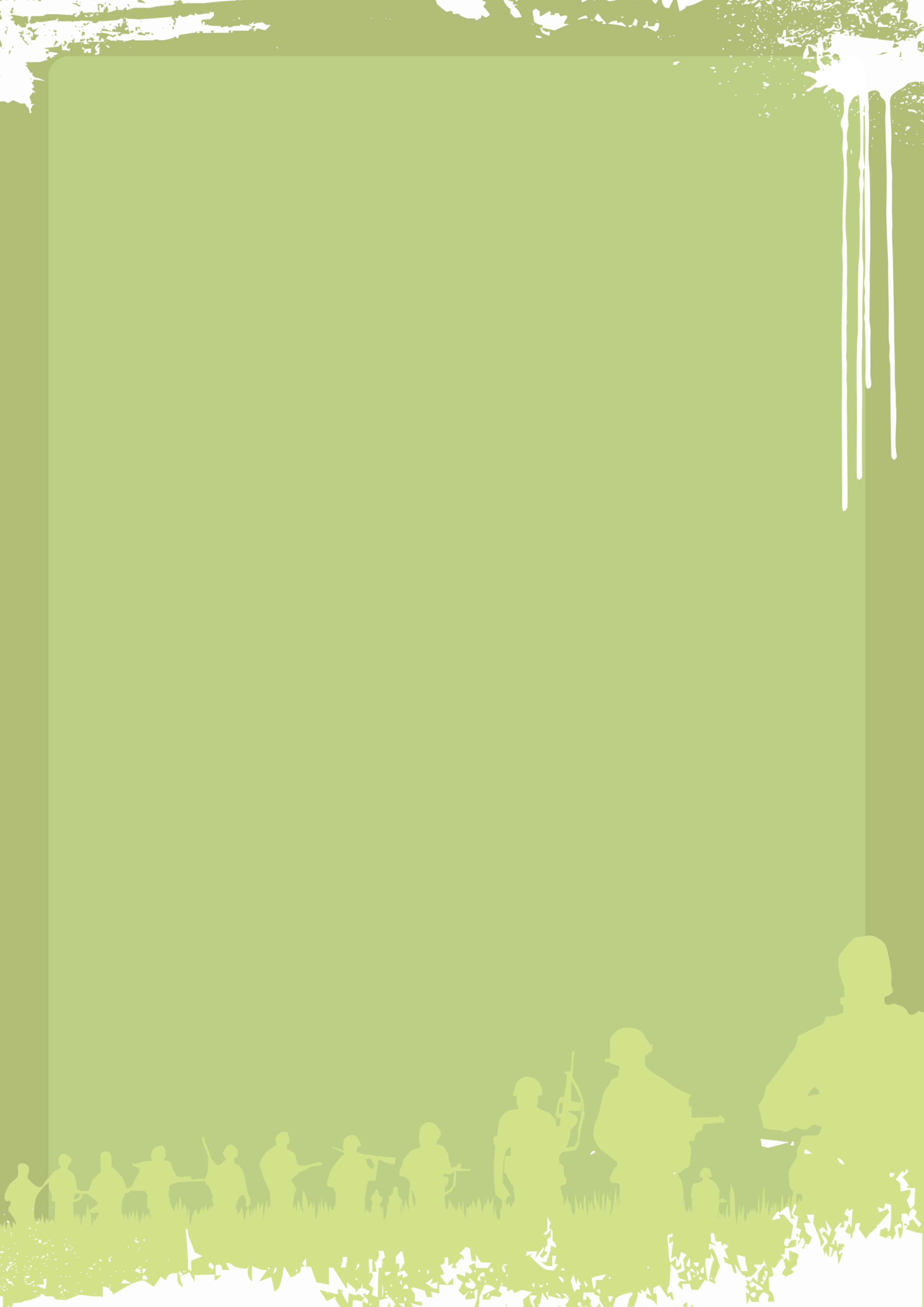


SUMÁRIO

HIPÉRBOLE

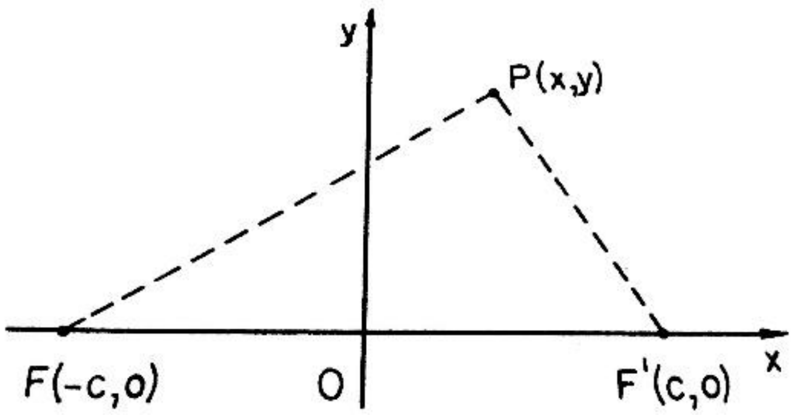
1. DEFINIÇÃO

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos do mesmo plano é constante.

Podemos definir da seguinte maneira: sejam 2 pontos fixos F_1 e F_2 de um plano, com $F_2F_1 = 2c \neq 0$, *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos deste plano, cujo módulo da diferença de suas distâncias aos dois pontos F_2 e F_1 é constante igual a 2a, com 2c > 2a.

2. EQUAÇÃO

Sejam F e F' os dois pontos fixos, denominados focos. $\left|\overline{FF'}\right| = 2c$ é a distância focal.



Tomemos para eixo x a reta que passa por F e F' e para eixo y a mediatriz de FF' do que resulta: F(- c, a) e F'(c, a).

Chamando P(x, y) o ponto genérico da hipérbole, temos, pela definição:

