Aula 07
Sistemas Lineares

EEAR -2021.2

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 – Introdução

Esta aula, a grosso modo, é uma extensão das aulas de Matrizes e Determinantes. Digo isso pois alguns conceitos serão embasados em propriedades estudadas nelas.

Fique ligado a cada detalhe.

Vamos com tudo!!! Fé na missão!

Fale comigo!

@profismael_santos *Ismael Santos* *@IsmaelSantos*

2 – Sistemas Lineares

1 – Definições e Estruturas Iniciais

Num primeiro momento, faz-se necessário relembrarmos, ou, até mesmo, aprender melhor, o conceito de equações lineares. Entender essa classificação das equações é de suma importância, tendo em vista que os Sistemas Lineares são formados por um conjunto delas.

Nós dizemos que uma determinada equação será dita linear quando ela puder ser expressa com a seguinte configuração.

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b}$$

Vamos às nomenclaturas: os termos $a_1, a_2, \dots, a_n$ são chamados de coeficientes, enquanto que os termos $x_1, x_2, \dots x_n$ são chamadas variáveis ou incógnitas. Vejamos alguns exemplos de equações lineares:

$$-x + 4y = 7$$

$$3x - y5 + z = 0$$

$$\sqrt{7}x + \pi - 3y = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = -4$$

Veja a seguir exemplos de equações não-lineares:

$$\sqrt{x} - 4y = 1$$

$$\frac{1}{x} - y + z = 3$$

$$x^2 - y + 4z = 1$$

Assim, para que uma equação seja considerada linear, as variáveis devem estar livres de qualquer tipo de função: raízes, exponenciais, potências, nada. Elas têm de estar puras, apenas multiplicando os seus respectivos coeficientes.

2 - Sistemas Lineares

Um sistema, em matemática, é uma lista, ou conjunto, de equações que conservem as mesmas variáveis. Um sistema linear será um sistema em que todas as equações são lineares. Veja!

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - 4y - z = 7 \\ -2x + y - 15z = 18 \end{cases}$$

Veja que as três equações que constituem esse sistema são equações lineares; portanto, se trata de um sistema linear. A seguir vemos a forma geral de um sistema linear qualquer, com $m \geq 1$ equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Essa é a forma geral, isto é, qualquer sistema pode ser expresso ou representado dessa maneira. Você deve estar percebendo que os coeficientes foram postos com subíndices, como nos elementos de uma matriz. Isso mesmo! Na verdade, um sistema exposto na sua forma geral representa uma multiplicação de matrizes.

Usando as propriedades de multiplicações de matrizes que vimos em aulas anteriores, podemos chegar nesse mesmo sistema linear efetuando a multiplicação das duas matrizes. A seguir, apresento a **forma matricial** de um sistema linear.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{matriz\ A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{matriz\ X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{matriz\ B}$$

Veja que de fato, ao multiplicarmos a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ pela matriz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Encontramos a matriz $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ que, ao ser igualada à matriz $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, chega-se ao sistema original.

Com isso, podemos representar aquele sistema geral simplesmente por: $A.X = B$, que é uma equação matricial.

Cabe ressaltar algumas novas nomenclaturas ligadas a essa teoria de sistemas lineares. Veja:

- A matriz A é chamada **matriz dos coeficientes** ou ainda **matriz incompleta**;
- A matriz X é chamada **matriz das variáveis** ou **matriz das incógnitas**;
- A matriz B, por sua vez, é chamada de **matriz dos termos independentes**.

Segue abaixo um exemplo prático de que esses conceitos podem sim ser objeto de prova:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 9 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$$

Podemos afirmar que a matriz incompleta, a matriz das incógnitas e a matriz dos termos independentes desse sistema está exposto, respectivamente, na alternativa:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Comentário:

Questão bastante direta, basta extrair as informações. Dando uma outra olhada no sistema $\begin{cases} 3x - 5y + z = 19 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$, vamos às extrações: a matriz das incógnitas é, como o próprio nome diz, a matriz-coluna cujos termos são as incógnitas, isto é, as variáveis do sistema: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; e finalmente a matriz dos termos independentes é aquela que apresenta os resultados de cada igualdade: $B = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gabarito: C

Vamos à mais um conceito importante dentro de sistemas lineares: chamamos de matriz completa a matriz incompleta com uma última coluna adicional cujos termos são os termos independentes do sistema:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 9 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$$

Esse sistema possui matriz incompleta $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

A matriz completa será, então:$A' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 19 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

A matriz Completa de um Sistema é obtida a partir da justaposição da matriz incompleta e dos termos independentes.

