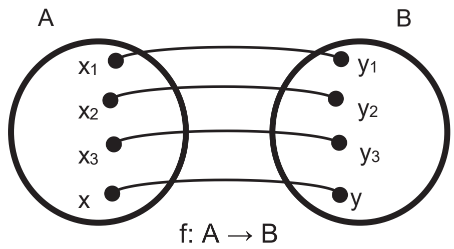
MESTRES DA MATEMÁTICA

Função

FUNÇÃO

1) Definição: Dados dois conjuntos A e B não vazios, dizemos que uma relação y = f(x) é uma função f de A em B, se, e somente se, cada elemento x, $x \in A$, corresponder por f a um único elemento y, $y \in B$.

NOTAÇÃO: $\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \to y = f(x) \end{array}$



2) Domínio D de uma função f: A → B

É o conjunto de todos os elementos do conjunto A que estão associados a um único elemento do conjunto B através da função f.

3) Contradomínio CD de uma função f: A → B

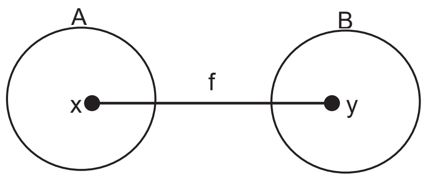
É o conjunto B.

4) Conjunto-imagem ($\text{Im}f$) de uma função f: A → B

É o conjunto formado por todas as imagens de todos os elementos do domínio, ou seja, $\text{Im}f = \{y \in B \,/\, \exists x \in A : y = f(x)\}$.

Logo, $\text{Im}f \subseteq CD$

Se $x \in A$ e $y \in B$ e a x corresponde y, então:



y é a imagem de x pela função f, ou seja, f(x) = y.

5) Domínio de uma função a partir de sua lei matemática

O domínio D de f é o conjunto de todos os valores de $x \in D$ para os quais a função está bem definida.

EX: $\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow D = \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D = \mathbb{R}_+ \\ f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow D = \mathbb{R}^* \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow D = \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

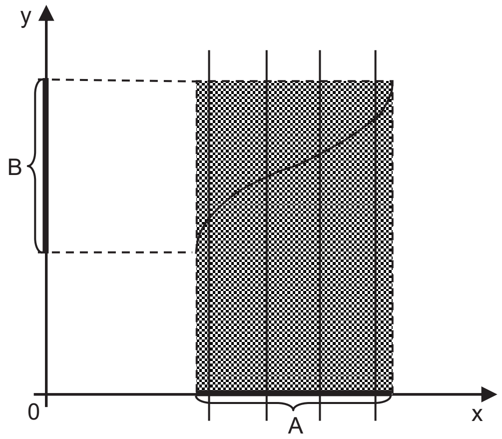
6) Gráfico de uma função

Considere uma função $y = f(x)$. Chamamos de gráfico de f a representação cartesiana de todos os pares ordenados do tipo $(x, f(x))$, em que x pertence ao domínio de f.

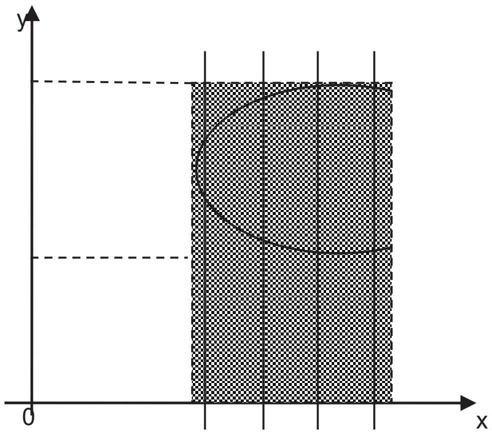
7) Reconhecimento do gráfico de uma função

Uma maneira de verificar se um gráfico representa uma função de A em B é traçar retas paralelas ao eixo y saindo dos pontos do conjunto A. Se cada uma dessas retas encontrar o gráfico apenas uma vez, significa que cada elemento de A possui um único correspondente em B e, portanto, trata-se de uma função.

EX 1: Como cada reta cortou o gráfico da função apenas uma vez, então este gráfico abaixo representa uma função.

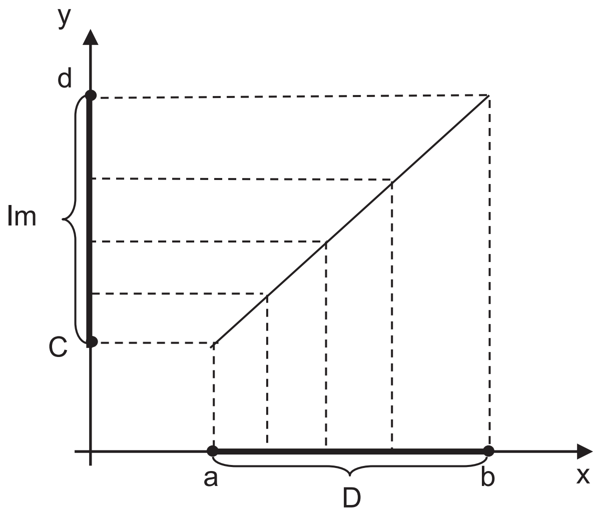


EX 2: Como algumas retas cortaram o gráfico da função mais de uma vez, então este gráfico abaixo não representa uma função, pois teríamos elementos do domínio com mais de uma imagem.