$$\left|\overline{FP}\right| - \left|\overline{F'P}\right| = 2a \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$\left|\overline{FP}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

e

$$\left|\overline{F'P}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Substituindo na igualdade (1) vem:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Transpondo o segundo radical para o segundo membro, elevando quadrado e simplificando, obtém-se:

$$a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado e reduzindo os termos semelhante vem:

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

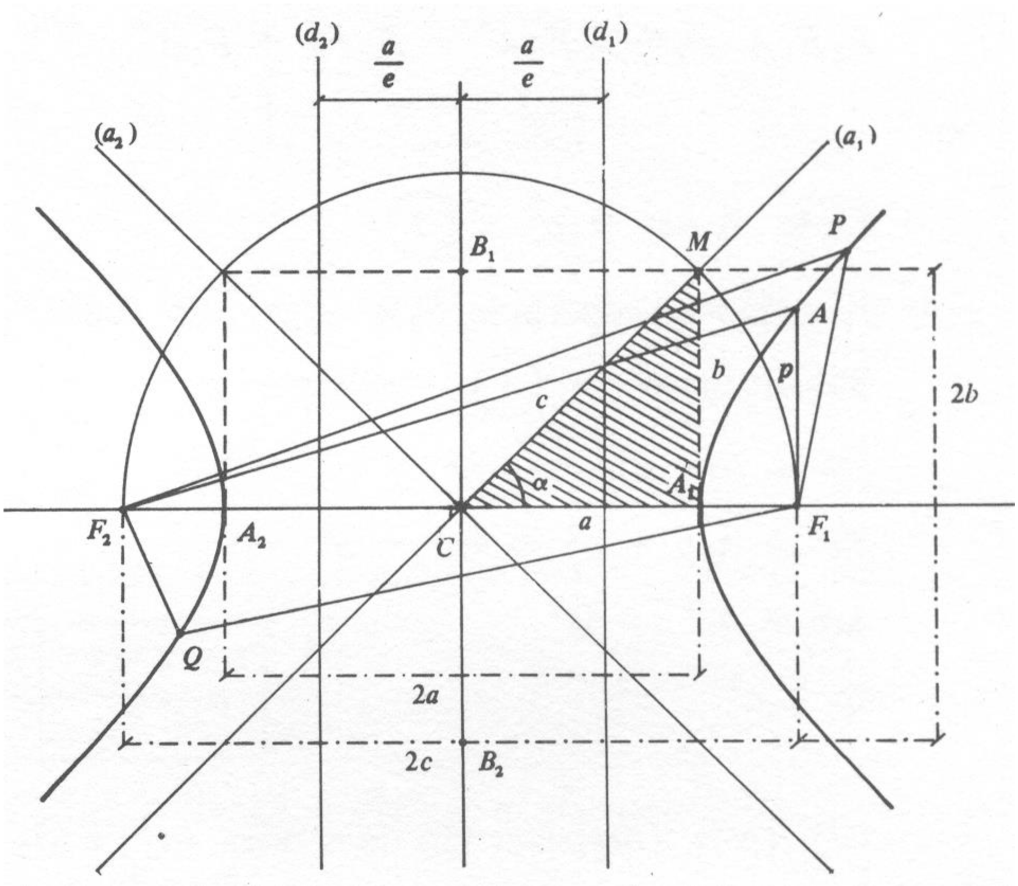
Como $c > a$, $c^2 - a^2$ é um número positivo.
Fazendo $c^2 - a^2 = b^2$ na equação anterior, tem-se finalmente:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

3. ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



A_1 e A_2 - vértices

F_2 e F_1 - focos

C - centro

Eixo real: $A_2A_1 = 2a$

Eixo imaginário: $B_2B_1 = 2b$

Distância focal: $F_2F_1 = 2c$

Raios vetores: $\overrightarrow{F_2P}$, $\overrightarrow{F_1P}$

Relações:

$e = \frac{c}{a} > 1$ Excentricidade

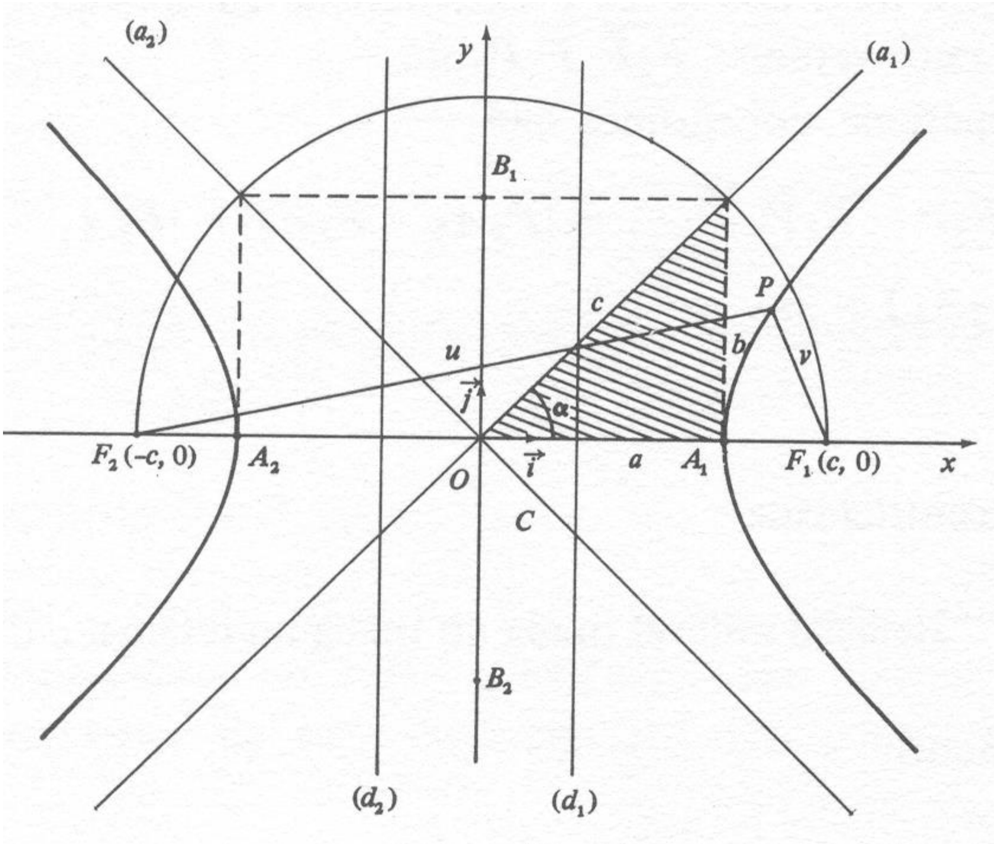
$c^2 = a^2 + b^2$ Relação notável

Reta: Diretrizes são duas retas, (d_1) e (d_2), perpendiculares ao suporte do eixo real, distando $\frac{a}{e}$ do centro da hipérbole.

Assíntotas são duas retas, (a_1) e (a_2), que passam pelo centro da hipérbole e posições limites das tangentes a ela, quando os pontos de contato se afastam indefinidamente.

4. EQUAÇÕES REDUZIDAS

Seja a hipérbole de eixos real A_2A_1 e imaginário B_2B_1 com centro na origem. Considere P(x, y) um ponto genérico da curva.



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Para y = 0, temos: x = $\pm$a, abscissas dos vértices A_1 e A_2.
Para x = 0, temos: y = $\pm$bi, o que significa que a curva não é interceptada pelo eixo dos y.

As equações das diretrizes (d_1) e (d_2) são $\boxed{x=\pm\frac{a}{e}}$.

As equações das assíntotas, $y=\text{tg}\ \alpha\ .\ x\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y=\pm\frac{b}{a}x}$$

A equação da hipérbole de centro na origem, focos no eixo OY e semieixos real e imaginário iguais a a e b é dada por:

$$\boxed{\frac{x^2}{-b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

As diretrizes são, agora, paralelas ao eixo Ox e suas equações são:

$$\boxed{y=\pm\frac{a}{e}}$$

e as assíntotas $y=\pm\frac{a}{b}x$.

Para y = 0 $\Rightarrow$ $x=\pm bi$

a curva não intercepta o eixo dos x e para x = 0$\Rightarrow$ $y=\pm a$, ordenadas dos vértices A_1 e A_2.