Vamos analisar mais um sistema reescrito sob a forma de matricial.

$$\begin{cases} 6x + y = 1 \\ -5x + 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Apliquemos o conceito de produto de matrizes. A primeira matriz é de ordem 2 e a segunda, de ordem $2x1$. Assim, a matriz resultante será de ordem $2x1$. Veja:

$$\begin{bmatrix} 6x + 1y \\ -5x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Como as matrizes acima são iguais, podemos afirmar que seus elementos, ordenadamente, serão iguais entre si.

$$\begin{bmatrix} 6x + 1y \\ -5x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$6x + y = 1$$
$$-5x + 2y = -3$$

3 - Sistemas Homogêneos

Sistemas Lineares Homogêneos são sistemas cuja matriz dos termos independentes é uma matriz nula. Veja abaixo alguns exemplos de sistemas lineares homogêneos:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -5x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 7y - 4z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 15x_3 + x_4 = 0 \\ 21x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

4 – Solução de um Sistema Linear

Antes de discutirmos o que seria a solução de um Sistema linear, vejamos algo mais simples, isto é, a solução de uma equação linear. Comecemos por um exemplo. Considere a equação linear a seguir:

$$x + y = 15$$

Chamaremos de uma solução dessa equação um par ordenado $(x; y)$ que satisfaça aquela equação. Por exemplo, $x = 7$ e $y = 8$ resultam no par ordenado $(7,8)$, que é uma solução dessa equação linear visto que $7 + 8 = 15$.

Outras soluções dessa equação são:

$$(0; 15), (1; 14), (-4; 19), (26; -11) \ldots$$

Veja então que há infinitas soluções para essa solução.

Considere, por exemplo, o Sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Bom, como vimos há pouco, um sistema linear homogêneo será aquele em que todos os resultados são nulos, isto é, todos os termos constantes são nulos. Um fato muito importante dos sistemas lineares homogêneos é o seguinte:

Todo e qualquer sistema linear homogêneo possui uma solução $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$

Essa solução é chamada uma solução trivial desse sistema (às vezes alguns textos chamam essa solução de uma solução imprópria).

Veja, por exemplo, o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 0 \\ x + 6y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Veja que de fato $(0,0,0)$ é uma solução desse sistema (claro que aqui não se trata mais de um par ordenado mais sim um trio ou terno ordenado). Trata-se, portanto, de uma solução trivial desse sistema. Veja também que $(3, -4, 7)$ também é uma solução desse sistema. Como se trata de uma solução diferente daquela totalmente nula, a chamamos de uma solução não-trivial desse sistema.

5 – Regra de Cramer

Agora, veremos algumas aplicações de determinantes na solução de sistemas lineares. Caso algo não fique tão claro, solicito que volta à aula de Determinantes, para que tudo entre nos eixos.

A regra de Cramer é uma regra prática para obtermos as soluções de um sistema linear. É importante notarmos que a regra de Cramer somente funciona quando o Sistema tem solução única, ou seja, é possível e determinado, como estudado nos sistemas lineares do 1º grau com duas incógnitas.

Suponha que queiramos, por exemplo, encontrar a solução do Sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Primeiro, calculamos o determinante da matriz incompleta, isto é, o determinante da matriz dos coeficientes. Veja!

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Aplicando\ Sarrus\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$-1-2-1+2-1-1$$
$$Det = -4 \neq 0\ , logo\ tem\ solução\ única.$$

Esse determinante é chamado de determinante principal. Chamaremos esse determinante de D.

Agora, calcularemos mais três determinantes, um para cada variável. Funciona da seguinte forma. Cada coluna da matriz simboliza uma variável: a primeira coluna representa a variável x, a segunda coluna representa a variável y e a terceira coluna representa a variável z. Vamos então aprender a calcular os determinantes de cada variável.

O determinante da variável x é calculado trocando a primeira coluna pelos resultados lá do Sistema.

Da seguinte forma:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Aplicando\ Sarrus\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ -4 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$D_x = -4$$

Agora, substituímos novamente a matriz dos termos independentes na segunda coluna da matriz para calcularmos D_y

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Aplicando\ Sarrus\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$D_y = -12$$

Finalmente, fazendo o mesmo para a terceira coluna:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Aplicando\ Sarrus\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$D_z = -8$$

Daí, podemos encontrar os valores de x, y e z usando as formulas a seguir:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

$$x = \frac{-4}{-4} \qquad y = \frac{-12}{-4} \qquad z = \frac{-8}{-4}$$

$$x = 1 \qquad y = 3 \qquad z = 2$$

Veja então que encontramos a solução desse Sistema utilizando apenas determinantes, sem nos preocuparmos em substituição de variáveis, que seria o método tradicional.

Em outras palavras, podemos dizer que, consoante o Teorema de Cramer, se um sistema linear possui um número de equações igual ao número de incógnitas e se $Det \neq 0$, então o sistema será possível e determinado com solução única da forma:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}; \forall\, i \in \{1, 2,\ 3,\ 4, \dots,\ n\}$$

3 – Sistemas Lineares: Discussão

1 – Sistemas Possíveis

Um sistema será dito possível quando tiver solução, ao menos uma. Existem dois tipos de sistemas possíveis: **os determinados e os indeterminados.** Veja!

