

# Introdução à Eletrostática

*Lei de Coulomb*

Prof. Toni Burgatto

*Aula 05*

## SUMÁRIO

Introdução .....	4
1. Eletrização.....	5
1.1. Corpo eletrizado .....	5
1.2. Princípio da quantização da carga elétrica.....	6
1.3. Princípios da eletrostática .....	7
1.4. Isolantes e condutores .....	8
1.5. Métodos de eletrização .....	9
1.6. Indução parcial X Indução total .....	15
1.7. Eletroscópios .....	16
2. Lei de Coulomb.....	21
2.1. Princípio da superposição .....	22
2.2. Análise gráfica da lei de Coulomb .....	22
2.3. Relações de proporção na lei de Coulomb .....	23
2.3. Lei de Coulomb para distribuições tridimensionais de cargas .....	27
3. Um breve resumo de temas da Dinâmica .....	30
3.1. Revisão de estática do ponto material.....	30
3.2. revisão de estática do corpo extenso .....	30
3.3. Teorema do empuxo .....	32
3.4. Movimentos periódicos .....	33
3.5. Movimento harmônico simples (MHS).....	34
4. Noções bem elementares de Cálculo .....	37
4.1. Limite .....	37
4.2. Derivadas.....	39
4.3. Noções de Cálculo Integral.....	43
5. Lista de noções de Cálculo .....	47
6. Gabarito sem comentários .....	49
7. Lista noções de Cálculo comentada .....	50
8. Distribuições de cargas.....	58
8.1. Distribuições lineares – densidade linear de cargas .....	58
8.2. Distribuição superficial – densidade superficial de carga .....	58
8.3. Distribuição Volumétrica – densidade volumétrica de carga .....	59



9. Lei de Coulomb aplicada a distribuições contínuas de cargas.....	61
10. Lista de questões.....	66
Aquecimento .....	66
Treinamento IME.....	73
11. Gabarito sem comentários .....	86
12. Lista de questões comentadas.....	87
Aquecimento .....	87
Treinamento IME.....	99
13. Considerações finais da aula .....	124
14. Referências bibliográficas.....	125
15. Versão de aula .....	126



# Introdução


Nesta aula iniciaremos o estudo da Eletricidade. Vamos estudar a natureza elétrica da matéria, conceito de corpo carregado, princípios de eletrização, princípios fundamentais da eletrostática, processos de eletrização e eletroscópios, a Lei de Coulomb para cargas puntiformes e distribuições de cargas.

É fundamental para o aluno entender todos os conceitos iniciais. Tais princípios são fundamentais para o entendimento de teorias futuras, de elevado grau de abstração, das quais o vestibular IME adora cobrar. No geral, o IME de questões mais quantitativas.

Neste início, não teremos muitas questões do IME. Por isso, vamos buscar questões de outras provas para fundamentar bem nossos conceitos de Eletricidade.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto

# 1. Eletrização

Na Eletrostática estudaremos os fenômenos associados as cargas elétricas em repouso em relação a um referencial inercial.

Inicialmente, precisamos relembrar alguns princípios fundamentais relacionados à carga elétrica. Na química, você estudará a história e como foi o processo para conhecer a natureza elétrica da matéria. Na Física partiremos de alguns dados já conhecidos.

Dizemos que carga elétrica é uma propriedade física fundamental que determina interações eletromagnéticas. Essa propriedade está associada a partículas elementares como: elétrons, prótons, mésons, antiprótons, pósitrons etc. Todas elas possuem a mesma carga  $e$ , por isso, chamamos esse valor de carga elétrica elementar  $e$ .

Em 1897, Joseph John Thomson foi capaz de determinar a relação entre a carga e a massa do elétron:

$$\frac{e}{m} = -1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Em que  $e$  é a carga elétrica elementar. No SI, a unidade de medida de cargas elétricas é o Coulomb, representada pela letra C, em homenagem ao físico francês Charles Augustin de Coulomb.

Em 1910, estudando o comportamento de gotas de óleo em um campo elétrico, Robert Andrews Millikan determinou a carga do elétron ( $-e$ ) e sua massa ( $m_e$ ):

$$-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \text{ e } m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

	Carga elétrica		Símbolo	Massas
Próton	$+1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$+e$	$p^+$	$m_p = 1,672 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Elétron	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$-e$	$e^-$	$m_e \approx \frac{m_p}{1836} = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Antipróton	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$-e$	$p^-$	$m_p$
Pósitron	$+1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$+e$	$e^+$	$m_e$
Nêutron	<b>0</b>			$m_n = 1,674 \times 10^{-27} \text{ kg}$

A massa do próton ( $m_p$ ) é cerca de 1836 vezes a massa do elétron ( $m_e$ ).

## 1.1. Corpo eletrizado

Podemos dizer que existem três formas de classificar um corpo eletrizado:

- **Corpo eletricamente neutro ( $Q = 0$ ):** é aquele que possui o mesmo número de prótons e de elétrons. Normalmente, um corpo qualquer (condutor ou isolante) apresenta número de elétrons igual ao número de prótons.

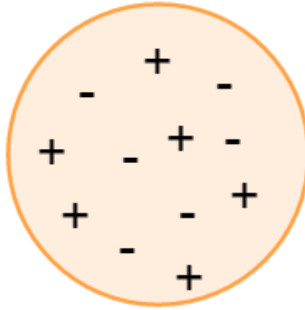


Figura 1: Corpo eletricamente neutro ( $n_p = n_e$ ).

- **Corpo positivamente carregado ( $Q > 0$ ):** é aquele que possui mais prótons do que elétrons. De outra forma, o corpo positivamente carregado apresenta falta de elétrons.

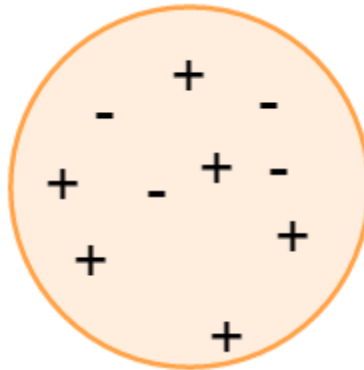


Figura 2: Corpo positivamente carregado ( $n_p > n_e$ ).

- **Corpo negativamente carregado ( $Q < 0$ ):** é aquele que possui mais elétrons do que prótons. De outra forma, o corpo negativamente carregado apresenta excesso de elétrons.

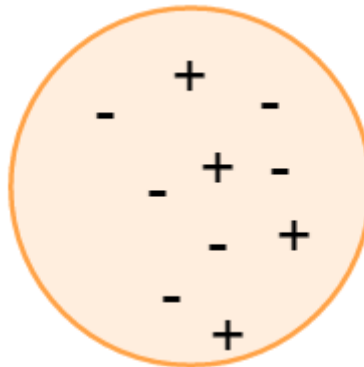


Figura 3: Corpo negativamente carregado ( $n_p < n_e$ ).

## 1.2. Princípio da quantização da carga elétrica

No século XVIII, a carga elétrica era considerada como um **fluido contínuo**. No início do século XX, Millikan descobriu que o fluido elétrico não era contínuo, mas que a carga elétrica era sempre um múltiplo inteiro da carga elementar:

$$Q = \pm n \cdot e \quad n \in \mathbb{N}$$

Usamos o sinal (+) quando o corpo apresenta falta de elétrons e o sinal (-) quando o corpo apresenta excesso de elétrons.

Note que a carga elétrica não pode assumir qualquer valor, apenas valores múltiplos de  $e$ , isto é, em *pacotes discretos*. Em termos modernos, dizemos que ela é *quantizada*.

Observação: atualmente, existem teorias modernas que propõem a existências de partículas fracionárias, chamados *quarks*. Eles possuem cargas iguais a  $\pm \frac{e}{3}$  e  $\pm \frac{2e}{3}$ . Existem indícios experimentais sobre a presença dessas partículas, mas elas nunca foram encontradas livremente. Não precisa estender seus estudos sobre essas partículas para sua jornada rumo a aprovação.

### 1.3. Princípios da eletrostática

Denomina-se sistema isolado em eletrostática todo sistema que não troca cargas elétricas com o meio exterior, ou seja, não cede nem recebe cargas elétricas com o meio exterior, ou ainda, a soma das cargas dentro desse sistema será sempre constante, não havendo perdas.

#### 1.3.1. Princípio da atração e repulsão

Verifica-se experimentalmente que:

Cargas elétricas de mesmo sinal se repelem e de sinais contrários se atraem.



Figura 4: Representação do Princípio da Atração e Repulsão em cargas elétricas.



#### 1.3.2. Princípio da conservação das cargas elétricas

Em um sistema eletrostaticamente fechado, a soma algébrica das cargas elétricas é sempre constante.

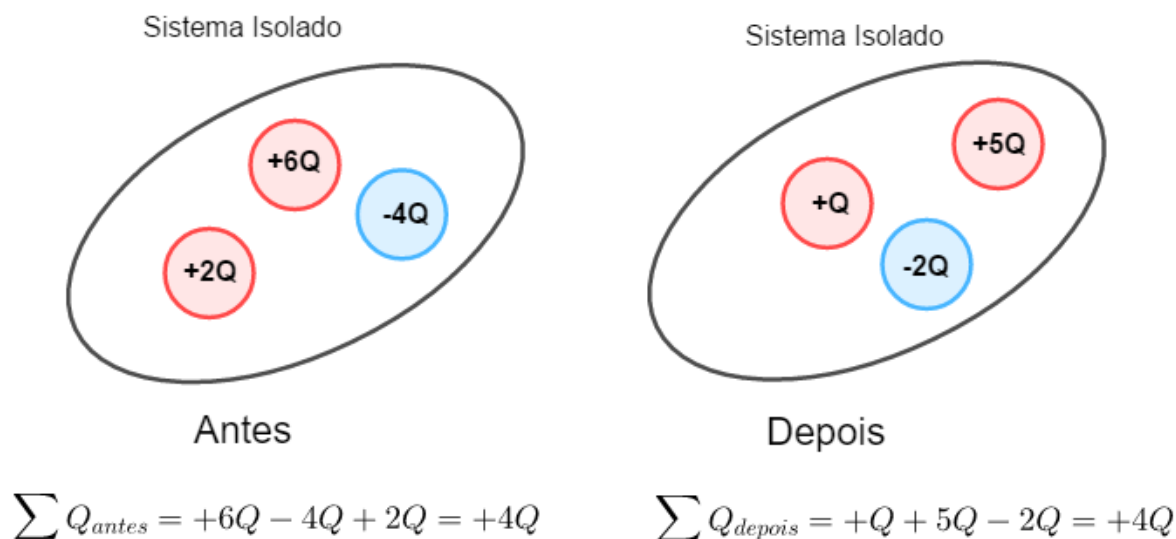


Figura 5: Aplicação da conservação de cargas para sistema isolados eletricamente.

Note que em um sistema isolado, temos sempre que:

$$\sum Q_{antes} = \sum Q_{depois}$$

ESCLARECENDO!



## 1.4. Isolantes e condutores

Dizemos que **isolantes** são materiais que **não apresentam portadores livres** de cargas elétricas. Exemplos: borrachas, vidros, água pura,  $NaCl_{(s)}$ , etc.

Por outro lado, condutores são materiais que apresentam portadores livres de cargas elétricas.

Podemos classificar os condutores em três categorias:

- **1ª espécie:** apresentam elétrons livres. Exemplo: metais. Os metais possuem elétrons “livres” na sua estrutura, ligados ao núcleo do átomo de forma muito fraca. Dessa maneira, os metais têm tendência a doar elétrons.
- **2ª espécie:** apresentam íons livres. Exemplo:  $NaCl_{(aq)}$ . Também conhecidos como condutores eletrolíticos são encontrados nas soluções de ácidos, bases ou sais contidos em água. Cátions e ânions são portadores de carga elétrica que percorrem sentidos opostos.
- **3ª espécie:** elétrons e íons livres. Exemplo: plasma. Possibilitam a condutividade pelo movimento de cátions e ânions, ao contrário dos condutores eletrolíticos tais moléculas não são energizadas sozinhas. Elas precisam se chocar para os elétrons e moléculas trocarem cargas e se tornarem energizadas. Como exemplo temos os raios e relâmpagos.



Dizemos que um condutor carregado está em **equilíbrio eletrostático** quando não há movimento ordenado de cargas elétricas.

Nos condutores eletrizados em equilíbrio eletrostático, as cargas elétricas em excesso se distribuem pela superfície. Esse fato justifica pelo Princípio da Repulsão entre Cargas Elétricas de mesmo sinal. Basicamente, ele garante que as cargas tendem a ficar o mais afastadas possível umas das outras.

De outra forma, as cargas se distribuem em sua superfície, concentrando nas pontas. Tal fenômeno é conhecido como **efeito das pontas**. Ele será mais bem compreendido quando apresentarmos o conceito de campo elétrico e suas propriedades.

Por outro lado, se um corpo não for condutor, ele poderá apresentar cargas elétricas em excesso localizadas em certas regiões, dependendo da forma como for eletrizada.

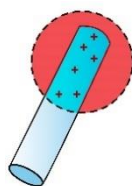


Figura 6: Bastão de material isolante eletrizado.

## 1.5. Métodos de eletrização

Para alterar o estado de eletrização de um corpo, podemos usar alguns processos comuns: atrito, contato e indução.

### 1.5.1. Atrito

Utiliza-se este processo preferencialmente em isolantes. Basicamente, quando se atrita dois corpos constituídos de materiais distintos, um cede elétrons para o outro, tornando os dois eletrizados. Quem recebeu elétrons fica eletrizado negativamente e quem cedeu elétrons fica eletrizado positivamente.

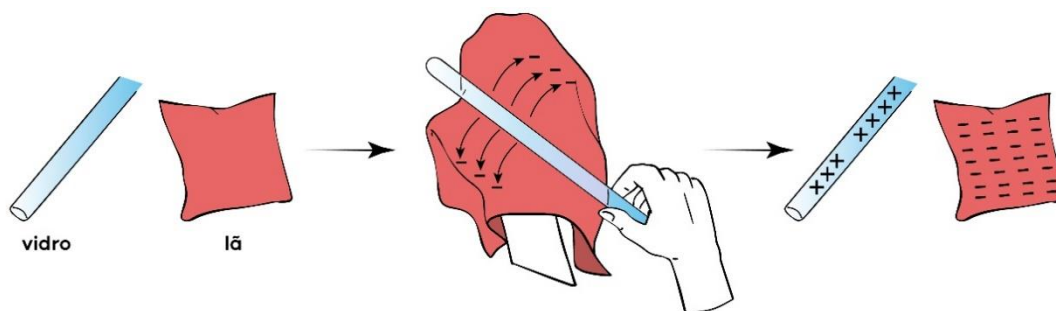
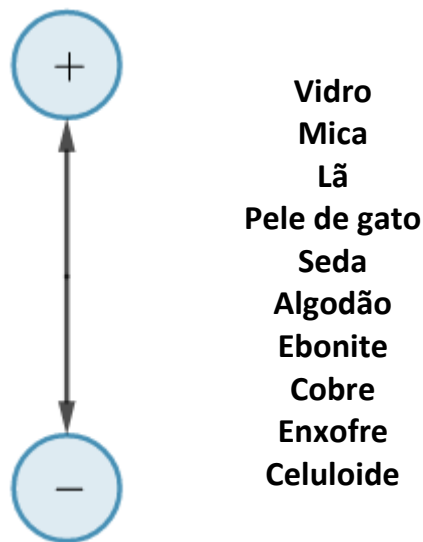


Figura 7: Processo de eletrização por atrito entre um bastão de vidro e um tecido de lã.

Na eletrização por atrito de isolantes, a carga fica confinada no local de atrito. O sinal da carga elétrica adquirida por um material depende de sua posição na série triboelétrica.

Regra

Substância



Por exemplo, se eletrizarmos por atrito um bastão de vidro e um pano de seda, o vidro eletriza-se positivamente e a seda eletriza-se negativamente. Se eletrizarmos algodão e celuloide, o algodão eletriza-se positivamente e a celuloide eletriza-se negativamente.

Note que pelo Princípio da Conservação das Cargas, quando um corpo é eletrizado negativamente com carga elétrica  $-Q$ , o outro deverá adquirir carga elétrica  $+Q$ .

### 1.5.2. Contato

Este método funciona muito bem entre materiais condutores, onde as cargas elétricas se distribuem na superfície.

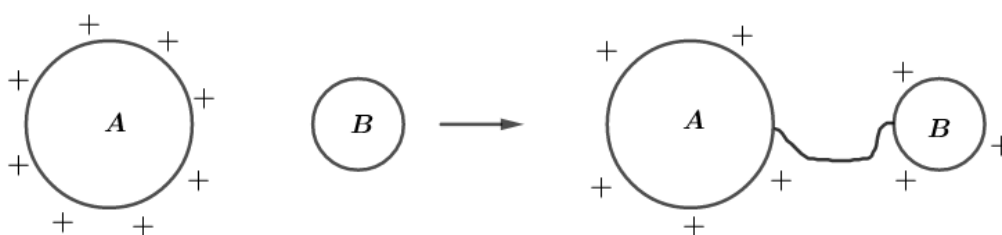


Figura 8: Eletrização por contato utilizando um fio.

Note que o Princípio da Conservação das Cargas foi respeitado. Se um dos corpos ou ambos forem constituídos de materiais não condutores, a troca de cargas se limitaria à região em torno do ponto de contato.

Observações:

- 1) Quando colocamos 2 condutores em contato, eles podem ser considerados como um único condutor.

- 2) Após a eletrização por contato, no equilíbrio eletrostático, todos os condutores têm cargas de mesmo sinal.
- 3) No caso de eletrização por contato de condutores esféricos, as cargas se distribuem proporcionalmente aos raios.
- 4) Para o caso de esferas metálicas de mesmos raios, temos que:

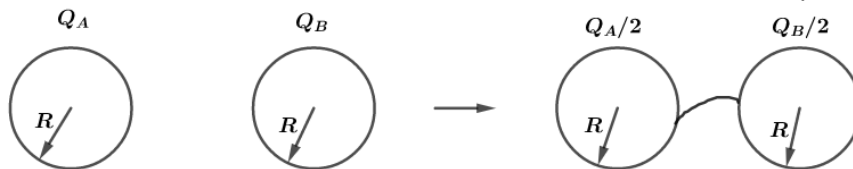


Figura 9: Eletrização por contato utilizando um fio, para duas esferas de mesmo raio.

Para o caso de  $n$  esferas, temos que:

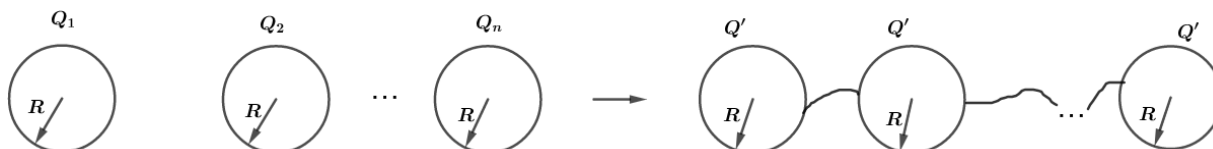


Figura 10: Eletrização por contato utilizando um fio, para  $n$  esferas de mesmo raio.

$$Q' = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{n}$$

- 5) **Terra do ponto de vista da eletricidade:** Terra pode ser vista como um condutor neutro e de raio infinito.

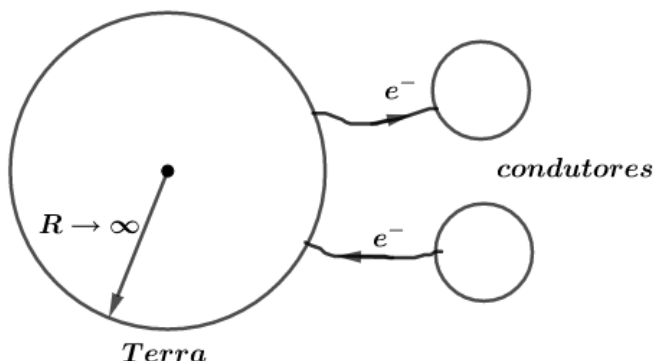


Figura 11: Corpo eletrizado ao entrar em contato com a Terra.

**Todo condutor** não induzido, ao ser aterrado (colocado em contato com a Terra), torna-se neutro.  
Símbolo do aterramento:



Figura 12: Símbolo para aterramento.

ESCLARECENDO!



1) (UEL – PR)

Quatro esferas condutoras iguais têm, respectivamente, cargas elétricas  $\frac{Q}{2}$ ,  $Q$ ,  $2Q$  e  $X$  (desconhecida). Pondo-se todas em contato e depois separando-as, cada uma ficou com uma carga igual a  $\frac{7Q}{8}$ . Supondo que as esferas tenham trocado cargas elétricas somente entre si, a carga elétrica  $X$ , da quarta esfera, era igual a:

- a) zero
- b)  $\frac{Q}{2}$
- c)  $Q$
- d)  $\frac{3Q}{2}$
- e)  $2Q$

**Comentários:**

Pelo Princípio da Conservação das Cargas nesse sistema eletrostaticamente isolado, temos que:

$$\begin{aligned} \sum Q_{antes} &= \sum Q_{depois} \\ \frac{Q}{2} + Q + 2Q + X &= 4 \cdot \frac{7Q}{8} \\ \boxed{X = 0} \end{aligned}$$

**Gabarito: A**

**2) (Fuvest – SP)**

Têm-se 3 esferas condutoras idênticas A, B e C. As esferas A (positiva) e B (negativa) estão eletrizadas com cargas de mesmo módulo  $Q$ , e a esfera C está inicialmente neutra. São realizadas as seguintes operações:

- 1) toca-se C em B, com A mantida a distância, e em seguida separa-se C de B;
- 2) toca-se C em A, com B mantida a distância, e em seguida separa-se C de A;
- 3) toca-se A em B, com C mantida a distância, e em seguida separa-se A de B,

Podemos afirmar que a carga final da esfera A vale:

- a) zero
- b)  $+\frac{Q}{2}$
- c)  $-\frac{Q}{4}$
- d)  $+\frac{Q}{6}$
- e)  $-\frac{Q}{8}$

**Comentários:**

Vamos aplicar o Princípio da Conservação das Cargas nesse sistema eletrostaticamente isolado para cada etapa do processo:

**Etapa 1:**

$$\begin{aligned} \sum Q_{antes} &= \sum Q_{depois} \\ 0 + (-Q) &= Q_{B1} + Q_{C1} \end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação  $Q_{B1} = Q_{C1}$ . Portanto:

$$Q_{B1} = Q_{C1} = -\frac{Q}{2}$$

**Etapa 2:**

$$\begin{aligned} \sum Q_{antes} &= \sum Q_{depois} \\ Q_A + Q_{C1} &= Q_{A2} + Q_{C2} \end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação  $Q_{A2} = Q_{C2}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} +Q + \left(-\frac{Q}{2}\right) &= Q_{A2} + Q_{A2} \\ Q_{A2} = Q_{C2} &= +\frac{Q}{4} \end{aligned}$$

**Etapa 3:**

$$\begin{aligned} \sum Q_{antes} &= \sum Q_{depois} \\ Q_{A2} + Q_{B1} &= Q_{A3} + Q_{B3} \end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação  $Q_{A3} = Q_{B3}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} +\frac{Q}{4} - \frac{Q}{2} &= 2Q_{A3} \\ Q_{A3} = Q_{B3} &= -\frac{Q}{8} \end{aligned}$$

Cargas finais:

$$\boxed{Q_{Af} = Q_{Bf} = -\frac{Q}{8}} \text{ e } \boxed{Q_{Cf} = +\frac{Q}{4}}$$

**Gabarito: e**

### 1.5.3. Indução

Este processo ocorre preferencialmente em condutores. Trata-se da “separação” de cargas elétricas de um condutor sem que haja contato com o outro corpo eletrizado.

Vamos tomar dois corpos A e B, onde A é eletrizado e pode ser constituído de material isolante ou condutor; o corpo B está neutro e tem que ser constituído de material condutor. Chamamos A, que está eletrizado, de indutor e B de induzido. Representação:

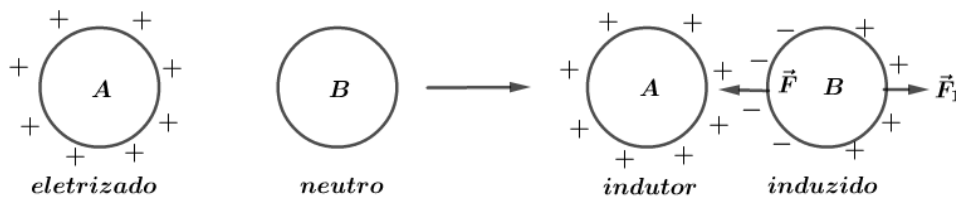


Figura 13: Representação da eletrização por indução.

Ao aproximar os dois corpos, os elétrons de B serão atraídos para a região mais próxima de A, criando uma carência de elétrons na região mais afastada de B, como mostra a figura 5. Assim, dizemos que o corpo B está induzido pelo indutor A.

Além disso, observamos que a força de atração entre as faces próximas é maior em módulo que a força de repulsão entre o corpo A e a parte mais afastada de B, isto é,  $|\vec{F}| > |\vec{F}_1|$ .

Note que o corpo B não recebeu ou perdeu elétrons. Ele está eletricamente neutro (a soma de suas cargas é zero). Então, se afastarmos o indutor, os elétrons do induzido se rearranjam para o estado inicial. Dizemos que houve apenas separação de cargas no induzido.

Se desejamos efetuar a eletrização de um induzido, devemos realizar os seguintes passos:

### Passo 1)

Aproximamos do induzido um corpo carregado (o indutor), forçando uma separação de cargas no induzido:

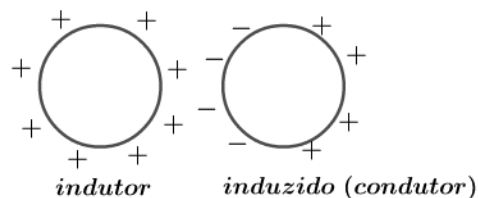


Figura 14: Separação das cargas no induzido.

### Passo 2)

Na presença do indutor, aterra-se o induzido.

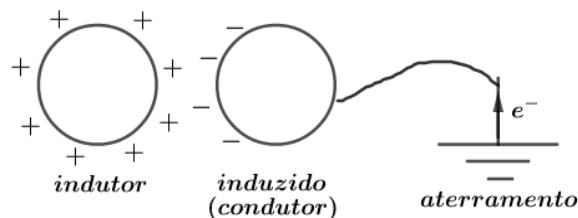


Figura 15: Aterramento do induzido para atrair elétrons da terra.

Observação: o aterramento pode ser feito em qualquer ponto do induzido.

### Passo 3)

Ainda na presença do indutor, desliga-se o contato do induzido com a terra.

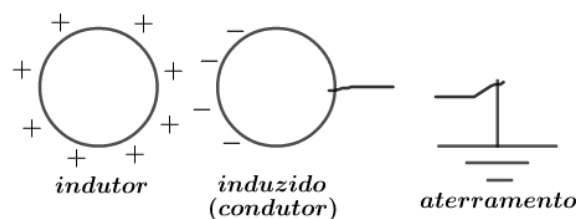


Figura 16: Retira-se a ligação do induzido à terra.

Observação: na eletrização por indução, quando se atingi o equilíbrio eletrostático, o indutor e o induzido têm sinais opostos.

### Passo 4:

Afasta-se o indutor e teremos o induzido eletrizado.

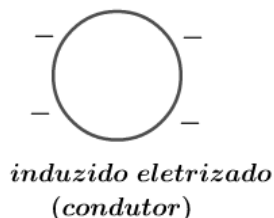


Figura 17: Induzido devidamente eletrizado.

### Observações:

- 1) Independente de qual seja a carga indutora, concentram-se cargas de sinais opostos no induzido na região próxima ao indutor.
- 2) É necessário utilizar o fio terra no induzido para obter cargas elétricas de sinal oposto ao das do indutor.
- 3) Quando se desliga o fio terra, o indutor ainda deve estar presente. Do contrário, apenas estaríamos movimentando cargas no induzido, como visto anteriormente.
- 4) Logo acima dizemos que o corpo induzido deve ser feito de material condutor para que ocorra a separação de cargas. Entretanto, em alguns casos quando o induzido for constituído de material isolante poderá haver uma polarização das moléculas, como por exemplo no isopor. Dessa forma, existe uma polarização das moléculas do induzido (isopor), resultando no aparecimento de cargas superficiais excedentes negativas à esquerda e positivas à direita:

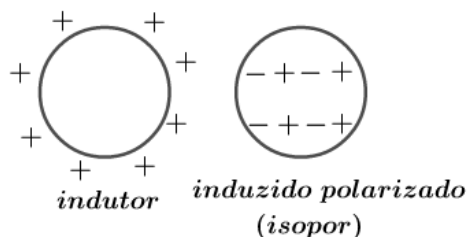


Figura 18: Polarização das moléculas no isopor na presença de um indutor eletrizado positivamente.

Trabalharemos a polarização de materiais isolantes (dielétricos) futuramente quando estudaremos os capacitores.



## 1.6. Indução parcial X Indução total

A **indução parcial** é aquela na qual o módulo da carga induzida é menor do que o módulo da carga do indutor. Ela ocorre quando o induzido não envolve completamente o indutor.

Exemplo:

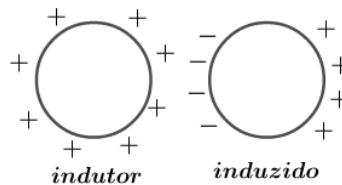


Figura 19: Indução parcial

A **indução total** é aquela na qual o módulo da carga induzida é igual ao módulo da carga do indutor. Ela ocorre quando o induzido envolve completamente o indutor.

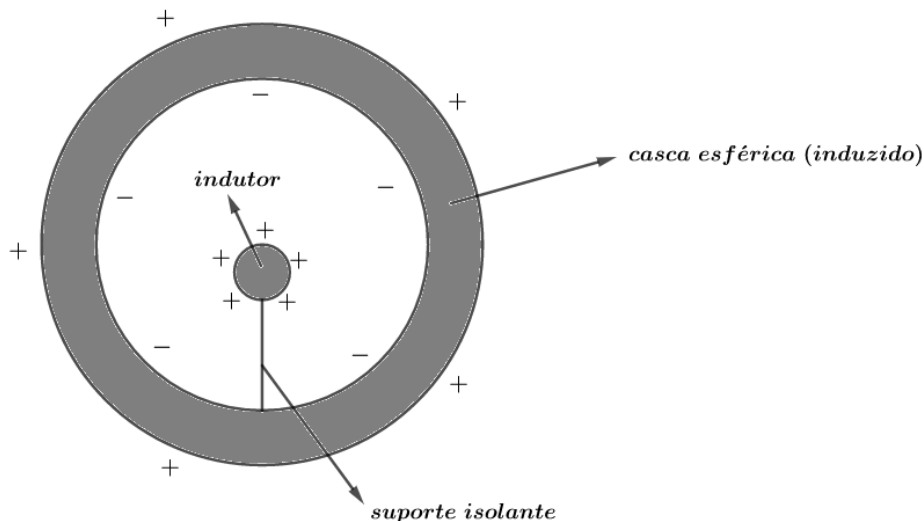


Figura 20: Indução total.

Futuramente, retornaremos a estudar a indução total após a aula de Potencial Elétrico, pois teremos mais uma ferramenta mais poderosa para abordar este método de eletrização.



## 1.7. Eletroscópios

Trata-se de um instrumento utilizado para se verificar o estado de eletrização de um determinado corpo (corpo de prova). A base de seu funcionamento é a indução eletrostática.

Existem dois tipos comuns de eletroscópios: de folhas e o pêndulo elétrico.

### 1.7.1. Pêndulo eletrostático

O pêndulo é constituído de uma esfera condutora extremamente leve (geralmente uma casca de alumínio) e por um fio isolante, também extremamente leve (geralmente fio de náilon).



