25/01/2004

Matemática

vestibular estadual 2004

UERJ | UENF | APM D. João VI

PADRÃO DE RESPOSTAS

(valor de cada questão = 2,0 pontos)

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Resposta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>A) número de questões corretas = a
número de questões erradas ou não-respondidas = e
pontuação nula $\rightarrow$ $e = 4a$
$4a + a = 100$
$5a = 100$
$a = 20$ $\rightarrow$ pontuação nula
número mínimo de questões corretas para obter pontuação maior que zero = 21</td></tr>
<tr><td>B) $\begin{cases} a + e = 100 \\ a - \dfrac{e}{4} = 60 \end{cases}$
$\begin{cases} a + e = 100 \\ 4a - e = 240 \end{cases}$
$5a = 340$
número mínimo de questões corretas para ser aprovado: 68</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>A) $\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 101)\right] = -1$
$\dfrac{2\pi}{365}(t - 101) = -\dfrac{\pi}{2}$
$t = \dfrac{39}{4}$ $\therefore$ $t \cong 9{,}75$ dias
dia no qual a temperatura será a menor possível: 10 de janeiro</td></tr>
<tr><td>B) $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$ $\therefore$ $0^{o}C = 32\ F$
$50\,\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 7 < 32$
$\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 101)\right] < \dfrac{1}{2}$</td></tr>
</table>

2		As soluções são da forma: $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$ em que $\alpha = \left[\frac{2\pi}{365}(t-101)\right]$ e $k \in Z$ Escolhendo, sem perda de generalidade, k = 0, temos: $\frac{5\pi}{6} < \frac{2\pi}{365}(t-101) < \frac{13\pi}{6} \therefore 253{,}1 < t < 496{,}4 \therefore 254 \le t \le 496$ número total de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0ºC: 496 – 254 + 1 = **243**
3	A)	A equação de uma reta paralela a $y = 3x + 2$ é $y = 3x + c$, em que *c* é uma constante real. $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3x + c \end{cases} \rightarrow \quad 2x^2 - 3x - c = 0$ Para que as curvas só tenham um ponto de interseção $\rightarrow \Delta = 0 \;\therefore c = -\frac{9}{8}$ equação da reta (t): $\mathbf{y = 3x - \frac{9}{8}}$ ou $\mathbf{24x - 8y - 9 = 0}$ Como $\Delta = 0$, temos $x = -\frac{(-3)}{2\times 2} = \frac{3}{4}$ Substituindo na equação da reta (t), temos $y = \frac{9}{8}$ coordenadas do ponto P = $\left(\mathbf{\frac{3}{4};\frac{9}{8}}\right)$
	B)	Interseção da parábola com a reta (r): $\begin{cases} y = 3x \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \;\therefore\; x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$ pontos A $(0\,;0)$ e B $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ Interseção da parábola com a reta (s): $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \; x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 2$ pontos C $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ e D $(2;8)$

<table>
<tr><td>3</td><td>
bases do trapézio: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

altura do trapézio = distância entre (r) e (s) $\Rightarrow \dfrac{3\times 0 - 0 + 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$$\text{área do trapézio} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2} + \frac{5\sqrt{10}}{2}\right)}{2} \times \frac{2}{\sqrt{10}} = \mathbf{4}$$
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>
A) Dimensões da caixa:

base = (30 – 2x) cm
largura = (16 – 2x) cm
área lateral = $2x\,(30-2x) + 2x\,(16-2x) = 92x - 8x^2$

$92x - 8x^2 = 204 \therefore 2x^2 - 23x + 51 = 0 \therefore x = 3$ ou $x = 8{,}5$

menor das dimensões = (16 – 2x) cm $\therefore 0 < x < 8$. Logo, x = 3
lado do maior quadrado a ser cortado = **3 cm**
</td></tr>
<tr><td>
B) Volume = $x\,(30 - 2x)\,(16 - 2x) = 4x^3 - 92x^2 + 480x$

$4x^3 - 92x^2 + 480x = 600 \therefore x^3 - 23x^2 + 120x - 150 = 0$

Menor das dimensões = (16 – 2x) cm $\therefore 0 < x < 8$

As raízes positivas menores que 8 estão entre os divisores positivos de 150 menores que 8, que são 1; 2; 3; 5; 6.

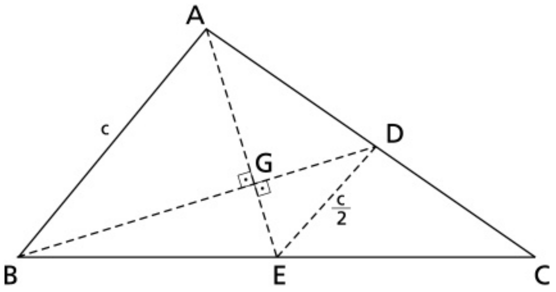
Por Briot Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -23 & 120 & -150 \\ \hline & 1 & -18 & 30 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 23x^2 + 120x - 150 = (x - 5)\,(x^2 - 18x + 30) = (x-5)(x-x_1)(x-x_2)$, com $x_1 = 9 + \sqrt{51}$ e $x_2 = 9 - \sqrt{51}$

$x_1 > 8$ e $x_2 < 2 \Rightarrow x_1$ está fora do domínio e x_2 é menor do que 5.
Lado do maior quadrado a ser cortado = **5 cm**
</td></tr>
</table>

