Estratégia
Militares

Introdução à Física e à cinemática

Prof. Toni Burgatto

Aula 00

2021

SUMÁRIO

Introdução

Olá futuros alunos! Sejam bem-vindos ao nosso curso de física para o Colégio Naval (CN).

O objetivo do nosso curso é oferecer, de forma mais completa, as bases necessárias da Física e ir para o nível exigido por esses dois vestibulares. Diante da fama desses vestibulares, nosso curso de Física será bem amplo, sendo prioritariamente assuntos de ensino médio com alguns temas abordados em nível superior.

Além dessa peculiaridade com assuntos de níveis superiores, essas provas gostam de aplicar questões de olimpíadas nacionais e internacionais, questões que exigem certas “sacadas” e “macetes” que serão abordados no nosso material. Tudo para que você tenha a melhor preparação para esses vestibulares.

Não há dúvidas que existem excelentes livros de Física pelo mundo a fora, entretanto, poucos são focados para o CN. É preciso ter um certo cuidado na preparação, pois é muito comum os vestibulandos errarem a mão nos estudos: ou estudam determinados assuntos além do exigido pelo vestibular e acabam levando mais tempo para passar ou estudam de menos sem fazer questões no nível do vestibular.

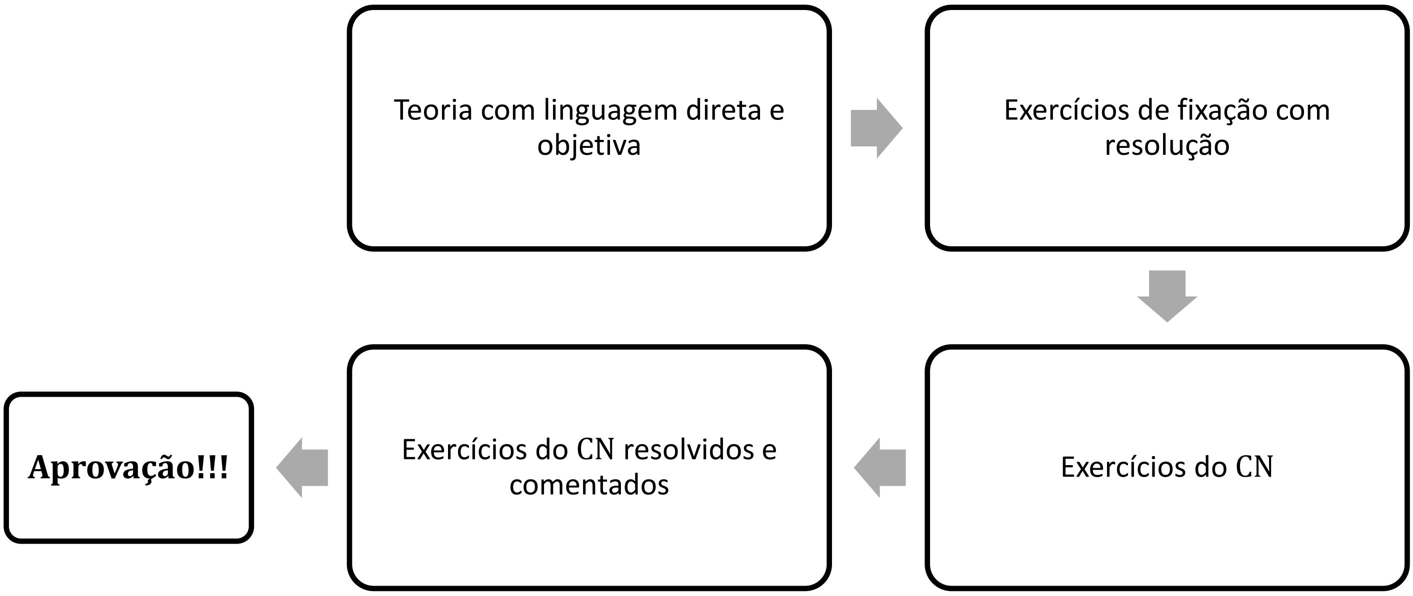
Para garantir que você esteja estudando de maneira focada para o vestibular, nós preparamos um material completo, sendo cuidadosos nos assuntos específicos de Física. Inicialmente, começaremos com questões para consolidar a teoria, seguido de questões de nível médio e, por fim, questões mais difíceis. Essa ordem crescente de dificuldade é fundamental para o estudo e, além disso, é muito importante que você saiba em qual nível se encontra. Tudo isso para você ter a teoria completa, com a melhor sequência de exercícios, sem sair do foco do vestibular.

Dessa forma, acredito que, independentemente do nível em que você esteja ou da cidade em que você more, você tem totais condições para fazer sua jornada rumo ao CN.

Metodologia do curso

Neste curso, iremos apresentar toda base teórica para que você consiga resolver todas as questões de Física do CN dos últimos anos. Ao longo da teoria, resolveremos questões de Física para consolidar a teoria, seguidos de um banco de questões com ordem crescente de dificuldade. Resolveremos questões antigas do CN e questões que podem aparecer no seu vestibular.

Para isto, seguiremos o seguinte diagrama:



Estatísticas dos vestibulares anteriores

Selecionamos a divisão de questões de Física do vestibular do CN a partir de 2010, conforme a figura abaixo.

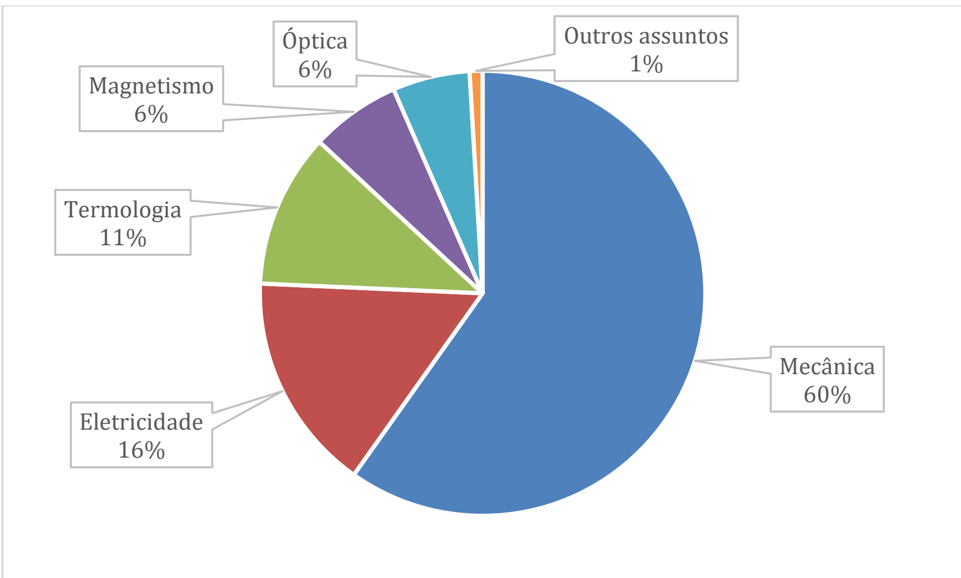


Figura 1: Estatística de questões de física por assuntos no CN a partir de 2010.

Não é nenhuma surpresa que o assunto mais cobrado na prova é Mecânica (as leis de Newton, energia e quantidade de movimento). Esse assunto é um ramo da Física muito importante e é base para desenvolvimento de outros temas. Por isso, o CN exige dos candidatos uma excelente preparação, com todos os fundamentos bem consolidados nos seus alunos.

Dentro de Mecânica, temos os seguintes assuntos mais cobrados:

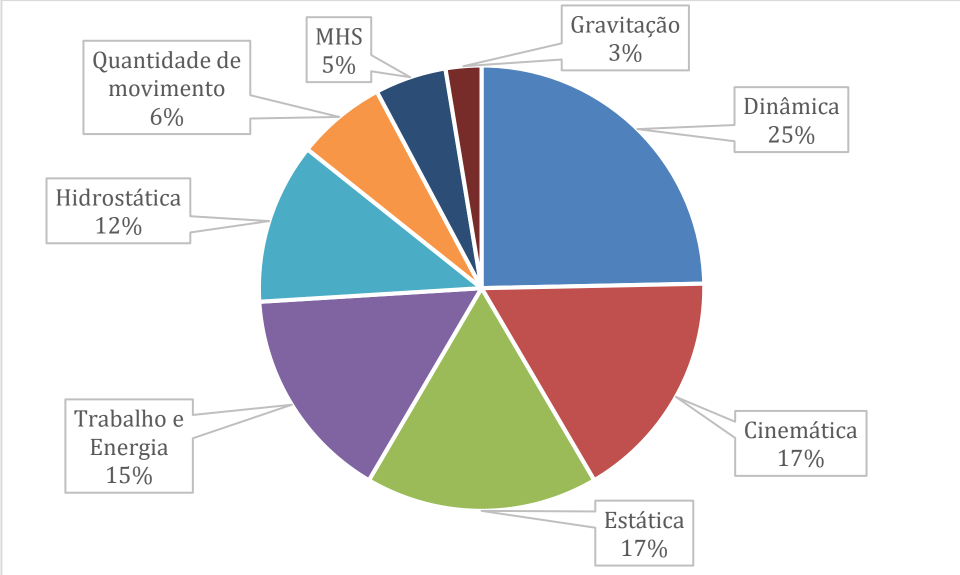


Figura 2: Assuntos que mais caíram no CN dentro do ramo da Mecânica.

Cronograma de aulas

Com a missão de entregar o melhor curso para você, preparei o seguinte cronograma de aula, de acordo com o edital do CN e na experiência com os vestibulares dessas instituições.

Aula	Título	Descrição do conteúdo
00	Introdução à Física e à cinemática.	Introdução à Física. Vetores. Conceitos de espaço e de tempo. Velocidade média. Funções horárias de espaço e de velocidade. Movimento Uniforme (MU). Aceleração. Movimentos acelerados e retardados. Movimento uniformemente variado (MUV). Movimento vertical no vácuo.
01	Análises gráficas e movimentos circulares	Análises gráficas. Movimento circular. Movimento circular uniforme (MCU). Movimento circular uniformemente variado (MCUV). Transmissão de movimentos.
02	Cinemática vetorial e lançamento oblíquo.	Cinemática vetorial. Velocidade vetorial. Aceleração vetorial. Composição de movimentos. Lançamento oblíquo.
03	As leis de Newton e as principais forças.	As leis de Newton. Tipos de forças e dinâmica do movimento circular.
04	Eletrostática	A natureza elétrica da matéria. Princípios da Eletrostática. Lei de Coulomb. Campo elétrico e Potencial elétrico.
05	Termologia I	Termometria. Dilatação térmica dos sólidos e dos líquidos. Calorimetria. Mudanças de estado. Diagrama de estado.
06	Termologia II	Propagação de calor. Gases e transformações. Teoria cinética dos gases. Primeira Lei da Termodinâmica. Máquinas térmicas.
07	Trabalho e energia	Trabalho, potência e energia. Energia potencial e conservação da energia mecânica. Centro de massa.
08	Estática e gravitação	Estática do ponto material e do corpo extenso. Tipos de equilíbrios. Condições de tombamento e de escorregamento.

		Gravitação. Sistema solar. Leis de Kepler. Força Gravitacional. Campo gravitacional.
09	Hidrostática	Densidade e massa específica, princípios de Arquimedes e de Pascal, vasos comunicantes e prensa hidráulica.
10	Eletrodinâmica I	Corrente elétrica. Tipos de corrente elétrica. Continuidade da corrente elétrica. Resistência elétrica. Efeito Joule. Introdução a circuitos elétricos. Resistores. Primeira e segunda lei de Ohm.
11	Eletrodinâmica II	Associação de resistores. Ponte de Wheatstone. Associação de resistores especiais. Geradores e receptores elétricos. As leis de Kirchhoff. Resolução de circuitos elétricos. Medidas elétricas.
12	Óptica geométrica	Óptica geométrica. Reflexão da luz. Espelhos planos e esféricos. Refração da luz. Lentes esféricas delgadas. Equação dos fabricantes. Instrumentos ópticos. Óptica da visão. Ondulatória. Classificação, propriedades, fenômenos e ondas sonoras.
13	Magnetismo	Cargas elétricas e campo magnético. O campo magnético. Experiência de Oersted. Corrente retilínea gerando campo magnético. Corrente em espiras.

Apresentação pessoal

Para aqueles que não me conhecem, meu nome é Toni Burgatto e sou formado em Engenharia Mecânica-Aeronáutica pelo ITA. Estudei em escola pública no ensino fundamental e médio e somente depois do término do ensino médio comecei a estudar para o ITA.

Ainda quando estava saindo do ensino médio, fiz técnico em eletrônica na minha cidade e lá conheci um pouco mais sobre o que era o ITA e como era o vestibular. Durante minha jornada, comecei a estudar do zero e com livros mais simples, por assuntos básicos, como teorema de Pitágoras. Cada livro e cada conselho de amigos que estavam estudando no ITA foram cruciais para minha aprovação.

Eu escolhi a carreira militar mesmo antes de entrar no ITA, já no vestibular, e lá, no segundo ano, eu optei novamente pela carreira (no ITA, é possível você mudar de carreira no final do segundo ano, quando existe um processo de recrutamento). Em 2016 eu me formei e fui designado para trabalhar no Parque de Material Aeronáutico do Galeão (PAMA-GL) no Rio de Janeiro.

Eu trabalhava na equipe de projetos do Parque, na seção de Engenharia. Após sete meses, eu decidi sair da carreira, pois vi que não me encaixava no perfil. Desde então dou aula de matemática.

Conte comigo na sua caminhada rumo ao CN. Vamos iniciar nosso curso!

1.Introdução à Física

De uma forma geral, podemos dizer que Física é a ciência que estuda as leis do universo, buscando entender as causas e os efeitos dos fenômenos físicos na natureza.

Na Física, as grandezas são propriedades mensuráveis de um fenômeno, corpo ou substância. Quando medimos essas propriedades, dividimos quantitativamente em dois grupos:

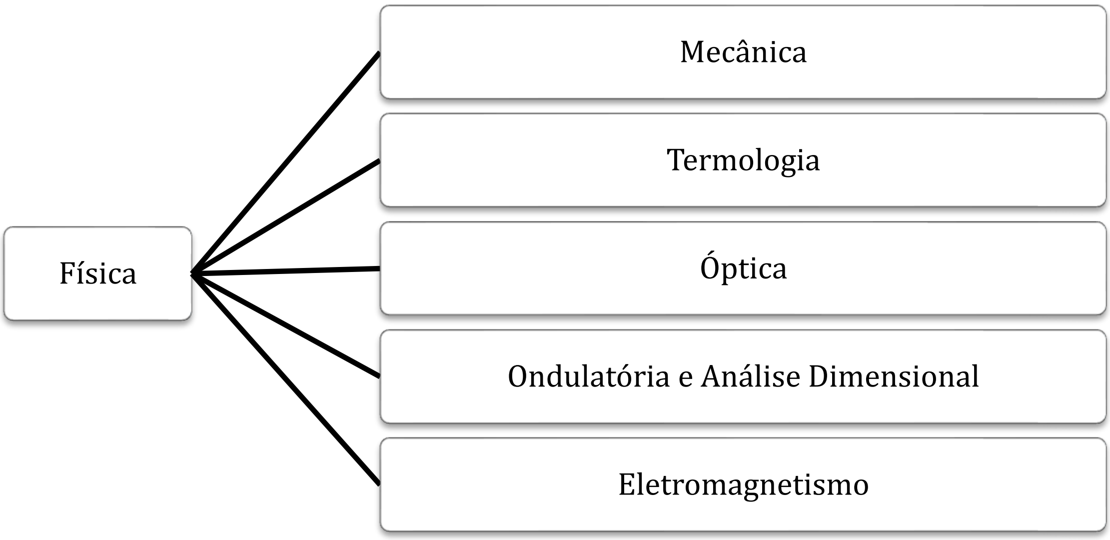
- **Grandezas escalares**: são aquelas que necessitam apenas de um número para representar sua magnitude e sua unidade de medida. Por exemplo: tempo, massa, temperatura etc.
- **Grandezas vetoriais**: são aquelas que necessitam de um número para representar sua magnitude, uma orientação (direção e sentido), e sua unidade de medida. Por exemplo: deslocamento, velocidade, aceleração, força, campo elétrico etc.

Unidade de medida é uma medida específica para uma determinada grandeza física. Por exemplo: unidade de tempo é segundo (s), unidade de massa é quilograma (kg) etc.

Nosso curso de Física está dividido em 5 áreas:

1. Mecânica;
2. Termologia;
3. Óptica;
4. Ondulatória e Análise Dimensional; e
5. Eletromagnetismo.

Neste momento, vamos estudar alguns conceitos prévios que serão utilizados ao longo do nosso curso de Física.



1.1. Noções de algarismos significativos

Para entendermos o conceito de Algarismos Significativos, vamos pegar um exemplo de medida. Suponha que uma pessoa tenha uma régua graduada em milímetros, isto é, sua menor subdivisão corresponde a um milímetro.

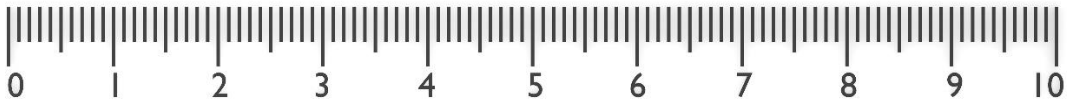


Figura 3: Figura ilustrativa para representar uma régua milimetrada.

Vamos usar esta régua para medir o tamanho de uma pequena haste rígida, posicionando uma das extremidades da barra na origem da régua. Em seguida, uma pessoa realiza a medida.

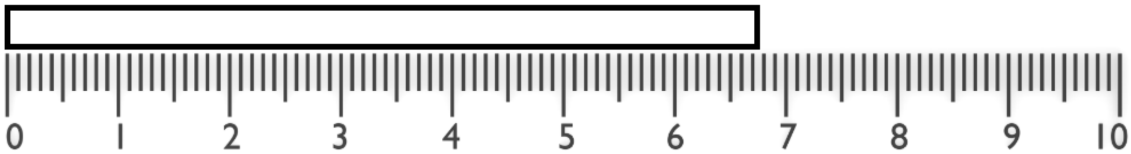


Figura 4: Régua milimetrada utilizada para medir uma haste metálica.

Vamos supor que a pessoa apresentou o seguinte valor de medida: $l = 6{,}7578823\ cm$. De imediato, percebemos que esta régua não tem condições de fornecer uma medida com tamanha precisão. Diante disso, dizemos que nem todos os algarismos fornecidos são significativos, ou seja, alguns algarismos foram colocados sem critérios de medida e, por isso, não possuem qualquer significado no resultado.

De acordo com o instrumento de medida que a pessoa possui, podemos observar que ela tem condições apenas de avaliar até décimos de milímetros, pois a régua é graduada até milímetros e não dispõe de meios para garantir medidas na ordem de centésimos ou milésimos de milímetros.

Analisando a medida apresentada (vamos sempre analisar do algarismo da esquerda para a direita), notamos que o algarismo 6 está correto, pois ele indica a quantidade em centímetros, isto é, a haste possui 6 centímetros. O algarismo 7 corresponde a quantidade em milímetros, visivelmente, na régua, por isso, ele está correto também. Dessa forma, os números 6 e 7 são chamados de **significativos**. O próximo algarismo corresponde aos décimos de milímetros e nossa régua não possui esta graduação. Dizemos que esse algarismo foi obtido de acordo com a avaliação visual da pessoa, por isso, chamamos de **algarismo duvidoso** (uma outra pessoa poderia indicar outro valor para este algarismo). Contudo, como o algarismo 5 é o **primeiro duvidoso**, ainda o consideramos **significativo**, isto é, o primeiro duvidoso também é significativo. Para os demais algarismos (7,8,8,2,3), a pessoa não possui recursos para avaliar com rigor a medição. Por isso, esses algarismos são chamados de **não significativos**.