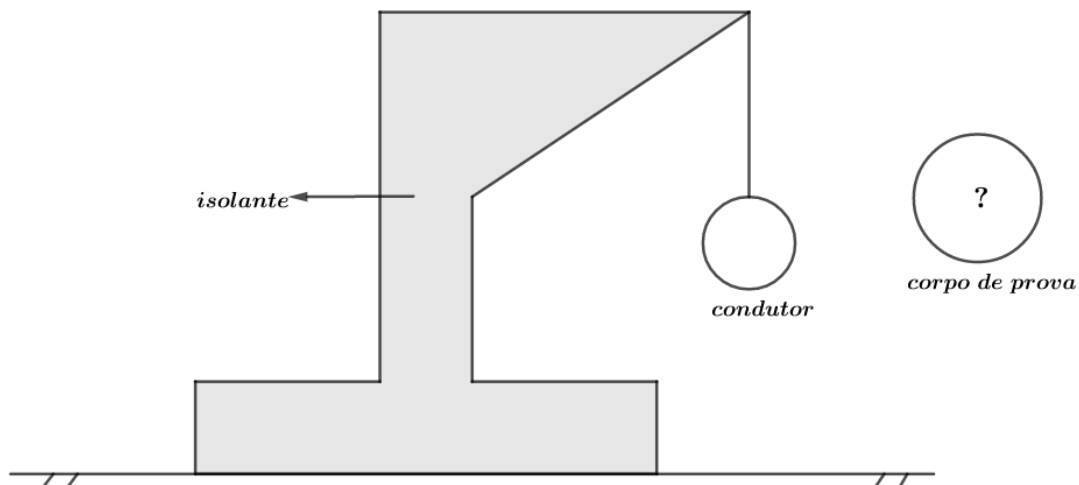


Figura 21: Construção de um pêndulo eletrostático.

Seu funcionamento é bem simples: quando se aproxima um corpo eletrizado, a esfera do pêndulo é atraída eletrostaticamente.

Isso acontece devido a indução eletrostática. Vamos aproximar um corpo positivamente carregado. Por indução, os elétrons da esfera são atraídos para a região mais próxima do corpo de prova, tornando a região mais distante positiva.

Assim, na esfera aparecem duas forças: uma força de atração na região mais próxima da esfera com o corpo de prova e outra força de repulsão entre a região positiva da esfera e o corpo de prova.

Como veremos no próximo capítulo, a força elétrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as cargas puntiformes. Então, como a distância entre a região negativamente carregada na esfera e o corpo de provas é menor que a outra região da esfera carregada positivamente, o módulo da força de atração será maior que o módulo da força de repulsão na esfera.

Dessa forma, a esfera será atraída pelo corpo de prova (se estiver eletrizado), como na figura logo abaixo:

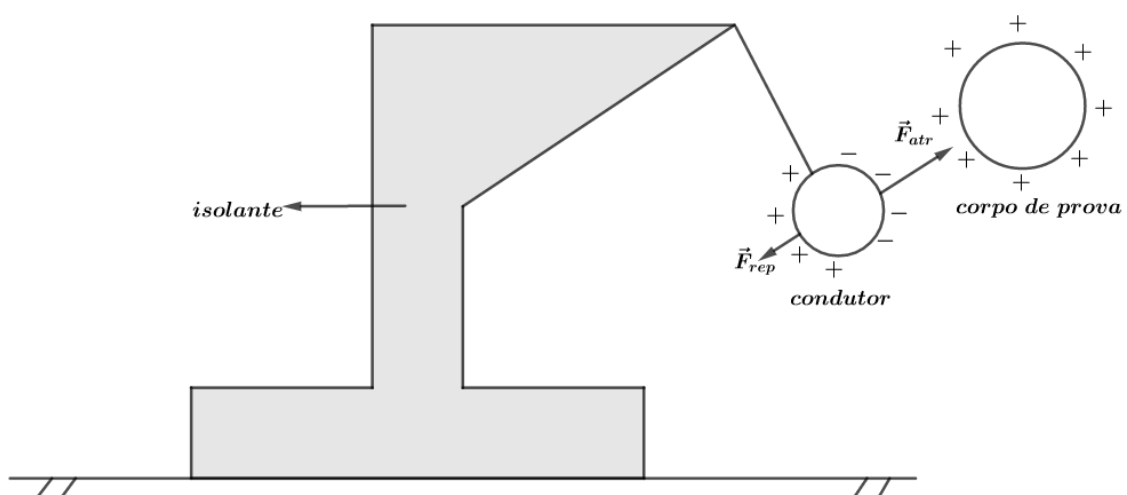


Figura 22: Funcionamento de um pêndulo eletrostático.

Note que  $|\vec{F}_{atr}| > |\vec{F}_{rep}|$ .

Quando o fio de suspensão for condutor de eletricidade, ao ligá-lo a terra, desaparecem as cargas positivas e a atração resultante entre os corpos se tornam mais forte.

Para a utilização do pêndulo eletrostático, devemos seguir os seguintes passos:

### Passo 1)

Sem a presença de qualquer corpo carregado, aterr-se o eletroscópio para garantir a neutralidade da esfera.

### Passo 2)

Aproxima-se o corpo de prova do eletroscópio e verifica-se o comportamento:

- a) Nada ocorre: corpo de prova eletricamente neutro.
- b) Esfera atraída: corpo de prova eletricamente carregado.

### Passo 3)

Caso o corpo de prova esteja carregado, carrega-se o eletroscópio com uma carga conhecida e verifica:

- a) Atraem-se: sinais opostos.
- b) Repelem-se: mesmo sinal.

## 1.7.2. Eletroscópio de folhas

Eletroscópio de folhas, ou de lâminas, possui um corpo metálico preso a uma rolha de cortiça, acondicionado em um recipiente de vidro. Suas lâminas devem ser bastante finas, flexíveis e leves. Normalmente, utiliza-se folhas de vidro ou mesmo o papel-alumínio.

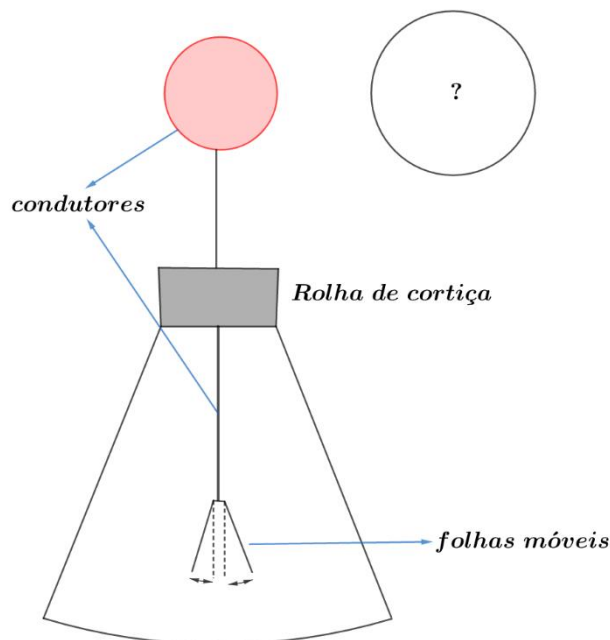


Figura 23: Eletroscópio de folhas.

Para a utilização do eletroscópio de folhas, devemos seguir os seguintes passos:

### Passo 1)

Aterr-se, na ausência de qualquer corpo carregado, o eletroscópio para garantir sua **neutralidade** (folhas fechadas).

### Passo 2)

Aproxima-se o corpo de prova do eletroscópio e observa-se o comportamento das folhas:

- a) Nada ocorre: corpo de prova neutro.
- b) Folhas se abrem: corpo de prova carregado.

### Passo 3)

Caso o corpo de prova esteja carregado, carrega-se o eletroscópio com uma carga de sinal conhecido e repete-se o passo 2:

- a) Folhas **tendem inicialmente** a se fecharem: sinais opostos.
- b) Folhas **tendem a se abrirem**: mesmo sinal.

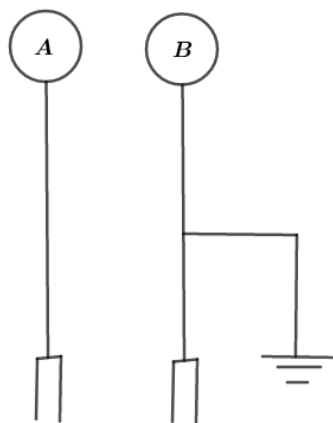
Note que inicialmente, o eletroscópio apenas diz o estado de eletrização do corpo de provas: carregado ou descarregado. Para conhecer a natureza da carga do corpo de provas é necessário realizar o processo novamente, com o eletroscópio carregado com uma carga conhecida.

ESCLARECENDO!



### 3)

Dois eletroscópios de folhas A e B estão inicialmente neutros, sendo que B está ligado à terra, como mostra a figura:

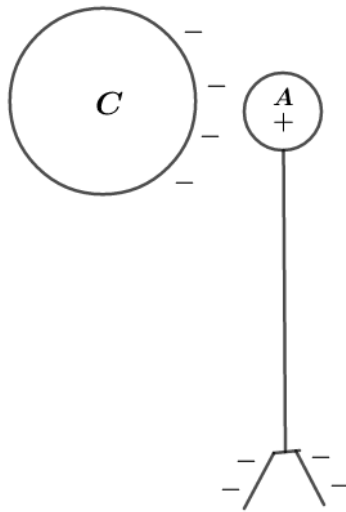


Um bastão de borracha C, carregado de cargas elétricas negativas, se aproxima de A. Um bastão de borracha D, carregado de cargas elétricas positivas, se aproxima de B. Nenhum dos bastões toca nos eletroscópios.

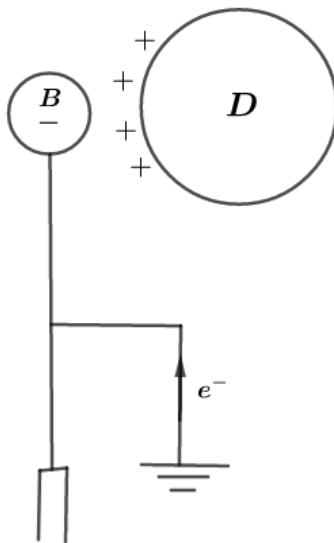
- a) O que acontece no eletroscópio A?
- b) O que acontece no eletroscópio B?

#### Comentários:

a) Quando o bastão C aproxima-se de A, ocorrerá indução e as lâminas se abrirão. A distribuição de cargas será:



b) Quando o bastão D aproxima-se de B, que está aterrado, ocorrerá indução, havendo subida de elétrons da terra para a esfera do eletroscópio. Assim, as lâminas de B permanecerão neutras e não se abrirão.



## 2. Lei de Coulomb

Um corpo eletrizado é dito carga elétrica puntiforme quando a sua dimensão é desprezível quando comparada com a distância a outro corpo.

Considere duas cargas puntiformes, colocadas em um certo meio, a uma distância  $d$  entre si, a força  $\vec{F}$  de interação entre elas é tal que:

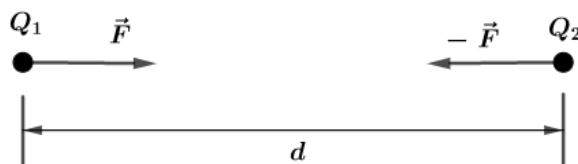


Figura 24: Força elétrica entre duas cargas puntiformes de sinais contrários.

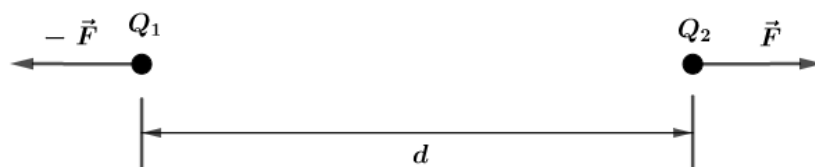


Figura 25: Força elétrica entre duas cargas puntiformes de mesmo sinal.

A direção de  $\vec{F}$  é a reta que une as duas cargas e o sentido é atrativo ou repulsivo dependendo dos sinais das cargas.

Note que  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  constituem um par Ação e Reação.

O módulo da força elétrica é dado pela Lei de Coulomb que diz:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

A unidade das cargas é o coulomb (C) como já mencionamos e a unidade de distância é o metro (m).

Em primeira abordagem,  $\epsilon$  é a permissividade do meio, uma constante física que depende do meio e caracteriza a interação das cargas elétricas nesse meio.

Para o vácuo, a permissividade elétrica do meio é dada por:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Define-se permissividade relativa  $\epsilon_r$  a constante dielétrica  $k$  da seguinte forma:

$$k = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \text{ com } \epsilon_r \geq 1$$

Chamamos de constante eletrostática de um meio representado pelo  $K$  (letra maiúscula) a seguinte grandeza:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Para o vácuo, temos que:



$$K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Dessa forma, a Lei de Coulomb pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

$$F = K \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

## 2.1. Princípio da superposição

Considere um sistema constituído de  $n$  cargas puntiformes  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . podemos calcular a força elétrica resultante sobre uma carga  $Q$  aplicando o Princípio da Superposição. Este princípio diz que podemos calcular a contribuição de força de cada carga  $q_i$  com  $Q$  e depois somarmos vetorialmente:

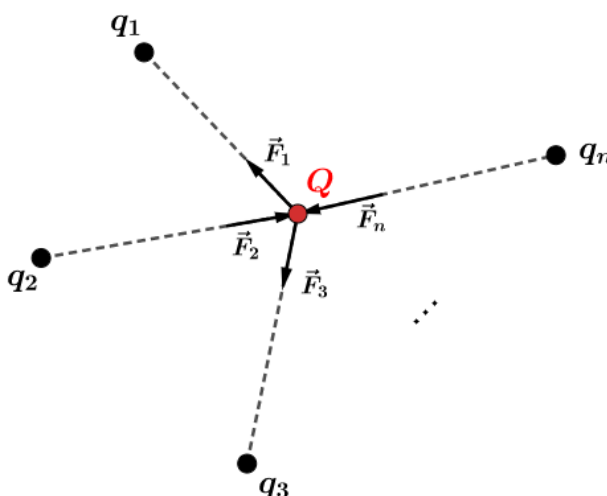


Figura 26: Princípio da Superposição aplicado à  $n$  cargas.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Ou ainda:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

## 2.2. Análise gráfica da lei de Coulomb

Se adotarmos que  $K, Q_1$  e  $Q_2$  não se alteram, podemos escrever os seguintes esboços do gráfico  $F \times d$ :

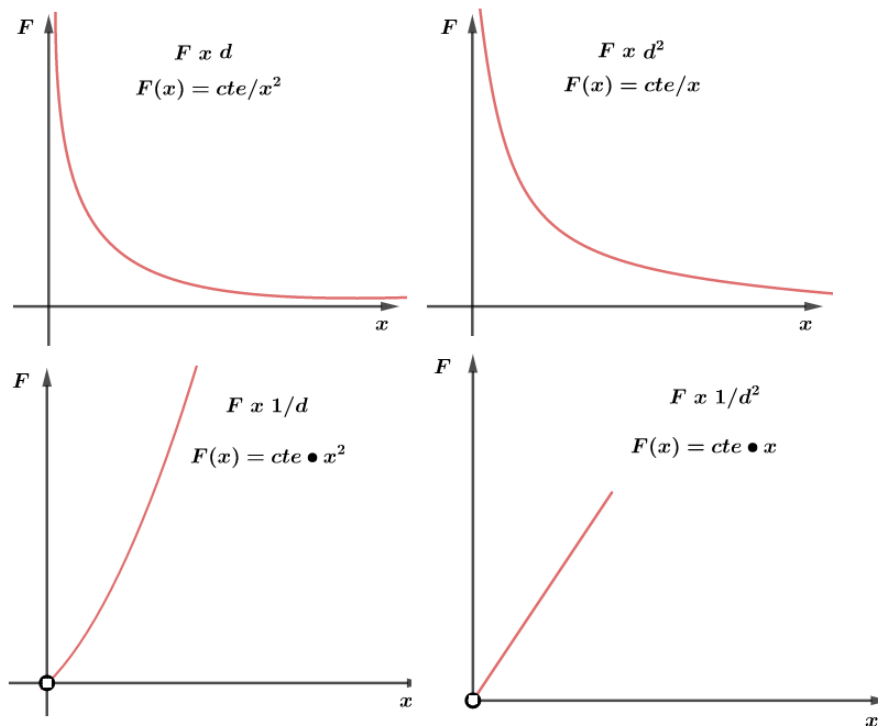


Figura 27: Possíveis gráfico da força pela distância.

### 2.3. Relações de proporção na lei de Coulomb

Dada duas cargas puntiformes, separadas por uma distância  $d$ , a Lei de Coulomb aplicada nelas é:

$$F = \frac{K|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

Se houver as alterações nas cargas, no meio e na distância, teríamos que:

$$|Q_1|' = x \cdot |Q_1|$$

$$|Q_2|' = y \cdot |Q_2|$$

$$K' = z \cdot K$$

$$d' = t \cdot d$$

Então, a Lei de Coulomb diz que:

$$F' = \frac{K'|Q_1|'|Q_2|'}{d'^2}$$

Logo, a nova força pode ser relacionada com a força antiga da seguinte maneira:

$$F' = \frac{z \cdot x \cdot y}{t^2} \cdot F$$

Os submúltiplos do coulomb mais utilizados são:

- milicoulomb:  $mC = 10^{-3}C$
- microcoulomb:  $\mu C = 10^{-6}C$
- nanocoulomb:  $nC = 10^{-9}C$

- picocoulomb:  $pC = 10^{-12}C$

ESCLARECENDO!



4)

Considere duas cargas puntiformes  $q$  e  $Q$ , separadas por uma distância  $d$ , possuem força de atração de intensidade  $F$ . Calcule a nova força elétrica quando se duplica a primeira carga, divide a segunda por 3 e divide a distância por 3. Não se altera o meio das cargas.

**Comentários:**

De acordo com a mudança nas condições, temos que:

$$|Q_1|' = 2 \cdot |Q_1|$$

$$|Q_2|' = \frac{1}{3} \cdot |Q_2|$$

$$d' = \frac{1}{3} \cdot d$$

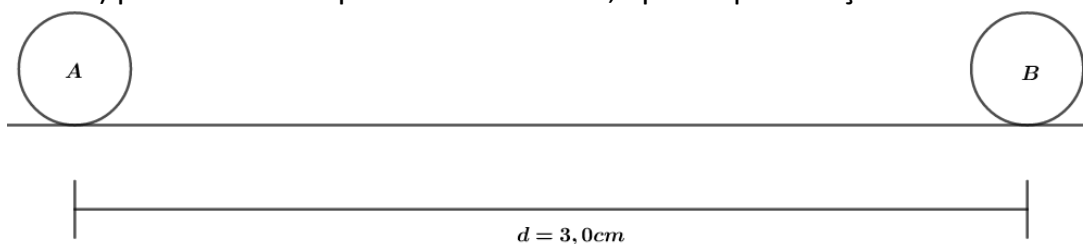
Logo, a nova força é dada por:

$$F' = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot F$$

$$\boxed{F' = 6 \cdot F}$$

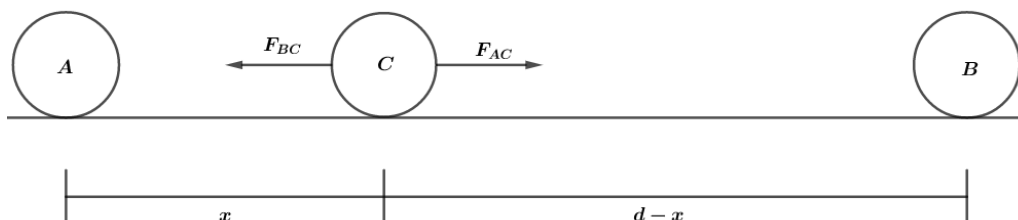
5)

Duas cargas fixas A e B distam 3,0 cm uma da outra. As cargas valem  $q_A = 1,0 \times 10^{-7}C$  e  $q_B = 4,0 \times 10^{-7}C$ . A que distância de A deve ser colocada uma terceira carga C (de mesma natureza elétrica que A e B) para ficar em equilíbrio entre A e B, apenas pela força elétrica em C?



**Comentários:**

Vamos dizer que a distância da carga C até a carga A é  $x$ , então teremos o seguinte diagrama de força na carga C na horizontal:



Para o equilíbrio da carga livre em C, temos que:





$$\frac{F_{BC}}{Kq_Bq_C} = \frac{F_{AC}}{Kq_Aq_C}$$
$$\frac{4}{(d-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

Dado que  $q_B = 4q_A$ , temos que:

$$\frac{4}{(d-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$
$$4x^2 = (d-x)^2$$
$$4x^2 - (d-x)^2 = 0$$
$$[2x - (d-x)][2x + d - x] = 0$$
$$(3x - d)(x - d) = 0$$

Dessa forma, temos que:

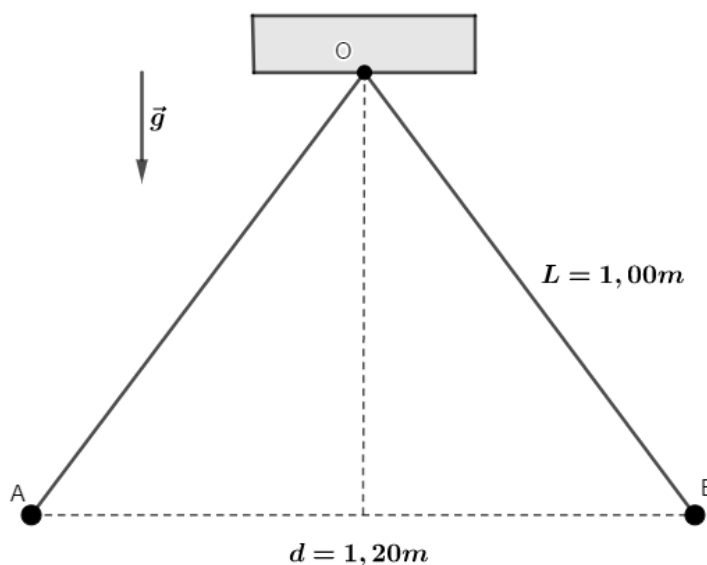
$$3x = d \text{ ou } x = d$$

Mas,  $x = d$  não convém. Logo, temos:

$$x = \frac{d}{3}$$
$$\boxed{x = 1,0 \text{ cm}}$$

### 6) (AFA)

Duas esferas condutoras idênticas muito pequenas, de mesma massa  $m = 0,4 \text{ g}$ , encontram-se no vácuo, suspensas por meio de dois fios leves, isolantes, de comprimentos iguais a  $L = 1,00 \text{ m}$ , presos a um mesmo ponto de suspensão  $O$ .



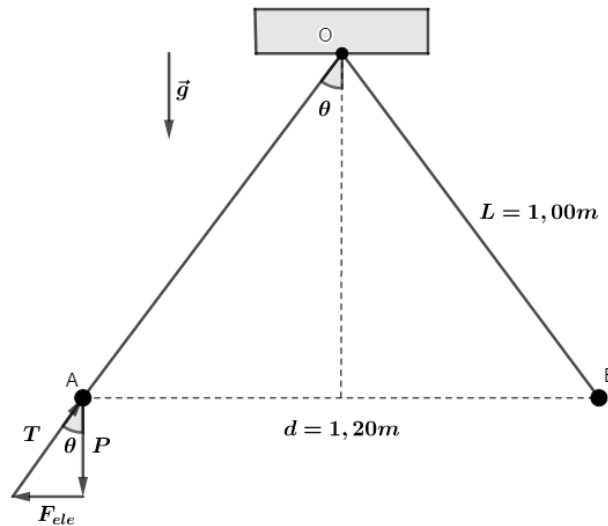
Estando as esferas separadas, eletriza-se uma delas com carga  $Q$ , mantendo-se a outra neutra. Em seguida, elas são colocadas em contato e, depois, abandonadas, verificando-se que na posição de equilíbrio a distância entre elas é  $d = 1,20 \text{ m}$ . Considere  $Q > 0$ .

Nessa situação, o valor de  $Q$  é?

Dados:  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

#### Comentários:

Para a determinação da carga  $Q$ , podemos analisar a posição de equilíbrio do corpo A. Para isso, vamos fazer o diagrama de forças de A:

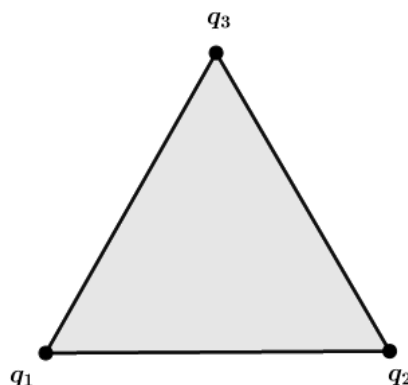


Após o contato das esferas, cada esfera tem carga  $Q/2$ . Pela geometria do problema, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{F_{ele}}{P} \\ \frac{0,6}{0,8} &= \frac{9 \times 10^9 \left(\frac{Q}{2}\right) \left(\frac{Q}{2}\right)}{4 \times 10^{-4} \cdot 10} \\ Q &= 2 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 4 \times 10^{-4} \cdot 10 \cdot 1,2^2}{8 \cdot 9 \times 10^9}} = 2 \cdot \frac{2 \times 10^{-2} \cdot 1,2}{3 \times 10^4} \cdot \sqrt{\frac{6}{8}} = 1,38 \times 10^{-6} C \\ \boxed{Q = 1,38 \mu C} \end{aligned}$$

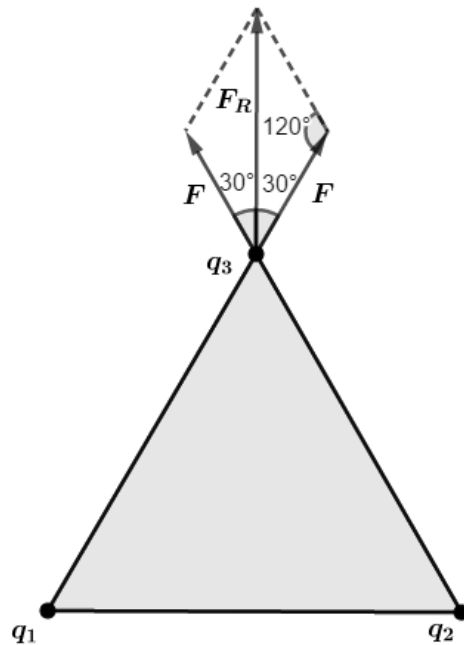
7)

Considere 3 cargas formando um triângulo equilátero. As três cargas são positivas e possuem módulos  $q$ . Qual a intensidade da força elétrica resultante em  $q_3$ ?



**Comentários:**

Vamos fazer o diagrama de forças na carga  $q_3$ :



Como o módulo das cargas é o mesmo e as distância entre elas também, a força de  $q_1$  e  $q_3$  é igual a força de  $q_2$  e  $q_3$ , sendo todas elas repulsivas.

Para determinar a força resultante, devemos calcular o vetor resultante das forças. Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{F_R}{\text{sen}(120^\circ)} = \frac{F}{\text{sen}(60^\circ)}$$

$$F_R = \sqrt{3}F$$

$$F_R = \frac{\sqrt{3}Kq^2}{d^2}$$



### 2.3. Lei de Coulomb para distribuições tridimensionais de cargas

Dada duas cargas puntiformes no espaço 3D, podemos escrever a Lei de Coulomb na forma vetorial:

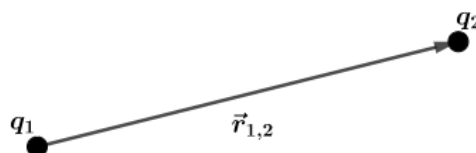


Figura 28: Cargas distribuídas no espaço.

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^3} \cdot \vec{r}_{1,2} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^2} \cdot \hat{r}_{1,2}$$

Podemos criar um procedimento para resolução deste tipo de questão:

**Passo 1)**

Estabelecer um sistema de coordenadas e posicionar as cargas de acordo com esse sistema.

**Passo 2)**

Definir o vetor posição de todas as cargas em relação a carga de interesse e aplicar a equação vetorial da Lei de Coulomb para cada uma das interações desejadas.

**Passo 3)**

Utilizar o Princípio da Superposição para determinar a força resultante na carga em interesse.

Exemplo: vamos calcular a força resultante na carga  $q_1$ , de acordo com a figura:

$$Q_1 = Q_4 = Q_5 = Q_7 = +1\mu\text{C} \quad \text{e} \quad Q_2 = Q_3 = Q_6 = Q_8 = -1\mu\text{C}$$

Posições das cargas:

$$p_{Q_1} = (0,0,0)\text{m}, \quad p_{Q_2} = (3,0,0)\text{m}, \quad p_{Q_3} = (3,3,0)\text{m}, \quad p_{Q_4} = (0,3,0)\text{m}, \quad p_{Q_5} = (0,3,3)\text{m}, \quad p_{Q_6} = (0,0,3)\text{m}, \quad p_{Q_7} = (3,0,3)\text{m} \quad \text{e} \quad p_{Q_8} = (3,3,3)\text{m}.$$

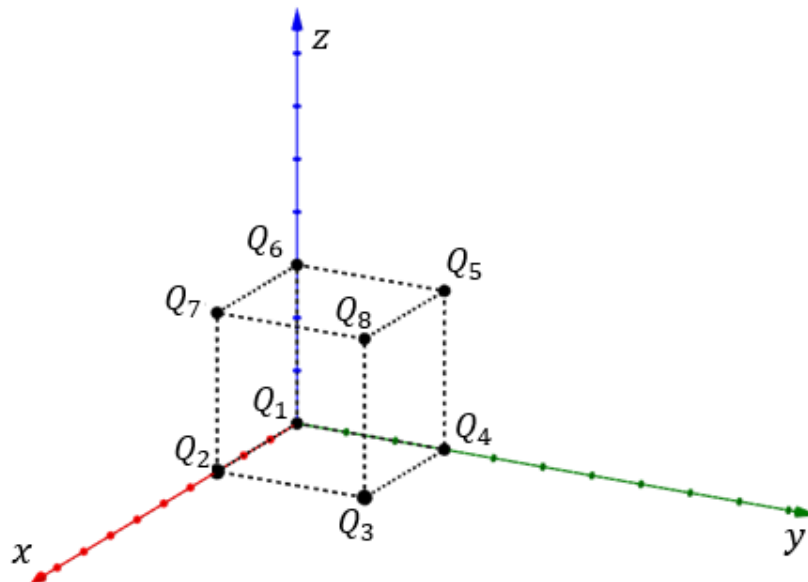


Figura 29: Cargas distribuídas nos vértices de um cubo.

Com essas informações, vamos calcular o vetor posição de cada carga em relação a  $Q_1$  e a força elétrica:

- Para  $Q_1$  e  $Q_2$ :

$$\vec{r}_{1,2} = (3,0,0), \quad |\vec{r}_{1,2}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3 \text{ m} \quad \hat{r}_{1,2} = \frac{\vec{r}_{1,2}}{|\vec{r}_{1,2}|} = \left(\frac{3}{3}, \frac{0}{3}, \frac{0}{3}\right) = (1,0,0)$$

$$\vec{F}_{1,2} = -9 \times 10^9 \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^2} \cdot \hat{r}_{1,2} = 10^{-3}(1,0,0) \text{ N}$$

Por simetria, temos que:

$$\vec{F}_{1,4} = 10^{-3}(0, -1, 0) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{1,6} = 10^{-3}(0, 0, 1) \text{ N}$$

- Para  $Q_1$  e  $Q_3$ :

$$\vec{r}_{1,3} = (3, 3, 0), |\vec{r}_{1,3}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\hat{r}_{1,3} = \frac{\vec{r}_{1,3}}{|\vec{r}_{1,3}|} = \left( \frac{3}{3\sqrt{2}}, \frac{3}{3\sqrt{2}}, \frac{0}{3} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\vec{F}_{1,3} = -9 \times 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot (-10^{-6})}{(3\sqrt{2})^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 10^{-3} \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right)$$

Por simetria, temos que:

$$\vec{F}_{1,5} = 10^{-3} \left( 0, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{1,7} = 10^{-3} \left( -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ N}$$

- Para  $Q_1$  e  $Q_8$ :

$$\vec{r}_{1,8} = (3, 3, 3), |\vec{r}_{1,8}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ m} \quad \hat{r}_{1,8} = \frac{\vec{r}_{1,8}}{|\vec{r}_{1,8}|} = \left( \frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\vec{F}_{1,8} = 10^{-3} \left( \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \text{ N}$$

Logo, a força resultante em  $Q_1$  pode ser calculada pelo Princípio da Superposição:

$$\vec{F}_{R1} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \vec{F}_{1,5} + \vec{F}_{1,6} + \vec{F}_{1,7} + \vec{F}_{1,8}$$

$$\vec{F}_{R1} = 10^{-3} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{9}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{9}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

Repare que esse tratamento fica bem mais algébrico, não requerendo muita visão espacial, apenas aplicações de fórmulas. Essa é a grande vantagem de utilizar a Lei de Coulomb na forma vetorial.