5	A) número de sanduíches diferentes: 3 tipos de pão, 2 tamanhos, de 1 até 5 recheios $3 \times 2 \times (2^5 - 1) =$ $6 \times 31 = \mathbf{186}$
	B) número de sanduíches: 2 tipos de pão, 1 tamanho, 2 dentre 5 recheios $2 \times 1 \times C_5^2 =$ $2 \times \frac{5!}{2!3!} = 5 \times 4 = \mathbf{20}$
6	A) $R_{\theta_1} \times R_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \,\text{sen}\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 - \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \\ \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \,\text{sen}\theta_2 & -\text{sen}\theta_1 \,\text{sen}\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{bmatrix} =$ $R_{\theta_1 + \theta_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$ Utilizando as fórmulas de adição, temos: $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \,\text{sen}\theta_2 & -\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \end{bmatrix} = R_{\theta_1} \times R_{\theta_2}$
	B) A matriz $-I$ representa a transformação do vetor v em $-v$. Portanto, trata-se de uma rotação de 180 graus. Para obtermos este resultado devemos executar 3 rotações sucessivas de 60 graus. $\theta = \mathbf{60^o}$ ou $\frac{\pi}{\mathbf{3}}$ rad
7	A) Substituindo os dados: $T_0 = 20ºC$, $T(0) = 100ºC$ e $T\left(\frac{1}{3}\right) = 40ºC$ na relação $T = T_0 + ke^{-ct}$, encontraremos: $e^{-\frac{c}{3}} = \frac{1}{4}$ Como queremos $T\left(\frac{5}{6}\right)$, basta observarmos que $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}$. $T\left(\frac{5}{6}\right) = 20 + 80\left(e^{-\frac{c}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = 20 + 80\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = 20 + 80 \times \frac{1}{32} = \mathbf{22{,}5ºC}$
	B) Pela lei do resfriamento, teremos: $50 = 20 + 80e^{-ct}$ ou seja $e^{-ct} = \frac{3}{8}$. Como $e^{-c} = \frac{1}{64}$, teremos $\left(\frac{1}{64}\right)^t = \frac{3}{8}$

7	Usando logaritmos: $t = \frac{3\ell n\ 2 - \ell n\ 3}{6\ell n\ 2} = \frac{1}{2} - \frac{1{,}1}{4{,}2} = \frac{1}{2} - \frac{11}{42} = \frac{21-11}{42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}h = \frac{5}{21} \times 60\,\text{min} \cong 15\,\text{min}$
8	A)  x = medida de AE y = medida de BD Temos: $AG = \frac{2x}{3}$ e $GE = \frac{x}{3}$ $BG = \frac{2y}{3}$ e $GD = \frac{y}{3}$ Pitágoras: $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$; $c^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y}{3}\right)^2$ $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y}{3}\right)^2$; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2$ Logo $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $\frac{5c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$ $\mathbf{c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}}$
	B) ΔADG e ΔBEG são retângulos. $S_{ADG} = \frac{\frac{2x}{3} \bullet \frac{y}{3}}{2} = \frac{xy}{9}$ $S_{BEG} = \frac{\frac{2y}{3} \bullet \frac{x}{3}}{2} = \frac{xy}{9}$ $S_{ADG} = S_{BEG}$ $\frac{S_{ADG}}{S_{BEG}} = \mathbf{1}$

9	A) Volume da embalagem menor = $\pi \times 4^2 \times 5 = 80\ \pi\, cm^3$ Volume da embalagem maior = $\pi \times 5^2 \times 8 = 200\ \pi\, cm^3$ Se embalagem menor = 200 g de manteiga, densidade = $\dfrac{200\ g}{80\pi cm^3} = \dfrac{5}{2\pi}\ g/cm^3$. Logo, embalagem maior = $200\pi \times \dfrac{5}{2\pi} = \mathbf{500\,g\ de\ manteiga}$.
	B) Embalagem maior $= \dfrac{4{,}00}{500} = \dfrac{1}{125}$ Logo 200 g $\rightarrow$ R\$ 1,60 na embalagem maior. Se 200 g de manteiga $=$ R\$1,75 na embalagem menor, então a embalagem maior apresenta o menor preço por unidade de medida.
10	A) Divisão do quadrilátero em 2 triângulos e cálculo das áreas desses triângulos: $A_1 = \dfrac{1}{2}\left\lVert \begin{matrix} -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & 1 \\ 5 & \frac{7}{2} & 1 \end{matrix} \right\rVert = 7{,}75$ $A_2 = \dfrac{1}{2}\left\lVert \begin{matrix} -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 5 & \frac{7}{2} & 1 \end{matrix} \right\rVert = 4{,}5$ área total no mapa = 12,25 cm^2 escala: 1 cm = 100 km 12,25 cm^2 = $12{,}25 \times 10.000\ km^2$ = **122.500 km^2**
	B) Sejam A, B, C e P dados, respectivamente, por $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$, $\left(\dfrac{3}{2},4\right)$, $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ e (x,y). Resolvendo PA = PB = PC, chegaremos ao sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 7x + y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ -28x - 4y = -8 \end{cases}$ $-25x = 0\ \therefore\ x = 0\ \text{ e }\ y = 2$ **P = (0;2)**