- **Sistemas determinados**

Um sistema será dito possível determinado quando tiver apenas uma solução. Sistemas desse tipo são abreviados como SPD (sistemas possíveis e determinados). Esses sistemas são os mais fáceis de detectar. A detecção pode ser feita utilizando-se a regra prática abaixo: um sistema será SPD quando o determinante de sua matriz incompleta for não-nulo.

- **Sistemas indeterminados**

Um sistema será dito possível e indeterminado quando tiver infinitas soluções. Serão ditos sistemas SPI (sistemas possíveis e indeterminados).

2 – Sistemas Impossíveis

São sistemas sem solução. São sistemas contraditórios, isto é, não podem apresentar uma solução. Sua abreviação é da forma SI.

3 - Discussão de Sistemas de duas Equações e duas Variáveis

Os sistemas de duas equações e duas variáveis podem possuir **uma, nenhuma ou infinitas soluções**, conforme seja possível e determinado, impossível ou possível e indeterminado, respectivamente.

A seguir são apresentadas as condições para que o sistema se enquadre em cada uma das categorias, observada ainda a sua interpretação geométrica, onde cada equação do 1º grau em x e y representa uma reta no plano, podendo ter ou não interseções entre si.

Seja o sistema de equações a seguir

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

temos:

- ✓ **Se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, então o sistema é possível e determinado, possui uma única solução e sua representação geométrica corresponde a duas retas concorrentes, ou seja, interceptam em apenas um ponto.**

- ✓ **Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, então o sistema é possível e indeterminado, possui infinitas soluções e sua representação geométrica corresponde a duas retas paralelas coincidentes.**

- ✓ **Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, então o sistema é impossível, não possui soluções e a sua representação geométrica corresponde a duas retas paralelas distintas.**

4 – Escalonamento e Teorema de Rouché-Capelli

1 - Escalonamento

Um sistema será dito escalonado quando acontecerem simultaneamente os dois itens abaixo:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não-nulo;
- O número de coeficientes não-nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, cresce da esquerda para a direita, de equação para equação.

Escalonar um sistema será bastante útil quando este apresentar mais de 3 equações e 3 incógnitas, pois, imagine calcular 6 determinantes cada um de ordem 5?! Fica trabalhoso, não? Pois bem! Aprenda com carinho este método, pois poderá salvar sua aprovação!!!

Observe abaixo alguns exemplos de sistemas lineares escalonados:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=4 \\ 0x+\ 3y+4z=5 \\ 0x+0x-z=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3-x_4=12 \\ 0x+0x+2x_3+x_4=10 \\ 0x+0x+0x-2x_4=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y=6 \\ 0x+\ y=-3 \end{cases}$$

Para escalonarmos sistemas, temos duas ferramentas básicas de transformação, sem alterarmos o sistema original, veja:

- É possível multiplicar uma equação qualquer de um sistema por um número real não-nulo qualquer.
- É possível somar uma equação qualquer de um sistema com outra equação do mesmo sistema.

Inicialmente, vamos considerar um sistema qualquer, como o abaixo:

$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x-y+z=-2 \\ -x+y+4z=1 \end{cases}$$

O sistema acima gera a seguinte matriz aumentada, ou seja, acrescentando-se os termos independentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

É sempre mais fácil escalonar a matriz, ao invés escalonar o sistema, pois são apenas números, sem letras ao redor. Por isso escolhi este caminho. Seu foco é zerar os seguintes termos do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 & -2 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5} & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Minha dica é que você sempre comece pelo seguinte termo (chamado de pivô):

$$Pivô \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ \boxed{\mathbf{2}} & -1 & 1 & -2 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Para zerarmos esse termo, podemos diminuir a linha 2 do dobro da linha 1, consegue ver isso? Se sobrarmos a primeira linha, o 1 tornar-se-á 2. E daí, ao subtrair a segunda linha da primeira sobrada, conseguiremos zerar o pivô. Vejamos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2:L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2-2.1 & -1-2.(-2) & 1-2.1 & -2-2.4 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos anular o termo imediatamente abaixo do pivô. Em nosso caso, basta somar a terceira linha com a primeira. Veja:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3:L_3+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ -1+1 & 1+(-2) & 4+1 & 1+4 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos anular o -1 da terceira linha. Podemos fazer isso triplicando a terceira linha e somando-a à segunda linha:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3:3L_3+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 3.0+0 & 3.(-1)+3 & 3.5+(-1) & 3.5+(-10) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 5 \end{array}\right]$$

Essa é, agora, uma matriz dita escalonada. Podemos dizer então que a matriz escalonada da matriz

