacando alguns acontecimentos históricos importantes para a humanidade. É possível fazer um trabalho integrado com a disciplina de História.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 90)

O momento é de realização de situações nas quais os estudantes poderão testar hipóteses e verificar, experimentalmente, procedimentos matemáticos que serão generalizados e provados na próxima unidade.

Resolução

- Para $a = 3$ e $b = -7$, temos:
  $A = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot (-7) + (-7)^2 = 9 + 42 + 49 = 100$
  $B = (3 - (-7))^2 = (3 + 7)^2 = 10^2 = 100$
- O valor numérico de A é igual ao valor numérico de B, para $a = 3$ e $b = -7$.
- Por exemplo, para $a = -2$ e $b = 5$, temos:
  $C = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 5^2 = 4 - 20 + 25 = 9$
  $D = (-2 + 5)^2 = 3^2 = 9$
  O valor numérico de C é igual ao valor numérico de D, para $a = -2$ e $b = c$.
  Por exemplo, para $a = 1$ e $b = -8$
  $C = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-8) + (-8)^2 = 1 - 16 + 64 = 49$
  $D = (1 - 8)^2 = (-7)^2 = 49$
  O valor numérico de C é igual ao valor numérico de D, para $a = 1$ e $b = -8$.

Troquem ideias e resolvam (p. 93)

Resolução

- Calculamos o valor de **a** para o qual o valor numérico do polinômio é igual a 7, resolvendo a seguinte equação:
  $\frac{2}{3}a - 1 = 7$
  $\frac{2}{3}a = 7 + 1$
  $\frac{2}{3}a = 8$
  $a = \frac{8 \cdot 3}{2}$
  $a = 12$
  O valor numérico do polinômio é igual a 7 para **a** igual a 12.
- Para que o valor numérico de $z^6 - 32z + 150$ seja igual a 150, temos:
  $z^6 - 32z + 150 = 150 \longrightarrow z^6 - 32z = 0$.
  Como $z \cdot (z^5 - 32) = z^6 - 32z$, podemos escrever:
  $z \cdot (z^5 - 32) = 0$
  Sabemos que um produto é zero quando um dos fatores é zero, então:
  $z = 0$ ou
  $z^5 - 32 = 0 \longrightarrow z = 2$
  O polinômio tem valor numérico 150 para $z = 0$ e para $z = 2$.

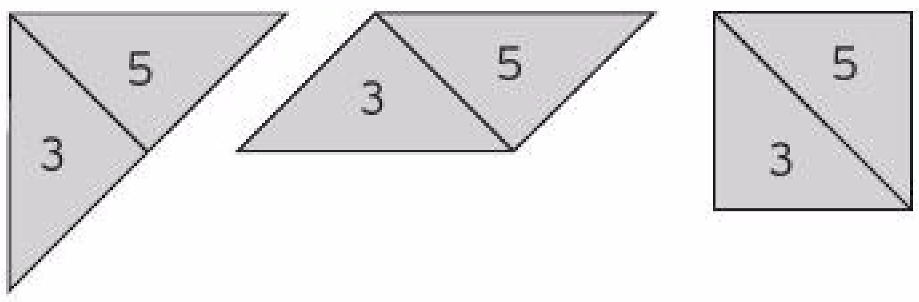
Desafio – Peças do tangram e expressões algébricas (p. 97)

Uma proposta desta atividade é deduzir as fórmulas das áreas de alguns triângulos retângulos e quadriláteros, usando a composição e a decomposição de peças do tangram.

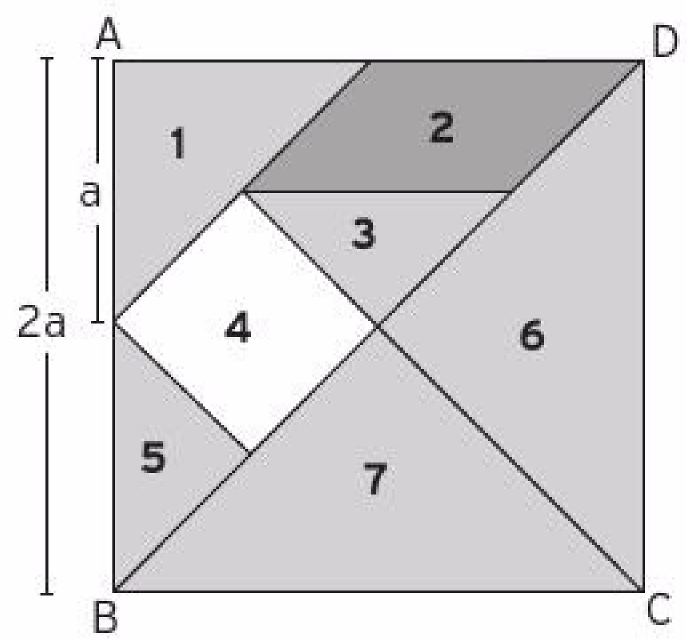
- O tangram é composto de 7 peças:
  5 triângulos retângulos: peças 1, 3, 5, 6 e 7;
  1 quadrado: peça 4.
  1 paralelogramo: peça 2.

Essas peças formam o quadrado ABCD.

- Com os triângulos retângulos 3 e 5 pode-se compor: o triângulo retângulo 1, o paralelogramo 2 e o quadrado 4.



- Se **a** representa a metade da medida do lado do quadrado ABCD, então a medida do lado desse quadrado é igual a 2a.



A área do quadrado ABCD = $(2a)^2 = 4a^2$.

área 1: $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2} = \dfrac{a \cdot a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

A área do triângulo 2 e do quadrado 4 são iguais à área do triângulo retângulo 1: $\dfrac{a^2}{2}$.

A área do triângulo retângulo 3 e do triângulo retângulo 5 são iguais à metade da área do triângulo retângulo 1: $\dfrac{a^2}{2} : 2 = \dfrac{a^2}{4}$

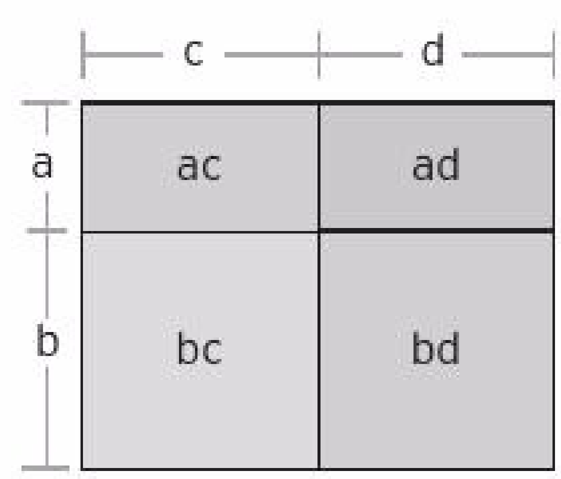
A área do triângulo retângulo 6 e do triângulo retângulo 7 são iguais à um quarto da área do quadrado ABCD: $4a^2 : 4 = a^2$

- área 1 + área 2 + área 4 + área 3 + área 5 + área 6 + + área 7 = $\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + a^2 + a^2 =$

$$= \frac{2a^2 + 2a^2 + 2a^2 + a^2 + a^2 + 4a^2 + 4a^2}{4} = \underbrace{4a^2}_{\text{Área do quadrado inicial}}$$

Troquem ideias e resolvam (p. 101)

Escrevendo as dimensões do retângulo, como na figura, obtém-se:



Área total = $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

A área do retângulo é representada pelo produto dos binômios $(a + b)$ e $(c + d)$.

Desafio – Teste o seu raciocínio (p. 104)

Sabemos que: dividendo = (divisor · quociente) + resto.

Estendendo essa propriedade para os polinômios, temos:

$$-30x^3 + 23x^2 + 38x - 28 = (-6x + 7)\,(5x^2 + 2x - 4) + 0$$

$$\begin{array}{r|l} -30x^3 + 23x^2 + 38x - 28 & -6x + 7 \\ \hline 0 & 5x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r|l} -30x^3 + 23x^2 + 38x - 28 & 5x^2 + 2x - 4 \\ \hline \underset{\downarrow}{0} & \underset{\downarrow}{-6x + 7} \\ R & P \end{array}$$

Então, $P = -6x + 7$ e $R = 0$.

Sugestão de atividade complementar

"Pirâmide" algébrica

Os números indicados na figura obedecem a uma determinada regra. Descubra essa regra e complete a "pirâmide".

$-13a$	a			
$-7a$	$-6a$	$7a$		
$-a$	$-6a$	0	$7a$	
$6a$	$-7a$	a		

Resposta

Uma maneira de escrever a regra da "pirâmide": subtraindo o número que está em um "tijolo" pelo número que está em um "tijolo" abaixo e à esquerda, obtém-se o número que está no "tijolo" abaixo e à direita.

$-12a$				
$-13a$	a			
$-7a$	$-6a$	$7a$		
$-a$	$-6a$	0	$7a$	
$6a$	$-7a$	a	$-a$	$8a$

UNIDADE 6

Simetria, movimentos e padrões em Geometria

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Simetria Simetria axial Desenhando figuras simétricas Simetria central Movimentos e padrões **2. Movimentos em Geometria** O movimento de reflexão O movimento de translação O movimento de rotação **3. Propriedades geométricas** Movimentos e propriedades geométricas **4. Padrões e ladrilhamentos** Padrões e movimentos geométricos **Leitura:** Escher, o gênio da arte matemática	Espera-se que os alunos: • desenvolvam noções de simetria presentes em figuras bidimensionais a partir de observações de padrões geométricos; • reconheçam figuras simétricas e identifiquem seus eixos de simetria; • se apropriem de procedimentos de obtenção de padrões geométricos e mosaicos, observando simetrias; • construam procedimentos de obtenção de mosaicos aplicando os movimentos de reflexão, translação e rotação sobre figuras geométricas e figurativas; • reconheçam a conservação de algumas propriedades em figuras planas sujeitas a movimentos de reflexão, translação ou rotação; • desenvolvam o conceito de congruência de figuras planas apoiados em transformações geométricas; • desenvolvam habilidades em ladrilhamento de partes de um plano.

Orientações didáticas

Neste volume, damos continuidade ao tratamento intuitivo dado aos conceitos da Geometria, como idealização geométrica dos objetos do mundo físico, tendo como pressuposto que o conhecimento é resultado da elaboração e da reelaboração constantes dos conceitos.

A proposta desta coleção consiste em apresentar a Geometria, na medida do possível, associada a um problema prático ou ao manuseio de algum material didático.

A análise e o uso de padrões disponibilizam aos alunos recursos que favorecem o estudo das características e das propriedades de um movimento em Geometria (transformações geométricas) e possibilitam destacar as que são consideradas relevantes e observar as que coincidem. Com isso, os alunos poderão ensaiar possíveis organizações e tentar verificar se elas se conservam em todos os casos. Os padrões e a simetria contribuirão para a resolução de problemas, além de auxiliar na compreensão e na apropriação do conceito de congruência de figuras geométricas.

Texto de aprofundamento

Padrões

O que é padrão?

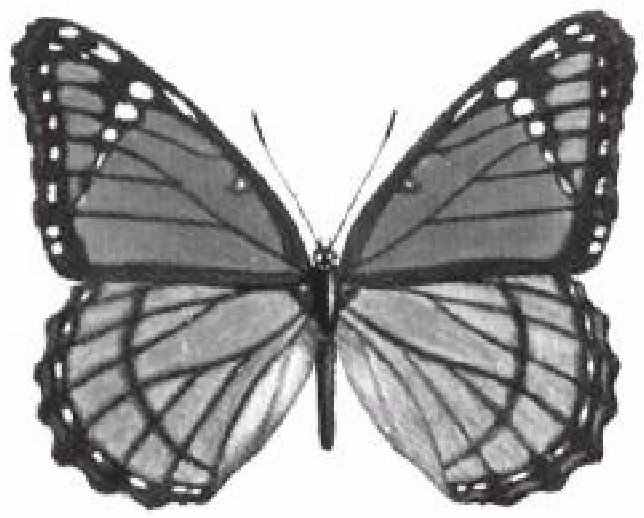
Segundo o dicionário *Houaiss*, "padrão é qualquer objeto que serve de modelo para outro".

O mundo em que vivemos está rodeado de padrões. Em Matemática, esse conceito não é muito diferente.

Matemáticos e cientistas buscam padrões, por exemplo, em resultados de experiências ou em problemas com que se defrontam, pois a descoberta de regularidades muitas vezes leva a novas e importantes ideias.

Por meio do estudo de padrões, os alunos poderão aprender muito sobre a Matemática. Há padrões numéricos e padrões geométricos que também são conhecidos como modelos visuais. A Matemática vive praticamente em torno da busca de modelos para resolver problemas.

Os padrões podem fazer uso das simetrias axial e central, que, em situações concretas, contribuem para a resolução de diferentes problemas. Podemos observar, na própria natureza, exemplos que dão a ideia de simetria axial, como em uma mariposa ou borboleta, e central, como em flocos de neve.


CONCEITOGRAF

Borboleta.


CONCEITOGRAF

Flocos de neve.

Dar continuidade a um padrão ou criar um padrão pode envolver muitos processos e ideias: organização, desenho, lógica, congruência, ordem, relações e, como vimos, simetria.

Simetria

A ideia de simetria pode estar presente nas borboletas, no rosto de pessoas e animais, nas flores, nas construções, no reflexo na água, em alguns desenhos em cerâmicas etc., proporcionando interessantes oportunidades para apreciarmos a Geometria no mundo da arte, tanto na natureza quanto nas construções.