Sendo assim, podemos dizer que a medida possui 3 algarismos significativos, com os dois primeiros algarismos corretos e o último (mais à direita) o primeiro duvidoso. Então, podemos enunciar que:

Os algarismos significativos são aqueles que certificamos estarem corretos, mais o primeiro duvidoso.

Concluímos, então, que a medida do comprimento da haste rígida é $l = 6{,}75\ cm$.

Se transformamos a unidade de medida de centímetros para metros, obtemos que $l = 6{,}75\ cm = 0{,}0675\ m$. Essa mudança alterou a quantidade de algarismos significativos? A resposta é **não**. Ao trocarmos a unidade de medida não alteramos a forma da medição (não mudamos o instrumento de medida). Dessa forma, os zeros à esquerda do 6 apenas posicionam a vírgula para a nova unidade de medida da haste. Portanto, podemos enunciar a seguinte regrinha:

Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não são algarismos significativos.

Vamos analisar agora um novo exemplo em que um estudante dispõe de uma balança graduada em décimos de quilograma e deseja realizar a medida da massa m de um objeto qualquer.

Figura 5: Figura ilustrativa para mostrar a importância dos zeros a direita em algarismos significativos.

Primeiramente, certificamos que o número 0 está correto e o mesmo ocorre com relação ao 6 (medição seria 0,6... kg). O primeiro algarismo duvidoso seria o 0 (primeiro duvidoso também é significativo), mas 0 é ou não é significativo? Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não são significativos, entretanto, zeros à direita são.

Dessa conclusão, podemos enunciar outra regrinha:

Zeros à ***direita*** *do primeiro algarismo diferente de zero* ***são algarismos significativos****, respeitando as definições apresentadas.*

1.1.1. Operações matemáticas com algarismos significativos

Após ter feito medições e respeitadas as regras de algarismos significativos, fatalmente você fará operações para manipular seus dados e, para isso, terá que levar em conta algumas regrinhas para apresentar o resultado dos cálculos:

- **Adição e subtração**: nessas operações devemos deixar a resposta com o menor número de casas decimais. Exemplo de adição: somar 2,4 cm (1 casa decimal) com 3, 18 cm (2 casas decimais):

$$+\frac{\begin{array}{r}2{,}4\\3{,}18\end{array}}{5{,}58}$$

Para escrevermos o resultado, devemos deixar o valor obtido com apenas uma casa decimal (menor número de casas) e como o terceiro algarismo é 8 ($8 > 5$), devemos arredondar o primeiro algarismo a esquerda do 8 para cima, isto é, ajustar 5 para 6. Portanto, obtemos 5,6 cm. Exemplo de subtração: subtrair 1,14 km (2 casas decimais) de 6,573 km (3 casas decimais):

$$-\frac{\begin{array}{r}6{,}573\\1{,}14\end{array}}{5{,}433}$$

Novamente, antes de expressarmos o resultado, devemos deixar o valor obtido com duas casas decimais e manter a segunda casa decimal igual a 3, pois, o último algarismo é 3 ($3 < 5$). Assim, obtemos 5,43 km.

- **Multiplicação e divisão:** convencionamos deixar o resultado com o mesmo número de algarismos significativos do fator que tiver menos significativos, podendo tolerar até 1 a mais. Exemplo de multiplicação: Calcule a área do retângulo cujas medidas são 4,8 m e 6,903 m. Notamos que 4,8 possui 2 algarismos significativos e 6,903 possui 4 algarismos significativos. Portanto, nosso resultado pode ter 2 ou 3 significativos:

$$4{,}8\ x\ 6{,}903 = 33{,}1344\ m^2$$

Assim, obtemos $33\ m^2$. Tolera-se 1 algarismo significativo a mais e o segundo decimal é o número 3 ($3 < 5$). Portanto, chegamos ao resultado $33{,}1\ m^2$.

Exemplo de divisão: determine o comprimento de um terreno retangular onde a área é $500\ m^2$ e largura é $15{,}3\ m$. Note que 500 e 15,3 possuem 3 algarismos significativos. Assim, devemos deixar o resultado também com 3 algarismos significativos:

$$500\ \div 15{,}3 = 32{,}679739\ m$$

Dessa forma, obtemos $32\ m$, arredondando 6 para 7, pois $7 > 5$, concluímos que o comprimento será $32{,}7\ m$.

1.2. Notação científica

Para se escrever o valor numérico em trabalhos científicos utilizamos a notação científica. Para isso, utilizamos a potência de dez, tomando o cuidado de conservar à esquerda da vírgula com apenas um dígito diferente de zero.

Exemplos:

Número	Notação científica	Número de Algarismos significativos
150	$1{,}50 \cdot 10^2$	3
$52{,}34$	$5{,}234 \cdot 10^1$	4
$0{,}00760$	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$	3
$1{,}0502$	$1{,}0502 \cdot 10^0$	5

Quando utilizamos a notação científica, temos uma rápida visualização da grandeza (a potência de 10) e do número de algarismos significativos. Além disso, a facilidade de trabalhar matematicamente com esses valores tornam muito útil a representação por notação científica.

Podemos escrever o valor de uma grandeza física na forma:

$$x \cdot 10^n, \text{ onde } 1 \leq x < 10 \text{ e } n \in \mathbb{R}$$

Por exemplo, o raio da Terra é próximo de 6371 km. Em notificação científica escrevemos que $6371\ km \Rightarrow 6{,}371 \cdot 10^3\ km = 6{,}371 \cdot 10^6\ m$. Outros exemplos conhecidos é a massa do elétron, $9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ e a carga elementar $1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$.

1.3. Ordem de grandeza

Em muitas ocasiões é necessário estimar o valor de uma certa grandeza, ainda não seja seu valor real. Para isso, buscamos estimar o valor mais próximo da grandeza, utilizando potências de 10.

Por exemplo, quanto é a ordem de grandeza de um homem que possui 1,80 metros de altura em centímetros? Quando transformamos a altura em centímetros, temos que $1{,}80\ m \equiv 180\ cm$. Assim, a potência de 10 mais próxima seria 10^2. Logo, a ordem de grandeza (OG) é de $10^2\ (cm)$.

De um modo geral, utilizamos a seguinte regra para determinar a ordem de grandeza, a partir da notação científica:

$$x \cdot 10^n, onde\ 1 \leq x < 10, n \in \mathbb{R}$$

Então:

$$x < 3{,}16 \Rightarrow OG = 10^n$$
$$x \geq 3{,}16 \Rightarrow 10^{n+1}$$

Note que podemos determinar a ordem de grandeza do homem do nosso exemplo da seguinte forma:

$$1{,}80\ m \equiv 1{,}80 \cdot 10^2\ cm \Rightarrow 1{,}80 < 3{,}16 \Rightarrow OG = 10^2\ \ (cm).$$

O fato do marco divisório entre as potências de 10 ser o número $\sqrt{10} \cong 3{,}16$ vem do fato dele ser ponto médio entre os expoentes das potências de 10:

$$10^0 \quad 10^{1/2} \quad 10^1$$

Tirando a média geométrica dos extremos possíveis valores para a notação científica:

$$\sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$$

1.4. Vetores

Como vimos anteriormente, podemos dividir as grandezas físicas em escalares e vetoriais. As grandezas escalares necessitam apenas da sua magnitude e sua unidade de medida para estarem definidas. Por outro lado, as grandezas vetoriais precisam de mais informações.

Por exemplo, quando estamos perdidos e pedimos informação para alguém. Se a pessoa disser apenas que você está a alguns quilômetros do seu destino, isso não é o suficiente para você chegar até lá. A primeira pergunta que você fará para o informante é: para qual direção? E qual sentido?

O estudo dos vetores é fundamental para a melhor compreensão das grandezas físicas. Algumas definições são feitas diretamente por produto escalar ou produto vetorial, por exemplo. Por isso, vamos estudar o que são vetores e os principais cálculos utilizados na Física. Para o nosso curso, estudaremos e mostraremos somente aquilo que for útil para sua aprovação.

1.4.1. Definições básicas dos vetores

Vetor é um ente matemático determinado por segmentos orientados caracterizados por: módulo, direção e sentido. Para representá-lo no espaço, precisamos definir um comprimento proporcional ao seu módulo (sempre um número real positivo). Normalmente, indicamos um vetor por uma letra com uma flecha em cima: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{V}$ etc. Em textos impressos, os vetores podem ser denotados também por negrito: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}$ etc. Para se referir apenas ao módulo do vetor, denotamos por $|\vec{a}|$ ou simplesmente a (sem negrito), como mostrado na figura abaixo:

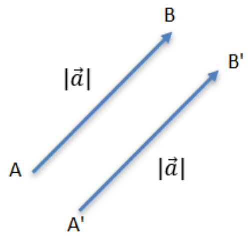


Figura 6: Representação geométrica de dois vetores.

Assim, verificamos que os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ estão em direções orientadas paralelas entre si, com mesmo sentido, e os comprimentos destes segmentos de retas são iguais. Diante disso, podemos afirmar a condição de igualdade entre dois vetores:

Dois vetores são iguais entre si quando possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

Assim, podemos dizer que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$. Portanto, $\vec{a}$ é o vetor que os dois segmentos de reta representam.

1.4.2. Operações matemáticas com vetores

Semelhante a álgebra dos números, é possível realizar diversas operações com vetores. Nós estudaremos aquelas mais usais em física. Para realizar essas operações, é necessário tomar alguns cuidados, pois, diferente dos números, existem regras próprias.

Algumas operações abordadas neste curso:

1. Adição de vetores;
2. Multiplicação de vetor por escalar;
3. Subtração de vetores;
4. Produto escalar;
5. Produto vetorial.

1.4.3. Adição de vetores

Para somar dois vetores, vamos introduzir a ideia através de um exemplo. Suponha que um jovem atleta deseje correr em uma praça em formato de um triângulo retângulo conforme a figura abaixo. Ele sai do ponto A em direção ao ponto B, em seguida para o ponto C.

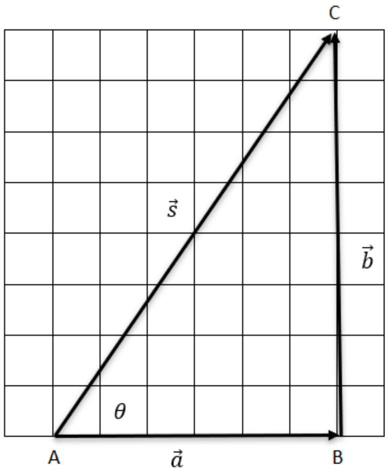


Figura 7: Imagem representativa de uma praça para efeitos didáticos.

A praça possui as seguintes dimensões: $AB = 60\ m$, $BC = 80\ m$ e $AC = 100\ m$. Indicamos por $\vec{a}$ o vetor deslocamento no trecho $\overline{AB}$, por $\vec{b}$ o vetor deslocamento no trecho $\overline{BC}$ e por $\vec{s}$ o deslocamento resultante. Matematicamente, dizemos que:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Observe que, em módulos, $\vec{s} \neq \vec{a} + \vec{b}$, isto é, o tamanho do vetor $\vec{s}$ é diferente da soma dos módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Para encontrar o módulo do vetor resultante, dados que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares entre si, utilizaremos sempre o teorema de Pitágoras:

$$s^2 = a^2 + b^2$$

$$s^2 = 60^2 + 80^2$$

$$s = 100\ m$$

Tudo o que nós fizemos até aqui, é definir apenas o módulo do vetor $\vec{s}$. Para definir completamente o vetor, precisamos definir a direção, isto é, o ângulo θ que o vetor faz com o segmento $\overline{AB}$. Este ângulo pode ser determinado por intermédio da tangente do ângulo θ:

$$tg(\theta) = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$$

A partir desse exemplo, podemos ver que somar dois vetores não é simplesmente somar dois números. Somar vetores é uma operação geométrica.

Antes de caminharmos para as regras de adição de vetores, vamos trabalhar alguns casos especiais, onde os vetores estão em mesma direção:

- Vetores com mesma direção e mesmo sentido:

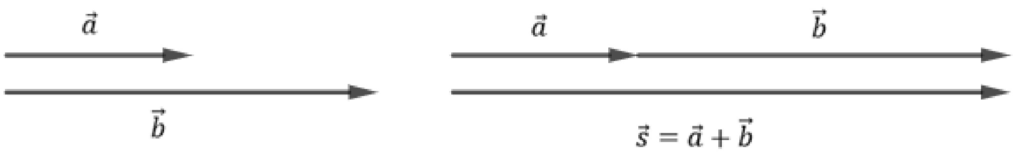


Figura 8: Soma de vetores mesma direção.

Dessa forma, ao somar 2 vetores que têm a mesma direção e sentido, o vetor resultante terá a mesma direção e sentido dos operandos e seu módulo será a soma dos módulos.

- Vetores com mesma direção e sentidos opostos:

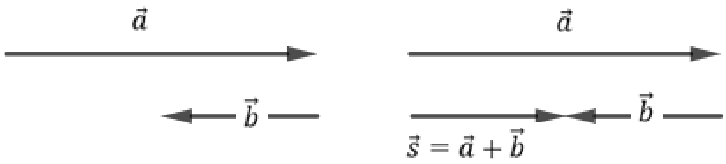


Figura 9: Soma de vetores direção oposta.

Assim, ao somarmos dois vetores que têm mesma direção e sentidos opostos, a direção do vetor resultante será a mesma dos vetores operandos, mas o sentido será determinado por aquele que tiver o maior módulo. O módulo do vetor resultante será dado pela diferença do maior módulo com o menor módulo.

Existem três métodos para somar vetores: regra do paralelogramo, regra do polígono e a decomposição de vetores.

1.4.4. Regra do paralelogramo

Este método é utilizado para calcular a soma de dois vetores quando é conhecido o ângulo formado entre eles. Geralmente, quando usamos esse método utilizamos a lei dos cossenos para a determinação do vetor resultante.

Vamos recordar duas leis importantes da geometria plana para um triângulo qualquer:

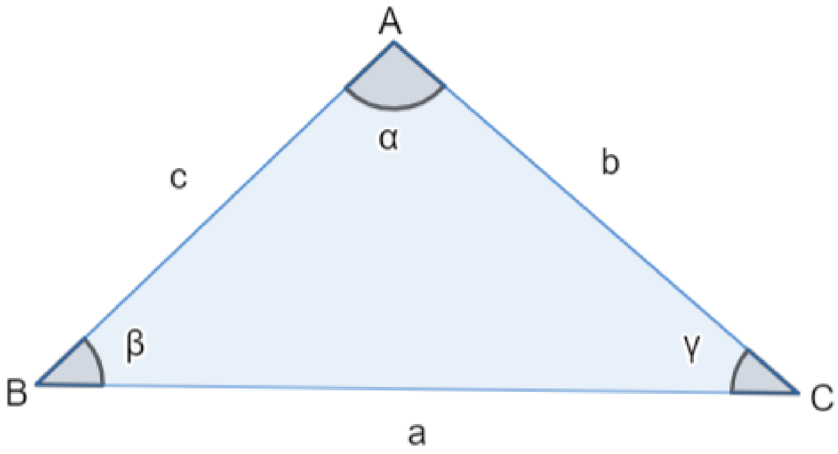


Figura 10: Triângulo qualquer.

- **Lei dos senos**:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

- **Lei dos cossenos**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\gamma$$

Relembrado essas duas leis, vamos aplicar na regra do paralelogramo.

Primeiramente, colocamos os dois vetores com origem em comum (ponto O) e construímos um paralelogramo, fazendo linhas tracejadas paralelas aos vetores, passando pelas extremidades dos operandos. Em seguida, liga-se a origem dos vetores (ponto O) ao encontro das linhas tracejadas (ponto C), determinando o vetor resultante $\vec{s} = \overrightarrow{OC}$, conforme figura abaixo:

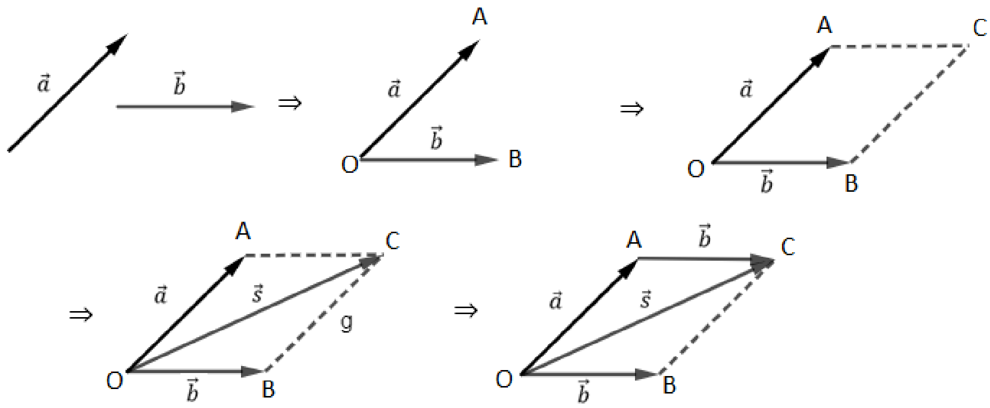


Figura 11: Processo de soma de vetores pela regra do paralelogramo.

Olhando para o paralelogramo abaixo, podemos aplicar a regra do paralelogramo, lembrando algumas propriedades da Geometria Plana e da Trigonometria:

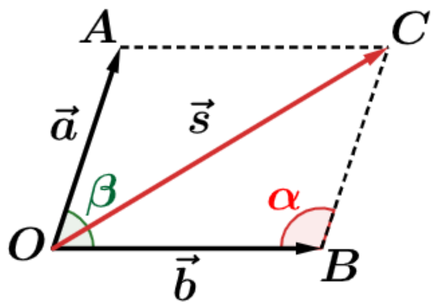


Figura 12: Vetor resultante.

No triângulo OBC, vamos chamar o ângulo $O\hat{B}C$ de α e o ângulo $A\hat{O}B$ de β (ângulo entre os dois vetores). De acordo com a Geometria Plana, $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180 - \alpha$. Da Trigonometria, sabemos que $\cos \beta = -cos\alpha$. Então, aplicando a lei dos cossenos para o triângulo OBC, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\alpha \Rightarrow s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.(-cos\alpha)$$

$$\therefore \boxed{s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.cos\beta}$$

Diante desse resultado, podemos criar um método para determinar o módulo do vetor soma. Aplicando os passos:

1) Coloca-se os vetores em origem comum;
2) Conhecemos o valor do ângulo formado pelos vetores que queremos somar;
3) Cumpridos os passos 1 e 2, aplicamos a fórmula anterior e encontramos o vetor desejado.

Esse método se limita a soma de dois vetores apenas. Para somar mais vetores, precisaríamos aplicar a regra do paralelogramo para dois vetores, a partir do resultante aplicar novamente a regra e assim sucessivamente. Isso torna o método nada usual para o caso da soma de n vetores. Então, veremos uma regra mais útil para esse tipo de problema: regra do polígono.

1.4.5. Regra do polígono

Vamos pegar 4 vetores distintos, de acordo com a figura abaixo:

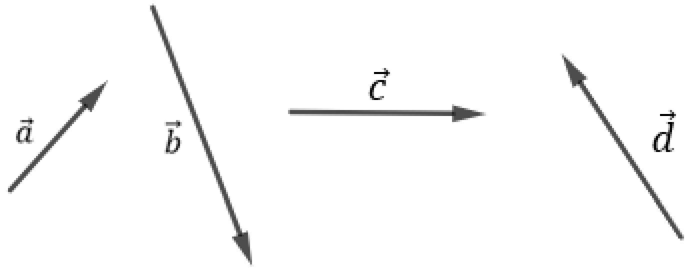


Figura 13: Vetores a serem somados pela regra do polígono.

O vetor resultante pode ser obtido da seguinte forma:

1) Escolhe um vetor para ser o "vetor origem" (escolhemos o vetor $\vec{a}$). A partir dele, escolha qualquer um (escolhemos o vetor $\vec{d}$) e coloque a origem do vetor escolhido na extremidade do "vetor origem";
2) Em seguida, escolhe qualquer um dos vetores que sobrou e coloque a origem na extremidade do vetor anterior ($\vec{d}$) e assim, até que todos os vetores estejam colocados em ordem, a origem na extremidade do anterior;

3) O vetor resultante está determinado ligando a origem do primeiro vetor à extremidade do último.