Hipérbole com centro no ponto C (m, n) e A_2A_1 //Ox

Sua equação é:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

As equações das diretrizes são

$$\boxed{x=m\pm\frac{a}{e}}$$

e das *assíntotas*

$$\boxed{y=m\pm\frac{b}{a}x}$$

Quando $A_2 A_1$ // Oy$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{-b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1}$$

As equações das diretrizes assumem a forma $\boxed{y = n \pm \frac{a}{e}}$ e as das assíntotas $\boxed{y = n \pm \frac{a}{b}x}$

Equação geral: A equação geral é obtida pelo desenvolvimento das formas reduzidas.

5. HIPÉRBOLE EQUILÁTERA

Uma hipérbole cujos semieixos são iguais (a=b) é chamada de *hipérbole equilátera.*
As suas equações se simplificam com a substituição de b por a.

6. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E HIPÉRBOLE

Uma hipérbole H e um ponto **P**, coplanares, têm três posições relativas possíveis, onde 2ª é a medida do eixo real da hipérbole, e F_1 e F_2 são os focos da hipérbole.

1º caso: **P** é um ponto da hipérbole.

$$\boxed{P \in H \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a}$$

2º caso: **P** é ponto interior à hipérbole.

P é interior à H $\Leftrightarrow \boxed{|PF_1 - PF_2| > 2a}$

3º caso: **P** é ponto exterior à hipérbole

P é exterior à hipérbole H $\Leftrightarrow \boxed{|PF_1 - PF_2| < 2a}$

7. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E HIPÉRBOLE

Processo prático:
Seja **S** o sistema formado pelas equações de **r** e H. Se, ao substituirmos uma das variáveis da equação de **r** na equação de H, obtivermos:

I - Uma equação do 2º grau com $\Delta > 0$. **r** e H são secantes;
II - Uma equação do 2º grau com $\Delta < 0$. **r** e H são exteriores;
III - Uma equação do 2º grau com $\Delta = 0$. **r** e H são tangentes;