A palavra **simetria** deriva do grego *sinmétron, sin* (com) e *métron* (medida). Essa palavra foi, muitas vezes, traduzida como "comensurável" ou "proporção", embora não haja uma correspondência de significado entre esses dois termos.

Uma forma com simetria apresenta uma relação das partes do todo entre si e com o próprio todo, tem harmonia de posição, possui pontos similares e equivalentes e conserva a regularidade no espaço. Isso dá a proporção adequada da arte grega.

A simetria em relação a uma reta permite obter uma figura idêntica à original, chamada **imagem**. Atividades exploratórias sobre simetria poderão ser construídas sobre papel quadriculado e sobre papel branco, por dobradura ou por sobreposição (decalque).

Fonte: ROHDE, Geraldo M. *Simetria*. São Paulo: Hemus, 1982.

Comentários e resolução de atividades

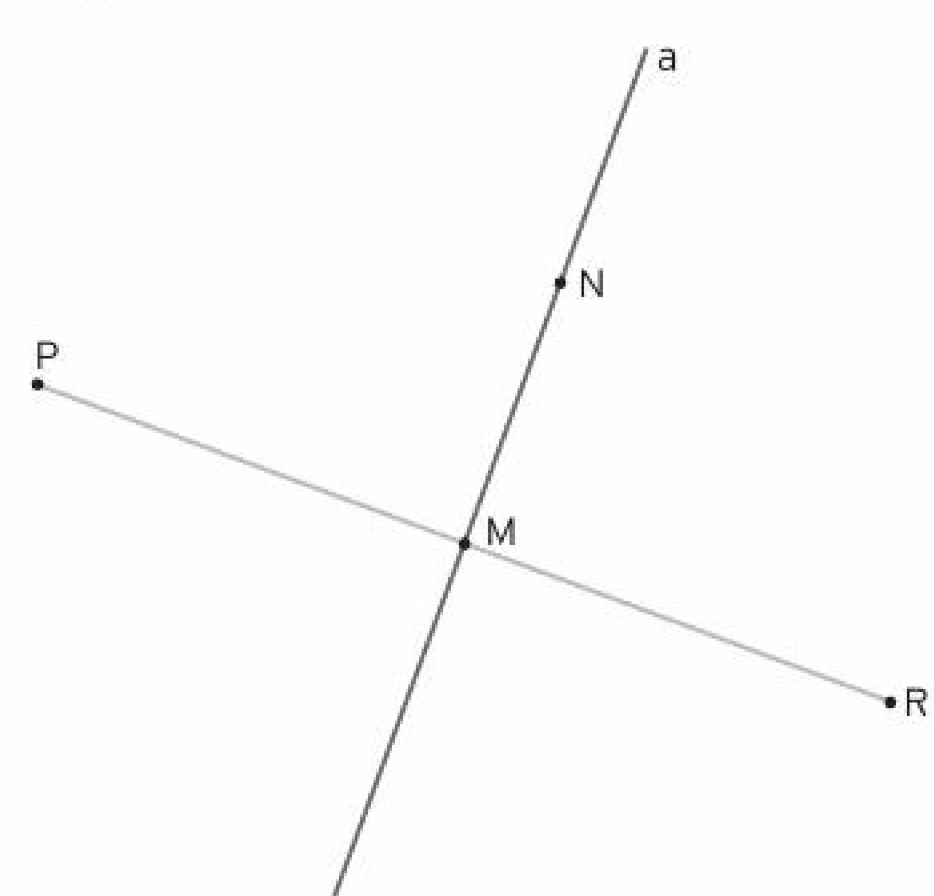
Investigue e explique (p. 114)

Nesta atividade os alunos têm a oportunidade de reconhecer a mediatriz de um segmento de reta como sendo um lugar geométrico. Se for possível, faça cópias do desenho e forneça aos alunos para que eles resolvam as questões propostas.

Espera-se que, seguindo a sequência de questões apresentadas, os alunos consigam responder à pergunta: "Os pontos da mediatriz de um segmento de reta são equidistantes das extremidades desse segmento de reta?". Caso isso não ocorra faça uma análise de todas as questões apresentadas e formule tal questão.

Nesta fase a validação de tal hipótese é feita empiricamente por meio de medições. Informe aos alunos que a demonstração lógica de tal propriedade será realizada em anos posteriores.

Resolução



- Por meio de um compasso é possível verificar que med $\overline{PM}$ = med $\overline{RM}$, ou seja, **M** é ponto médio de $\overline{PR}$. Do enunciado, temos que as retas **a** e $\overleftrightarrow{PR}$ são perpendiculares. Logo, a reta **a** é mediatriz de $\overline{PR}$.
- Como $\overleftrightarrow{PR} \perp$ **a** e med $\overline{PM}$ = med $\overline{RM}$, **P** e **R** são pontos simétricos em relação à reta **a**.
- Sim, a comparação poderá ser feita por meio de um compasso ou uma régua.
- A partir da construção, é possível verificar que um ponto de **a** é equidistante de **P** e de **R**.

Desafio – Movimentos e figuras geométricas produzindo arte (p. 120)

Uma ideia que poderá auxiliar os alunos no desenvolvimento desta atividade é reproduzir a primeira figura e colorir ambos os lados da cartolina da mesma maneira.

Oriente os alunos na obtenção de um triângulo equilátero desenhando-o, ao mesmo tempo que eles, no quadro de giz seguindo as etapas apresentadas.

Resolução

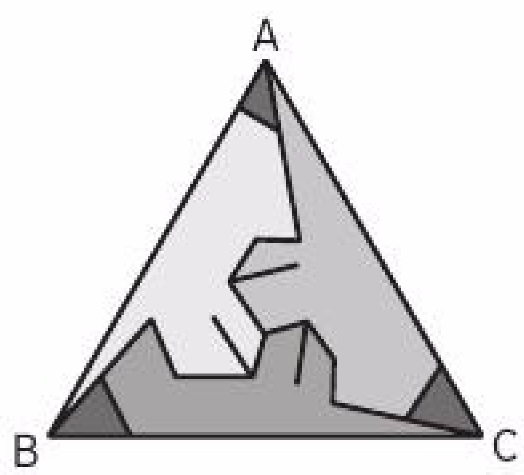


Figura 1

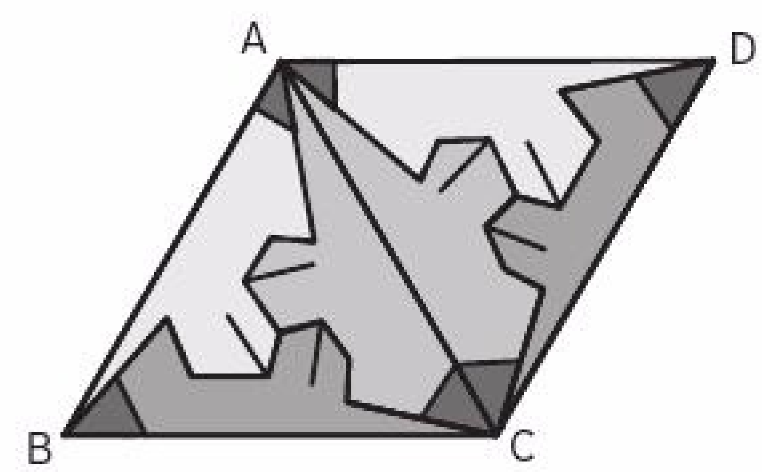


Figura 2

- Comparando a figura 1 e a figura 2, nota-se que o vértice D é a imagem simétrica de B em relação à $\overleftrightarrow{AC}$, que é um eixo de simetria da figura 2. Pelo movimento de reflexão, foi possível obter a figura 2, partindo da figura 1.

Se achar conveniente, peça aos alunos que exponham os desenhos obtidos.

Desafio – Composição de tetraedros que têm movimento (p. 124)

Esta é uma atividade lúdica em que o objetivo principal é proporcionar ao aluno oportunidade de desenvolver sua criatividade compondo elementos geométricos.

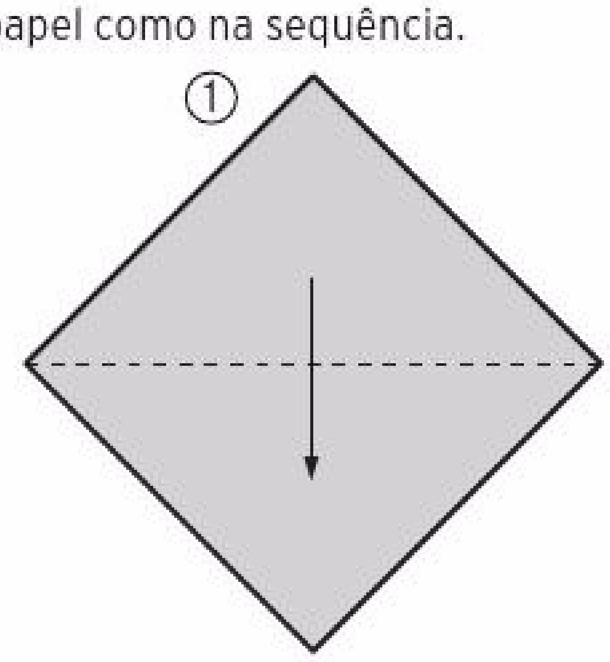
O tempo dedicado a ela poderá ser otimizado orientando os alunos a produzirem oito tetraedros iguais, em cartolina, seguindo o molde apresentado, mas modificando o desenho. Se achar conveniente, a montagem do caleidociclo poderá ser feita também em casa e os trabalhos poderão ser expostos em sala de aula.

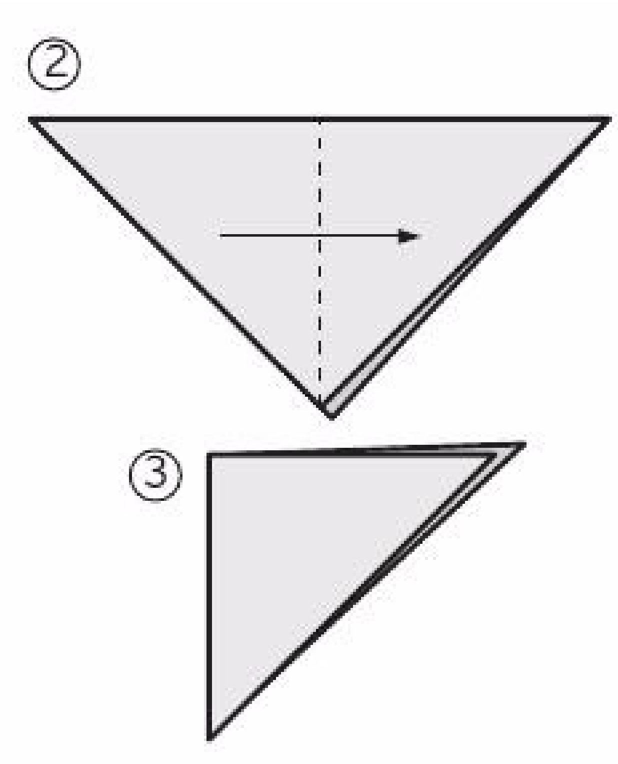
Sugestões de atividades complementares

Obtendo figuras simétricas

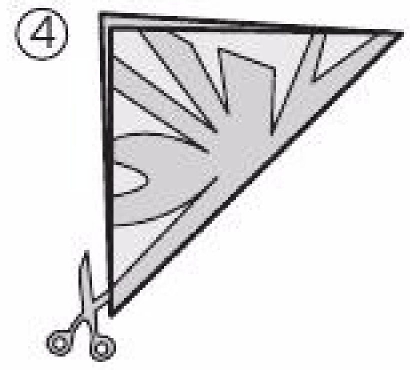
Vamos obter figuras a partir de dobraduras e recortes no papel, seguindo o procedimento a seguir:

Dobre o papel como na sequência.





Recorte o papel formando uma figura como no exemplo.



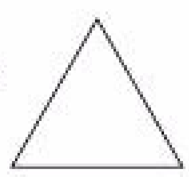
- Abra a folha e veja o desenho obtido.
- Você consegue identificar um eixo de simetria na figura obtida?
- Inventem dobraduras e recortes para obter outras figuras.

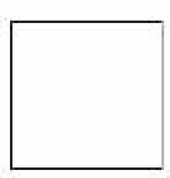
Comentário

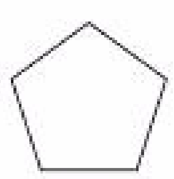
Esta **atividade**, além de estimular a criatividade, propicia a avaliação do aprendizado de conceitos, como paralelismo e perpendicularismo de retas, e das propriedades dos quadriláteros. Para realizar as atividades, é necessário usar dobraduras e conhecer ideias relacionadas à simetria.

