FUNÇÕES E GRÁFICOS

Já aprendemos o que são relações e como representá-las no plano cartesiano e por diagramas. Aprendemos também o conceito de função e como identificar domínio, contradomínio e imagem de uma função por diagramas. Agora vamos focar na representação gráfica das funções.

ESBOÇO DE GRÁFICOS

Para esboçarmos o gráfico de uma função, primeiro construímos uma tabela com duas colunas, uma coluna contendo alguns valores de x e outra coluna contendo os valores de y que se relacionam com os valores de x por meio da lei de formação. Depois, cada par ordenado é marcado no plano cartesiano. Por fim, consideramos os demais pontos do domínio que não apareceram na tabela e ligam-se todos esses pontos por uma curva, caso o domínio seja um intervalo.

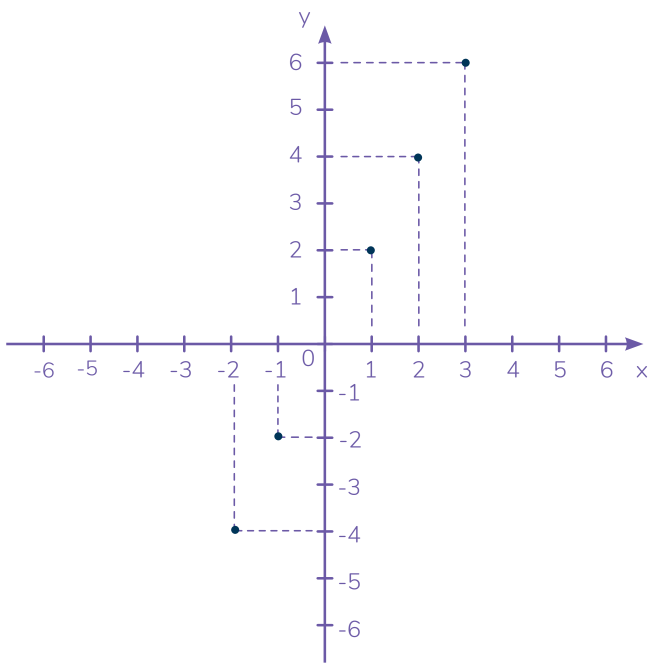
Exemplo 1:

- $f(x) = 2x$

Primeiro montamos a tabela com alguns valores do domínio da função e suas respectivas imagens:

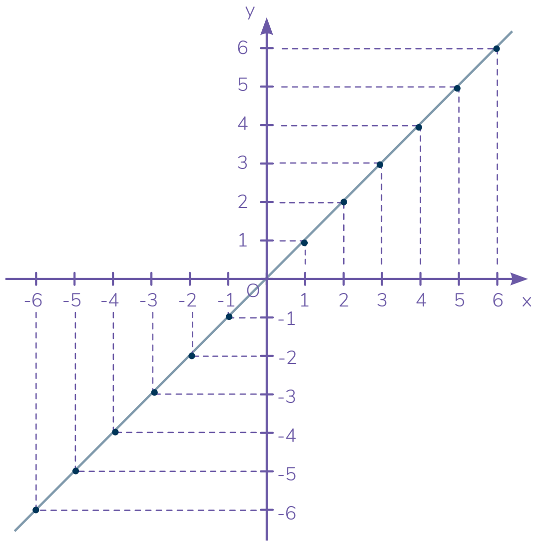
x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

Depois marcamos esses pares ordenados no plano cartesiano da seguinte forma:



Por fim, consideramos o domínio da função para finalizarmos o esboço do gráfico. A função do exemplo não tem restrição em seu domínio, logo, $Dm(f) = \mathbb{R}$. Consideraremos então todos os valores de x que não aparecem na tabela para concluir o esboço.

Olhando para a disposição dos pontos, percebemos que eles parecem estar alinhados. Traçamos, então, uma reta passando por esses pontos e concluímos o esboço do gráfico, como mostra a imagem ao lado:



Observação:

- Os esboços de gráficos que são retas e parábolas serão vistos em apostilas posteriores, assim como demais funções e seus gráficos.

