FRENTE 1

AULAS 19 E 20

Logaritmos

Definição de logaritmo

Para $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Consequências da definição

- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_b 1 = 0$
- $b^{\log_b a} = a$

Propriedades

Se $x > 0$, $y > 0$, $0 < b \neq 1$ e $k \neq 0$, então:

- $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x^n = n \log_b x$
- $\log_{b^k} x = \frac{1}{k} \log_b x$

Mudança de base

Se $a > 0$, $0 < b \neq 1$ e $0 < c \neq 1$, então:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Exercícios de sala

1. **IFMA 2018** Considerando $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 7 \cong 0{,}845$, qual é o valor aproximado de $\log_8 49$?
   a) 2,05
   b) 1,87
   c) 2,23
   d) 2,19
   e) 2,37

2. **EEAR-SP 2019** O valor de $\log_3 1 + \log_{\left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{64}{27}\right)$ é:
   a) $\frac{3}{4}$
   b) $\frac{9}{4}$
   c) 0
   d) -3

3. **EEAR-SP 2020** Se $A = \log_4\left(\sqrt{3}+1\right)$ e $B = \log_4\left(\sqrt{3}-1\right)$ então A + B é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 0

4. **FICSAE-SP 2022** Os fatores do produto P obedecem sempre o mesmo padrão descrito:

$$P = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2021} 2022$$

Nessa condição, P é um número real entre

a) 1 e 2.
b) 7 e 8.
c) 10 e 11.
d) 3 e 4.
e) 12 e 13.

5. **Enem 2020** A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Disponível em: http://klein.sbm.org.br.
Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B. No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é:

a) $Y = \log(A) - B \cdot X$

b) $Y = \frac{\log(A)}{X + \log(B)}$

c) $Y = \frac{\log(A)}{B} - X$

d) $Y = \frac{\log(A)}{B \cdot X}$

e) $Y = \frac{\log(A)}{X^B}$

6. **ITA-SP 2022** Se

$$x = 9\log_{120} 2 + 3\log_{120} 3 + 2\log_{14\,400} 125$$

Podemos afirmar que

a) $x = 2$.
b) $x = 3$.
c) $x = 4$.
d) $x = 5$.
e) $x = 6$.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 7

I. Leia as páginas de **6** a **8**.
II. Faça os exercícios de **1** a **4** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos de **1** a **4**, **6**, **7** e de **10** a **14**.

FRENTE 1

AULAS 21 E 22

Logaritmos decimais e equação logarítmica

Logaritmos decimais

$\log a = x \Leftrightarrow 10^x = a$, com $a > 0$

$10^p < N < 10^q \Rightarrow p < \log N < q$

Equação logarítmica

$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$, para $x > 0$, $y > 0$ e $0 < b \neq 1$

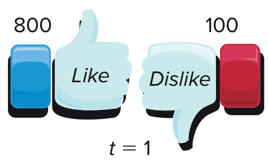
Exercícios de sala

1. **Uerj 2016** Admita que a ordem de grandeza de uma medida x é uma potência de base 10, com expoente n inteiro, para $10^{n-\frac{1}{2}} \leq x < 10^{n+\frac{1}{2}}$.

   Considere que um terremoto tenha liberado uma energia E, em joules, cujo valor numérico é tal que $\log_{10} E = 15{,}3$. A ordem de grandeza de E, em joules, equivale a:

   a) 10^{14}
   b) 10^{15}
   c) 10^{16}
   d) 10^{17}

2. **Unesp 2022** Um vídeo postado na internet no 1º dia do ano obteve, nesse dia ($t = 1$), 800 *likes* e 100 *dislikes*.



   Estima-se que nos próximos dias ($t = 2, 3, 4, ...$) haverá um aumento diário de 10% nos *likes* acumulados e um aumento diário de 4,5% nos *dislikes* acumulados. Tais estimativas são válidas até o momento em que a razão entre *dislikes* e *likes* seja aproximadamente $\frac{1}{40}$, o que ocorrerá no valor inteiro de t mais próximo de

   a) $\log_{0,95} 0{,}12$.
   b) $\log_{0,95} 0{,}19$.
   c) $\log_{0,05} 0{,}19$.
   d) $\log_{1,05} 1{,}9$.
   e) $\log_{0,05} 0{,}12$.

3. **Fuvest-SP 2021** Um aplicativo de videoconferências estabelece, para cada reunião, um código de 10 letras, usando um alfabeto completo de 26 letras. A quantidade de códigos distintos possíveis está entre

   Note e adote: $\log_{10} 13 \cong 1{,}114$ e $1 \text{ bilhão} = 10^9$.

   a) 10 bilhões e 100 bilhões.
   b) 100 bilhões e 1 trilhão.
   c) 1 trilhão e 10 trilhões.
   d) 10 trilhões e 100 trilhões.
   e) 100 trilhões e 1 quatrilhão.

4. **Uerj 2020** Ao se aposentar aos 65 anos, um trabalhador recebeu seu Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) no valor de R$ 50 000,00 e resolveu deixá-lo em uma aplicação bancária, rendendo juros compostos de 4% ao ano, até obter um saldo de R$ 100 000,00. Se esse rendimento de 4% ao ano não mudar ao longo de todos os anos, o trabalhador atingirá seu objetivo após x anos.
Considerando log (1,04) = 0,017 e log 2 = 0,301, o valor mais próximo de x é:

a) 10 **b)** 14 **c)** 18 **d)** 22

5. **Unicamp-SP 2021** Dados preliminares da pandemia do Covid-19 indicam que, no início da disseminação, em determinada região, o número de pessoas contaminadas dobrava a cada 3 dias. Usando log 2 ≅ 0,3 e log 5 ≅ 0,7, após o primeiro contágio, o número de infectados atingirá a marca de 4 mil entre:

a) o 18º dia e o 24º dia.
b) o 25º dia e o 31º dia.
c) o 32º dia e o 38º dia.
d) o 39º dia e o 45º dia.

6. **FMJ-SP 2020** Na maioria dos restaurantes do Líbano, o equipamento para fumar o narguilé é levado à mesa do usuário por garçons jovens encarregados de acendê-lo. Um estudo mostrou que esses garçons têm níveis urinários médios de cotinina (um metabólito da nicotina) de $7{,}8 \cdot 10^{-4}$ g/mL, sendo que o valor de referência é de, no máximo, $2 \cdot 10^{-8}$ g/mL. De acordo com o valor da meia-vida da cotinina, o número n de dias que esses garçons precisam ficar sem contato com o narguilé para que o nível urinário de cotinina volte aos valores de referência é determinado pela seguinte equação:

$$2 \cdot 10^{-8} = 7{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Considerando log 2 = 0,30, log 3 = 0,48 e log 13 = 1,11, tem-se que n é igual a, aproximadamente,

a) 18 **b)** 15 **c)** 30 **d)** 42 **e)** 11

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 7

I. Leia as páginas de **8** a **10**.
II. Faça os exercícios de **5** a **7** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos de **18** a **29**.

FRENTE 1

AULAS 23 A 25

Função e inequação logarítmicas

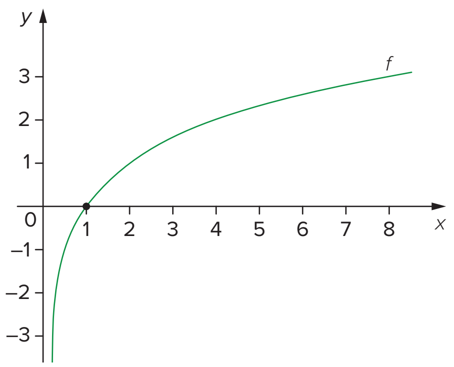
Função logarítmica

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

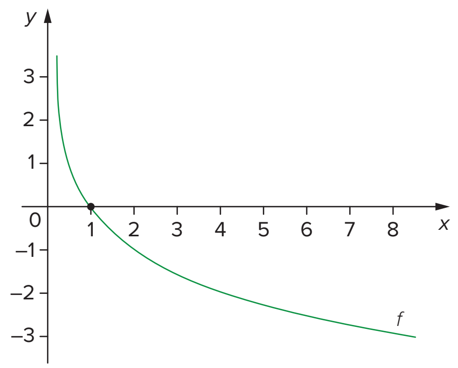
$$f(x) = \log_b x$$

Com $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \neq 1$.
A função f é bijetora.

- se $b > 1$, então f é crescente:



- se $0 < b < 1$, então f é decrescente:



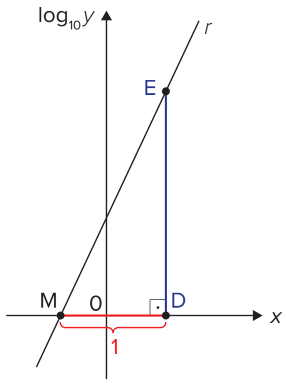
Inequação logarítmica

Para $x > 0$ e $y > 0$:

- se $b > 1$, as funções logarítmicas são crescentes, então:
$$\log_b x > \log_b y \Leftrightarrow x > y$$
- se $0 < b < 1$, as funções logarítmicas são decrescentes, então:
$$\log_b x > \log_b y \Leftrightarrow x < y$$

Exercícios de sala

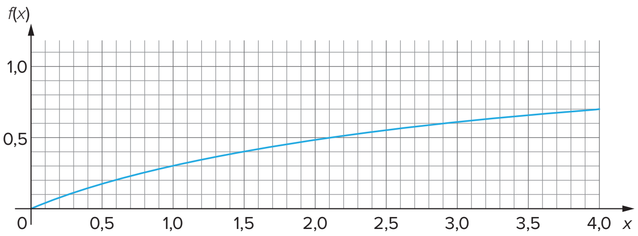
1. **FICSAE-SP 2021** Seja uma função exponencial, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = 5 \cdot 2^{3x}$. A reta r, indicada na figura, representa o gráfico de $\log_{10} y$, em função de x.



A área do triângulo MED, em unidades de área do sistema de eixos ortogonais, é igual a:

a) $\log_5 2$
b) $\log \sqrt{8}$
c) $\log_2 5$
d) $\log 2$
e) $\log 4$

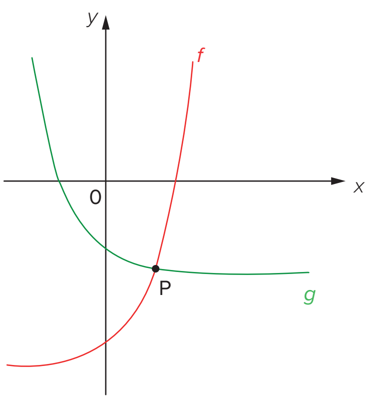
2. FCMSCSP 2021 Observe o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log(x + 1)$ para valores reais de x tais que $0 \leqslant x \leqslant 4$.



Consultando o gráfico, o valor de $\log 13 - \log 4$ é, aproximadamente,

a) 0,5.
b) 0,3.
c) 0,4.
d) 0,6.
e) 0,2.

3. Famerp-SP 2022 A figura mostra os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas por $f\ \ x\ = 2^x - 8$ e $g(x) = \dfrac{1}{2^x} - 4$. O ponto P indica a interseção dos gráficos dessas funções.



A abscissa x, do ponto P, é igual a

a) $\log_2 (2 + \sqrt{5})$.
b) $\log_2 (2 + \sqrt{2})$.
c) $\log_2 (1 + 2\sqrt{2})$.
d) $\log_2 (3 + \sqrt{3})$.
e) $\log_2 (3 + \sqrt{5})$.

4. Unicamp-SP 2021 Se $f(x) = \log_{10}(x)$ e $x > 0$, então $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(100x)$ é igual a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

5. FCMSCSP 2022 Considere as funções

$$f(x) = \log_3 \sqrt{-x^2 + 8x - 7} \text{ e}$$

$$g(x) = \sqrt{\log_3\left(-x^2 + 8x - 7\right)}$$

delimitadas a valores reais de x tal que $2 \leqslant x \leqslant 6$. A diferença entre os valores máximos de $g(x)$ e $f(x)$, nessa ordem, é igual a

a) $\dfrac{9}{41}$.
b) $\sqrt{2} - 1$.
c) $\sqrt{3} - 1$.
d) $\dfrac{1}{3}$.
e) $\dfrac{1}{9}$.

FRENTE 1

6. **PUC-PR 2015** Suponha que a vazão de água de um caminhão de bombeiros se dá pela expressão $V(t) = V_0 \cdot 2^{-t}$, em que V_0 é o volume inicial de água contido no caminhão e t é o tempo de escoamento em horas. Qual é, aproximadamente, utilizando uma casa decimal, o tempo de escoamento necessário para que o volume de água escoado seja 10% do volume inicial contido no caminhão?

Dado: utilize $\log 2 \cong 0,3$.

a) 3 h e 30 min.
b) 3 h e 12 min.
c) 3 h e 18 min.
d) 2 h e 15 min.
e) 2 h e 12 min.

7. **Enem 2016** Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.
Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.
O tempo decorrido, em horas, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

a) 22.
b) 50.
c) 100.
d) 200.
e) 400.

8. **Fuvest-SP** O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$ é o intervalo:

a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$
b) $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$
c) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$
d) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$
e) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

9. O número de insetos cresce segundo a função $N(t) = 300 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$, sendo t ($t \geqslant 0$) o tempo medido em dias. Sabendo que $\log 2 \cong 0,30$ e $\log 3 \cong 0,48$, calcule:

a) O número inicial de insetos.
b) O número aproximado de insetos após 5 dias.
c) O número de dias para a população atingir 100 000.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 7

I. Leia as páginas de **10** a **15**.
II. Faça os exercícios de **9** a **11** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **31**, **32**, **34**, de **36** a **38**, **40**, **47** e de **59** a **61**.

AULA 26

Função modular

Definição

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Propriedades

a) $|a| \geqslant 0$, com $a \in \mathbb{R}$

b) $|-a| = |a|$, com $a \in \mathbb{R}$

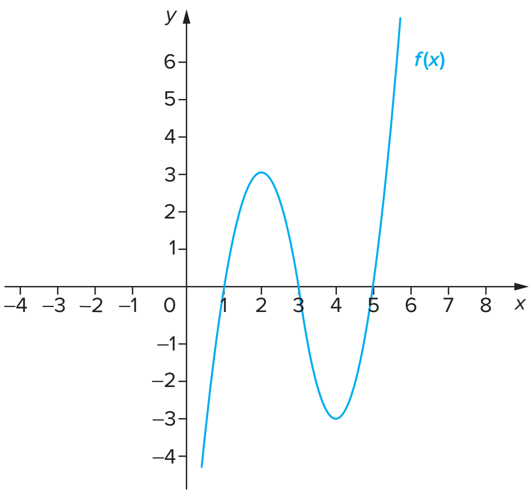
c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, com a e $b \in \mathbb{R}$

d) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$

e) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, com a e $b \in \mathbb{R}$

f) $\sqrt{a^2} = |a|$, com $a \in \mathbb{R}$

Gráfico de $g(x) = |f(x)|$



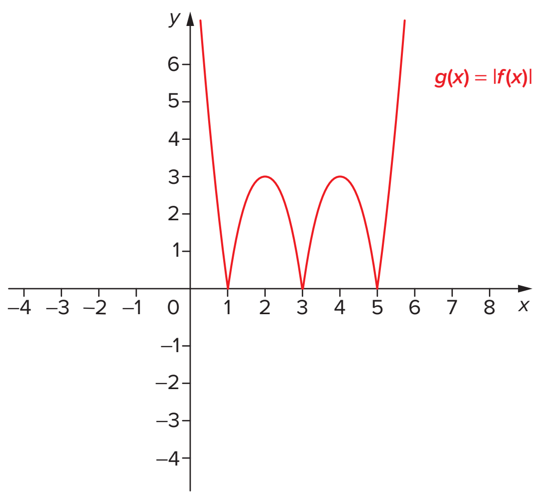
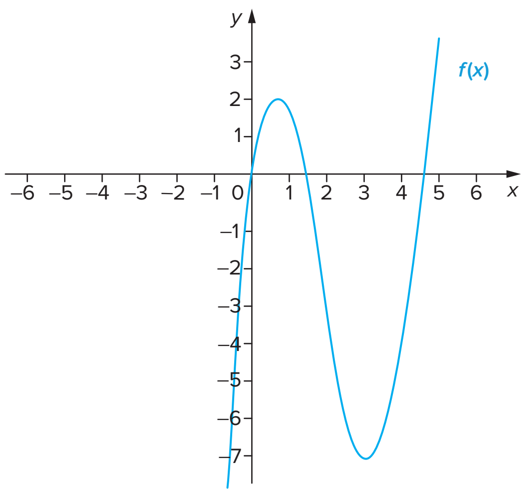
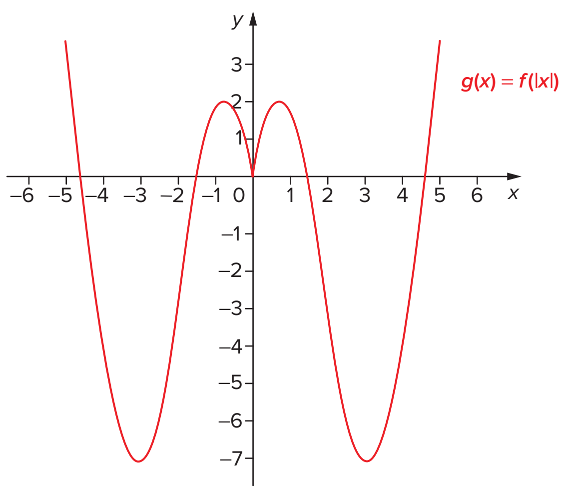


Gráfico de $g(x) = f(|x|)$





Exercícios de sala

1. **Mackenzie-SP 2014** Se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |3^x - 1|$, a afirmação correta sobre f é
   a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.
   b) f é uma função crescente para todo x real.
   c) f não é injetora nem sobrejetora.
   d) f é injetora mas não é sobrejetora.
   e) $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

2. **EEAR-SP 2019** Seja $f(x) = |3x - 4|$ uma função. Sendo $a \neq b$ e $f(a) = f(b) = 6$, então o valor de $a + b$ é igual a:
   a) $\frac{5}{3}$
   b) $\frac{8}{3}$
   c) 5
   d) 3

3. **UPF-RS 2021** A área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas por $f(x) = |x - 2| + 1$ e $g(x) = -|x| + 5$, é
   a) 4.
   b) 6.
   c) 10.
   d) 15.
   e) 20.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 8

I. Leia as páginas de **36** a **39**.
II. Faça os exercícios de **1** a **3**, **7** e **10** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **3**, **5**, **8**, **9**, **12** e **18**.