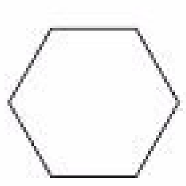
Traçando eixos de simetria

Trace os eixos de simetria de cada polígono a seguir:

a) triângulo equilátero: 

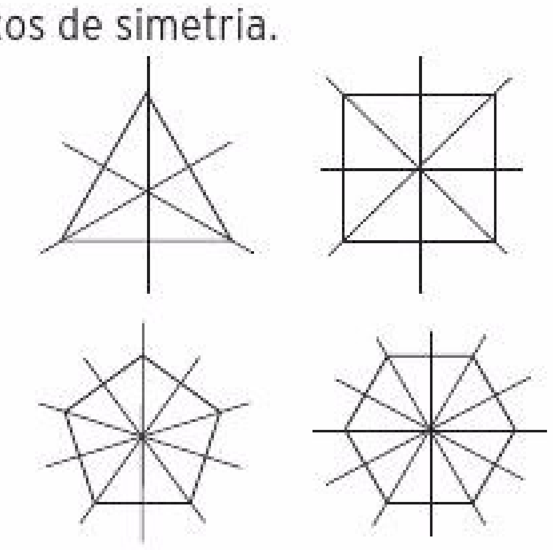
b) quadrado: 

c) pentágono regular: 

d) hexágono: 

Comentário

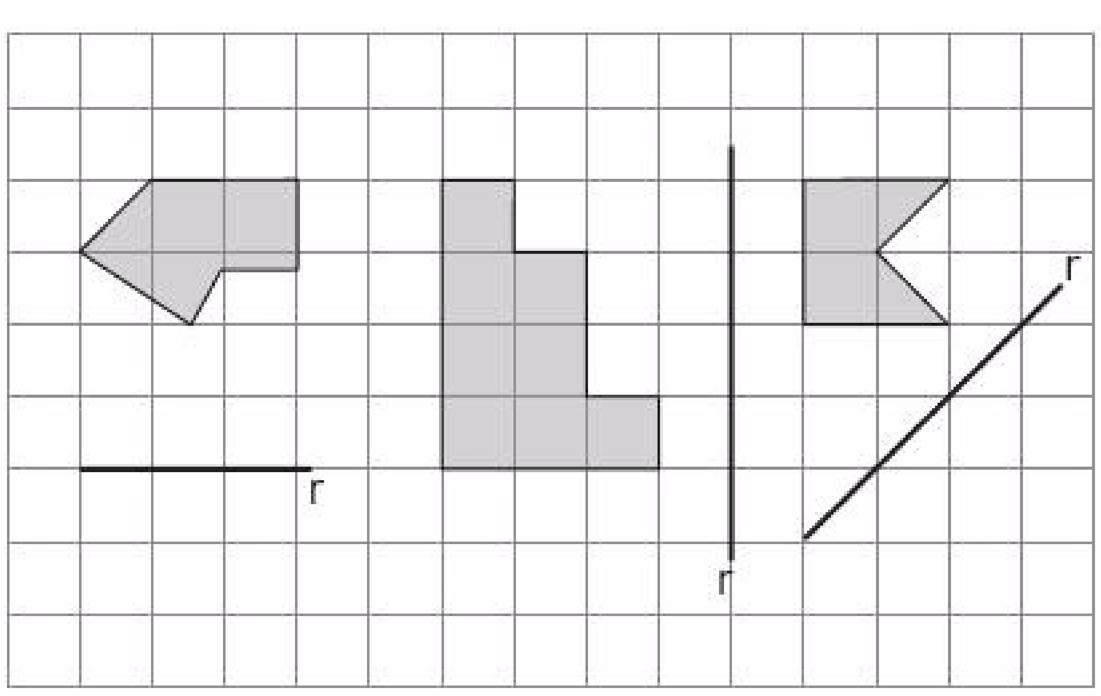
Providencie cópias com os polígonos para que os alunos construam os eixos de simetria.



Se achar oportuno, peça aos alunos que observem a regularidade entre o número de lados do polígono e a quantidade de eixos de simetria.

Construindo figuras simétricas

Reproduza cada uma das figuras a seguir em uma folha de papel quadriculado e desenhe o simétrico de cada uma, considerando a reta **r** como eixo de simetria.



Compare cada figura com seu simétrico, dobrando a folha de papel sobre a reta **r**.

Comentário

Trabalhos experimentais como este permitem que os alunos se apropriem da noção de simetria em relação a uma reta, constatem e verifiquem a conservação das formas (comprimentos e ângulos), reconheçam os eixos de simetria de diferentes figuras simples e identifiquem as propriedades que caracterizam a simetria.

UNIDADE 7 Produtos notáveis e fatoração

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Produtos notáveis Quadrado da soma de dois termos Quadrado da diferença de dois termos Produto da soma pela diferença de dois termos Produto do tipo $(x + a) \cdot (x + b)$ Cubo da soma de dois termos **2. Fatoração de polinômios** O que é fatoração? Casos de fatoração Fator comum em evidência Fatoração por agrupamento Fatoração da diferença de dois quadrados **3. Fatoração de trinômios de 2º grau** Trinômio quadrado perfeito Trinômio de 2º grau **Leitura:** Generalização, produtos notáveis e fatoração	Espera-se que os alunos: • identifiquem os casos de produtos notáveis; • compreendam a fatoração como a decomposição de polinômios em produtos de outros polinômios; • identifiquem quais casos de fatoração será necessário utilizar para fatorar um polinômio; • reconheçam formas fatoradas de uma expressão algébrica.

Orientações didáticas

Preocupamo-nos, fundamentalmente, com o significado e a compreensão das regras de cálculo. Nesse sentido, a interpretação geométrica auxilia na abordagem do assunto tratado, na medida em que o concreto subsidia a abstração necessária à compreensão da Álgebra.

Conceitos, propriedades e questões algébricas podem ser desenvolvidos com o uso de modelos geométricos, pois eles favorecem a visualização, a representação e a identificação de elementos. A técnica e a habilidade de cálculo são resultado de um trabalho não só repetitivo, mas cuidadosamente graduado e criativo, na medida do possível.

Explicitar que a fatoração, o "caminho de volta" do produto de polinômios por polinômios, auxilia nas simplificações algébricas.

Alguns casos de fatoração são abordados usando-se áreas de quadrados e retângulos, o que dá certo significado geométrico à Álgebra. Vale a pena lembrar que a repetição exaustiva não garante a aprendizagem. É preciso procurar os caminhos do significado e da compreensão das regras do cálculo literal.

Texto de aprofundamento

Generalização

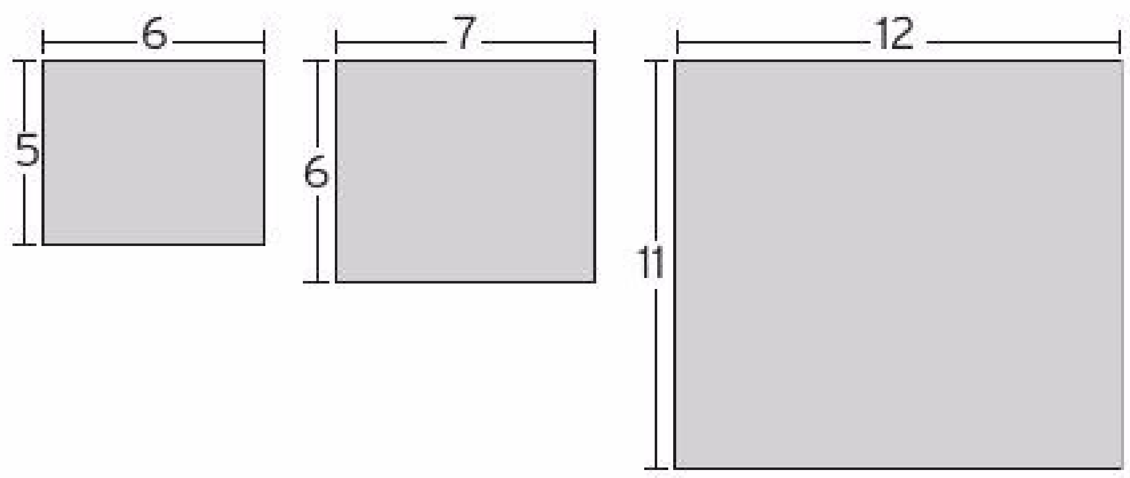
Uma concepção bastante utilizada na Álgebra é a de generalização de modelos. Ela se baseia na observação e se caracteriza pela descoberta de regularidades que permitem formular leis gerais.

Ver e expressar aspectos gerais é fundamental no desenvolvimento de conceitos dentro e fora da Matemática. Por isso, a realização e a exploração de atividades de generalização são necessárias no ensino da Matemática.

Para explorar regularidades numéricas ou geométricas, peça aos alunos que considerem a princípio todas as características e as propriedades que eles conseguirem lembrar. Peça que observem as que coincidem. Para isso, eles poderão contar ou medir quando for pertinente, decompor figuras, caso existam, ensaiar possíveis organizações e tentar verificar se elas são válidas em todos os casos.

Como exemplo, proponha este problema:

Qual é a área de um retângulo de dimensões 5 cm e 6 cm? E de 6 cm e 7 cm? E de 11 cm e 12 cm?



Pense em outros casos parecidos e represente-os. Expresse o que há de comum entre eles e generalize o problema.

Quando buscamos uma generalização, está sempre subjacente a formulação de conjecturas. Elaborar conjecturas é uma atividade matemática muito rica.

Troquem ideais e resolvam (p. 138)

- Representando por **a** e **b** os dois números positivos:

  $a \cdot b = 12$

  $a^2 + b^2 = 25$

  Usando o quadrado da soma, temos:

  $(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2} + 2ab$

  $(a + b)^2 = 25 + 2 \cdot 12$

  $(a + b)^2 = 25 + 24 = 49$

  O quadrado da soma desses números é 49.

- Representando os números por **m** e **n**:

  $m \cdot n = 36$

  $m^2 + n^2 = 97$

  Quadrado da diferença: $(m - n)^2$

  $(m - n)^2 = \underbrace{m^2 + n^2} - 2mn$

  $(m - n)^2 = 97 - 2 \cdot 36 = 97 - 72 = 25$

  O quadrado da diferença desses números é 25.

Investigue e explique (p. 138)

Esta atividade possibilita que os alunos apliquem produtos notáveis como artifícios de cálculo e generalizem procedimentos.

Resolução

Para calcular 45^2, multiplica-se 4 (o algarismo da dezena) pelo número inteiro consecutivo, que é o 5. Escreve-se a resposta, 20, seguida de 25. Assim, $45^2 = 2025$.

Após o estudo da fatoração, pode-se mostrar por que esse artifício funciona para qualquer número de dois algarismos que termina em 5.

Um número nessas condições pode ser escrito na forma $10n + 5$, em que **n** representa o algarismo das dezenas do número. Assim:

$$(10n + 5)^2 = 10^2n^2 + 2 \cdot 10n \cdot 5 + 5^2$$

$$(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25$$

$$(10n + 5)^2 = 100 \cdot n \cdot (n + 1) + 25$$

Multiplicar por 100 é colocar zero na casa das unidades e das dezenas.

Algarismo das dezenas.

Número inteiro seguinte ao algarismo das dezenas.

Como há um 0 (zero) na casa das dezenas e um 0 (zero) na casa das unidades, adicionar 25 é o mesmo que colocar um 5 na casa das unidades e um 2 na casa das dezenas.

Caso o número tenha centenas, como, por exemplo, 195, a regra poderá ser estendida considerando-se agora $n = 19$. Veja:

$$\begin{aligned}195^2 &= (10 \cdot 19 + 5)^2 = (10 \cdot 19)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 19 \cdot 5 + 5^2 = \\ &= 100 \cdot 19^2 + 100 \cdot 19 + 25 = \\ &= 100 \cdot 19 \cdot (19 + 1) + 25 = \\ &= 100 \cdot 19 \cdot 20 + 25\end{aligned}$$

Assim, para calcular 195^2 multiplica-se 19 pelo seu sucessor, que é 20. Escreve-se o produto, 380, seguido de 25, ou seja, $195^2 = 38\,025$.

Desafio – Produtos notáveis e potências (p. 141)

Este desafio procura de forma lúdica articular alguns conteúdos matemáticos estudados: produtos notáveis, potências e valores numéricos de expressões algébricas.

Resolução

- $(x + 4)^2 + (x + 2)^2 - (x + 3)^2 - (x + 1)^2 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 4x + 4 - x^2 - 6x - 9 - x^2 - 2x - 1 = 4x + 10$
- $104^2 + 102^2 - 103^2 - 101^2 =$
  $= (100 + 4)^2 + + (100 + 2)^2 - (100 + 3)^2 - (100 + 1)^2$

  Então, nesse caso o valor de **x** é 100.
- Para $x = 100$, temos:
  $(x + 4)^2 + (x + 2)^2 - (x + 3)^2 - (x + 1)^2 =$
  $= 4x + 10 = 4 \cdot 100 + 10 = 410$
- $34^2 + 32^2 - 33^2 - 31^2 =$
  $= (30 + 4)^2 + (30 + 2)^2 - (30 + 3)^2 - (30 + 1)^2 =$
  $= 4 \cdot 30 + 10 = 130$

Desafio – Expressões cruzadas (p. 144)

Como as palavras cruzadas, as expressões cruzadas têm a finalidade de estimular a memória. Além disso, colaboram para a compreensão das operações com polinômios.

O recurso de se usar esse suporte pedagógico em sala de aula de modo lúdico colabora para desenvolver nos estudantes a técnica e a habilidade de cálculo algébrico de forma não repetitiva.

Sugestão de atividade complementar

Produtos notáveis e números consecutivos

Carlos fez uma interessante descoberta: escreveu três números consecutivos, elevou ao quadrado o segundo número e multiplicou o primeiro pelo último.

Por exemplo, para os três números consecutivos 5, 6 e 7, ele escreveu:

$6^2 = 36$ e $5 \cdot 7 = 35$

Repetiu o mesmo com várias sequências de três números consecutivos. O que ele observou? É possível você explicar por que isso sempre acontece?

Resolução

Carlos observou que o produto do primeiro número pelo último é igual ao quadrado do segundo número, menos uma unidade.

Podemos provar que isso é válido para qualquer número natural **n** $(n > 1)$, cujo antecessor é $n - 1$ e o sucessor $n + 1$.

A sequência dos três consecutivos é: $n - 1$; n; $n + 1$.

Segundo número elevado ao quadrado: n^2

Produto do primeiro número pelo último: $(n - 1) \cdot (n + 1) = n^2 - 1$.