Note que o sinal de menos na frente da constante eletrostática do meio corrige o sentido da força. Por isso, nessa forma devemos levar em conta o sinal da carga e não apenas o módulo da carga, como fazíamos antes quando nosso interesse era apenas o módulo da força elétrica.





## 3. Um breve resumo de temas da Dinâmica

Fique tranquilo, todo o conteúdo que vamos revisar agora será muito bem detalhado nas aulas futuras. Neste momento, as questões terão como assunto principal a eletrostática, mas necessitará de algum conceito da Dinâmica, por isso vamos fazer essa revisão.

Conhecer esses assuntos aumenta nosso leque de questões consideravelmente e já nos possibilita treinar mais para as questões que os nossos vestibulares gostam tanto de cobrar.

### 3.1. Revisão de estática do ponto material

Seja um ponto material sujeito a ação de  $n$  forças.

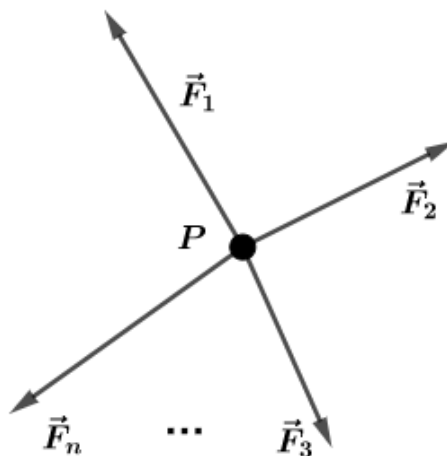


Figura 30: Forças atuando em um ponto material.

Esse corpo estará em equilíbrio (translacional) se:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

### 3.2. revisão de estática do corpo extenso

Momento de uma força  $\vec{F}$  em relação à um ponto P é dado por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



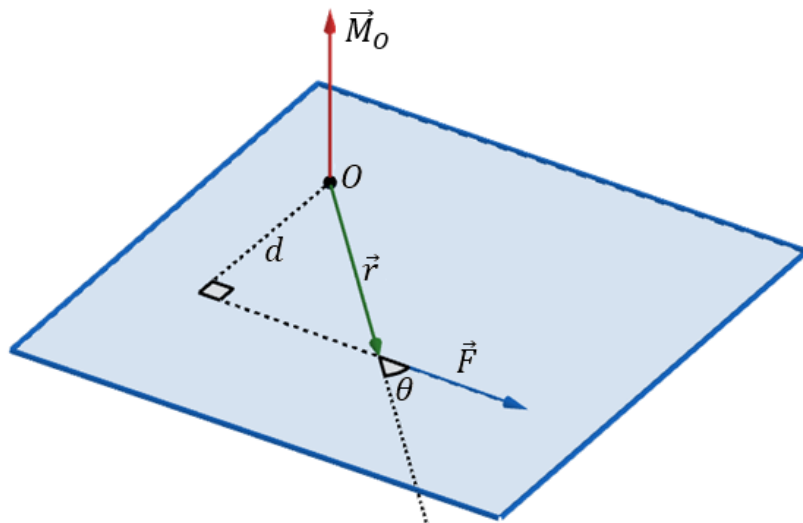


Figura 31: Momento de uma força em relação ao ponto O.

O módulo do momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto O é dado por:

$$|M_O| = r \cdot F \cdot \text{sen}\theta = F \cdot (r \cdot \text{sen}\theta) = F \cdot d$$

Note que  $d$  é a distância da reta suporte da força  $\vec{F}$  ao ponto O.

Caso deseje-se trabalhar com o momento de uma força sem o tratamento vetorial, devemos usar a seguinte expressão:

$$M_O = \pm F \cdot r \cdot \text{sen}\theta$$

Para saber qual sinal usar, utilize a regra da mão direita envolvente e faça  $\vec{r} \times \vec{F}$ . Se você rodar a mão no sentido anti-horário atribui sinal positivo (vetor resultante está na direção do eixo z, como sempre atribuímos). Caso contrário, a fórmula levará sinal negativo.

Seja um corpo extenso sujeito a ação de  $n$  forças.

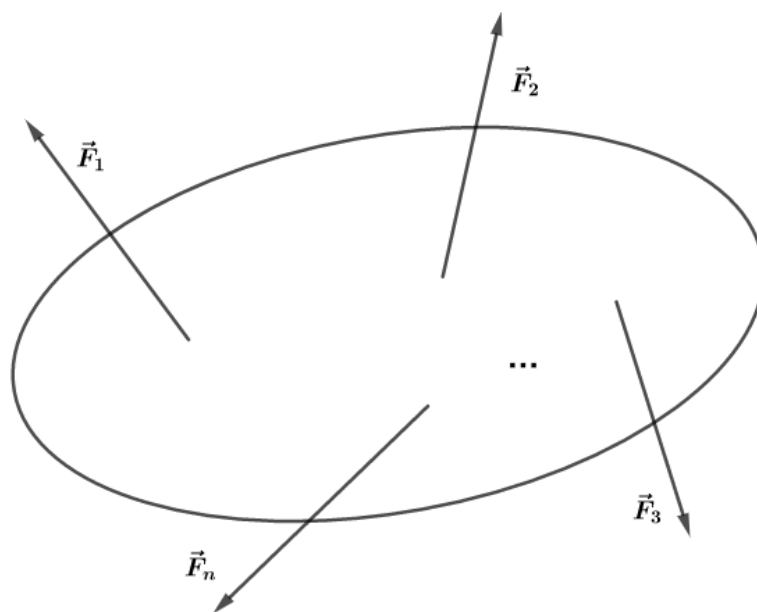


Figura 32: Corpo extenso sujeito à ação de  $n$  forças.

Para que o corpo extenso esteja em equilíbrio, devemos ter satisfeitas duas condições:

1. Equilíbrio translacional:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

2. Equilíbrio rotacional:

$$\boxed{\sum \vec{M}_{CG} = \vec{0}} \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

**Teorema de Earnshaw:** um conjunto de cargas puntiformes não pode se manter em um estado de equilíbrio mecânico estacionário **exclusivamente** pela interação eletrostática das cargas.

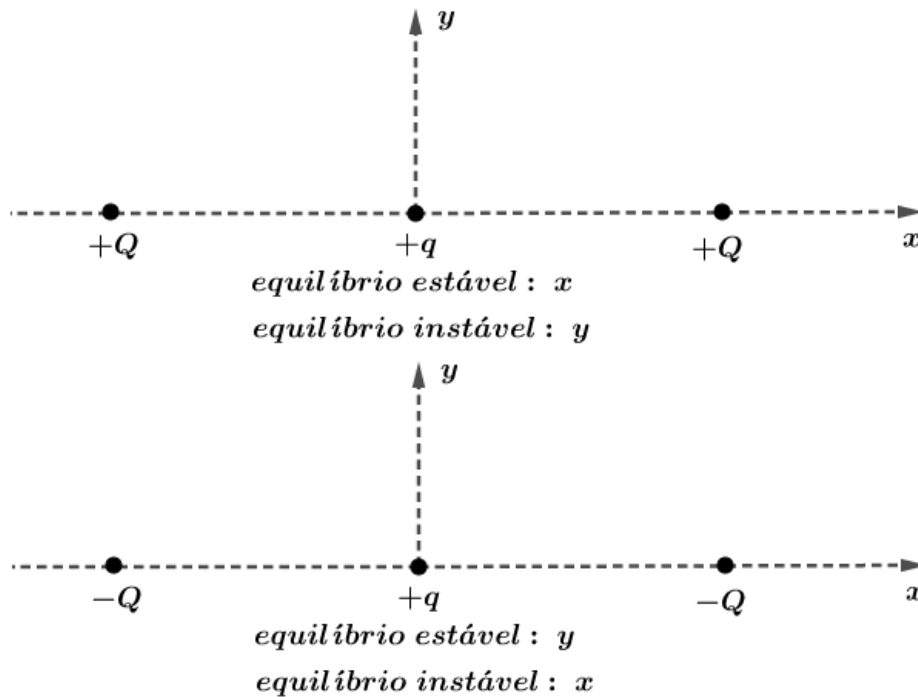


Figura 33: Exemplificação do Teorema de Earnshaw.

### 3.3. Teorema do empuxo

O Teorema de Arquimedes diz:

“Um corpo imerso (mergulhado), parcial ou totalmente, num fluido em equilíbrio sofre ação de uma força com as seguintes características:

**Direção:** vertical

**Sentido:** de baixo para cima

**Ponto de aplicação:** centro de gravidade do volume de fluido deslocado.”



Empuxo nada mais é que a resultante das forças que agem no corpo submerso. A intensidade do empuxo é igual à do peso de fluido deslocado pelo corpo. Dessa forma, temos que:

$$E = P_f = m_f \cdot g$$

Mas,  $m_f = \rho_f \cdot V_s$ . Então:

$$E = \rho_f \cdot V_s \cdot g$$

Em que:

- $V_s$  é o volume submerso;
- $\rho_f$  é a densidade do fluido onde o corpo está submerso.

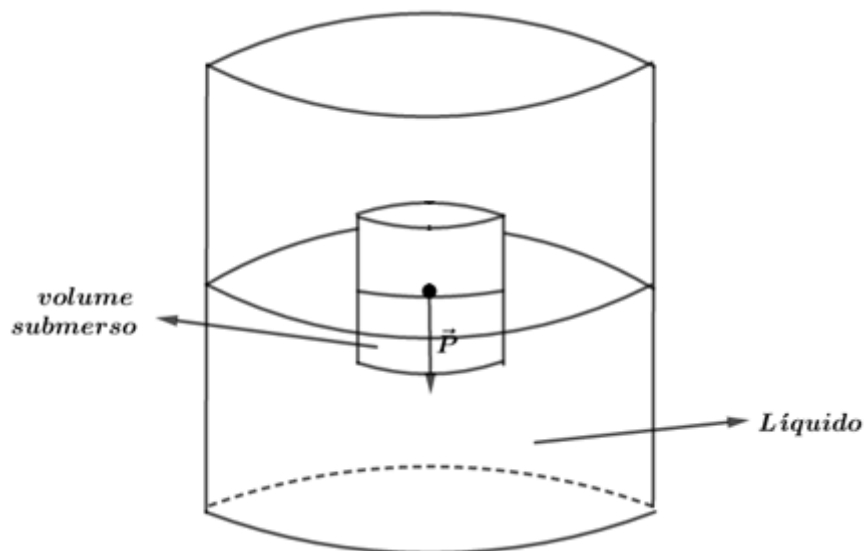


Figura 34: Corpo com parte submersa em um fluido.

### 3.4. Movimentos periódicos

Movimento periódico é aquele que se repete identicamente em intervalos de tempos iguais.

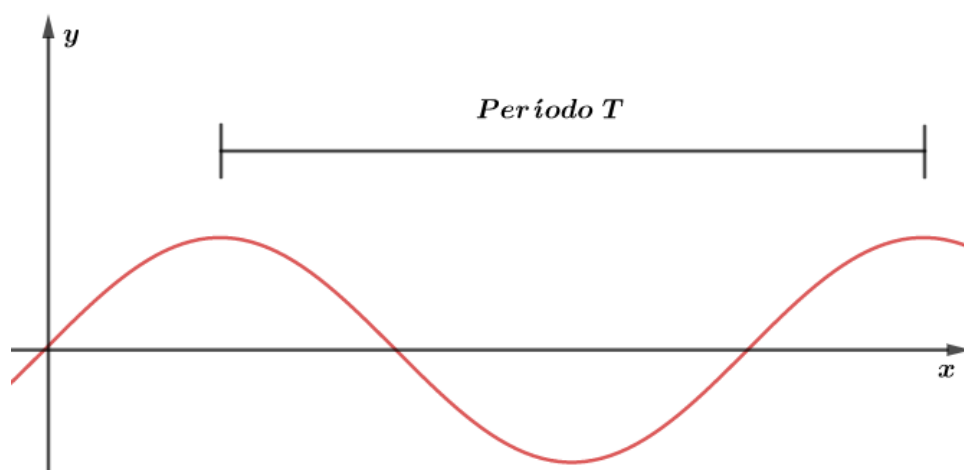


Figura 35: Representação de um tipo de movimento periódico.

No primeiro ano do ITA ou do IME, você verá que todo movimento periódico pode ser escrito como uma soma de senos e cossenos. Essa é a famosa Série de Fourier Trigonométrica. Neste momento, apenas aceitaremos esse fato.

### 3.5. Movimento harmônico simples (MHS)

Trata-se de um movimento periódico composto por uma única frequência.

Se observarmos a figura 23, verificamos que ela pode ser escrita da forma:

$$y(x) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot x + \varphi_0)$$

Em que:

- $A$  é a amplitude do movimento;
- $\omega$  é a frequência angular e vale as relações  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ .

Vamos considerar uma partícula  $P$  realizando um movimento oscilatório e retilíneo em torno de um ponto de equilíbrio  $O$ .



Figura 36: Eixo onde é executado um MHS, a partir da posição de equilíbrio  $O$ .

Para que o movimento periódico seja um MHS, a força resultante que age sobre ele deve ser tal que:

$$\vec{F}_{\text{restauradora}} = -k \cdot \vec{x}$$

Chamamos essa força resultante de **força restauradora**, pois como característica do movimento ela sempre está orientada para a posição de equilíbrio do sistema, buscando restaurar a posição inicial do móvel antes da perturbação que gerou o movimento oscilatório.

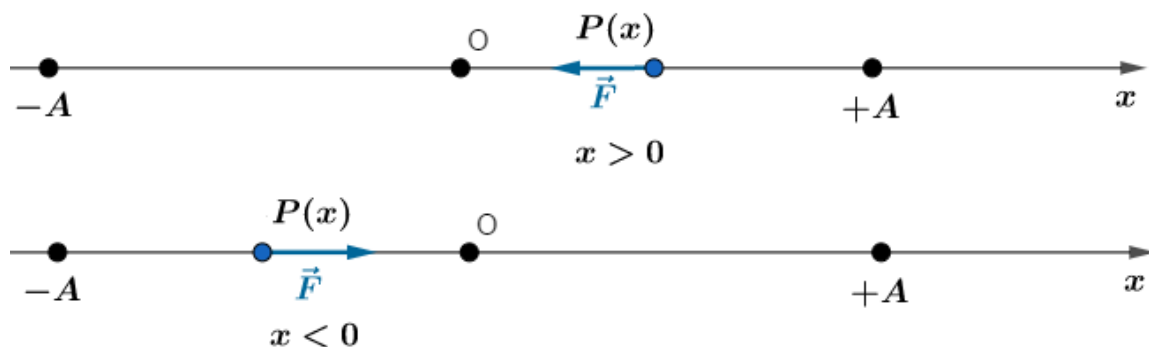


Figura 37: Força restauradora em um MHS.

O período de um MHS pode ser calculado pela seguinte equação:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Em que  $k$  é a constante elástica da força restauradora que depende do tipo de oscilador harmônico, também chamada de constante do MHS e  $m$  é massa do oscilador harmônico.

Exemplo de MHS aplicado a cargas elétricas:

Considere duas cargas elétricas  $+Q$ , distante uma da outra de  $2d$ . Uma terceira carga de massa  $m$  é colocada no ponto médio das duas anteriores e possui carga  $+q$ . Em um dado momento, desloca-se a carga  $+q$  de  $x$  metros para a direita:

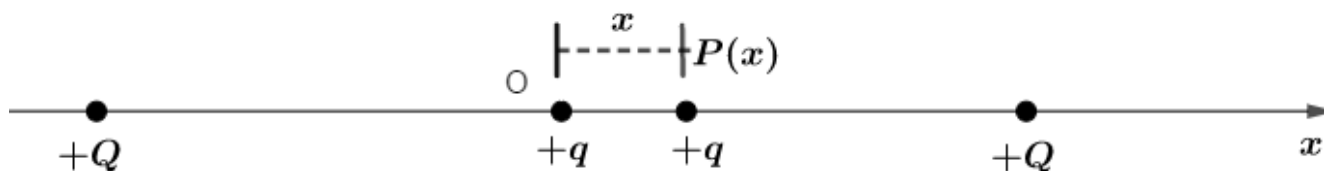


Figura 38: Carga  $+q$  sendo deslocada de  $x$  metros da posição de equilíbrio  $O$ .

Dado que  $x$  é muito pequeno ( $x \ll d$ ), pode-se considerar que a carga  $+q$  irá realizar um MHS? Se sim, qual o período desse movimento? Considere que as partículas podem apenas se moverem no segmento orientado  $x$ .

Para responder a essas perguntas vamos escrever as forças que agem em  $+q$  quando está fora da posição de equilíbrio:

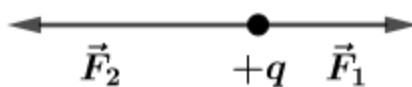


Figura 39: Forças atuando na carga deslocada da posição de equilíbrio.

Em que:

$$F_1 = \frac{kQq}{(d+x)^2} \text{ e } F_2 = \frac{kQq}{(d-x)^2}$$

Note que  $F_2 > F_1$ , por causa das distâncias.

Podemos escrever a força resultante (respeitando a orientação do problema) em  $+q$  da seguinte forma:

$$F_r = F_1 - F_2 = -KQq \left( \frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right)$$

$$F_r = -\frac{KQq[(d+x)^2 - (d-x)^2]}{[(d-x)(d+x)]^2}$$

$$F_r = -\frac{KQq}{(d^2 - x^2)^2} (4dx)$$

Se  $x \ll d$  podemos usar a aproximação  $d^2 - x^2 \cong d^2$  (exemplo  $d = 1$  e  $x = 0,1$ , logo  $d^2 - x^2 = 1^2 - 0,1^2 = 0,99 \cong 1$ ). Dessa forma, temos que:

$$F_r = -KQq \cdot \frac{4dx}{d^4}$$

Portanto:

$$F_r = -\frac{4KQq}{d^3} \cdot x$$

$$F_{restauradora} = -k_{MHS} \cdot x$$

Assim, a força resultante é proporcional à distância da perturbação que ela sofreu, ou seja, ela é do tipo restauradora, onde a constante do MHS é  $\frac{4KQq}{d^3}$ .

Então, o período desse MHS é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{4KQq}{d^3}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{md^3}{4KQq}}$$



## 4. Noções bem elementares de Cálculo

Vamos dar uma breve noção de Cálculo Diferencial e Integral. No primeiro do ensino superior, você verá toda demonstração e todo rigor das notações do Cálculo. Aqui, apenas daremos as informações necessárias para você melhor compreender os conceitos da Física e ter mais poder matemático nas mãos.

Para isso, lembre alguns conceitos de funções da matemática. Dizemos que uma função é bijetora quando ela é injetora e sobrejetora. Conhecer bem todas as propriedades e saber trabalhar com funções é fundamental para compreender essa matéria.

O primeiro tem do Cálculo que iremos abordar é o conceito de Limite.

### 4.1. Limite

Dada a função  $f(x)$  definida para  $x \in I - \{a\}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto que contém o número real  $a$ . Chamamos de  $L$  o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$ , escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Exemplo 1:  $f(x) = x^3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$ .

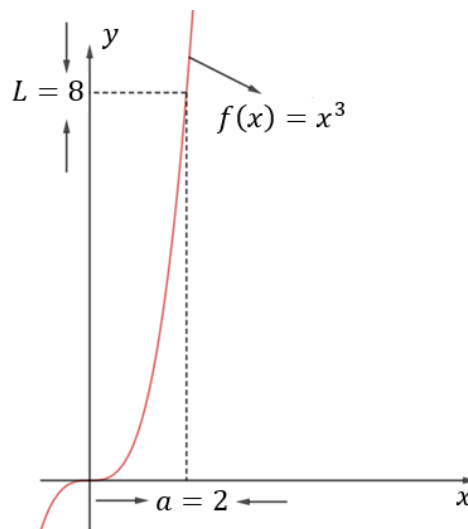


Figura 40: Gráfico da função  $x^3$  utilizada no exemplo 1.

Exemplo 2:  $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{(x - a) (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})}{(x - a) (x^{m-1} + x^{m-2}a + \dots + a^{m-1})} \right]$$

Note que  $x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1}$  tem  $n$  termos e  $x^{m-1} + x^{m-2}a + \dots + a^{m-1}$  tem  $m$  termos, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{n}{m} \cdot a^{n-m}$$

Algumas propriedades do limite:

- **P1) Unicidade do limite:** se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ , então  $L_1 = L_2$ .  
Caso  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  ( $x \rightarrow a^-$  significa  $x$  tendendo a  $a$  pela esquerda) e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$  ( $x \rightarrow a^+$  significa  $x$  tendendo a  $a$  pela direita), com  $L_1 \neq L_2$ , dizemos que não existe o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$ . Exemplo:

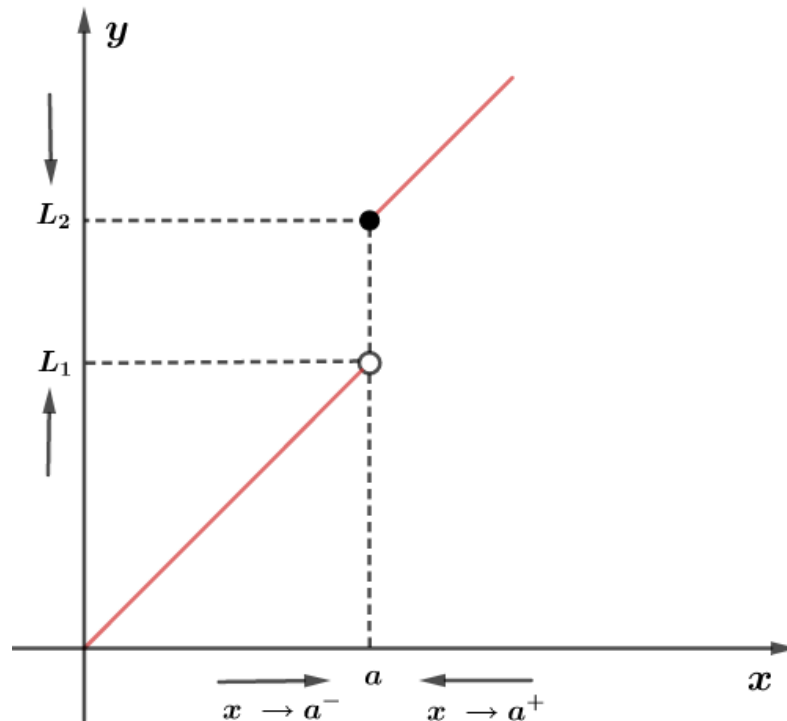


Figura 41: Exemplo de função na qual o limite não existe quando  $x$  tende a  $a$ . Entretanto,  $f(a)$  existe e é igual a  $L_2$ .

- **P2) Limite de uma função constante:** se  $f(x) = c$  definida dos reais nos reais, então  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ .
- **P3)** se  $k \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), então  $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$ .
- **P4)** se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = L \pm M$ .
- **P5)** se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$ .
- **P6)** se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} (f)^n(x) = L^n, n \in \mathbb{N}^*$ .
- **P7)** se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$ .
- **P8)** se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{L}$  com  $L \geq 0$  e  $n \in \mathbb{N}^*$  ou  $L < 0$  e  $n$  ímpar.
- **P9)** o limite de uma função polinomial  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$ , para  $x$  tendendo a  $a$  é igual ao valor numérico de  $f(x)$  para  $x = a$ .

Alguns limites fundamentais:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\text{sen}x - \text{sen}a}{x - a} \right) = \cos(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\text{cos}x - \text{cos}a}{x - a} \right) = -\text{sen}(a)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $a > 0 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - 1}{x} \right) = \ln a.$

Exemplos:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x}$$

se  $y = 2x$  quando  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow 0$  também. Então:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1$ . Logo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x$ :

Fazendo  $y = \frac{x}{3}$ , se  $x \rightarrow \infty$ , então  $y \rightarrow \infty$ , logo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{3y} \right)^{3y} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^3 = e^3.$$

Dada uma função definida em um intervalo aberto  $I$  e  $a$  um elemento de  $I$ , dizemos que  $f$  é contínua em  $a$ , quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Nosso objetivo não é sabermos tudo de limite, mas apenas ter uma noção. Por isso, não vamos nos estender muito nesse assunto.

## 4.2. Derivadas

Dada  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $I$  e  $x_0$  um elemento de  $I$ . Denota-se derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este limite existe e for finito.

Comumente, indicamos a derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  com as seguintes notações:

$$f'(x_0) \text{ ou } \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} \text{ ou } Df(x_0)$$

Chamamos a diferença  $\Delta x = x - x_0$  de **acrécimo** ou **incremento da variável  $x$**  relativamente ao ponto  $x_0$ . Da mesma forma, chamamos de **acrécimo** ou **incremento da função  $f$**  relativamente ao ponto  $x_0$ .

Denotamos por **razão incremental de  $f$**  relativamente ao ponto  $x_0$  o quociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

É comum indicar a derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  das seguintes maneiras:



$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

#### 4.2.1. Representação geométrica da derivada

Dada  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $I$  e  $x_0$  um elemento de  $I$ . Vamos admitir que  $f$  é derivada no intervalo aberto  $I$ , isto é, existe  $f'(x_0)$  para todo  $x_0 \in I$ .

Podemos representar graficamente por:

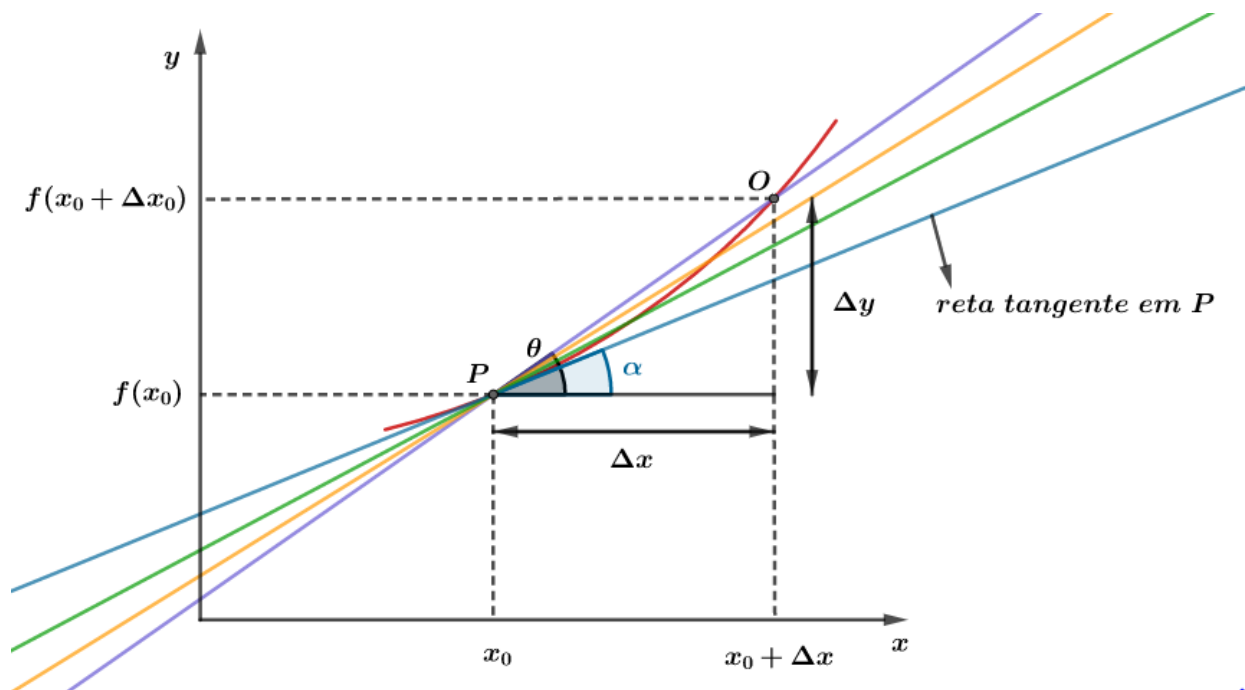


Figura 42: Interpretação geométrica da derivada de uma função em um dado ponto.

Note que a reta secante em vermelho possui coeficiente angular  $tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Logo,  $tg\theta$  é a razão incremental de  $f$  em relação ao ponto  $x_0$ .

Desde que  $f$  é contínua em  $I$ , à medida que vamos caminhando com  $O$  as retas secantes se aproximam cada vez mais da reta tangente à curva no ponto  $P$ . No limite teremos que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_0} = tg\alpha$$

Chamamos  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_0}$  de variação instantânea relativamente ao ponto  $x_0$ .

Algumas derivadas elementares:

- $f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- $f(x) = \text{sen}x \Rightarrow f'(x) = \text{cos}x$
- $f(x) = \text{cos}x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}x$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$ , quando  $a = e$  ( $e$  é o número de Euler), então  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \ln e = e^x \cdot 1 \therefore \boxed{f'(x) = e^x}$



- $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Algumas regras de derivação importantes. Vamos considerar duas funções  $u(x)$  e  $v(x)$  deriváveis em um intervalo aberto. Temos as seguintes regras:

- **Derivada da soma:** se  $f(x) = u(x) + v(x)$ , então:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$$

- **Derivada do produto:** se  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ , então:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

- **Derivada da função multiplicada por uma constante:** se  $f(x) = k \cdot u(x)$ , então:

$$\boxed{f'(x) = k \cdot u'(x)}$$

- **Derivada do quociente:** se  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ , com  $v(x) \neq 0$  em  $I$ , então:

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

- **Derivada de uma função composta (regra da cadeia):**

$$\boxed{F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Exemplo 1:  $F(x) = \cos(2x)$ . Definindo as funções que estabelece a composição das funções, temos:

$$f(x) = 2x \text{ e } g(x) = \cos(x), \text{ logo:}$$

$$f'(x) = 2 \text{ e } g'(x) = -\text{sen}(x)$$

Se  $F(x) = g(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos(2x)$ , então:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$F'(x) = -\text{sen}(f(x)) \cdot 2$$

$$\boxed{F'(x) = -\text{sen}(2x) \cdot 2}$$

Essa regra é bem utilizada no estudo de MHS que faremos futuramente. Claro que daremos todo tratamento de MHS, não sendo nosso foco fazer um curso de Física apoiado no Cálculo. Estamos aprendendo uma noção de Cálculo apenas para melhorar alguns entendimentos em determinados assuntos.

Exemplo 2:  $F(x) = \cos^3 x$ . Definindo as funções que estabelece a composição das funções, temos:

$$f(x) = \cos(x) \text{ e } g(x) = [x]^3$$

Então:

$$f'(x) = -\text{sen}(x) \text{ e } g'(x) = 3 \cdot x^2$$

Se  $F(x) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = \cos^3 x$ , então:



$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3 \cdot [f(x)]^2 \cdot (-\text{sen}(x))$$

$$F'(x) = 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\text{sen}(x))$$

$$F'(x) = -3 \cdot \cos^2(x) \cdot \text{sen}(x)$$

ATENÇÃO  
DECORE!