FRENTE 1

AULAS 27 E 28

Equação e inequação modulares

Equação modular

- $|f(x)| = k \Rightarrow f(x) = k$ ou $f(x) = -k$, com $k \geqslant 0$
- $|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$, com $g(x) \geqslant 0$
- $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$

Inequação modular

- $|f(x)| > k \Rightarrow f(x) > k$ ou $f(x) < -k$, com $k \geqslant 0$
- $|f(x)| < k \Rightarrow -k < f(x) < k$, com $k \geqslant 0$

Exercícios de sala

1. O conjunto solução da equação $|3x - 1| = x - 1$ é:

a) $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

b) $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{0, -1\}$

e) $S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

2. **EEAR-SP 2019** Dada a equação $|x^2 - 2x - 4| = 4$, a soma dos elementos do conjunto solução é

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 10

3. Determine o conjunto solução da inequação dupla $1 < |3x + 8| < 10$.

FRENTE 1

4. **Acafe-SC 2021 (Adapt.)** Julgue a afirmação como correta ou incorreta: O número de soluções inteiras da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ é 3.

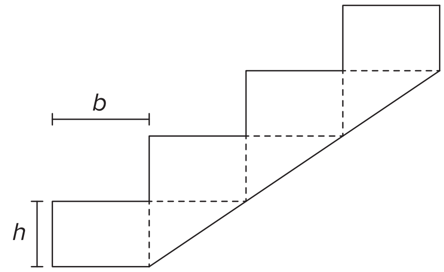
5. **ITA-SP** O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a:

a) -5
b) -1
c) 1
d) 2
e) 5

6. **Enem 2020** Uma casa de dois andares está sendo projetada. É necessário incluir no projeto a construção de uma escada para o acesso ao segundo andar. Para o cálculo das dimensões dos degraus utilizam-se as regras:

$$|2h + b - 63{,}5| \leq 1{,}5 \text{ e } 16 \leq h \leq 19,$$

nas quais h é a altura do degrau (denominada espelho) e b é a profundidade da pisada, como mostra a figura. Por conveniência, escolheu-se a altura do degrau como sendo $h = 16$. As unidades de h e b estão em centímetro.



Nesse caso, o mais amplo intervalo numérico ao qual a profundidade da pisada (b) deve pertencer, para que as regras sejam satisfeitas é

a) $30 \leq b$
b) $30 \leq b \leq 31{,}5$
c) $30 \leq b \leq 33$
d) $31{,}5 \leq b \leq 33$
e) $b \leq 33$

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 8

I. Leia as páginas de **39** a **41**.
II. Faça os exercícios **4** e de **8** a **10** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos **6**, **14**, de **19** a **21**, **23**, **24** e **26**.

FRENTE 1

AULAS 29 A 31

Circunferência trigonométrica

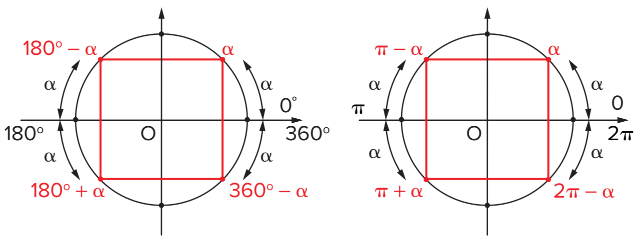
Unidades de ângulos

	Graus (°)	Radianos (rad)
1 volta	360	2π
$\mathbf{\frac{1}{2}}$ **volta**	180	π
$\mathbf{\frac{1}{4}}$ **volta**	90	$\frac{\pi}{2}$

Ângulo em radianos

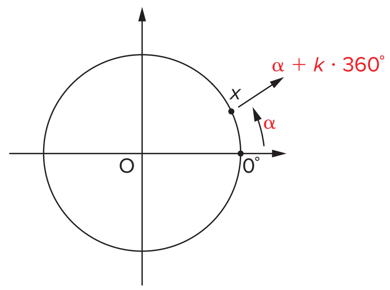
$$\alpha = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}}$$

Simetria (1ª volta)

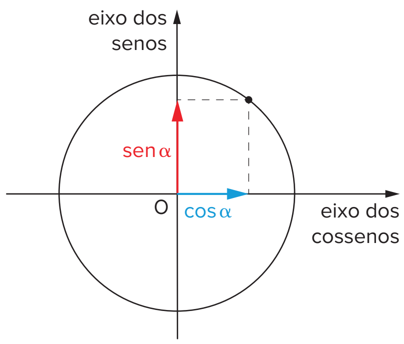


Expressão geral dos arcos

$$x = \alpha + k \cdot 360°, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$



Seno e cosseno



Exercícios de sala

1. EEAR-SP 2019 Se $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e α é um arco cuja extremidade pertence ao 2º quadrante, então α pode ser ________ $\frac{\pi}{6}$ rad.

a) 7
b) 17
c) 27
d) 37

2. EEAR-SP 2020 Ao subtrair $\cos 225°$ de $\text{sen } 420°$ obtém-se:

a) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

3. **Uece 2019** Se f e g são funções reais de variável real definidas por $f(x) = \text{sen}^2\, x$ e $g(x) = \cos^2 x$, então, seus gráficos, construídos em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, se cruzam exatamente nos pontos cujas abcissas são

a) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$, onde k é um número inteiro qualquer.

b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, onde k é um número inteiro qualquer.

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, onde k é um número inteiro qualquer.

d) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, onde k é um número inteiro qualquer.

4. **IFRR 2019** Se f é uma função real dada por $f(x) = 2\text{sen}\, x - 1$, então é CORRETO afirmar que:

a) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

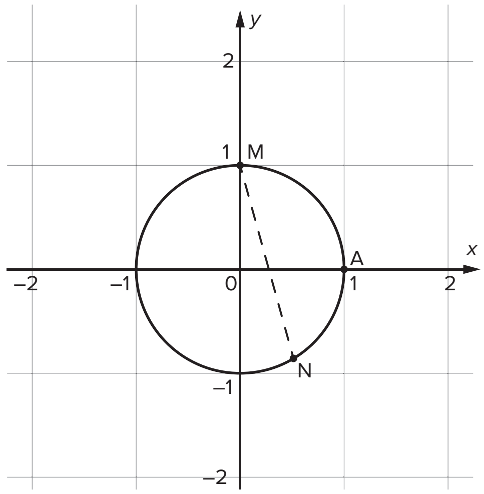
b) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$

c) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

d) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3$

e) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

5. A figura a seguir mostra uma circunferência trigonométrica tal que o arco $\overset{\frown}{AM}$ mede $\frac{\pi}{2}$ rad, e o arco $\overset{\frown}{AN}$ mede $-\frac{\pi}{3}$ rad.



A medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a:

a) $\frac{3\pi}{2}$ rad

b) $\frac{5\pi}{6}$ rad

c) $\frac{7\pi}{10}$ rad

d) $\frac{3\pi}{4}$ rad

e) $\frac{7\pi}{12}$ rad

6. **Ifal 2019** A solução da inequação $\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ para o intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) $\dfrac{5\pi}{6} < x < \dfrac{7\pi}{6}$.

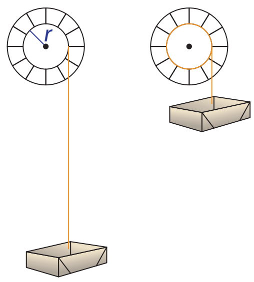
b) $\dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4}$.

c) $\dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3}$.

d) $\dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{11\pi}{6}$.

e) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

7. **FICSAE-SP 2021** A imagem descreve o içamento de uma caixa por meio de uma corda fixada a ela e a uma roda circular de raio $r = 30$ cm.



Considerando desprezível a espessura da corda durante todo o içamento, que foi concluído após um giro de $\dfrac{12\pi}{5}$ radianos da roda, o deslocamento vertical da caixa foi de, aproximadamente,

a) 7,85 m.

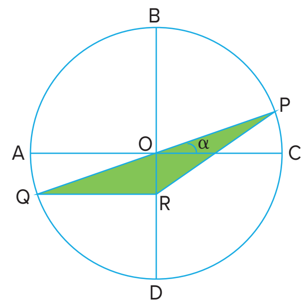
b) 7,54 m.

c) 2,26 m.

d) 3,77 m.

e) 2,51 m.

8. **Uerj 2021** A figura a seguir representa uma circunferência de centro O e raio 1. Considere $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{PQ}$ diâmetros, com $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ perpendiculares. Observe-se ainda, que o ponto P pertence ao arco $\overset{\frown}{BC}$ e o ponto R, ao raio $\overline{OD}$; o segmento $\overline{QR}$ é paralelo a $\overline{AC}$; e α é a medida do ângulo $C\hat{O}P$.



Sabendo que $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$, a área do triângulo PQR é igual a:

a) $\dfrac{\text{sen}\,2}{2}$.

b) $\dfrac{\cos 2}{2}$.

c) $\text{sen}\,2\alpha$.

d) $\cos 2\alpha$.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 9

I. Leia as páginas de **54** a **61**.

II. Faça os exercícios de **1** a **3** e de **6** a **9** da seção “Revisando”.

III. Faça os exercícios propostos de **1** a **4**, **9** e de **19** a **23**.

AULAS 32 E 33

Relação fundamental

Demonstra-se que é válida para qualquer valor de α a relação a seguir:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \end{cases}$$

Exercícios de sala

1. **Vunesp** A expressão $\dfrac{\cos^2\theta}{1-sen\,\theta}$, com sen $\theta \neq 1$, é igual a:

a) sen θ

b) sen θ + 1

c) tg $\theta \cdot \cos\theta$

d) 1

e) $\dfrac{sen\,\theta}{\sec\theta}$

2. **CPAEAM 2019** Sendo x real tal que $sen\,x = \dfrac{m-1}{2}$ e $\cos x = \dfrac{m+1}{2}$. Determine o conjunto dos valores de "m" e assinale a opção correta.

a) $\left\{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\right\}$

b) $\{-1, +1\}$

c) $\{-2, +2\}$

d) $\mathbb{R}$

e) $\varnothing$

3. Se um arco x satisfaz a relação sen x + cos x = 1, podemos afirmar que:

a) x é um arco pertencente ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico.

b) sen x = cos x

c) $x = \dfrac{\pi}{4}$ rad

d) sen x = 0 ou cos x = 0

e) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

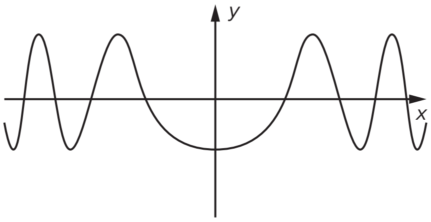
4. **Famema-SP 2022** Sendo x um número real sabe-se que $sen\,x + \cos x = 0{,}8$.

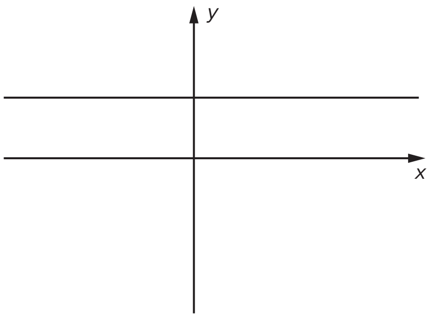
O valor de $sen^3\,x + \cos^3\,x$ é:

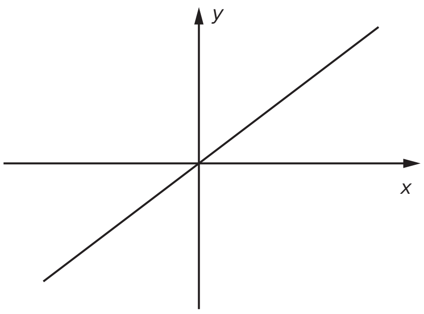
Observação: sen x é o seno do número x e cos x é o cosseno do número x.

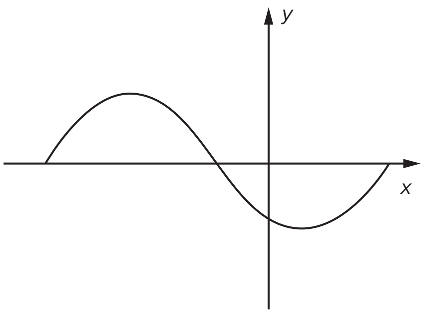
a) 0,848.
b) 0,866.
c) 0,896.
d) 0,912.
e) 0,944.

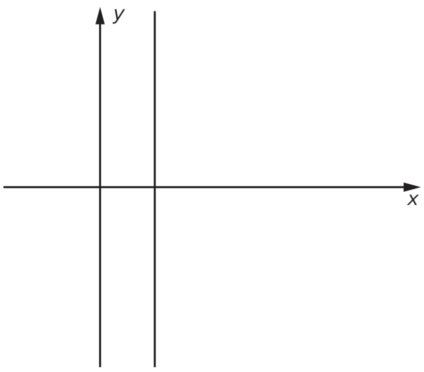
5. **UFRGS** Dentre as opções a seguir, a que pode representar o gráfico da função definida por $f(x) = (\text{sen } x + \cos x)^2 + (\text{sen } x - \cos x)^2$ é:

a) 

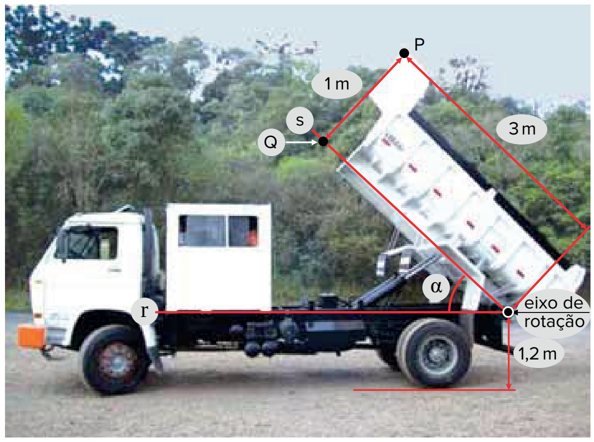
b) 

c) 

d) 

e) 

6. **Unesp 2013** A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas *r* e *s* coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.



(www.autobrutus.com. Adaptado.)

Dado $\cos\alpha = 0{,}8$, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro α for máximo, é

a) 4,8.
b) 5,0.
c) 3,8.
d) 4,4.
e) 4,0.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 9

I. Leia as páginas **61** e **62**.
II. Faça os exercícios de **11** a **13** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **29**, de **31** a **33**, **36** e de **38** a **43**.