Assim, o produto do primeiro número pelo último é igual ao quadrado do segundo número menos uma unidade.

UNIDADE 8 Retas coplanares e ângulos

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Retas coplanares O que são retas coplanares? Posições relativas de duas retas coplanares Retas paralelas interceptadas por uma transversal Retas não paralelas e uma reta transversal **2. Relações entre ângulos** Ângulos opostos pelo vértice Ângulos correspondentes Ângulos colaterais Ângulos alternos **3. Retas paralelas e ângulos de um triângulo** Soma dos ângulos internos de um triângulo **Leitura:** Euclides e retas paralelas	Espera-se que os alunos: • identifiquem as posições relativas entre duas retas coplanares; • identifiquem ângulos congruentes e ângulos suplementares em um feixe de retas paralelas cortadas por uma reta transversal; • nomeiem pares de ângulos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal; • utilizem as propriedades estabelecidas em resolução de problemas; • reconheçam a importância das demonstrações em Geometria.

Orientações didáticas

A importância do estudo de duas retas paralelas interceptadas por uma transversal está na relação entre alguns pares de ângulos (congruentes ou suplementares) que se formam nessa situação. A aplicação das propriedades de congruência entre pares de ângulos se torna mais fácil se simplificarmos para esta propriedade:

Quando duas retas paralelas são interceptadas por uma transversal:

– todos os ângulos agudos são congruentes entre si;

– todos os ângulos obtusos são congruentes entre si;

– todos os pares de ângulos, em que um é agudo e o outro, obtuso, são suplementares.

Nesse caso, não é necessário dar ênfase à distinção entre ângulos colaterais internos, ângulos colaterais externos, ângulos alternos internos, ângulos alternos externos ou correspondentes.

O destaque de pares de ângulos como os citados anteriormente poderá ser realizado orientando os alunos a formar pares de ângulos em que os vértices estejam um em cada uma das retas que são paralelas.

Para explorar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, sugerimos uma atividade de possível execução em sala de aula que envolva a decomposição e a composição, ideias básicas em Matemática.

A constatação verificada nesse procedimento empírico é justificada pelas informações do conhecimento prévio do aluno e demonstrada por meio dos recursos da Geometria.

Texto de aprofundamento

As geometrias

O estudo da Geometria auxilia na compreensão do mundo concreto, abrindo-nos a possibilidade de criar e registrar as imagens que são frutos da nossa capacidade de criação. Por essa razão, ela tem sido objeto de estudo desde a Antiguidade.

Na palavra **geometria**, o prefixo *geo* significa **terra** e indica a origem da palavra, que surgiu da necessidade de se medir terras e demarcar propriedades. Atualmente, estudam-se na Geometria as figuras, suas propriedades e relações.

Nesse nível, estudamos a **Geometria euclidiana**, que já era conhecida dos egípcios, dos babilônios e de outros povos da Antiguidade. Eles a utilizavam em suas construções e em outras situações do dia a dia de forma empírica.

Os matemáticos gregos aprofundaram esses conhecimentos e, por volta do ano 300 a.C., Euclides organizou tudo o que na época se sabia sobre a Geometria, estabelecendo alguns **axiomas** como afirmações inquestionáveis, aceitas como verdadeiras. A partir deles, Euclides demonstrou serem verdadeiras as demais propriedades de figuras geométricas.

Observe estes exemplos de alguns axiomas da Geometria euclidiana:

- Dois pontos distintos definem uma única reta.
- Por um ponto não pertencente a uma reta é possível traçar uma única reta paralela a ela.

Outras Geometrias surgiram no século XIX, quando alguns matemáticos puseram em xeque alguns dos axiomas de Euclides e descobriram que, admitindo novos axiomas, chegavam a Geometrias também válidas. Elas foram chamadas de Geometrias não euclidianas. Uma delas é a **Geometria esférica**, em que tudo se passa sobre uma esfera e tem a Terra como modelo.

Na Geometria esférica, a noção primitiva da reta é diferente da noção de reta que aceitamos na Geometria euclidiana: elas são **círculos máximos**, como na Geografia, porque são eles que, em uma esfera, nos dão o caminho mais curto entre dois pontos.

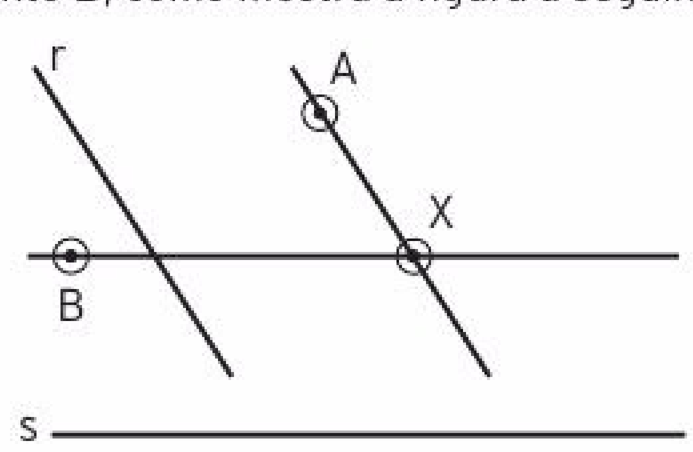
A organização de Geometrias não euclidianas permitiu avanços em diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, cálculos de navegação marítima, aérea e espacial mais precisos, além do surgimento da teoria da relatividade formulada por Albert Einstein.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Onde está X? (p. 167)

Resolução

Nesta atividade, deseja-se encontrar um ponto **X**, localizado na intersecção de duas retas. Com auxílio de régua e compasso, os alunos poderão construir as retas paralelas necessárias à resolução do problema: uma dessas retas seria a reta paralela a **r** e que contém o ponto **A** e a outra seria a reta paralela a **s** e que contém o ponto **B**, como mostra a figura a seguir.



O ponto **X** encontra-se no cruzamento das duas retas traçadas.

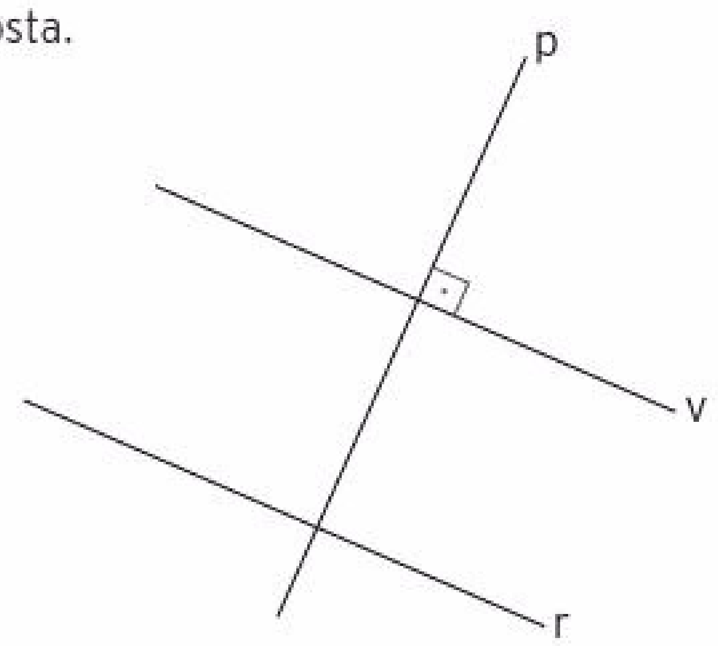
Desdobramento

Desenhe no caderno um segmento de reta AB de 4 cm. Usando régua e compasso, tente encontrar um ponto **X** que esteja a 5 cm de **A** e à mesma distância de **B**.

Sugestões de atividades complementares

Retas perpendiculares

Na figura a seguir, **v** e **r** são retas paralelas e **p** é uma reta perpendicular a **v**. As retas **p** e **r** também são perpendiculares? Justifique sua resposta.

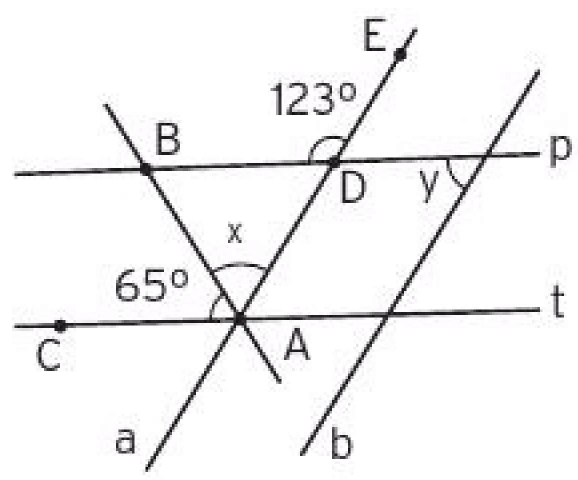


Resposta

As retas **p** e **r** são perpendiculares caso as três retas estejam no mesmo plano.

Ângulos congruentes

Junte-se a um colega, observem a figura a seguir e respondam.

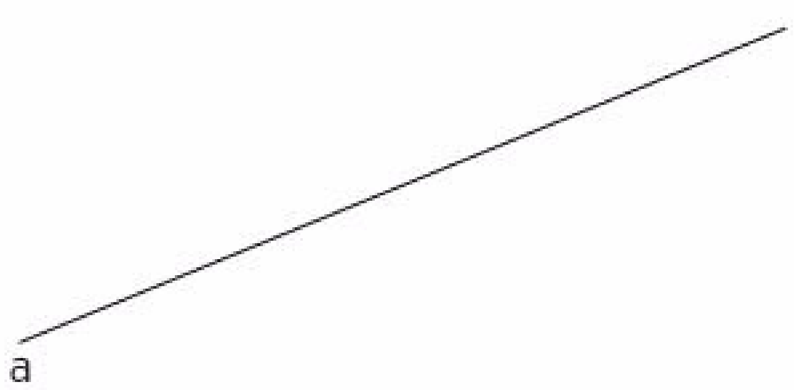


- Na figura, o que é preciso ocorrer entre as retas para que $B\hat{D}E$ e $C\hat{A}D$ sejam congruentes?
- Considerando que a // b e p // t, qual é o valor de x + y? Justifique a resposta.

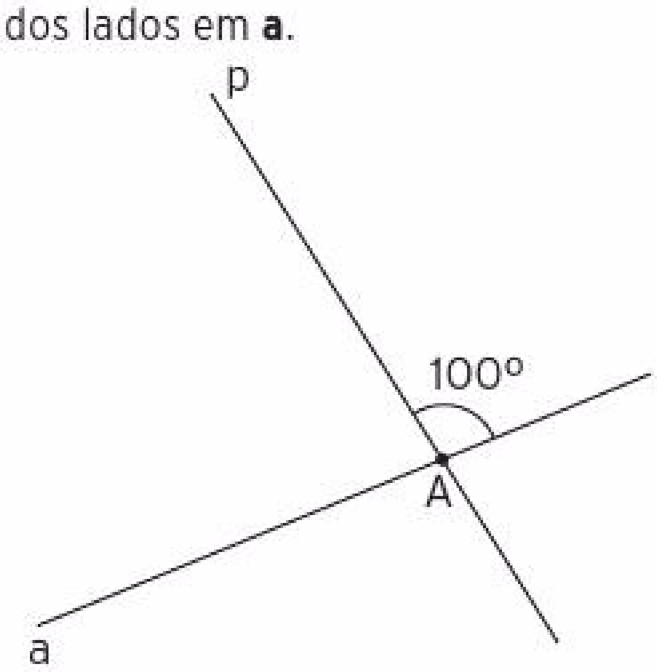
Resolução

- Cada aluno poderá desenhar retas que satisfaçam as condições apresentadas e verificar que sempre haverá um par de retas paralelas. Veja a seguir uma dessas construções:

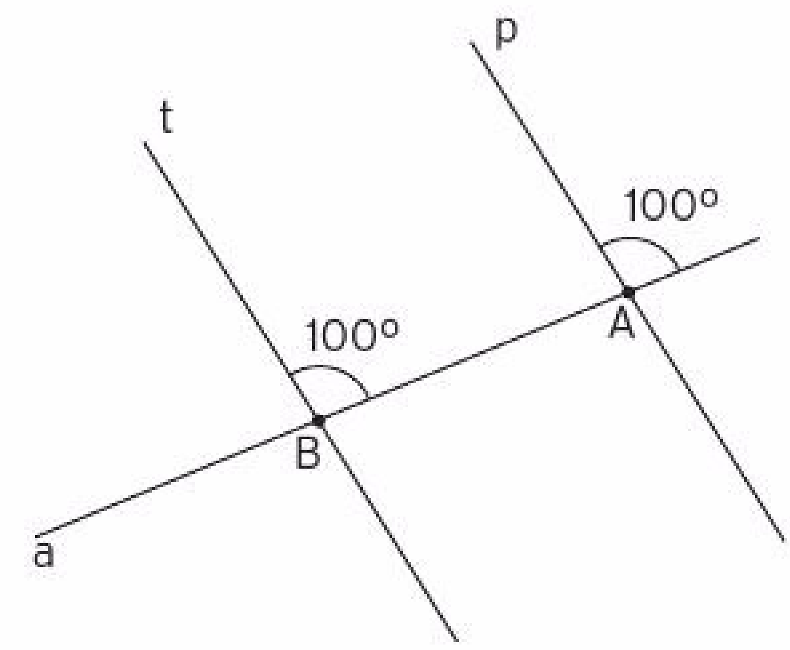
  1. Desenha-se uma reta **a**.



  2. Destaca-se um ponto **A** em **a** que será o vértice de um ângulo com uma abertura qualquer, por exemplo, 100°. Desenha-se tal ângulo usando um transferidor e considerando um dos lados em **a**.