A figura abaixo ilustra nosso exemplo:

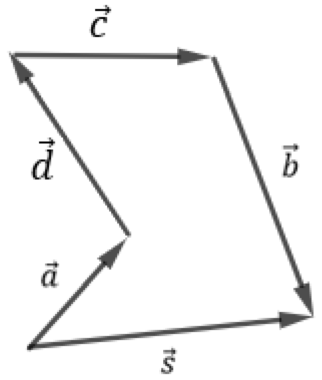


Figura 14: Vetor resultante utilizando a regra do polígono.

A forma como mostramos a regra do polígono ilustra as propriedades comutativa e associativa da soma de vetores.

Propriedades:

- Propriedade comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
- Propriedade associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Para nosso caso, queremos saber $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ e pelas propriedades comutativa e associativa podemos escrever que: $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{a}+\vec{d}+\vec{c}+\vec{b}$.

Com esse exemplo, vemos que não importa a ordem como escolhemos os vetores desde que sejam respeitadas as regras. Além disso, podemos ver que se efetuarmos a soma e a extremidade do último cair na origem do primeiro, teremos um polígono fechado dos vetores, de tal forma que a extremidade do vetor soma coincide com a própria origem. Então, o vetor resultante será o vetor nulo ($\vec{0}$).

1.4.6. Decomposição de vetores

Este método é muito importante na Física, pois podemos descrever diversas grandezas vetoriais em sistemas de coordenadas xyz (problemas em 3 dimensões) ou xy (problemas em 2 dimensões) para resolver questões. É comum colocar as variáveis em um mesmo eixo para resolver os problemas.

Pegamos um vetor $\vec{F}$ qualquer (pode ser uma força, por exemplo). Pela regra do paralelogramo, podemos dizer que é a soma de outros dois vetores, por exemplo:

$$\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$$

Neste momento, é interessante observar que para melhorar as contas é interessante escolher um paralelogramo que possua propriedades que facilitam nossas contas, paralelogramos com ângulos interessantes. Da matemática sabemos que um retângulo é um tipo de paralelogramo com ângulos de $90°$ e isto facilita muito as contas. Então, o melhor caminho é escolher vetores que sejam ortogonais, isto é, formam um ângulo de $90°$ quando colocadas as origens em comum. Uma vez que os vetores podem ser ortogonais, podemos usar os sistemas de eixos coordenadas para auxiliar.

Dessa forma, podemos escrever $\vec{F}$ como a soma de um vetor no eixo x ($\overrightarrow{F_x}$) e outro vetor no eixo y ($\overrightarrow{F_y}$). Assim, temos que:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y}$$

Podemos representar da seguinte forma:

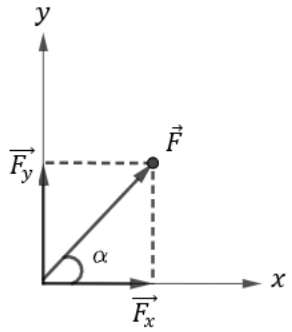


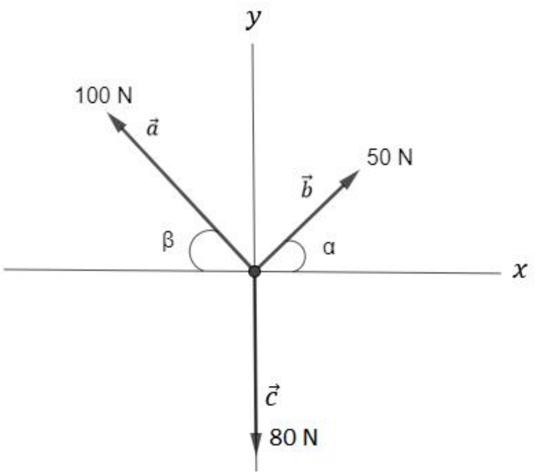
Figura 15: Decomposição de vetores no plano xy.

Esses vetores $\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$ são chamados de projeções do vetor $\vec{F}$ nos eixos x e y, respectivamente. Pela geometria, podemos dizer que:

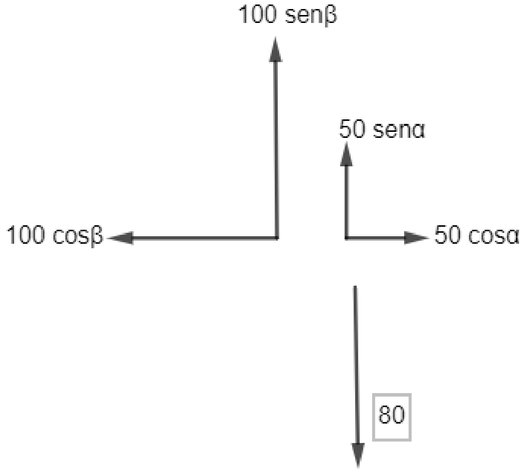
$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F.cos\alpha \\ sen\alpha = \dfrac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F.sen\alpha \\ F^2 = F_x^2 + F_y^2 \end{cases}$$

Por esse método, se temos vários vetores a serem somados, basta colocar todos na mesma origem e os projetar nos eixos x e y. Em seguida, efetua-se a soma de acordo com as regras de adição em mesma direção, obtendo um vetor resultante em cada eixo. Para concluir, basta usar a regra do paralelogramo para esses dois vetores restantes para obter o vetor soma desejado. Como os eixos são sempre ortogonais, vamos sempre recair em dois vetores ortogonais, com fácil aplicação do teorema de Pitágoras para o vetor desejado.

Exemplo: determine o vetor soma $\vec{s}$ entre os vetores dados $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Dado que $\cos\alpha = 0{,}6$ e $sen\beta = 0{,}8$.



Primeiramente, iremos decompor cada vetor nos eixos x e y.



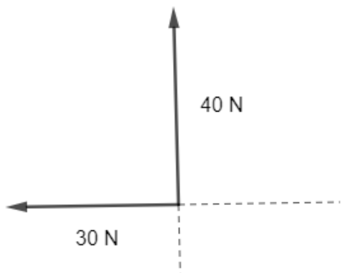
Assim, temos que:

$$\begin{cases} a_x = 100cos\beta = 60\ N\ e\ a_y = 100sen\beta = 80\ N \\ b_x = 50cos\alpha = 30\ N\ e\ b_y = 50sen\alpha = 40\ N \\ c_x = 0\ e\ c_y = 80\ N \end{cases}.$$

Portanto, temos os seguintes vetores resultantes para cada eixo:

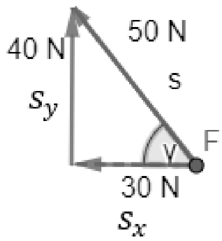
$$\begin{cases} s_x = a_x - b_x = 60 - 30 = 30\ N \\ s_y = a_y + b_y - c_y = 80 + 40 - 80 = 40\ N \end{cases}$$

Assim, reduzimos nossos vetores aos resultantes em cada eixo:



$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 = 30^2 + 40^2 = 2500 \Rightarrow s = 50\ N$$

Para finalizar, devemos determinar sua direção e sentido para que o vetor fique completamente definido, como na figura abaixo:



Logo: $tg\gamma = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \Rightarrow \gamma = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \gamma \approx 53{,}1°$. Com este exemplo, concluímos que qualquer vetor pode ser projetado em eixos ortogonais entre si.

1.4.7. Multiplicação por um escalar

Outra operação muito comum e importante no universo dos vetores é a multiplicação de um vetor por um escalar. Podemos denotar essa operação da seguinte forma:

$$\vec{b} = n.\vec{a}$$

Onde n é um número real qualquer, $\vec{b}$ é o vetor obtido ao multiplicar o vetor $\vec{a}$ pelo escalar n.

Como resultado dessa definição, podemos notar que:

1) $|\vec{b}| = |n.\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = |n|.|\vec{a}|$, isto é, o módulo do vetor obtido é o produto do módulo do escalar pelo módulo do vetor multiplicado. Multiplicar pelo escalar é alterar o tamanho do vetor. Ao efetuar essa operação existem dois possíveis tipos de mudança no modulo:

   1) $|n| > 1 \Rightarrow |\vec{b}| > |\vec{a}|$;
   2) $0 \leq |n| \leq 1 \Rightarrow |\vec{b}| \leq |\vec{a}|$;

2) $\vec{b}$ tem a mesma direção de $\vec{a}$;

3) o sentido de $\vec{b}$ é o mesmo de $\vec{a}$ quando $n > 0$ e o sentido de $\vec{b}$ é o contrário de $\vec{a}$ quando $n < 0$. Se $n = 0$, obtemos como resultado o vetor nulo, representado por $\vec{0}$.

Quando o vetor representado na forma $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, então o valor de $\vec{b} = n.\vec{a}$ é dado por $\vec{b} = (na_x, na_y, na_z)$;

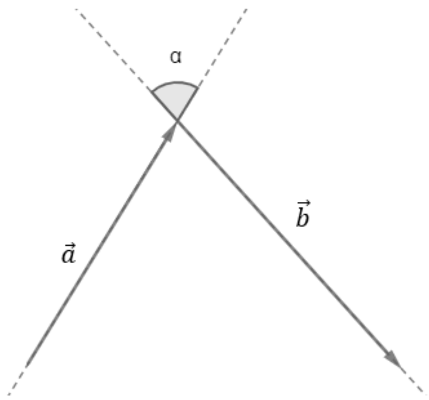
4) Para o caso de $n = -1$, o vetor obtido recebe o nome de vetor oposto, pois como para os números, o oposto é um número que somado ao próprio número dá como resultado zero. Por exemplo, o oposto de 10 é -10, pois $10 + (-10) = 0$. Como visto no item anterior, ao multiplicar por um número negativo, troca-se o sentido do vetor. Dessa forma, o vetor oposto a $\vec{b}$ é o vetor $-\vec{b}$, pois, teremos que: $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$.

Neste momento, podemos falar de um vetor muito importante para representações físicas, com uma aplicação que facilita muito nossa vida.

1.5. Lista de questões sobre vetores

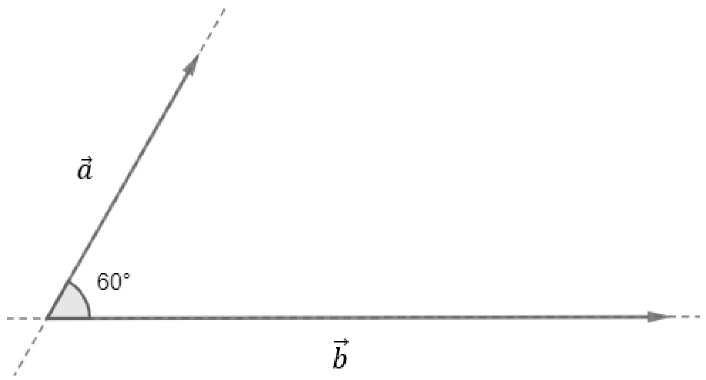
1.

Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, dado que $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 16$ e $cos\alpha = 0{,}6$.



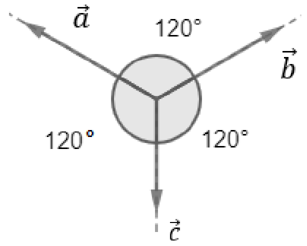
2.

Determine o módulo do vetor resultante sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são representados logo abaixo. Dados $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 10$.



3.

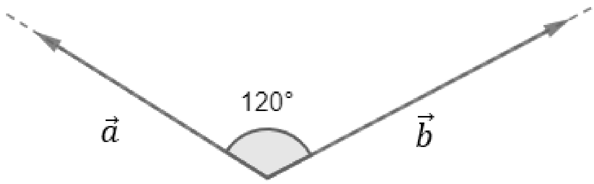
Determine o módulo da resultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Dados $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 10$.



4.

Para o conjunto de vetores da figura abaixo, determine o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Dados: $|\vec{a}| = 8$ e $\left|\vec{b}\right| = 10$.



5.

Qual das alternativas abaixo é uma relação verdadeira entre os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

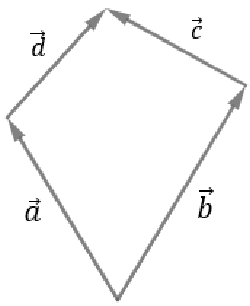
a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{b}$

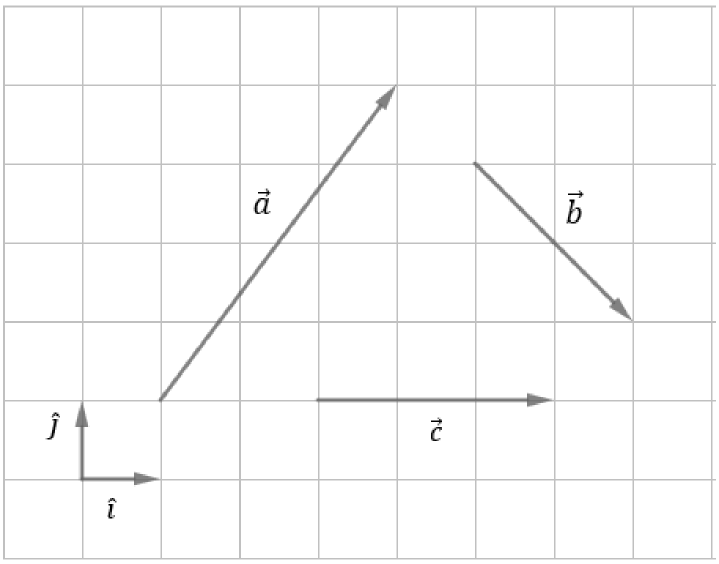
d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$



6.

No gráfico da figura abaixo apresenta três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Considere os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.



Considere as expressões:

(I) $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

(II) $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

(III) $\vec{c} = 3\hat{\jmath}$

Podemos afirmar que:

a) apenas (I) está correta.

b) apenas (II) está correta.

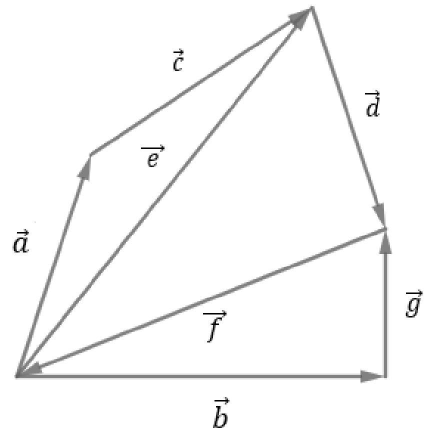
c) apenas (III) está correta.

d) (I) e (II) estão corretas.

e) todas estão corretas.

7.

Dado o conjunto de vetores, como ilustrado na figura abaixo, marque verdadeira para as equações vetoriais corretas e F para as falsas.



a) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$

b) $\vec{e} + \vec{d} = \vec{g} + \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} = \vec{0}$

d) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{e} + \vec{b} + \vec{g} + \vec{f} = \vec{0}$

e) $\vec{e} + \vec{d} - \vec{g} + \vec{b} = \vec{0}$

8.

Dois vetores ortogonais, isto é, são perpendiculares entre si, um de módulo igual a 18 e outro de módulo 24, então, o vetor soma terá módulos igual a:

a) 20

b) 25

c) 28

d) 30

e) 32

9.

Dentre as alternativas abaixo, assinale as alternativas erradas. Considere $n \in \mathbb{R}_*$ e o vetor não-nulo $\vec{a}$.

a) a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre a mesma direção de $\vec{a}$.

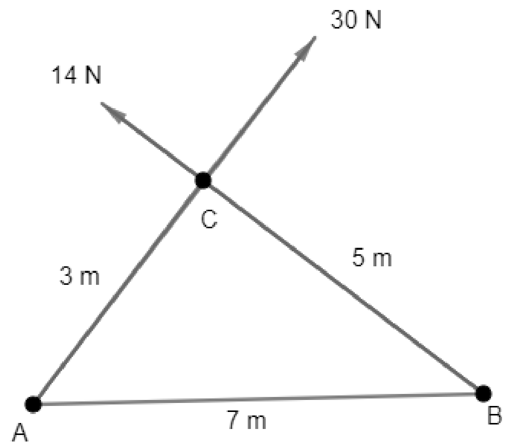
b) se $n < 0$ então a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ é diferente da direção de $\vec{a}$.

c) independente do sinal de n, o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre o mesmo sentido de $\vec{a}$.

d) se $n > 0$ o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem módulo maior que o módulo de $\vec{a}$.

10.

Considere duas cargas elétricas positivas posicionadas nos vértices A e B. No vértice C, coloca-se uma terceira carga de tal forma que surgem forças repulsivas na carga do vértice, conforme a figura abaixo. Determine o módulo da força resultante no vértice C.



11. (ITA – 1991)

Considere a Terra como sendo uma esfera de raio R e massa M, uniformemente distribuída. Um satélite artificial descreve uma órbita circular a uma altura h da superfície da Terra, onde a aceleração gravitacional (sobre a órbita) é g. Em termos de algarismos significativos, o quadrado da velocidade do satélite é mais bem representado por:

a) $16{,}81 \cdot 10^6\ (km/h)^2$

b) $3{,}62 \cdot 10^{32}\ (km/h)^2$

c) $6{,}05 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

d) $6{,}0517 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

e) Nenhum dos valores apresentados é adequado.

Dados: $R = 6{,}378\ .\ 10^6\ m$; $M = 5{,}983 \cdot 10^{24}\ kg$; $h = 2{,}00 \cdot 10^5\ m$ e $g = 9{,}2\ m/s^2$

Note e adote: $V^2 = g \cdot (R + h)$

12. (ITA-2002)

A massa inercial mede a dificuldade em se alterar o estado de movimento de uma partícula. Analogamente, o momento de inércia de massa mede a dificuldade em se alterar o estado de rotação de um corpo rígido. No caso de uma esfera, o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo seu centro é dado por $I = \frac{2}{5}MR^2$, em que M é a massa da esfera e R seu raio. Para uma esfera de massa $M = 25{,}0\ kg$ e raio $R = 15{,}0\ cm$, a alternativa que melhor representa o seu momento de inércia é

a) $22{,}50 \cdot 10^2\ kg \cdot m^2$

b) $2{,}25\ kg \cdot m^2$

c) $0{,}225\ kg \cdot m^2$

d) $0{,}22\ kg \cdot m^2$

e) $22{,}00\ kg \cdot m^2$

13. (ITA – 2007)

Sobre um corpo de $2{,}5kg$ de massa atuam, em sentidos opostos de uma mesma direção, duas forças de intensidades $150{,}40N$ e $50{,}40N$, respectivamente. A opção que oferece o módulo da aceleração resultante com o número correto de algarismos significativos é

a) $40{,}00\ m/s^2$

b) $40\ m/s^2$

c) $0{,}4 \cdot\ 10^2 m/s^2$

d) $40{,}0\ m/s^2$

e) $40{,}000\ m/s^2$

14. (UNICAMP-94)

Impressionado com a beleza da jovem modelo (1,70 m de altura e 55 kg), um escultor de praia fez sua (dela) estátua de areia do mesmo tamanho que o modelo. Adotando valores razoáveis para os dados que faltam no enunciado:

a) calcule o volume da estátua (em litros);

b) estime a ordem de grandeza do número de grãos de areia que foram usados na escultura

15. (UERJ)

O acelerador de íons pesados relativísticos de Brookhaven (Estados Unidos) foi inaugurado com a colisão entre dois núcleos de ouro, liberando uma energia de 10 trilhões de elétrons-volt. Os cientistas esperam, em breve, elevar a energia a 40 trilhões de elétrons-volt, para simular as condições do Universo durante os primeiros microssegundos após o Big Bang. (Ciência Hoje, setembro de 2000). Sabendo que 1 elétron-volt é igual a $1{,}6.10^{-19}\ joules$, a ordem de grandeza da energia, em joules, que se espera atingir em breve, com o acelerador de Brookhaven, é:

a) 10^{-8}

b) 10^{-7}

c) 10^{-6}

d) 10^{-5}

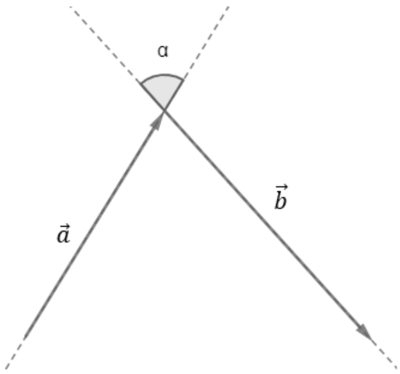
1.6. Gabarito sem comentários

1. $|\vec{s}| = 2\sqrt{41}$
2. $|\vec{s}| = 5\sqrt{7}$
3. $\vec{s} = \vec{0}$
4. $\left|\vec{d}\right| = 2\sqrt{61}$
5. C
6. A
7. VVFVF
8. D
9. B, C e D.
10. $s = 26\ N$
11. C
12. C
13. B
14. a) 38,5 L b) 10
15. D

1.7. Lista de questões comentada

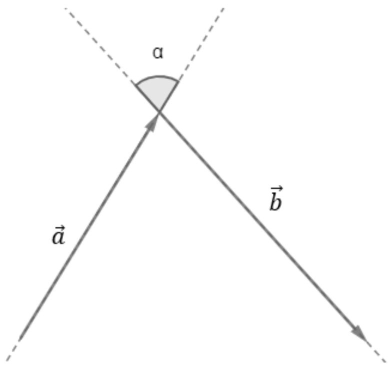
1.

Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, dado que $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 16$ e $cos\alpha = 0{,}6$.



Comentários:

De início, determinaremos o vetor soma geometricamente, fechando o triângulo, de acordo com a regra do polígono. Em seguida utilizaremos a lei dos cossenos para determinar o modulo de $\vec{s}$:



De acordo com a lei dos cossenos, podemos escrever que:

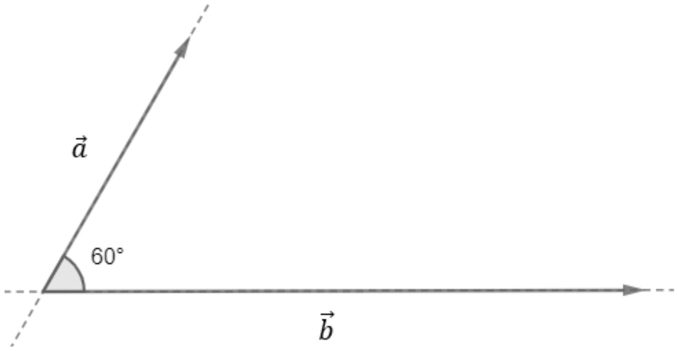
$$|\vec{s}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\alpha \Rightarrow |\vec{s}|^2 = 10^2 + 16^2 - 2.10.16.0{,}6$$

$$\Rightarrow |\vec{s}| = \sqrt{164} \Rightarrow \boxed{|\vec{s}| = 2\sqrt{41}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{|\vec{s}| = 2\sqrt{41}}$

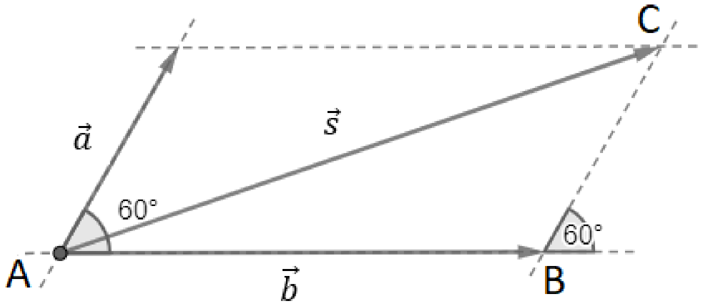
2.

Determine o módulo do vetor resultante sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são representados logo abaixo. Dados $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 10$.



Comentários:

Inicialmente, encontraremos o vetor resultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ pela regra do paralelogramo, e determinaremos seu módulo utilizando a lei dos cossenos:



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC:

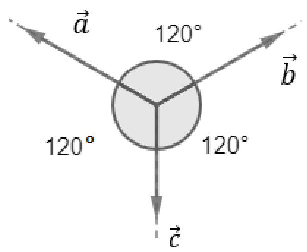
$$|\vec{s}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos(180° - 60°) \Rightarrow |\vec{s}|^2 = 5^2 + 10^2 + 2.5.10.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{s}| = \sqrt{175} \Rightarrow \boxed{|\vec{s}| = 5\sqrt{7}}$$

Gabarito: $|\vec{s}| = 5\sqrt{7}$

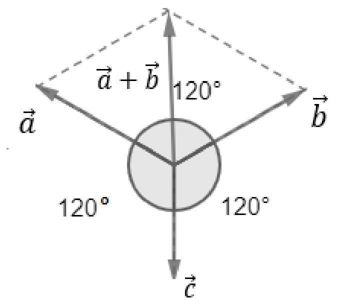
3.

Determine o módulo da resultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Dados $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = 10$.



Comentários:

Primeiramente, ao somar os vetores $\vec{a} + \vec{b}$, verificamos que ele é igual ao vetor $\vec{c}$, devido a geometria do problema, portanto, o vetor resultante será o vetor nulo ($\vec{s} = \vec{0}$).

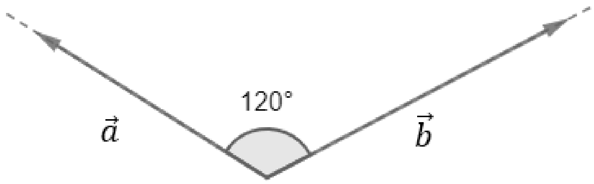


Gabarito: $\vec{s} = \vec{0}$

4.

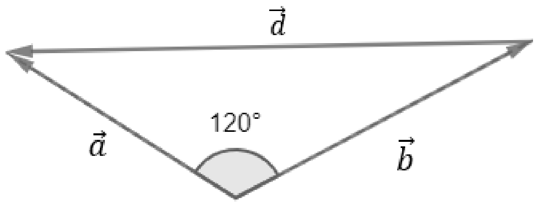
Para o conjunto de vetores da figura abaixo, determine o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Dados: $|\vec{a}| = 8$ e $|\vec{b}| = 10$.



Comentários:

Para começar o problema, vamos determinar o vetor diferença geometricamente, ligando a extremidade do segundo vetor a extremidade do primeiro. Em seguida, calcularemos o módulo.



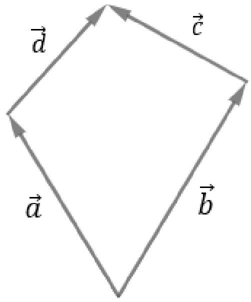
Lei dos cossenos para o triângulo formado pelos vetores:

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(120°) \Rightarrow \boxed{|\vec{d}| = 2\sqrt{61}}$$

Gabarito: $|\vec{d}| = 2\sqrt{61}$

5.

Qual das alternativas abaixo é uma relação verdadeira entre os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ e $\vec{d}$.



a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$

b) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$

c) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{c}+\vec{b}$

d) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

e) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$

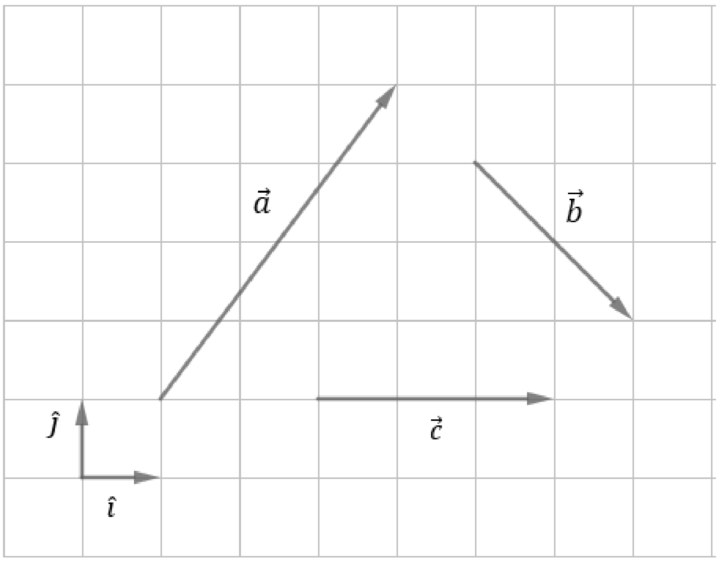
Comentários:

Ao fazermos o vetor $\vec{a}+\vec{d}$, vemos que ele é igual ao vetor $\vec{c}+\vec{b}$.

Gabarito: C

6.

No gráfico da figura abaixo apresenta três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Considere os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.



Considere as expressões:

(I) $\vec{a}=3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$

(II) $\vec{b}=2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$

(III) $\vec{c}=3\hat{\jmath}$

Podemos afirmar que:

a) apenas (I) está correta.

b) apenas (II) está correta.

c) apenas (III) está correta.

d) (I) e (II) estão corretas.

e) todas estão corretas.

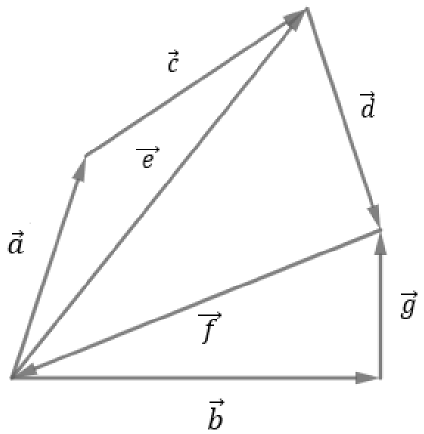
Comentários:

Ao escrever a representação de cada vetor, obtemos os seguintes vetores: $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ e $\vec{c} = 3\hat{\imath}$.

Gabarito: A

7.

Dado o conjunto de vetores, como ilustrado na figura abaixo, marque verdadeira para as equações vetoriais corretas e F para as falsas.



a) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$

b) $\vec{e} + \vec{d} = \vec{g} + \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} = \vec{0}$

d) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{e} + \vec{b} + \vec{g} + \vec{f} = \vec{0}$

e) $\vec{e} + \vec{d} - \vec{g} + \vec{b} = \vec{0}$

Comentários:

Para cada afirmação, devemos verificar as relações entre os vetores, utilizando a regra do polígono:

a) De fato, ao somarmos os vetores $\vec{a} + \vec{c}$ verificamos que ele é igual ao vetor $\vec{e}$, portanto a alternativa é verdadeira;

b) Somando $\vec{e} + \vec{d}$, verificamos que ele é $-\vec{f}$, mesmo resultado obtido ao fazermos $\vec{b} + \vec{g}$, portanto, a alternativa é verdadeira;

c) Do item A, temos que $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$. Portanto, $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} = 2\vec{e} \neq \vec{0}$, portanto, a alternativa é falsa;

d) Do item A, temos novamente que $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$. Portanto, $\vec{a} + \vec{c} - \vec{e} = \vec{0}$ e da figura vemos claramente que $\vec{b}$, $\vec{g}$ e $\vec{f}$ fecham um triângulo, respeitada a regra do polígono. Então, a alternativa é verdadeira;

e) Olhando a figura vemos que $\vec{e} + \vec{d} = -\vec{f}$ e $\vec{g} + \vec{b} = -f \Rightarrow \vec{g} + \vec{b} = \vec{e} + \vec{d} \Rightarrow \vec{b} = \vec{e} + \vec{d} - \vec{g}$. Portanto, $\vec{e} + \vec{d} - \vec{g} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{b} = \vec{0}$. Logo a alternativa é falsa.

Gabarito: VVFVF.

8.

Dois vetores ortogonais, isto é, são perpendiculares entre si, um de módulo igual a 18 e outro de módulo 24, então, o vetor soma terá módulos igual a:

a) 20

b) 25

c) 28

d) 30

e) 32

Comentários:

Dado que os vetores são ortogonais, o ângulo entre eles é 90° e sabemos que o vetor resultante é a hipotenusa definida pelos catetos cujos tamanhos são os módulos dos vetores dados.

Assim, é valido o teorema de Pitágoras. Entretanto, como podemos ver os catetos são proporcionais aos catetos do triângulo pitagórico 3,4,5. Se fizermos a semelhança veremos que os lados foram multiplicados por 6. Logo a hipotenusa também será multiplicada por 6, portanto, o módulo do vetor soma é $5x6 = 30$.

Gabarito: D.

9.

Dentre as alternativas abaixo, assinale as alternativas erradas. Considere $n \in \mathbb{R}_*$ e o vetor não-nulo $\vec{a}$.

a) a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre a mesma direção de $\vec{a}$.

b) se $n < 0$ então a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ é diferente da direção de $\vec{a}$.

c) independente do sinal de n, o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre o mesmo sentido de $\vec{a}$.

d) se $n > 0$ o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem módulo maior que o módulo de $\vec{a}$.

Comentários:

A letra a) está correta, pois, ao multiplicar um vetor por um número escalar não alteramos a direção do vetor, podemos apenas alterar o sentido do vetor. Dessa forma, já podemos observar que a letra b) está errada.

Como vimos na teoria, ao multiplicar um vetor por um número escalar negativo, trocamos o sentido do vetor, assim, a letra c também está errada. Para a alternativa d) devemos lembrar que aumentamos o módulo de um vetor somente quando multiplicamos o vetor por um escalar quando multiplicamos por um escalar cujo módulo é maior que 1.

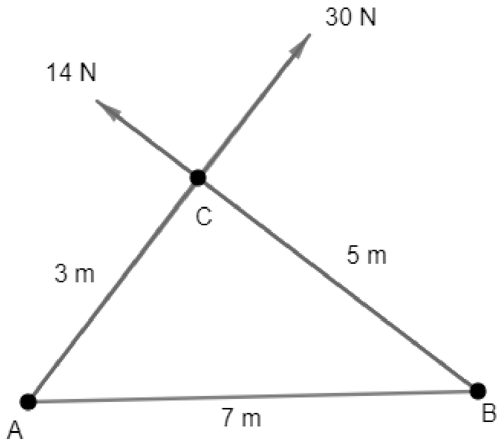
Como vemos matematicamente:

$$|\vec{b}| > |\vec{a}| \Rightarrow |n.\vec{a}| > |\vec{a}| \Rightarrow |n|.|\vec{a}| > |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}|(|n|-1) > 0 \Rightarrow |n| > 1.$$

Gabarito: B, C e D.

10.

Considere duas cargas elétricas positivas posicionadas nos vértices A e B. No vértice C, coloca-se uma terceira carga de tal forma que surgem forças repulsivas na carga do vértice, conforme a figura abaixo. Determine o módulo da força resultante no vértice C.



Comentários:

Primeiramente, utilizaremos a lei dos cossenos para calcular o valor do cosseno do vértice:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.\cos(A\hat{C}B) \Rightarrow \cos(A\hat{C}B) = -\frac{1}{2}$$

Diante disso, podemos usar a expressão para o cálculo do vetor soma:

$$s^2 = 14^2 + 30^2 + 2.14.30.\cos(A\hat{C}B) \Rightarrow s^2 = 1096 - 2.14.30.\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{s = 26\ N}$$

Gabarito: $s = 26\ N$

---

11. (ITA – 1991)

Considere a Terra como sendo uma esfera de raio R e massa M, uniformemente distribuída. Um satélite artificial descreve uma órbita circular a uma altura h da superfície da Terra, onde a aceleração gravitacional (sobre a órbita) é g. Em termos de algarismos significativos, o quadrado da velocidade do satélite é mais bem representado por:

a) $16{,}81 \cdot 10^6\ (km/h)^2$

b) $3{,}62 \cdot 10^{32}\ (km/h)^2$

c) $6{,}05 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

d) $6{,}0517 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

e) Nenhum dos valores apresentados é adequado.

Dados: $R = 6{,}378\ .\ 10^6\ m$; $M = 5{,}983 \cdot 10^{24}\ kg$; $h = 2{,}00 \cdot 10^5\ m$ e $g = 9{,}2\ m/s^2$

Note e adote: $V^2 = g \cdot (R + h)$

Comentários:

Uma boa dica para saber se a questão é de algarismos significativos é olhar as alternativas. Geralmente, existem alternativas semelhantes, mas com número de algarismos significativos diferentes.

Utilizando a velocidade descrita no note e adote, temos que:

$$V^2 = 9{,}2(63{,}78 \cdot 10^5 + 2{,}00 \cdot 10^5)$$
$$V^2 = 9{,}2 \cdot 65{,}78 \cdot 10^5$$

Diante dos dados mencionados no enunciado, vemos que a gravidade possui a menor quantidade de algarismos significativos, logo ela limita o número de algarismos significativos. Se considerarmos os algarismos duvidosos de cada parte temos:

$$V^2 = 9{,}2X \cdot 65{,}78Y \cdot 10^5$$

Logo, devemos ter o resultado expresso com 3 algarismos significativos:

$$\therefore V^2 = 6{,}05 \cdot 10^7 \ (m/s)^2$$

Gabarito: C

---

12. (ITA-2002)

A massa inercial mede a dificuldade em se alterar o estado de movimento de uma partícula. Analogamente, o momento de inércia de massa mede a dificuldade em se alterar o estado de rotação de um corpo rígido. No caso de uma esfera, o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo seu centro é dado por $I = \frac{2}{5}MR^2$, em que M é a massa da esfera e R seu raio. Para uma esfera de massa $M = 25{,}0\ kg$ e raio $R = 15{,}0\ cm$, a alternativa que melhor representa o seu momento de inércia é

a) $22{,}50 \cdot 10^2\ kg \cdot m^2$

b) $2{,}25\ kg \cdot m^2$

c) $0{,}225\ kg \cdot m^2$

d) $0{,}22\ kg \cdot m^2$

e) $22{,}00\ kg \cdot m^2$

Comentários:

De acordo com os enunciados fornecidos, temos que:

$$I = \frac{2}{5}M \cdot R^2 = \frac{2}{5}(25{,}0) \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2$$
$$I = 0{,}225\ kg \cdot m^2$$

Gabarito: C

---

13. (ITA – 2007)

Sobre um corpo de $2{,}5kg$ de massa atuam, em sentidos opostos de uma mesma direção, duas forças de intensidades $150{,}40N$ e $50{,}40N$, respectivamente. A opção que oferece o módulo da aceleração resultante com o número correto de algarismos significativos é

a) $40{,}00\ m/s^2$

b) $40\ m/s^2$

c) $0{,}4 \cdot\ 10^2 m/s^2$

d) $40{,}0\ m/s^2$

e) $40{,}000\ m/s^2$

Comentários:

Primeiramente, devemos calcular a força resultante sobre o corpo, levando em consideração o número de algarismos significativos:

$$F_R = 150{,}40 - 50{,}40$$

$$F_R = 100{,}00 \text{ (5 significativos)}$$

A aceleração será dada por:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{100{,}00}{2{,}5}$$

Como a massa limita o número de algarismos significativos a 2, então a aceleração terá dois algarismos significativos:

$$a = 40\ m/s^2$$

Gabarito: B

---

14. (UNICAMP-94)

Impressionado com a beleza da jovem modelo (1,70 m de altura e 55 kg), um escultor de praia fez sua (dela) estátua de areia do mesmo tamanho que o modelo. Adotando valores razoáveis para os dados que faltam no enunciado:

a) calcule o volume da estátua (em litros);

b) estime a ordem de grandeza do número de grãos de areia que foram usados na escultura

Comentários:

a)

Considerando que uma pessoa adulta é composta, em média por 70% de água, cuja densidade vale $1g/cm^3$, então:

$$m_{água} = 0{,}7 m_{pessoa} = 0{,}7 \cdot 55 = 38{,}5\ kg = 38{,}5 \cdot 10^3 g$$

$$V_{água} = \frac{38{,}5 \cdot 10^3}{1} = 38{,}5 \cdot 10^3 cm^3 = 38{,}5\ dm^3 = 38{,}5\ l$$

Tamanho da estátua igual ao da pessoa e que água seja responsável por quase todo volume do corpo humano, logo $V_{estátua} = 38{,}5\ l$.

b)

Se considerarmos que o volume de um grão de areia igual a $0{,}01\ mm^3$, então:

$$0{,}01\ mm^3 = 0{,}01\ (10^{-2})^3 dm^3 = 1 \cdot 10^{-8} l$$

Dividindo o volume da estátua pelo volume de um grão, então:

$$n = \frac{V_{estátua}}{V_{grão}} = \frac{38{,}5}{1 \cdot 10^{-8}} = 3{,}85 \cdot 10^9$$

Como $3{,}85 > 3{,}16$, então a ordem de grandeza será de $OG = 9 + 1 = 10$ (grão).