#### 4.2.2. Determinação de máximos e mínimos

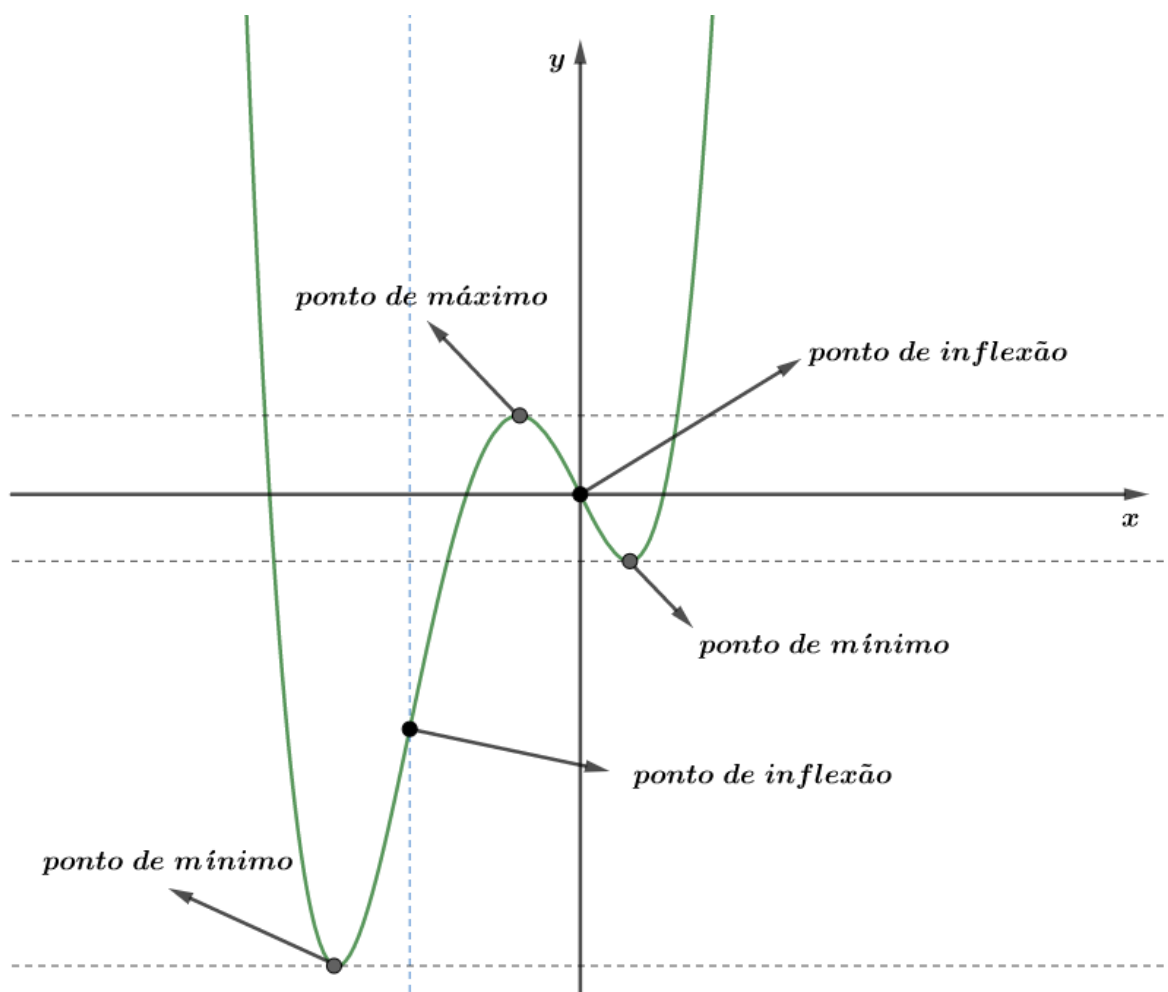
Dada uma função  $f$  uma função contínua e derivável até  $f''$  em um dado intervalo  $I$ . Se  $f'(x_0) = 0$ , então:

- $x_0$  é **ponto de máximo local** quando:  $f''(x_0) < 0$ .
- $x_0$  é **ponto de mínimo local** quando:  $f''(x_0) > 0$ .

Se  $f$  admite  $f'''$  (derivada até a terceira ordem), então:

- $x_0$  é **ponto de inflexão** se:  $f''(x_0) = 0$  e  $f'''(x_0) \neq 0$ .

Exemplo graficamente da função  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x$ .



### 4.3. Noções de Cálculo Integral

A necessidade de criar o Cálculo Integral surgiu com a necessidade de calcular áreas de figuras onde os contornos não eram linhas retas.

Para introduzirmos a ideia da integral, vamos admitir conhecida a área de um retângulo definido por uma função constante  $f(x) = h$  tal que  $h > 0$ , então:

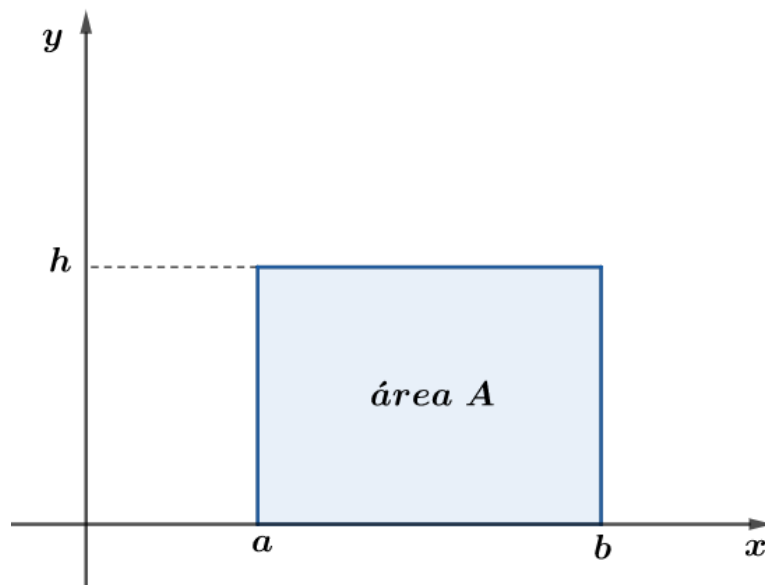


Figura 43: Área de um retângulo.

Assim, temos que a área desejada vale  $A = h \cdot (b - a)$ .

Contudo, caso a  $f(x)$  não fosse constante, um caminho para procurarmos o valor da área abaixo da curva no intervalo  $[a, b]$  seria dividirmos o intervalo em subintervalos suficientemente pequenos de tal maneira que podemos considerar neles  $f(x)$  constantes, fazendo uma boa aproximação.

Podemos aplicar essa ideia da seguinte forma:

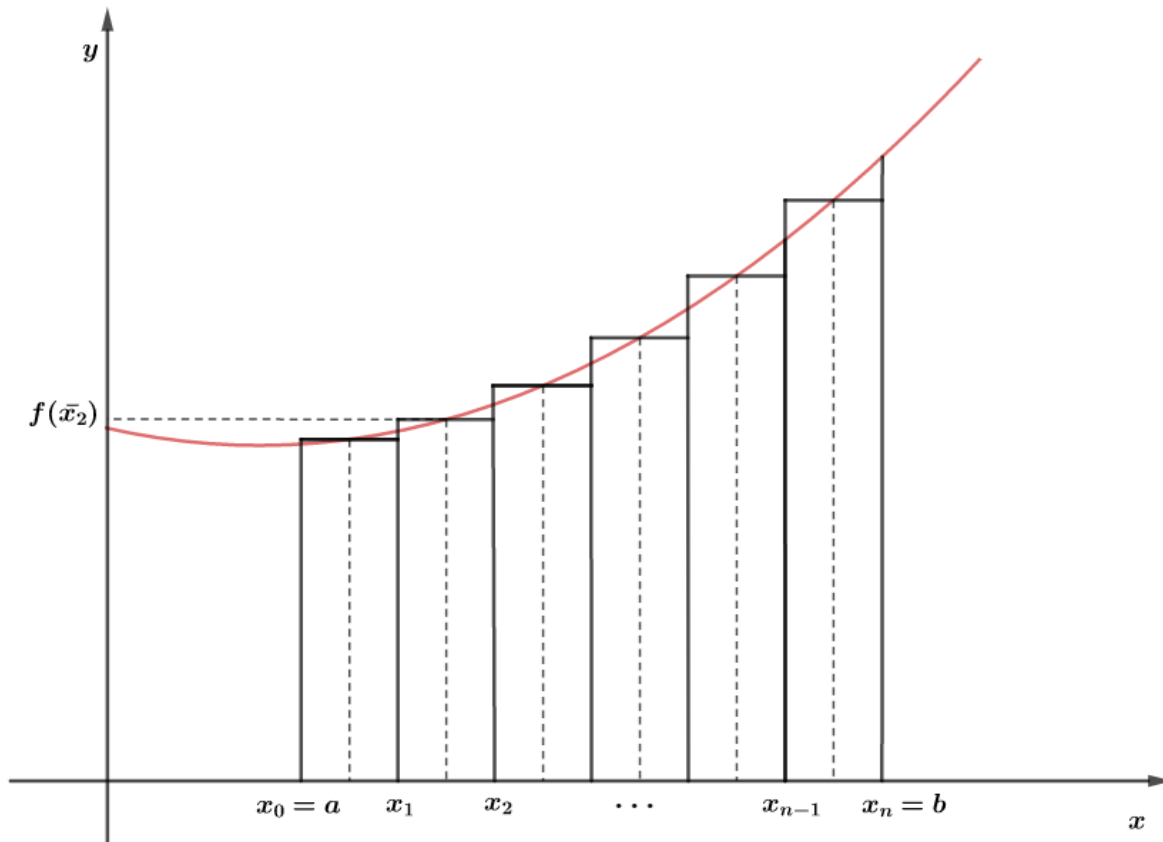


Figura 44: Área abaixo da curva de  $a$  até  $b$ , sendo aproximada pela soma de  $n$  áreas de retângulos.

Note que ao dividir  $[a, b]$  em subintervalos, temos as seguintes condições:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Observe que os  $n$  subintervalos possuem comprimento de  $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Tomando  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$  e admitindo  $f(x)$  constante e igual a  $f(\bar{x}_i)$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , então temos que a área de cada retângulo pequenino é dada por:

$$f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x$$

Assim, podemos aproximar a área delimitada pela curva pela soma desses retângulos pequeninos:

$$A \cong f(\bar{x}_1) \cdot \Delta_1 x + f(\bar{x}_2) \cdot \Delta_2 x + \dots + f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x + \dots + f(\bar{x}_n) \cdot \Delta_n x$$

De outra forma, podemos representar essa soma por uma notação mais enxuta:

$$A \cong \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x$$

Analisando essa equação, cada vez que dividimos nosso intervalo  $[a, b]$  em mais retângulos, estamos aproximando a soma das áreas dos retângulos à área desejada. Dessa forma, quando pegamos intervalos  $(\Delta_i x)$  tão pequenos quanto desejamos, a soma das pequenas áreas deixar de ser chamada de somatórios discretos e passa ser chamada de integral de  $f$  em  $[a, b]$  e representado por  $\int_a^b f(x) dx$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x$$

Em muitas situações na física, somos levados a reproduzir o pensamento trabalhado acima, isto é, somos induzidos a um **processo de integração**.

Nosso objetivo aqui não é dar um curso completo de Cálculo, apenas dar um suporte para melhor entender algumas definições e conceitos da Física. Por isso, vamos apresentar alguns resultados úteis para nosso curso.

**Teorema Fundamenta do Cálculo:** se  $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ , então  $A'(x) = f(x)$  (ou  $f(x) = \frac{dA(x)}{dx}$ ).

De modo geral, dizemos que a integral é indefinida quando fazemos apenas o processo de antiderivação, isto é, não definimos seu valor numérico para um intervalo fechado.

Exemplo:

$$f(x) = \frac{x^5}{5} + 2 \text{ e } g(x) = x^4$$

Note que ao fazer temos:

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{x^{5-1}}{5} = x^4 = g(x)$$

Isto mostra que:

$$f'(x) = g(x)$$

Chamamos  $f$  de **primitiva** de  $g$  ou de **integral indefinida** de  $g$ .

Entretanto, quando vamos fazer  $\int x^4 dx$ , devemos levar em consideração uma possível constante que existia e se perdeu no processo de derivação:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Essa constante  $C$  será encontrada de acordo com alguma informação do problema.

Assim, quando estamos procurando a primitiva  $F(x)$  devemos buscar a função tal que  $F'(x) = f(x)$ .

Algumas integrais indefinidas conhecidas:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$
- $\int \cos(ax) = \frac{\text{sen}(ax)}{a} + C$
- $\int \text{sen}(ax) = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$
- $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

Por outro lado, para integral definida temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo:  $\int_0^2 x^3 dx$  ?

Vamos pensar inicialmente na primitiva:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Como os limites de integração são  $[0,4]$ , então temos que:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} + C\right) - \left(\frac{0^4}{4} + C\right) = 4.$$

Para o cálculo da integral indefinida, não interessa quem é a constante C pois ela será cancelada ao efetuar  $F(b) - F(a)$ .





## 5. Lista de noções de Cálculo

1.

Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 5x + 6)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{3x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$

2.

Determine a equação da reta tangente à curva  $y = x^2 - 2x$  no seu ponto de abscissa  $x = -2$ .

3.

Um ponto material se move sobre uma reta com velocidade descrita por  $v = \sqrt[3]{2t}$  (SI), no instante de tempo  $t$ . Determine a aceleração do ponto no instante  $t = 3$  s.

4.

Encontre a reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \text{sen}(x)$ , para  $x = \frac{\pi}{3}$ .

5.

Um ponto material movendo sobre uma linha reta de acordo com a equação horária  $s(t) = 2\cos(3t)$  (SI). Determine a velocidade no instante  $t = \frac{\pi}{3}$  s e a aceleração no instante  $t = \frac{\pi}{3}$  s.

6.

Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada de cada uma das funções:

a)  $f(x) = \text{sen}^n(x), n \in \mathbb{N}^*$

b)  $f(x) = \text{sen}^4 4x$

c)  $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$

d)  $f(x) = \log_2 x$

e) a derivada da inversa da função  $f(x) = x^3 + x$ , no ponto  $x_1 = 1$ .

7.



Calcule os pontos de máximos, de mínimos e de inflexão da função  $f(x) = 2x^3 - 8x$ .

**8.**

Calcule as integrais indefinidas:

a)  $\int (x^3 + \cos x) dx$

b)  $\int (3\text{sen}x + 4\text{cos}x) dx$

c)  $\int \frac{(x^2-1)}{x^2} dx$

**9.**

Calcule  $\int_0^{2\pi} \text{sen}x dx$ .

**10.**

Calcule a região entre as curvas  $y = x^2$  e  $y = -x^2 + 6x$



GABARITO



## 6. Gabarito sem comentários

1) a) 12 b)  $-2$  c)  $-3/5$  d)  $\cos a$  e)  $e^2$

2)  $y = -6x - 4$

3)  $0,20 \text{ m/s}^2$

4)  $y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

5) 0 e  $18 \text{ m/s}^2$

6) a)  $n \cdot \text{sen}^{n-1}(x) \cdot \cos x$  b)  $16 \cdot \text{sen}^3(4x) \cdot \cos 4x$  c)  $-\text{sen}(x) \cdot \cos(\cos(x))$  d)  $\frac{1}{x \cdot \ln 2}$  e)  $\frac{1}{4}$

7) máximos locais:  $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$  e  $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ ; mínimos locais  $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$  e  $f\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ ; ponto de inflexão (0,0).

8) a)  $\frac{x^4}{4} + \text{sen}(x) + C$ ; b)  $-3 \cos x + 4 \text{sen } x + C$ ; c)  $x + \frac{1}{x} + C$

9) 0

10) 9 u. a.



ESCLARECENDO!



## 7. Lista noções de Cálculo comentada

1.

Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 5x + 6)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{3x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}x - \text{sena}}{x - a}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

### Comentários:

a) utilizando a propriedade do limite para função polinomial ( $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$ ), temos que o limite será dado pelo  $f(2)$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 12$$

b) utilizando a propriedade do limite do quociente de duas funções ( $f(x) = x^2 - 2x + 3$  e  $g(x) = 2x - 3$ ), temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3} = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

c) semelhante ao item b), temos o quociente de duas funções  $f(x) = x^2 - x + 1$  e  $g(x) = 3x - 2$ . Assim, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{3x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x + 1}{\lim_{x \rightarrow -1} 3x - 2} = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

d) utilizando a transformação trigonométrica de soma em produtos, temos que:

$$\text{sen}x - \text{sena} = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x - a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + a}{2}\right)$$

Assim, podemos reescrever o limite da seguinte forma:



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left[ 2 \cdot \text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) \right]}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \left( \frac{x+a}{2} \right)$$

Lembrando do limite trigonométrico fundamental  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$ , podemos utilizar a propriedade do limite do produto de duas funções:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) = 1 \cdot \cos a = \cos a$$

e) vamos manipular algebricamente a função da qual queremos conhecer o limite quando  $x$  tende ao mais infinito até chegarmos em algo que remete ao limite exponencial fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{e}{\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{-x} \right)^{-x} \right)^{-1}} = \frac{e}{\frac{1}{e}} = e^2$$

**Gabarito: a) 12 b) -2 c) -3/5 d)  $\cos a$  e)  $e^2$**

## 2.

Determine a equação da reta tangente à curva  $y = x^2 - 2x$  no seu ponto de abscissa  $x = -2$ .

### Comentários:

De acordo com a interpretação geométrica da derivada, sabemos que a derivada é a reta tangente no ponto e que o coeficiente angular dessa reta é o valor da derivada nesse ponto. Logo, temos que:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2$$

Para  $x = -2$ , temos que:

$$y' = 2(-2) - 2 = -6$$

Da geometria analítica, a equação da reta pode ser dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Quando  $x = -2$  temos  $y = 8$ , então:

$$y - 8 = -6(x - (-2))$$

$$\therefore \boxed{y = -6x - 4}$$

**Gabarito:  $y = -6x - 4$**

## 3.

Um ponto material se move sobre uma reta com velocidade descrita por  $v = \sqrt[3]{2t}$  (SI), no instante de tempo  $t$ . Determine a aceleração do ponto no instante  $t = 3$  s.



### Comentários:

Sabemos da cinemática que  $a = \frac{dv}{dt}$ . Portanto, basta derivarmos a função da velocidade em relação ao tempo e aplicarmos ao ponto de interesse:

$$v = \sqrt[3]{2t} = (2t)^{1/3} \Rightarrow v' = \frac{1}{3}(2t)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2)$$

Note que não podemos esquecer da regra da cadeia, já que estamos derivando  $2t$  e não apenas  $t$ .

$$a(t) = v'(t) = \frac{2}{3}(2t)^{-\frac{2}{3}}$$

$$a(3) = \frac{2}{3}(2 \cdot 3)^{-2/3}$$

$$a(3) = 0,20 \text{ m/s}^2$$

**Gabarito: 0,20 m/s<sup>2</sup>**

---

4.

Encontre a reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \text{sen}(x)$ , para  $x = \frac{\pi}{3}$ .

### Comentários:

Calculando a derivada da função  $f$  temos que:

$$f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

Para  $x = \frac{\pi}{3}$  temos  $y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ . Portanto, a equação da reta é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$

**Gabarito:  $y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$**

---

5.

Um ponto material movendo sobre uma linha reta de acordo com a equação horária  $s(t) = 2\cos(3t)$  (SI). Determine a velocidade no instante  $t = \frac{\pi}{3}$  s e a aceleração no instante  $t = \frac{\pi}{3}$  s.

### Comentários:

De acordo com a cinemática, sabemos que:



$$v = \frac{ds}{dt} \text{ e } a = \frac{dv}{dt}$$

Portanto, devemos calcular as funções derivadas da equação horária do móvel:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot (-\text{sen}(3t)) \cdot 3$$

Note que devemos usar a regra da cadeia, já que se trata de uma composição de funções.

$$\boxed{v(t) = -6 \cdot \text{sen}(3t)}$$

Para  $t = \frac{\pi}{3}$  s, temos que:

$$v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot \text{sen}(\pi) = -6 \cdot 0 = 0$$

A equação horária da aceleração é dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 \cdot (\cos(3t)) \cdot 3$$
$$a(t) = -18 \cdot \cos(3t)$$

Para  $t = \frac{\pi}{3}$  s, temos:

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -18 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -18 \cdot \cos(\pi) = -18 \cdot (-1) = 18 \text{ m/s}^2$$

**Gabarito: 0 e 18 m/s<sup>2</sup>**

6.

Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada de cada uma das funções:

a)  $f(x) = \text{sen}^n(x), n \in \mathbb{N}^*$

b)  $f(x) = \text{sen}^4 4x$

c)  $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$

d)  $f(x) = \log_2 x$

e) a derivada da inversa da função  $f(x) = x^3 + x$ , no ponto  $x_1 = 1$ .

**Comentários:**

a) Utilizando as regras de derivação, temos que:

$$g(x) = \text{sen}(x) \text{ e } h(x) = x^n$$
$$g'(x) = \cos x \text{ e } h'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Note que  $f(x) = h(g(x))$ . Pela regra da cadeia, temos:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = n \cdot \text{sen}^{n-1}(x) \cdot \cos x$$

A partir de agora utilizaremos a regra da cadeia direto, tendo em mente que derivamos a função como se não houvesse composição e multiplica pela derivada da função que está dentro da composição e assim sucessivamente.

b)  $f(x) = \text{sen}^4 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \text{sen}^3 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = 16 \cdot \text{sen}^3(4x) \cdot \cos 4x$

c)  $f(x) = \text{sen}(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot (-\text{sen}(x)) = -\text{sen}(x) \cdot \cos(\cos(x))$



d)  $f(x) = \log_2 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

e)  $y = x^3 + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 1}$

Para  $x_1 = 1$ , temos que:

$$\left[ \frac{dx}{dy} \right]_{x=x_1} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

**Gabarito:** a)  $n \cdot \operatorname{sen}^{n-1}(x) \cdot \cos x$  b)  $16 \cdot \operatorname{sen}^3(4x) \cdot \cos 4x$  c)  $-\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(\cos(x))$  d)  $\frac{1}{x \cdot \ln 2}$  e)  $\frac{1}{4}$

---

7.

Calcule os pontos de máximos, de mínimos e de inflexão da função  $f(x) = 2x^3 - 8x$ .

**Comentários:**

Para os máximos, temos que:

$$f'(x) = 0 \text{ e } f''(x) < 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$f''(x) = 12x$$

Para  $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$  temos que  $f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0$ . Portanto, em  $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$  temos um máximo local.

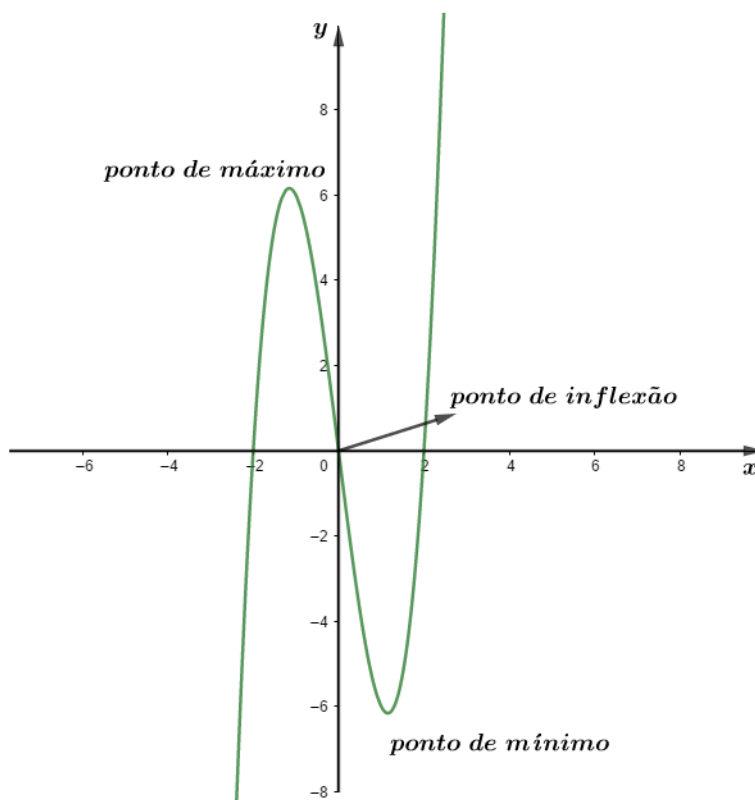
Para  $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$  temos que  $f''\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right) > 0$ . Portanto, em  $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$  temos um mínimo local.

Para acharmos o ponto de inflexão, devemos ter que:

$$f''(x) = 0 \text{ e } f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = 12 \neq 0$$



**Gabarito:** máximos locais:  $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$  e  $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ ; mínimos locais  $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$  e  $f\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ ; ponto de inflexão  $(0, 0)$ .

8.

Calcule as integrais indefinidas:

a)  $\int (x^3 + \cos x) dx$

b)  $\int (3\text{sen}x + 4\text{cos}x) dx$

c)  $\int \frac{(x^2-1)}{x^2} dx$

**Comentários:**

a)  $\int (x^3 + \cos x) dx = \int x^3 dx + \int \cos x dx = \frac{x^4}{4} + C_1 + \text{sen}(x) + C_2 = \frac{x^4}{4} + \text{sen}(x) + C$

b)  $\int (3\text{sen}x + 4\text{cos}x) dx = \int (3\text{sen}x) dx + \int (4\text{cos}x) dx = 3 \int \text{sen}x dx + 4 \int \text{cos}x dx = -3 \cos x + 4 \text{sen} x + C$

c)  $\int \frac{(x^2-1)}{x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int 1 \cdot dx - \int \frac{1}{x^2} dx = x + C_1 - (-x^{-1}) + C_2 = x + \frac{1}{x} + C$

**Gabarito:** a)  $\frac{x^4}{4} + \text{sen}(x) + C$ ; b)  $-3 \cos x + 4 \text{sen} x + C$ ; c)  $x + \frac{1}{x} + C$

9.

Calcule  $\int_0^{2\pi} \text{sen} x \, dx$ .

### Comentários:

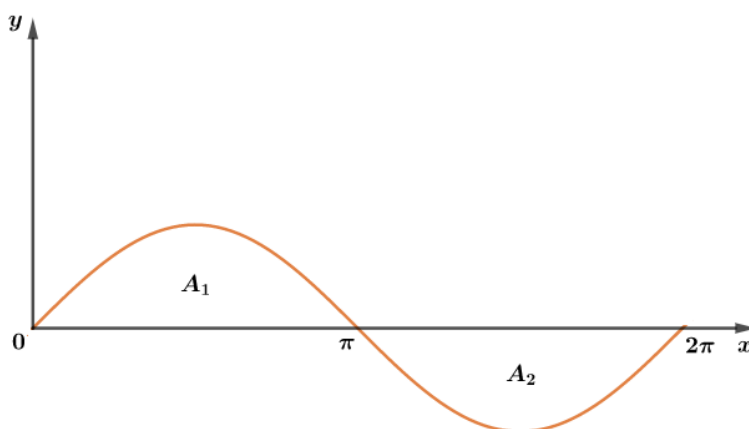
Podemos escrever a primitiva de  $\text{sen } x$  da seguinte forma:

$$\int (\text{sen} x) dx = -\cos x$$

Portanto:

$$\int_0^{2\pi} (\text{sen} x) dx = (\cos x)|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

Quando fazemos o gráfico da função  $\text{sen}(x)$ , temos que a área do gráfico é a mesma na parte de cima e na parte de baixo do eixo  $x$ :



Se dividirmos em dois intervalos de integração,  $[0, \pi]$  e  $[\pi, 2\pi]$ , temos:

$$A_1 = \int_0^{\pi} (\text{sen} x) dx = \cos(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (\text{sen} x) dx = \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

Dessa forma, temos que a área de 0 a  $2\pi$  é  $A_1 + A_2 = 0$ .

Generalizando o resultado, se  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$  e  $f(x) \leq 0$  em  $[b, c]$ , então:

$$\int_a^c f(x) dx = A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2$$

Além disso, temos o seguinte resultado: se a função é **ímpar** e contínua no intervalo  $[-x_0, x_0]$ , então:

$$\int_{-x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

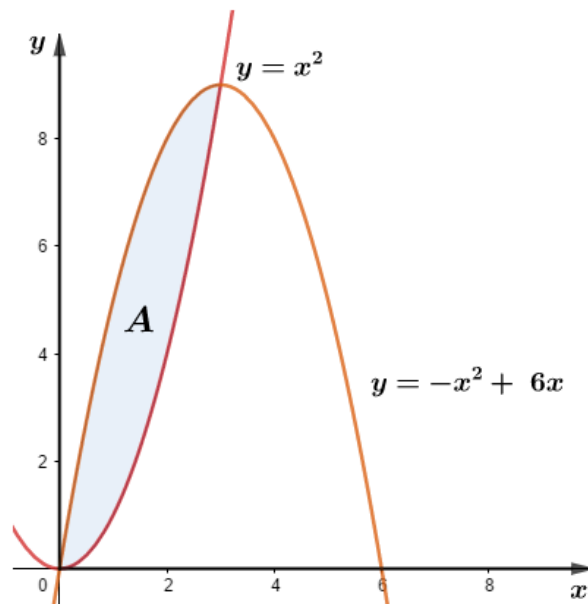


10.

Calcule a região entre as curvas  $y = x^2$  e  $y = -x^2 + 6x$

**Comentários:**

Graficamente, temos a área desejada:



O ponto de encontro das curvas pode ser encontrado fazendo a intersecção das curvas:

$$x^2 = -x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Logo, nossos limites de integração vão de 0 a 3. Portanto, temos que a área desejada é:

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 6x) dx - \int_0^3 x^2 dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left( -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right) \Big|_0^3 = 9 \text{ u. a.}$$

**Gabarito: 9 u. a.**



## 8. Distribuições de cargas

### 8.1. Distribuições lineares – densidade linear de cargas

Considere um fio com distribuição linear de cargas, define-se **densidade linear de carga**, representado pela letra  $\lambda$ , como a carga por unidade de comprimento. Para um dado segmento de comprimento  $\Delta l$ , confinando uma carga  $\Delta q$ , podemos escrever que:

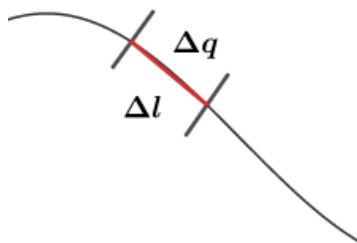


Figura 45: Distribuição de carga linear ao longo de um fio.

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Caso a densidade linear de cargas for constante (distribuição uniforme), podemos calcular da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Podemos escrever a carga total contida nesse fio total como sendo:

$$q = \lambda \cdot l$$

Se estamos querendo saber um elemento de carga em um elemento de fio, podemos dizer que:

$$dq = \lambda \cdot dl$$

### 8.2. Distribuição superficial – densidade superficial de carga

Considere uma superfície com densidade superficial de cargas, define-se **densidade superficial de carga**, representado pela letra  $\sigma$ , como a carga por unidade de área. Para uma dada superfície  $\Delta A$ , confinando uma carga  $\Delta q$ , podemos escrever que:

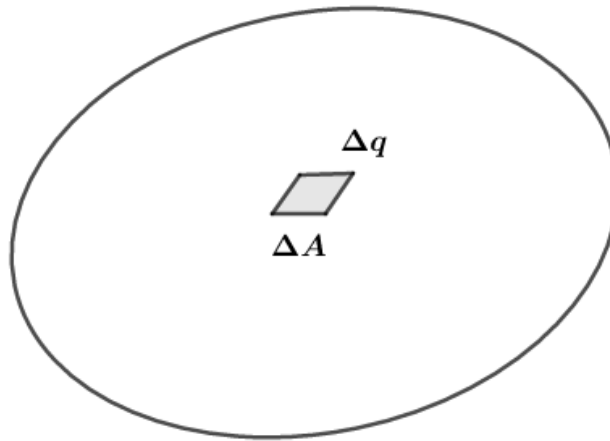


Figura 46: Distribuição de carga superficial ao longo de um plano.