  3. Destaca-se um ponto **B** em **t** que será o vértice de um ângulo igual ao anterior, nesse caso de 100°. Desenha-se tal ângulo usando um transferidor e considerando um dos lado em **a**.



  Pela construção, concluímos que, para que os ângulos sejam congruentes, as retas **p** e **t** devem ser paralelas.

- 65° + x = 123 (ângulos correspondentes)
  x = 123° − 65° —— x = 58°
  med $A\hat{D}B$ = 180° − 123° —— med $A\hat{D}B$ = 57°
  Como a reta **a** é paralela à reta **b**, med $A\hat{D}B$ = y.
  Então, y = 57°.
  x + y = 58° + 57°= 115°

Comentário

Nesta atividade, explora-se a propriedade "Se um par de retas coplanares interceptadas por uma terceira reta apresenta ângulos correspondentes congruentes, então elas são paralelas". Tal propriedade não será demonstrada, mas os alunos poderão investigá-la empiricamente.

UNIDADE 9 Polígonos e propriedades

<table>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Expectativas de aprendizagem</th></tr>
<tr><td>

1. Polígonos
O que são polígonos?
Vértices, lados e ângulos internos
Ângulos externos
Diagonais
Polígonos convexos
Número de diagonais de um polígono convexo
Como saber quantas diagonais tem um polígono qualquer?
2. Soma das medidas dos ângulos de um polígono
Revendo conhecimentos
Ângulos internos de um quadrilátero
Ângulos internos de um pentágono
Ângulos internos de um polígono qualquer
Soma das medidas dos ângulos externos
Em um triângulo qualquer
Em um pentágono convexo qualquer
3. Polígonos regulares
O que são polígonos regulares?
Leitura:
Polígonos regulares e ladrilhamento

</td><td>

Espera-se que os alunos:
• reconheçam polígonos convexos;
• reconheçam as diagonais de um polígono convexo;
• construam procedimentos para o cálculo do número de diagonais de um polígono convexo em função do número de lados;
• resolvam problemas envolvendo o número de diagonais de um polígono convexo;
• construam procedimentos para a dedução de uma fórmula para o cálculo da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo;
• resolvam problemas envolvendo a soma das medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono convexo;
• reconheçam polígonos regulares e suas propriedades.

</td></tr>
</table>

Orientações didáticas

Nesta unidade são retomados e ampliados assuntos já conhecidos sobre polígonos dando destaque à classificação dos mesmos em polígonos convexos e polígonos não convexos.

Na exploração dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, recorre-se à decomposição e à composição dessas figuras em triângulos. Tal recurso é utilizado no desenvolvimento de procedimentos de cálculo da soma das medidas dos ângulos internos. O estudo sobre a soma das medidas dos ângulos internos e dos externos de um polígono é desenvolvido por meio da observação das regularidades existentes entre o número de lados e a soma dessas medidas.

O procedimento de cálculo do número de diagonais de um polígono convexo qualquer é desenvolvido recorrendo-se ao reconhecimento de um padrão que relacione esse número ao número de lados da figura, iniciando com um pentágono qualquer e seguindo com um heptágono qualquer.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Diagonais e apertos de mãos (p. 178)

Esta atividade possibilita que os alunos construam procedimentos para resolver problemas de contagem, realizar generalizações e desenvolver analogias.

Para iniciar a análise do problema apresentado, os alunos poderão dramatizar a situação proposta e descobrir quantos apertos de mão serão dados quando se juntarem quatro pessoas e usar o mesmo procedimento para grupos com cinco e seis pessoas. Ao observarem regularidades na contagem, poderão estendê-las para uma situação com 20 pessoas e generalizar para **n** pessoas. Este é um problema de contagem que propicia estabelecer analogia com o cálculo do número de diagonais de um polígono e o número de cordas de uma circunferência.

Desafio – Polígonos, diagonais e trabalhos manuais (p. 179)

Esta é uma atividade lúdica que poderá ser desenvolvida em parceria com a disciplina de Arte. Também pode ser sugerido que os alunos construam em casa e em grupos. Se achar oportuno, realize uma exposição com os trabalhos desenvolvidos.

Troquem ideias e resolvam (p. 182)

Nesta atividade os alunos têm a oportunidade de aplicar o conhecimento adquirido sobre as relações entre ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal e a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono qualquer.

Resolução

- Como o segmento $\overline{AB}$ é paralelo à $\overleftrightarrow{DE}$ e $E\hat{A}B$ e $A\hat{E}M$ são ângulos alternos internos, então med $E\hat{A}B$ = med $A\hat{E}M = 54°$.
med $D\hat{E}A = 180° - 54°$ —— med $D\hat{E}A = 126°$

No pentágono ABCDE, temos:
$x + 150° + x + 54° + 126° = 540°$
$2x = 540° - 150° - 54° - 126°$
$2x = 210°$ —— $x = 105°$

UNIDADE 10 Inequações e sistemas de equações

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Inequações de 1º grau com uma incógnita Desigualdade e inequações **2. Resolvendo inequações** Solução de uma inequação de 1º grau com uma incógnita Como encontrar as soluções de uma inequação? Resolução de inequações **3. Sistema de equações** Revendo o que já aprendemos Resolução de sistema de equações Método da substituição Método da adição **Leitura:** Descartes e o plano cartesiano	Espera-se que os alunos: • utilizem procedimentos que permitam desenvolver técnicas e habilidades para a resolução de inequações de 1º grau com uma incógnita; • compreendam o conceito de desigualdade e reconheçam as propriedades inerentes a elas; • utilizem procedimentos que permitam compreender e resolver inequações de 1º grau com uma incógnita; • estabeleçam semelhanças e diferenças entre equações e inequações de 1º grau com uma incógnita; • desenvolvam habilidades e técnicas em resolução de sistemas de duas equações de 1º grau com duas variáveis, compreendendo os processos envolvidos; • resolvam problemas por meio de um sistema de equações de 1º grau com duas variáveis, discutindo o significado das soluções encontradas no contexto da situação proposta.

Orientações didáticas

Nesta unidade inicia-se um trabalho mais formal com as desigualdades desenvolvendo procedimentos algébricos que as envolvem.

Uma das dificuldades mais frequentes no que diz respeito às inequações é identificar a equivalência entre duas desigualdades, por exemplo, $-2x < 4$ e $2x > -4$. Essa dificuldade está relacionada à analogia que eles costumam fazer com as equações. Se o erro persistir, faça um trabalho de comparação de números inteiros, localizando-os na reta numerada.

Este é o momento apropriado para estudar a representação dos conjuntos de números por uma propriedade comum.

Para escrever, por exemplo, o conjunto dos números inteiros maiores que -2 e menores ou iguais a 4, usamos uma letra, por exemplo **x**, para representar um número e usamos as desigualdades: $x \in \mathbb{Z}$, $x > -2$ e $x \leqslant 4$ ou então $x \in \mathbb{Z}$, $-2 < x \leqslant 4$. Procure associar, quando possível, essa representação com a representação na reta numerada. A visualização sempre auxiliará na compreensão e na construção dos conhecimentos em um processo da abstração.

O trabalho já realizado sobre a localização de pontos no plano cartesiano servirá de apoio para o desenvolvimento do conceito de representação geométrica de equações de 1º grau com duas variáveis. A solução de um sistema de equações de 1º grau com duas variáveis se tornará significativa se partirmos da compreensão da representação geométrica das soluções dessas equações.

Como processo algébrico, destacamos o método da substituição, por ser mais genérico. Esse método consiste em "isolar" uma das variáveis em uma das equações e substituí-la na outra pela expressão obtida, conseguindo, assim, uma equação de 1º grau com uma incógnita que nos fornecerá o valor dessa incógnita. Usando o número encontrado, determina-se o valor da outra incógnita.

Ainda neste volume exploramos a resolução de um sistema de duas equações de 1º grau com duas variáveis pelo método da adição.

Se os alunos souberem resolver equações de 1º grau com uma incógnita e conseguirem traduzir os enunciados dos problemas para o idioma da Álgebra, terão meio caminho andado para aprender os métodos de resolução de sistemas de duas equações de 1º grau com duas variáveis.

Na resolução gráfica de uma equação de 1º grau com duas variáveis, proponha a eles que considerem alguns pares que sejam soluções da equação que traduz o problema, verifiquem experimentalmente que os pontos se alinham sobre uma reta e notem que a representação geométrica de uma equação de 1º grau com duas variáveis é um conjunto de pontos alinhados cujas coordenadas são soluções da equação.

Em contrapartida, sugira que considerem um par de valores que não seja solução e verifiquem que o ponto em questão não se encontra alinhado aos demais.

Texto de aprofundamento

Sistemas de equações: resolução gráfica

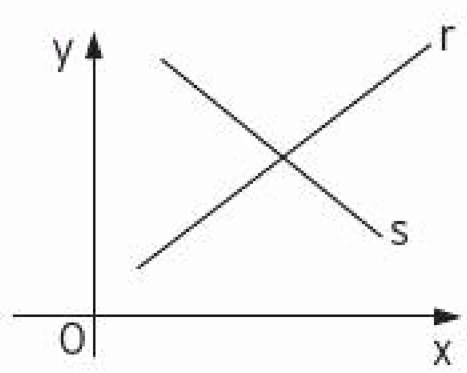
A transformação de equações de 1º grau com duas variáveis em gráficos e vice-versa revolucionou a Matemática.

Descartes, ao criar o plano cartesiano, reuniu a Aritmética, a Álgebra e a Geometria em um só contexto e deu um novo rumo à Matemática.

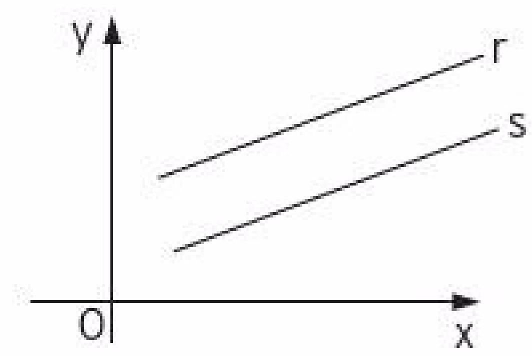
A resolução gráfica consiste em desenhar em um só gráfico cartesiano as duas retas que contêm as soluções das equações dadas e determinar o ponto comum a elas.

De modo geral, um sistema formado por duas equações de 1º grau com duas variáveis pode apresentar:

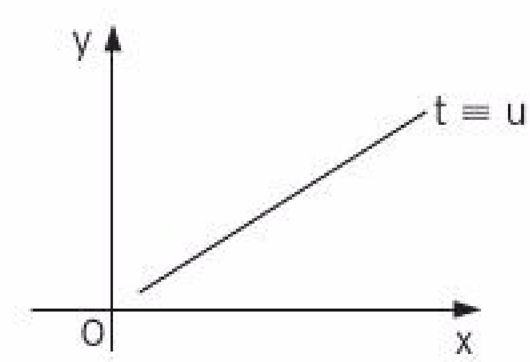
a) **uma única solução** – tem-se duas retas concorrentes no gráfico cartesiano;



b) **nenhuma solução** – tem-se duas retas paralelas no gráfico cartesiano;



c) **infinitas soluções** – tem-se retas coincidentes no gráfico cartesiano.



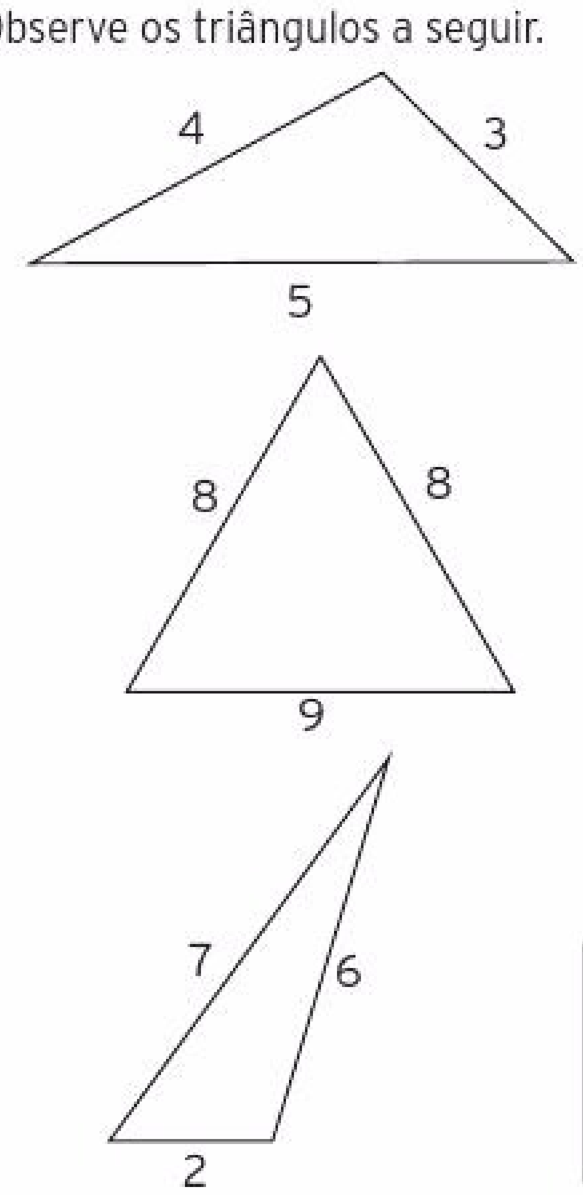
Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 200)

Nesta atividade os alunos têm a oportunidade de investigar uma relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer e a possibilidade de construção do mesmo. Espera-se que ao preencher as tabelas apresentadas eles identifiquem um padrão.