AULAS 34 A 36

Outras razões trigonométricas

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\ (\cos\alpha \neq 0) \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\ (\cos\alpha \neq 0)$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\ (\text{sen}\,\alpha \neq 0) \qquad \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\ (\text{sen}\,\alpha \neq 0)$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha \qquad \text{cossec}^2\,\alpha = 1 + \text{cotg}^2\,\alpha$$

Ângulos complementares

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \cos\beta \\ \text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,\beta \\ \sec\alpha = \text{cossec}\,\beta \end{cases}$$

Exercícios de sala

1. Complete o quadro a seguir com o valor das razões solicitadas. Ao final, determine o domínio das funções y = tg x e y = cossec x.

x	sen x	cos x	tg x	cotg x	sec x	cossec x
0						
$\frac{\pi}{2}$						
π						
$\frac{3\pi}{2}$						
2π						

2. Se, para um determinado arco x pertencente ao 2º quadrante do círculo trigonométrico, vale que tg x – cotg x = 1, então é verdade que:

a) $\text{tg}x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\text{tg}\,x = \frac{1}{2}$

c) $\text{tg}x = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

d) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

e) $\text{tg}x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3. Acafe-SC 2018 (Adapt.) Avalie cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa.

a) Sabendo que $x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{2} < x < \pi$ e que $\text{sen}(x) = 0{,}8$, o valor de $y = \sec^2(x) + \text{tg}^2(x)$ é $y = \frac{41}{9}$.

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \text{sen}\,(2)$.

4. Uncisal 2018 O número de soluções da equação $\text{tg}^2 x = 1$ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 6.
e) maior que 6.

5. Ufam 2018 Seja θ um ângulo agudo tal que $\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = 0{,}3$. Então $\text{tg}\,\theta$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) 0,3

d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{3}$

6. UFJF-MG 2022 Os três primeiros termos de certa sequência numérica, isto é, os termos b_1, b_2 e b_3, nesta ordem, são dados por

$$\text{tg}\,(a),\ \text{sen}\,(a) \text{ e } 1 - (\cos(a))^2,$$

sendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Com relação a esta sequência, podemos afirmar que:

a) $\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{b_2}\right)^2 = 1.$

b) $\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{b_3}{b_2}\right)^2 = 1.$

c) $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} = \sec(a).$

d) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cos(a).$

e) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \text{sen}(a).$

7. **UNIFIPMoc-MG 2020** Um especialista, em seus estudos sobre a variação da pressão arterial, monitorou a frequência cardíaca de um paciente. Nesse estudo, obteve a função trigonométrica $P(t) = 120 + 25 \cdot \text{sen}\,(2 \cdot \pi \cdot t)$, em que $P(t)$ representa a pressão arterial desse paciente (em mmHg (milímetros de mercúrio)) no tempo *t* (em segundos), e o valor do argumento 2π é dado em radianos. A pressão atinge seu valor máximo (sistólica), durante a "expulsão" do sangue do coração; e seu mínimo (diastólica), quando o coração termina o "período de repouso". Os casos de hipertensão ocorrem quando esses limites não são respeitados, de acordo com o quadro:

Nível	Pressão sistólica	Pressão diastólica	Ação a tomar
Hipotensão	inferior a 100	inferior a 60	*check-up* médico
Valores normais	entre 100 e 140	entre 60 e 90	automedicação
Hipertensão limite	entre 140 e 160	entre 90 e 100	*check-up* médico
Hipertensão moderada	entre 160 e 180	entre 100 e 110	consultar o médico
Hipertensão grave	superior a 180	superior a 110	consultar o médico com urgência
Hipertensão sistólica específica	superior a 140	inferior a 90	consultar o médico

Esse paciente apresenta:

a) hipertensão limite.
b) hipertensão moderada.
c) hipertensão grave.
d) hipertensão sistólica específica.
e) hipotensão.

8. Resolva a equação $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = 2\sec x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 9

I. Leia as páginas de **62** a **65**.
II. Faça os exercícios de **14** a **18** e **20** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos de **50** a **54**, **56**, **60**, **62**, **66** e **70**.

FRENTE 2

AULAS 19 E 20

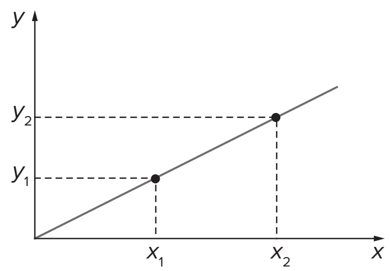
Grandezas proporcionais

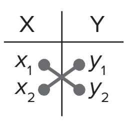
Grandezas diretamente proporcionais (GDP)

Duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais se, e somente se, houver uma constante *k* real não nula tal que:

$$\frac{Y}{X} = k$$

A relação entre duas grandezas diretamente proporcionais é representada graficamente pelos pontos de uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano:





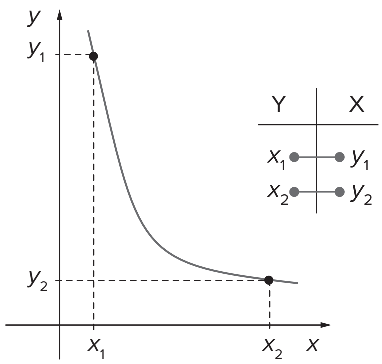
$$\Rightarrow \quad x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$$

Grandezas inversamente proporcionais (GIP)

Duas grandezas X e Y são inversamente proporcionais se, e somente se, houver uma constante *k* real não nula tal que:

$$X \cdot Y = k$$

A relação entre duas grandezas inversamente proporcionais é representada graficamente pelos pontos de uma hipérbole:



$$\Rightarrow \quad x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

Nesse caso, a **regra de três simples** diz ser constante o produto direto dos pares de informações relacionadas.

Regra de três composta

Se uma grandeza Y for diretamente proporcional às grandezas M e N, por exemplo, então existe uma constante, real e positiva, tal que:

$$Y = k_1 \cdot M \cdot N$$

Se essa mesma grandeza Y for inversamente proporcional às grandezas P, Q e R, por exemplo, então existe outra constante, real e positiva, tal que:

$$Y = \frac{k_2}{P \cdot Q \cdot R}$$

Assim, para expressar uma grandeza Y que é diretamente proporcional às grandezas (M, N, ...) e inversamente proporcional às grandezas (P, Q, R, ...), deve-se obter uma constante $k > 0$ tal que:

$$Y = k \cdot \frac{M \cdot N \cdot ...}{P \cdot Q \cdot R \cdot ...}$$

Note que essa constante de proporcionalidade *k* multiplica uma fração cujo numerador é o produto das grandezas que são diretamente proporcionais a Y, e o denominador é o produto das grandezas que são inversamente proporcionais a Y.

Exercícios de sala

1. **FCMSCSP 2021** Um anestesista prescreve 1 litro de solução salina para diminuir os efeitos colaterais indesejáveis da anestesia em um paciente. Se a solução salina prescrita deve ser administrada ao longo de 8 horas, ao final de 6 horas e 15 minutos o paciente terá recebido, dessa solução,
   a) 762,75 mL.
   b) 775,25 mL.
   c) 765,25 mL.
   d) 768,75 mL.
   e) 781,25 mL.

2. **UFPR 2019** Suponha que a carga suportada por uma viga seja diretamente proporcional à sua largura e ao quadrado de sua espessura e inversamente proporcional ao seu comprimento. Sabendo que a viga de 2 m de comprimento, 15 cm de largura e 10 cm de espessura suporta uma carga de 2 400 kg, qual é a carga suportada por uma viga de 20 cm de largura, 12 cm de espessura e 2,4 m de comprimento?
   a) 2 880 kg.
   b) 3 200 kg.
   c) 3 456 kg.
   d) 3 840 kg.
   e) 4 608 kg.

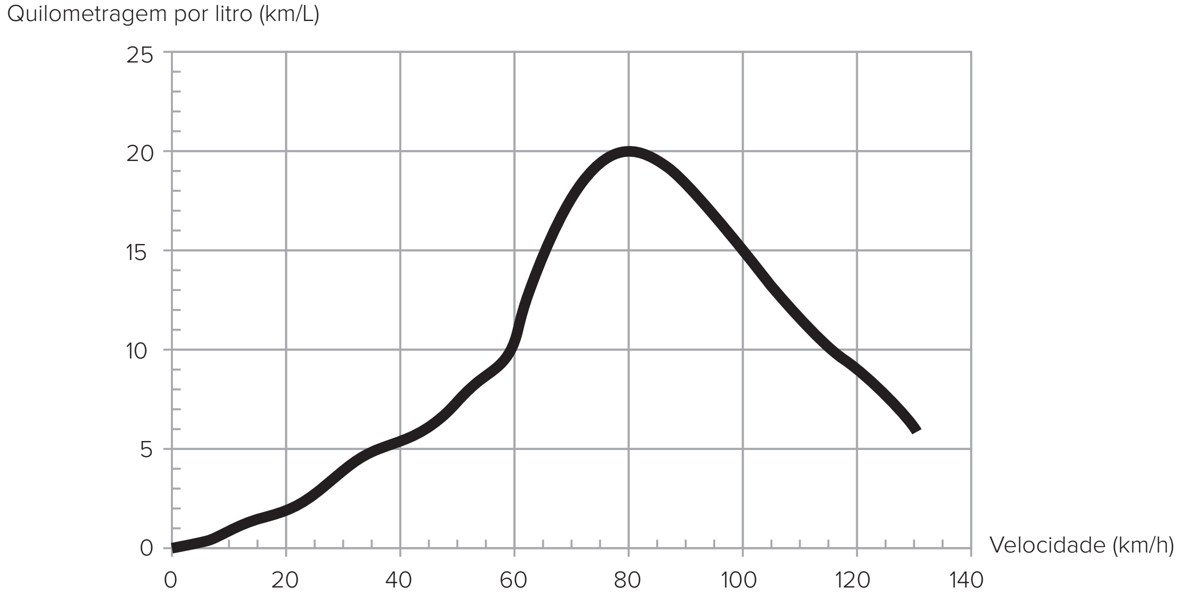
3. **Unisinos-RS 2021** Dois médicos foram contratados para que sejam zeradas as demandas de consultas eletivas em um posto de saúde municipal. O médico mais experiente, trabalhando sozinho, completaria o trabalho em 20 dias. O menos experiente precisaria de 30 dias. Em quantos dias os dois profissionais, trabalhando juntos, concluirão o trabalho?
   a) 10
   b) 12
   c) 15
   d) 18
   e) 25

4. **Enem PPL 2019** Para certas molas, a constante elástica (C) depende do diâmetro médio da circunferência da mola (D), do número de espirais úteis (N), do diâmetro (d) do fio de metal do qual é formada a mola e do módulo de elasticidade do material (G). A fórmula evidencia essas relações de dependência.

$$C = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot N}$$

O dono de uma fábrica possui uma mola M_1 em um de seus equipamentos, que tem características D_1, d_1, N_1 e G_1, com uma constante elástica C_1. Essa mola precisa ser substituída por outra, M_2, produzida de outro material e com características diferentes, bem como uma nova constante elástica C_2, da seguinte maneira: I) $D_2 = \frac{D_1}{3}$; II) $d_2 = 3d_1$; III) $N_2 = 9N_1$. Além disso, a constante de elasticidade G_2 do novo material é igual a $4G_1$.
O valor da constante C_2 em função da constante C_1 é:
   a) $C_2 = 972 \cdot C_1$
   b) $C_2 = 108 \cdot C_1$
   c) $C_2 = 4 \cdot C_1$
   d) $C_2 = \frac{4}{3} \cdot C_1$
   e) $C_2 = \frac{4}{9} \cdot C_1$

5. **Unicamp-SP 2019** A eficiência de um veículo pode ser avaliada pela quantidade de quilômetros que ele é capaz de percorrer com um litro de combustível. Tal eficiência depende de vários fatores, entre eles a velocidade adotada. O gráfico abaixo exibe o número de quilômetros percorridos por litro de combustível, para um determinado veículo, em função da velocidade.



a) Supondo que o veículo trafegue com velocidade constante de 100 km/h, determine quantos litros de combustível ele consome para percorrer 60 km.

b) Considere que o veículo tenha 50 litros de combustível em seu tanque. Determine a sua autonomia máxima, isto é, a maior distância que ele pode percorrer, supondo que ele trafegue a uma velocidade constante.

6. **FMP-RJ 2021** Um recém-nascido com peso de 3 600 g foi internado com quadro de infecção. O médico prescreveu um antibiótico na dose de 50 mg para cada quilograma de peso do paciente, a cada 12 horas, por via endovenosa. A diluição da medicação é de 1 grama para cada 25 mL de água destilada.
A dose que deve ser prescrita por dia, é de, em mL,

a) 4,5
b) 6,0
c) 9,0
d) 5,0
e) 7,2

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 4

I. Leia as páginas de **88** a **104**.
II. Faça os exercícios **1**, **4**, **6**, **9** e **10** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **3**, **4**, **6**, **10**, **15**, **16**, **18** e **20**.

AULAS 21 E 22

Sequências numéricas

Uma sequência numérica infinita é um conjunto numérico ordenado com as seguintes propriedades:

I. Existe o primeiro termo: a_1

II. Todo termo está associado a um único sucessor:

$$a_n \rightarrow a_{n+1}$$

III. O primeiro termo não é sucessor de nenhum dos termos da sequência: $n \in \mathbb{N}^*$

No caso das sequências finitas, há também o último termo, que não possui sucessor.

Há duas maneiras distintas de se enunciar a lei de formação de uma sequência infinita: a recursiva, pela lei de recorrência; e a iterativa, expressa por uma função ordinal.

Forma recursiva

A maneira recursiva, ou recorrente, deve declarar os primeiros termos da sequência ou pelo menos o primeiro, sendo os termos seguintes definidos a partir dos valores dos termos anteriores por meio de uma expressão algébrica chamada lei de recorrência.

Em geral, as leis de recorrência associam cada termo ao seu antecessor.

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots)$$

Mas também há leis de formação nas quais alguns termos são definidos recorrendo-se a mais de um de seus antecessores, como a sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...), em que são declarados os dois primeiros termos como sendo unitários, e que a partir do terceiro, os termos são obtidos somando-se os valores dos seus dois termos antecessores:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 \text{ e } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Forma iterativa

A maneira iterativa consiste na apresentação de uma fórmula para se obter cada termo de uma sequência a partir do número que indica sua posição, ou seja, obter o valor do primeiro termo a partir do número 1, do segundo termo a partir do número 2 e assim por diante.

Essa fórmula é conhecida como expressão do termo geral e trata-se de uma função ordinal, ou seja, uma função cujo domínio é o conjunto dos números ordinais {1º, 2º, 3º, 4º, ...}.

$$\begin{array}{ccccccccc}(1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots, & n, \ldots) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, \ldots, & a_n, \ldots)\end{array}$$

As funções ordinais são escritas de uma forma particular. Uma vez que a variável da função é necessariamente um número natural, ela costuma ser indicada pela letra n. Assim, o termo geral a_n da sequência fica expresso em função de n.

$$a_n = f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soma dos termos de uma sequência finita

Costuma-se indicar por S_n o valor da soma dos n primeiros termos de uma sequência a_n. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{aligned} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Exercícios de sala

1. **Uece 2021** Atente para a seguinte lista de números naturais que foi construída seguindo uma lógica estrutural própria: 4, 9, 25, 49, 121, ... Considerando essa lógica, é correto dizer que a soma do oitavo com o nono número da lista é igual a

   a) 970.
   b) 890.
   c) 980.
   d) 790.

2. **Uece 2021** A listagem infinita de números naturais apresentada abaixo está organizada e ordenada segundo uma lógica estrutural própria:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 2, 3, ...

O resultado da soma dos primeiros 2 020 números da listagem apresentada é

a) 7 007.
b) 7 700.
c) 7 070.
d) 7 770.

3. A soma dos n primeiros termos de uma sequência numérica é dada pela expressão $S_n = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

Determine o valor do décimo termo dessa sequência.