Gabarito: a) $38{,}5\ l$ b) 10

---

15. (UERJ)

O acelerador de íons pesados relativísticos de Brookhaven (Estados Unidos) foi inaugurado com a colisão entre dois núcleos de ouro, liberando uma energia de 10 trilhões de elétrons-volt. Os cientistas esperam, em breve, elevar a energia a 40 trilhões de elétrons-volt, para simular as condições do Universo durante os primeiros microssegundos após o Big Bang. (Ciência Hoje, setembro de 2000). Sabendo que 1 elétron-volt é igual a $1{,}6.10^{-19}\ joules$, a ordem de grandeza da energia, em joules, que se espera atingir em breve, com o acelerador de Brookhaven, é:

a) 10^{-8}

b) 10^{-7}

c) 10^{-6}

d) 10^{-5}

Comentários:

O valor esperado de ser atingido é de 40 trilhões de elétrons-volt, em que cada elétron-volt é igual a $1{,}6 \cdot 10^{-16}\ J$. Portanto:

$$40\ trilhões = 40 \cdot 10^{12} = 4{,}0 \cdot 10^{13}$$

$$40\ trilhões\ de\ elétron - volt \Rightarrow 4{,}0 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 6{,}4 \cdot 10^{-6}\ J$$

Como $6{,}4 > 3{,}16$, então a ordem de grandeza será $-6 + 1 = -5$.

Gabarito: D

---

2. Introdução à cinemática escalar

2.1. Conceitos básicos

A Cinemática é o ramo da Mecânica que descreve os movimentos dos corpos através dos conceitos de posição, velocidade e aceleração. A Dinâmica estuda os fatores que modificam os movimentos.

Inicialmente, serão necessários alguns conceitos primitivos, os quais não são definidos, mas devem ter a mesma significação para todos. Os primeiros conceitos primitivos são os conceitos de *instante* e de *tempo*.

Instante é o momento na qual se registra o tempo. Geralmente, utiliza-se cronômetros e relógios para registrar esses tempos. O instante ao qual se associa tempo zero ($t = 0$) recebe o nome de origem dos tempos.

Define-se tempo ou intervalo de tempo como a duração de um fenômeno físico.

Por exemplo, podemos dizer que um trem passou por uma estação no instante de tempo t_1 e chegou à segunda estação no instante t_2.

Dessa forma, pode-se afirmar que o fenômeno ocorreu num intervalo de tempo, cuja duração foi $\Delta t = t_2 - t_1$.

Vamos imaginar um exemplo simples: um trem sai da estação em direção a duas cidades. No momento de saída disparamos o cronômetro, ou seja, definimos o tempo zero ($t_0 = 0$). Depois de 1h hora o trem passa pela cidade A ($t_1 = 1h$), e quando o cronômetro indica 3h ($t_2 = 3h$) o trem passa pela cidade B.

Assim, podemos dizer que o intervalo de tempo entre a estação e a cidade A foi $\Delta t_{estação \to A} = t_1 - t_0 = 1 - 0 = 1h$.

O tempo entre A e B foi: $\Delta t_{A \to B} = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2h$. Por fim, o tempo entre a estação e a cidade B foi $\Delta t_{estação \to B} = t_2 - t_0 = 3 - 0 = 3h$.

2.2. Localização de um ponto material para um dado referencial

Inicialmente, é necessário saber diferenciar *ponto material* de *corpo extenso*.

Ponto material é todo corpo cujas dimensões não interferem no estudo de determinado fenômeno.

Se o corpo não puder ser considerado ponto material, ele se classificará como corpo extenso.

Note que um corpo pode ser um ponto material para uma determinada situação, como por exemplo um caminhão indo de São Paulo para a Bahia, pois as dimensões do caminhão são muito menores que a distância a ser percorrida. Por outro, em uma situação na qual o caminhão está manobrando num estacionamento, ele é um corpo extenso.

A partir dessa diferenciação de corpo extenso e ponto material, podemos fazer a determinação da posição de um ponto material P.

Para isto, é preciso definir *referenciais* ou *sistemas de referência* (R).

Dessa forma, para localizar o ponto P em relação ao referencial R, é preciso conhecer as distâncias de P aos pontos de R, conforme a figura abaixo. A determinação do referencial é feita de acordo com as condições dos problemas, de modo a facilitar as contas e resolução da questão.

Embora todos os problemas físicos ocorram no mundo em três dimensões, geralmente condicionamos o referencial de forma a facilitar a resolução do problema.

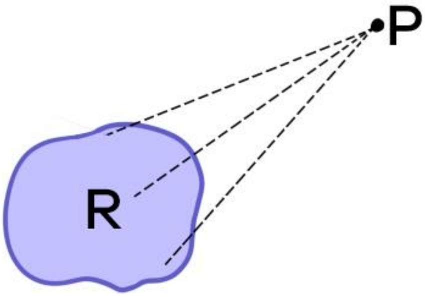


Figura 16: Ponto P segundo o referencial R.

Observação: No Brasil, o sistema de unidades adotado é o Sistema Internacional de Unidades (SI). Ao longo do nosso curso de Física, trabalharemos com diversas unidades no SI. Por enquanto, vamos trabalhar com apenas unidades para tempo e espaço.

A unidade de tempo no SI é o segundo (s). O minuto (min) e a hora (h) são múltiplos do segundo:

$$1min = 60s$$

$$1h = 60min = 3600s$$

A unidade de comprimento no SI é o metro (m). O milímetro (mm) e o centímetro (cm) são submúltiplos do metro. O quilômetro (km) é múltiplo do metro:

$$1mm = 10^{-3}m$$

$$1cm = 10^{-2}m$$

$$1km = 10^{3}m$$

2.3. Movimento e repouso

Dizemos que um dado ponto material está em repouso em relação a certo referencial quando todas as suas coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, medidas em relação ao referencial, permanecem invariáveis com o passar do tempo. Se uma de suas coordenadas variar, dizemos que o ponto material está em movimento, em relação ao referencial adotado.

Observe que o conceito de repouso e de movimento dependem do referencial adotado. Um ponto material pode estar em repouso em relação a um referencial e em movimento em relação a outro.

Por exemplo, duas pessoas sentadas em um ônibus. Se uma pessoa olhar para a outra terá a impressão de estar parada, pois o referencial está no ônibus onde as duas pessoas se encontram. Entretanto, uma terceira pessoa parada na calçada, ao olhar para elas, verá que as duas estão em movimento, conforme o deslocamento do ônibus. Pode-se dizer que para a terceira pessoa adotou-se como referencial a Terra, pois, ela está parada na calçada.

2.4. Trajetória

Definimos como trajetória a curva que descreve o movimento realizado pelo ponto material, em relação a um determinado referencial.

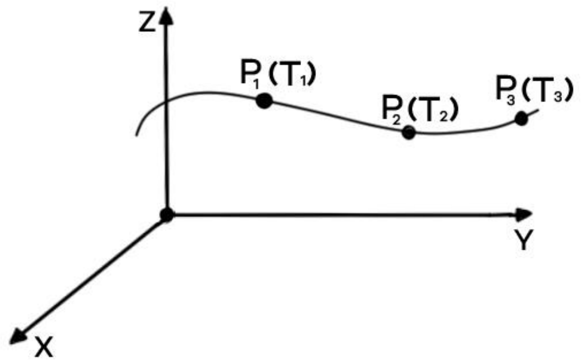


Figura 17: Representação de uma trajetória curva no espaço.

Se o ponto material estiver em repouso, para o referencial escolhido, sua trajetória se reduz a um ponto geométrico.

Ao definirmos trajetória, condicionamos sua definição ao referencial adotado. Vamos estudar um exemplo simples de um menino jogando uma bola no chão do ônibus em movimento. Considere que o ônibus esteja viajando a uma velocidade constante, em uma trajetória retilínea.

Para o menino dentro do ônibus, a bola faz uma trajetória na vertical, fazendo um segmento de reta. Entretanto, para uma pessoa parada na calçada, isto é, no referencial da Terra, a bola faz uma curva de um arco de parábola (a demonstração formal de que a curva é um arco de parábola será feita no capítulo de lançamento oblíquo, um dos últimos capítulos do nosso curso de cinemática.).

Vide as figuras a seguir:

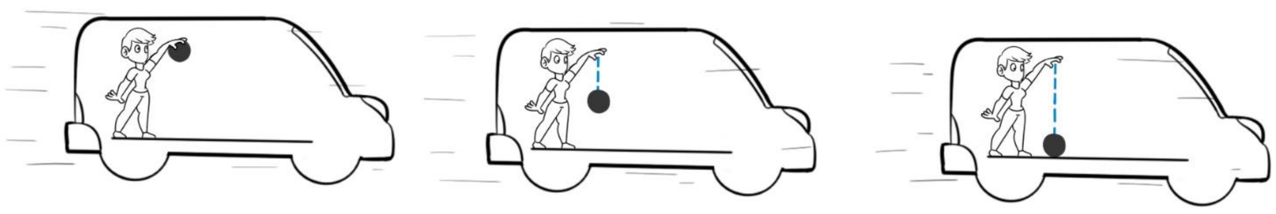


Figura 18: Representação da trajetória da bola, com referencial na criança.

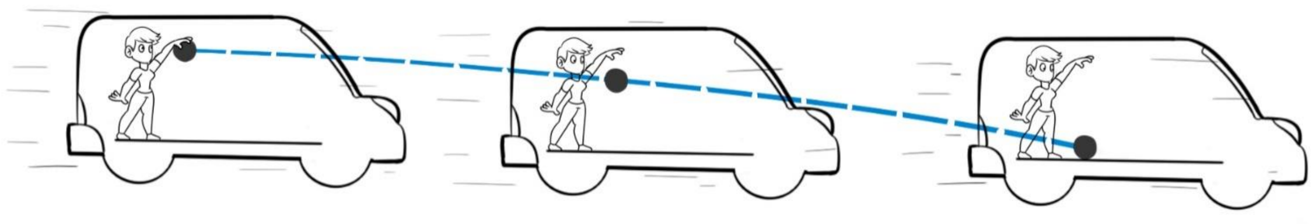


Figura 19: Representação da trajetória da bolinha para um referencial situado na Terra.

O capítulo de movimento relativo será abordado futuramente, mas apenas como curiosidade, existe a ideia de repouso relativo. Imagine dois automóveis percorrendo uma mesma estrada retilínea, com velocidades iguais e no mesmo sentido, sem aceleração, não havendo movimento de um em relação ao outro.

Um passageiro de um dos carros, fixando seu olhar exclusivamente no outro carro, sem fazer nenhuma comparação com a estrada e a vizinhança, tem a sensação de que o outro carro está parado. Essa mesma ideia é utilizada no abastecimento de aeronaves em pleno voo. Para isto, basta que não haja movimento relativo entre elas por determinado intervalo de tempo.

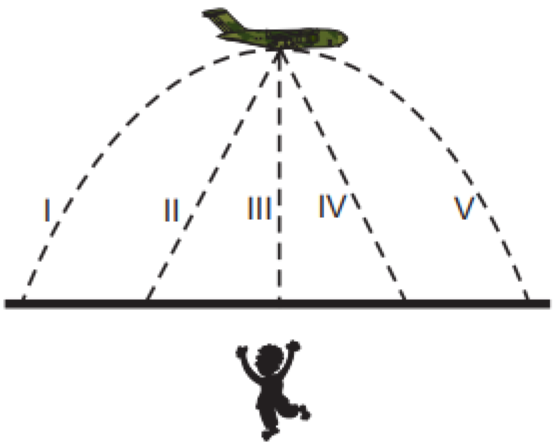
HORA DE PRATICAR!

1)

Recentemente, o PAM (Programa Alimentar Mundial) efetuou lançamentos aéreos de 87t de alimentos (sem uso de paraquedas) na localidade de Luvemba, em Angola. Os produtos foram ensacados e amarrados sobre placas de madeira para resistirem ao impacto da queda.

Disponível em: <www.angola.org>.

A figura ilustra o instante em que um desses pacotes é abandonado do avião. Para um observador em repouso na Terra, o diagrama que melhor representa a trajetória do pacote depois de abandonado, e:



(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

(E) V

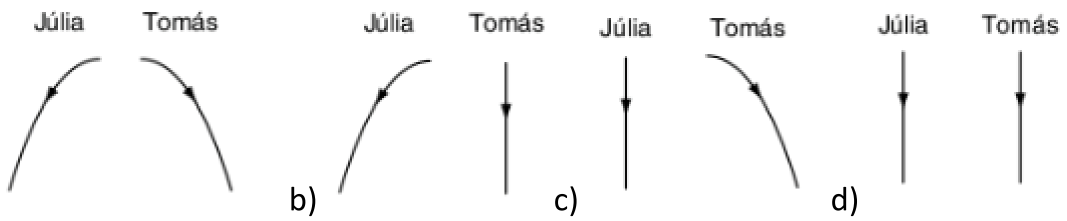
Comentários:

Ao ser abandonado do avião, o pacote não possui velocidade escalar na direção vertical, entretanto, ele possui a mesma velocidade horizontal do avião, por isso, o pacote seguirá seu movimento na horizontal ao mesmo tempo que está caindo. Portanto, sua trajetória será um arco de parábola, semelhante ao caso do menino soltando a bola dentro do ônibus, na parte teórica.

Alternativa correta letra (E).

2)

Julia está andando de bicicleta, com velocidade constante, quando deixa cair uma moeda. Tomás está parado na rua e vê a moeda cair. Assinale a alternativa em que melhor estão representadas as trajetórias da moeda, como observadas por Júlia e por Tomás.



a) b) c) d)

Resolução:

Pelo referencial de Júlia, não existe movimento relativo na horizontal entre a moeda e a Júlia andando de bicicleta, pois, a moeda sai com a mesma velocidade horizontal que Júlia. Então, Júlia vê a moeda cair na vertical.

Entretanto, Tomás, que está parado na rua, vê a composição do movimento horizontal junto com o movimento vertical da moeda. Ele vê a moeda indo para a frente, na direção do deslocamento de Júlia, e, ao mesmo tempo, vê a moeda caindo na vertical.

Essa composição de movimento descreve uma trajetória curva, formando um arco de parábola. Novamente, veremos a demonstração formal dessa curva futuramente.

Alternativa correta letra C).

2.5. Espaço de um móvel

Vamos utilizar um exemplo para facilitar nosso entendimento. Um carro vai de São Paulo ao Rio de Janeiro e desejamos saber sua posição ao passar por São José dos Campos. Para isso, podemos definir um sistema cartesiano triortogonal e determinar os valores das coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, conforme a figura abaixo:

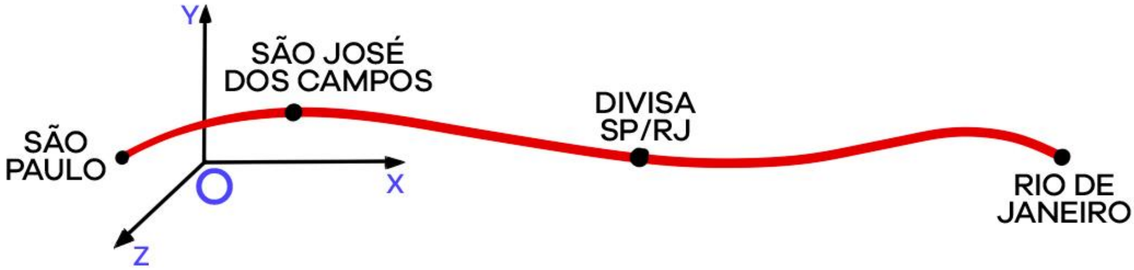


Figura 20: Representação da trajetória de São Paulo ao Rio de Janeiro no espaço.

Entretanto, diante das condições do problema, é bem mais simples fornecer a posição do carro em relação à própria trajetória que já é conhecida. Para isso, definimos um ponto O de forma arbitrária como sendo a origem e uma orientação para a trajetória.

Para o nosso exemplo, podemos definir a Divisa SP/RJ como nossa origem e a orientação positiva no sentido de Rio de Janeiro para São Paulo:

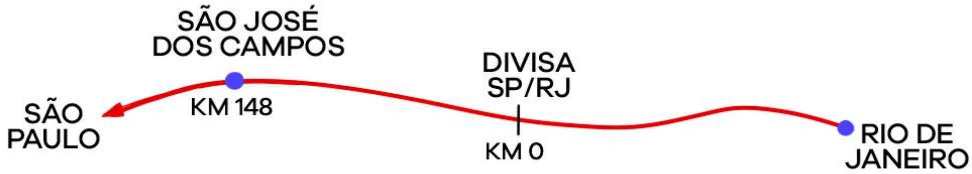


Figura 21: Representação da trajetória de São Paulo para Rio de Janeiro, em apenas uma dimensão.

Podemos afirmar que São José dos Campos situa-se no km 147 da Via Dutra.

Observação: A escolha da origem e da orientação não alteram o lugar onde se encontra o corpo. No exemplo do carro indo de São Paulo para Rio de Janeiro, você poderia ter escolhido outro ponto de origem e outra direção e, mesmo assim, o móvel estaria em São José dos Campos.

Assim, denominamos **espaço** a posição de uma partícula em relação à sua trajetória. Observe que ao fazer tais considerações, a cada valor de tempo corresponde um único valor de espaço.

2.6. Função horária do espaço

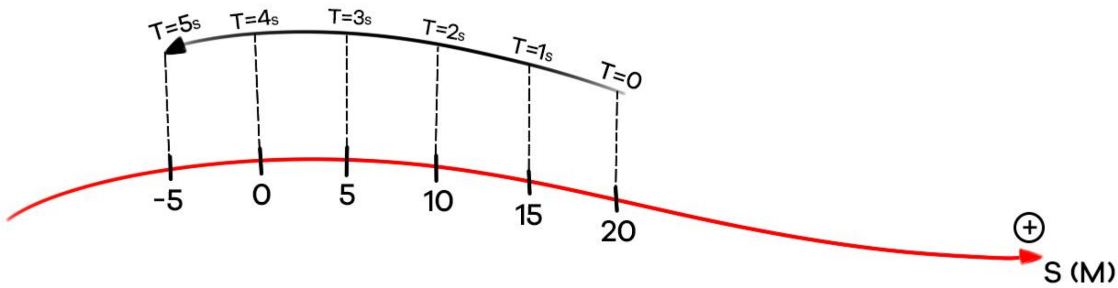
Se um ponto material está em movimento em relação a certo referencial, à medida que o tempo transcorre, o espaço do móvel varia. Assim, a função horária do espaço é a função que relaciona os espaços $\boldsymbol{s}$ de um móvel com os correspondentes instantes $\boldsymbol{t}$.

Dessa forma, conhecer a função horária do espaço é muito importante, pois se conhecemos a função horária podemos determinar o espaço do móvel para cada instante de tempo.