Exemplo 2:

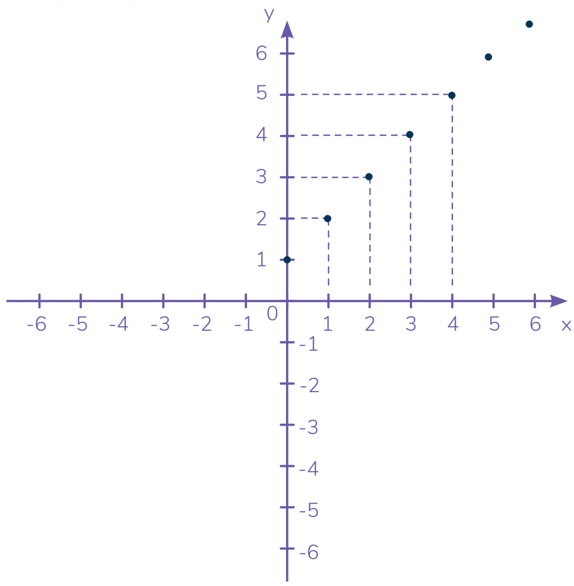
- $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\ ;\ f(x) = x + 1$

Montando a tabela temos:

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

Observe que mesmo que os pontos estejam alinhados, não podemos ligá-los porque o domínio da função é $\mathbb{N}$. Concluímos então o esboço do gráfico da função.

Marcando esses pares ordenados no plano cartesiano temos:



TRANSLAÇÃO, REFLEXÃO, ALONGAMENTO E AMPLITUDE DE GRÁFICOS

Agora vamos nos preocupar em saber o que acontece com o gráfico da função quando adicionamos constantes reais na lei de formação.

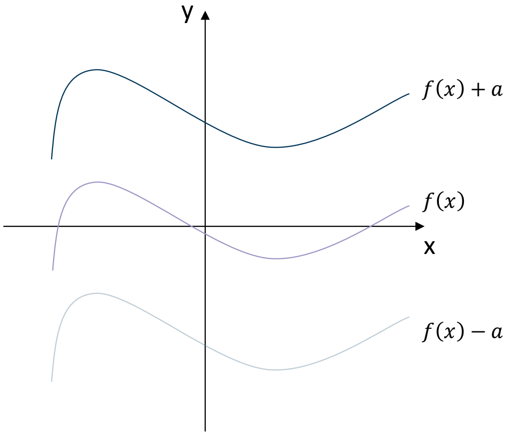
Translação

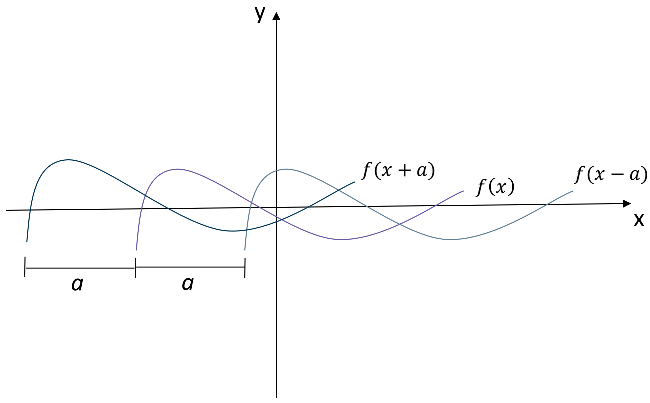
Se ocorrer a lei de formação: $f(x) + a$, com $a > 0$, o gráfico da função $f(x)$ é transladado **a** unidades para cima.

Se ocorrer a lei de formação: $f(x) - a$, com $a > 0$, o gráfico da função $f(x)$ é transladado **a** unidades para baixo.

Se ocorrer a lei de formação: $f(x-a)$, com $a>0$ o gráfico da função $f(x)$ é transladado **a** unidades para a direita.

Se ocorrer a lei de formação: $f(x+a),$ com $a>0$, o gráfico da função $f(x)$ é transladado **a** unidades para a esquerda.