Resolução

- Observe os triângulos a seguir.



As medidas estão indicadas em centímetros.

Veja as relações entre as medidas dos lados de cada triângulo.

Soma de dois lados	Símbolo	Terceiro lado
$4 + 5$	$>$	3
$5 + 3$	$>$	4
$3 + 4$	$>$	5

Soma de dois lados	Símbolo	Terceiro lado
$8 + 9$	$>$	8
$8 + 8$	$>$	9
$9 + 8$	$>$	8

Soma de dois lados	Símbolo	Terceiro lado
$2 + 6$	$>$	7
$6 + 7$	$>$	2
$7 + 2$	$>$	6

Resposta possível: A soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.

- $12 + 3 > 6$; $12 + 6 > 3$; $\mathbf{3 + 6 < 12}$
  Não é possível construir um triângulo com as medidas apresentadas, porque existe um par de lados em que a soma das medidas é menor que a medida do terceiro lado: $3 + 6 < 12$.

- Uma desigualdade envolvendo essas medidas é: $b + c > a$

Desafio– Triângulos e possibilidades (p. 200)

Nesta atividade os alunos precisam lembrar-se da característica presente em triângulos isósceles em relação aos lados: em um triângulo isósceles dois dos lados são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

Resolução

- As medidas dos lados, em centímetros, são representadas por $(4x + 3)$, $(x + 21)$ e $(3x + 8)$. Existem três possibilidades para que o triângulo seja isósceles.

$4x + 3 = x + 21$
$3x = 18$
$x = 6$ —— $x = 6$ cm

$4x + 3 = 3x + 8$
$x = 5$ —— $x = 5$ cm

$x + 21 = 3x + 8$
$2x = 13$
$x = 6{,}5$ —— $x = 6{,}5$ cm

Verificação:
Para x = 6 cm, temos:
$4x + 3 = 4 \cdot 6 + 3 = 27$
$x + 21 = 6 + 21 = 27$
$3x + 8 = 3 \cdot 6 + 8 = 26$
O triângulo será isósceles.

Para x = 5 cm, temos:
$4x + 3 = 4 \cdot 5 + 3 = 23$
$x + 21 = 5 + 21 = 26$
$3x + 8 = 3 \cdot 5 + 8 = 23$
O triângulo será isósceles.

Para x = 6,5 cm, temos:
$4x + 3 = 4 \cdot 6{,}5 + 3 = 26 + 3 = 29$
$x + 21 = 6{,}5 + 21 = 27{,}5$
$3x + 8 = 3 \cdot 6{,}5 + 8 = 19{,}5 + 8 = 27{,}5$
O triângulo será isósceles.

Para x = 6 cm, o perímetro do triângulo será:
$27 + 27 + 26 = 80$ —— Perímetro = 80 cm

Para x = 5 cm, o perímetro do triângulo será:
$23 + 23 + 26 = 72$ —— Perímetro = 72 cm

Para x = 6,5 cm, o perímetro do triângulo será:
$27{,}5 + 27{,}5 + 29 = 84$ —— Perímetro = 84 cm

Para $x = 6{,}5$ cm, obtém-se o maior valor para o perímetro, que será de 84 cm.

Troquem ideias e resolvam (p. 205)

Nesta atividade, oriente os alunos a identificar as escritas numéricas na forma decomposta usando potências de base 10.

Exemplos:
$57 = 5 \cdot 10 + 7$
$75 = 7 \cdot 10 + 5$ e outros.

Resolução

Sendo **x** o algarismo da dezena e **y** o algarismo da unidade, então $xy = 10x + y$.

Como a soma dos algarismos é igual a 6, então $\mathbf{x + y = 6}$ (1).

Resultado que se obtém subtraindo 18 unidades do número procurado é $yx = 10y + x$. Assim, temos:

$(10x + y) - 18 = 10y + x$
$10x - x + y - 10y = 18$
$9x - 9y = 18$ —— $\mathbf{x - y = 2}$ (2)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2) pelo método da adição:

$2x = 8$ —— $\mathbf{x = 4}$
$x + y = 6$ —— $4 + y = 6$ —— $\mathbf{y = 2}$

O número procurado é 42.

Verificação:
Como $4 + 2 = 6$, então a soma dos algarismos é igual a 6.
24 é o resultado de $42 - 18$ e é 42 invertendo os algarismos.

Desafio – O número escondido na cartela (p. 206)

Pergunte aos alunos se eles já resolveram um problema parecido com este. Espera-se que eles se lembrem da atividade proposta na seção **Troquem ideias e resolvam** da página 205 e sigam procedimento semelhante desenvolvido para resolvê-la.

Resolução

A soma dos algarismos do número é igual a 10, então $\mathbf{x + y = 10}$ (1).

Resultado que se obtém trocando os algarismos de lugar é 18 unidades menor que o número da cartela. Então:

$(10x + y) - (10y + x) = 18$ ——— $\mathbf{x - y = 2}$ (1).

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2) pelo método da adição:

$2x = 12$ ——— $\mathbf{x = 6}$

$x + y = 10$ ——— $6 + y = 10$ ——— $\mathbf{y = 4}$

O número procurado é 64.

Verificação:

Como $6 + 4 = 10$, então a soma dos algarismos é igual a 10.

$64 - 46 = 18$, então o número que se obtém trocando os algarismos é 18 unidades menor que o número da cartela.

UNIDADE 11 Triângulos e propriedades

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Estudando triângulos Relação entre as medidas de um ângulo externo e os ângulos internos Condição de existência de um triângulo Mediana, altura e bissetriz de um triângulo Mediana Altura Bissetriz **2. Congruência de triângulos** Casos de congruência entre triângulos **3. Triângulos isósceles, equiláteros e propriedades** Propriedades dos triângulos isósceles Mediana, altura e bissetriz de um triângulo isósceles Propriedades dos triângulos equiláteros **Leitura:** Números triangulares	Espera-se que os alunos: • resolvam situações-problema que envolvam relação entre as medidas de um ângulo externo e a medida dos ângulos internos de um triângulo; • identifiquem a condição de existência de um triângulo (relação entre medidas de lados); • identifiquem mediana, altura e bissetriz de um triângulo e seus pontos notáveis; • identifiquem a correspondência entre os elementos de triângulos congruentes, reconhecendo os casos de congruência de triângulos; • verifiquem as propriedades dos triângulos utilizando os casos de congruência em demonstrações locais; • relacionem os elementos de triângulos isósceles e triângulos equiláteros; • apliquem as propriedades dos triângulos isósceles e dos equiláteros em problemas; • resolvam situações-problema que envolvam polígonos, utilizando congruência de triângulos.

Orientações didáticas

Nesta unidade, propomos a construção de triângulos usando régua e compasso em uma tentativa de dar subsídios aos alunos para a compreensão das condições que determinam a existência de um triângulo: a relação entre as medidas dos lados.

O conceito de triângulos congruentes pode ser traduzido por triângulos de mesma forma e mesmo tamanho e verificado experimentalmente, por exemplo, pela sobreposição dos triângulos com a utilização de papel transparente.

O estudo da congruência dos triângulos pode ainda estar associado a movimentos, ou transformações geométricas, como os movimentos de translação, reflexão e rotação, nos quais não há alteração nas medidas dos ângulos e dos lados.

No caso específico dos triângulos isósceles, os alunos poderão vivenciar situações que contribuem para a constatação de que as relações entre os elementos dessa figura podem ser justificadas com a aplicação imediata dos casos de congruência.

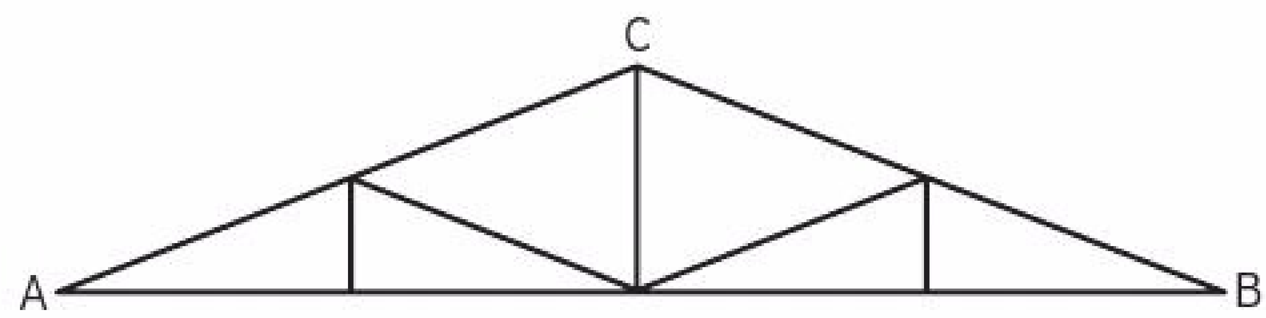
Texto de aprofundamento

Aplicações dos triângulos

Nos estudos relativos aos triângulos destaca-se a aplicação de suas propriedades. Entre as diversas propriedades, está a rigidez, que pode ser verificada de forma experimental. Quando se constrói um triângulo utilizando palitos unidos por percevejos, é fácil perceber que ele fica rígido, sendo impossível mudar sua forma.

Ao fazer essa mesma experiência com um quadrilátero construído com os mesmos materiais, os alunos poderão verificar que ele muda de forma quando puxado pelos lados. O mesmo ocorre com pentágonos, hexágonos e quaisquer outros polígonos.

Podemos perceber aplicações práticas dessa propriedade dos triângulos em nosso dia a dia. Por exemplo, na construção de um telhado o carpinteiro faz uma estrutura de madeira conhecida como "tesoura", que tem a forma de um triângulo. Se tivesse a forma de um retângulo, um pentágono ou de qualquer outro polígono, um vento forte poderia "mudar sua forma", desmontando o telhado.



Comentários e resolução de atividades

Desafio – Triângulos e quadriláteros (p. 217)

É conveniente propiciar situações em que os estudantes verbalizem e registrem suas idéias. Em muitos casos, pode ser que os alunos entendam a situação, mas não saibam explicar quais foram os procedimentos utilizados para resolver a atividade proposta.

Auxilie os alunos a organizar as ideias, pedindo a eles que listem as propriedades que identificaram no problema proposto, como por exemplo: ângulos congruentes, soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, relação entre as medidas de um ângulo externo e a medida dos ângulos internos, resolução de equação de 1º grau.

Resolução

No quadrilátero ABCD temos:

$B\hat{A}D \equiv A\hat{D}C$, então med $B\hat{A}D$ = med $A\hat{D}C = x$

Soma dos ângulos internos de ABCD:

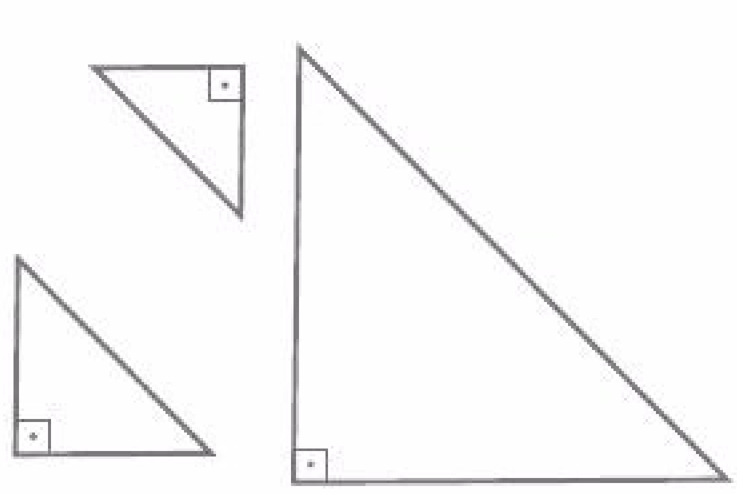
$$x + (x + 30°) + (2x + 20°) + x = 360°$$
$$5x + 50° = 360°$$
$$5x = 310°$$
$$x = 62°$$

No triângulo DCE, o ângulo $B\hat{C}D$ é ângulo externo não adjacente aos ângulos internos $C\hat{D}E$ e $C\hat{E}D$. Portanto:

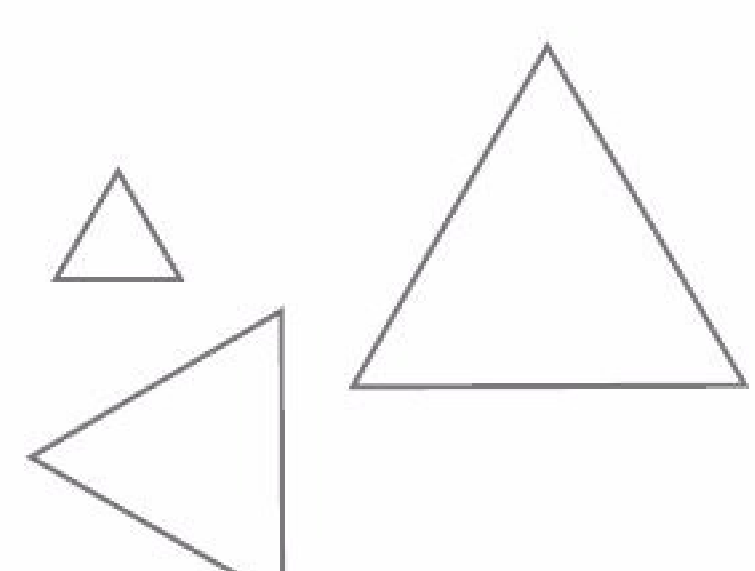
$m + n = x + 30° = 62° + 30° = 92°$

Investigue e explique (p. 221)

Observe alguns exemplos de construções de triângulos retângulos isósceles em que os ângulos agudos medem 45° e alguns exemplos de triângulos equiláteros:



Triângulos retângulos isósceles cujos ângulos agudos medem 45º



Triângulos equiláteros

Nos dois grupos é possível identificar pelo menos um exemplo de pares de triângulos que não são congruentes. Basta um contraexemplo contrariando uma hipótese, para que não seja considerada verdadeira.