8. PROBIZU

RECONHECIMENTO DE UMA CÔNICA	
Dada uma equação do 2º grau redutível à forma $\frac{(x-x_0)^2}{k_1}+\frac{(y-y_0)^2}{k_2}=1$	
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1>k_2$	elipse de eixo maior horizontal
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1<k_2$	elipse de eixo maior vertical
$k_1>0$ e $k_2<0$	hipérbole de eixo real horizontal
$k_1<0$ e $k_2>0$	hipérbole de eixo real vertical’

1. Determine as coordenadas do centro e dos vértices da hipérbole $x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$, verificando a direção do eixo real e determinando as equações das diretrizes e assíntotas.

2. Os focos de uma hipérbole são $F_2(6, 2)$ e $F_1(6, 12)$ e o comprimento de seu eixo imaginário é 6. Determine a equação reduzida da hipérbole.
Solução:

3. (AFA 99) O valor da excentricidade da cônica $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ é

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\sqrt{3}$

4. Determine as coordenadas do centro e dos focos da cônica $2x^2-7y^2-4x+14y-19=0$.

5. Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pelo ponto $P_0(13, 12)$ e que tem por eixos de simetria os eixos coordenados, as coordenadas dos focos e dos vértices.

6. A equação reduzida da hipérbole, cujos focos são os extremos do eixo menor da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 625$, e cujas excentricidade é igual ao inverso da excentricidade da elipse, é:
a) $16y^2 - 9x^2 = 144$
b) $9y^2 - 16x^2 = 144$
c) $9x^2 - 16y^2 = 144$
d) $16x^2 - 9y^2 = 144$

7. Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 - 9y^2 = 36$.

8. Quais são os focos da cônica cuja equação é $x^2 - y^2 = 1$?

9. Qual é a cônica representada pela equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$?

10. (IME2010)Considere as hipérboles que passam pelos pontos $(-4,2)$ e $(-1,-1)$ e apresentam diretriz na reta $y = -4$. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

11. (ITA 2003) Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangente ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:
a) de uma elipse.
b) de uma parábola.
c) de uma hipérbole.
d) de duas retas concorrentes.
e) da reta $y = -x$.

12. Determine a equação da reta tangente à hipérbole $x^2 - 3y^2 - 2x + 36y - 116 = 0$ no seu ponto T(7, 9).

13. Os eixos, real e imaginário, de uma hipérbole de eixo real horizontal têm, respectivamente, os comprimentos 8 e 6. Determine a equação desta hipérbole e da sua conjugada, sendo seu centro o ponto C(1, -3).

14. Um ponto P(x, y) se move de tal modo que sua distância ao ponto $P_0(3, 2)$ mantém-se sempre igual ao triplo de sua distância à reta (r) $y = -1$. Determine a equação do lugar geométrico gerado por P e o caracterize.

15. Determine a equação da hipérbole, nos seguintes casos:
a) de focos F(0, ± 5) e vértices A(0, ± 3);
b) que passa pelo ponto (-5, 3), é equilátera e de eixo real horizontal;
c) que tem como diretrizes as retas $5x \pm 32=0$, como assíntotas as retas $3x \pm 4y = 0$ e eixo real horizontal;
d) que tem eixo real vertical de comprimento 8 e passa pelo ponto (6, 5).

1.

RESPOSTA:

$x^2 + 6x + 9 - 4y^2 + 8y - 4 + 4 + 21 = 0$

$(x_2 + 6x + 9) - (4y^2 - 8y + 4) = -16$

$(x + 3)^2 - (2y - 2)^2 = -16$

$$\frac{(x+3)^2}{-16} - \frac{[2(y-1)]^2}{-16} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{-16} + \frac{4(y-1)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{-16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow b^2 = 16 \text{ e } a^2 = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ b = 4 e a = 2

C (-3, 1); A_1 (-3, 3) e A_2 (-3, -1)

O *eixo real* é *vertical*.