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

Para distribuições uniformes, podemos escrever que:

$$\sigma = \frac{q}{A} = cte$$

Então, podemos escrever a carga total contida na superfície de área total A como sendo:

$$q = \sigma \cdot A$$

Para um elemento de área  $dA$  temos um elemento de carga  $dq$ . Assim, para uma distribuição uniforme, temos que:

$$dq = \sigma \cdot dA$$

### 8.3. Distribuição Volumétrica – densidade volumétrica de carga

Analogamente aos casos anteriores, considere um volume com densidade volumétrica de cargas, define-se **densidade volumétrica de carga**, representado pela letra  $\rho$ , como a carga por unidade de volume. Para um dado volume  $\Delta V$ , confinando uma carga  $\Delta q$ , podemos escrever que:

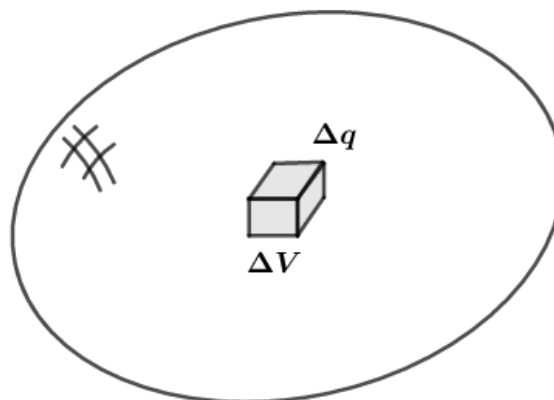


Figura 47: Distribuição de carga ao longo de um volume.

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Para distribuições uniformes, podemos escrever que:

$$\rho = \frac{q}{V} = cte$$

Então, podemos escrever a carga total contida em um volume total  $V$  como sendo:

$$q = \rho \cdot V$$

Para um elemento de volume  $dV$  temos um elemento de carga  $dq$ . Assim, para uma distribuição uniforme, temos que:

$$dq = \rho \cdot dV$$





## 9. Lei de Coulomb aplicada a distribuições contínuas de cargas

Vamos tomar alguns exemplos da Lei de Coulomb aplicada a distribuições contínuas de cargas.

### Exemplo 1

O primeiro exemplo trata-se de um fio com distribuição uniforme de carga  $\lambda$ . Desejamos saber o módulo da força elétrica em uma carga, que está na reta suporte do fio, a uma distância  $d$ .

Para isso, podemos aplicar a Lei de Coulomb para um elemento de carga no fio, da seguinte forma:

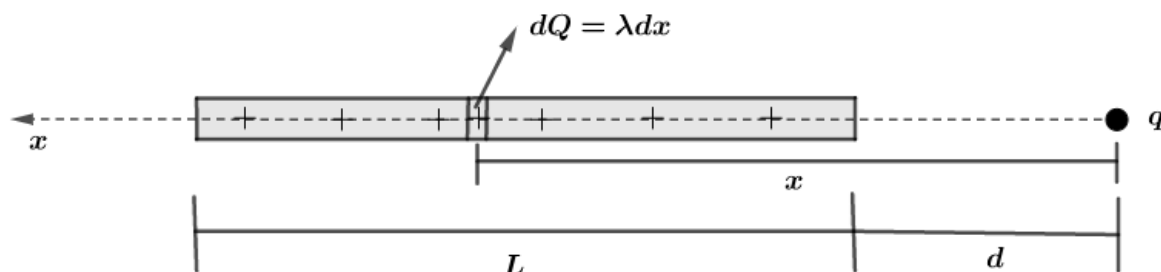


Figura 48: Força entre um fio uniformemente carregado e uma carga  $q$  no prolongamento do fio.

Dado que a distribuição linear de cargas é normal, temos que:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \text{ e } dQ = \lambda \cdot dL$$

Aplicando a Lei de Coulomb, temos:

$$dF = \frac{k \cdot dQ \cdot q}{x^2}$$

$$dF = k \cdot \lambda \cdot q \cdot x^{-2} \cdot dx$$

$$F = \int_d^{d+L} k \cdot \lambda \cdot q \cdot x^{-2} dx$$

$$F = k \cdot \lambda \cdot q \cdot \int_d^{d+L} x^{-2} dx$$

$$F = k \cdot \lambda \cdot q \cdot \left( \frac{x^{-1}}{-1} \right) \Big|_d^{d+L}$$

$$F = k \cdot \lambda \cdot q \cdot \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+L} \right)$$

$$F = k \cdot q \cdot \lambda \cdot \frac{(d+L-d)}{d(d+L)}$$

$$F = k \cdot q \cdot \frac{\lambda \cdot L}{d(d+L)}$$

$$F = \frac{k \cdot q \cdot Q}{d(d+L)}$$

$$F = \frac{k \cdot q \cdot Q}{\left( \sqrt{d(d+L)} \right)^2}$$

Se  $d \gg L$ , então  $1 + \frac{L}{d} \cong 1$  podemos dizer que:

$$F = \frac{k \cdot q \cdot Q}{d(d+L)} = \frac{k \cdot q \cdot Q}{d^2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right)}$$

$$F = \frac{k \cdot q \cdot Q}{d^2}$$

Ou seja, se a carga estiver muito longe do fio, o fio se comporta como uma carga puntiforme.

### Exemplo 2:

Considere um anel de raio  $R$  carregado uniformemente com uma distribuição linear de cargas  $\lambda$ . Desejamos calcular o módulo da força elétrica em uma carga  $+q$  localizada na reta que passa pelo centro do anel e é perpendicular ao plano do anel, situada a uma distância  $L$  do centro do anel.

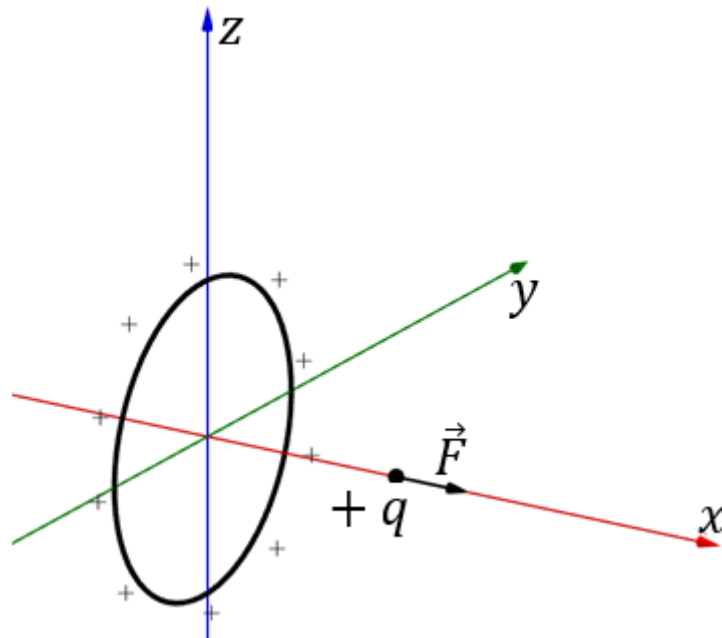


Figura 49: Força entre um anel uniformemente carregado e uma carga ao longo da reta suporte que passa pelo centro do anel e é perpendicular ao plano do anel.

Para isso, podemos aplicar a Lei de Coulomb para um elemento de carga no fio e observar que devido a simetria do problema, a resultante das forças estará na reta suporte da carga, como mostra a figura:

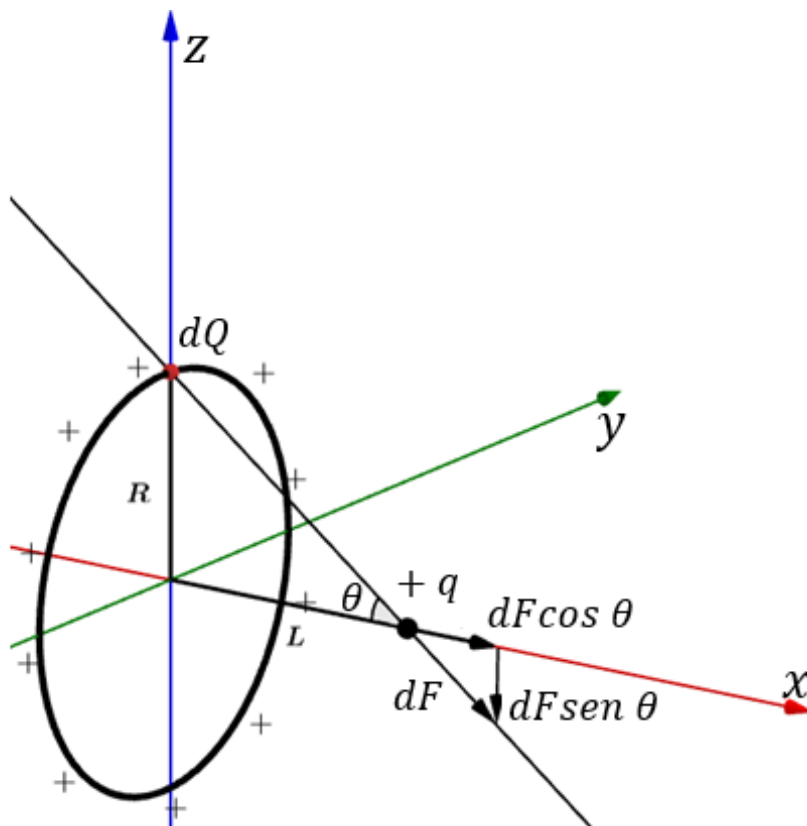


Figura 50: Diagrama de forças entre anel e carga.

Podemos escrever a Lei de Coulomb da seguinte forma:

$$dF = \frac{k \cdot q \cdot dQ}{\left(\sqrt{R^2 + L^2}\right)^2}$$

$$dF = \frac{k \cdot q \cdot \lambda}{R^2 + L^2} \cdot dx$$

$$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

A resultante das forças na carga +q será a soma das decomposições no eixo x, então:

$$dF\cos\theta = \frac{k \cdot q \cdot \lambda}{L^2 + R^2} \cdot \frac{L}{(R^2 + L^2)^{1/2}} dx$$

$$F_{Res} = \int_0^{2\pi R} \frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot L}{(L^2 + R^2)^{3/2}} dx$$

$$F_{Res} = \frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot L}{(L^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} 1 \cdot dx$$

$$F_{res} = \frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi R$$

Mas,  $Q = \lambda \cdot 2\pi R$ , então:

$$F_{res} = \frac{k \cdot q \cdot Q \cdot L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para o caso de  $L \gg R$ , temos  $1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \cong 1$ , logo:

$$F_{res} = \frac{k \cdot q \cdot Q \cdot L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k \cdot q \cdot Q \cdot L}{(L^2)^{3/2} \left[1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$F_{res} \cong \frac{k \cdot q \cdot Q \cdot L}{L^3}$$

$$F_{res} \cong \frac{k \cdot q \cdot Q}{L^2}$$

Novamente, caso a carga  $+q$  estiver muito longe, o anel passa a se comportar como uma carga puntiforme.

Observe a equação:

$$dF \cos\theta = \left[ \frac{k \cdot q \cdot \lambda}{L^2 + R^2} \cdot \frac{L}{(R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \right] dx$$

Todo o termo entre colchetes é constante, então, quando integramos

$$\frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} 1 \cdot dx$$

Estamos apenas contabilizando a soma de cada elemento de comprimento do anel e sabemos que essa soma é o comprimento da circunferência de raio  $R$ . Esse fato mostra que poderíamos ter dado um tratamento com somatórios, dizendo que estamos pegando pequenas cargas no anel e substituiríamos a integral pelo somatório.

Assim, esse problema ganha grande possibilidade de cair na prova do IME, pois não precisa conhecer nada aprofundado com relação ao Cálculo Integral.



### Exemplo 3:



Um disco uniformemente carregado com uma densidade de carga  $\sigma$ , raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$ . Se colocar uma carga elétrica a uma distância  $d$  na reta suporte que passa pelo centro do disco e é perpendicular ao plano do disco, a força entre o disco e a carga terá módulo igual a:

$$F = \frac{q \cdot \sigma}{2\epsilon} \cdot d \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + d^2}} \right)$$

A demonstração deste resultado, eu deixo como desafio para vocês, meus caros alunos!

Quando fazemos  $R_2 \rightarrow +\infty$  e  $R_1 \rightarrow 0$ , o disco de raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$  torna-se uma placa infinita de distribuição uniforme de carga. Assim, força entre a placa infinita e a carga é dada por:

$$F = \frac{q \cdot \sigma}{2\epsilon} \cdot d \cdot \frac{1}{d}$$

$$F = \frac{q \cdot \sigma}{2\epsilon}$$

Esse resultado será muito mais forte para nós quando estudarmos o campo elétrico de uma placa infinita com distribuição uniforme de carga.

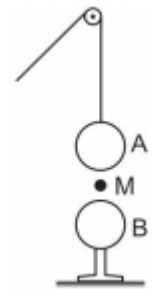


## 10. Lista de questões

### Aquecimento

#### 1. (FUVEST – 1990)

Uma esfera condutora A, de peso  $P$ , eletrizada positivamente é presa a um fio isolante que passa por uma roldana. A esfera se aproxima de B, com velocidade constante, de uma esfera B, idêntica a interior, mas neutra isolada. A esfera A toca em B e, em seguida é puxada para cima, com velocidade também constante.

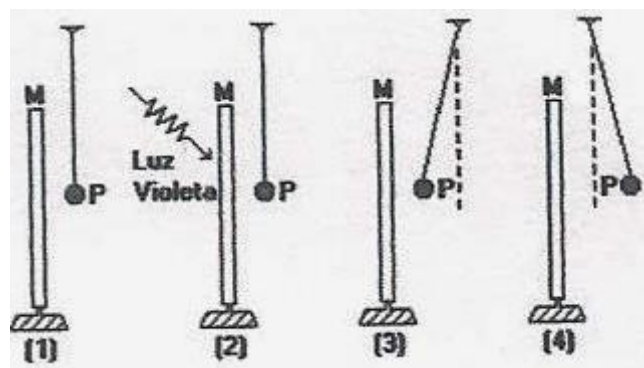


Quando A passa pelo ponto M, a tração no fio é  $T_1$  na descida e  $T_2$  na subida. Podemos afirmar que:

- a)  $T_1 < T_2 < P$
- b)  $T_1 < P < T_2$
- c)  $T_2 < T_1 < P$
- d)  $T_2 < P < T_1$
- e)  $P < T_1 < T_2$

#### 2. (FUVEST – 1993)

Dispõe-se de uma placa metálica M e de uma esferinha metálica P, suspensa por um fio isolante, inicialmente neutras e isoladas. Um feixe de luz violeta é lançado sobre a placa retirando partículas elementares da mesma. As figuras (1) a (4) adiante, ilustram o desenrolar dos fenômenos ocorridos.



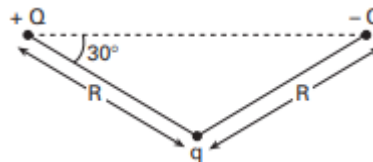
Podemos afirmar que na situação (4):

- a) M e P estão eletrizadas positivamente.
- b) M está negativa e P Neutra.
- c) M está neutra e P positivamente eletrizada
- d) M e P estão eletrizadas negativamente
- e) M e P foram eletrizadas por indução.

### 3. (FUVEST – 1996)

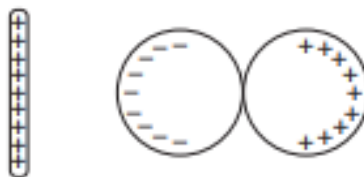
O Módulo  $F$  da força eletrostática entre duas cargas elétricas pontuais  $q_1$  e  $q_2$ , separadas por uma distância  $d$ , é  $F = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$  onde  $k$  é uma constante. Considere as três cargas pontuais representadas adiante por  $+Q$ ,  $-Q$  e  $q$ . o Módulo da força eletrostática total que age sobre a carga  $q$  será?

- a)  $\frac{2kQq}{R^2}$
- b)  $\frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$
- c)  $\frac{kQ^2q}{R^2}$
- d)  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQq}{R^2}$
- e)  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQ^2q}{R^2}$



### 4. (FUVEST - 1996)

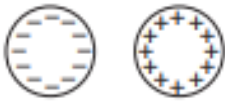
Aproximando-se uma barra eletrizada de duas esferas condutoras, inicialmente descarregadas e encostadas uma na outra, observa-se a distribuição de cargas esquematizada na figura abaixo.



Em seguida, sem tirar do lugar a barra eletrizada, afasta-se um pouco uma esfera da outra. Finalmente, sem mexer mais nas esferas, remove-se a barra, levando-a para muito longe das esferas. Nessa situação final, a figura que melhor representa a distribuição de cargas nas duas esferas é:

- a)

b)



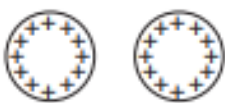
c)



d)

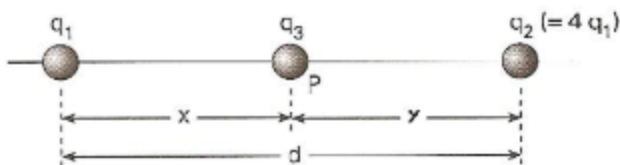


e)



### 5. (FUVEST – 1997)

Duas cargas pontuais positivas  $q_1$  e  $q_2 = 4q_1$  são fixadas a uma distância  $d$  uma da outra. uma terceira carga negativa  $q_3$  é colocada no ponto  $P$   $q_1$  e  $q_2$ , a uma distância  $x$  da carga  $q_1$ , conforme mostra a figura.

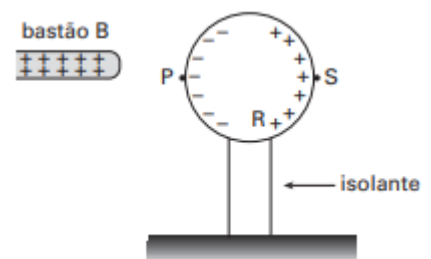


a) Calcule o valor de  $x$  para que a força eletrostática resultante sobre a carga  $q_3$  seja nula.

b) Verifique se existe um valor de  $q_3$  para o qual tanto a carga  $q_1$  como a  $q_2$ , permanecem em equilíbrio, nas posições do item a, sem a necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor  $q_3$ .

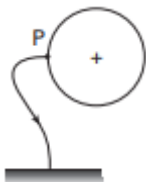
### 6. (FUVEST – 1997)

Quando se aproxima um bastão B, eletrizado positivamente, de uma esfera metálica, isolada e inicialmente descarregada, observa-se a distribuição de cargas representada na Figura 1.

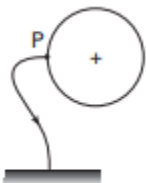


Mantendo o bastão na mesma posição, a esfera é conectada à terra por um fio condutor que pode ser ligado a um dos pontos P, R ou S da superfície da esfera. Indicando por  $(\rightarrow)$  o sentido do fluxo transitório  $(\emptyset)$  de elétrons (se houver) e por (+), (-) ou (0) o sinal da carga final (Q) da esfera, o esquema que representa  $\emptyset$  e Q é

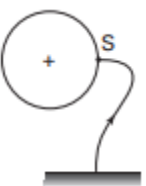
a)



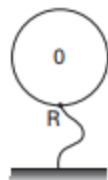
b)



c)



d)

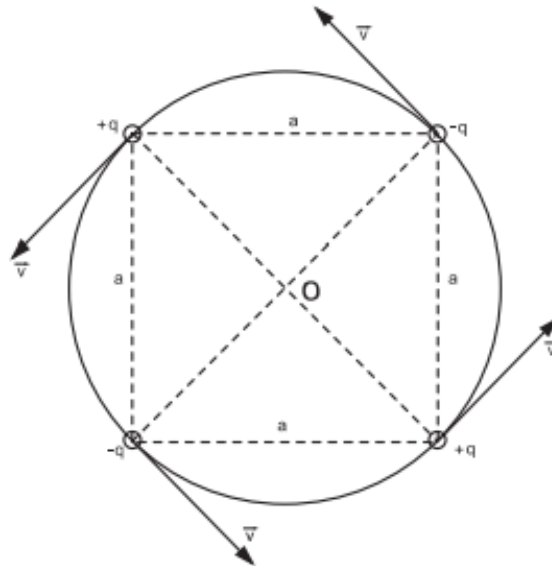


e)



### 7. (FUVEST – 1998)

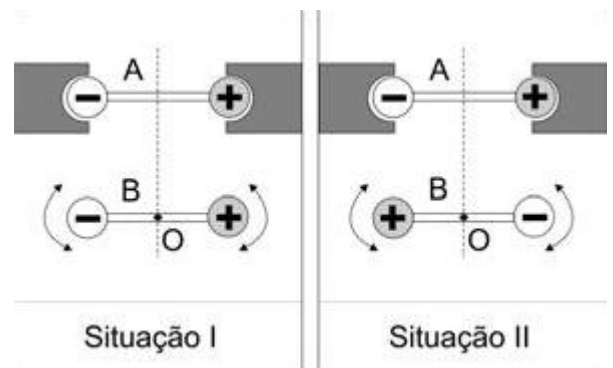
Quatro pequenas esferas de massa  $m$ , estão carregadas com cargas de mesmo valor absoluto  $q$ , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado  $a$  e giram numa trajetória circular de centro  $O$ , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante  $v$ . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação eletrostática. A constante de permissividade elétrica é  $\epsilon_0$ . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.



- a) Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante  $\vec{F}$  que atua em cada esfera e indique sua direção.  
b) Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial  $\vec{v}$  das esferas.

### 8. (FUVEST – 2007)

Duas barras isolantes, A e B, iguais, colocadas sobre uma mesa, têm em suas extremidades, esferas com cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. A barra A é fixa, mas a barra B pode girar livremente em torno de seu centro O, que permanece fixo. Nas situações I e II, a barra B foi colocada em equilíbrio, em posições opostas. Para cada uma dessas duas situações, o equilíbrio da barra B pode ser considerado como sendo, respectivamente,



SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - após o sistema ser levemente deslocado de sua posição inicial.

Estável = tende a retornar ao equilíbrio inicial.

Instável = tende a afastar-se do equilíbrio inicial.

Indiferente = permanece em equilíbrio na nova posição.

- a) indiferente e instável.  
b) instável e instável.  
c) estável e indiferente.  
d) estável e estável.  
e) estável e instável.

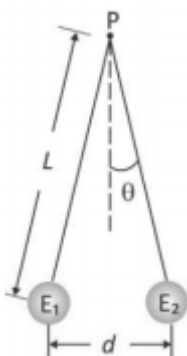
### 9. (FUVEST – 2018)



Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa  $9\text{ g}$ , inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento  $L$ , preso em um ponto fixo  $P$ . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.

a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada ( $E_1$ ) em contato com outra esfera ( $E_2$ ), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento  $L$ , fixo no ponto  $P$ . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo  $d = 8\text{ cm}$ .



Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine:

- b) o módulo da tensão  $\vec{T}$  em um dos fios isolantes;
- c) o módulo da carga  $q_2$  da esfera  $E_2$ ;
- d) a diferença  $N$  entre o número de elétrons e de prótons na esfera  $E_2$  após a eletrização.

**Note e adote:**

Para a situação descrita, utilize:  $\cos\theta \cong 1$  e  $\sin\theta \cong 0,1$ .

Aceleração da gravidade:  $10\text{ m/s}^2$

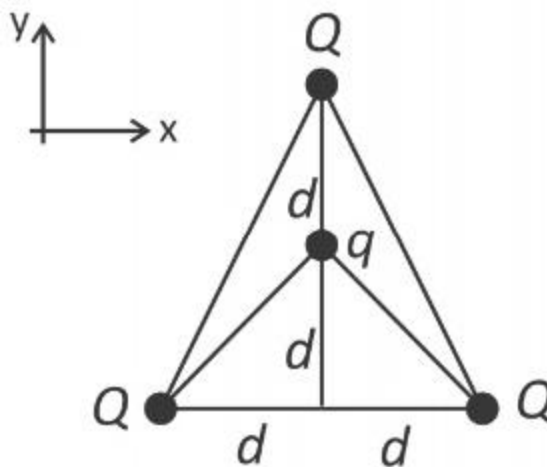
Força elétrica entre duas cargas puntiformes  $Q_1$  e  $Q_2$  distantes  $r$  uma da outra:  $\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$ , onde  $k = 9 \times 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Carga do elétron:  $1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$ .

Ignore a massa dos fios.

**10. (FUVEST – 2019)**

Três pequenas esferas carregadas com carga positiva  $Q$  ocupam os vértices de um triângulo, como mostra a figura. Na parte interna do triângulo, está afixada outra pequena esfera, com carga negativa  $q$ . As distâncias dessa carga às outras três podem ser obtidas a partir da figura.



Sendo  $Q = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$ ,  $q = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$  e  $d = 6 \text{ m}$ , a força elétrica resultante sobre a carga  $q$

**Note e adote:**

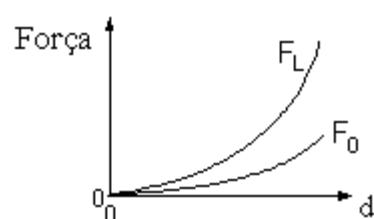
A constante  $k_0$  da Lei de Coulomb vale  $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- é nula.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para baixo e módulo 1,8 N.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para cima e módulo 1,0 N.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para baixo e módulo 1,0 N.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para cima e módulo 0,3 N.

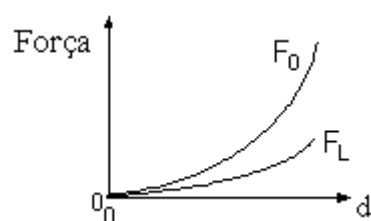
### 11. (UNESP – 1999)

A força elétrica entre duas pequenas partículas carregadas foi medida, em função da distância  $d$  entre elas, em dois meios diferentes, no vácuo e no interior de um líquido isolante. Assinale a alternativa que melhor representa o módulo da força medida no vácuo ( $F_0$ ), comparada com o módulo da força medida no líquido ( $F_L$ ), em função da distância  $d$

a)



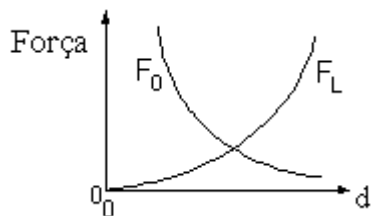
b)



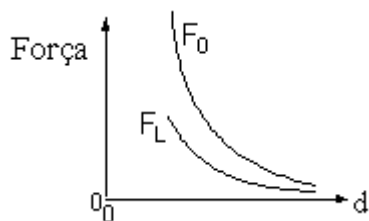
c)



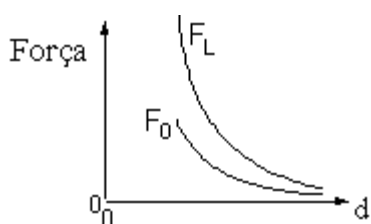




d)



e)



## Treinamento IME

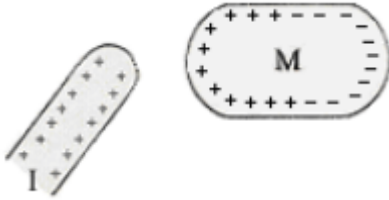
### 12. (ITA-1971)

Um corpo condutor (I) carregado é aproximado de um corpo metálico (M) descarregado. Qual das figuras abaixo dá uma distribuição de cargas induzidas no metal que é consistente com a posição relativa dos corpos (I) e (M)?

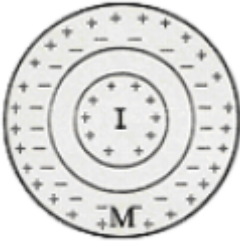
a)



b)

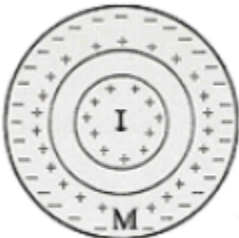


c)



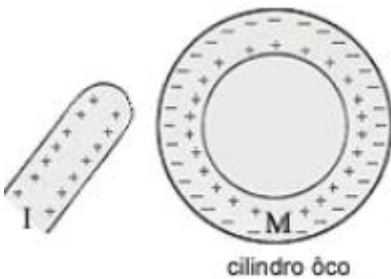
cilindro oco

d)



cilindro oco

e)

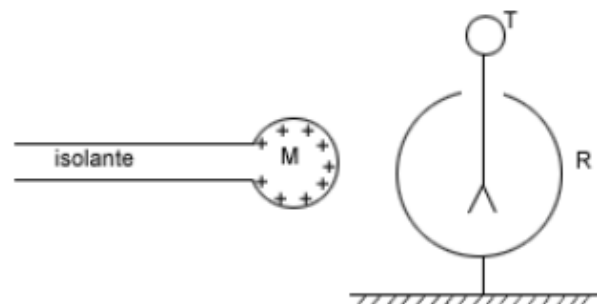


**13.**

Considere  $n$  esferas idênticas em que apenas a primeira esfera está eletrizada com uma carga  $Q$ . As outras estão eletricamente neutras. Determine o valor da carga desta esfera após o contato dela com cada uma das demais esferas.

**14. (ITA-1973)**

Uma esfera metálica (M) é aproximada de um eletroscópio de folhas de alumínio, conforme o esquema abaixo. A carcaça metálica (R) do eletroscópio está em contato elétrico permanente com o solo.



Enquanto a esfera (M) está muito afastada do eletroscópio estabeleceu-se um contato elétrico transitório entre (T) e (R). Qual é a única afirmação correta em relação à experiência em apreço?

- a) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar o terminal (T).
- b) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar a carcaça (R).
- c) As folhas só abrirão se o contato elétrico entre (T) e (R) for mantido permanentemente.
- d) As folhas só abrirão se a carcaça (R) receber uma carga de mesmo valor, mas de sinal oposto ao da esfera (M).
- e) As folhas se abrirão à medida que (M) se aproxima de (T)

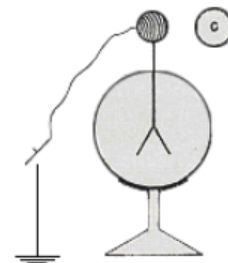
### 15. (ITA-1977)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices A e B de um triângulo retângulo isósceles. Sabe-se que a força elétrica resultante que atua sobre a carga localizada no vértice C do ângulo reto tem a mesma direção da reta AB. Aplicando-se a Lei de Coulomb a esta situação, conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em A e B são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos A e B têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As três cargas são de valores absolutos iguais.
- d) As cargas localizadas nos pontos A e B têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

### 16. (ITA-1983)

O eletroscópio da figura foi carregado positivamente. Aproxima-se então um corpo C carregado negativamente e liga-se o eletroscópio à Terra, por alguns instantes, mantendo-se o corpo C nas proximidades. Desfaz-se a ligação à Terra e a seguir afasta-se C.



No final, a carga do eletroscópio:

- a) Permanece positiva.
- b) Fica nula devido à ligação com a Terra.
- c) Torna-se negativa.

- d) Terá sinal que vai depender da maior ou menor aproximação de C.
- e) Terá sinal que vai depender do valor da carga em C.

### 17. (ITA-1984)

Uma partícula de massa  $m = 10,0 \text{ g}$  e carga  $q = -2,0 \times 10^{-6} \text{ C}$  é acoplada a uma mola de massa desprezível. Este conjunto é posto em oscilação e seu período medido é  $T = 0,40\pi \text{ s}$ . É fixada, a seguir, outra partícula de carga  $q' = 0,20 \times 10^{-6} \text{ C}$  a uma distância  $d$  da posição de equilíbrio  $O$  do sistema massa-mola, conforme indica a figura.

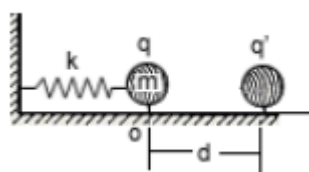
É dado:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

Obs.: considerar as duas cargas puntiformes.

O conjunto é levado lentamente até a nova posição de equilíbrio distante  $x = 4,0 \text{ cm}$  da posição de equilíbrio inicial  $O$ .

O valor de  $d$  é:

- a) 56 cm.
- b) 64 cm.
- c) 60 cm.
- d) 36 cm.
- e) nenhuma das alternativas.