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \text{ é a matriz} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 5 \end{array}\right]$$

Depois que a matriz está escalonada, podemos retorná-la à sua forma de sistema. Veja:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 3y - z = -10 \\ 14z = 5 \end{cases}$$

Agora, podemos solucionar o sistema de baixo para cima. Começando por z.

$$14z = 5$$

$$z = \frac{5}{14}$$

Daí, substituindo na segunda equação:

$$3y - z = -10$$

$$3y - \frac{5}{14} = -10$$

$$3y = -10 + \frac{5}{14}$$

$$3y = \frac{-140 + 5}{14}$$

$$y = -\frac{135}{14}$$

$$y = -\frac{45}{14}$$

E daí, finalmente, à primeira equação:

$$x - 2y + z = 4$$

$$x - 2\left(-\frac{45}{14}\right) + \frac{5}{14} = 4$$

$$x + \frac{90}{14} + \frac{5}{14} = 4$$

$$x + \frac{95}{14} = 4$$

$$x = 4 - \frac{95}{14}$$

$$x = \frac{56 - 95}{14}$$

$$x = -\frac{39}{14}$$

A solução é, então: $S = \left\{\left(-\frac{39}{14}, -\frac{45}{14}, \frac{5}{14}\right)\right\}$

2 – Característica de uma Matriz

Vamos então a uma definição do que vem a ser a característica de uma matriz:

Chamamos de **característica de uma matriz** a quantidade de linhas não-nulas de sua forma escalonada.

Vimos há pouco, por exemplo, que a forma escalonada de $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$ é a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 5 \end{array}\right]$. Veja que há três linhas não-nulas na forma escalonada de A, então, a característica de A é 3 (escreve-se $p(A = 3)$

3 – Teorema de Rouché-Capelli

Seja A a matriz dos coeficientes (a matriz incompleta) associada a um sistema linear qualquer com n incógnitas. Seja também A' a matriz aumentada desse sistema. Então, podemos criar a seguinte síntese:

- Se $p(A) = p(A') = n$, então o sistema será **possível e determinado** (SPD);
- Se $p(A) = p(A') < n$, então o sistema será **possível e indeterminado** (SPI);
- Se $p(A) < p(A')$, então o sistema será **impossível** (SI).

Veja como exemplo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Trata-se de um sistema linear com três incógnitas, então $n = 3$

Sua matriz aumentada escalonada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 5 \end{array}\right]$, como vimos. Isso nos diz que $p(A') = 3$, pois a característica dessa matriz é 3. A matriz dos coeficientes (matriz incompleta) é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$. Veja que essa matriz tem característica 3, então $p(A) = 3$. Veja que $p(A) = p(A') = 3$; daí, podemos concluir que o sistema é possível e determinado.

Agora, tendo por base o sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ e sabendo que a sua matriz aumentada escalonada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$, podemos concluir que essa matriz tem característica 3, portanto, $p(A') = 3$

Porém a matriz dos coeficientes, que seria $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, como vimos, possui característica 2, ou seja, $p(A) = 2$. Recaímos no caso em que $p(A) < p(A')$. Isso nos diz, então, que o sistema é impossível.

É meu querido(a). Chegamos ao fim de mais uma aula.

Espero que tenham gostado.

Dúvidas estou à disposição.

5 – Lista de Questões

01 (EsSA 2010) – Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} kx + 2y - z = 2 \\ 2x - 8y + 2z = 0 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$$

O valor de k real, para que o sistema acima seja possível e determinado, é:

a) $k = 1/2$

b) $k \neq -7/2$

c) $k \neq -1/6$

d) $k \neq -1/2$

e) $k \neq -3/2$

---

02 (EsSA 2010) – Uma pessoa deseja totalizar a quantia de R$ 600,00 utilizando cédulas de um, dez e vinte reais, num total de 49 cédulas, de modo que a diferença entre as quantidades de cédulas de dez e de um real seja a nove unidades. Nesse caso, a quantidade de cédulas de vinte reais de que a pessoa precisará será igual a:

a) 19

b) 10

c) 20

d) 29

e) 21

---

03 (EsSA 2011) – Três amigos, Abel, Bruno e Carlos, juntos possuem um total de 555 figurinhas. Sabe-se que Abel possui o triplo de Bruno menos 25 figurinhas, e que Bruno possui o dobro de Carlos mais 10 figurinhas. Desses amigos, o que possui mais tem:

a) 250 figurinhas.
b) 365 figurinhas.
c) 275 figurinhas.
d) 325 figurinhas.
e) 300 figurinhas.