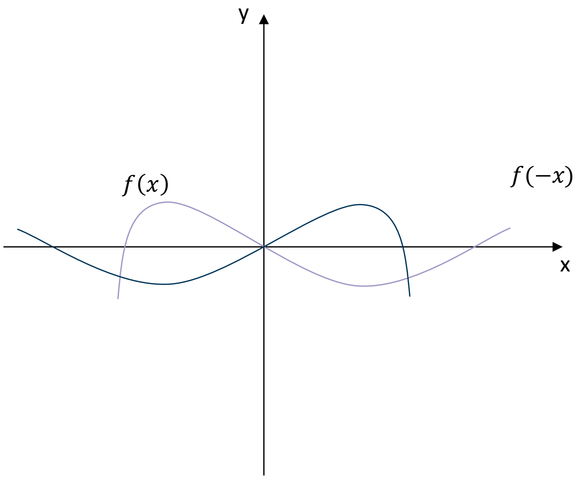


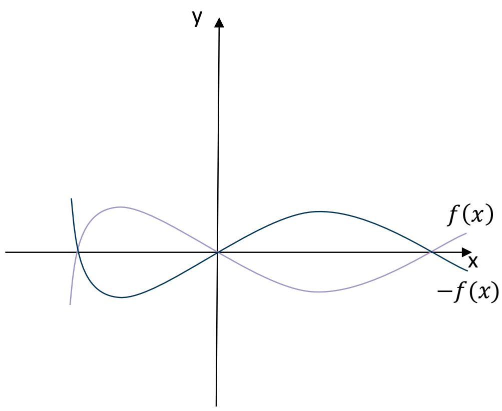


Reflexão

Se ocorrer a lei de formação: $f(-x)$, o gráfico da função $f(x)$ sofre uma reflexão em torno do eixo y.

Se ocorrer a lei de formação: $-f(x)$, o gráfico da função $f(x)$ sofre uma reflexão em torno do eixo x.

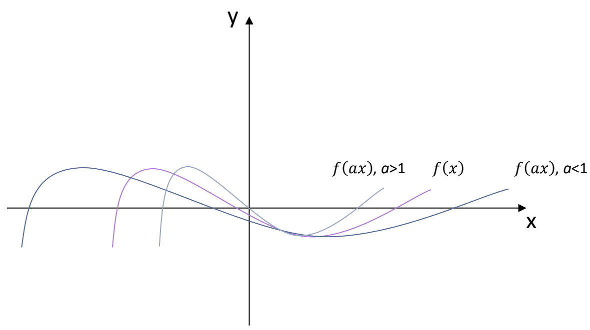




Alongamento

Se ocorrer a lei de formação: $f(ax)$, com a < 1, o gráfico da função $f(x)$ sofre um alongamento na direção horizontal.

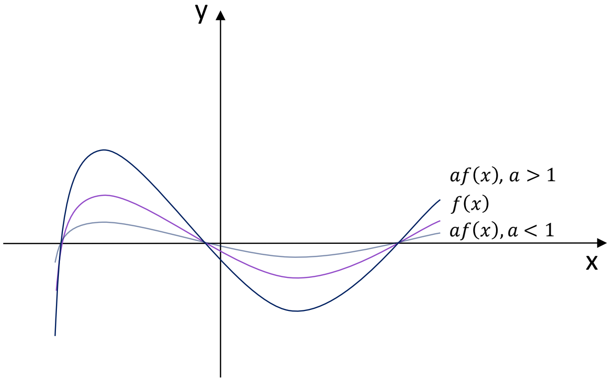
Se ocorrer a lei de formação: $f(ax)$, com a > 1, o gráfico da função $f(x)$ sofre um encolhimento na direção horizontal.



Amplitude

Se ocorrer a lei de formação: $af(x)$, com a < 1, o gráfico da função $f(x)$ sofre um encolhimento na direção vertical.

Se ocorrer a lei de formação: $af(x)$, com a > 1, o gráfico da função $f(x)$ sofre um alongamento na direção vertical.