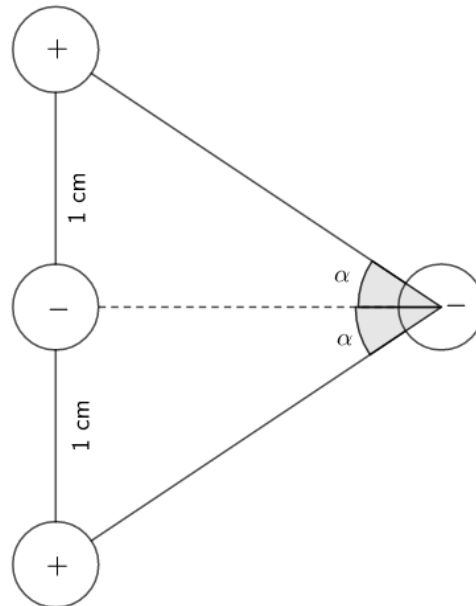
### 18. (IME – 84)

Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas de peso desprezível, dispostas na forma mostra na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:

$$Q_1 = Q_3 = 4 \times 10^{-11} \text{ C}$$

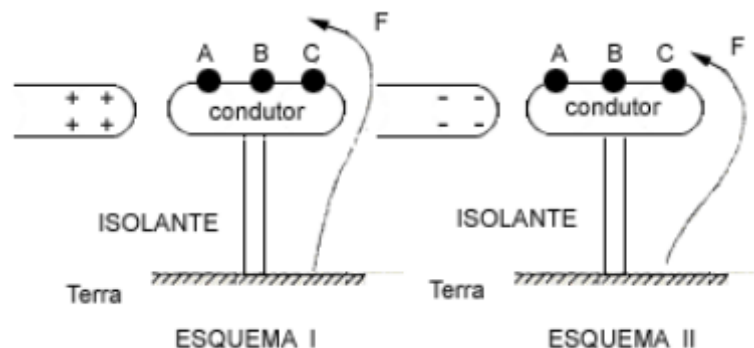
$$Q_2 = Q_4 = -10^{-11} \text{ C}$$

Determine o valor do ângulo  $\alpha$ , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga  $Q_4$ , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.



### 19. (ITA-1988)

Deseja-se carregar negativamente um condutor metálico pelo processo de indução eletrostática. Nos esquemas I e II, o condutor foi fixado na haste isolante. F é um fio condutor que nos permite fazer o contato com a Terra nos pontos A, B e C do condutor.



Devemos utilizar:

- O esquema I e ligar necessariamente F em C, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em A os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região C.
- O esquema II e ligar necessariamente F em A, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em C os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região A.
- Qualquer dos esquemas I ou II, desde que liguemos respectivamente em C e em A.
- O esquema I, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

e) O esquema II, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

### 20. (ITA-1992)

Uma carga puntiforme  $-Q_1$  de massa  $m$  percorre uma órbita circular de raio  $R$  em torno de outra carga puntiforme  $Q_2$ , fixa no centro do círculo. A velocidade angular de  $-Q_1$  é:

a)  $\omega = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

b)  $\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$

c)  $\omega = \left[ \frac{Q_1 Q_2 R^3}{4\epsilon_0} \right]^2$

d)  $\omega = \frac{mRQ_1}{4\pi\epsilon_0 Q_2}$

e)  $\omega = \frac{mRQ_2}{4\pi\epsilon_0 Q_1}$

### 21. (ITA-1993)

Uma pequena esfera metálica de massa  $m$ , está suspensa por um fio de massa desprezível, entre as placas de um grande capacitor plano, como mostra a figura. Na ausência de qualquer carga, tanto no capacitor quanto na esfera, o período de oscilação da esfera é  $T = 0,628$  s. Logo em seguida, eletriza-se a esfera com uma carga  $+e$  e a placa superior do capacitor é carregada positivamente. Nessas novas condições o período de oscilação da esfera torna-se  $T = 0,314$  s. Qual é a intensidade da força que o campo elétrico do capacitor exerce sobre a esfera?

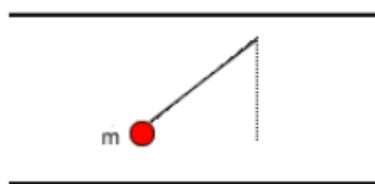
a)  $F = 3mg$

b)  $F = 2mg$

c)  $F = mg$

d)  $F = 6mg$

e)  $F = \frac{3mg}{2}$



### 22.

Dois cargas positivas  $+q$  separadas por uma distância  $2D$ . No ponto médio do segmento que une as cargas coloca-se uma carga  $-q$ . Desloca-se  $-q$  levemente da sua posição de equilíbrio, de tal forma que ela passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio mantendo-se sobre a mediatriz do segmento que une as cargas  $+q$ . Determine o período da oscilação, considerando que a perturbação em  $-q$  seja muito pequena. Todas as cargas têm massa  $m$ .

Adote: para ângulos pequenos vale a aproximação:  $\text{sen } \alpha \cong \text{tg } \alpha \cong \alpha(\text{rad})$

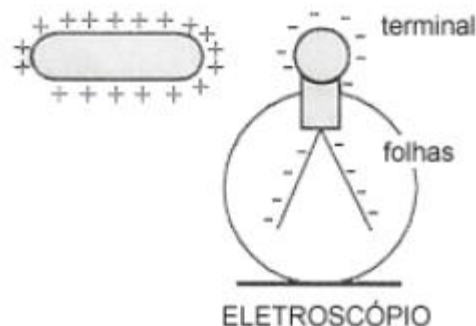
### 23. (ITA-1993)

Duas esferas condutoras, de massa  $m$ , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto por dois fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a  $L$ . As cargas das esferas são tais que elas estarão em equilíbrio quando a distância entre elas é igual a  $a$  ( $a \ll L$ ). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância  $b$  ( $b \ll L$ ) entre as esferas, quando após se tocarem o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?

- a)  $b = \frac{a}{2}$
- b)  $b = a\sqrt{2}/2$
- c)  $b = a\sqrt{3}/2$
- d)  $b = a/\sqrt[3]{2}$
- e)  $b = a/\sqrt[3]{4}$

### 24. (ITA-1996)

Um objeto metálico carregado positivamente, com carga  $+Q$ , é aproximado de um eletroscópio de folhas, que foi previamente carregado negativamente com carga igual a  $-Q$ .

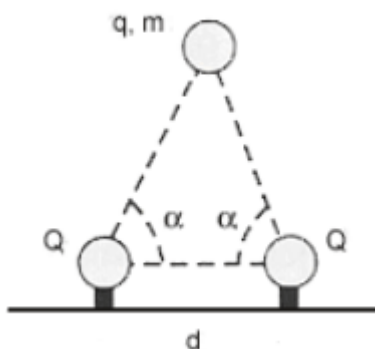


- I) À medida que o objeto for se aproximando do eletroscópio, as folhas vão se abrindo além do que já estavam.
  - II) À medida que o objeto for se aproximando, as folhas permanecem como estavam.
  - III) Se o objeto tocar no terminal externo do eletroscópio, as folhas devem necessariamente fechar-se.
- a) Somente a afirmativa I é correta.
  - b) As afirmativas II e III são corretas.
  - c) As afirmativas I e III são corretas.
  - d) Somente a afirmativa III é correta.
  - e) Nenhuma das afirmativas é correta.

### 25. (ITA-1997)

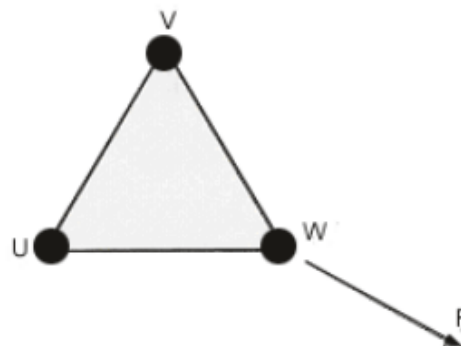
Uma pequena esfera de massa  $m$  e carga  $q$ , sob influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas  $Q$  fixas, colocadas a uma distância  $d$  no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as cargas fixas estejam no mesmo plano vertical e que sejam iguais a os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é então:

- a)  $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$   
 b)  $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{g}$   
 c)  $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$   
 d)  $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}{g}$   
 e)  $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{g}$



### 26. (ITA-1998)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U, V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura.



Conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.  
 b) As cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.  
 c) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto, com uma delas de sinal diferente das demais.  
 d) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.  
 e) A configuração descrita é fisicamente impossível.

### 27. (ITA-1998)

Suponha que o elétron em um átomo de hidrogênio se movimenta em torno de um próton em uma órbita circular de raio  $R$ . Sendo  $m$  a massa do elétron e  $q$  o módulo da carga de ambos, elétron e próton, conclui-se que o módulo da velocidade do elétron é proporcional a:

- a)  $q \cdot \sqrt{\frac{R}{m}}$

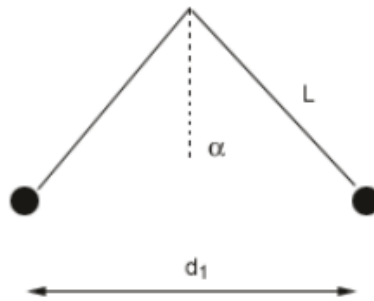


- b)  $\frac{q}{\sqrt{mR}}$
- c)  $\frac{q}{m} \cdot \sqrt{R}$
- d)  $\frac{qR}{\sqrt{m}}$
- e)  $\frac{q^2R}{\sqrt{m}}$

**28. (ITA-2001)**

Dois partículas têm massas iguais a  $m$  e cargas iguais a  $Q$ . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força  $F$  quando separadas de uma distância  $d$ . Em seguida, estas partículas são penduradas de um mesmo ponto, por fios de comprimento  $L$  e ficam equilibradas quando a distância entre elas é  $d_1$ . A cotangente do ângulo que cada fio forma com a vertical, em função de  $m, g, d, d_1, F$  e  $L$ , é:

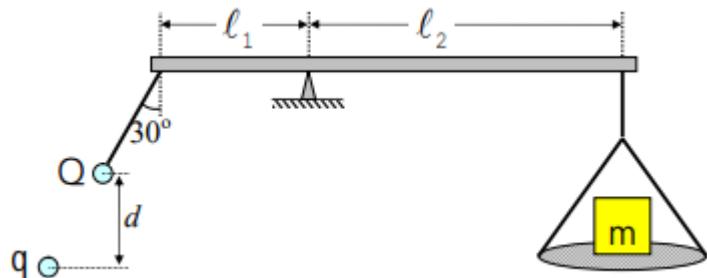
- a)  $\frac{mgd_1}{Fd}$
- b)  $\frac{mgLd_1}{Fd^2}$
- c)  $\frac{mgd_1^2}{Fd^2}$
- d)  $\frac{mgd^2}{Fd_1^2}$
- e)  $\frac{Fd^2}{mgd_1^2}$



**29. (ITA – 2010)**

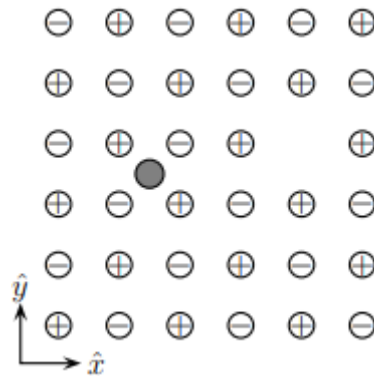
Considere uma balança de braços desiguais, de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , conforme mostra a figura. No lado esquerdo encontra-se pendurada uma carga de magnitude  $Q$  e massa desprezível, situada a uma certa distância de outra carga,  $q$ . No lado direito encontra-se uma massa  $m$  sobre um prato de massa desprezível. Considerando as cargas como pontuais e desprezível a massa do prato da direita, o valor de  $q$  para equilibrar a massa  $m$  é dado por:

- A)  $-mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- B)  $-8mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- C)  $-4mgl_2d^2/(3k_0Ql_1)$
- D)  $-2mgl_2d^2/(\sqrt{3}k_0Ql_1)$
- E)  $-8mgl_2d^2/(3\sqrt{3}k_0Ql_1)$



**30. (ITA – 2014)**

A figura mostra parte de uma camada de um cristal tridimensional infinito de sal de cozinha, em que a distância do átomo de  $Na$  ao de seu vizinho  $Cl$  é igual a  $a$ . Considere a existência dos seguintes defeitos neste cristal: ausência de um átomo de  $Cl$  e a presença de uma impureza de lítio (esfera cinza), cuja carga é igual à fundamental  $+e$ , situada no centro do quadrado formado pelos átomos de  $Na$  e  $Cl$ . Obtenha as componentes  $F_x$  e  $F_y$  da força eletrostática resultante  $\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$  que atua no átomo de lítio. Dê sua resposta em função de  $e$ ,  $a$  e da constante de Coulomb  $K_0$ .



### 31. (ITA – 2015)

Uma carga  $q$  ocupa o centro de um hexágono regular de lado  $d$  tendo em cada vértice uma carga idêntica  $q$ . Estando todas as sete cargas interligadas por fios inextensíveis, determine as tensões em cada um deles.

### 32. (ITA – 2015)

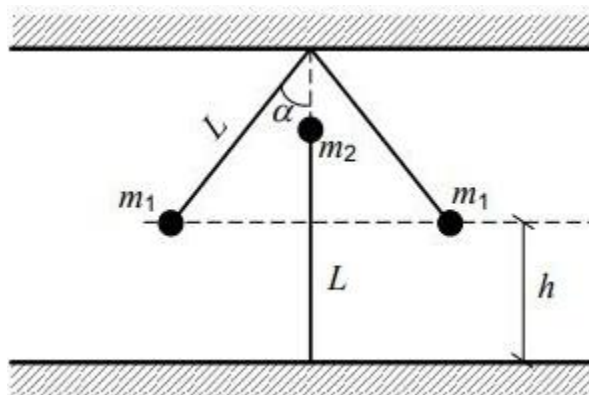
Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento  $\ell$ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas  $q_1$  e  $q_2$ , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

- I. Essa posição de equilíbrio é estável?
  - II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?
  - III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?
- A) Não. Sim. Não.  
 B) Não. Sim. Sim.  
 C) Sim. Não. Não.  
 D) Sim. Não. Sim.  
 E) Sim. Sim. Não.

### 33. (IME 2019 – 2ª fase)



A figura acima mostra um sistema em equilíbrio composto por três corpos presos por tirantes de comprimento  $L$  cada, carregados com cargas iguais a  $Q$ . Os corpos possuem massas  $m_1$  e  $m_2$ , conforme indicados na figura. Sabendo que o tirante conectado à massa  $m_2$  não está tensionado, determine os valores de  $m_1$  e  $m_2$  em função de  $k$  e  $Q$ .



Dados:

constante dielétrica do meio:  $k[Nm^2/C^2]$ ;

carga elétrica dos corpos:  $Q [C]$ ;

comprimento dos tirantes:  $L = 2 m$ ;

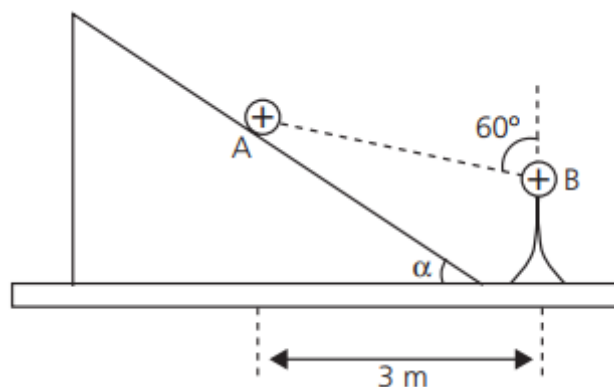
altura:  $h = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) m$

aceleração da gravidade:  $g = 10 m/s^2$ ; e  $\alpha = 30^\circ$ .



### 34.

Uma pequena esfera A1 de carga  $+Q$  e massa  $m$ , encontra-se em repouso nas proximidades de um plano inclinado, quando dela é aproximada lentamente uma segunda esfera B, de carga  $+Q$ , fixa sobre um suporte isolante.



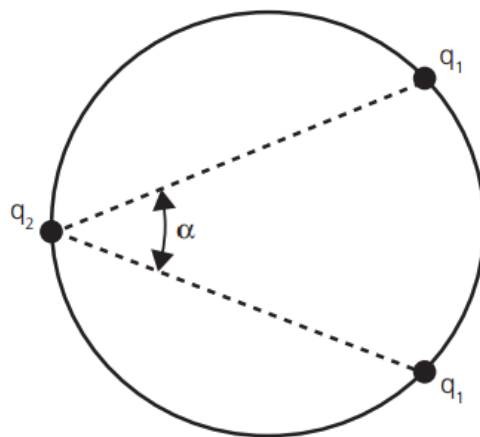
Devido à repulsão eletrostática, a esfera A desloca-se ao longo da rampa sem atrito, estacionando na posição ilustrada anteriormente. Determine o ângulo  $\alpha$ .

Dados: Constante eletrostática =  $9 \times 10^9$  (SI)  $g = 10 \text{ m/s}^2$   $Q = 2mC$ ,  $m = 0,3 \text{ g}$ .

**35.**

Três cargas puntiformes podem mover-se vinculadas (sem atrito) a um aro circular apoiado num plano horizontal. Duas das cargas têm o mesmo valor  $q_1$  e a terceira tem valor  $q_2$ . Mostre que na posição de equilíbrio, temos que:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1 - \cos\alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$$

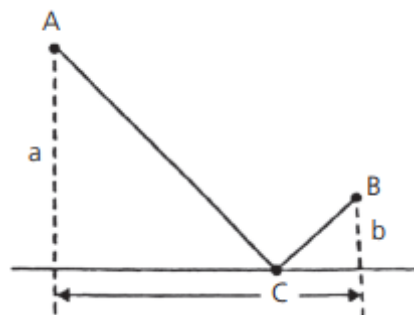


**36.**

Os pontos fixos A e B estão eletrizadas com carga  $+Q$  cada um. O ponto C, eletrizado com carga  $-Q$  pode deslizar livremente sob a guia retilínea e horizontal, perfeitamente lisa. Verifica-se que o ponto C fica em equilíbrio quando o segmento  $\overline{AC}$  é normal a  $\overline{BC}$ .

Demonstre que entre a, b e c vale a relação:

$$a^3 + b^3 = abc$$



**37. (ITA – 2020)**

Três esferas idênticas de massa  $m$ , carga elétrica  $Q$  e dimensões desprezíveis, são presas pelas extremidades de fios isolantes e inextensíveis de comprimento  $l$ . As demais pontas dos fios são fixadas a um ponto  $P$ , que sustenta as massas. Na condição de equilíbrio do sistema, verifica-

se que o ângulo entre um dos fios e a direção vertical é  $\theta$ , conforme mostra a figura. Sendo  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do meio, o valor da carga elétrica  $Q$  é dada por

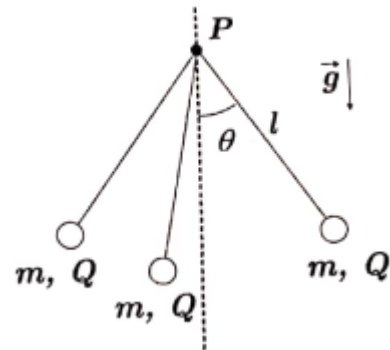
a)  $l \sqrt{12\pi\epsilon_0 mg \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$

b)  $l \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$

c)  $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$

d)  $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{3}}}$

e)  $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}$





## 11. Gabarito sem comentários

- 1) D  
2) A  
3) B  
4) A  
5) a)  $x = \frac{d}{3}$  b)  $q_3 = -\frac{4}{9}q_1$   
6) E  
7) a)  $F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$  b)  $v = q\sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$   
8) E  
9) a) descrição b)  $T = 9 \times 10^{-2}N$  c)  $|q_2| = 8 \times 10^{-8}C$  d)  $N = 5 \times 10^{11}$   
10) E  
11) D  
12) C  
13)  $Q_1 = \frac{Q}{2^{n-1}}$   
14) E  
15) A  
16) A  
17) B  
18)  $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$   
19) D  
20) B  
21) A  
22)  $T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{2kq^2}}$   
23) E  
24) D  
25) D  
26) E  
27) B  
28) C  
29) E  
30)  $F_x = -\frac{20}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$   $F_y = -\frac{4}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$   
31)  $T = \left(\frac{27+4\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \frac{kQ^2}{d^2}$   
32) C  
33)  $m_1 = \frac{(3+\sqrt{3})kQ^2}{40}$  e  $m_2 = \frac{3kQ^2}{40}$   
34)  $\alpha = 60^\circ$   
35)  $\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1-\cos\alpha)^3}{\cos^2\alpha}$   
36)  $a^3 + b^3 = abc$   
37) C

ESCLARECENDO!

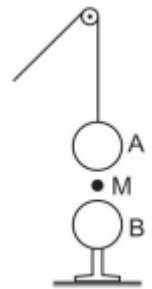


## 12. Lista de questões comentadas

### Aquecimento

#### 1. (FUVEST – 1990)

Uma esfera condutora A, de peso  $P$ , eletrizada positivamente é presa a um fio isolante que passa por uma roldana. A esfera se aproxima de B, com velocidade constante, de uma esfera B, idêntica a interior, mas neutra isolada. A esfera A toca em B e, em seguida é puxada para cima, com velocidade também constante.



Quando A passa pelo ponto M, a tração no fio é  $T_1$  na descida e  $T_2$  na subida. Podemos afirmar que:

- a)  $T_1 < T_2 < P$
- b)  $T_1 < P < T_2$
- c)  $T_2 < T_1 < P$
- d)  $T_2 < P < T_1$
- e)  $P < T_1 < T_2$

#### Comentários:

A esfera A induz carga de sentido oposto em B. Aplicando  $F = ma$  ao corpo A na descida:

$$T_1 = P - \frac{kq_A(-q_A)}{d^2} = P + \frac{kq_A^2}{d^2} > P$$

Os corpos trocam carga no contato e, como são idênticos, adquirem a mesma carga final:

$$q = \frac{q_A + 0}{2} = \frac{q_A}{2}$$

Aplicando  $F = ma$  ao corpo A na subida:

$$T_2 = P - \frac{kq_A^2}{4d^2} < P$$

Logo:

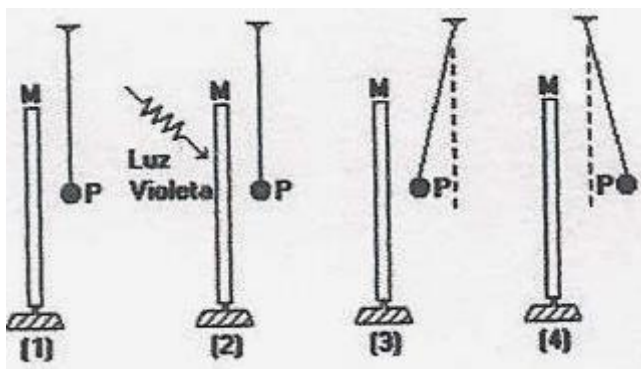
$$T_2 < P < T_1$$



**Gabarito: D**

**2. (FUVEST – 1993)**

Dispõe-se de uma placa metálica  $M$  e de uma esferinha metálica  $P$ , suspensa por um fio isolante, inicialmente neutras e isoladas. Um feixe de luz violeta é lançado sobre a placa retirando partículas elementares da mesma. As figuras (1) a (4) adiante, ilustram o desenrolar dos fenômenos ocorridos.



Podemos afirmar que na situação (4):

- a)  $M$  e  $P$  estão eletrizadas positivamente.
- b)  $M$  está negativa e  $P$  Neutra.
- c)  $M$  está neutra e  $P$  positivamente eletrizada
- d)  $M$  e  $P$  estão eletrizadas negativamente
- e)  $M$  e  $P$  foram eletrizadas por indução.

**Comentários:**

Em (1) ambos os corpos estão neutros.

Em (2) as partículas retiradas são elétrons, assim  $M$  está negativamente carregado no seu lado esquerdo.

Em (3)  $P$  sofre indução de cargas negativas e é atraído até o contato com  $M$ , onde recebe parte de sua carga **positiva**.

Em (4) os corpos são repelidos por apresentarem cargas de mesmo sinal.

**Gabarito: A**

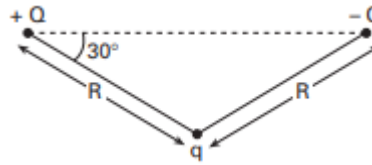
**3. (FUVEST – 1996)**

O Módulo  $F$  da força eletrostática entre duas cargas elétricas pontuais  $q_1$  e  $q_2$ , separadas por uma distância  $d$ , é  $F = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$  onde  $k$  é uma constante. Considere as três cargas pontuais



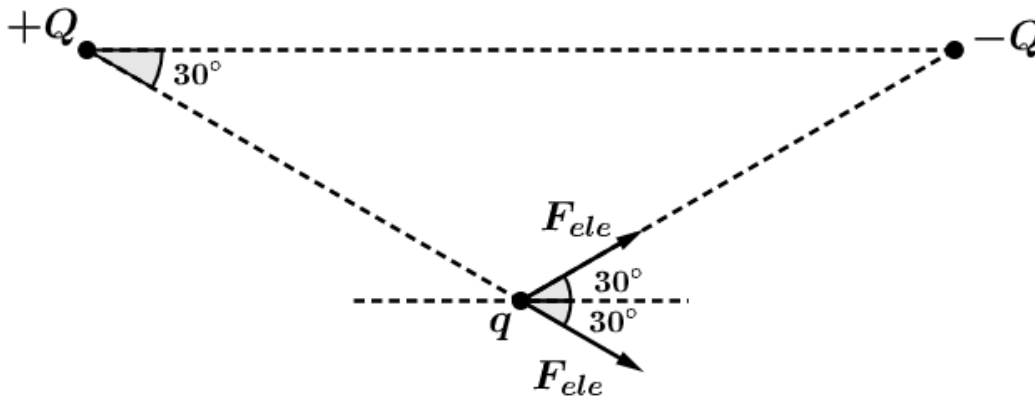
representadas adiante por  $+Q$ ,  $-Q$  e  $q$ . o Módulo da força eletrostática total que age sobre a carga  $q$  será?

- a)  $\frac{2kQq}{R^2}$
- b)  $\frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$
- c)  $\frac{kQ^2q}{R^2}$
- d)  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQq}{R^2}$
- e)  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQ^2q}{R^2}$



**Comentários:**

Fazendo o diagrama de forças em  $q$ , temos que:



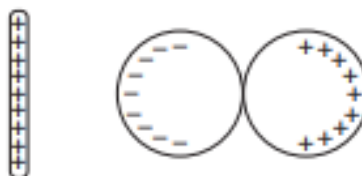
$$F_e = 2F \cos 30^\circ$$

$$F_e = \frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$$

**Gabarito: B**

**4. (FUVEST - 1996)**

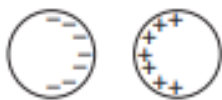
Aproximando-se uma barra eletrizada de duas esferas condutoras, inicialmente descarregadas e encostadas uma na outra, observa-se a distribuição de cargas esquematizada na figura abaixo.



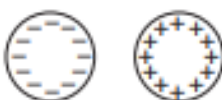
Em seguida, sem tirar do lugar a barra eletrizada, afasta-se um pouco uma esfera da outra. Finalmente, sem mexer mais nas esferas, remove-se a barra, levando-a para muito longe das

esferas. Nessa situação final, a figura que melhor representa a distribuição de cargas nas duas esferas é:

a)



b)



c)



d)



e)



### Comentários:

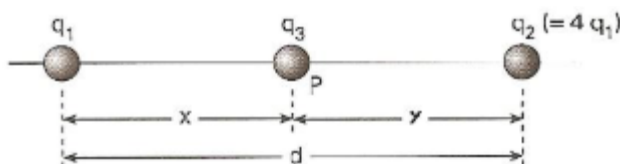
Enquanto as esferas estão em contato, logo, podemos considerá-las como um só condutor neutro, com distribuição não uniforme de cargas. Quando as esferas são separadas na presença desse desequilíbrio de cargas, resulta nessas mantendo as cargas que tinham logo antes da perda de contato. Assim, a esfera da esquerda possuirá carga negativa e a da direita positiva.

Essas cargas se atrairão, como mostrado em a).

### Gabarito: A

#### 5. (FUVEST – 1997)

Duas cargas pontuais positivas  $q_1$  e  $q_2 = 4q_1$  são fixadas a uma distância  $d$  uma da outra. uma terceira carga negativa  $q_3$  é colocada no ponto  $P$   $q_1$  e  $q_2$ , a uma distância  $x$  da carga  $q_1$ , conforme mostra a figura.



- a) Calcule o valor de  $x$  para que a força eletrostática resultante sobre a carga  $q_3$  seja nula.
- b) Verifique se existe um valor de  $q_3$  para o qual tanto a carga  $q_1$  como a  $q_2$ , permanecem em equilíbrio, nas posições do item a, sem a necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor  $q_3$ .

**Comentários:**

a) Aplicando  $F_R = ma$  em  $q_3$ :

$$\frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_3q_2}{y^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{4q_1}{(d-x)^2}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = 2$$

$$x = \frac{d}{3}$$

b) Pela terceira Lei de Newton sabemos que as forças que  $q_3$  exerce em  $q_1$  e  $q_2$  são iguais em módulo, assim basta analisarmos uma dessas cargas. Aplicando  $F_R = ma$  a  $q_1$ :

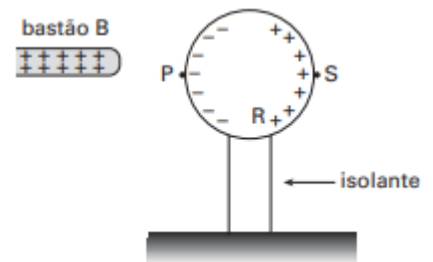
$$\frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

$$q_3 = \frac{4}{9}q_1$$

**Gabarito: a)  $x = \frac{d}{3}$  b)  $q_3 = \frac{4}{9}q_1$**

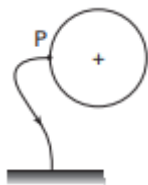
**6. (FUVEST – 1997)**

Quando se aproxima um bastão B, eletrizado positivamente, de uma esfera metálica, isolada e inicialmente descarregada, observa-se a distribuição de cargas representada na Figura 1.

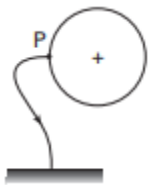


Mantendo o bastão na mesma posição, a esfera é conectada à terra por um fio condutor que pode ser ligado a um dos pontos P, R ou S da superfície da esfera. Indicando por ( $\rightarrow$ ) o sentido do fluxo transitório ( $\emptyset$ ) de elétrons (se houver) e por (+), (-) ou (0) o sinal da carga final (Q) da esfera, o esquema que representa  $\emptyset$  e Q é

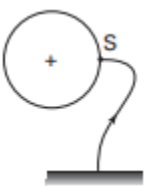
a)



b)



c)



d)



e)



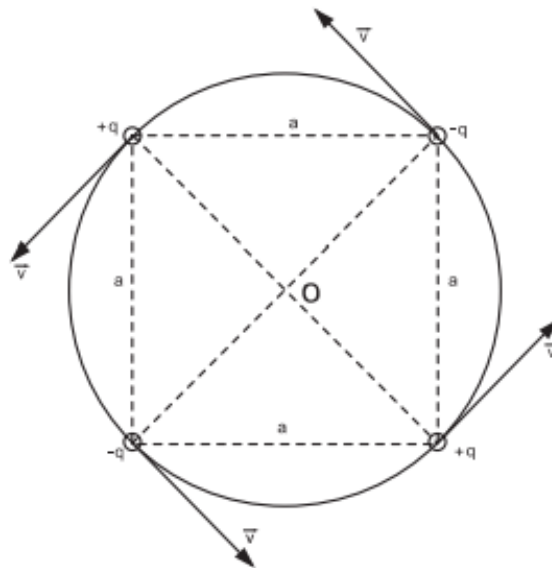
### Comentários:

Antes de ser ligada à terra a esfera metálica não acumulava mais carga negativa no seu lado esquerdo devido à repulsão entre as cargas de mesmo sinal, em ambos os seus lados. Ao ser ligada à terra, mais carga negativa pôde ser trazida que não fosse de uma região saturada de cargas positivas (lado direito da esfera).