4. **Unicamp-SP 2012** O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de:

$$\frac{x+1}{x} = x$$

a) Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.
b) A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... é conhecida como sequência de Fibonacci, cujo n-ésimo termo é definido recursivamente pela fórmula:

$$F(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2), \text{ se } n > 2. \end{cases}$$

Podemos aproximar o número áureo, dividindo um termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior. Calcule o 10º e o 11º termos dessa sequência e use-os para obter uma aproximação com uma casa decimal para o número áureo.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 5

I. Leia as páginas **116** e **117**.

II. Faça os exercícios propostos **2**, **9**, **22**, **23**, **26**, **28** e **29**.

FRENTE 2

AULAS 23 E 24

Progressões aritméticas – PA

Definição

Uma sequência numérica a_n é progressão aritmética de razão r se, e somente se, $a_{n+1} = a_n + r$, para todo inteiro $n \geqslant 1$.

$$(a_1, \xrightarrow{+r} a_2, \xrightarrow{+r} a_3, \xrightarrow{+r} a_4, \xrightarrow{+r} a_5, \xrightarrow{+r} a_6, \xrightarrow{+r} a_7, \quad \dots, \quad a_{n-1}, \xleftarrow{-r} a_n, \xrightarrow{+r} a_{n+1}, \dots)$$

Expressões para o termo geral

- $a_n = a_1 + (n - 1)r$
- $a_n = a_p + (n - p)r$

Propriedade I – Simetria

- (a, b, c) é PA de razão $r \Leftrightarrow (a, b, c) = (b - r, b, b + r)$

Propriedade II – Média aritmética

- (a, b, c) é PA $\Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2}$

Propriedade III – Soma dos termos equidistantes dos extremos

- $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$

Expressão para a soma dos *n* primeiros termos

- $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \dfrac{n}{2}$

Exercícios de sala

1. **Famema-SP 2021** A tabela apresenta o padrão de uma sequência numérica da linha 1 até a linha x. Admita que o padrão de formação da tabela não se modifique.

Linha 1	0,1 0,2
Linha 2	0,3 0,4 0,5
Linha 3	0,6 0,7 0,8 0,9
Linha 4	1,0 1,1 1,2 1,3 1,4
.	. .
.	. ... .
.	. .
Linha *x*	63,0 ... 66,5

Sabendo que 63,0 é o primeiro número da linha x e que 66,5 é o último, x é igual a

a) 36.
b) 34.
c) 35.
d) 37.
e) 33.

2. **PUC-Rio 2017** Os números 10, x, y, z, 70 estão em progressão aritmética (nesta ordem). Quanto vale a soma $x + y + z$?

a) 80
b) 90
c) 100
d) 110
e) 120

3. **FCMSCSP 2022** Duas progressões aritméticas, de n termos cada, possuem soma dos termos dadas por $1 + 3 + 5 + 7 + ... + x$ e $2 + 4 + 6 + ... + (x + 1)$, sendo x um número natural ímpar. Sabendo-se que $\frac{1 + 3 + 5 + 7 + ... + x}{2 + 4 + 6 + ... + (x + 1)} = \frac{115}{116}$, o valor de x que resolve tal equação é

a) 113.
b) 115.
c) 59.
d) 229.
e) 197.

4. **Uece 2019** Para cada número inteiro positivo n, as linhas do quadro abaixo são definidas segundo a estrutura lógica que segue:

L_1	1
L_2	1, 2
L_3	1, 2, 3
L_4	1, 2, 3, 4
....	
....	
L_n	1, 2, 3, ..., n
....	

A soma dos números que compõem a linha L_{2020} é igual a

a) 2 041 210
b) 2 441 120
c) 2 121 020
d) 2 241 210

5. **Uerj 2017** Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

a) 414
b) 438
c) 456
d) 484

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 5

I. Leia as páginas de **117** a **121**.
II. Faça os exercícios de **1** a **4** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **1**, **4**, **5**, **8** e de **11** a **13**.

AULAS 25 E 26

Progressões geométricas – PG (termo geral)

Definição

Uma sequência numérica a_n é progressão geométrica de razão q se, e somente se, $a_{n+1} = q \cdot a_n$, para todo inteiro $n \geqslant 1$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(a_1, \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_2, \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_3, \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_4, \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_5, \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_6, \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_7, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n, \arrow[l, bend right, "\div q"'] \arrow[r, bend left, "\times q"] & a_{n+1}, \ldots)
\end{tikzcd}$$

Expressões para o termo geral

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- $a_n = a_p \cdot q^{n-p}$

Propriedade I – Simetria

- (a, b, c) é uma PG de razão $q \neq 0 \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{b}{q}, b, bq\right)$

Propriedade II – Média geométrica

- (a, b, c) é uma PG $\Leftrightarrow |b| = \sqrt{ac}$

Propriedade III – Produto dos termos equidistantes dos extremos

- $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \ldots$

Expressão para o produto dos *n* primeiros termos

- $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{n^2 - n}{2}}$

Exercícios de sala

1. **IFCE 2019** Numa progressão geométrica, o segundo e o sétimo termos valem, respectivamente, 32 e 243. Nessa progressão, o quarto termo é o número
   a) 64.
   b) 72.
   c) 56.
   d) 48.
   e) 36.

2. **EEAR-SP 2022** Seja a PG (24, 36, 54, ...). Ao somar o 5º e o 6º termos dessa PG, tem-se

a) $\frac{81}{2}$

b) $\frac{405}{2}$

c) $\frac{1215}{4}$

d) $\frac{1435}{4}$

3. **Famema-SP 2020** A progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ...)$ tem primeiro termo $a_1 = \frac{3}{8}$ e razão 5. A progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, ...)$ tem razão $\frac{5}{2}$. Se $a_5 = b_4$, então b_1 é igual a

a) $\frac{25}{4}$

b) 5

c) $\frac{3}{20}$

d) 15

e) $\frac{9}{2}$

4. **EsSA-MG 2021** Se (40, x, y, 5, ...) é uma progressão geométrica de razão q e $\left(q, 8 - a, \frac{7}{2}, ...\right)$ é uma progressão aritmética, determine o valor de a.

a) 7.

b) 6.

c) 8.

d) $\frac{25}{4}$.

e) $\frac{23}{4}$.

5. **PUC-SP 2018** A sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma progressão aritmética de razão 3, e a sequência $(b_1, b_2, b_3, ...)$ é uma progressão geométrica crescente.
Sabendo que $a_2 = b_3$, $a_{10} = b_5$ e $a_{42} = b_7$, o valor de $b_4 - a_4$ é

a) 2.

b) 0.

c) 1.

d) -1.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 5

I. Leia as páginas de **121** a **124**.

II. Faça os exercícios **5**, **6**, **8** e **9** da seção “Revisando”.

III. Faça os exercícios propostos **25**, de **30** a **32**, **40**, **48**, **52**, **54**, **55** e **57**.

AULAS 27 E 28

Progressões geométricas – PG (soma dos termos)

Soma finita

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

As progressões geométricas de razão unitária ($q = 1$) são constantes e, nesse caso, a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica constante é simplesmente:

$$S_n = a_1 \cdot n$$

Soma infinita

Se a razão de uma progressão geométrica infinita é um número do intervalo $]-1, 1[$, então é possível obter a soma de todos os seus termos através da expressão:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \ -1 < q < 1$$

Exercícios de sala

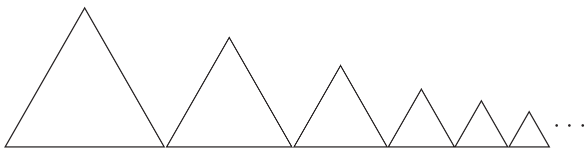
1. **FCMSCSP 2021** A soma dos cinco termos de uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e primeiro termo igual a x é 211. Se a soma dos quatro termos de outra progressão geométrica de primeiro termo e razão iguais à razão da progressão geométrica de cinco termos é $\frac{195}{16}$, então x é igual a

   a) 32.
   b) 8.
   c) 16.
   d) 18.
   e) 24.

2. Famerp-SP 2020 José deseja fazer uma poupança mensal durante 10 anos, sempre acrescentando 0,5% a mais em relação ao valor poupado no mês anterior. Adotando $1{,}005^{120} = 1{,}819$ em seu cálculo final, se José começar sua poupança depositando R$ 100,00 no primeiro mês, ao final do último mês de depósito ele terá depositado um total de

a) R$ 69 600,00.
b) R$ 6 645,00.
c) R$ 32 760,00.
d) R$ 16 380,00.
e) R$ 6 500,00.

3. UFRGS 2013 A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1 e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



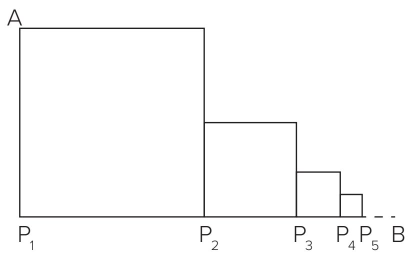
A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21

4. Famerp-SP 2021 O domínio da função *f*, dada pela lei $f(x) = 6 \cdot 3^x$, é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sabendo que $3^6 = 729$, a média aritmética de todos os elementos do conjunto imagem dessa função é igual a

a) 1 092.
b) 729.
c) 970.
d) 1 086.
e) 1 458.

5. UFRGS 2020 A figura a seguir é formada por quadrados de lados $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, e assim sucessivamente. A construção é tal que os pontos P_1, P_2, P_3, ..., B são colineares, e as bases dos quadrados têm medidas $P_1P_2 = 1$, $P_2P_3 = \frac{1}{2}$, $P_3P_4 = \frac{1}{4}$ e assim por diante. O ponto A é vértice do quadrado de lado P_1P_2, como representado na figura abaixo.



A medida do segmento $\overline{AB}$ é:

a) 1.
b) $\sqrt{2}$.
c) $\sqrt{3}$.
d) 2.
e) $\sqrt{5}$.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 5

I. Leia as páginas de **124** a **129**.
II. Faça os exercícios **7** e **10** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **49**, **56**, **58**, **65**, **66** e de **69** a **71**.

AULAS 29 E 30

Matrizes

Uma matriz $A_{m \times n}$ é uma maneira de apresentar informações numéricas dispostas como em uma tabela com m linhas e n colunas. Assim, $m \times n$ é o formato da matriz A. As matrizes podem ser classificadas da seguinte maneira:

Matriz linha	Matriz coluna	Matriz retangular	Matriz quadrada
$\boldsymbol{m = 1}$	$\boldsymbol{n = 1}$	$\boldsymbol{m \neq n}$	$\boldsymbol{m = n}$
$A_{1 \times 3} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$	$B_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}$	$C_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$	$D_{3 \times 3} = D_3 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, $A_{m \times n}$ e $B_{p \times q}$, são iguais se, e somente se, $m = p$, $n = q$ e forem iguais todos os elementos que ocupam as mesmas posições em cada uma.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}$$

Transposta de uma matriz

Sendo A e B duas matrizes de formatos $m \times n$ e $n \times m$, respectivamente, dizer que a matriz B é a transposta da matriz A significa dizer que as linhas da matriz B são as colunas da matriz A na mesma ordem.

$$A^t = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ji} = b_{ij}$$

Adição de matrizes

Realiza-se a adição das matrizes A e B apenas se elas tiverem mesmo formato e, nesse caso, obtém-se nova matriz C com o mesmo formato das matrizes A e B, de acordo com a seguinte lei de formação:

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Quando uma matriz é multiplicada por um número real, todos os seus elementos ficam multiplicados por esse número.

$$A = k \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = k \cdot b_{ij}$$

Produto interno ou produto escalar de sequências finitas

Dadas duas sequências finitas $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, chama-se produto interno, ou produto escalar $\langle a \times b \rangle$, a soma dos produtos dos elementos de mesmo índice de cada sequência. Assim:

$$\langle a \times b \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

Multiplicação de matrizes

A multiplicação entre duas matrizes está definida apenas quando o número de colunas de uma for igual ao número de linhas da outra. Assim, sendo A uma matriz de formato $m \times n$ e B uma matriz de formato $p \times q$:

- Se $n = p$, então existe um produto $A \cdot B$, resultando em uma matriz C de formato $m \times q$.
- Cada elemento c_{ij} da matriz $C = A \cdot B$ é igual ao produto interno entre as sequências determinadas pela linha i da matriz A e a coluna j da matriz B.

$$c_{ij} = \langle \text{linha i da matriz A} \times \text{coluna j da matriz B} \rangle = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Exercícios de sala

1. **UEG-GO 2019** A matriz triangular de ordem 3, na qual $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e $a_{ij} = 4i - 5j + 2$ para $i \leqslant j$ é representada pela matriz

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

2. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

calcule:

a) $A \cdot B - B \cdot C$

b) $(A + B - C) \cdot (B - 2C)$

c) $A \cdot B \cdot C$

3. FCMSCSP 2021 Determinada região da Mata Atlântica foi subdividida em quadrados de 1 m^2 de área. Cada um desses quadrados é chamado de quadrante da região. Contando-se o número de bromélias por quadrante da região, pesquisadores organizaram os dados obtidos em duas matrizes colunas, denotadas por B e Q. A matriz B indica o número de bromélias por quadrante e a matriz Q indica o número de quadrantes com a quantidade de bromélias do campo correspondente na matriz B, por quadrante. Observe as duas matrizes com os dados obtidos e um exemplo explicativo da notação:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \\ 8 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{Exemplo: 8 quadrantes contêm 2 bromélias cada um.}$$

Uma operação com matrizes e escalar que indicará como resultado a média de bromélias por m^2 nesse estudo é

a) $0{,}02 \cdot B^t \cdot Q$
b) $50 \cdot B^{-1} \cdot Q$
c) $50 \cdot B \cdot Q^{-1}$
d) $0{,}3 \cdot B \cdot Q^t$
e) $0{,}02 \cdot B \cdot Q^t$

4. Famema-SP 2021 Dois jogadores, A e B, disputaram a final de um torneio de xadrez em dois jogos. Em cada partida, se ocorresse empate, cada jogador ganharia 1 ponto, caso contrário, o vencedor ganharia 2 pontos e o perdedor perderia 1 ponto. As matrizes que indicaram a pontuação obtida por cada jogador tinham, ambas, a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1^{\text{o}} \text{ Jogo} \\ 2^{\text{o}} \text{ Jogo} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

No caso do jogador A, sua matriz de pontuação foi:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se a matriz de pontuação do jogador B era igual a matriz resultante da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então $x + y + z + w$ é igual a

a) 0. **b)** 2. **c)** 1. **d)** 3. **e)** −1.

FRENTE 2

5. **FGV-SP 2020** A matriz X tal que AX = B, em que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, tem como soma de seus elementos o valor:

a) 12
b) 27
c) 16
d) 18
e) 14

6. **UFPR 2020 (Adapt.)** Sendo *x*, *y* e *z* números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & 2 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Supondo que $x = 1$, $y = 1$ e $z = -2$, calcule o produto de matrizes $A \cdot B$.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 6

I. Leia as páginas de **154** a **159** e de **165** a **178**.
II. Faça os exercícios de **1** a **3** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos **2**, **8**, **13**, **14** e de **17** a **20**.

FRENTE 2

AULAS 31 E 32

Determinantes

Determinante de uma matriz quadrada

Trata-se da função det(X), que associa cada matriz quadrada X a um valor numérico. A lei de formação algébrica dessa função é descrita, de forma geral e recursiva, pelo teorema de Laplace. As regras particulares para se calcular os determinantes das matrizes quadradas de primeira, segunda e terceira ordem são:

- **Primeira ordem**

$$X = [x_{11}] \Rightarrow \det(X) = x_{11}$$

- **Segunda ordem**

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(X) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

$\ominus \quad \oplus$

- **Terceira ordem**

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{matrix}$$

$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

$$\det(X) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33}$$

Exercícios de sala

1. **FMABC-SP 2021** Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, sendo x um número real. Sabendo que a soma dos elementos da matriz AB é igual a 20, o determinante da matriz AB é igual a

a) −40.
b) 40.
c) 80.
d) −80.
e) 20.

2. Mackenzie-SP 2018 O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix} \text{ é}$$

a) 0
b) 1
c) -1
d) 3
e) $\frac{1}{3}$

3. Uece 2022 Considerando-se as matrizes $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $Z = (2X) \cdot Y$, é correto afirmar que o determinante da matriz Z é igual a

a) 12.
b) 16.
c) 4.
d) 0.

4. Cefet-MG Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 2 \\ 1 & 1 & \operatorname{sen} x \end{vmatrix},$$ é correto afirmar que essa função

a) possui raiz em $x = 0$.
b) assume máximo apenas em $x = \frac{\pi}{2}$.
c) é constante para qualquer valor de x.
d) tem como representação gráfica uma senoide

5. Uece 2016 Sobre a equação $\det M = -1$, na qual M é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{bmatrix}$ e $\det M$ é o determinante da matriz M, pode-se afirmar corretamente que a equação

a) não possui raízes reais.
b) possui três raízes reais e distintas.
c) possui três raízes reais, das quais duas são iguais e uma é diferente.
d) possui três raízes reais e iguais.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 6

I. Leia as páginas de **187** a **205**.
II. Faça o exercício **5** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **32**, **36**, **38**, **102**, **110**, **113** e **117**.