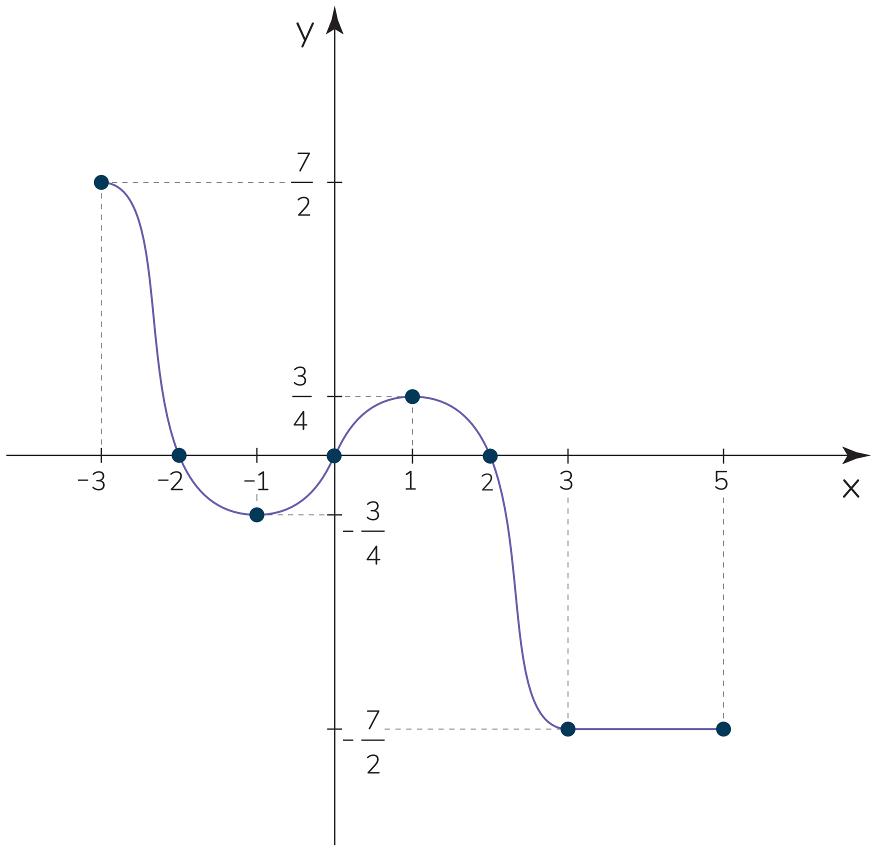


Observação:

- Os casos acima podem aparecer juntos na mesma lei de formação.

VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

Temos uma noção intuitiva sobre o significado de crescimento e decrescimento. Agora vamos nos apoiar nessas noções para estudarmos quando uma função é crescente ou decrescente em certo subconjunto de seu domínio. Observe a função abaixo:



Note que o intervalo [-3,5] é o domínio da função. Analisando o gráfico, podemos dizer que a função é **decrescente** nos intervalos [-3,-1] e [1,3]; que a função é **crescente** no intervalo [-1,1] e que a função é **constante** no intervalo [3,5].

Sobre o intervalo de decrescimento da função temos: partindo do ponto $\left(-3,\frac{7}{2}\right)$, à medida que aumentamos os valores de x até chegar em $x=-1$, os valores das imagens vão caindo até chegar em $-\frac{3}{4}$. O mesmo processo ocorre no intervalo [1,3].

Dizemos que uma função f é **decrescente** em certo subconjunto B de seu **domínio** se, e somente se, para quaisquer valores $x_1, x_2 \in B$ tais que $x_2 > x_1$, tem-se que $f(x_2) < f(x_1)$.

Sobre o intervalo de crescimento da função temos: partindo do ponto $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, à medida que aumentamos os valores de x até chegar em $x=1$ os valores das imagens vão aumentando até chegar em $\frac{3}{4}$.

Dizemos que uma função f é **crescente** em certo subconjunto B de seu **domínio** se, e somente se, para quaisquer valores $x_1, x_2 \in B$ tais que $x_2 > x_1$, tem-se que $f(x_2) > f(x_1)$.

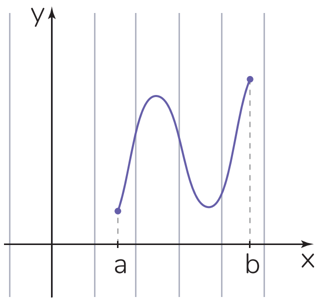
Por fim, sobre o intervalo em que a função se apresenta constante temos: partindo do ponto $\left(3,-\frac{7}{2}\right)$, à medida que aumentamos os valores de x até chegar em $x=5$ os valores da imagem valem sempre $-\frac{7}{2}$.

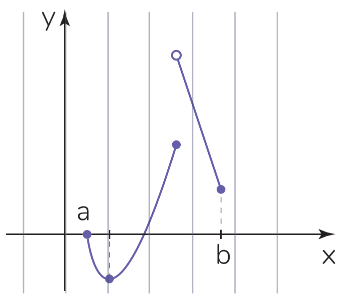
Dizemos que uma função f é **constante** em certo subconjunto B de seu **domínio** se, e somente se, para qualquer valor $x \in B$, tem-se que $f(x) = c$ com c sendo uma constante real.