Vamos analisar dois exemplos:

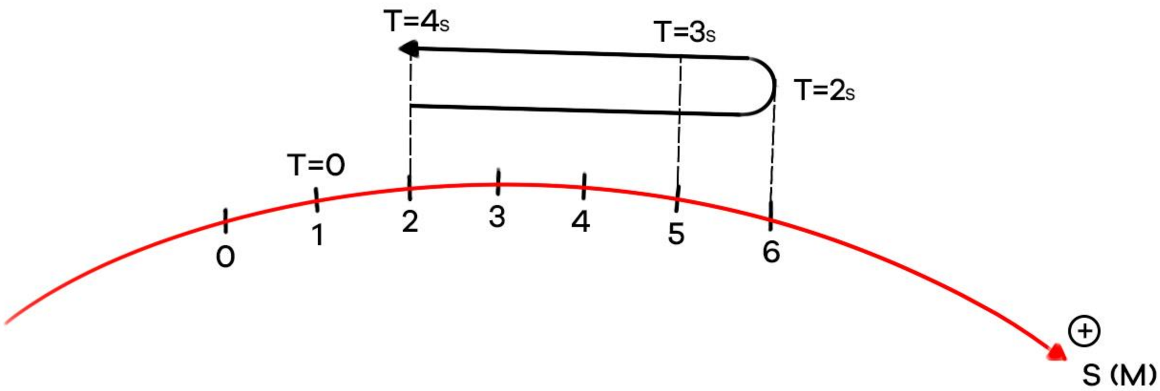
1) $\boldsymbol{s(t) = 20 - 5t}$ (para $\boldsymbol{s}$ em metros e $\boldsymbol{t}$ em segundos)

$$\boldsymbol{t = 0 \Rightarrow s(0) = 20 - 5.0 = 20m}$$
$$\boldsymbol{t = 1s \Rightarrow s(1) = 20 - 5.1 = 15m}$$
$$\boldsymbol{t = 2s \Rightarrow s(2) = 20 - 5.2 = 10m}$$
$$\boldsymbol{t = 3s \Rightarrow s(3) = 20 - 5.3 = 5m}$$
$$\boldsymbol{t = 4s \Rightarrow s(4) = 20 - 5.4 = 0}$$
$$\boldsymbol{t = 5s \Rightarrow s(5) = 20 - 5.5 = -5m}$$



2) $s(t) = 2 + 4t - t^2$ (SI)

$$t = 0 \Rightarrow s(0) = 2 + 4.0 - 0^2 = 2m$$
$$t = 1s \Rightarrow s(1) = 2 + 4.1 - 1^2 = 5m$$
$$t = 2s \Rightarrow s(2) = 2 + 4.2 - 2^2 = 6m$$
$$t = 3s \Rightarrow s(3) = 2 + 4.3 - 3^2 = 5m$$
$$t = 4s \Rightarrow s(4) = 2 + 4.4 - 4^2 = 2m$$



Observe que $t = 0$ é chamado de origem dos tempos, definindo o momento do disparo do cronômetro do observador.

Se não conhecemos a função horária e conhecemos o espaço para cada instante de tempo, podemos determinar a função horária e a partir dela determinar o espaço para outros instantes.

Exemplo: vamos supor a seguinte relação de tempo e de espaço:

Tempo (s)	Espaço (m)
0	10
1	9
2	8
3	7

De acordo com os dados fornecidos, podemos concluir que a função horária do espaço é definida por:

$$s(t) = 10 - t$$

Neste momento, não estamos preocupados na matemática para chegar nesse resultado, apenas nos conceitos físicos. Futuramente, desenvolveremos todos os cálculos detalhadamente, mas não é difícil verificar que a relação do espaço-tempo é dada por aquela função do primeiro grau.

Se quisermos saber em qual instante corresponde ao $s = 1m$, basta resolvermos a seguinte equação:

$$s(t) = 1 \Rightarrow 10 - t = 1 \Rightarrow t = 9s$$

2.7. Variação de espaço e distância percorrida

Um erro comum entre os alunos é misturar os conceitos de *Variação de Espaço* e *Distância Percorrida*. Vejamos, de início, a definição de Variação de Espaço.

2.7.1. Variação do espaço

Seja s_1 o espaço de um móvel num instante t_1 e s_2 seu espaço num instante t_2. A variação do espaço (Δs) num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, é definido como:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

Observações:

- Se $s_2 > s_1$, então $\Delta s > 0$ e dizemos que o móvel se movimenta no sentido positivo da trajetória, aumentando o seu espaço.

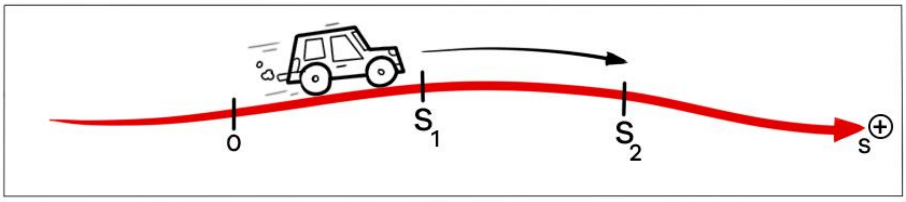


Figura 22: Se $s_2 > s_1$, então $\Delta s > 0$

- Se $s_2 < s_1$, então $\Delta s < 0$ e dizemos que o móvel se movimenta no sentido negativo da trajetória, diminuindo seu espaço.

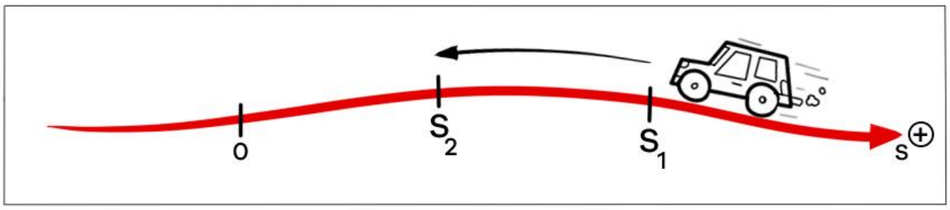


Figura 23: Se $s_2 < s_1$, então $\Delta s < 0$

- Se $s_2 = s_1$, então $\Delta s = 0$, isto é, o corpo não se move ao longo da trajetória.

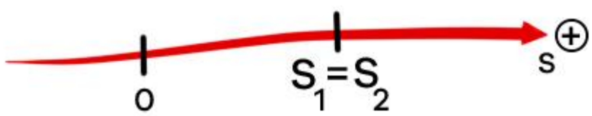


Figura 24: Se $s_2 = s_1$, então $\Delta s = 0$

Observação: em Física, usamos a letra grega maiúscula delta ($\boldsymbol{\Delta}$), seguida de uma grandeza, para indicar a variação dessa, isto é, fazer a diferença entre os valores finais e iniciais desta grandeza.

2.7.2. Distância percorrida

Definimos a distância percorrida por um móvel como a soma dos módulos das variações de espaço em cada sentido do movimento.

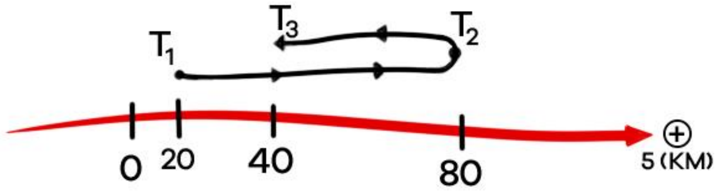
Vamos tomar um exemplo para ilustrar essa definição: um corpo vai de $\boldsymbol{s_1 = 20\ km}$ até $\boldsymbol{s_2 = 80km}$ e depois retorna a $\boldsymbol{s_3 = 40km}$, assim temos que:

- $\boldsymbol{t_1 \to t_2 : \Delta s_{1\to 2} = s_2 - s_1 = 80 - 20 = 60km}$
- $\boldsymbol{t_2 \to t_3 : \Delta s_{2\to 3} = s_3 - s_2 = 40 - 80 = -40km}$
- $\boldsymbol{t_1 \to t_3 : \Delta s_{1\to 3} = s_3 - s_1 = 40 - 20 = 20km}$

Note que $\boldsymbol{\Delta s_{1\to 3} = s_3 - s_1 = s_3 - s_2 + s_2 - s_1 = \Delta s_{1\to 2} + \Delta s_{2\to 3} = 60 + (-40) = 20km}$

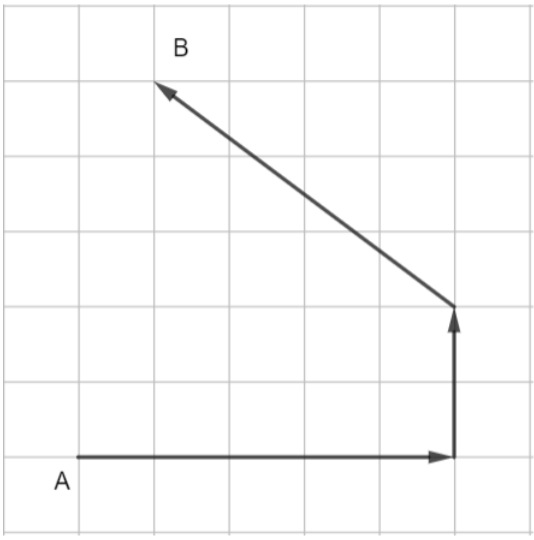
A partir da definição, temos que a distância percorrida é:

$$\boldsymbol{d = |\Delta s_{1\to 2}| + |\Delta s_{2\to 3}| = |60| + |-40| = 60 + 40 = 100km}$$



3)

Uma pessoa parte da posição A e atinge a posição B percorrendo a trajetória indicada na figura. O lado de cada quadradinho representa uma distância de 100m. Qual a distância, em quilômetros, que a pessoa percorre? Qual foi o módulo da variação de espaço da pessoa?



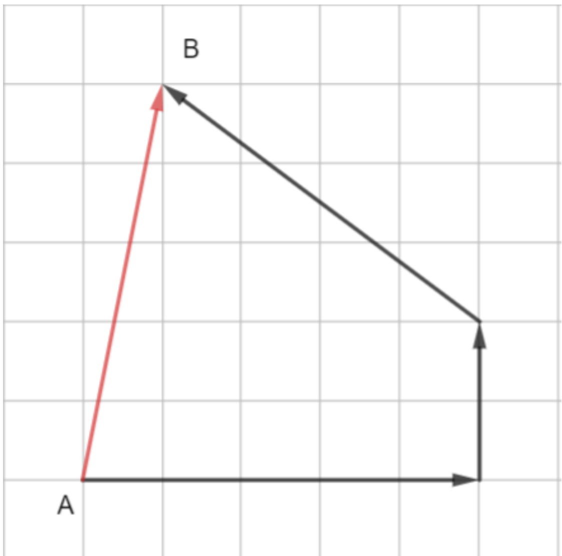
Comentários:

Para calcular a distância percorrida, devemos calcular o módulo do deslocamento de cada trecho. Primeiro trecho são 5 quadradrinhos, logo, ele se deslocará $5\ x\ 100 = 500m$. Em seguida, ela desloca-se 2 quadradinhos para a vertical. Então, ela desloca $2\ x\ 100 = 200m$.

Finalmente, ela faz um deslocamento inclinado, formando a hipotenusa de um triângulo retângulo. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos: $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. Esse triângulo é famoso e seus semelhantes também.

Logo, nesse trecho a pessoa andou $5\ x\ 100 = 500m$. Portanto, a distância percorrida (d) pela pessoa foi $d = 500 + 200 + 500 = 1200m \Rightarrow d = 1{,}2km$. Para calcularmos a variação de espaço da pessoa, devemos pegar o módulo da variação de espaço entre A e B, isto é, $\Delta s_{A\to B} = s_b - s_a$.

Dado que eles não estão no mesmo plano, precisamos fazer um tratamento vetorial. Mas como estamos apenas preocupados com o $|\Delta\vec{s}_{A\to B}|$, precisamos apenas calcular a hipotenusa do triângulo abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $|\Delta\vec{s}_{A\to B}|^2 = 1^2 + 5^2 = 26 \Rightarrow |\Delta\vec{s}_{A\to B}| = \sqrt{26}$.

Portanto, o módulo da variação de espaço da pessoa foi de $100\sqrt{26}m$.

2.8. Relação entre m/s e km/h

Diante da relação entre metros e quilômetros, segundos e horas, pode-se escrever uma relação entre as unidades e isto é fundamental para resolução de questões dos vestibulares, pois é comum misturar as unidades. Vamos ver como transformar as unidades:

$$\mathbf{1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3,6}\frac{m}{s} \ ou \ 1\frac{m}{s} = 3,6\frac{km}{h}}$$

Diante desse resultado, notamos que cada $\mathbf{1m/s}$ corresponde a $\mathbf{3,6km/h}$. Portanto:

$$\boxed{\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{km}{h}} \Rightarrow \times\ \mathbf{3,6}$$

$$\boxed{\frac{km}{h} \Rightarrow \frac{m}{s}} \Rightarrow \div\ \mathbf{3,6}$$

Exemplos:

- $\mathbf{10m/s = 10\ x\ 3,6km/h = 36km/h}$;
- $\mathbf{72km/h = 72/3,6 = 20m/s}$.

2.9. Velocidade escalar média

Considerando a variação de espaço de um ponto material dada por $\mathbf{\Delta s = s_2 - s_1}$, durante o intervalo de tempo $\mathbf{\Delta t = t_2 - t_1}$, efine-se velocidade escalar média $(\mathbf{v_m})$, no intervalo de tempo $\mathbf{\Delta t}$, como o quociente entre a variação de espaço e o correspondente intervalo de tempo:

$$\boxed{\mathbf{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}}}$$

Nota-se que $\mathbf{\Delta t}$ é sempre positivo. Por isso, concluímos que o sinal de $\mathbf{v_m}$ é o mesmo de $\mathbf{\Delta s}$:

- Se $\mathbf{\Delta s > 0 \Rightarrow v_m > 0}$;
- Se $\mathbf{\Delta s < 0 \Rightarrow v_m < 0}$;
- Se $\mathbf{\Delta s = 0 \Rightarrow v_m = 0}$.

No SI, a unidade de velocidade escalar é o metro por segundo $(\mathbf{m/s})$. Geralmente, surge a necessidade de transformar a unidade de $\mathbf{cm/s}$ ou $\mathbf{km/h}$ para $\mathbf{m/s}$, conforme a relação vista no item anterior.

Naturalmente, carregamos desde cedo a noção de velocidade escalar média. Por exemplo, em uma viagem, quando um móvel percorre 200 km em 2 horas, rapidamente dizemos que ele percorreu, em média, 100 km a cada hora. Assim, afirmamos que a velocidade escalar média foi de $\mathbf{100km/h}$.

Note que não podemos afirmar que necessariamente o móvel percorreu nessa velocidade durante o deslocamento. Ele pode ter andado 110 km na primeira hora e 90 km na segunda hora, mas, na *média*, ele andou 100 km a cada hora.

ESCLARECENDO!

4)

Em um prédio de 20 andares (além do térreo) o elevador leva 36 s para ir do térreo ao 20º andar. Uma pessoa no andar X chama o elevador, que está inicialmente no térreo, e 39,6 s após a chamada a pessoa atinge o andar térreo. Se não houve paradas intermediárias, e os tempos de abertura e fechamento da porta do elevador e de entrada e saída do passageiro são desprezíveis, podemos dizer que o andar X é o:

a) 9º.

b) 11º.

c) 16º.

d) 18º.

e) 19º.

Comentários:

Podemos definir a velocidade do elevador como sendo a razão entre o número de andares pelo tempo:

$$v_m = \frac{nº\ andares}{tempo}$$

Logo, a velocidade escalar média desse elevador será:

$$v_m = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}\ andares/s$$

O elevador gastou 39,6 segundos para chegar até o andar dele e voltar para o térreo. Como o módulo da velocidade escalar do elevador é constante, podemos dizer que o mesmo tempo que ele leva para subir ele leva para descer. Logo, o elevador levou metade do tempo para subir, isto é, gastou 19,8 segundos. Portanto, o número de andares que ele andou para subir foi:

$$\frac{5}{9} = \frac{nº\ andares}{19{,}8} \Rightarrow nº\ andares = 11$$

Portanto, a pessoa estava no 11º andar.

Gabarito B.

5)

Num caminhão-tanque em movimento, uma torneira mal fechada goteja à razão de duas gotas por segundo. Determine a velocidade do caminhão, sabendo que a distância entre marcas sucessivas deixadas pelas gotas no asfalto é de 2,5m.

Comentários:

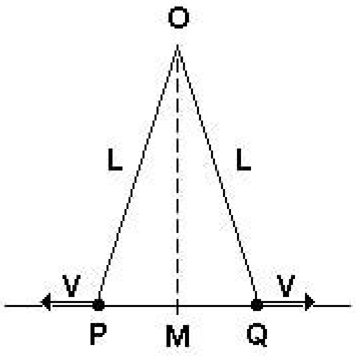
O caminhão deixa cair 2 gosta a cada 1s, logo, 1 gota a cada 0,5s. Portanto o intervalo de tempo entre duas gotas é de 0,5s. Dessa forma, a velocidade do caminhão pode ser calculada a partir das distâncias entre duas gotas, já que a gota sai com a mesma velocidade escalar horizontal do caminhão. Logo:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,5}{0,5} = 5m/s$$

Gabarito: 5 m/s

6)

Considere a escada de abrir. Os pés P e Q se movem com velocidade constante, v.



O intervalo de tempo decorrido, desde o início da abertura, para que o triângulo POQ se torne equilátero será:

a) $\frac{L}{v}$ b) $\frac{L}{2v}$ c) $\frac{2L}{\sqrt{3v}}$ d) $\frac{L}{4v}$ e) $\frac{2L}{v}$

Comentários:

A escada inicialmente está fechada e vai abrir com velocidade constante na direção horizontal até se tornar um triângulo equilátero. Vamos analisar o ponto Q. Precisamos lembrar que um triângulo equilátero possui todos os lados iguais e o segmento OM divide o lado PQ ao meio.

Dessa forma, se colocarmos a origem do movimento no ponto M, temos que seu s_0 está em M e depois seu s_1 estará a uma distância $\frac{L}{2}$ do ponto M, pois o triângulo se tornou um triângulo equilátero. Logo, seu $\Delta s = \frac{L}{2}$. Assim:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{\frac{L}{2}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{2v}$$

Gabarito B.

7)

Dirigindo-se a uma cidade próxima, por uma autoestrada plana, um motorista estima seu tempo de viagem, considerando que consiga manter uma velocidade média de $90km/h$. Ao ser surpreendido pela chuva, decide reduzir sua velocidade média para $60Km/h$, permanecendo assim até a chuva parar, quinze minutos mais tarde, quando retoma sua velocidade média inicial. Essa redução temporária aumenta seu tempo de viagem, com relação à estimativa inicial, em:

a) 5 min b) 7,5 min c) 10 min d) 15 min e) 30 min

Comentários:

Inicialmente, o móvel iria a $90km/h$, mas durante um intervalo de tempo de 15 min (que corresponde a ¼ de hora), ele anda a $60\ km/h$ por causa da chuva. Então para ver a diferença de tempo causado por essa chuva, basta vermos quanto ele andou durante esse tempo e calcular quanto seria o tempo caso ele não tivesse esse imprevisto. Dessa forma, temos que:

1) Deslocamento durante o intervalo de chuva:

$$v_{chuva} = \frac{\Delta s_{chuva}}{\Delta t_{chuva}} \Rightarrow 60 = \frac{\Delta s_{chuva}}{1/4} \Rightarrow \Delta s_{chuva} = 60.\frac{1}{4} = 15\ km$$

2) Tempo para deslocar 15 km sem chuva:

$$v_{normal} = \frac{\Delta s_{chuva}}{\Delta t_{normal}} \Rightarrow 90 = \frac{15}{\Delta \mathrm{t}_{\mathrm{normal}}} \Rightarrow \Delta t_{normal} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}h = 10\ min$$

Logo, a diferença dos tempos é de 5 min.

Gabarito A.

Observação: Nesta questão, a Fuvest não foi mencionou o tempo de desaceleração (quando ele sai de 90 km/h para 60 km/h) e o tempo de aceleração do móvel (quando o móvel volta para 90 km/h), simplificando a questão.

8) (ITA)

Um automóvel faz a metade do seu percurso com velocidade média igual a 40 km/h e o restante com velocidade média de 60 km/h. Determine a velocidade média do carro no percurso total.

Comentários:

Em primeiro momento, muitos alunos pensam em fazer a média aritmética das velocidades, mas veremos que não é a média aritmética das velocidades e, sim, a média harmônica.