AULAS 33 E 34

Propriedades das matrizes

Associativa

Se existem os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot C$, então também existe o produto $A \cdot B \cdot C$, que pode ser obtido de duas formas distintas: multiplicando o produto $(A \cdot B)$ pela matriz C, ou multiplicando a matriz A pelo produto $(B \cdot C)$.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Não comutativa

Dadas duas matrizes, A e B, o produto $A \cdot B$ dessas matrizes, quando existe, é obtido utilizando-se as linhas da matriz A e as colunas da matriz B, ao passo que o produto $B \cdot A$, quando existe, utiliza as linhas da matriz B e as colunas da matriz A.

Por isso, não se pode garantir que o produto $A \cdot B$ seja igual ao produto $B \cdot A$. Por exemplo, se as matrizes A e B não forem quadradas, então $A \cdot B \neq B \cdot A$, necessariamente. No entanto, existem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $X \cdot Y = Y \cdot X$ e que, nesse caso, diz-se que as matrizes X e Y são comutativas entre si, ou que X e Y comutam entre si.

Elemento neutro

Se A é uma matriz $m \times n$, então as matrizes identidade I_m e I_n são tais que $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Se A é uma matriz quadrada e I a matriz identidade de mesma ordem, tem-se $I \cdot A = A \cdot I = A$.

Matriz inversa

Notamos por A^{-1} a matriz inversa da matriz quadrada A quando $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Nem toda matriz quadrada possui inversa, mas isso é assunto para uma aula posterior, uma vez que a inversibilidade de uma matriz quadrada depende do valor de seu determinante.

Matriz nula

Quando existir o produto entre uma matriz A de formato $m \times n$ e uma matriz nula O, o resultado desse produto será a matriz nula de formato satisfatório, ou seja, $O_m \cdot A = O_{m \times n}$ e $A \cdot O_n = O_{m \times n}$.

Observe que existem matrizes não nulas A e B tais que $A \cdot B = O$: $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios de sala

1. **IFCE 2020** As matrizes X e Y são quadradas e de ordem 2. Sabendo que $X \cdot Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e que $X = \begin{bmatrix} 21 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, podemos concluir que a soma dos elementos da primeira linha da inversa de Y vale

   a) 18.
   b) 6.
   c) 21.
   d) 3.
   e) 0.

2. Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

O valor de $|x| + |y| + |z| + |t|$ é:

a) -1
b) 1
c) 9
d) 10
e) 11

3. **UEPG-PR 2020** Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 3i - j$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Em relação ao que foi exposto, assinale o que for correto.

01 $\det(A^{-1})$ é um número racional.

02 $A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 2 \\ 9 & 32 & 8 \end{bmatrix}$.

04 O determinante de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot B$ é nulo.

08 $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Soma:

4. Sendo $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$, o produto da matriz inversa de A pela matriz transposta de B é igual a

a) $\begin{pmatrix} 21 & 21 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 21 & -21 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 21 & -21 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -21 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 21 & -21 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$

5. **Unesp 2014** Considere a equação matricial $A + BX = X + 2C$, cuja incógnita é a matriz X e todas as matrizes são quadradas de ordem n. A condição necessária e suficiente para que esta equação tenha solução única é que:

a) $B - I \neq O$, onde I é a matriz identidade de ordem n e O é a matriz nula de ordem n.
b) B seja invertível.
c) $B \neq O$, onde O é a matriz nula de ordem n.
d) $B - I$ seja invertível, onde I é a matriz identidade de ordem n.
e) A e C sejam invertíveis.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 6

I. Leia as páginas **169**, **171**, **173** e de **178** a **184**.

II. Faça os exercícios propostos **11**, **21**, **24**, **27**, **43**, **99** e **104**.

AULAS 35 E 36

Propriedades dos determinantes

Para o estudo das propriedades enunciadas a seguir, considere uma matriz quadrada A de ordem n.

- Se todos os elementos de uma fila de A forem nulos, então $\det(A) = 0$.
- Se duas filas paralelas de A forem iguais ou proporcionais, então $\det(A) = 0$.
- Se uma fila de A for combinação linear de filas paralelas, então $\det(A) = 0$.
- O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua matriz transposta: $\det(A^t) = \det(A)$.
- Se A for uma matriz triangular, então o determinante de A será igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.
- Se trocarmos as posições de duas filas paralelas de A, mudamos o sinal de seu determinante.
- Se multiplicarmos os elementos de uma fila de A por um mesmo número k, obtemos uma matriz cujo determinante será igual a $k \cdot \det(A)$. Isso permite colocar em evidência um fator que seja comum a todos os elementos de uma mesma fila de A, quando estivermos calculando seu determinante.
- A diferença entre multiplicar uma matriz e um determinante por um número k é que, no caso das matrizes, todos os elementos ficam multiplicados por k, e, no caso dos determinantes, multiplicam-se os elementos de uma única fila por esse número k. Assim, para toda matriz quadrada de ordem n, tem-se que

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$

Teorema de Binet

O determinante do produto de matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes de cada uma das matrizes. Assim:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Dessa forma, sendo A^{-1} a matriz inversa de uma matriz quadrada A, do teorema de Binet, deduz-se que o determinante de A^{-1} é igual ao inverso do determinante de A.

$$\det\,(A^{-1}) = \frac{1}{\det\,(A)}$$

Sendo assim, quando $\det(A) = 0$, tem-se que a matriz A **não** admite inversa.

$$A \text{ é invertível} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Teorema de Jacobi

Substituindo qualquer fila de uma matriz quadrada pela soma dessa fila com qualquer combinação linear de suas filas paralelas, o valor do determinante da matriz não se altera. Exemplo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times (1) \\ \\ + \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times (-2) \\ + \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Usa-se o teorema de Jacobi para gerar a maior quantidade possível de elementos nulos em uma mesma fila, facilitando, então, o cálculo de seu determinante por meio do teorema de Laplace.

Exercícios de sala

1. **EsPCEx-SP 2018** Uma matriz quadrada A, de ordem 3, é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i > j \\ (-1)^{i+j}, \text{ se } i \leqslant j \end{cases}$.

Então $\det(A^{-1})$ é igual a

a) 4.
b) 1.
c) 0.
d) $\frac{1}{4}$.
e) $\frac{1}{2}$.

2. **IFCE 2016** Seja A uma matriz real tal que $A = \begin{pmatrix} \log_2 x & 1 \\ \log_2 x + 2 & \log_2 x \end{pmatrix}$.

O único valor de x natural para que a matriz A não seja invertível é

a) -4.
b) 4.
c) 5.
d) -5.
e) 1.

3. **Uece 2022** Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$, onde x e y são números reais. Se $M^2 = M \cdot M$, então, o determinante de M^2 é igual a

a) $(x^2 + y^2)^2$.
b) $x^4 - y^4$.
c) $x^4 + y^4$.
d) $(x^2 - y^2)^2$.

4. **UEM-PR 2016** Considere as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

De acordo com conhecimentos sobre matrizes e determinantes, é **correto** afirmar que:

01 $\det(M \cdot N) = \det(N \cdot M)$, onde M e N são matrizes quadradas de mesma ordem.
02 $\det M^t = -\det M$, onde M é matriz quadrada de ordem ímpar.
04 $\det(C) = 4$.
08 a matriz $A \cdot B$ possui três linhas e três colunas.
16 $\det(A \cdot B) = 96$.

Soma:

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 6

I. Leia as páginas de **206** a **212**.
II. Faça o exercício **6** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos **23**, **28**, **37**, **41**, **106** e **114**.

FRENTE 3

AULAS 19 E 20

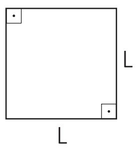
Quadriláteros notáveis e suas áreas

Principais conversões de unidades de área

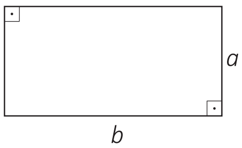
$$1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$$
$$1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$$

Quadriláteros

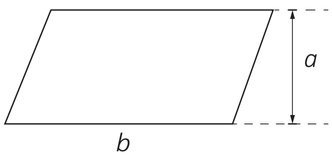
Área do quadrado = (**L**ado)^2



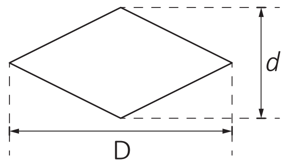
Área do retângulo = **b**ase × **a**ltura



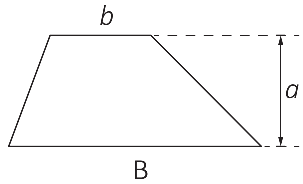
Área do paralelogramo = **b**ase × **a**ltura



Área do losango = $\frac{1}{2}$ × **D**iagonal maior × **d**iagonal menor



Área do trapézio = $\frac{1}{2}$ × (**B**ase maior + **b**ase menor) × **a**ltura



Alguns teoremas mais genéricos

"A área de qualquer paralelogramo (incluindo losangos, retângulos e quadrados) equivale ao produto de dois lados adjacentes pelo seno do ângulo que esses lados formam."

$$S = \text{Lado}_1 \times \text{Lado}_2 \times \text{sen}(\theta)$$

"A área de qualquer quadrilátero equivale ao produto de suas diagonais pelo seno do ângulo que elas formam."

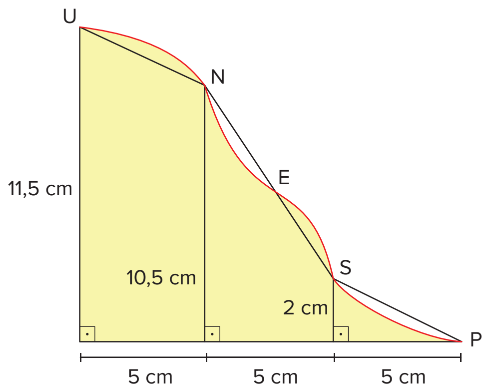
$$S = \frac{1}{2} \times \text{Diagonal}_1 \times \text{Diagonal}_2 \times \text{sen}(\theta)$$

Exercícios de sala

1. **IFSC 2017** O proprietário de alguns imóveis deseja vender um de seus terrenos para comprar um apartamento. Para que a imobiliária possa publicar o anúncio de venda em seu *site*, solicita ao proprietário que ele informe quais as dimensões do terreno. O dono, então, informa que se trata de um terreno retangular com 74 m de perímetro e que o comprimento do imóvel tem 5 m a mais do que sua largura.
Assinale a alternativa **correta**.
Com base nesses dados, o corretor de imóveis concluiu, de maneira correta, que as dimensões do terreno e sua área são, respectivamente,

a) 18 m, 23 m e 414 m^2.
b) 17 m, 22 m e 374 m^2.
c) 16 m, 21 m e 336 m^2.
d) 15 m, 20 m e 300 m^2.
e) 14 m, 19 m e 266 m^2.

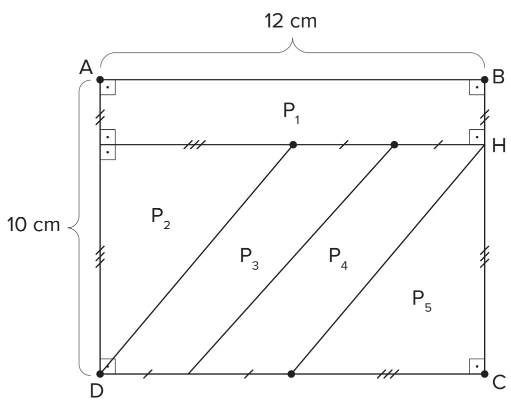
2. **Unesp 2022** A curva destacada em vermelho liga os pontos U e P, passando pelos pontos N, E e S.



Considerando as medidas indicadas na figura, uma boa aproximação para a área da superfície sob a curva, destacada em amarelo, é de

a) 86,25 cm^2.
b) 72,25 cm^2.
c) 92,75 cm^2.
d) 91,25 cm^2.
e) 88,75 cm^2.

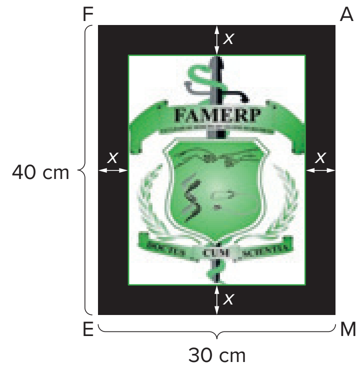
3. **FICSAE-SP 2020** Uma peça retangular ABCD, de 10 cm por 12 cm, será dividida em cinco peças, como indica a figura, em que segmentos com as mesmas marcações têm comprimentos iguais. P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 indicam os perímetros das cinco peças, em centímetros.



Sabendo-se que as cinco peças têm áreas iguais, a soma dos seus perímetros é igual a

a) 140 cm.
b) 132 cm.
c) 124 cm.
d) 142 cm.
e) 128 cm.

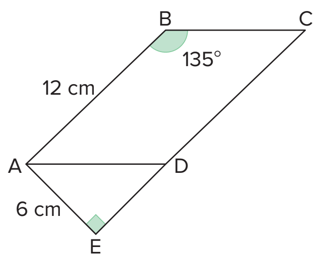
4. **Famerp-SP 2021** A figura indica um quadro retangular FAME que contém o brasão da FAMERP, também em um retângulo. A moldura preta do quadro possui largura constante de *x* centímetros e ocupa 20% da área total de FAME.



Uma equação cuja menor solução positiva indica corretamente o valor de *x* é

a) $x^2 + 35x - 240 = 0$
b) $x^2 + 35x + 240 = 0$
c) $x^2 - 35x - 60 = 0$
d) $x^2 + 35x - 60 = 0$
e) $x^2 - 35x + 60 = 0$

5. **Famerp-SP 2021** Na figura, ABCD é um paralelogramo e ABCE é um trapézio retângulo, com ângulo reto em E. Sabe-se que o ângulo $A\hat{B}C$ mede 135°, AB = 12 cm e AE = 6 cm.

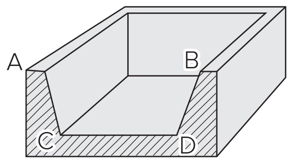


A área do paralelogramo ABCD, em cm^2, é igual a

a) $48\sqrt{2}$
b) 78
c) $54\sqrt{2}$
d) 72
e) 60

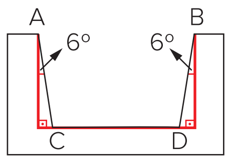
6. Unesp 2018 A figura 1 indica o corte transversal em um molde usado para a fabricação de barras de ouro. A figura 2 representa a vista frontal da secção transversal feita no molde, sendo ABCD um trapézio isósceles com AC = BD = 10 cm.

Figura 1



Molde

Figura 2



Vista frontal do corte transversal feito no molde

Dados: adote sen 6° = 0,104; cos 6° = 0,994.

a) Calcule a diferença entre as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

b) Admitindo que a área do trapézio ABCD seja igual a 99,4 cm^2, calcule a soma das medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 6

I. Leia as páginas de **262** a **273**.

II. Faça os exercícios de **1** a **4** e **10** da seção “Revisando”.

III. Faça os exercícios propostos **1**, **2**, **4**, de **6** a **8**, **10**, **13**, **17** e **18**.

FRENTE 3

AULAS 21 E 22

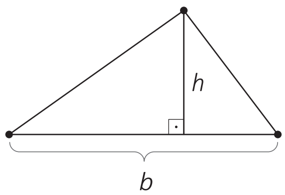
Área de triângulos

Leis para o cálculo da área de triângulos

Fundamental

A área de um triângulo é igual à metade do produto entre a medida de sua base (b) e a medida da altura relativa (h).

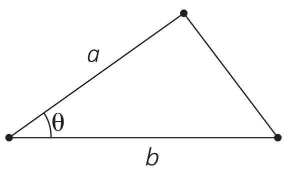
$$S_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$$



Trigonométrica

A área de um triângulo é igual à metade do produto entre as medidas de dois de seus lados (a e b) e o seno do ângulo formado por eles.

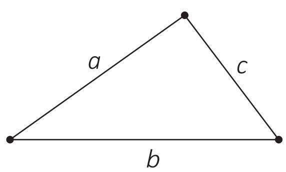
$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\theta)}{2}$$



Heron

A área de um triângulo é igual à raiz quadrada do produto entre o semiperímetro (p) e as diferenças desse semiperímetro e cada um dos lados do triângulo (a, b e c).

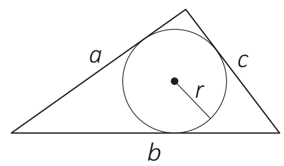
$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ em que } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



Triângulo circunscrito

A área do triângulo circunscrito é igual ao produto entre o seu semiperímetro e o raio da circunferência inscrita no triângulo.