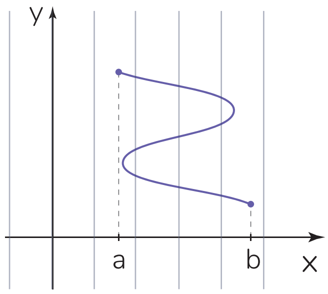
RECONHECIMENTO DE UMA FUNÇÃO PELO GRÁFICO

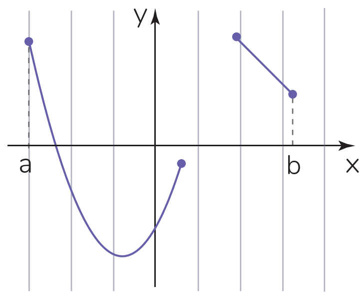
Aprendemos a esboçar o gráfico de uma função a partir de sua lei de formação, agora precisamos pensar no caminho contrário. Vamos entender como, a partir de um gráfico, identificamos se temos uma função representada ou não.

Nas imagens abaixo, vamos analisar se os gráficos dados representam ou não funções no intervalo $[a,b]$.

a.


c.


b.


d.


Percebeu que existem umas linhas verticais traçadas no gráfico? É com o auxílio delas que nos baseamos para descobrir se o gráfico representa uma função ou não no intervalo dado qualquer.

> Para um gráfico representar uma função no intervalo $[a, b]$ qualquer, cada linha vertical só pode tocar o gráfico uma única vez e não pode existir linha vertical sem tocar o gráfico.

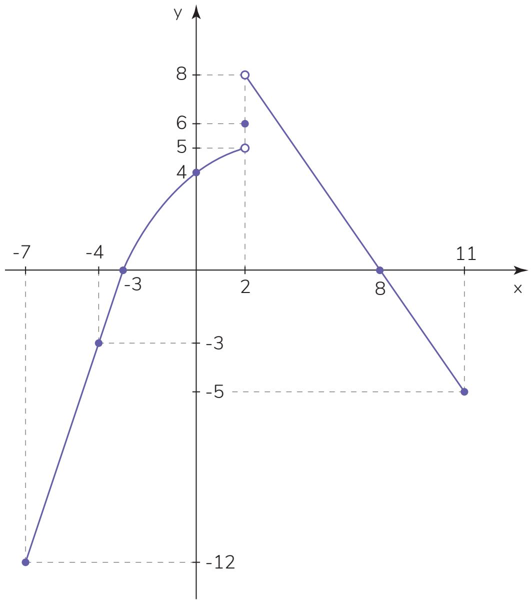
Observação:

- Se no intervalo **[a, b]** possui um valor **c**, em que uma linha vertical que passa pela abscissa de valor **c** não toca o gráfico, esse gráfico não representará uma função. Entretanto, se considerarmos o intervalo **[a, b]-{c}**, então o gráfico representará uma função, pois **c** não pertence ao domínio. Isso explicará o porquê de algumas funções como tangente e cossecante serem funções.

Nas letras **a** e **c** temos funções porque essas duas condições são satisfeitas, na letra **b** não temos uma função porque existem linhas verticais que tocam o gráfico mais de uma vez e na letra **d** não temos uma função porque existem linhas verticais que não tocam o gráfico.

DOMÍNIO E IMAGEM ATRAVÉS DO GRÁFICO

Chegou a hora de reconhecermos o domínio e imagem de uma função pelo gráfico. Considere a função ao lado:



Cada ponto do gráfico é um par ordenado (x,y), em que y é a imagem de x pela função f.

O ponto P(-7,-12) pertence ao gráfico, portanto, $f(-7) = -12$ e, assim $-7 \epsilon Dm(f)$ e $-12 \in Im(f)$. Também, Q(8,0) pertence ao gráfico, portanto, $f(8) = 0$ e, assim, $8 \in Dm(f)$ e $0 \in Im(f)$. Estendemos esse processo para todos os pontos do gráfico, com isso temos:

O domínio da função será o conjunto dos valores de x tais que existe um elemento y relacionado a ele.

Na função acima, $Dm(f) = \{x \in \mathbb{R} / -7 \leq x \leq 11\}$.

Já, a imagem da função será o conjunto dos valores de y que se relacionam com os valores de x do domínio.

Na função acima, $Im(f) = [-12{,}8)$.

Observação:

- Note que no ponto x = 2, temos $f(2) = 6$, por isso 6 pertence à imagem da função.

ANOTAÇÕES