Para resolver essa questão, vamos considerar que todo o percurso seja de $2d$ (isso é um truque para evitar frações), sendo que na primeira metade (d) ele anda a uma velocidade v_1, gastando um tempo Δt_1.

Na segunda metade (d também) ele anda a uma velocidade v_2, gastando um tempo Δt_2. Sendo assim, ele anda uma distância total 2d e cada trecho ele anda a uma velocidade, logo, gastará tempos distintos, de maneira que o tempo total é a soma dos tempos.

Logo, temos que:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2d}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

Mas, precisamos conhecer uma relação entre as distâncias e os tempos. Para isso, vamos calcular quanto o móvel gasta em cada metade, já que ele está com velocidades distintas em cada trecho.

1) Tempo para a primeira metade:

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{v_1}$$

2) Tempo para a segunda metade:

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d}{v_2}$$

Assim, podemos substituir os tempos na equação da velocidade média:

$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} \Rightarrow v_m = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}}$$

Substituindo os valores da questão, encontramos que:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \Rightarrow v_m = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2.40.60}{40 + 60} = \frac{2.40.60}{100} = 48\ km/h$$

Nesse momento, provamos que quando um móvel percorre um percurso que está dividido em n partes iguais com velocidades diferentes, a velocidade média do percurso total será a média harmônica das velocidades.

Gabarito $48\ km/h$.

Vale lembrar as principais médias da matemática:

1) Média aritmética simples de n termos:

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

2) Média aritmética ponderada de n termos, conhecendo os pesos $(\alpha, \beta, \ldots \theta)$:

$$M_P = \frac{\alpha . a_1 + \beta . a_2 + \cdots \theta . a_n}{\alpha + \beta + \cdots \theta}$$

3) Média geométrica de n termos:

$$M_G = \sqrt[n]{a_1 . a_2 \ldots . a_n}$$

4) Média harmônica de n termos:

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

9)

Quatro cidades, A, B, C e D, estão dispostas de tal forma que as distancias rodoviárias entre A e B, B e C, e C e D são, respectivamente, AB = 60 km, BC = 100 km e CD = 90 km. Se um automóvel vai de A até B a uma velocidade escalar média de 60 km/h, da cidade B até C a uma velocidade escalar média de 50 km/h e de C até D a uma velocidade escalar média de 45 km/h, determine a velocidade média desse automóvel, em km/h, para o percurso de A até D.

Comentários:

Semelhante ao método aplicado na questão anterior, vamos calcular o tempo de cada trecho:

1) Tempo de AB:

$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta s_{AB}}{v_{AB}} = \frac{60}{60} = 1\ h$$

2) Tempo de BC:

$$\Delta t_{BC} = \frac{\Delta s_{BC}}{v_{BC}} = \frac{100}{50} = 2\ h$$

3) Tempo de CD:

$$\Delta t_{CD} = \frac{\Delta s_{CD}}{v_{CD}} = \frac{90}{45} = 2\ h$$

Dessa forma, o tempo total é $\Delta t_T = 1 + 2 + 2 = 5\ h$. Portanto:

$$v_m = \frac{\Delta s_T}{\Delta t_T} = \frac{60 + 100 + 90}{5} = 50\ km/h$$

Gabarito: $50\ km/h$.

2.10. Movimento progressivo ou retrógrado

Chamamos de ***movimento progressivo*** quando um móvel se desloca no sentido da orientação positiva da trajetória. Nesse caso, $\boldsymbol{\Delta s > 0}$ e podemos verificar que os espaços crescem com o decorrer do tempo. Além disso, como $\boldsymbol{\Delta s > 0}$ temos que $\boldsymbol{v > 0}$, isto é, em qualquer intervalo de tempo a velocidade escalar é sempre positiva.

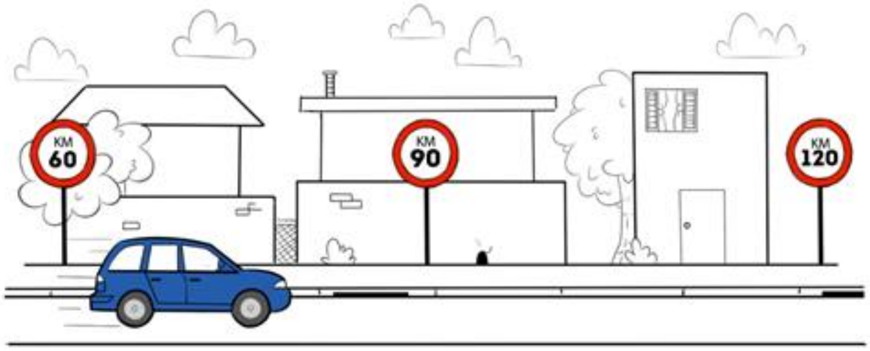


Figura 25: Movimento progressivo: Δs > 0 e v > 0.

Por outro lado, chamamos de ***movimento retrógrado*** quando um móvel se desloca no sentido contrário ao da orientação. Nesse caso, $\boldsymbol{\Delta s < 0}$ e podemos verificar que os espaços decrescem com o decorrer do tempo. Além disso, como $\boldsymbol{\Delta s < 0}$ temos que $\boldsymbol{v < 0}$, isto é, em qualquer intervalo de tempo a velocidade escalar é sempre negativa.

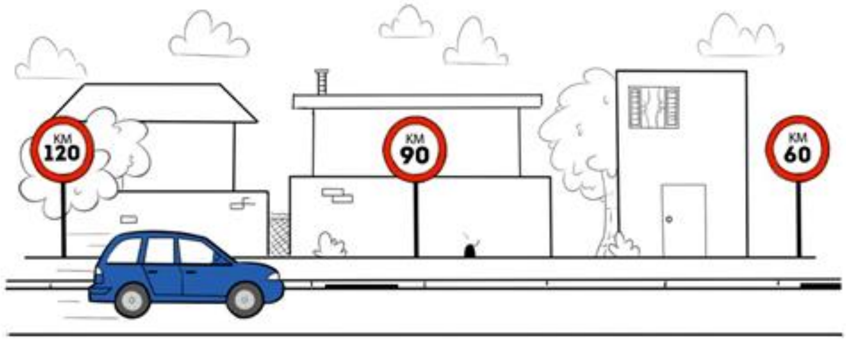


***Figura 26: Movimento retrógrado:** $\boldsymbol{\Delta s < 0}$ **e** $\boldsymbol{v < 0}$.*

10)

Para quais valores de tempo o movimento descrito pela partícula, onde a trajetória é dada por $s(t) = 4 + 6t - 2t^2$, será progressivo? E retrógrado?

Comentários:

Se a função horária do espaço é da forma quadrática, podemos fazer uma comparação com a função horária do MUV e determinar a função horária da velocidade:

$$s(t) = 4 + 6t - 2t^2$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Então:

$$\begin{cases} s_0 = 4\,m \\ v_0 = 6\,m/s \\ \dfrac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -4\,m/s^2 \end{cases}$$

Logo, a função horária da velocidade é dada por:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$v(t) = 6 + (-4)t$$

$$v(t) = 6 - 4t$$

Para o caso de movimento progressivo, temos que:

$$v > 0 \Rightarrow 6 - 4t > 0 \Rightarrow 4t < 6 \Rightarrow t < 1{,}5\ s$$

Para o caso de movimento retrógrado, temos que:

$$v < 0 \Rightarrow 6 - 4t < 0 \Rightarrow 4t > 6 \Rightarrow t > 1{,}5\ s$$

Para o caso de $t = 1{,}5\ s$, a velocidade da partícula será nula, pois:

$$v(1{,}5) = 6 - 4.1{,}5 = 0$$

3. Movimento uniforme

3.1. Definição

Caracteriza-se como movimento uniforme aquele que possui velocidade de módulo constante e diferente de zero, isto é,

$$\boxed{v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}, v \neq 0$$

De outra forma, podemos dizer que:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Escrevendo dessa forma, podemos ver que a variação do espaço (Δs) é diretamente proporcional ao intervalo de tempo correspondente (Δt). Além disso, vemos que Δs varia linearmente com Δt. Portanto, para intervalos de tempos iguais, as variações de espaços também são iguais, como mostra a figura abaixo:

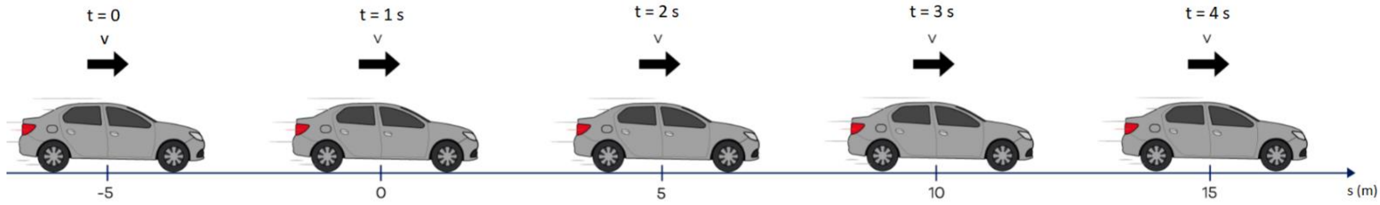


Figura 27: Carro realizando um MRU.

Quando o movimento uniforme for em uma reta, chamamos de MRU – Movimento Retilíneo Uniforme. Quando o movimento uniforme for em uma circunferência, chamamos de MCU – Movimento Circular Uniforme.

Lembrete: velocidade é uma grandeza vetorial!

3.2. Função horária do espaço

Definido o espaço inicial como s_0 correspondente ao instante t_0, para um instante t temos que o espaço será s, com $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta s = s - s_0$.

A partir de $\Delta s = v.\Delta t$, concluímos que:

$$s - s_0 = v(t - t_0) \Rightarrow \boxed{s = s_0 + v(t - t_0)}$$

Geralmente, adotamos como tempo inicial $t_0 = 0$, quando zeramos cronômetro e passamos a contar o tempo a partir do zero. Dessa forma, a função do espaço para o MRU se reduz a:

$$\boxed{s = s_0 + vt}$$

Isto é, a função horária do espaço é uma função do primeiro grau em t.

A principal característica do movimento retilíneo uniforme é fato da velocidade escalar ser constante, isto é, a aceleração escalar é nula.

Para verificar se um movimento é MRU, devemos observar se o movimento respeita qualquer uma destas três características:

1) A velocidade escalar instantânea é constante: $v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, v \neq 0$

2) O espaço obedece a uma função horária do primeiro grau em t: $s = s_0 + vt$

3) A aceleração escalar instantânea é nula: $a = a_m = 0$

3.3. Gráficos no MRU

Dado que a função horária do espaço é dada por $s = s_0 + vt$, então a função de $s(t)$ é uma função do primeiro grau, análoga a $f(x) = b + ax$. Então, dada a $s(t) = s_0 + vt$ temos que s_0 é o coeficiente linear da função e v é o coeficiente angular da função.

Da matemática, lembramos que o coeficiente linear caracteriza o ponto onde a função toca quando passa pelo eixo y. Já o coeficiente angular nos mostra a inclinação da reta, isto é, a taxa como cresce ou descreve a função.

3.3.1. Diagrama $s \times t$

Como visto na Aula 00, no movimento progressivo $(v > 0)$ o espaço cresce $(\Delta s > 0)$ com o tempo (figura x.1) e, no movimento retrógrado $(v < 0)$, o espaço decresce $(\Delta s < 0)$ com o tempo (figura x.2)

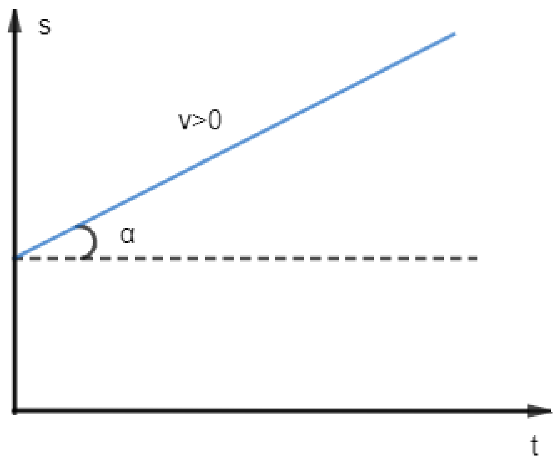


Figura 28: Gráfico sxt no MU, com v>0.

Dado que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e, segundo a trigonometria, tangente é uma função que é definida pela razão do cateto oposto pelo cateto adjacente, temos que:

$$v \overset{N}{=} tg\alpha$$

Isto é, a tangente da inclinação da reta é igual numericamente a velocidade.

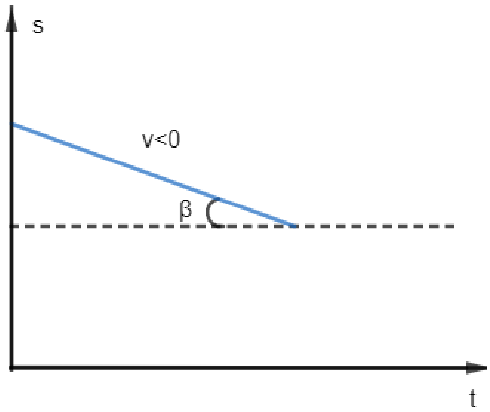


Figura 29: Gráfico sxt no MU, com v<0.

Para o caso do movimento retrógrado, a $tg\beta \overset{N}{=} |v|$. Entretanto, temos que neste caso a velocidade é negativa, então, devemos lembrar de colocar o sinal de menos após calcular a tangente para de fato determinar a velocidade.

3.3.2. Diagrama $v \times t$

O MRU é caracterizado por ter velocidade constante, dessa forma, o módulo da velocidade não se altera com o decorrer do tempo. Logo a função da velocidade com o tempo é uma reta paralela ao eixo dos tempos.

Para o movimento progressivo temos $v > 0$, logo, a reta é paralela e está acima do eixo dos tempos. Para o movimento retrógrado temos $v < 0$, portanto, a reta é paralela e está abaixo do eixo dos tempos, conforme as figuras abaixo:

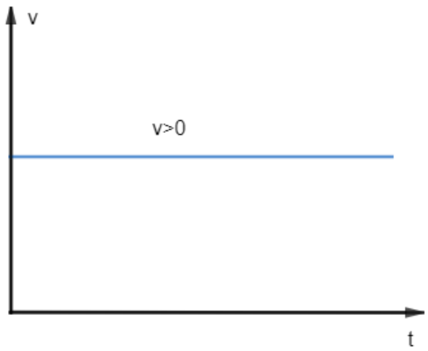


Figura 30: Gráfico vxt no MU, com v>0.

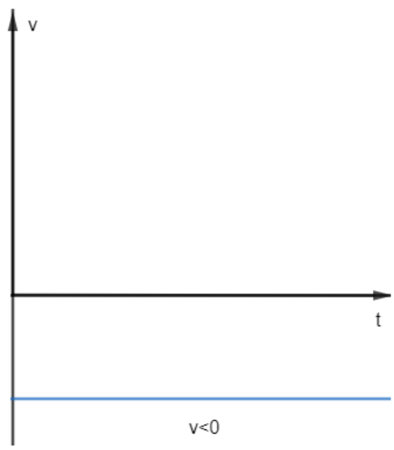


Figura 31: Gráfico vxt no MU, com v<0.

Como dito anteriormente, neste movimento não existe aceleração, logo o gráfico da aceleração pelo tempo coincide com o eixo dos tempos.

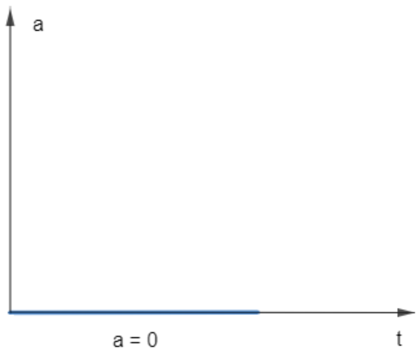


Figura 32: Gráfico axt no MU.

Resumindo:

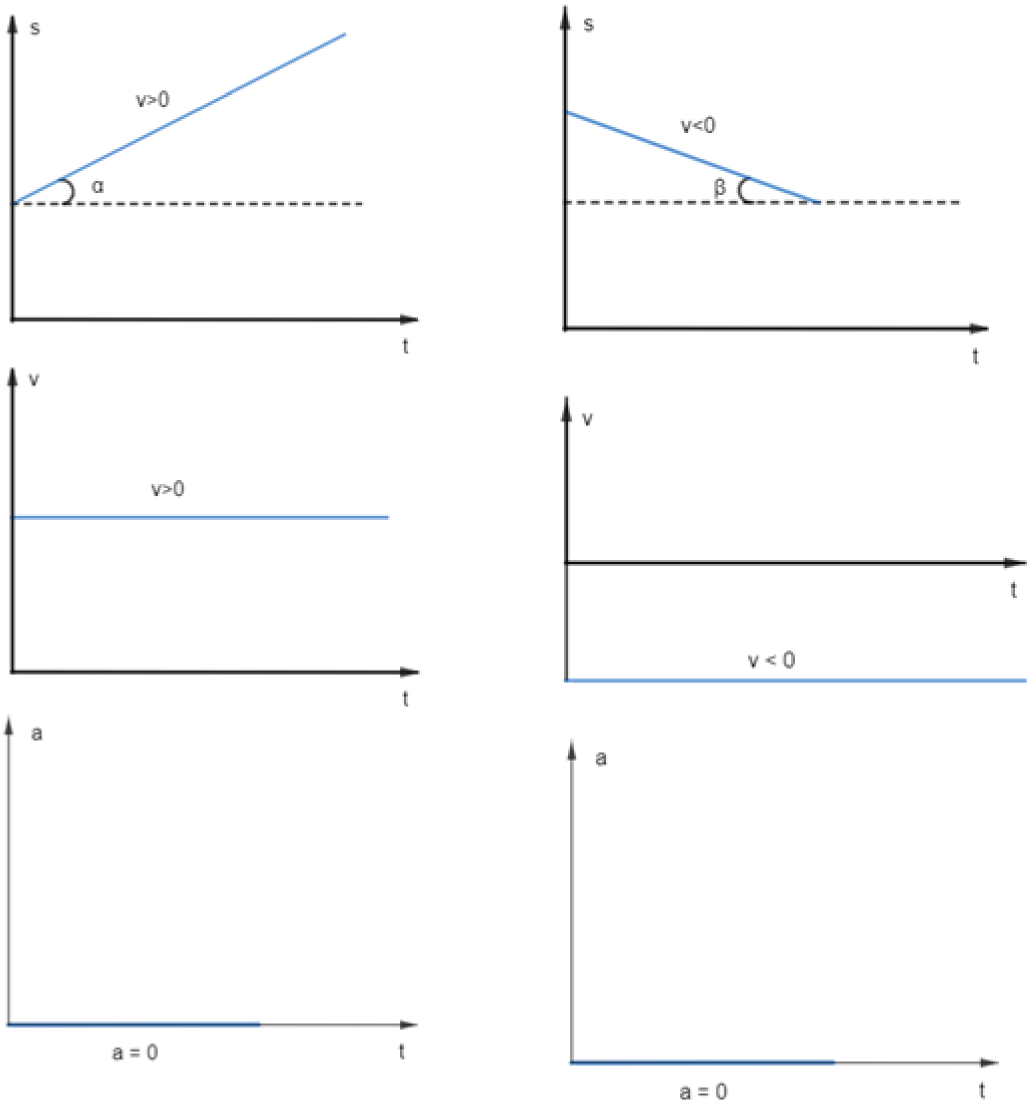


Figura 33: Gráficos no MU para velocidades positivas (à esquerda) e velocidades negativas (à direita).

11)

A função horária do espaço de um móvel é $s = 12 - 3t$, com s e t em unidades SI.
a) determine o espaço inicial e a velocidade escalar do movimento.
b) classifique o movimento.
c) determine o espaço no instante $t = 2\ s$.
d) em que instante o móvel passa pela origem dos espaços?
e) faça o gráfico do espaço pelo tempo.