---

04 (EsSA 2012) – Em um programa de TV, o participante começa com R$500,00. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe R$ 200,00; e para cada resposta errada perde R$ 150,00. Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas no programa e terminou com R$ 600,00, quantas questões ele acertou?

a) 14
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

---

05 (EsSA 2018) – Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} k^2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considerando que a equação matricial $A \cdot X = B$ tem solução única, podemos afirmar que:

a) $k=\pm 2$
b) $k=\pm 1$
c) $k\neq \pm 4$
d) $k=\pm 4$
e) $k\neq \pm 2$

---

06 (EEAR-2001) O sistema linear $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ y+mz=0 \end{cases}$ é indeterminado para

a) Nenhum m real.
b) Todo m real.
c) $m=0$.
d) $m=1$.

07. O sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$, nas incógnitas $x \; e \; y$, admite uma única solução se, e somente se,

a) $m \neq -1$
b) $m = 0$
c) $m = -1$
d) $m = 2$

08. (EEAR-2002) Para que valor de k o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2x + kz = 2 \end{cases}$ não possui solução?

a) -3
b) -6
c) 6
d) 3

09. (EEAR-2002) O sistema de equações $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

a) Não tem solução
b) Tem infinitas soluções
c) Tem apenas a solução trivial
d) Tem uma única solução não trivial

10. (EEAR-2002) Os valores de k tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$ admita apenas a solução trivial são:

a) $k \neq 0 \; e \; k \neq -1$

b) $k \neq 1 \; e \; k \neq -1$
c) $k = 0 \; e \; k = -1$
d) $k \neq 1 \; e \; k \neq -2$

---

11. (EEAR-2003) Para que o sistema $\begin{cases} 3x + my = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ tenha solução diferente da imprópria, o valor de m deve ser

a) 9
b) 0
c) 10
d) 15

---

12. (EEAR-2004) Sendo $abcd \neq 0$, para que o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$ seja indeterminado, é necessário que $p \; e \; q$ sejam, respectivamente,

a) $\frac{da}{c} \; e \; \frac{bd}{c}$
b) $\frac{bd}{c} \; e \; \frac{da}{c}$
c) $\frac{ab}{c} \; e \; \frac{d}{c}$
d) $\frac{d}{c} \; e \; \frac{ab}{c}$

---

13. (EEAR-2004) Em uma escola há 56 professores, entre homens e mulheres. Se a metade do número de mulheres é igual ao triplo do de homens, então o número de mulheres supera o de homens em

a) 32
b) 36
c) 40
d) 44

---

14. (EEAR-2005) Se a solução do sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ é $\{(a, b, c)\}$, então o valor de $a.b.c$ é

a) -12
b) -18

c) -24
d) -30

---

15. (EEAR-2006) O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - my = 6 \end{cases}$ é possível e determinado para:

a) $m = 2$
b) $m \neq 2$
c) $m = -2$
d) $m \neq -2$

---

16. (EEAR-2007) Seja $\begin{cases} x + my = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ um sistema de equações do $1°$ grau nas incógnitas $x\ e\ y$. Ele será impossível se o valor de m for

a) $\frac{5}{4}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{3}$
d) 2

---

17. (EEAR-2007) A tabela mostra os pedidos de 4 clientes em uma lanchonete.

Cliente	Pedidos
1	1 suco de laranja, 2 hambúrgueres e 3 porções de batata frita.
2	3 sucos de laranja, 1 hambúrguer e 2 porções de batata frita.
3	2 sucos de laranja, 3 hambúrgueres e 1 porção de batata frita.
4	1 suco de laranja, 1 hambúrguer e 1 porção de batata frita.

Se os clientes $1, 2\ e\ 3$ pagaram, respectivamente, $R\$11{,}10, R\$10{,}00\ e\ R\$11{,}90$ por seus pedidos, então o cliente 4 pegou $R\$$

a) 5,00
b) 5,10
c) 5,40

d) 5,50

---

18. (EEAR-2008) Se $\begin{cases} ax + 2y = -1 \\ 3x + by = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$ são sistemas equivalentes, então o valor de $a + b$ é

a) 11
b) 9
c) -5
d) -7

---

19. (EEAR-2010) Para que o sistema $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -3x + 4y - z = -1 \end{cases}$ seja possível e determinado, deve-se ter

a) $k \neq \frac{9}{8}$
b) $k \neq \frac{2}{5}$
c) $k = \frac{7}{6}$
d) $k = \frac{1}{3}$

---

20. (EEAR-2013) O valor de x que é solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ é um número

a) Par primo.
b) Ímpar primo.
c) Par não primo.
d) Ímpar não primo.