8) Domínio e Imagem de uma função através do seu gráfico

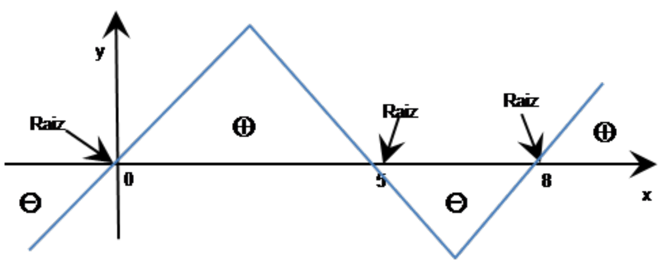
$$\begin{cases}\text{O Domínio de uma função é a projeção ortogonal dos pontos do gráfico de f sobre o eixo x}\\ \text{A Imagem de uma função é a projeção ortogonal dos pontos do gráfico da f sobre o eixo y}\end{cases}$$



Domínio: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,/\,a\le x\le b\}$ e Imagem: $[c,d]=\{y\in\mathbb{R}\,/\,c\le x\le d\}$

9) Estudo do sinal de uma função

Considere o gráfico seguinte:

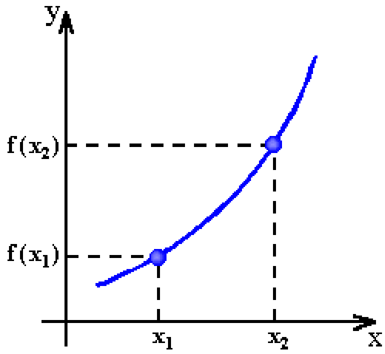


$$\begin{cases}\text{Se } x=0 \text{ ou } x=5 \text{ ou } x=8\Rightarrow f(x)=0\\ \text{Se } x<0 \text{ ou } 5<x<8\Rightarrow f(x)<0\\ \text{Se } 0<x<5 \text{ ou } x>8\Rightarrow f(x)>0\end{cases}$$

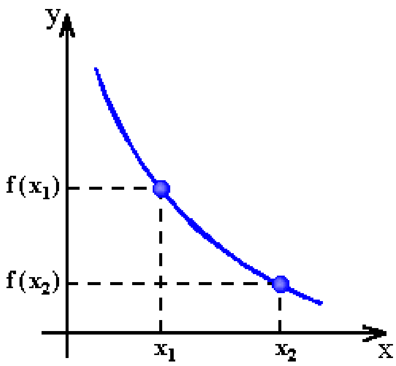
OBS: Os valores de $x=0$, $x=5$ e $x=8$ são chamados de raízes ou zeros da função, pois produzem imagem nula em f.

10) Tipos de função

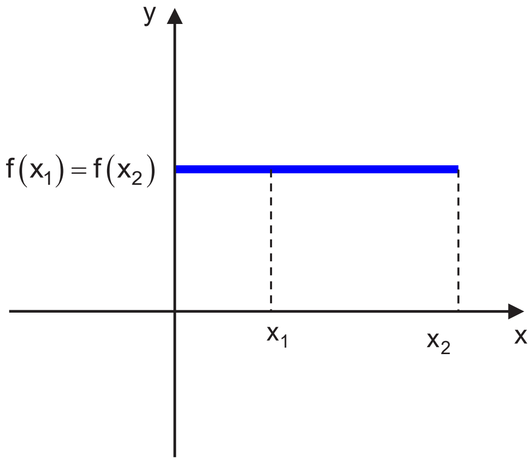
• Função crescente: Se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$



• Função decrescente: Se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



• Função constante: Para todo x_2 e x_1 pertencente ao domínio da f, teremos $f(x_2) = f(x_1)$.



• Função Sobrejetora: Uma função é chamada de Sobrejetora se o seu conjunto Imagem for igual ao seu contradomínio.

$$\text{Imagem da f} = \text{Contra Domínio} \ \ (\text{Im} f = CD)$$

• Função Injetora: Uma função é chamada de Injetora se quaisquer dois elementos distintos no domínio de f produzirem imagens também distintas. Podemos resumir a definição assim:

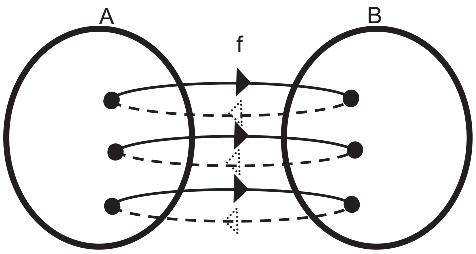
$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D \text{ com } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou

$$\text{Se } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

• Função Bijetora: Uma função é chamada de Bijetora se for Sobrejetora e Injetora ao mesmo tempo. Importante ressaltar que toda função Bijetora possui uma função inversa.

11) Função Inversa: Seja uma função Bijetora definida de A em B conforme o esquema abaixo, chamamos de função inversa de f, a função $f^{-1}: B \to A$, tal que $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.



Regra prática para o cálculo da função inversa

$$\begin{cases} 1^o) \text{ Trocamos o x pelo y e o y pelo x} \\ 2^o) \text{ Isolamos o y} \end{cases}$$

OBS: Os gráficos de uma função f e da sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, simétricos em relação a reta $y = x$.

EX: $f(x) = 2x + 3$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

12) Função Composta: Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, definimos a função composta por $h = g \circ f: A \to C$, definida pela lei, $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

EX: $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 9$, então:

$$\begin{cases} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3)^2 - 9 \Rightarrow (g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 9) = 2(x^2 - 9) + 3 \Rightarrow (f \circ g)(x) = 2x^2 - 15 \end{cases}$$