Assim, os triângulos não são congruentes.

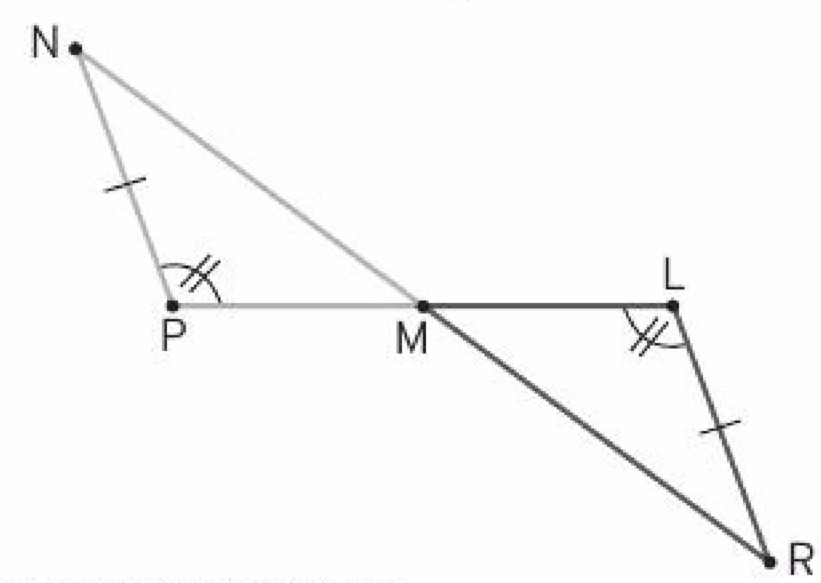
Troquem ideias e resolvam (p. 222)

Planeje situações coletivas em que os estudantes possam expor e trocar interpretações sobre os problemas propostos e comparar com os colegas as soluções encontradas e os procedimentos seguidos.

Faça uma leitura coletiva da situação apresentada identificando os símbolos matemáticos e os conceitos presentes no enunciado. Pergunte o que é ponto médio de um segmento de reta e quais os procedimentos adequados para resolver a situação proposta.

Resolução

Para mostrar que **M** é ponto médio, utiliza-se congruência de triângulos.



Nos triângulos NPM e RLM, temos:

$\overline{NP}$	$\equiv$	$\overline{RL}$		(L)
$\hat{P}$	$\equiv$	$\hat{L}$		(A)
$P\hat{M}N$	$\equiv$	$L\hat{M}R$	(o.p.v.)	(A_o)

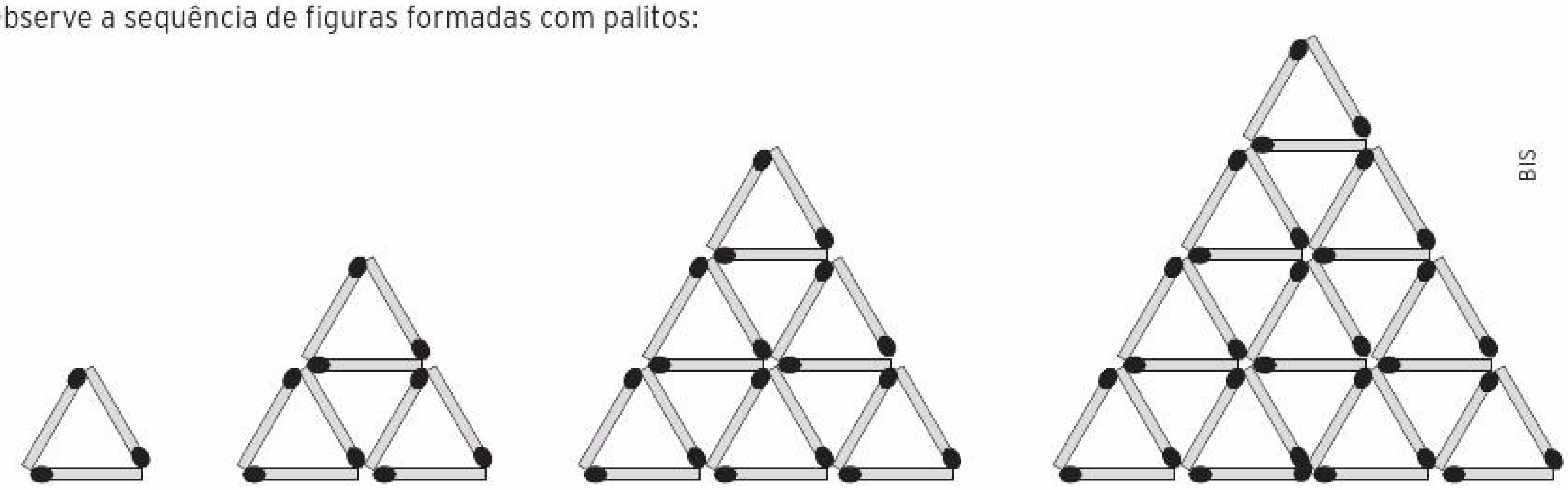
Então, $\triangle NPM \equiv \triangle RLM$ e $\overline{PM} \equiv \overline{LM}$.

Concluímos que **M** é ponto médio de $\overline{PL}$.

Sugestão de atividade complementar

Números triangulares e padrões

Observe a sequência de figuras formadas com palitos:



a) Identifique um padrão geométrico entre a quantidade de palitos de fósforo usados nessas figuras.

b) Observe a sequência de desenhos e responda:

- Quantos palitos de fósforo há na 1ª figura?
- Quantos palitos de fósforo há na 2ª figura?
- Quantos palitos de fósforo há na 3ª figura ?
- Quantos palitos de fósforo há na 4ª figura?

c) Use um palito de fósforo como unidade e calcule o perímetro aproximado de cada figura. Copie uma tabela como esta e complete-a.

Ordem das figuras	1	2	3	4	10	20	**n**
Perímetro							

Resolução

a) A partir da 2ª figura, a quantidade de palitos de fósforo usados em cada uma é: [(nº da posição) · 3 + (nº de palitos da figura anterior)].

b)

- 3 palitos.
- 9 palitos.
- 18 palitos.
- 30 palitos.

c)

Ordem das figuras	1	2	3	4	10	20	**n**
Perímetro	3	6	9	12	30	60	3n

UNIDADE 12 Quadriláteros e propriedades

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Paralelogramos e propriedades Propriedades dos lados e das diagonais Losangos: propriedades **2. Retângulos, quadrados e propriedades** Retângulos e propriedades Retângulos: propriedades Quadrados: propriedades **3. Trapézios isósceles e propriedades** O que é um trapézio isósceles? **Leitura:** Números quadrangulares	Espera-se que os alunos: • identifiquem os quadriláteros, seus elementos e suas propriedades; • reconheçam, justifiquem e apliquem as propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos quadrados; • resolvam problemas que envolvam as propriedades dos quadriláteros.

Orientações didáticas

Damos continuidade a um trabalho que se inicia pela exploração empírica das propriedades, tendo como etapa final do processo a justificativa dessas propriedades. Entendemos que, dessa forma, os alunos, percorrendo o caminho da experimentação, do levantamento de hipóteses, da resolução de problemas na prática, terão melhores condições de desenvolver o processo das demonstrações.

Preocuparemos-nos com as características de figuras geométricas que podem ser generalizadas. Quando isto ocorrer, faremos a síntese do estudo por meio de uma afirmação que chamamos propriedade.

Nesta unidade são explorados os quadriláteros, revendo, organizando e ampliando os conhecimentos adquiridos em volumes anteriores. Os alunos devem reconhecer a aplicação da congruência de triângulos em demonstrações das propriedades relacionadas aos quadriláteros particulares.

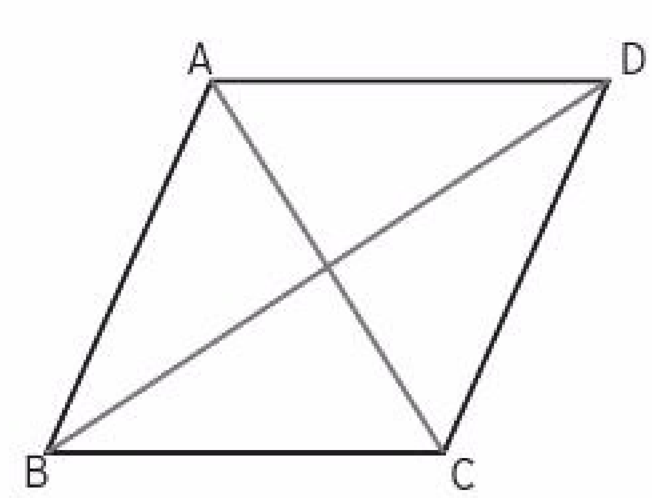
Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 240)

Peça aos alunos que desenhem alguns paralelogramos, tracem as suas diagonais, analisem as figuras desenhadas medindo ou estimando as medidas das diagonais e respondam às questões propostas.

Resolução

- Exemplo de construção:



As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ não são congruentes.

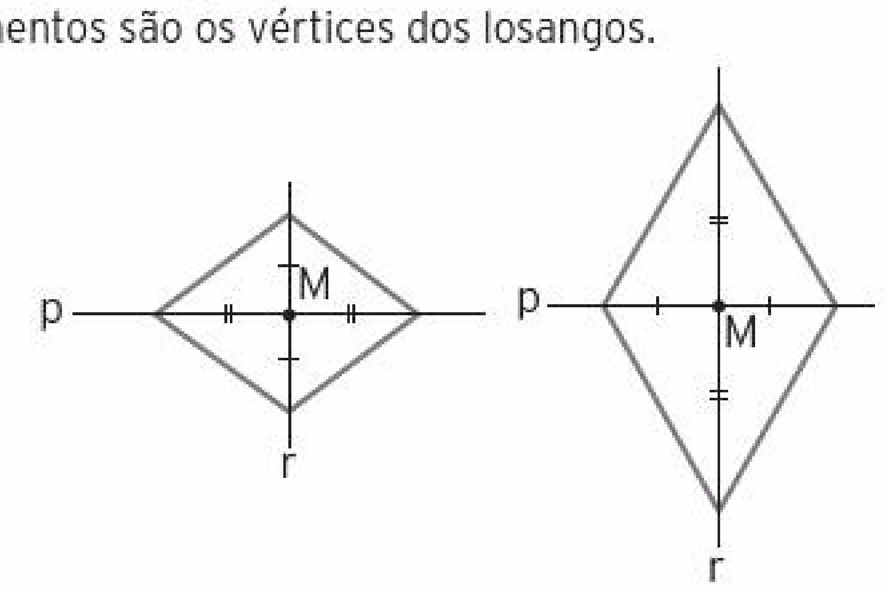
- O retângulo é um quadrilátero que tem as diagonais congruentes.

Desafio – Construções com régua e compasso (p. 240)

A proposta é fazer os alunos manipularem instrumentos para realizar construções geométricas. Essa manipulação subsidia a construção dos conceitos relacionados às noções básicas necessárias à aprendizagem de Geometria, não de uma maneira axiomática, mas em uma proposta que se inicia empiricamente – medindo, experimentando, analisando, construindo – até chegar a um trabalho que exige um raciocínio lógico-dedutivo.

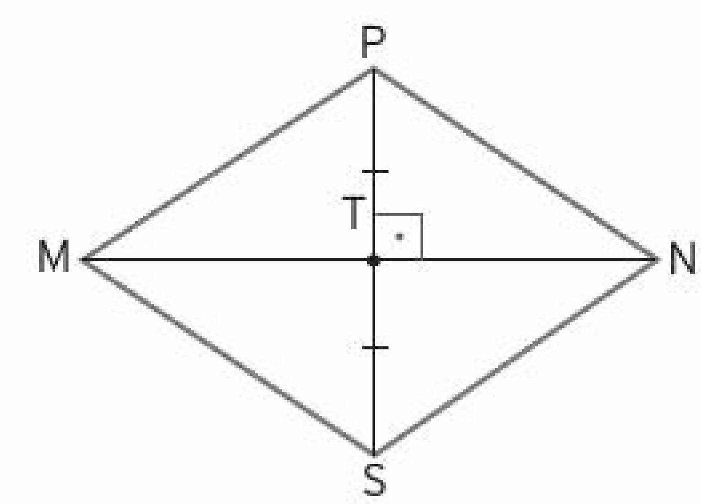
Resolução

- Em um losango, as diagonais são perpendiculares entre si e se interceptam no ponto médio. Desenhamos sobre as retas **p** e **r** os segmentos de reta em que o encontro das diagonais seja o ponto médio. As extremidades desses segmentos são os vértices dos losangos.



- Desenhamos $\overline{MN}$ congruente a $\overline{CD}$, marcamos o ponto médio **T**, tal que a medida do segmento $\overline{MT}$ é metade da medida do segmento $\overline{MN}$.

Pelo ponto **T**, traçamos $\overline{PS}$ perpendicular a $\overline{MN}$ ($\overline{PS}$ congruente a $\overline{AB}$). Obtemos a seguinte figura:



Desafio – Jardim triangular em praça quadrada (p. 243)

Verifique se os alunos conseguem interpretar o desafio, identificar as informações importantes e elaborar um plano para resolvê-lo.