---

6 – Questões Comentadas

01 (EsSA 2010) – Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} kx+2y-z=2 \\ 2x-8y+2z=0 \\ 2x+z=4 \end{cases}$$

O valor de k real, para que o sistema acima seja possível e determinado, é:

a) $k=1/2$

b) $k\neq -7/2$

c) $k\neq -1/6$

d) $k\neq -1/2$

e) $k\neq -3/2$

Comentário:

Vamos reescrever o sistema acima destacando os coeficientes

$$\begin{cases} k\cdot x+2\cdot y-1\cdot z=2 \\ 2\cdot x-8\cdot y+2\cdot z=0 \\ 2\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=4 \end{cases}$$

Lembre-se de que para termos um sistema possível e determinado, o determinante da matriz formada pelos coeficientes de $x, y\ e\ z$ deve ser diferente de Zero. Então

$$\det=\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$k\cdot(-8)\cdot 1+2\cdot 2\cdot 2+(-1)\cdot 2\cdot 0-2\cdot(-8)\cdot(-1)-0\cdot 2\cdot k-1\cdot 2\cdot 2\neq 0$$

$$-8k+8-16-4\neq 0$$

$$k\neq -\frac{3}{2}$$

Gabarito: E

---

02 (EsSA 2010) – Uma pessoa deseja totalizar a quantia de R$ 600,00 utilizando cédulas de um, dez e vinte reais, num total de 49 cédulas, de modo que a diferença entre as quantidades de cédulas de dez e de um real seja a nove unidades. Nesse caso, a quantidade de cédulas de vinte reais de que a pessoa precisará será igual a:

a) 19

b) 10

c) 20

d) 29

e) 21

Comentário:

Vamos definir as seguintes variáveis

$$\begin{cases} U \text{ número de cédulas de } 1 \text{ real} \\ D \text{ número de cédulas de dez reais} \\ V \text{ número de cédulas de vinte reais} \end{cases}$$

Assim, vamos escrever o seguinte sistema baseado nas informações do enunciado

$$\begin{cases} U + D + V = 49 \\ 1 \cdot U + 10 \cdot D + 20 \cdot V = 600 \\ D - U = 9 \rightarrow D = U + 9 \end{cases}$$

Assim, substituindo-se $D = U + 9$ nas duas primeiras equações, temos

$$\begin{cases} U + U + 9 + V = 49 \ \rightarrow 2U + V = 40 \ \rightarrow V = 40 - 2U \\ U + 10 \cdot (U + 9) + 20V = 600 \rightarrow 11U + 20V = 510 \end{cases}$$

Com isso,

$$11U + 20 \cdot (40 - 2U) = 510 \ \rightarrow U = 10$$

$$V = 40 - 2 \cdot 10 = 20$$

$$D = 9 + 10 = 19$$

Assim, o número de cédulas de vinte reais, V, é 20.

Gabarito: C

---

03 (EsSA 2011) – Três amigos, Abel, Bruno e Carlos, juntos possuem um total de 555 figurinhas. Sabe-se que Abel possui o triplo de Bruno menos 25 figurinhas, e que Bruno possui o dobro de Carlos mais 10 figurinhas. Desses amigos, o que possui mais tem:

a) 250 figurinhas.

b) 365 figurinhas.

c) 275 figurinhas.

d) 325 figurinhas.

e) 300 figurinhas.

Comentário:

Vamos definir as seguintes variáveis

$$\begin{cases} A \text{ número de figurinhas de Abel} \\ B \text{ número de figurinhas de Bruno} \\ C \text{ número de figurinhas de Carlos} \end{cases}$$

Assim, vamos escrever o seguinte sistema baseado nas informações do enunciado

$$\begin{cases} A + B + C = 555 \\ A = 3B - 25 \\ B = 2C + 10 \end{cases}$$

Assim,

$$A = 3 \cdot (2C + 10) - 25 \rightarrow A = 6C + 5$$

$$A + B + C = (6C + 5) + (2C + 10) + C = 555$$

$$9C = 540 \rightarrow C = 60 \rightarrow A = 365 \rightarrow B = 130$$

Logo, quem possui mais figurinhas é Abel, com $A = 365$ figurinhas.

Gabarito: B

---

04 (EsSA 2012) – Em um programa de TV, o participante começa com R$500,00. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe R$ 200,00; e para cada resposta errada perde R$ 150,00. Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas no programa e terminou com R$ 600,00, quantas questões ele acertou?

a) 14
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

Comentário:

Vamos definir o número de questões acertadas como n. Assim, temos que o número de questões erradas é $25 - n$. Logo

$$500 + n \cdot 200 - 150 \cdot (25 - n) = 600$$
$$350n = 3850$$
$$n = 11$$

Gabarito: D

---

05 (EsSA 2018) – Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} k^2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considerando que a equação matricial $A \cdot X = B$ tem solução única, podemos afirmar que:

a) $k = \pm 2$
b) $k = \pm 1$
c) $k \neq \pm 4$
d) $k = \pm 4$
e) $k \neq \pm 2$

Comentário:

Como o sistema mostrado apresenta apenas uma solução, temos que o determinante de A deve ser diferente de Zero. Logo

$$detA \neq 0$$
$$\begin{vmatrix} k^2 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$
$$k^2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-4) \neq 0$$
$$k^2 \neq 16$$
$$k \neq \pm 4$$

Gabarito: C

---

06 (EEAR-2001) O sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$ é indeterminado para

a) Nenhum m real.
b) Todo m real.
c) $m = 0$.
d) $m = 1$.

