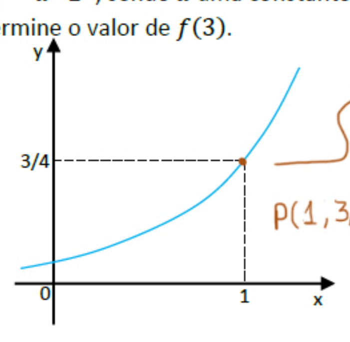
1. Na figura está representado o gráfico de $f(x) = a \cdot 2^x$, sendo a uma constante real. Determine o valor de $f(3)$.



A partir do ponto apresentado no gráfico, podemos encontrar o valor de a:

P(1, 3/4)

Sendo $x = 1$ e $y = 3/4$, temos:

$f(x) = a \cdot 2^x$

$3/4 = a \cdot 2^1$

$a = \frac{3/4}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$a = \frac{3}{8}$

$f(x) = \frac{3}{8} \cdot 2^x$

$f(3) = \frac{3}{8} \cdot 2^3$

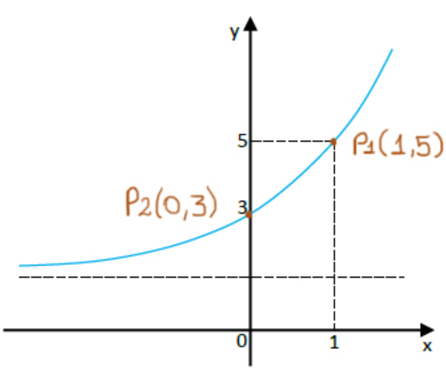
$f(3) = \frac{3}{8} \cdot 8$

$f(3) = 3$ //

$\boxed{3}$

---

2. O gráfico abaixo representa a função f cuja lei é $f(x) = a + b \cdot 2^x$, sendo a e b constantes positivas.



P1(1,5)

P2(0,3)

Através de P1 e P2 podemos montar um sistema e encontrar a e b:

$f(x) = a + b \cdot 2^x$

Para P1:

$5 = a + b \cdot 2^1$

$a + 2b = 5$

Para P2:

$3 = a + b \cdot 2^0$

$a + b = 3$

a) Determine a e b.

$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ a + b = 3 \quad \times(-1) \end{cases}$

$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + 2 \cdot 2 = 5$

$/ \quad b = 2$ // $\qquad a = 5 - 4$

$a = 1$ //

$\boxed{a = 1 \text{ e } b = 2}$

b) Qual é o conjunto imagem de f?

Se observarmos o gráfico da função e/ou substituirmos x por valores cada vez mais positivos, os valores de y crescerão rumo ao infinito. Já se substituirmos x por valores cada vez mais negativos, veremos que y vai ficando cada vez mais próximo de 1, mas nunca igual, por isso:

$\boxed{Im = \{y \in \mathbb{R} / y > 1\}}$

c) Calcule $f(-2)$.

$f(x) = 1 + 2 \cdot 2^x$

$f(-2) = 1 + 2 \cdot 2^{-2}$

$f(-2) = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$f(-2) = 1 + \frac{2}{4}$

$f(-2) = \frac{4 + 2}{4} = \frac{6}{4}$

$f(-2) = \frac{3}{2}$ //

$\boxed{3/2}$

---

3. Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra. Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função do tempo (t).

Valor inicial de bactérias

h = 0	h = 1	h = 2	h = 3	...
B	2·B	2·2B	2·2·2B	
2^0	2^1	2^2	2^3	

×2 ×2 ×2

A bactéria dobra o seu valor atual a cada hora

Assim $n = 50 \cdot 2^t$ //

$\boxed{n = 50 \cdot 2^t}$

---

4. Imagine que a população de uma cidade cresça à taxa de 5% ao ano. Nessa taxa, já estão computados os índices de mortalidade, natalidade, migrações, etc. Admita que a população atual dessa cidade seja de 100 000 habitantes. Qual é a lei da função que representa o número de habitantes (y) que essa cidade terá daqui a x anos?