Resolução

A área do jardim é igual à metade da área da praça menos as áreas de dois triângulos retângulos congruentes.

A área da praça corresponde à área de um quadrado de lado medindo 7 m, então sua área é igual a 49 m^2.

Metade da área da praça corresponde a 24,5 m^2 (49 : 2 = = 24,5).

A área de um triângulo retângulo é dada por:

$\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ —— a área de cada triângulo é 6 m^2.

Então, a área do jardim corresponde a:

$A = 24{,}5 - 2 \cdot 6 = 12{,}5$

A área do jardim corresponde a 12,5 m^2.

Troquem ideias e resolvam (p. 243)

Se necessário, ajude os alunos na compreensão do problema, fazendo algumas perguntas, como por exemplo: o que é um trapézio; quais são as características de um trapézio?

Resolução

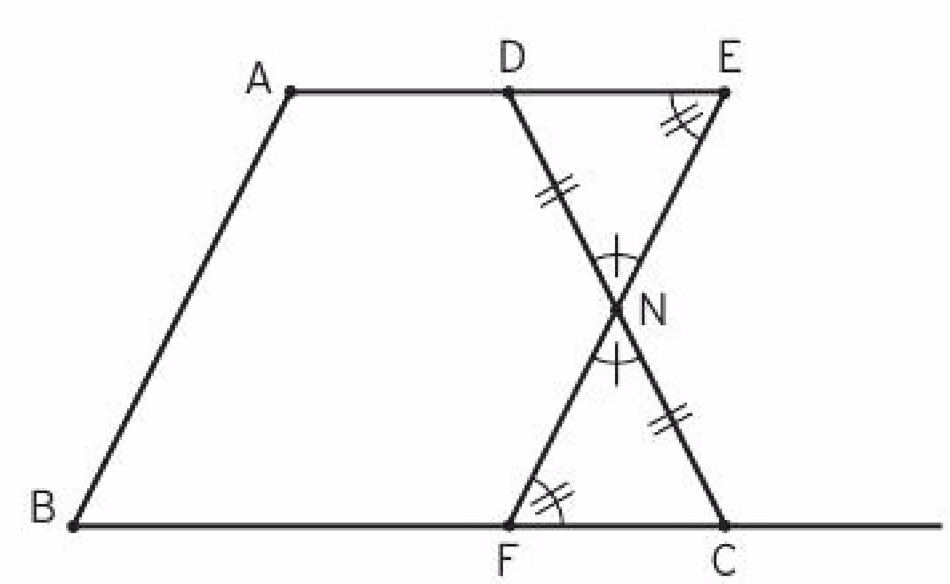
Vamos provar qual é o caso de semelhança que garante que $\triangle DNE \equiv \triangle CNF$.

Como N é ponto médio de $\overline{CD}$, então $\overline{DN} \equiv \overline{NC}$ (L)

$D\hat{N}E \equiv C\hat{N}F$ (A), pois são opostos pelo vértice.

$N\hat{E}D \equiv N\hat{F}C$ (A_0) são ângulos alternos internos e $\overline{AE} // \overline{BC}$.

Os dois triângulos são congruentes pelo caso LAA_0.

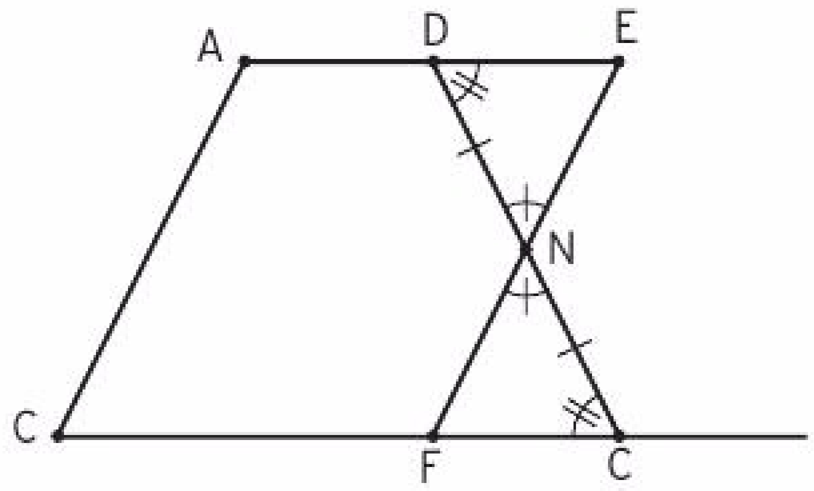


Também é possível mostrar que $\triangle DNE \equiv \triangle CNF$ pelo caso ALA.

$E\hat{D}N \equiv F\hat{C}N$ (A), pois são ângulos alternos internos e $\overline{AE} // \overline{BC}$.

$\overline{DN} \equiv \overline{NC}$ (L), pois N é ponto médio de $\overline{DC}$.

$D\hat{N}E \equiv F\hat{N}C$ (A), pois são ângulos opostos pelo vértice.



- $x = y$, pois $\triangle DNE \equiv \triangle CNF$ e os lados correspondentes são congruentes.
- $\overline{AE}$ e $\overline{FB}$ são lados do paralelogramo AEFB.
  med $\overline{AE}$ = med $\overline{FB} = 9 + x$

med $\overline{CB}$ = med $\overline{CF}$ + med $\overline{FB}$

$15 = y + (9 + x)$

Como $x = y$ (**item anterior**), temos

$15 = x + (9 + x)$

$2x = 15 - 9$ —— $2x = 6$ —— $x = \frac{6}{2}$ —— $x = 3$

Assim, $x = y = 3$ cm.

- med $\overline{MN} = 9 + x = 9 + 3 = 12$
  Então, a medida de $\overline{MN}$ é 12 cm.
- Verificando se a igualdade é verdadeira:

$$\text{med } \overline{MN} = \frac{\text{med } \overline{AD} + \text{med } \overline{BC}}{2} = \frac{9 + 15}{2}$$

$$\text{med } \overline{MN} = \frac{24}{2} \text{ — med } \overline{MN} = 12$$

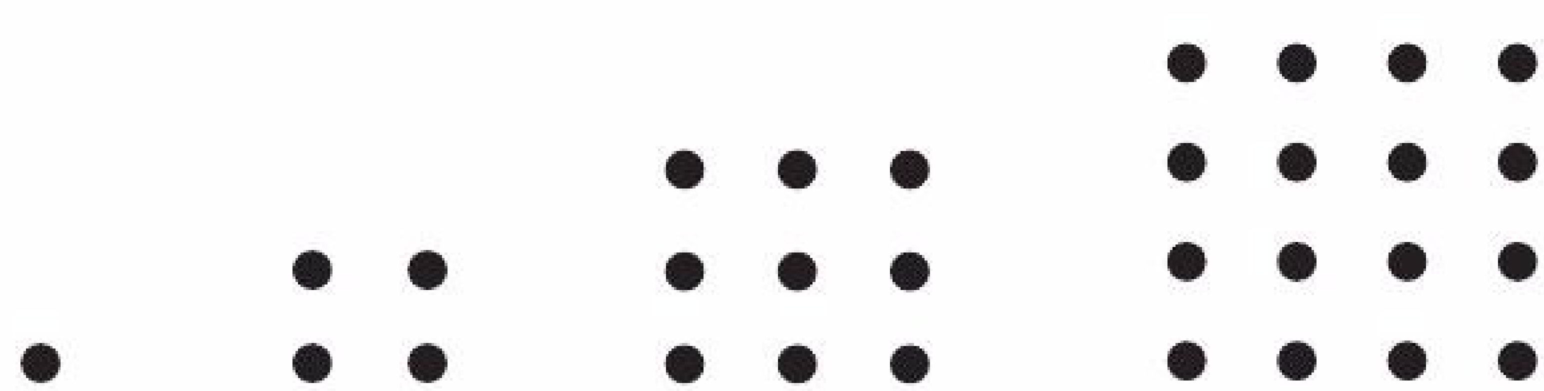
Então, a igualdade é verdadeira.

Podemos observar que a medida da base média de um trapézio é igual à metade da soma das medidas das bases do trapézio.

Sugestões de atividades complementares

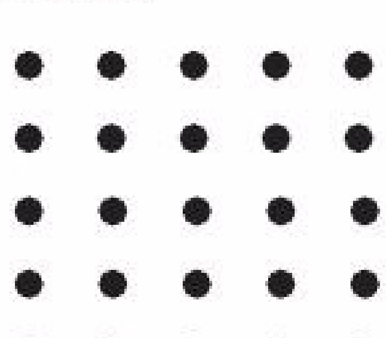
Números quadrangulares e generalização

Observe esta sequência de figuras e faça o que se pede em cada item.



a) Desenhe a próxima figura dessa sequência.
b) Quantos pontos tem essa figura?
c) Qual é o número quadrangular seguinte ao número 25?
d) Qual é o número quadrangular representado pela enésima figura?

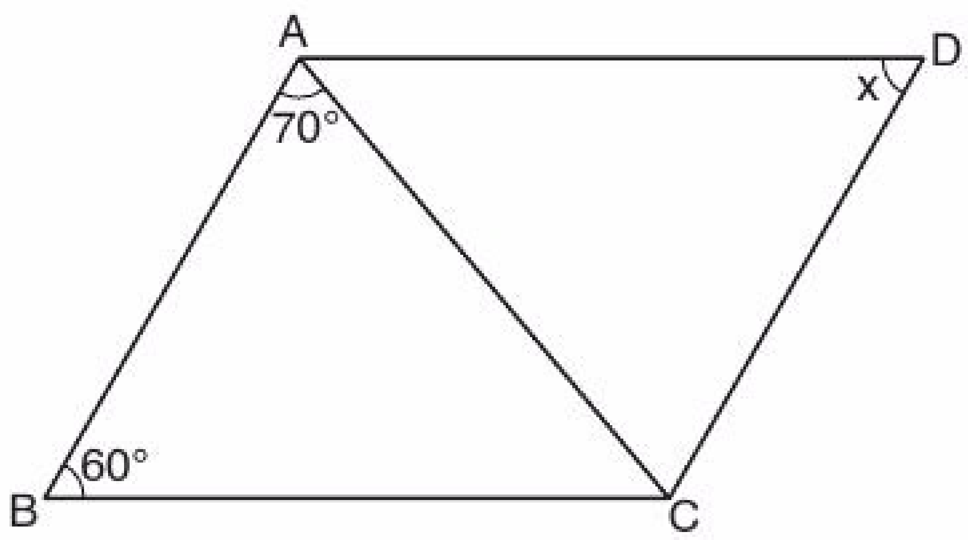
Respostas

a) 

b) 25 pontos.
c) 36
d) n^2

A diagonal do paralelogramo

Nesta figura, $\overline{AC}$ é uma diagonal do paralelogramo ABCD.



a) Qual caso de congruência permite escrever $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$?
b) Qual é o valor de **x**?
c) Qual é a medida de $A\hat{C}D$?
d) Qual é a medida de $C\hat{A}D$?

Resolução

a) Como ABCD é um paralelogramo:

$\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ (L)

$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (L)

$\overline{AC} \equiv \overline{AC}$ (L), pois é o lado comum.

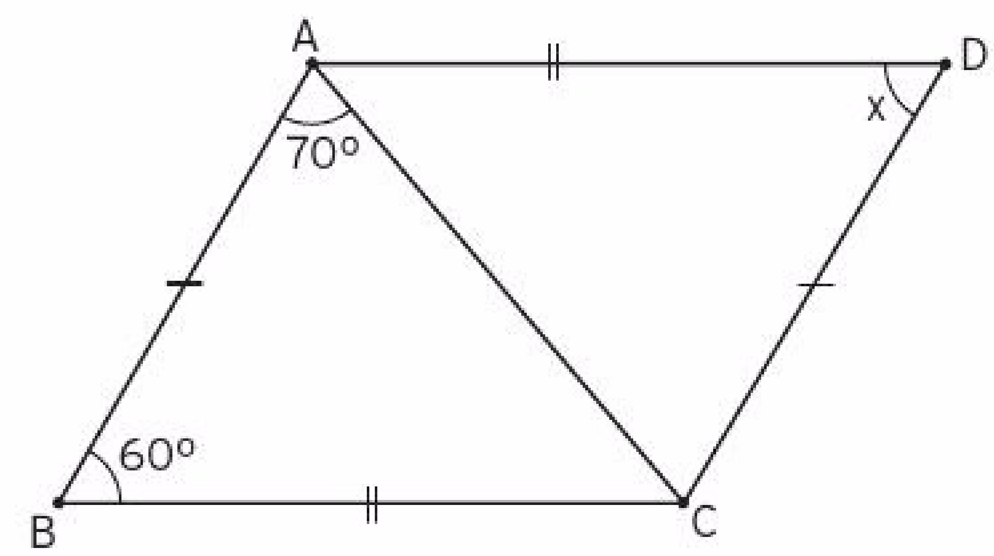
$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ pelo caso LLL

Outro caso que permite escrever a congruência é o caso ALA.

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$ ——— ângulos alternos internos

$\overline{AC}$ ——— lado comum

$B\hat{C}A = A\hat{C}D$ ——— alternos internos



b) $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}A$ são ângulos opostos de ABCD.

O valor de **x** é 60°.

c) $A\hat{C}D \equiv B\hat{A}C$, pois são ângulos alternos internos. Logo, med $A\hat{C}D$ é 70°.

d) med $B\hat{C}A = 180° - (70° + 60°) = 50°$

$C\hat{A}D \equiv B\hat{C}A$ ——— alternos internos

med $C\hat{A}D = 50°$