As *diretrizes* (d) $y = n \pm \frac{a}{e}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

logo,

$$\boxed{y = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

As *assíntotas* (a) $y = n \pm \frac{a}{b}x$

$$y = 1 \pm \frac{2}{4}x \Rightarrow \boxed{y = 1 \pm \frac{x}{2}}$$

2.

RESPOSTA:

O centro da hipérbole é $C\left(\frac{6+6}{2}, \frac{2+12}{2}\right)$ ou C(6, 7) e como o eixo real é vertical sua equação reduzida é do tipo $-\frac{(x-6)^2}{b^2}+\frac{(y-7)^2}{a^2}=1$

Determinemos b e a:

$2b = 6 \Rightarrow b = 3$

e, dos focos, tiramos $2c = 10 \Rightarrow c = 5$

Aplicando a relação notável $c^2 = a^2 + b^2$, resulta

$a=\sqrt{25-9}=4$

A equação reduzida é $-\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y-7)^2}{16}=1$

3.

RESPOSTA: B

4.

RESPOSTA:

$2x^2-7y^2-4x+14y=19$

$2x^2-4x+2+7y^2+14y+7=28$

$2x^2-7y^2-4x+14y=19 \Leftrightarrow$

$2x^2-4x+2-7y^2+14y-7=14$

$\frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-1)^2}{2}=1$

$a=\sqrt{7}$ e $b=\sqrt{2}$ $c=3$.

logo $C=(1,1)$ e $F_1=(-2,1)$ e F_2

$C(1, 1)$, $F_1(4, 1)$ e $F_2(-2, 1)$.

5.

RESPOSTA:

A equação da hipérbole equilátera é $x^2 - y^2 = a^2$ (única solução)

Se $P_0 \in$ à hipérbole, resulta $169 - 144 = a^2 \Rightarrow a^2 = 25 \therefore$

a equação é $\boxed{x^2-y^2=25}$

Se $a^2 = b^2 = 25 \Rightarrow c=\sqrt{25+25}=\pm 5\sqrt{2} \Rightarrow F(\pm 5\sqrt{2},0)$

Se $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \boxed{A(\pm 5, 0)}$

6.

RESPOSTA:

$16x^2 + 25y^2 = 625 \Rightarrow 4^2x^2 + 5^2y^2 = 5^4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(25/4)^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow a = 25/4 \text{ e } b = 5$

Na elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (25/4)^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c = 15/4$

Excentricidade da elipse: e = c/a = 3/5

Excentricidade da hipérbole: e' = 1/e = 5/3

Como os focos da hipérbole são os extremos do eixo menor da elipse: 2c' = 2b ⇒ c' = 5

$c' = c'/a' \Rightarrow 5/3 = 5/a' \Rightarrow a' = 3$

$c'^2 = a'^2 + b'^2 \Rightarrow 25 = 9 + b'^2 \Rightarrow b'^2 = 16$

Hipérbole: $-\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{a'^2} = 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow -9x^2 + 16y^2 = 144$

7.

RESPOSTA:

$4x^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Portando a cônica é uma hipérbole com centro (0, 0), eixo real horizontal, pois a diferença é feita de x^2 para y^2 e $\left.\begin{matrix} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{matrix}\right\} c = \sqrt{13}$

8.

RESPOSTA:

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$

A cônica é uma hipérbole com centro (0, 0) e eixo real horizontal tal que:

$\left.\begin{matrix} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

Portanto os focos são $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(\sqrt{2}, 0)$.

9.

RESPOSTA:

Tendo os termos x^2 e y^2, é evidente que a equação só pode representar elipse ou hipérbole.

Se identificarmos a equação dada com a teórica

$$\frac{(x-x_0)^2}{k_1}+\frac{(x-y_0)^2}{k_2}=1$$

Obteremos:

$k_1=-1, k_2=4, x_0=4, y_0=4$

Como $k_1<0$ e $k_2>0$, a equação representa uma hipérbole com eixo real vertical, centro (4, 4), sendo $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$.

10.