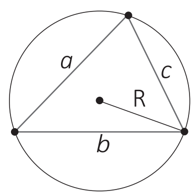
$$S_{\triangle} = p \cdot r, \text{ em que } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



Triângulo inscrito

A área do triângulo inscrito é igual ao produto das medidas de seus lados dividido pelo dobro do diâmetro (d) do círculo que o circunscreve.

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2d} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}, \text{ em que R é o raio do círculo.}$$



Triângulo equilátero

A área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por:

$$S_{\triangle} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Área do hexágono regular

A área de um hexágono regular de lado ℓ é 6 vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ.

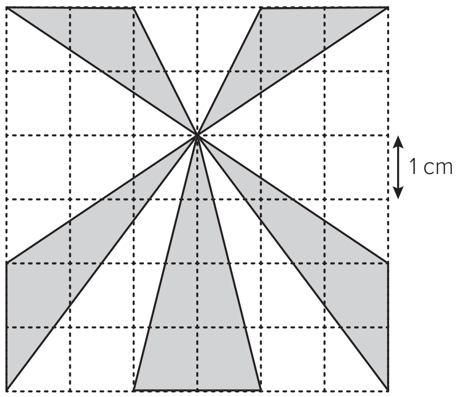
$$S_{\text{hex· gono regular}} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Teorema da razão de semelhança

"Se duas figuras são semelhantes e o número k for a razão dessa semelhança, então a razão entre as áreas dessas figuras será igual a k^2."

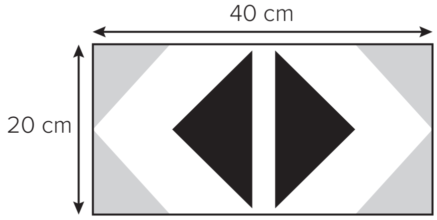
Exercícios de sala

1. **IFPE 2019** A imagem abaixo é o esboço do símbolo do super-herói Menino-Vespa. Qual a área da região sombreada se a malha quadriculada é formada por quadrados com 1 cm de lado?



a) 22 cm^2
b) 28 cm^2
c) 36 cm^2
d) 18 cm^2
e) 14 cm^2

2. **Fatec-SP 2019** Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.

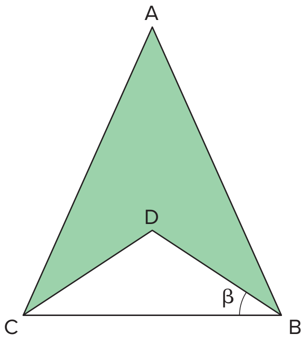


Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm.

Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm^2,

a) 344.
b) 456.
c) 582.
d) 628.
e) 780.

3. **Famema-SP 2020** O triângulo ABC é isósceles com AB = AC = 4 cm, e o triângulo DBC é isósceles com DB = DC = 2 cm, conforme a figura.

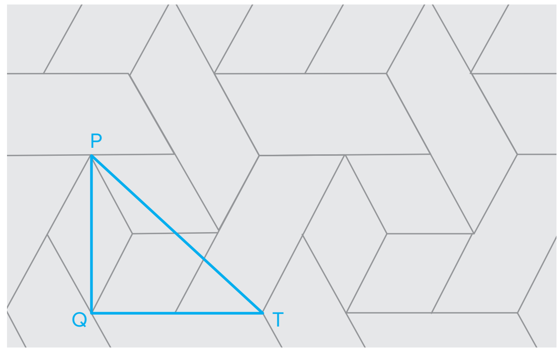


Fora de escala

Seja β a medida do ângulo interno $D\hat{B}C$ do triângulo DBC. Sabendo-se que $\text{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{6}}{4}$, a área, em cm^2, do quadrilátero ABDC é

a) $\sqrt{35}$.
b) 6.
c) 4.
d) $\sqrt{5}$.
e) $\sqrt{15}$.

4. **Famerp-SP 2022** Um tapete em forma de mosaico é composto por paralelogramos não losangos, idênticos entre si, e losangos idênticos entre si, sem sobreposição de figuras. O lado menor do paralelogramo e o lado do losango medem 12 cm e cada ângulo obtuso do losango e do paralelogramo medem 120°.

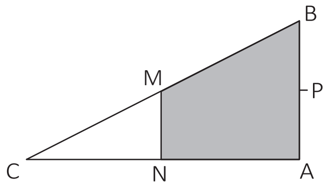


Desconsiderando as pequenas imperfeições da tapeçaria, a área do triângulo PQT, com vértices no losango e no paralelogramo, é igual a

a) $164\sqrt{3}$ cm^2
b) $144\sqrt{3}$ cm^2
c) $72\sqrt{3}$ cm^2
d) $82\sqrt{3}$ cm^2
e) $288\sqrt{3}$ cm^2

FRENTE 3

5. PUC-Rio 2018



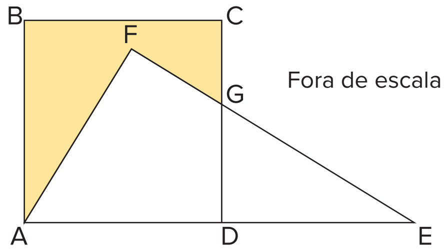
Na figura, temos que:

- o triângulo ABC é retângulo em A.
- M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.
- N é o ponto médio do lado $\overline{AC}$.
- P é o ponto médio do lado $\overline{AE}$.

Nessas condições, a área do quadrilátero MBAN é:

a) a mesma área do triângulo AMC.
b) a metade da área do triângulo ABC.
c) a quinta parte da área do triângulo MNC.
d) o dobro da área do triângulo AMC.
e) o triplo da área do triângulo MNC.

6. Famema-SP 2017 Na figura, ABCD é um quadrado de lado 6 cm e AFE é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AE}$. Considere que AD = AF e DE = 4 cm.



Sabendo que os pontos A, D e E estão alinhados, o valor da área destacada, em cm^2, é:

a) 24
b) 18
c) 22
d) 20
e) 16

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 6

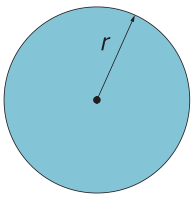
I. Leia as páginas de **273** a **278**.
II. Faça os exercícios de **5** a **9** e **11** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **9**, **12**, de **20** a **22**, **25**, **29** e de **32** a **34**.

FRENTE 3

AULAS 23 E 24

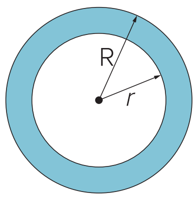
Área do círculo e de suas partes e área dos polígonos regulares

Círculo
de raio *r*



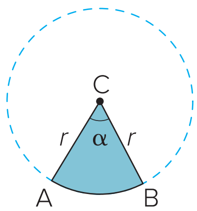
$S_{\odot} = \pi \cdot r^2$

Coroa circular
de raios R e *r*



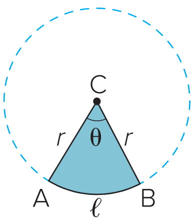
$S_{coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

Setor circular
de ângulo central α e raio *r*



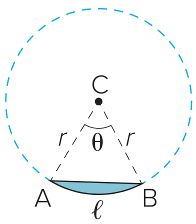
$S_{setor} = \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$

Setor circular
de arco ℓ e raio *r*



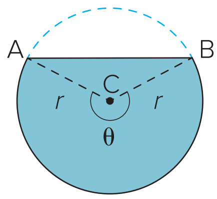
$S_{setor} = \dfrac{\ell \cdot r}{2}$

Segmento circular
que não contém o centro do círculo



$S_{segmento} = S_{setor} - S_{\triangle ABC}$

Segmento circular
que contém o centro do círculo



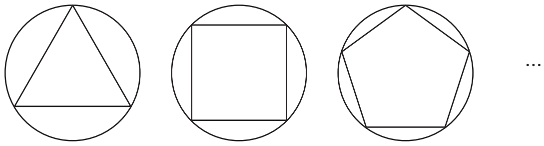
$S_{segmento} = S_{setor} + S_{\triangle ABC}$

Área dos polígonos regulares

Polígono de *n* lados inscrito em um círculo de raio R	**Polígono de *n* lados circunscrito** em um círculo de raio *r*
$S_{polígono} = \dfrac{n \cdot R^2}{2} \cdot \text{sen}\left(\dfrac{360°}{n}\right)$	$S_{polígono} = n \cdot r^2 \cdot \text{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)$

Exercícios de sala

1. **UFPR 2016** Considere a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos em um círculo de raio 2 cm:

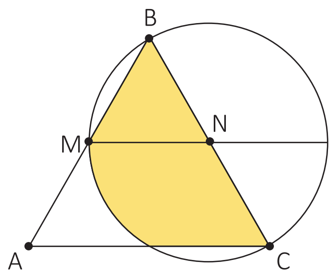


Sabendo que a área A de um polígono regular de n lados dessa sequência pode ser calculada pela fórmula $A = 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, considere as seguintes afirmativas:

1. As áreas do triângulo equilátero e do quadrado nessa sequência são, respectivamente, $3\sqrt{3}$ cm^2 e 8 cm^2.
2. O polígono regular de 12 lados, obtido nessa sequência, terá área de 12 cm^2.
3. À medida que n aumenta, o valor A se aproxima de 4π cm^2.

Assinale a alternativa correta.
a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

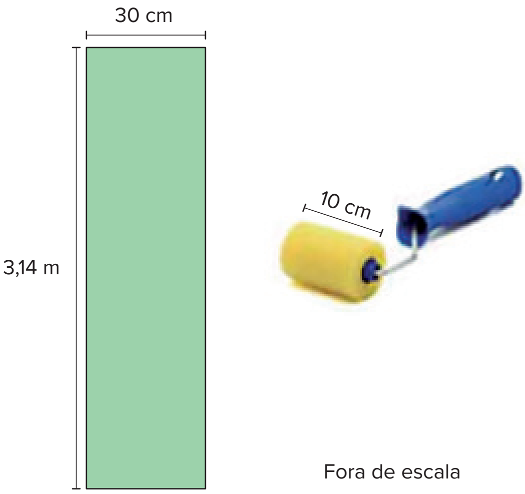
2. **Famerp-SP 2018** As tomografias computadorizadas envolvem sobreposição de imagens e, em algumas situações, é necessário conhecer a área da região de interseção das imagens sobrepostas. Na figura, um triângulo equilátero ABC se sobrepõe a um círculo de centro N e raio NB = NC = NM, com M e N sendo pontos médios, respectivamente, de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.



Sendo a área de triângulo equilátero de lado ℓ igual a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e a área de círculo de raio r igual a πr^2, se o lado do triângulo ABC medir 4 cm, então, a área de interseção entre o triângulo e o círculo, em cm^2, será igual a

a) $\pi + 3\sqrt{3}$
b) $\frac{\pi + 3\sqrt{3}}{2}$
c) $\pi + \sqrt{3}$
d) $\frac{2\pi + 6\sqrt{3}}{3}$
e) $\pi + 2\sqrt{3}$

3. **FICSAE-SP 2020** Uma faixa retangular de 30 cm por 3,14 m deverá ser pintada com um rolo cilíndrico de espuma de largura igual a 10 cm e raio igual a 3 cm.

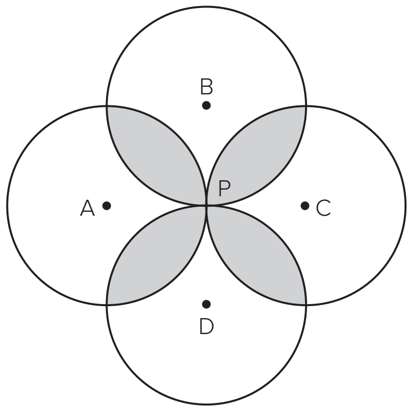


Fora de escala

O número mínimo de giros completos do cilindro para que o rolo passe por toda a área da faixa é, aproximadamente,

a) 30.
b) 50.
c) 48.
d) 36.
e) 52.

4. **Cefet-MG 2019** A figura representa quatro circunferências de mesmo raio e centros A, B, C e D. Essas circunferências tangenciam-se em um único ponto P, comum às quatro circunferências, e o quadrilátero ABCD é um quadrado cujo lado mede $2\sqrt{2}$ cm.

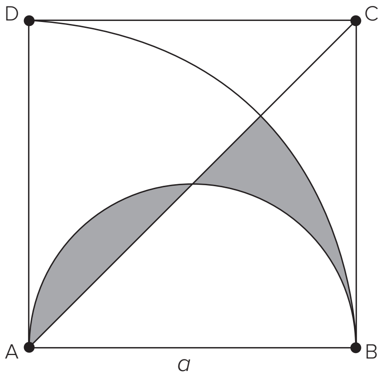


A área da região sombreada na figura, em cm^2, é

a) $2\pi - 4$
b) $8\pi - 4$
c) $8\pi - 16$
d) $16\pi - 16$

FRENTE 3

5. **UFRGS 2022** Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado a e $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BD}$ são arcos de circunferência.



A área da região sombreada é

a) $\frac{a^2}{16}(\pi - 1)$.

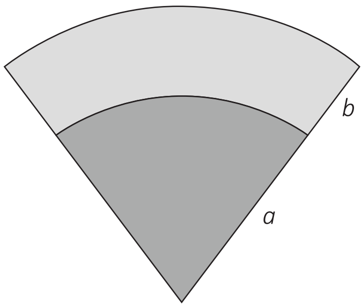
b) $\frac{a^2}{16}(\pi - 2)$.

c) $\frac{a^2}{8}(\pi - 1)$.

d) $\frac{a^2}{4}(\pi - 2)$.

e) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$.

6. **Unicamp-SP 2018** A figura a seguir exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área. A razão $\frac{a}{b}$ é igual a



a) $\sqrt{3}+1$

b) $\sqrt{2}+1$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2}$

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 6

I. Leia as páginas de **278** a **283**.

II. Faça os exercícios de **12** a **15** da seção “Revisando”.

III. Faça os exercícios propostos de **45** a **49**, **51**, **52** e de **56** a **58**.

FRENTE 3

AULAS 25 E 26

Introdução à Geometria Analítica

Plano cartesiano

- Ponto: P(x, y).
- Origem do sistema: O(0, 0).
- Se um ponto pertence ao eixo Ox, então $y = 0$. Logo, é da forma (x, 0).
- Se um ponto pertence ao eixo Oy, então $x = 0$. Logo, é da forma (0, y).
- Se um ponto pertence ao 1º quadrante, então $x > 0$ e $y > 0$.
- Se um ponto pertence ao 2º quadrante, então $x < 0$ e $y > 0$.
- Se um ponto pertence ao 3º quadrante, então $x < 0$ e $y < 0$.
- Se um ponto pertence ao 4º quadrante, então $x > 0$ e $y < 0$.
- Se um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então $x = y$.
- Se um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então $x = -y$ ou $x + y = 0$.

Para as definições a seguir, considere $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pontos do plano cartesiano.

Ponto médio de um segmento $\overline{AB}$

$$M(x_M, y_M) = M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro de um triângulo ABC

$$G(x_G, y_G) = G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Distância entre dois pontos A e B

$$d(A, B) = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Área de um triângulo ABC

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Condição de alinhamento de três pontos

Os pontos A, B e C estão alinhados (são colineares) se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

FRENTE 3

Exercícios de sala

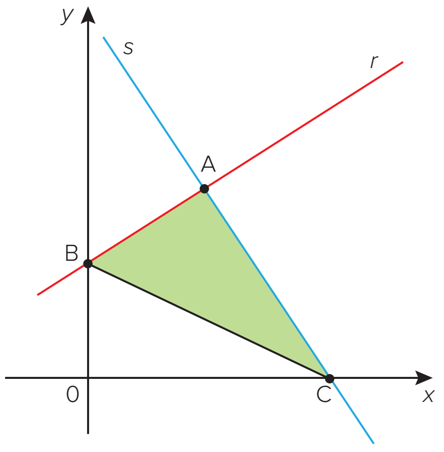
1. **EEAR-SP 2019** Sejam A(–3, 3), B(3, 1), C(5, –3) e D(–1, –2) vértices de um quadrilátero convexo. A medida de uma de suas diagonais é
   a) 15
   b) 13
   c) 12
   d) 10

2. **Famerp-SP 2021** Em um sistema de coordenadas cartesianas, o segmento de reta que liga os pontos de coordenadas (–1, 2) e (7, 8) é a base de um triângulo isósceles com terceiro vértice pertencente ao eixo *y*. A área desse triângulo, em unidades de área do plano cartesiano, é
   a) 24
   b) 20
   c) 18
   d) 25
   e) 21

3. Os pontos A(–3, 6), B(2, 2) e C(10, 4) são vértices de um triângulo. Determine:
   a) as coordenadas do ponto médio M do lado $\overline{BC}$.
   b) as coordenadas do baricentro G do triângulo.
   c) o comprimento da mediana $\overline{AM}$ do triângulo.
   d) os comprimentos dos segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{MG}$.