### Gabarito: E

#### 7. (FUVEST – 1998)

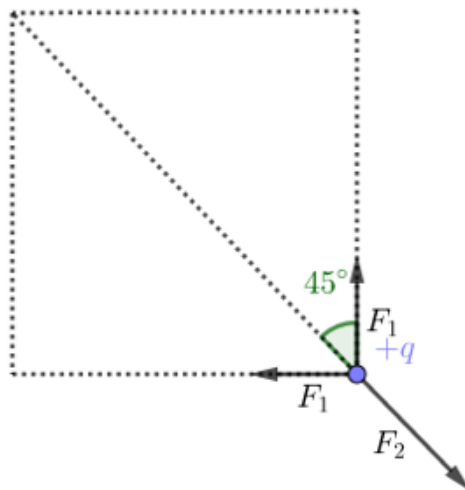
Quatro pequenas esferas de massa  $m$ , estão carregadas com cargas de mesmo valor absoluto  $q$ , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado  $a$  e giram numa trajetória circular de centro  $O$ , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante  $v$ . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação eletrostática. A constante de permissividade elétrica é  $\epsilon_0$ . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.



- a) Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante  $\vec{F}$  que atua em cada esfera e indique sua direção.
- b) Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial  $\vec{v}$  das esferas.

**Comentários:**

a) Diante da simetria da questão, a resultante em cada carga terá o mesmo módulo. Assim, escolhendo qualquer uma das cargas, temos o seguinte diagrama de forças:



Considerando a figura acima, podemos concluir que a força resultante está na direção radial:

$$F_{ele} = 2F_1 \cos 45^\circ - F_2$$

$$F_{ele} = \frac{\sqrt{2}kq^2}{a^2} - \frac{kq^2}{(a\sqrt{2})^2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{kq^2}{a^2}$$

b) Aplicando  $F = ma$  a uma carga q:

$$F_{ele} = ma_{cent}$$

$$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{kq^2}{a^2} = \frac{mv^2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

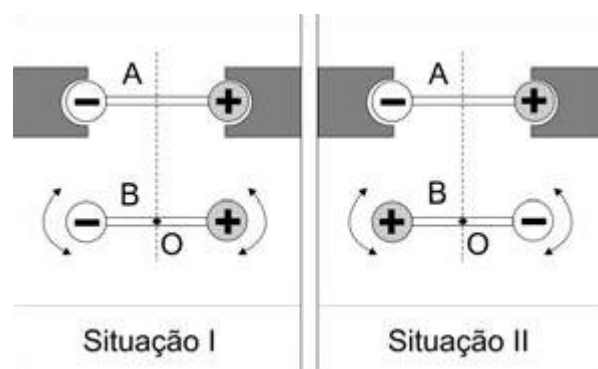
$$v = \sqrt{\frac{kq^2}{ma} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Em que  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

**Gabarito:** a)  $F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$  b)  $v = \mathbf{q} \sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$

### 8. (FUVEST – 2007)

Duas barras isolantes, A e B, iguais, colocadas sobre uma mesa, têm em suas extremidades, esferas com cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. A barra A é fixa, mas a barra B pode girar livremente em torno de seu centro O, que permanece fixo. Nas situações I e II, a barra B foi colocada em equilíbrio, em posições opostas. Para cada uma dessas duas situações, o equilíbrio da barra B pode ser considerado como sendo, respectivamente,



SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - após o sistema ser levemente deslocado de sua posição inicial.

Estável = tende a retornar ao equilíbrio inicial.

Instável = tende a afastar-se do equilíbrio inicial.

Indiferente = permanece em equilíbrio na nova posição.

- a) indiferente e instável.
- b) instável e instável.
- c) estável e indiferente.
- d) estável e estável.
- e) estável e instável.

#### Comentários:

Situação I: Estável

Considere um pequeno deslocamento de B no sentido horário. As cargas negativas ficarão mais próximas e as positivas mais distantes, assim a força agindo do lado esquerdo ficará maior que

a força do lado direito (ambas direcionadas para baixo) gerando torque de sentido anti-horário, favorecendo o retorno à posição de equilíbrio horizontal.

Situação II: Instável

Considere um pequeno deslocamento de  $B$  no sentido horário. As cargas do lado esquerdo ficarão mais próximas e as do lado direito mais distantes, assim a força agindo do lado esquerdo ficará maior que a força do lado direito (ambas direcionadas para cima) gerando torque de sentido horário, favorecendo o afastamento em relação à posição de equilíbrio horizontal.

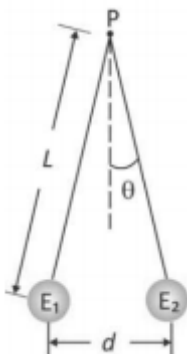
**Gabarito: E**

### 9. (FUVEST – 2018)

Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa  $9\text{ g}$ , inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento  $L$ , preso em um ponto fixo  $P$ . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.

a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada ( $E_1$ ) em contato com outra esfera ( $E_2$ ), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento  $L$ , fixo no ponto  $P$ . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo  $d = 8\text{ cm}$ .



Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine:

- b) o módulo da tensão  $\vec{T}$  em um dos fios isolantes;
- c) o módulo da carga  $q_2$  da esfera  $E_2$ ;
- d) a diferença  $N$  entre o número de elétrons e de prótons na esfera  $E_2$  após a eletrização.

**Note e adote:**

Para a situação descrita, utilize:  $\cos\theta \cong 1$  e  $\text{sen}\theta \cong 0,1$ .

Aceleração da gravidade:  $10\text{ m/s}^2$

Força elétrica entre duas cargas puntiformes  $Q_1$  e  $Q_2$  distantes  $r$  uma da outra:  $\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$ , onde  $k = 9 \times 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Carga do elétron:  $1,6 \times 10^{-19} \text{C}$ .

Ignore a massa dos fios.

### Comentários:

a) Primeiramente o canudo foi trazido próximo à esfera, induzindo uma carga de sinal oposto à sua na superfície mais próxima da esfera. Após isso, ligou-se a esfera à terra, de modo que a esfera recebesse cargas de sinal oposto às do canudo. Por fim, quebrou-se a conexão da esfera com a terra e afastou-se o canudo.

b) Aplicando  $F = ma$  a uma das cargas:

$$T = F_{ele} \text{ sen } \theta + mg \quad (\text{eq. 1})$$

$$F_{ele} = mg \text{ sen } \theta \quad (\text{eq. 2})$$

De (1) e (2), temos:

$$T = mg(1 + \text{sen}^2 \theta) \approx mg$$

c) Quando as esferas estão em contato a carga é distribuída entre elas de forma igual. ( $q_1 = q_2 = q$ )

Por (2), temos:

$$\frac{kq^2}{d^2} = mg \text{ sen } \theta$$

$$q = d \sqrt{\frac{mg \text{ sen } \theta}{k}}$$

d) Temos:

$$q = eN \Rightarrow N = \frac{q}{e}$$

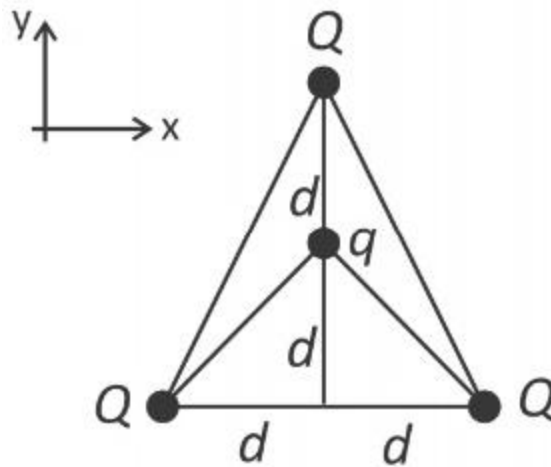
Basta substituir os valores em questão.

**Gabarito: a) descrição b)  $T = 9 \times 10^{-2} \text{N}$  c)  $|q_2| = 8 \times 10^{-8} \text{C}$  d)  $N = 5 \times 10^{11}$**

### 10. (FUVEST – 2019)

Três pequenas esferas carregadas com carga positiva  $Q$  ocupam os vértices de um triângulo, como mostra a figura. Na parte interna do triângulo, está afixada outra pequena esfera, com carga negativa  $q$ . As distâncias dessa carga às outras três podem ser obtidas a partir da figura.





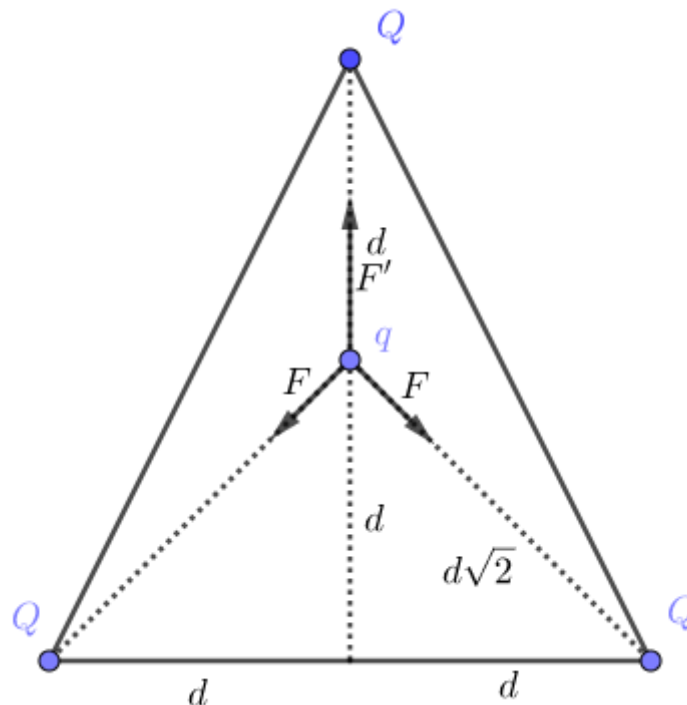
Sendo  $Q = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$ ,  $q = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$  e  $d = 6 \text{ m}$ , a força elétrica resultante sobre a carga  $q$

**Note e adote:**

A constante  $k_0$  da Lei de Coulomb vale  $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- é nula.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para baixo e módulo 1,8 N.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para cima e módulo 1,0 N.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para baixo e módulo 1,0 N.
- tem direção do eixo  $y$ , sentido para cima e módulo 0,3 N.

**Comentários:**



A resultante das forças está na vertical. Consideraremos o sentido para cima como positivo:

$$F_{ele} = F' - 2F \cos 45^\circ$$

$$F_{ele} = k \frac{qQ}{d^2} - \sqrt{2}k \frac{qQ}{(d\sqrt{2})^2}$$

$$F_{ele} = k \frac{qQ}{d^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0 (\text{para cima})$$

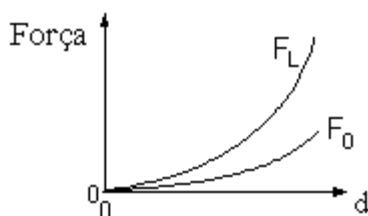
$$F_{ele} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 2 \times 10^{-4} \cdot 2 \times 10^{-5}}{6^2} \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cong 0,3 \text{ N}$$

**Gabarito: E**

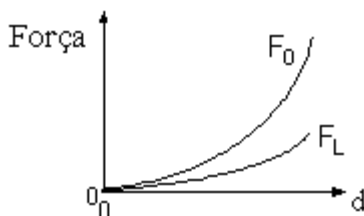
### 11. (UNESP – 1999)

A força elétrica entre duas pequenas partículas carregadas foi medida, em função da distância  $d$  entre elas, em dois meios diferentes, no vácuo e no interior de um líquido isolante. Assinale a alternativa que melhor representa o módulo da força medida no vácuo ( $F_0$ ), comparada com o módulo da força medida no líquido ( $F_L$ ), em função da distância  $d$

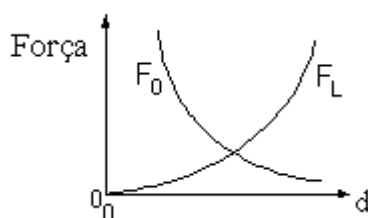
a)



b)

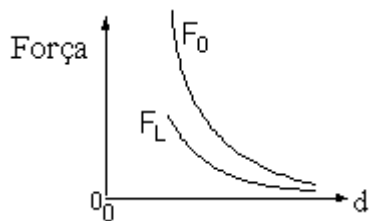


c)

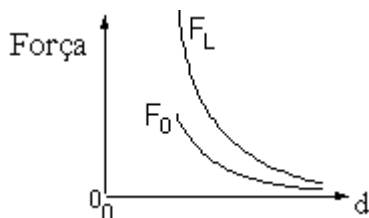


d)





e)



### Comentários:

Quando analisamos a Lei de Coulomb a mudança de meio afeta diretamente na constante eletrostática do meio  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ . Para o vácuo temos que  $\epsilon_0$  é o menor possível. No líquido, podemos dizer que  $\epsilon = k \cdot \epsilon_0, k \geq 1$ . Então,  $K_0 \geq K_{Liq}$ . Portanto,  $F_0 \geq F_{Liq}$ .

O entendimento da constante eletrostática do meio ficará mais clara quando estudarmos o dielétrico de um meio, cenas dos próximos capítulos.

**Gabarito: D**

## Treinamento IME

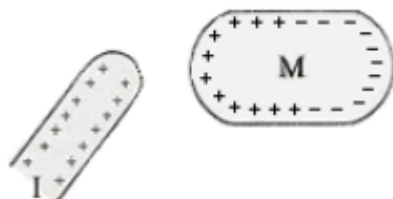
### 12. (ITA-1971)

Um corpo condutor (I) carregado é aproximado de um corpo metálico (M) descarregado. Qual das figuras abaixo dá uma distribuição de cargas induzidas no metal que é consistente com a posição relativa dos corpos (I) e (M)?

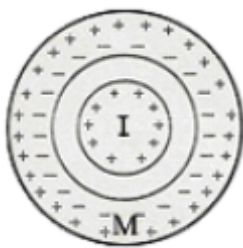
a)



b)

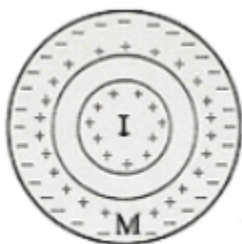


c)



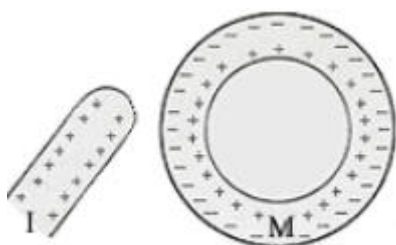
cilindro ôco

d)



cilindro ôco

e)



cilindro ôco

### Comentários:

- a) M se mantém neutro.
- b) A carga induzida próxima a ( $I$ ) deve ser negativa.
- c) Correto.
- d) Semelhante ao item b).
- e) A distribuição de cargas não é uniforme como representada.

**Gabarito: C**

**13.**

Considere  $n$  esferas idênticas em que apenas a primeira esfera está eletrizada com uma carga  $Q$ . As outras estão eletricamente neutras. Determine o valor da carga desta esfera após o contato dela com cada uma das demais esferas.

### Comentários:



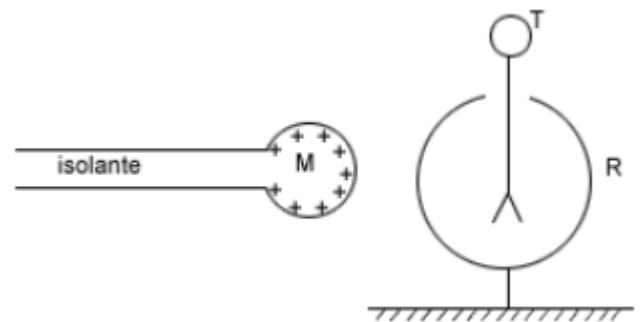
Quando uma esfera carregada entra em contato com outra idêntica e neutra há uma distribuição igual de cargas entre as duas, e assim a carga da primeira esfera se torna metade do original. No caso em questão há  $n - 1$  contatos iguais ao descrito acima, logo a carga final da primeira esfera deve ser:

$$Q_1 = \frac{Q}{2^{n-1}}$$

**Gabarito:**  $Q_1 = \frac{Q}{2^{n-1}}$

#### 14. (ITA-1973)

Uma esfera metálica (M) é aproximada de um eletroscópio de folhas de alumínio, conforme o esquema abaixo. A carcaça metálica (R) do eletroscópio está em contato elétrico permanente com o solo.



Enquanto a esfera (M) está muito afastada do eletroscópio estabeleceu-se um contato elétrico transitório entre (T) e (R). Qual é a única afirmação correta em relação à experiência em apreço?

- a) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar o terminal (T).
- b) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar a carcaça (R).
- c) As folhas só abrirão se o contato elétrico entre (T) e (R) for mantido permanentemente.
- d) As folhas só abrirão se a carcaça (R) receber uma carga de mesmo valor, mas de sinal oposto ao da esfera (M).
- e) As folhas se abrirão à medida que (M) se aproxima de (T)

#### Comentários:

- a) Incorreto. Antes de tocar o terminal a esfera induz carga negativa em (T), gerando um excesso de cargas positivas nas folhas do eletroscópio.
- b) Incorreto. Como (R) está ligado à terra, a carga da esfera iria apenas escoar.
- c) Veja a).
- d) Incorreto. Para que se abram, basta as folhas estarem carregadas com carga de mesmo sinal.
- e) Correto.

**Gabarito:** E

#### 15. (ITA-1977)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices A e B de um triângulo retângulo isósceles. Sabe-se que a força elétrica resultante que atua sobre a carga localizada no vértice C do ângulo

reto tem a mesma direção da reta AB. Aplicando-se a Lei de Coulomb a esta situação, conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em A e B são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos A e B têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As três cargas são de valores absolutos iguais.
- d) As cargas localizadas nos pontos A e B têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

### Comentários:

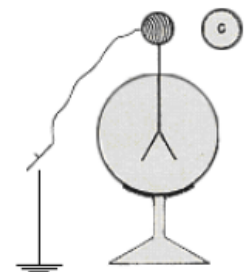
Como as forças possuem direção de seus respectivos catetos, o único modo de se cancelarem na direção da altura (saindo de C) é se possuírem módulos iguais e sentidos opostos (na direção dos catetos). Como as distâncias são iguais, devemos ter cargas iguais e de sinais opostos.

### Gabarito: A

---

#### 16. (ITA-1983)

O eletroscópio da figura foi carregado positivamente. Aproxima-se então um corpo C carregado negativamente e liga-se o eletroscópio à Terra, por alguns instantes, mantendo-se o corpo C nas proximidades. Desfaz-se a ligação à Terra e a seguir afasta-se C.



No final, a carga do eletroscópio:

- a) Permanece positiva.
- b) Fica nula devido à ligação com a Terra.
- c) Torna-se negativa.
- d) Terá sinal que vai depender da maior ou menor aproximação de C.
- e) Terá sinal que vai depender do valor da carga em C.

### Comentários:

A repulsão entre as cargas negativas do eletroscópio e objeto cause um escoamento parcial dessa carga para a Terra, onde terá um amplo espaço para se espalhar.

### Gabarito: A

---

#### 17. (ITA-1984)

Uma partícula de massa  $m = 10,0 \text{ g}$  e carga  $q = -2,0 \times 10^{-6} \text{ C}$  é acoplada a uma mola de massa desprezível. Este conjunto é posto em oscilação e seu período medido é  $T = 0,40\pi \text{ s}$ .

É fixada, a seguir, outra partícula de carga  $q' = 0,20 \times 10^{-6} C$  a uma distância  $d$  da posição de equilíbrio  $O$  do sistema massa-mola, conforme indica a figura.

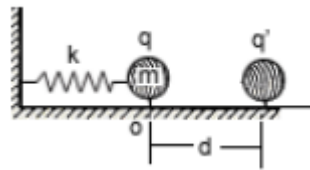
É dado:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

Obs.: considerar as duas cargas puntiformes.

O conjunto é levado lentamente até a nova posição de equilíbrio distante  $x = 4,0 \text{ cm}$  da posição de equilíbrio inicial  $O$ .

O valor de  $d$  é:

- a) 56 cm.
- b) 64 cm.
- c) 60 cm.
- d) 36 cm.
- e) nenhuma das alternativas.



### Comentários:

Para o movimento em MHS, temos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$k = \frac{1}{4} N/m$$

Aplicando  $F = ma$  na nova posição de equilíbrio:

$$kx = \frac{qq'}{(d-x)^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$
$$10^{-2} = \frac{4 \cdot 10^{-13}}{(d - 4 \cdot 10^{-2})^2} 9 \cdot 10^9$$
$$d = 64 \text{ cm}$$

### Gabarito: B

#### 18. (IME – 84)

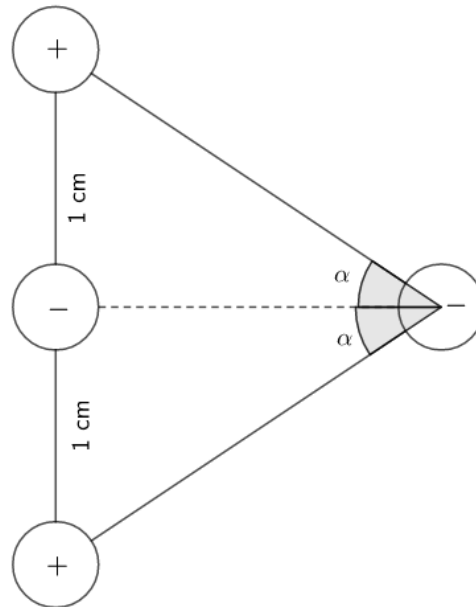
Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas de peso desprezível, dispostas na forma mostra na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:

$$Q_1 = Q_3 = 4 \times 10^{-11} C$$

$$Q_2 = Q_4 = -10^{-11} C$$



Determine o valor do ângulo  $\alpha$ , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga  $Q_4$ , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.



**Comentários:**

Zerando a resultante na direção da linha tracejada: ( $Q_1 = Q_3 = Q, Q_2 = Q_4 = Q'$ )

$$-2K \frac{QQ'}{\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2} + K \frac{(Q')^2}{\left(\frac{1}{\tan \alpha}\right)^2} = 0$$

$$\frac{Q'}{\cos^2 \alpha} - 2Q = 0$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{Q'}{2Q}}$$

Lembre-se que  $0 < \alpha < 90^\circ$ , pois não há possibilidade de equilíbrio com as cargas ao lado direito. Assim:

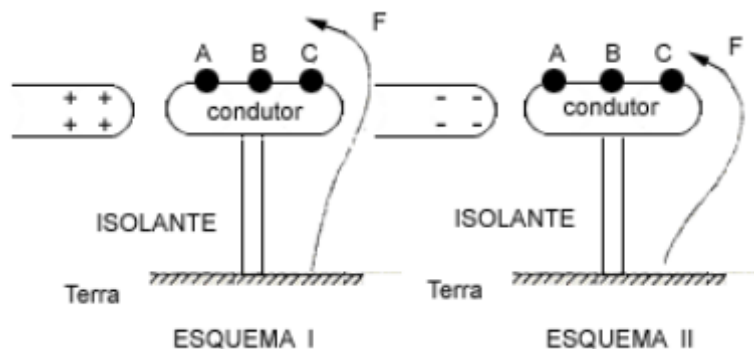
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

**Gabarito:**  $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

**19. (ITA-1988)**

Deseja-se carregar negativamente um condutor metálico pelo processo de indução eletrostática. Nos esquemas I e II, o condutor foi fixado na haste isolante. F é um fio condutor que nos permite fazer o contato com a Terra nos pontos A, B e C do condutor.





Devemos utilizar:

- O esquema I e ligar necessariamente F em C, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em A os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região C.
- O esquema II e ligar necessariamente F em A, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em C os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região A.
- Qualquer dos esquemas I ou II, desde que liguemos respectivamente em C e em A.
- O esquema I, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.
- O esquema II, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

### Comentários:

A carga positiva do bastão gera um potencial positivo no condutor, se ligarmos este à terra seu potencial deve se tornar nulo. Desse modo, cargas negativas fluem da Terra para o condutor para que o equilíbrio seja alcançado. Note que os argumentos acima são independentes do ponto de contato do condutor com a terra.

### Gabarito: D

#### 20. (ITA-1992)

Uma carga puntiforme  $-Q_1$  de massa  $m$  percorre uma órbita circular de raio  $R$  em torno de outra carga puntiforme  $Q_2$ , fixa no centro do círculo. A velocidade angular de  $-Q_1$  é:

a)  $\omega = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

b)  $\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$

c)  $\omega = \left[ \frac{Q_1 Q_2 R^3}{4\epsilon_0} \right]^2$

d)  $\omega = \frac{mRQ_1}{4\pi\epsilon_0 Q_2}$

$$e) \omega = \frac{mRQ_2}{4\pi\epsilon_0Q_1}$$

**Comentários:**

Aplicando  $F = ma$  à carga  $Q_1$ , temos:

$$R_{cent} = ma_{cent}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1Q_2}{R^2} = m\omega^2R$$

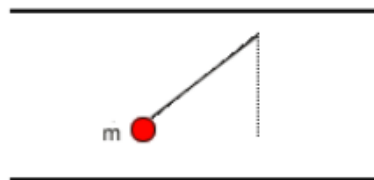
$$\omega = \sqrt{\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0mR^3}}$$

**Gabarito: B**

**21. (ITA-1993)**

Uma pequena esfera metálica de massa  $m$ , está suspensa por um fio de massa desprezível, entre as placas de um grande capacitor plano, como mostra a figura. Na ausência de qualquer carga, tanto no capacitor quanto na esfera, o período de oscilação da esfera é  $T = 0,628$  s. Logo em seguida, eletriza-se a esfera com uma carga  $+e$  e a placa superior do capacitor é carregada positivamente. Nessas novas condições o período de oscilação da esfera torna-se  $T = 0,314$  s. Qual é a intensidade da força que o campo elétrico do capacitor exerce sobre a esfera?

- a)  $F = 3mg$
- b)  $F = 2mg$
- c)  $F = mg$
- d)  $F = 6mg$
- e)  $F = \frac{3mg}{2}$



**Comentários:**

Calculando a gravidade aparente na região entre as placas:

$$g_{apa} = g + \frac{F_{ele}}{m} \quad (eq.1)$$

Lembrando-se que o período de oscilação de um pêndulo é dado por:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\frac{T}{T_f} = \sqrt{\frac{g_{apa}}{g}}$$

Substituindo (1) na equação acima, temos:

$$\frac{T}{T_f} = \sqrt{1 + \frac{F_{ele}}{mg}}$$

$$F_{ele} = 3mg$$

**Gabarito: A**

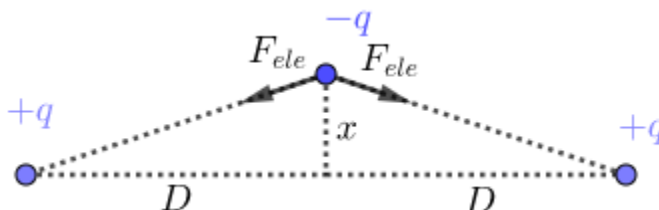
**22.**

Dois cargas positivas  $+q$  separadas por uma distância  $2D$ . No ponto médio do segmento que une as cargas coloca-se uma carga  $-q$ . Desloca-se  $-q$  levemente da sua posição de equilíbrio, de tal forma que ela passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio mantendo-se sobre a mediatriz do segmento que une as cargas  $+q$ . Determine o período da oscilação, considerando que a perturbação em  $-q$  seja muito pequena. Todas as cargas têm massa  $m$ .

Adote: para ângulos pequenos vale a aproximação:  $\text{sen} \alpha \cong \text{tg} \alpha \cong \alpha(\text{rad})$

**Comentários:**

As forças que agem em  $-q$ , desprezando a força peso em relação a ordem de grandeza quando comparada a força elétrica, temos:



Calcularemos a força resultante sobre  $-q$  em função de seu deslocamento  $x$ :

$$F_{res} = -2F_{ele} \text{sen} \alpha = -2 \frac{kq^2}{\left(\frac{D}{\cos \alpha}\right)^2} \text{sen} \alpha$$

Fazendo as aproximações  $\text{sen} \alpha \approx \tan \alpha$  e  $\cos \alpha \approx 1$  para pequenos ângulos, temos:

$$F_{res} = -2 \frac{kq^2}{D^2} \tan \alpha = -2 \frac{kq^2}{D^3} x$$

Caracterizando um MHS com frequência angular dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{2kq^2}{mD^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mD^3}{2kq^2}}$$

**Gabarito:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{mD^3}{2kq^2}}$**

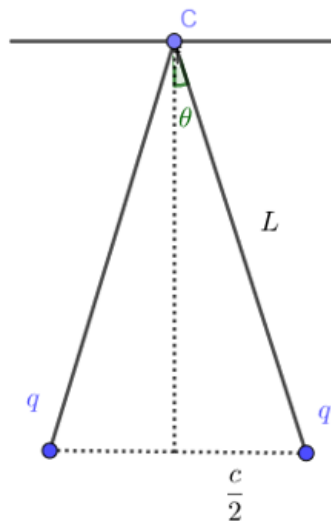
**23. (ITA-1993)**



Duas esferas condutoras, de massa  $m$ , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto por dois fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a  $L$ . As cargas das esferas são tais que elas estarão em equilíbrio quando a distância entre elas é igual a  $a$  ( $a \ll L$ ). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância  $b$  ( $b \ll L$ ) entre as esferas, quando após se tocarem o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?

- a)  $b = \frac{a}{2}$
- b)  $b = a\sqrt{2}/2$
- c)  $b = a\sqrt{3}/2$
- d)  $b = a/\sqrt[3]{2}$
- e)  $b = a/\sqrt[3]{4}$

**Comentários:**



Considere a situação na qual as esferas encontram equilíbrio a uma distância arbitrária  $c \ll L$ :

Vertical –

$$T \cos \theta = mg \approx T \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –

$$T \sin \theta = F_{ele} \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo (1) em (2), temos;

$$mg \left( \frac{c}{2L} \right) = \frac{kq^2}{c^2}$$
$$\frac{mg}{2Lk} = \frac{q^2}{c^3} = \text{const.}$$

Note que, após se tocarem, a carga final de ambas as esferas é metade da inicial, logo:

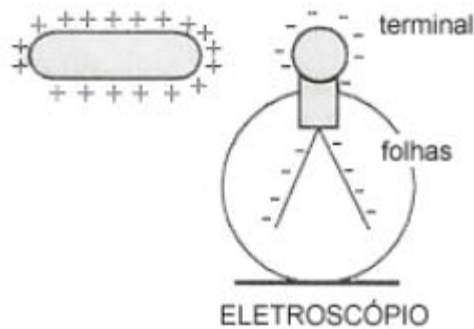
$$\frac{q_0^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{q_0}{2}\right)^2}{b^3}$$
$$b = \frac{a}{4^{\frac{1}{3}}}$$

**Gabarito: E**

---

**24. (ITA-1996)**

Um objeto metálico carregado positivamente, com carga  $+Q$ , é aproximado de um eletroscópio de folhas, que foi previamente carregado negativamente com carga igual a  $-Q$ .



- I) À medida que o objeto for se aproximando do eletroscópio, as folhas vão se abrindo além do que já estavam.
- II) À medida que o objeto for se aproximando, as folhas permanecem como estavam.
- III) Se o objeto tocar no terminal externo do eletroscópio, as folhas devem necessariamente fechar-se.
- a) Somente a afirmativa I é correta.
- b) As afirmativas II e III são corretas.
- c) As afirmativas I e III são corretas.
- d) Somente a afirmativa III é correta.
- e) Nenhuma das afirmativas é correta.

**Comentários:**

- I) Incorreto. O objeto atrai mais carga negativa para o terminal, diminuindo a carga nas folhas e, conseqüentemente, fazendo-as se aproximarem.
- II) Incorreto. Veja (I).
- III) Correto. A carga total dos dois condutores é  $(-Q) + Q = 0$ , logo o contato entre os dois produz a neutralização de ambos.