RESPOSTA:

Sendo $F=(x,y)$ o foco pedido, $A=(-4,2)$ e $B=(-1,-1)$, devemos ter, pela definição de hipérbole, $\frac{FA}{d_A}=\frac{FB}{d_B}>1$, onde d_A e d_B são as distâncias de A e B, respectivamente, à diretriz.

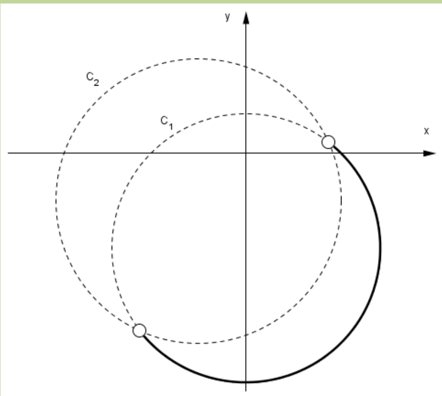
Esta condição equivale a $\frac{FA}{d_A}=\frac{FB}{d_B}$ e $\frac{FB}{d_B}>1$.

1ª Restrição: $\frac{FA}{d_A}=\frac{FB}{d_B}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}}{|2-(-4)|}=\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{|-1-(-4)|}\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=8$

Logo F pertence à circunferência C_1 de centro $(0,-2)$ e raio $2\sqrt{2}$.

2ª Restrição: $\frac{FB}{d_B}>1\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}>3\Leftrightarrow$ F pertence ao exterior da circunferência C_2 de centro $B=(-1,-1)$ e raio 3.

Assim, o lugar geométrico procurado é o conjunto dos pontos da circunferência C_1 que são exteriores à circunferência C_2.



11.

RESPOSTA: C

12.

RESPOSTA:

Determinemos a equação do feixe de retas de centro T(7, 9):

$y - 9 = a(x - 7)$.

A declividade do *a* (declividade da tangente) pode ser feita pela equação tangencial, pela eliminação de uma das incógnitas no sistema formado pelas equações da reta e da curva ou pela derivada da função curva no ponto T.

Derivemos a função $x^2 - 3y^2 - 2x + 36y - 116 = 0$

$2x - 6y \,.\, y' - 2 + 36y' = 0$

como $x = 7$, $y = 9$ e $y_T' = a$, vem:

$14 - 54a - 2 + 36a = 0$

$18a = 12$

$$a = \frac{2}{3}$$

A equação procurada é

$$y - 9 = \frac{2}{3}(x - 7) \qquad \boxed{2x - 3y + 13 = 0}$$

13.

RESPOSTA:

A hipérbole de eixos $2a = 8$, $2b = 6$ e eixo real horizontal, tem por equação

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

e sua conjugada $-\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$

14.

RESPOSTA:

A equação espontânea do lugar é

$d_{P,P_0} = 3d_{P,(r)}$ Então: $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\left|\dfrac{y+1}{1}\right|$

ou $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9(y^2 + 2y + 1)$

$\boxed{x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0}$ Equação do lugar

Caracterizemo-lo:

$$(x^2 - 6x) - 8\left(y^2 + \frac{11}{4}y\right) + 4 = 0$$

$$(x^2-6x+9)-8\left(y^2+\frac{11}{4}y+\frac{121}{64}-\frac{121}{64}\right)+4=0$$

$$(x-3)^2-9-8\left(y+\frac{11}{8}\right)^2+\frac{121}{8}+4=0$$

$$(x-3)^2-8\left(y+\frac{11}{8}\right)^2=-\frac{81}{8}$$

$$-\frac{(x-3)^2}{\frac{81}{8}}+\frac{\left(y+\frac{11}{8}\right)^2}{\frac{81}{64}}=1$$

É uma hipérbole de eixo real vertical, de centro

$C\left(3,-\frac{11}{8}\right)$, $b^2=\frac{81}{8}$ ou $b=\frac{9}{2\sqrt{2}}$ e $a^2=\frac{81}{64}$ ou $a=\frac{9}{8}$

15.

RESPOSTA:

a) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$

b) $x^2-y^2=16;$

c) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1;$

d) $-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1.$