4. O valor da área do quadrado de vértices (−1, 0), (−4, −6), (2, −9) e (5, −3), em unidades de área, é igual a:
   a) 20.
   b) 25.
   c) $\sqrt{45}$.
   d) 45.
   e) $\sqrt{60}$.

5. **Famema-SP 2019** A reta *r* de equação $y = \dfrac{3x+4}{2}$ e a reta de equação $y = \dfrac{-5x+25}{3}$ se intersectam no ponto A, conforme mostra o gráfico.



Fora de escala

Sabendo que o ponto B é a interseção da reta *r* com o eixo das ordenadas e que o ponto C é a interseção da reta *s* com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC, em unidades de área, é

a) 9,5.
b) 11,5.
c) 13,0.
d) 16,5.
e) 19,0.

6. **FMP-RJ 2021** Os pontos colineares A, B e C estão, respectivamente, em Petrópolis, Teresópolis e Nova Friburgo como mostra o mapa a seguir. Sabe-se que a distância de B até C é o dobro da distância de A até B.

Em um certo sistema de coordenadas, cuja origem está no centro da cidade do Rio de Janeiro, esses pontos são dados por: A(0,0; 4,0), B(2,1; 4,7) e C(*x*; *y*).
Considerando esse contexto, o valor de $x + y$ é

a) 12,4
b) 13,2
c) 14,0
d) 12,8
e) 13,6

FRENTE 3

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 7

I. Leia as páginas de **312** a **319**.
II. Faça os exercícios **1**, **2** e de **4** a **6** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos **3**, **4**, de **7** a **9**, **12**, **14**, **17**, **18** e **20**.

FRENTE 3

AULAS 27 E 28

Equações da reta

Coeficiente angular

Sendo $\overline{AB}$ um segmento de reta não vertical, existe um número real m associado a ele, de modo que:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \Delta y = y_B - y_A \\ \Delta x = x_B - x_A \end{cases}$$

Sendo r uma reta não vertical ($\theta = 90°$), existe um número real m associado à reta, de modo que:

$$m = \text{tg}\,(\theta)$$

Retas, semirretas e segmentos de reta verticais não possuem coeficiente angular:

$$\Delta x = 0 \Rightarrow \theta = 90° \Rightarrow \nexists m$$

Equações da reta

Equação geral da reta

$$ax + by + c = 0 \quad \text{com} \quad a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

- Se $a = 0$, a reta é paralela ao eixo das abscissas Ox.
- Se $b = 0$, a reta é paralela ao eixo das ordenadas Oy.
- Se $c = 0$, a reta passa pela origem O(0, 0) do sistema.

Equação fundamental da reta

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Equação reduzida da reta

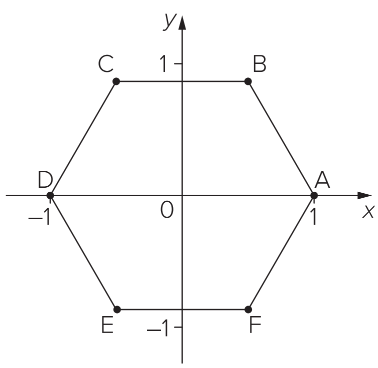
$$y = mx + n$$

Equação segmentária da reta

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Exercícios de sala

1. **UFRGS 2017** Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1, 0) e o ponto D tem coordenadas (–1, 0), como na figura ao lado.
A equação da reta que passa pelos pontos B e D é:



a) $y = \sqrt{3}x$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

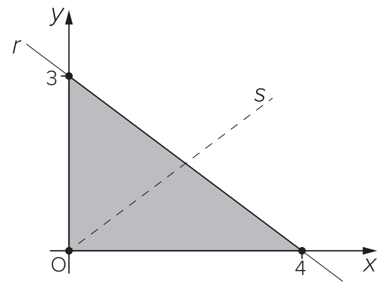
d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. **Uece 2022** Em um plano munido do sistema usual de coordenadas cartesianas, a equação $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são números reais constantes e não simultaneamente nulos, é representada graficamente por uma reta. Se r é a reta que contém o ponto Q(3, 2) e a interseção das retas representadas pelas equações $2x + 3y - 7 = 0$ e $3x + 2y - 8 = 0$, então, dentre os pontos V(0, 1), W(1, 0), K(−1, −5), L(−1, 2) e J(−1, −2) verifica-se que n deles pertencem à reta r. Assim, o valor de n é

a) 4.
b) 2.
c) 1.
d) 3.

3. **UFPR 2013** Considere as retas r e s representadas no plano cartesiano.



a) Escreva a equação da reta r.
b) Qual deve ser o coeficiente angular da reta s, de modo que ela divida o triângulo cinza em dois triângulos com áreas iguais? Justifique sua resposta.

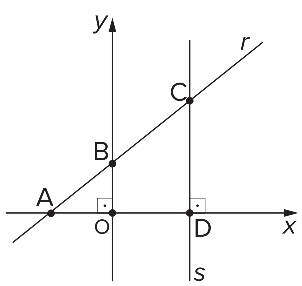
FRENTE 3

4. Uerj 2019 As retas *r*, *u* e *v*, construídas em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, apresentam as seguintes equações:

$$r:\ 4x - 3y = 20$$
$$u:\ 2x + 3y = 28$$
$$v:\ 3x + y = 27$$

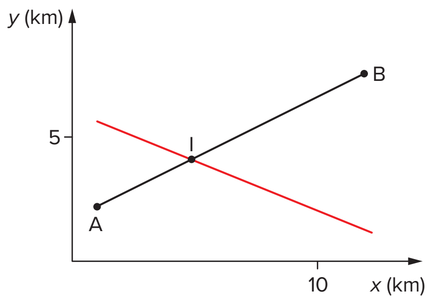
Determine se as três retas são concorrentes em um único ponto.
Justifique sua resposta com os cálculos necessários.

5. UPE 2013 A reta *r* da figura possui equação $2x - 3y + 6 = 0$, e o trapézio OBCD tem área igual a 9 unidades de área. Qual é a equação da reta *s*?



a) $x - 2{,}5 = 0$
b) $x - 3 = 0$
c) $x - 3{,}5 = 0$
d) $x - 4 = 0$
e) $x - 4{,}5 = 0$

6. Uerj 2018 No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos A(1, 2) e B(11, 7). O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é $x + 3y = 17$. Observe abaixo o esboço do projeto.



Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 8

I. Leia as páginas de **332** a **337**.
II. Faça os exercícios de **1** a **4** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos de **1** a **3**, **10**, **14**, **15** e de **20** a **23**.

AULAS 29 E 30

Posições relativas entre retas

Coeficiente angular, paralelismo e perpendicularismo

Lembrando que: $\begin{cases} m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{tg}(\theta) \\ \Delta x = 0 \Rightarrow \theta = 90° \Rightarrow \nexists m \end{cases}$

Sendo m_r e m_s os respectivos coeficientes angulares das retas r e s, então:

$$\begin{cases} m_r = m_s \Rightarrow r \mathbin{/\!/} s \text{ (} r \text{ e } s \text{ são paralelas)} \\ m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s \text{ (} r \text{ e } s \text{ são perpendiculares)} \end{cases}$$

Equações gerais e posições relativas entre retas

Sendo $r: ax + by + c = 0$ $\nearrow$ $a = 0 \Rightarrow r \mathbin{/\!/} Ox \Rightarrow r \perp Oy$

$\searrow$ $b = 0 \Rightarrow r \perp Ox \Rightarrow r \mathbin{/\!/} Oy$

Sendo $r: a_rx + b_ry + c_r = 0$ e $s: a_sx + b_sy + c_s = 0$, tem-se:

- $\dfrac{a_r}{a_s} = \dfrac{b_r}{b_s} \Rightarrow r$ e s são retas paralelas;
- $\dfrac{a_r}{a_s} = \dfrac{b_r}{b_s} = \dfrac{c_r}{c_s} \Rightarrow r$ e s são retas paralelas coincidentes;
- $\dfrac{a_r}{a_s} = \dfrac{b_r}{b_s} \neq \dfrac{c_r}{c_s} \Rightarrow r$ e s são retas paralelas distintas;
- $\dfrac{a_r}{a_s} \neq \dfrac{b_r}{b_s} \Rightarrow r$ e s são retas concorrentes;
- $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s \neq 0 \Rightarrow r$ e s são retas concorrentes e oblíquas;
- $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0 \Rightarrow r$ e s são retas concorrentes e perpendiculares.

Casos particulares

$$ax + by + c = 0 \quad // \quad ax + by + c' = 0$$
$$ax + by + c = 0 \quad \perp \quad bx - ay + c' = 0$$

Exercícios de sala

1. Sendo A(−1, 5), B(3, −5) e C(7, 2), determine:
   a) o coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$.
   b) a equação geral da reta que passa pelo ponto C e é paralela ao segmento $\overline{AB}$.
   c) a equação geral da reta que passa pelo ponto C e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

2. **Famema-SP 2020** Em um plano cartesiano, seja r a reta de equação $x - 3y + 6 = 0$. A reta s é perpendicular à reta r e delimita, com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, um triângulo de área $\frac{128}{3}$. O ponto de interseção de r e s tem abscissa

a) $\frac{23}{5}$

b) $\frac{21}{5}$

c) $\frac{18}{5}$

d) $\frac{19}{5}$

e) $\frac{24}{5}$

3. **UFPR 2022** No plano cartesiano, considere o triângulo ABC com A(8, 6), B(3, −4) e C(−1, 2). Seja D o ponto de interseção do segmento $\overline{AB}$ com o eixo x. Se r é a reta que passa por D, sendo essa reta paralela à reta que passa por B e C, assinale a alternativa que corresponde à equação de r.

a) $3x + 2y = 15$

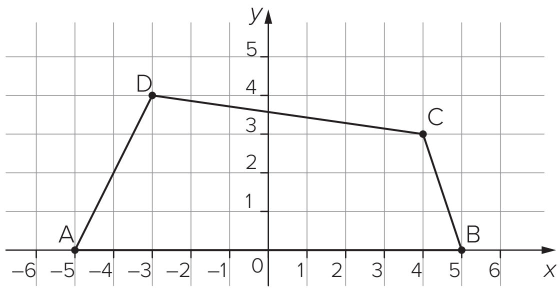
b) $2x + 3y = 10$

c) $3x + 2y = 8$

d) $3x + 2y = 3$

e) $2x + 3y = 2$

4. **Unicamp-SP 2018** A figura a seguir exibe, no plano cartesiano, um quadrilátero com vértices situados nos pontos de coordenadas A(–5, 0), B(5, 0), C(4, 3) e D(–3, 4).



a) Determine a área desse quadrilátero.

b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta que passa pelos pontos B e C.

5. UEM-PR 2018 Considerando as retas $r: x - y = 1$, $s: 2x - 2y - 4 = 0$ e $t: y = -x + 3$, assinale o que for **correto**.

01 As retas s e t são perpendiculares.
02 As retas s e r se interceptam em um único ponto.
04 O ponto (4, 3) pertence à reta r, mas não pertence às outras retas.
08 As retas r e t se interceptam em (2, 1).
16 As retas s e r têm o mesmo coeficiente angular.

Soma:

FRENTE 3

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 8

I. Leia as páginas de **337** a **341**.
II. Faça os exercícios de **5** a **11** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos **8**, **25**, **28**, **30**, **31**, de **34** a **36**, **38** e **39**.

AULAS 31 E 32

Distância entre ponto e reta e ângulo entre retas

Ângulo agudo entre duas retas

Sendo α a medida do ângulo agudo formado por duas retas *r* e *s* de coeficientes angulares m_r e m_s não perpendiculares entre si, então:

$$\text{tg}\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Lembrando que, se $m_r \cdot m_s = -1$, as retas são perpendiculares entre si.

Se uma das retas for vertical (paralela ao eixo O*y*), somente a outra terá coeficiente angular *m*, e, nesse caso:

$$\text{tg}\alpha = \left|\frac{1}{m}\right|$$

Distância entre ponto e reta

A distância do ponto de coordenadas (x_0, y_0) até a reta de equação $ax + by + c = 0$ é:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

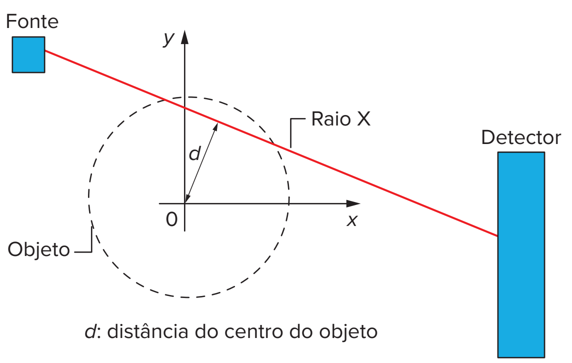
Distância entre retas paralelas

A distância entre as retas de equações $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$ é:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercícios de sala

1. FICSAE-SP 2020 O esquema a seguir é uma representação simplificada de um raio X usado em um aparelho de tomografia computadorizada axial para compor imagens de objetos.



No plano cartesiano com origem no centro do objeto, indicado na figura, a reta do raio X tem equação $3x + 4y - 12 = 0$. A distância *d*, entre o centro do objeto e a reta do raio X, na unidade do plano cartesiano, é igual a

a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{21}{10}$ c) $\frac{11}{5}$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{5}{2}$

2. PUC-PR 2022 Se o triângulo ABC tem 45 unidades de área, a reta de equação $y = 0{,}75x - 8$ contém os vértices A e B desse triângulo e o vértice C – de ordenada 1 – é um ponto da reta de equação $3x - y + 10 = 0$ então a distância entre os vértices A e B do triângulo ABC, em unidades de comprimento, é igual a

a) 10.
b) 9.
c) 18.
d) 5.
e) $\frac{50}{3}$.

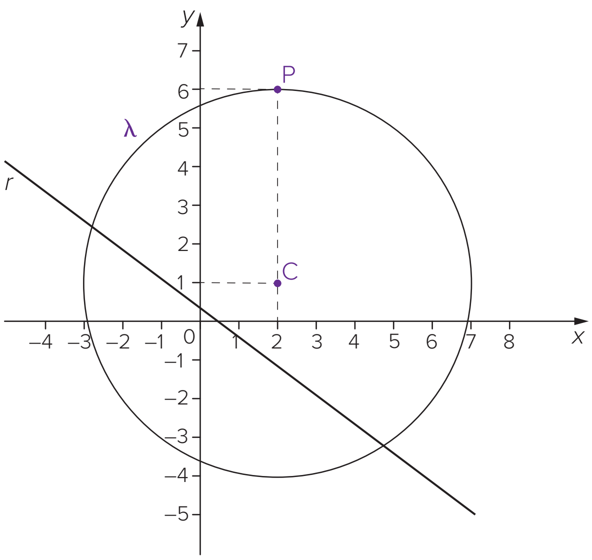
3. **Unicamp-SP 2018** No plano cartesiano, sejam C a circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ e s a reta de equação $x + 3y = 10$. A reta s intercepta a circunferência C em dois pontos distintos se e somente se:

a) $r > 2$
b) $r > \sqrt{5}$
c) $r > 3$
d) $r > \sqrt{10}$

4. Qual é a medida do raio da circunferência tangente às retas de equações r: $6x - 8y = 15$ e s: $-3x + 4y = 5$?

a) 1,25
b) 2,5
c) 5
d) 10
e) 20

5. **Acafe-SC 2018** Na figura a seguir, a reta (r): $3x + 4y - 1 = 0$ é secante à circunferência λ que passa pelo ponto P e tem centro no ponto C. As retas s_1: $3x + 4y + c' = 0$ e s_2: $3x + 4y + c'' = 0$ são secantes à circunferência λ de modo que cada reta forma uma corda cujo comprimento é igual a 8 unidades de comprimento.



Se as retas s_1, s_2 e r são paralelas, o valor da soma $c' + c''$ é:

a) 0
b) –20
c) 5
d) –25

Guia de estudos

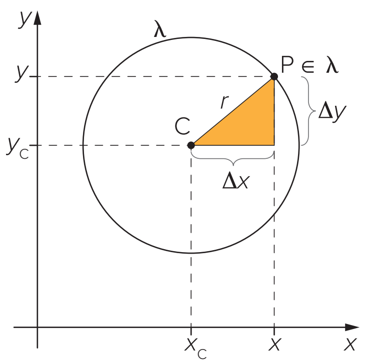
Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 8

I. Leia as páginas de **342** a **344**.
II. Faça os exercícios de **13** a **16** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **26**, **27**, **29**, de **45** a **47**, **49**, **52**, **53** e **59**.