Comentário:

Para um sistema ser possível e indeterminado, podemos escalonar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - x = 0 \\ mz - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z - x = 0 \\ mz - z = 0 \end{cases}$$

Assim, para z ser indeterminado,

$m - 1 = 0$

$m = 1$

Gabarito: C

---

07. O sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$, nas incógnitas $x\ e\ y$, admite uma única solução se, e somente se,

a) $m \neq -1$
b) $m = 0$
c) $m = -1$
d) $m = 2$

Comentário:

Para admitir uma única solução, o sistema deve ser possível e determinado. Para isso, podemos escalonar

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 14y = -14 \\ -5y = 3m + 8 \end{cases}$$

Logo,

$y = -1$
$3m + 8 = +5 \ \rightarrow m = -1$

Gabarito: C

---

08. (EEAR-2002) Para que valor de k o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2x + kz = 2 \end{cases}$ não possui solução?

a) -3
b) -6
c) 6
d) 3

Comentário:
Vamos escalonar o sistema da seguinte forma
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2y + kz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ kz - 6z = -2 \end{cases}$$
Para que o sistema seja impossível,
$k - 6 = 0 \ \rightarrow k = 6$

Gabarito: C

---

09. (EEAR-2002) O sistema de equações $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

a) Não tem solução
b) Tem infinitas soluções
c) Tem apenas a solução trivial
d) Tem uma única solução não trivial

Comentário:
Vamos escalonar o sistema proposto:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
Ou seja, o sistema é possível e indeterminado. Logo, possui infinitas soluções.

Gabarito: B

---

10. (EEAR-2002) Os valores de k tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-ky+z=0 \\ kx-y-z=0 \end{cases}$ admita apenas a solução trivial são:

a) $k \neq 0 \; e \; k \neq -1$
b) $k \neq 1 \; e \; k \neq -1$
c) $k = 0 \; e \; k = -1$
d) $k \neq 1 \; e \; k \neq -2$

Comentário:

Para que o sistema homogêneo admita somente solução trivial, ele deve ser possível e determinado. Logo,

$detA \neq 0$

Assim,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = k + k - 2 + 2k^2 + 1 + 1 = 2k^2 + 2k$$

Ou seja,

$detA = 2k(k+1) \neq 0$

Assim,

$k \neq 0 \; e \; k \neq -1$

Gabarito: A

---

11. (EEAR-2003) Para que o sistema $\begin{cases} 3x+my=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$ tenha solução diferente da imprópria, o valor de m deve ser

a) 9
b) 0
c) 10
d) 15

Comentário:

Para que o sistema tenha solução diferente da imprópria (ou trivial, ou nula) temos que esse sistema deve ser possível e indeterminado. Logo,

$detA = 0$

Assim,

$$\begin{vmatrix} 3 & m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$9 - m = 0 \rightarrow m = 9$

Gabarito: A

---

12. (EEAR-2004) Sendo $abcd \neq 0$, para que o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$ seja indeterminado, é necessário que $p\ e\ q$ sejam, respectivamente,

a) $\frac{da}{c}\ e\ \frac{bd}{c}$
b) $\frac{bd}{c}\ e\ \frac{da}{c}$
c) $\frac{ab}{c}\ e\ \frac{d}{c}$
d) $\frac{d}{c}\ e\ \frac{ab}{c}$

Comentário:

Utilizando o método de escalonamento,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \frac{aq}{p}y - by = \frac{ad}{p} - c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ y\left(\frac{aq}{p} - b\right) = \frac{ad}{p} - c \end{cases}$$

Sendo assim, para que esse sistema seja indeterminado,

$$\frac{aq}{p} - b = 0\ e\ \frac{ad}{p} - c = 0$$

Logo,

$$p = \frac{ad}{c}\ e\ q = \frac{bp}{a} = \frac{b}{a}\left(\frac{ad}{c}\right) = \frac{db}{c}$$

Gabarito: A

---

13. (EEAR-2004) Em uma escola há 56 professores, entre homens e mulheres. Se a metade do número de mulheres é igual ao triplo do de homens, então o número de mulheres supera o de homens em

a) 32
b) 36
c) 40
d) 44

Comentário:

Sejam h o número de homens e m o número de mulheres. Assim,

$$h + m = 56$$

E, além disso,

$$\frac{m}{2} = 3h \rightarrow m = 6h$$

Assim,

$h + 6h = 56 \ \rightarrow 7h = 56 \ \rightarrow h = 8$
$m = 6h \ \rightarrow m = 48$
Logo, o número de mulheres supera o de homens em $40 = 48 - 8$.