A cidade cresce A PARTIR DO SEU VALOR ATUAL $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$ a cada ano. $\Rightarrow 1 + 0{,}05 \Rightarrow 1{,}05$

Valor inicial de habitantes

Assim: $Y = 100.000 \cdot 1{,}05^x$ //

$\boxed{y = 100\,000 \cdot 1{,}05^x}$

---

5. Admita que, em certo município, a população cresça à taxa de 20% ao ano. Classifique como V ou F a seguinte afirmação: “Em quatro anos a população do município já terá dobrado em relação a seu valor atual”.

Vamos montar uma função como no exercício anterior para verificar esse comportamento:

$2 \cdot P_a$

$P_F \Rightarrow$ População final $\qquad P_a \Rightarrow$ população atual

cresce a uma taxa de 20% a.a $= \frac{20}{100} = 0{,}2 \Rightarrow 1 + 0{,}2$

Assim: $P_F = P_a \cdot 1{,}2^t$

Em 4 anos, $t = 4$: $\quad P_F = P_a \cdot 1{,}2^4$

$P_F = 2{,}0736 \cdot P_a$ //

$2{,}0736 > 2$ o que mostra que a afirmação é verdadeira

$\boxed{\text{V, pois } P(4) = (1{,}2)^4 \cdot P_0 \cong 2{,}07 \cdot P_0}$

---

6. Um conjunto de sofás foi comprado por R$ 2.000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sol foi queimando o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo a cada ano o sofá perde 20% do valor que tinha no ano anterior. Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?

Valor inicial do sofá

O sofá PERDE $20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$ a.a

$\Downarrow$

$1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$P \Rightarrow$ Preço do sofá

7 anos depois da compra $t = 7$

$P = 2000 \cdot 0{,}8^t$

$P = 2000 \cdot 0{,}8^7$

$P = 419{,}43 \sim 419{,}00$ //

$\boxed{\text{R\$ 419,00 (Aproximadamente).}}$

---

7. Devido ao declínio da qualidade de vida em um bairro, prevê-se que, durante os próximos quatro anos, um imóvel sofrerá desvalorização de 10% ao ano.

PERDE em valor $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$ a.a

$\Downarrow$

$1 - 0{,}1 = 0{,}9$

a) Se hoje o valor do imóvel é de R$ 200.000,00, escreva uma equação que expresse o valor do imóvel V, em real, em função do tempo t, em ano, para os próximos 4 anos.

Valor inicial do imóvel

Assim: $V = 200.000 \cdot 0{,}9^t$, com $0 \leq t \leq 4$

$\boxed{V = 200.000 \cdot (0{,}9)^t, com\ 0 \leq t \leq 4}$

b) Qual será seu valor daqui a quatro anos?

$t = 4$

$V = 200000 \cdot 0{,}9^t$

$V = 200000 \cdot 0{,}9^4$

$V = 131.220{,}00$ //

$\boxed{\text{R\$ 131.220,00.}}$

---

8. Um pesquisador observou que uma população de bactérias cresce 20% ao dia.

$0{,}2$ a.d $\Rightarrow 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

a) Se atualmente a população é de 10.000 indivíduos, escreva uma equação que expresse o número P de indivíduos em função do tempo t, em dia.

Valor inicial da população

Assim: $P = 10.000 \cdot 1{,}2^t$, com $t \geq 0$ //

$\boxed{P = 10.000 \cdot (1{,}2)^t, com\ t \geq 0}$

b) Qual será a população daqui a cinco dias? ($Dado$: $(1{,}2)^5 \cong 2{,}49$.)

Daqui a 5 dias, $t = 5$

$P = 10000 \cdot 1{,}2^t$

$P = 10000 \cdot 1{,}2^5$

$P = 10000 \cdot 2{,}49$

$P \sim 24.900$ indivíduos //

$\boxed{\text{Aproximadamente 24.900 indivíduos.}}$