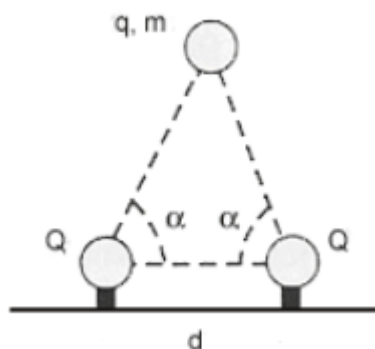
**Gabarito: D**

---

### 25. (ITA-1997)

Uma pequena esfera de massa  $m$  e carga  $q$ , sob influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas  $Q$  fixas, colocadas a uma distância  $d$  no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as cargas fixas estejam no mesmo plano vertical e que sejam iguais a os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é então:

- a)  $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$   
 b)  $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{g}$   
 c)  $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$   
 d)  $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}{g}$   
 e)  $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{g}$



#### Comentários:

Equilibrando as forças na direção vertical:

$$2F_{ele} \text{sen } \alpha = mg$$

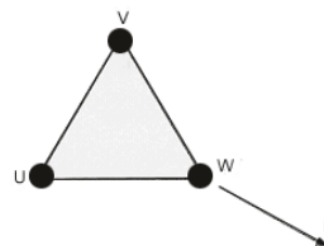
$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq \text{sen } \alpha}{\left(\frac{d}{2 \cos \alpha}\right)^2} = mg$$

$$m = \frac{8}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq \cos^2 \alpha \text{sen } \alpha}{d^2 g}$$

#### Gabarito: D

### 26. (ITA-1998)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U, V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura.



Conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.  
 b) As cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.  
 c) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto, com uma delas de sinal diferente das demais.  
 d) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.

e) A configuração descrita é fisicamente impossível.

### Comentários:

Para termos uma resultante na direção desejada, as cargas de U e V devem ter o mesmo módulo e sinal, digamos  $q$ . Assim a carga em W deve ser  $-2q$  (somatório das cargas é nulo), logo a força entre as cargas seria de atração, direcionada para dentro do triângulo.

### Gabarito: E

---

#### 27. (ITA-1998)

Suponha que o elétron em um átomo de hidrogênio se movimenta em torno de um próton em uma órbita circular de raio  $R$ . Sendo  $m$  a massa do elétron e  $q$  o módulo da carga de ambos, elétron e próton, conclui-se que o módulo da velocidade do elétron é proporcional a:

- a)  $q \cdot \sqrt{\frac{R}{m}}$
- b)  $\frac{q}{\sqrt{mR}}$
- c)  $\frac{q}{m} \cdot \sqrt{R}$
- d)  $\frac{qR}{\sqrt{m}}$
- e)  $\frac{q^2 R}{\sqrt{m}}$

### Comentários:

Aplicando  $F = ma$  ao elétron, temos;

$$R_{cent} = ma_{cent} \Rightarrow k \frac{q^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$
$$v = \sqrt{k} \frac{q}{\sqrt{mR}}$$

### Gabarito: B

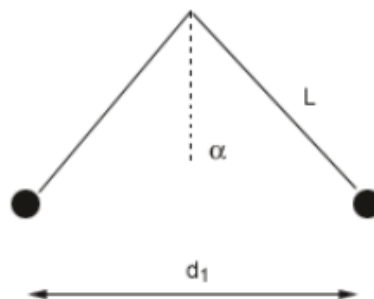
---

#### 28. (ITA-2001)

Dois partículas têm massas iguais a  $m$  e cargas iguais a  $Q$ . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força  $F$  quando separadas de uma distância  $d$ . Em seguida, estas partículas são penduradas de um mesmo ponto, por fios de comprimento  $L$  e ficam equilibradas quando a distância entre elas é  $d_1$ . A cotangente do ângulo que cada fio forma com a vertical, em função de  $m, g, d, d_1, F$  e  $L$ , é:



- a)  $\frac{mgd_1}{Fd}$
- b)  $\frac{mgLd_1}{Fd^2}$
- c)  $\frac{mgd_1^2}{Fd^2}$
- d)  $\frac{mgd^2}{Fd_1^2}$
- e)  $\frac{Fd^2}{mgd_1^2}$



**Comentários:**

Equilibrando as forças agindo sobre uma carga:

Vertical –

$$T \cos \alpha = mg \quad (eq. 1)$$

Horizontal –

$$T \sin \alpha = k \frac{Q^2}{d_1^2} \quad (eq. 2)$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\cotg \alpha = \frac{mgd_1^2}{kQ^2} \quad (eq. *)$$

A questão fornece a força entre as cargas para uma distância  $d$ :

$$F = \frac{kQ^2}{d^2}$$
$$kQ^2 = d^2 F \quad (eq. 3)$$

Substituindo (3) em (\*), temos:

$$\cotg \alpha = \frac{mgd_1^2}{d^2 F}$$

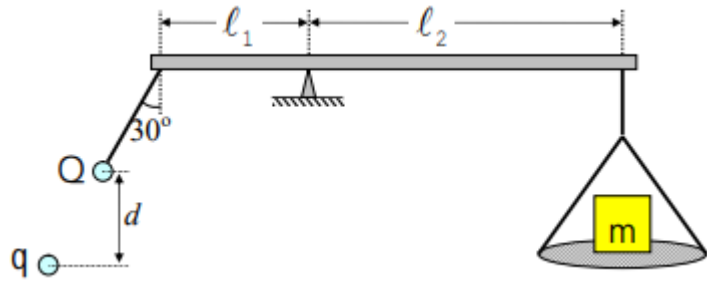
**Gabarito: C**

**29. (ITA – 2010)**

Considere uma balança de braços desiguais, de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , conforme mostra a figura. No lado esquerdo encontra-se pendurada uma carga de magnitude  $Q$  e massa desprezível, situada a uma certa distância de outra carga,  $q$ . No lado direito encontra-se uma massa  $m$  sobre um prato de massa desprezível. Considerando as cargas como pontuais e desprezível a massa do prato da direita, o valor de  $q$  para equilibrar a massa  $m$  é dado por:



- A)  $-mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- B)  $-8mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- C)  $-4mgl_2d^2/(3k_0Ql_1)$
- D)  $-2mgl_2d^2/(\sqrt{3}k_0Ql_1)$
- E)  $-8mgl_2d^2/(3\sqrt{3}k_0Ql_1)$



**Comentários:**

No equilíbrio, o torque total do sistema deve ser nulo em relação a qualquer ponto. Calculando o torque em relação ao ponto de suporte da balança:

$$F_{ele}l_1 \sin 60^\circ = mgl_2 \Rightarrow \frac{k_0Q|q|l_1}{\left(\frac{d}{\cos 30^\circ}\right)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = mgl_2$$

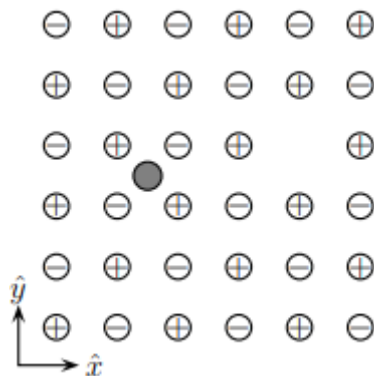
$$|q| = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{mgl_2d^2}{k_0Ql_1}$$

A força deve ser de atração, logo  $q$  é negativo.

**Gabarito: E**

**30. (ITA – 2014)**

A figura mostra parte de uma camada de um cristal tridimensional infinito de sal de cozinha, em que a distância do átomo de  $Na$  ao de seu vizinho  $Cl$  é igual a  $a$ . Considere a existência dos seguintes defeitos neste cristal: ausência de um átomo de  $Cl$  e a presença de uma impureza de lítio (esfera cinza), cuja carga é igual à fundamental  $+e$ , situada no centro do quadrado formado pelos átomos de  $Na$  e  $Cl$ . Obtenha as componentes  $F_x$  e  $F_y$  da força eletrostática resultante  $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$  que atua no átomo de lítio. Dê sua resposta em função de  $e$ ,  $a$  e da constante de Coulomb  $K_0$ .

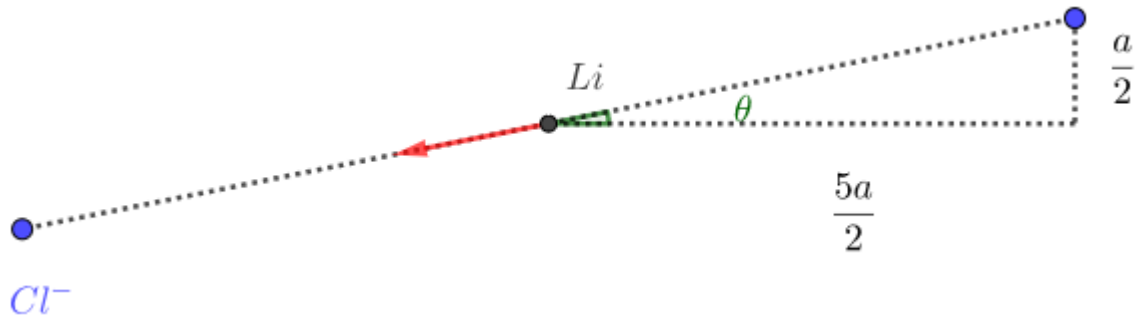


**Comentários:**

Considere uma carga arbitrária no cristal, essa carga sempre possuirá uma simétrica em relação ao átomo de lítio (cristal infinito), a qual cancela a força que esta exerce sobre tal átomo.



Assim, a força resultante será a força da única carga que não tem simétrica em relação ao átomo de Lítio:



$$\vec{F} = k \frac{e^2}{\frac{26a^2}{4}} (-\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})$$

$$\vec{F} = -\frac{4}{26\sqrt{26}} \frac{ke^2}{a^2} (5\hat{x} + \hat{y})$$

**Gabarito:**  $F_x = -\frac{20}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$   $F_y = -\frac{4}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$

### 31. (ITA – 2015)

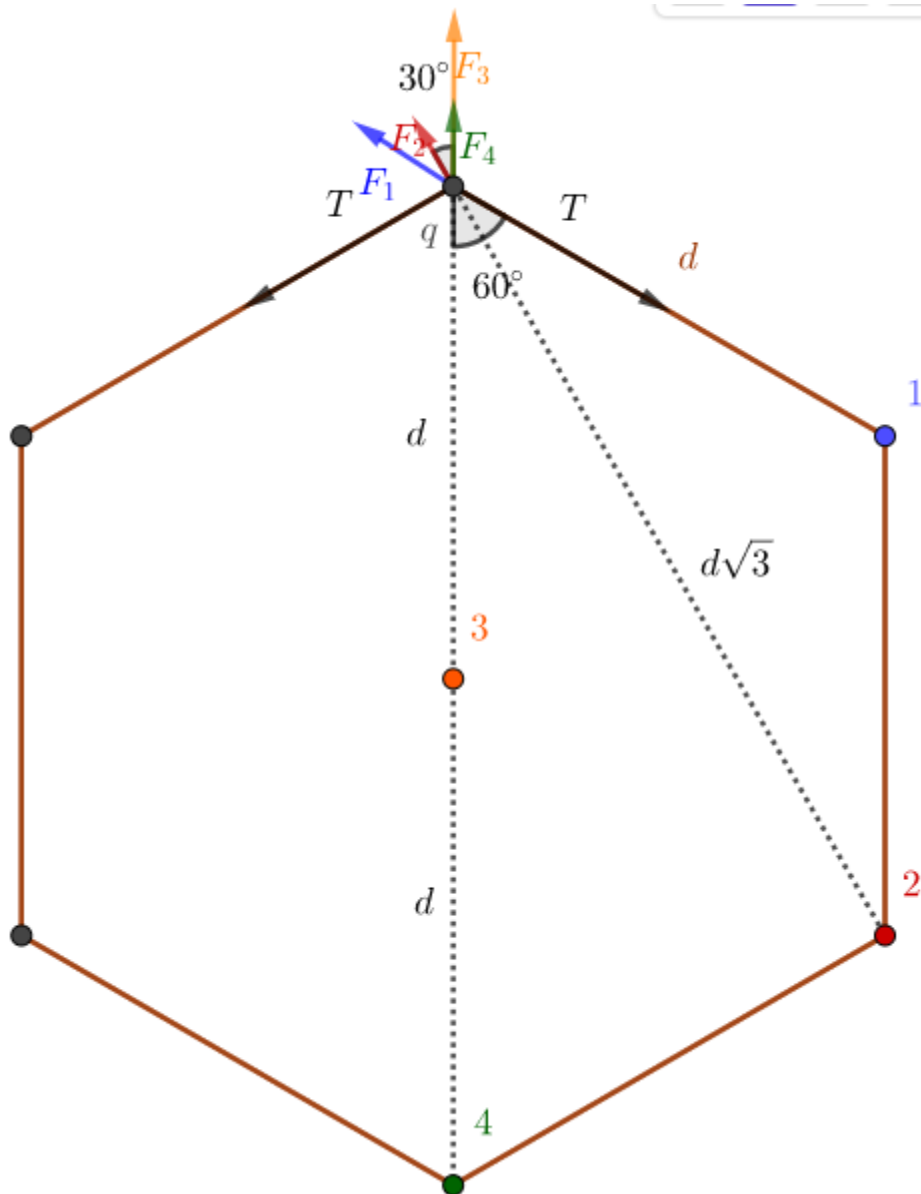
Uma carga  $q$  ocupa o centro de um hexágono regular de lado  $d$  tendo em cada vértice uma carga idêntica  $q$ . Estando todas as sete cargas interligadas por fios inextensíveis, determine as tensões em cada um deles.

#### Comentários:

Na nossa opinião essa questão poderia ser anulada, ou a resposta seria impossível determinar as tensões.

Sendo o sistema simétrico, precisamos analisar o equilíbrio de apenas uma das cargas nos vértices. Encontramos que a resultante da força elétrica agindo sobre essa carga tem direção radial e sentido para fora.

Considere a seguinte situação:



$$2T \cos 60^\circ = 2F_1 \cos 60^\circ + 2F_2 \cos 30^\circ + F_3 + F_4$$

$$T = \frac{kq^2}{d^2} + \sqrt{3} \frac{kq^2}{3d^2} + \frac{kq^2}{d^2} + \frac{kq^2}{4d^2}$$

$$T = \frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \frac{kq^2}{d^2}$$

Perceba que as cargas estão em equilíbrio, agora se ligarmos todos os pares que ainda falta serem ligados com fios, teremos uma solução para o problema inicial, com os esses fios frouxos e os fios externos com a tensão calculada acima.

Do mesmo modo, colocando apenas fios ligando os vértices ao centro renderia uma solução para o problema original, com o resto dos fios frouxos. Assim esse problema não tem solução única.

**Gabarito:**  $T = \left( \frac{27+4\sqrt{3}}{12} \right) \cdot \frac{kQ^2}{d^2}$

32. (ITA – 2015)



Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento  $\ell$ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas  $q_1$  e  $q_2$ , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

I. Essa posição de equilíbrio é estável?

II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?

III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?

A) Não. Sim. Não.

B) Não. Sim. Sim.

C) Sim. Não. Não.

D) Sim. Não. Sim.

E) Sim. Sim. Não.

#### Comentários:

I) Correto. Se a esfera for deslocada, irá aproximar-se da carga no lado do deslocamento, sofrendo maior repulsão, de modo que a resultante de forças sobre ela aponta no sentido do equilíbrio anterior.

II) Incorreto. Se deslocarmos a esfera na direção perpendicular, as duas forças exercidas sobre ela tendem a acelerá-la para longe.

III) Incorreto. Se a esfera for deslocada, na direção da linha que liga as duas, irá aproximar-se da carga no lado do deslocamento, sofrendo maior atração, de modo que a resultante de forças sobre ela aponta no sentido de afastamento ao equilíbrio anterior.

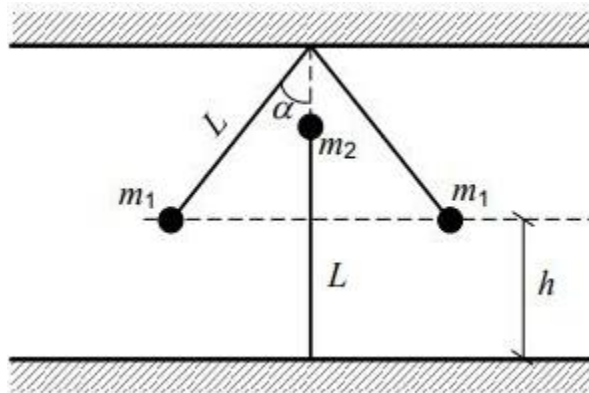
#### Gabarito: oficial C.

---

### 33. (IME 2019 – 2ª fase)

A figura acima mostra um sistema em equilíbrio composto por três corpos presos por tirantes de comprimento  $L$  cada, carregados com cargas iguais a  $Q$ . Os corpos possuem massas  $m_1$  e  $m_2$ , conforme indicados na figura. Sabendo que o tirante conectado à massa  $m_2$  não está tensionado, determine os valores de  $m_1$  e  $m_2$  em função de  $k$  e  $Q$ .





Dados:

constante dielétrica do meio:  $k [Nm^2/C^2]$ ;

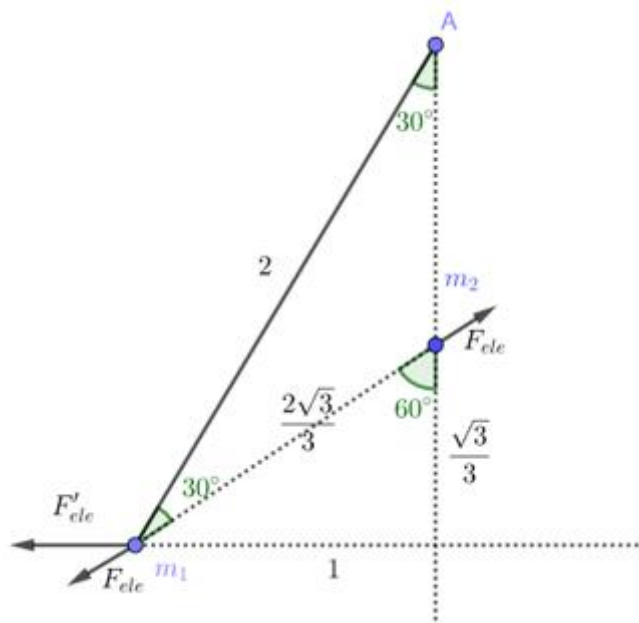
carga elétrica dos corpos:  $Q [C]$ ;

comprimento dos tirantes:  $L = 2 m$ ;

altura:  $h = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) m$

aceleração da gravidade:  $g = 10 m/s^2$ ; e  $\alpha = 30^\circ$ .

Comentários:



Equilibrando as forças na vertical para  $m_2$ , temos;

$$m_2 g = 2 F_{ele} \cos 60^\circ$$

$$m_2 g = \frac{k Q^2}{4 \frac{3}{3}}$$

$$m_2 = \frac{3kQ^2}{4g}$$

Equilibrando as forças na direção perpendicular ao tirante, temos:

$$F_{ele} \sen 30^\circ + F'_{ele} \sen 60^\circ = m_1 g \sen 30^\circ$$

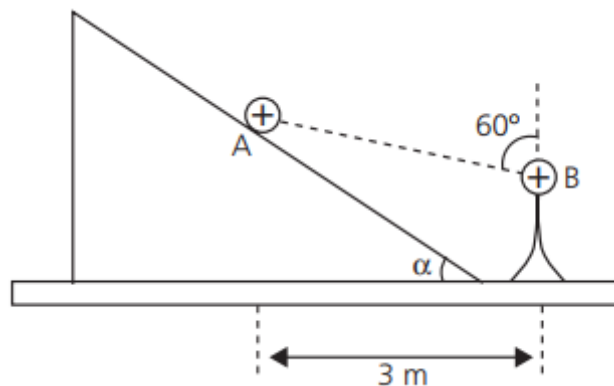
$$\frac{kQ^2}{4} \frac{1}{2} + \frac{kQ^2 \sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} = m_1 g$$

$$m_1 = \frac{kQ^2}{40} (3 + \sqrt{3})$$

**Gabarito:**  $m_1 = \frac{(3+\sqrt{3})kQ^2}{40}$  e  $m_2 = \frac{3kQ^2}{40}$

### 34.

Uma pequena esfera A1 de carga +Q e massa m, encontra-se em repouso nas proximidades de um plano inclinado, quando dela é aproximada lentamente uma segunda esfera B, de carga +Q, fixa sobre um suporte isolante.



Devido à repulsão eletrostática, a esfera A desloca-se ao longo da rampa sem atrito, estacionando na posição ilustrada anteriormente. Determine o ângulo  $\alpha$ .

Dados: Constante eletrostática =  $9 \times 10^9$  (SI)  $g = 10 \text{ m/s}^2$   $Q = 2mC$ ,  $m = 0,3 \text{ g}$ .

### Comentários:

Equilibrando as forças na esfera A:

Vertical –

$$F_{ele} \cos 60^\circ + N \cos \alpha = mg \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –

$$F_{ele} \sen 60^\circ = N \sen \alpha \quad (\text{eq. 2})$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{kQ^2}{\left(\frac{3}{\sin 60^\circ}\right)^2} \sin 60^\circ}{mg - \frac{kQ^2}{\left(\frac{3}{\sin 60^\circ}\right)^2} \cos 60^\circ}$$

$$\tan \alpha = \frac{10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \frac{3\sqrt{3}}{4 \cdot 2}}{3 \cdot 10^{-3} - \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}} = \sqrt{3}$$

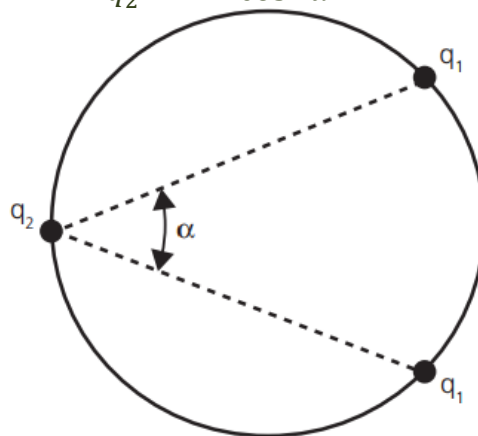
$$\alpha = 60^\circ$$

**Gabarito:  $\alpha = 60^\circ$**

**35.**

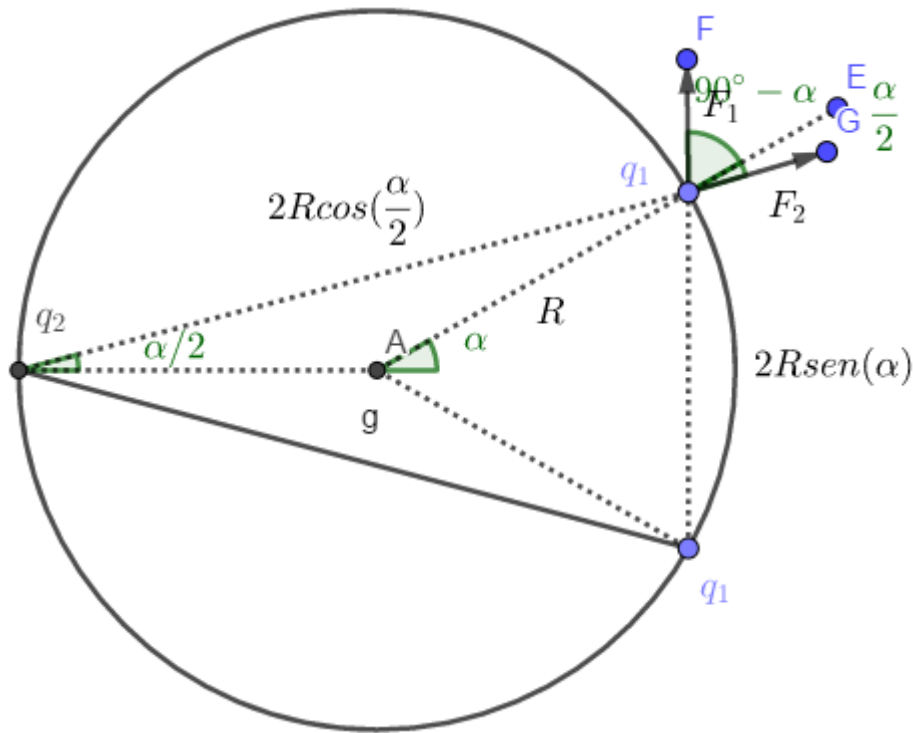
Três cargas puntiformes podem mover-se vinculadas (sem atrito) a um aro circular apoiado num plano horizontal. Duas das cargas têm o mesmo valor  $q_1$  e a terceira tem valor  $q_2$ . Mostre que na posição de equilíbrio, temos que:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1 - \cos \alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$$



**Comentários:**

Na direção radial o aro mantém as cargas fixas, assim queremos garantir uma resultante tangencial nula: (Note que a força que  $q_2$  exerce deve ser a mesma para ambas as cargas, logo o raio que se liga a  $q_2$  secciona o ângulo  $\alpha$  ao meio)



$$F_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = F_1 \operatorname{sen} 90^\circ - \alpha$$

$$k \frac{q_1 q_2}{(2R \cos(\frac{\alpha}{2}))^2} \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) = k \frac{q_1^2}{(2R \operatorname{sen} \alpha)^2} \cos \alpha$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha \cos^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{4 \operatorname{sen}^3(\frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha}$$

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{16 (\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))^3}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 (2 \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))^3}{\cos^2 \alpha} = \frac{2(1 - \cos \alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$$

**Gabarito:**  $\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1 - \cos \alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$

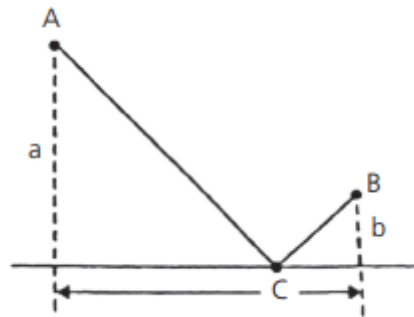
36.

Os pontos fixos A e B estão eletrizadas com carga  $+Q$  cada um. O ponto C, eletrizado com carga  $-Q$  pode deslizar livremente sob a guia retilínea e horizontal, perfeitamente lisa. Verifica-se que o ponto C fica em equilíbrio quando o segmento  $\overline{AC}$  é normal a  $\overline{BC}$ .

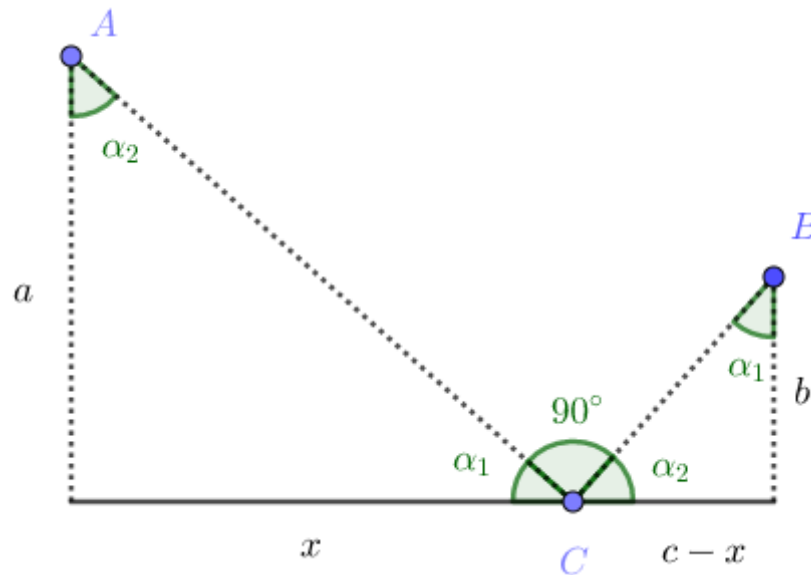
Demonstre que entre a, b e c vale a relação:

$$a^3 + b^3 = abc$$





Comentários:



Como os dois triângulos acima são semelhantes, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{c-x}{b}$$

$$x = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \quad (\text{considere } x > c - x)$$

Além disso:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{c-x}{a} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

Devemos ter uma resultante nula na direção horizontal:

$$F_1 \cos \alpha_1 = F_2 \cos \alpha_2 = F_2 \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_1}{F_2} = \left( \frac{CB}{AC} \right)^2$$

$$\frac{2a}{c + \sqrt{c^2 - 4ab}} = \left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)^2$$

$$4a^2 = [c^2 - (c^2 - 4ab)] \left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)$$

$$\frac{2a^2}{b} = c - \sqrt{c^2 - 4ab}$$

$$c^2 - 4ab = \left(c - \frac{2a^2}{b}\right)^2$$

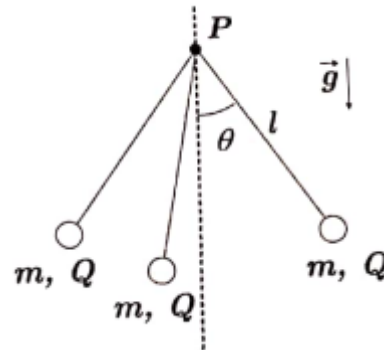
$$\boxed{a^3 + b^3 = abc}$$

**Gabarito:**  $a^3 + b^3 = abc$

**37. (ITA – 2020)**

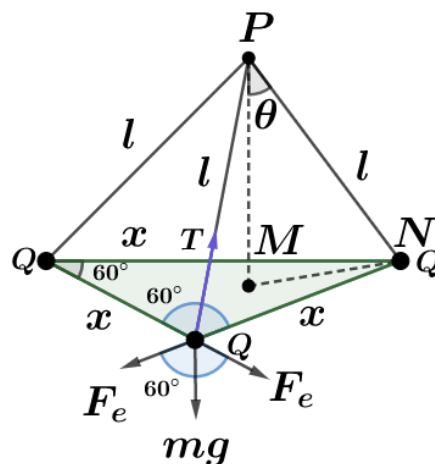
Três esferas idênticas de massa  $m$ , carga elétrica  $Q$  e dimensões desprezíveis, são presas pelas extremidades de fios isolantes e inextensíveis de comprimento  $l$ . As demais pontas dos fios são fixadas a um ponto  $P$ , que sustenta as massas. Na condição de equilíbrio do sistema, verifica-se que o ângulo entre um dos fios e a direção vertical é  $\theta$ , conforme mostra a figura. Sendo  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do meio, o valor da carga elétrica  $Q$  é dada por

- a)  $l \sqrt{12\pi\epsilon_0 mg \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\theta}$
- b)  $l \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$
- c)  $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$
- d)  $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{3}}}$
- e)  $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}$



**Comentários:**

De acordo com o enunciado, na condição de equilíbrio, temos a seguinte configuração espacial das cargas:



Pelo equilíbrio das forças, temos:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2 \cdot F_e \cdot \cos 60^\circ}{m \cdot g}$$

Pela geometria no triângulo da base formado pelas cargas, temos:

$$l \cdot \operatorname{sen}(\theta) = MN = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = l \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

Portanto:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{m \cdot g}$$

$$Q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot \operatorname{tg}(\theta)}{\sqrt{3}}} \cdot l \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

$$q = l \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot g \cdot \operatorname{tg}(\theta)\sqrt{3}}$$

**Gabarito: C**

---

## 13. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembramos conceitos estudados no ensino fundamental e aprofundamos o nosso conhecimento em alguns assuntos. Nessa aula, estudamos a natureza elétrica da matéria, a Lei de Coulomb e fomos um pouco mais além.

Ministramos apenas uma noção de Cálculo Diferencial e Integral. Nosso objetivo não é saber tudo de Cálculo agora, apenas ter um pequeno conhecimento para aplicar em Física. Esse assunto não faz parte do cronograma proposto pelo IME. Entretanto, algumas vezes já apareceram questões que exigiam do aluno algum conhecimento.

Atenção! Não seja orgulhoso, achando que precisa estudar afundo esse tema e que isto vai garantir sua aprovação. Não é esse espírito. Não há problema algum em pular uma questão de Cálculo no vestibular. Tenho certeza de que o número de acertos nela será baixíssimo e não será essa questão fator discriminante na sua aprovação.

Nos próximos capítulos vamos trabalhar o conceito de campo elétrico e de potencial elétrico. Após vermos estes dois conceitos, muitas dúvidas serão esclarecidas no que diz respeito as interações das cargas elétricas.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto

## 14. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.
- [6] G. Iezzi, C. Murakami, N. J. Machado. Fundamentos de Matemática Elementar volume 8. 7ª ed. Atual Editora, 2013. 280p.



## 15. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	14/02/2020