Gabarito: C

---

14. (EEAR-2005) Se a solução do sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ é $\{(a, b, c)\}$, então o valor de $a.b.c$ é

a) -12
b) -18
c) -24
d) -30

Comentário:

Escalonando o sistema, teremos

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3z = 1 \\ 3x - 3z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3z = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Assim,

$x = 5, z = 3 \ e \ y = -2$

Logo,

$a.b.c = 5.(-2).3 = -30$

Gabarito: D

---

15. (EEAR-2006) O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - my = 6 \end{cases}$ é possível e determinado para:

a) $m = 2$
b) $m \neq 2$
c) $m = -2$
d) $m \neq -2$

Comentário:

Para ser possível e determinado,

$detA \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -m \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ -m - 2 \neq 0$

$m \neq -2$

Gabarito: D

---

16. (EEAR-2007) Seja $\begin{cases} x + my = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ um sistema de equações do $1°$ grau nas incógnitas x e y. Ele será impossível se o valor de m for

a) $\frac{5}{4}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{3}$
d) 2

Comentário:

Escalonando o sistema acima, temos

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ (5 - 4m)y = -2 \end{cases}$$

Para que seja impossível,

$$5 - 4m = 0$$

$$m = \frac{5}{4}$$

Gabarito: A

---

17. (EEAR-2007) A tabela mostra os pedidos de 4 clientes em uma lanchonete.

Cliente	Pedidos
1	1 suco de laranja, 2 hambúrgueres e 3 porções de batata frita.
2	3 sucos de laranja, 1 hambúrguer e 2 porções de batata frita.
3	2 sucos de laranja, 3 hambúrgueres e 1 porção de batata frita.
4	1 suco de laranja, 1 hambúrguer e 1 porção de batata frita.

Se os clientes $1, 2$ e 3 pagaram, respectivamente, $R\$11{,}10$, $R\$10{,}00$ e $R\$11{,}90$ por seus pedidos, então o cliente 4 pegou $R\$$

a) $5{,}00$
b) $5{,}10$
c) $5{,}40$
d) $5{,}50$

Comentário:

Seja a, b e c, respectivamente, o número de sucos de laranja, hambúrgueres e porções de batata frita.

Sendo assim, podemos formar o sistema seguinte

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 11{,}10 \\ 3a + b + 2c = 10{,}00 \\ 2a + 3b + c = 11{,}90 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 11{,}10 \\ 5a + c = 8{,}90 \\ -a + 7c = 9{,}50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 11{,}10 \\ 5a + c = 8{,}90 \\ 36c = 56{,}4 \end{cases}$$

Logo,

$$c = \frac{4{,}7}{3}, a = \frac{22}{15} \ e \ b = \frac{37}{15}$$

Por fim,

$$a + b + c = 5{,}50$$

Gabarito: D

---

18. (EEAR-2008) Se $\begin{cases} ax + 2y = -1 \\ 3x + by = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$ são sistemas equivalentes, então o valor de $a + b$ é

a) 11

b) 9

c) -5

d) -7

Comentário:

Se os sistemas são equivalentes, eles possuem as mesmas soluções. Logo,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x = -3 \end{cases}$$

Assim,

$$x = -1 \ e \ y = 3$$

Logo, para o outro sistema,

$$\begin{cases} a(-1) + 2.3 = -1 \\ 3(-1) + b.3 = 3 \end{cases}$$

Dessa forma,

$$a = 7 \ e \ b = 2$$

Por fim,

$$a + b = 9$$

Gabarito: B

---

19. (EEAR-2010) Para que o sistema $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -3x + 4y - z = -1 \end{cases}$ seja possível e determinado, deve-se ter

a) $k \neq \frac{9}{8}$

b) $k \neq \frac{2}{5}$

c) $k = \frac{7}{6}$

d) $k = \frac{1}{3}$

Comentário:

Para que o sistema seja possível e determinado,

$detA \neq 0$

$\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Assim,

$4k - 3 + 8 - 12 - 2 + 4k \neq 0$

$8k \neq 9$

$k \neq \frac{9}{8}$

Gabarito: A

---

20. (EEAR-2013) O valor de x que é solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ é um número

a) Par primo.

b) Ímpar primo.

c) Par não primo.

d) Ímpar não primo.

Comentário:

Escalonando o sistema, temos

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \quad y = 1 \end{cases}$

Logo,

$y = 1 \; e \; x = 3$

Tem-se que o número 3 é um ímpar primo.

Gabarito: B

É meu querido!!! Chegamos ao fim!

Espero que tenahngostado.

Qualquer dúvida, crítica ou sugestão, entre em contato comigo pelo fórum de dúvidas, na sua área de aluno, ou, se preferir:

Fale comigo!

@profismael_santos	Ismael Santos	@IsmaelSantos