AULAS 33 E 34

Equações da circunferência

Equação reduzida da circunferência



$$|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2 = r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} \text{Abscissa do centro:} & x_C = a \\ \text{Ordenada do centro:} & y_C = b \\ \text{Medida do raio:} & r = d(P,\ C) \end{cases}$$

Equação geral da circunferência

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 4C \begin{cases} \text{Abscissa do centro:} & x_C = -\dfrac{A}{2} \\ \text{Ordenada do centro:} & y_C = -\dfrac{B}{2} \\ \text{Medida do raio:} & r = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \end{cases}$$

Exercícios de sala

1. **Ifal 2018** A equação da circunferência que tem um dos diâmetros com extremidades nos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, -5)$ é dada por:

a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$
b) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$
c) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 80$
d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 80$
e) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$

2. FICSAE-SP 2018 O ponto A(3, 4) pertence a uma circunferência λ cujo centro tem abscissa 7 e ordenada inteira. Uma reta *r* passa pelo ponto O(0, 0) e pelo ponto A e a distância de *r* até o centro de λ é igual a 2. O raio da circunferência λ é

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{5}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{5}$

3. Unicamp-SP 2020 Sabendo que *c* é um número real, considere, no plano cartesiano, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2cx$. Se o centro dessa circunferência pertence à reta de equação $x + 2y = 3$, então seu raio é igual a

a) $\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{3}$.
c) 2.
d) 3.

4. Unifor-CE 2021 No chamado meio ambiente urbano, as praças públicas são bens de uso comum, contribuindo para o embelezamento das cidades, auxiliando sobremaneira na melhoria das condições sanitárias e higiênicas dos núcleos urbanos e promovendo o intercâmbio social e cultural. Uma praça de um determinado bairro da cidade de Fortaleza foi contemplada com uma obra de melhoria. A praça tem forma retangular que mede 80 metros na frente e 40 metros nas laterais. Em termos de organização e segurança da obra, decidiu-se demarcar, na praça, uma região no formato de uma circunferência que pode ser representada pela equação $x^2 + y^2 - 80x - 40y + 1900 = 0$. Considerando a praça perfeitamente plana, então o número aproximado, em porcentagem, da área da região delimitada pela circunferência é

Dado: $\pi = 3,14$

a) 8,72.
b) 9,81.
c) 12,42.
d) 15,73.
e) 17,55

5. **Uece 2020** Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos M(10, 0) e N(0, 10) são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência C. Se K(4, *p*) e L(4, *q*) são pontos distintos de C, então, a medida do comprimento do segmento $\overline{KL}$, em u.c., é

Dado: u.c. ≡ unidade de comprimento

a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 16.

6. Considere o conjunto de todos os pontos (*x*, *y*) do plano cartesiano cujas coordenadas *x* e *y* satisfaçam às equações do seguinte sistema, para todo valor real de λ:

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \cos(\lambda) \\ y = -1 + 3 \cdot \text{sen}(\lambda) \end{cases}$$

O lugar geométrico determinado por esse conjunto de pontos é:

a) um segmento de reta.
b) uma circunferência de centro (2, –1) e raio 9.
c) uma circunferência de centro (–2, 1) e raio 9.
d) uma circunferência de centro (–2, 1) e raio 3.
e) uma circunferência de centro (2, –1) e raio 3.

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 9

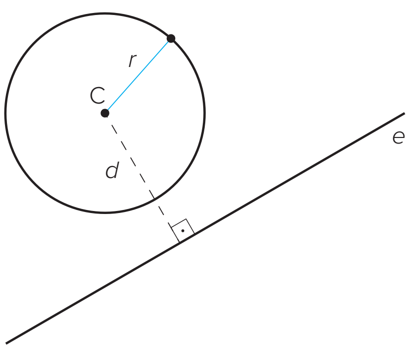
I. Leia as páginas de **364** a **367**.
II. Faça os exercícios de **1** a **5** da seção “Revisando”.
III. Faça os exercícios propostos **1**, **4**, **5**, **8**, de **11** a **14**, **22** e **30**.

Posições relativas envolvendo circunferências

Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

Se uma reta *e* é **exterior** a uma circunferência de centro C, então a distância de C a *e* é maior do que o comprimento do raio da circunferência.

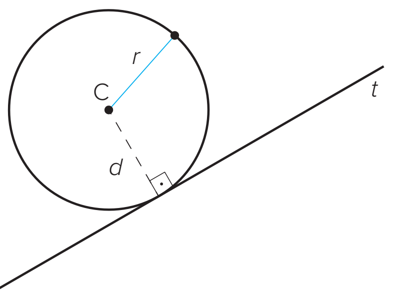
$$d_{C,e} < r$$



O discriminante do sistema formado por suas equações é negativo.

Se uma reta *t* é **tangente** a uma circunferência de centro C, então a distância de C a *t* é igual ao comprimento do raio da circunferência.

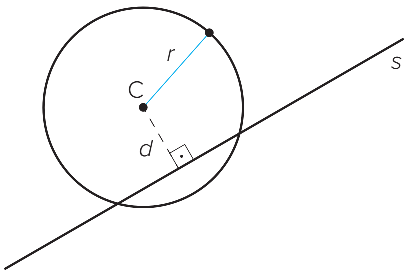
$$d_{C,t} = r$$



O discriminante do sistema formado por suas equações é nulo.

Se uma reta *s* é **secante** a uma circunferência de centro C, então a distância de C a *s* é menor do que o comprimento do raio da circunferência.

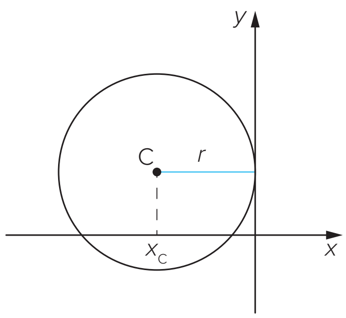
$$d_{C,s} < r$$



O discriminante do sistema formado por suas equações é positivo.

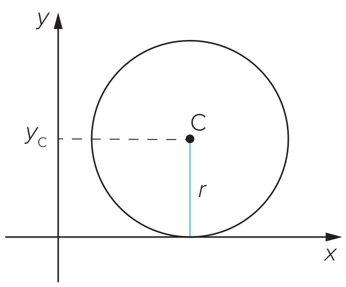
Circunferências tangentes a eixos coordenados

Se uma circunferência é tangente ao eixo das ordenadas (O*y*), o módulo da abscissa do centro dessa circunferência é igual ao comprimento do seu raio.



$$|x_C| = r$$

Se uma circunferência é tangente ao eixo das abscissas (O*x*), o módulo da ordenada do centro dessa circunferência é igual ao comprimento do seu raio.



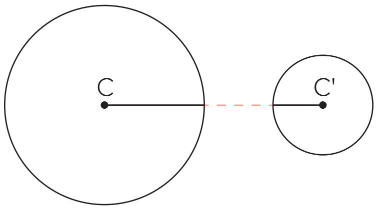
$$|y_C| = r$$

Posições relativas entre duas circunferências

Considerando-se duas circunferências de centros C e C' e raios, respectivamente, iguais a r e r', tem-se:

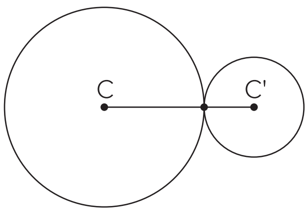
- Elas são **exteriores** quando a distância entre seus centros é maior do que a soma dos comprimentos de seus raios.

$$d(C, C') > r + r'$$



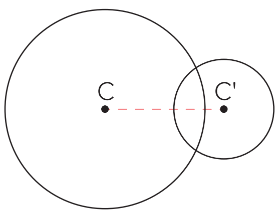
- Elas são **tangentes exteriormente** quando a distância entre seus centros é igual à soma dos comprimentos de seus raios.

$$d(C, C') = r + r'$$



- Elas são **secantes** quando a distância entre seus centros está entre a soma e a diferença absoluta dos comprimentos de seus raios.

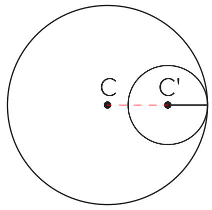
$$|r - r'| < d(C, C') < r + r'$$



A equação da reta que passa pelos pontos de interseção das circunferências secantes pode ser obtida pela subtração das equações gerais dessas circunferências.

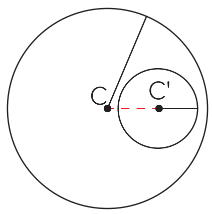
- Elas são **tangentes interiormente** quando a distância entre seus centros é igual à diferença absoluta dos comprimentos de seus raios.

$$d(C, C') = |r - r'|$$



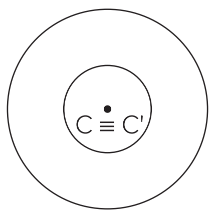
- Uma circunferência é **interior** a outra quando a distância entre os centros é menor do que a diferença absoluta dos comprimentos de seus raios.

$$0 \leq d(C, C') < |r - r'|$$



- Elas são denominadas **concêntricas** quando têm o mesmo centro.

$$d(C, C') = 0$$



Exercícios de sala

1. **UEG-GO 2019** Duas circunferências possuem equações $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. A interseção entre as duas circunferências

a) ocorre nos pontos $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) ocorre nos pontos $\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

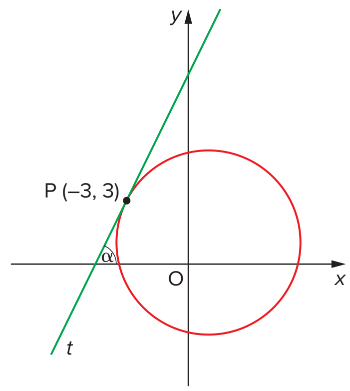
c) ocorre nos pontos $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

d) ocorre no ponto (0, 0).

e) não ocorre em nenhum ponto.

2. **UPF-RS 2019** Na figura, estão representados, num referencial *xy*:

- uma circunferência cuja equação cartesiana é dada por $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$;
- a reta *t*, tangente à circunferência no ponto de coordenadas (–3, 3);
- o ângulo α, cujo lado origem é o semieixo positivo *x* e o lado extremidade é a reta *t*.



O valor da tg α é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) -2

d) 2

e) 1

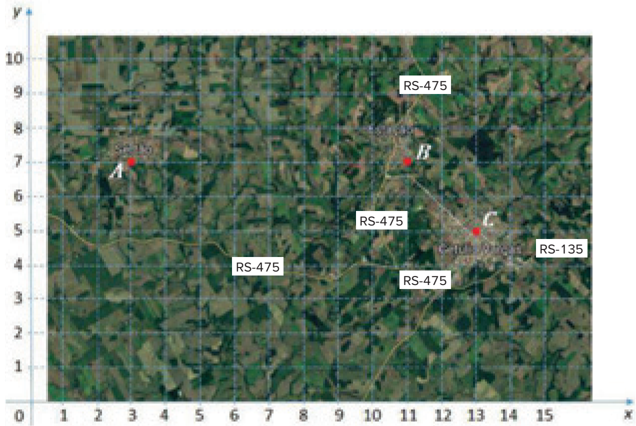
3. UFRGS 2019 A menor distância entre as circunferências de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ é

a) 2.
b) 5.
c) $\sqrt{10}$.
d) $\sqrt{10} + 2$.
e) $\sqrt{10} - 2$.

4. Famema-SP 2022 A reta de equação $x + 2y + 1 = 0$ determina na circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 21$ uma corda de comprimento igual a

a) 8.
b) 7.
c) $6\sqrt{3}$.
d) $6\sqrt{2}$.
e) $4\sqrt{5}$.

5. UPF-RS 2020 Uma empresa de telefonia pretende instalar uma antena que se localize a igual distância de três cidades do interior do estado do RS, representadas pelos pontos A, B e C. Para obter essa localização, reproduziu o mapa em um sistema de referências cartesianas, conforme a figura seguir.



(Disponível em: https://google.com.br/maps/@-27.9682872, -52.2496852,27391a,35y,270h/data=!3m1!1e3. Acesso em: set. 2019.)

As coordenadas (*x*, *y*) obtidas para a instalação da antena são:

a) (7, 1)
b) (8, 5)
c) (9, 6)
d) (7, 4)
e) (8, 0)

Guia de estudos

Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 9

I. Leia as páginas de **367** a **373**.
II. Faça os exercícios de **7** a **9**, **11** e **12** da seção "Revisando".
III. Faça os exercícios propostos **2**, **6**, **9**, **23**, **25**, **26**, **28**, **30**, **31**, **34** e **37**.

Frente 1

Aulas 19 e 20

1. B
2. D
3. C
4. C
5. A
6. B

Aulas 21 e 22

1. B
2. B
3. E
4. C
5. C
6. B

Aulas 23 a 25

1. B
2. A
3. A
4. B
5. B
6. C
7. D
8. D
9. a) 300 insetos.
   b) 420 insetos.
   c) 84 dias.

Aula 26

1. C
2. B
3. B

Aulas 27 e 28

1. C
2. A
3. $S =]-6, -3[\cup \left]\frac{-7}{3}, \frac{2}{3}\right[$
4. Incorreta.
5. A
6. C

Aulas 29 a 31

1. B
2. A
3. C
4. B
5. E
6. A
7. C
8. A

Aulas 32 e 33

1. B
2. B
3. D
4. E
5. B
6. C

Aulas 34 a 36

1.

x	sen x	cos x	tg x	cotg x	sec x	cossec x
0	0	1	0	Não existe	1	Não existe
$\frac{\pi}{2}$	1	0	Não existe	0	Não existe	1
π	0	–1	0	Não existe	–1	Não existe
$\frac{3\pi}{2}$	–1	0	Não existe	0	Não existe	–1
2π	0	1	0	Não existe	1	Não existe

$y = \text{tg}\,x \rightarrow D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$y = \text{cossec}\,x \rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. E
3. a) Verdadeira.
   b) Falsa.
4. C
5. E
6. A
7. A
8. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Frente 2

Aulas 19 e 20

1. E
2. D
3. B
4. A
5. a) 4 L
   b) 1000 km
6. C

Aulas 21 e 22

1. B
2. C
3. $a_{10} = 100$
4. a) $x^2 - x - 1 = 0$ e $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   b) $\phi \cong 1{,}6$

Aulas 23 e 24

1. C
2. E
3. D
4. A
5. C

Aulas 25 e 26

1. B 2. C 3. D 4. B 5. A

Aulas 27 e 28

1. C 2. D 3. A 4. A 5. E

Aulas 29 e 30

1. A

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -12 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 32 & 1 & -4 \\ -54 & -18 & -1 \\ 16 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 13 & 5 & -2 \\ 5 & -2 & -2 \\ 11 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

3. A
4. E
5. A
6. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aulas 31 e 32

1. C
2. C
3. D
4. C
5. C

Aulas 33 e 34

1. B
2. E
3. Soma: 01 + 02 + 04 = 07
4. C
5. D

Aulas 35 e 36

1. D
2. B
3. D
4. Soma: 01 + 16 = 17

Frente 3

Aulas 19 e 20

1. C
2. D
3. E
4. E
5. D
6. a) 2,08 m
   b) 20 cm

Aulas 21 e 22

1. E
2. B
3. E
4. B
5. E
6. B

Aulas 23 e 24

1. E
2. D
3. B
4. C
5. E
6. B

Aulas 25 e 26

1. D
2. D
3. a) M(6, 3)
   b) G(3, 4)
   c) $d = 3\sqrt{10}$
   d) $d(A, G) = 2\sqrt{10}$ e $d(M, G) = \sqrt{10}$.
4. D
5. A
6. A

Aulas 27 e 28

1. B
2. B
3. a) $3x + 4y - 12 = 0$
   b) $m = \frac{3}{4}$
4. As três retas não concorrem em um mesmo ponto.
5. B
6. (5, 4)

Aulas 29 e 30

1. a) $m_{AB} = -\frac{5}{2}$
   b) $5x + 2y - 39 = 0$
   c) $2x - 5y - 4 = 0$
2. B
3. A
4. a) S = 30 u.a.
   b) $x - 3y + 5 = 0$
5. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29

Aulas 31 e 32

1. A
2. A
3. D
4. A
5. B

Aulas 33 e 34

1. A
2. D
3. D
4. B
5. C
6. E

Aulas 35 e 36

1. D
2. D
3. E
4. A
5. A