Comentários:
a)

Vamos comparar a função dada com a função segundo a teoria:

$$\begin{cases} s = s_0 + vt \\ s = 12 - 3t \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_0 = 12\ m}\ e\ \boxed{v = -3\ m/s}$$

b)

O movimento é retrógrado, pois $v = -3\ m/s$, isto é, $v < 0$.

c)

Para $t = 2\ s$, temos que: $s(2) = 12 - 3.2 = 12 - 6 \Rightarrow \boxed{s(2) = 6\ m}$.

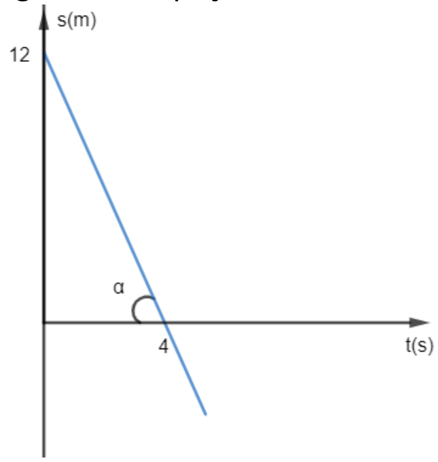
d)

No momento em que o móvel passa pela origem dos espaços, o espaço do móvel é nulo, isto é, $s(t) = 0$. Portanto:

$$s(t) = 0 \Rightarrow 12 - 3t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4\ s}$$

e)

Já conhecemos o espaço inicial (coeficiente linear), a velocidade (coeficiente angular) e ainda sabemos quando passamos pela origem dos espaços, então, temos que:

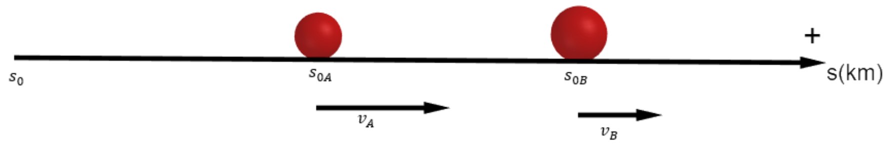


Notemos que $tg\alpha = \frac{12}{4} = 3$ e que $v \overset{N}{=} -tg\alpha = -3\ m/s$.

12)
Dois automóveis A e B percorrem uma mesma trajetória, com as seguintes funções horárias: $s_A = 20 + 60t$ e $s_B = 40 + 40t$. Onde o tempo é medido em horas e o espaço em quilômetros.
a) Determine o instante de encontro.
b) Qual a posição de encontro.
c) Em um mesmo gráfico, coloque a função horária de casa automóvel.
Comentários:
a)

Quando falamos de encontro, dado que se trata de pontos materiais, a posição dos automóveis devem ser a mesma, isto é, no instante do encontro, os espaços os móveis devem ser iguais. Logo:

$$s_A = s_B \Rightarrow 20 + 60t = 40 + 40t \Rightarrow 20t = 20 \Rightarrow \boxed{t = 1\ h}$$



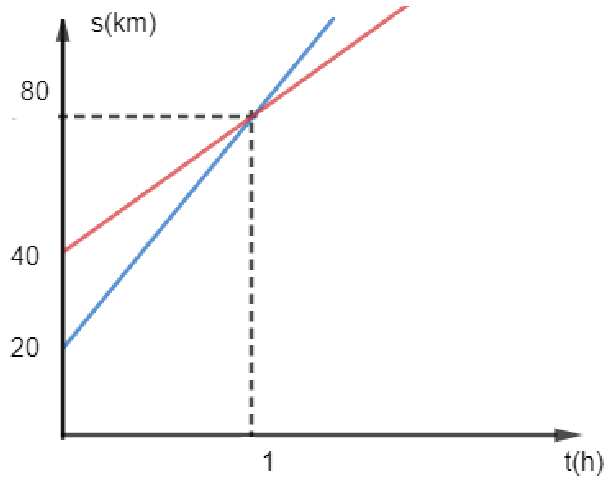
b)

Para encontrarmos a posição, basta substituir em uma das funções horárias:

$$s_A = 20 + 60.1 = 80\ km = s_B$$

c)

Gráfico das funções horárias:



Este exercício pode ser resolvido pelo conceito de velocidade relativa (nós abordaremos mais desse assunto mais a frente). Vamos colocar o nosso referencial no automóvel mais a frente(B). Dessa forma, o automóvel B vê o automóvel se aproximar dele com velocidade, em valor absoluto, de $20km/h$ $(60km/h - 40km/h)$.

Tudo se passa como o móvel B estivesse parado. Assim, devemos pegar a distância relativa entre B e A também, pois, uma vez que parámos o móvel B, sua distância até o móvel A, em valor absoluto, é de $20\ km$ $(40\ km - 20\ km)$.

Dessa forma, poderíamos escrever a função horária do movimento relativo:

$$|\Delta s_{rel}| = |v_{rel}| \cdot \Delta t$$

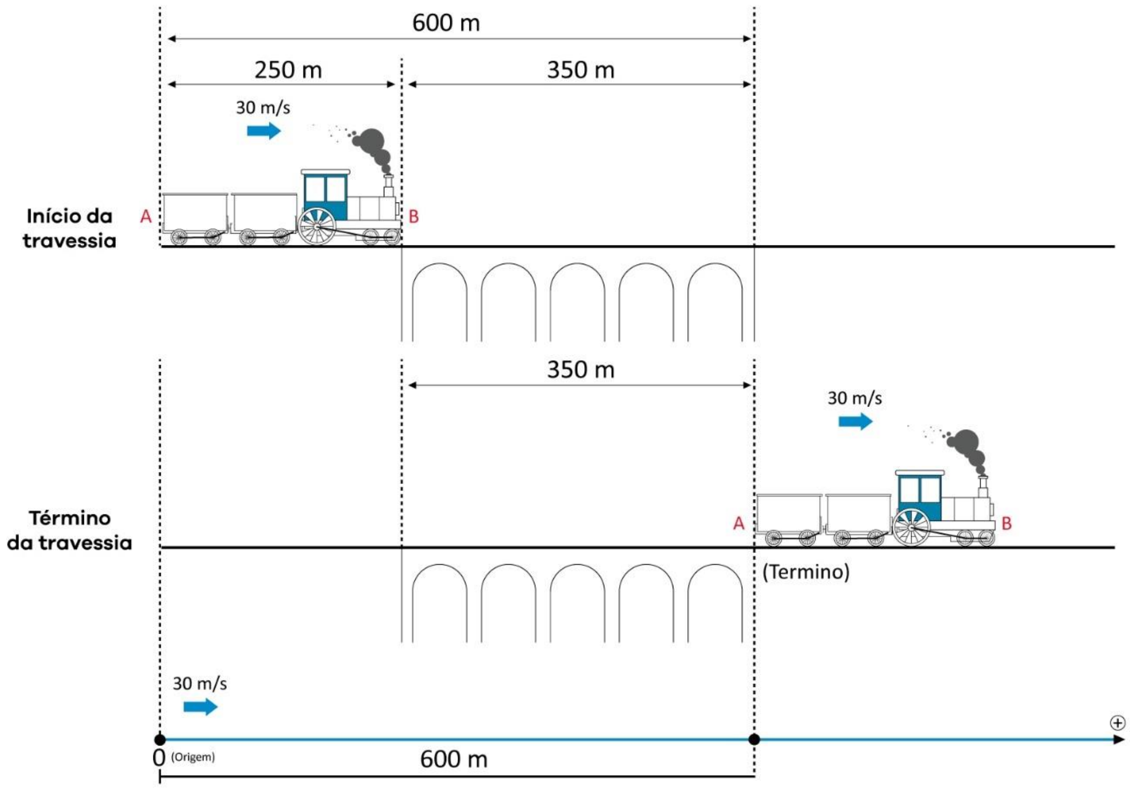
Assim:

$$20 = 20 \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1\ h}$$

13)

Um trem de $250\ m$ de comprimento, com velocidade escalar constante de $108\ km/h$, atravessa uma ponte de $350\ m$ de comprimento. Em quanto tempo o trem demora na travessia?

Comentários:



Notamos que o início da travessia começa a ser contado ($t_0 = 0$), quando a frente do trem está no início da ponte e o término da travessia finaliza quando a traseira do trem está no limite de sai da ponte.

Portanto, tomando como $s_0 = 0$ a traseira do trem, quando ele terminar a travessia, sua traseira estará na posição $s = tamanho\ do\ trem + tamanho\ da\ ponte \Rightarrow s = 250 + 350 = 600\ m$. Assim, podemos escrever que:

$$s = s_0 + vt \Rightarrow 600 = 0 + \frac{108}{3{,}6} \cdot t$$

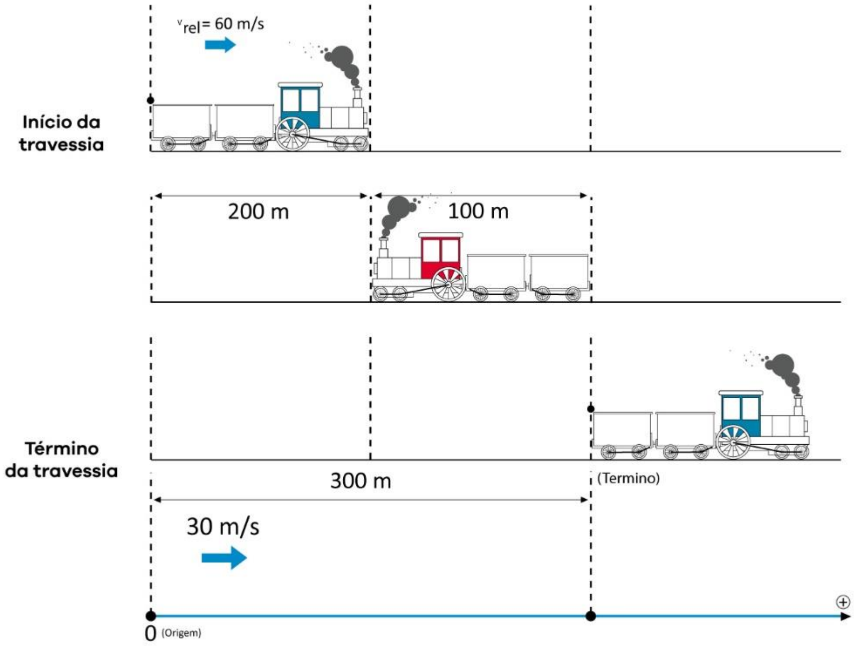
$$\Rightarrow \boxed{t = 20\ s}$$

14) (Trens se aproximando)

Um trem de $200\ m$ de comprimento, com velocidade de $20\ m/s$, desloca-se de A para B enquanto um segundo trem de $100\ m$ de comprimento, desloca-se em uma linha paralela de B para A, com velocidade de $40\ m/s$.

Determine quanto tempo durará o cruzamento dos dois trens. Quanto que o trem B percorre durante o cruzamento, em relação a um referencial na Terra?

Comentários:



Vamos considerar como instante zero o momento quando as frentes dos dois trens estão na mesma posição. Neste instante, vamos considerar o segundo trem como nosso referencial e então, determinar a velocidade escalar de A em relação a B.

Para isso, imagino que você está no trem B, se você estivesse nele e parado, você estaria vendo o trem A se aproximando com a própria velocidade $20\ m/s$ mais a velocidade que o trem b deveria estar, isto é, você veria o trem A se aproximar com $20m/s\ + 40m/s = 60m/s$. Logo, a velocidade relativa de A em relação a B, dado nosso referencial de A para B é $v_{rel} = 60m/s$.

Para determinar a distância percorrida pelo trem A (o trem B está parado), notamos que a traseira do trem A deve passar pela traseira do caminhão B, ou seja, seu deslocamento relativo será:

$$\Delta s_{rel} = 200 + 100 = 300\ m$$

Portanto, o tempo de do cruzamento dos dois trens é dado por:

$$\Delta s_{rel} = v_{rel} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{300}{60}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 5\ s}$$

Para determinarmos a distância percorrida por B, basta utilizarmos a definição de variação de espaço para o MRU, pois já sabemos quanto tempo durou o cruzamento dos trens:

$$\Delta s_B = v_B . \Delta t \Rightarrow \Delta s = 40.5 = 200\ m$$

15)

Um carro se aproxima, em vias paralelas, de um trem, num trecho retilíneo. Os dois realizam um MRU e as velocidades são v_{trem} e v_{carro}, com $v_{carro} > v_{trem}$. Dado que o trem tem um comprimento L e o carro pode ser considerado um ponto material, determine o tempo que o carro leva para passar o trem e quanto deslocou o trem nessa passagem, para um referencial na Terra.

Comentários:

Novamente, vamos considerar o referencial em um dos dois móveis. Neste caso, consideremos o referencial no trem. Então, para calcular o tempo que o carro leva para passar pelo trem devemos calcular a velocidade do carro em relação ao trem e, também, o deslocamento relativo. Novamente, se você estivesse no trem, você veria o carro se aproximando com $v_{carro} -$

v_{trem}. Tudo se passa como se o trem estivesse parado e a velocidade do carro é decrescida da velocidade do trem.

Pense na seguinte situação, você está viajando na rodovia a 100 km/h e vê um carro na frente viajando a 90 km/h. Se você fixar o seu olhar no carro da frente, sua sensação é que está se aproximando lentamente do automóvel a sua frente ($100 - 90 = 10 km/h$).

Por outro lado, quando você fixa seu olhar nos carros questão vindo em sentido contrário, a sensação é que os carros estão muito mais rápidos. Isto ocorre porque a sua velocidade relativa com relação a esses carros é a soma das velocidades, ou seja, uma velocidade relativa alta.

Portanto, para o carro passar pelo trem ele precisa atravessar todo o trem, isto é, $\Delta s_{relativo} = L$.

Logo:

$$\Delta s_{rel} = v_{rel} \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v_{carro} - v_{trem}}$$

Para determinarmos o deslocamento do trem em relação a Terra, devemos fazer que:

$$\Delta s_{trem} = v_{trem} \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{v_{trem} . L}{v_{carro} - v_{trem}}}$$

16) (Super vespa)

São José e Jacareí são ligadas por uma estrada reta de d comprimento e, em um dado momento, dois trens partem um ao encontro do outro, com velocidades escalares iguais a v_T. No instante da partida, uma vespa parada na parte dianteira de um dos trens parte voando, em linha reta, ao encontro do outro trem, com velocidade de v_v. Ao chegar no outro trem, a vespa volta imediatamente ao primeiro trem, e assim prossegue até que os dois trens se colidem e esmagam a vespa. Determine a distância percorrida pela vespa.

Comentários:

Inicialmente, precisamos determinar quanto tempo os trens levam para se chocarem. Dado que os trens se locomovem com velocidades iguais, não é difícil de ver que ele se encontrar no ponto médio de São José a Jacareí.

Logo, o tempo que os trens levam para se chocarem é:

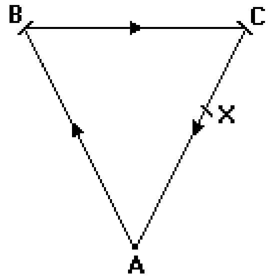
$$\Delta s_{trem} = v_T \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{d}{2v_T}}$$

Portanto, a vespa se moveu com uma velocidade v_v durante este tempo, então:

$$\boxed{d_{vespa} = v_v \cdot \frac{d}{2v_T}}$$

17)

Tem-se que uma fonte sonora no vértice A de uma pista triangular equilátera e horizontal, de 340 m de lado. A fonte emite um sinal que após ser refletido sucessivamente em B e C retorna ao ponto A. No mesmo instante em que a fonte é acionada, um corredor parte do ponto X, situado entre C e A, em direção a A, com velocidade constante de 10 m/s. Se o corredor e o sinal refletido atingem A no mesmo instante, a distância AX é de:



a) 10 m
b) 20 m
c) 30 m
d) 340 m
e) 1020 m

Dado: velocidade do som no ar = 340 m/s.

Comentários:

O tempo que o som leva para sair de A e ser refletido por B e por C é o mesmo tempo que o corredor leva para sair de X e chegar a A.

Então, vamos calcular o tempo que o sinal sonoro leva para realizar o seu percurso.

$$\Delta t_{som} = \frac{d_{som}}{v_{som}} = \frac{3x340}{340} = 3\ s$$

Portanto, a distância deslocada pelo corredor será:

$$d_{corredor} = v_{corretor} \cdot \Delta t_{som} = 10 \cdot 3 = 30\ m$$

Gabarito: C

4. Movimento uniformemente variado

Até agora, vimos apenas movimentos uniformes onde não existia aceleração tangencial, isto é, o módulo da velocidade era constante ou ainda, simplesmente dizemos que a aceleração tangencial é constante e igual a zero.

Contudo, na natureza e na realidade, sabemos que a velocidade (ou módulo ou direção ou sentido) varia com o tempo. Diversos fenômenos ocorrem com aceleração ou desaceleração, ou simplesmente quando estamos viajando em uma rodovia somos obrigados a acelerar e desacelerar. Assim, é fundamental estudarmos as causas e as consequências nessas variações de velocidade.

4.1. Aceleração escalar média

Do mesmo modo que definimos velocidade escalar média, podemos definir aceleração escalar média:

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}, a_m \neq 0}$$

Ou ainda: $\boxed{\Delta v = a_m . \Delta t}$

Como a variação de tempo é sempre positiva, o sinal da aceleração escalar média (a_m) é o mesmo sinal da variação da velocidade (Δv).

Exemplo: Um carro parte do repouso e atinge a velocidade de 30 m/s em 10 segundos. Qual a sua aceleração escalar média nesse intervalo de tempo?

O móvel está inicialmente em repouso, isto é, $v_0 = 0$. Dessa forma, a partir da definição, temos que:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30 - 0}{10 - 0} = 3\ m/s^2$$

4.2. Movimento acelerado e retardado

4.2.1. Movimento acelerado

Chamamos de **movimento acelerado** quando o módulo da velocidade escalar **aumenta** com o decorrer do tempo. Em outras palavras:

$$\boxed{movimento\ acelerado\ \leftrightarrow |v|\ aumenta\ com\ o\ tempo}$$

Como sabemos da teoria de módulo de um número real, v pode ser maior ou menor que zero, mas $|v| > 0$ sempre.

Dessa, existem dois tipos de movimentos acelerados:

1)**Movimento acelerado é progressivo:**

Nesse tipo de movimento $\boldsymbol{v > 0}$ e **se** $|v|$ aumenta com o tempo, resulta que v também aumenta com o tempo. Assim, Δv é positivo, em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a > 0}$.

Exemplo: Móvel viajando na Dutra de São Paulo para Rio de Janeiro com velocidade escalar de 80 km/h passa para 100 km/h em alguns minutos.

A velocidade do móvel é positiva se adotarmos o eixo de São Paulo para o Rio de Janeiro. Portanto, sabemos que a velocidade é sempre positiva, o que nos mostra um movimento progressivo (o móvel está se deslocando na direção do aumento da posição s). Ao calcularmos a variação da velocidade, encontramos que: $\Delta v = v_2 - v_1 = 100 - 80 = 20\ km/h$. Logo, $\Delta v > 0$. Portanto, $a_m > 0$. Dessa forma, temos o movimento acelerado progressivo: $v > 0\ e\ a > 0$.

2)Movimento acelerado é retrógrado

Nesse tipo de movimento $\boldsymbol{v < 0}$ e se $|\boldsymbol{v}|$ **aumenta** como tempo, então v diminui. Assim, $\Delta v < 0$ em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a < 0}$.

Exemplo: Agora vamos dizer que o carro está na Dutra indo do Rio de Janeiro para São Paulo, mas você não alterou o eixo da posição, de forma que o móvel tem uma velocidade -80 km/h (negativa para indicar que está indo no sentido contrário ao adotado para o espaço s) aplica uma aceleração no carro e chega a -100 km/h em alguns minutos.

Neste caso, trata-se de um movimento retrógrado, pois o móvel está na direção contrária ao eixo adotado pelo espaço, isto é, $v < 0$. Além disso, podemos ver que $\Delta v = -100 - (-80) = -20\ km/h$, ou seja, $\Delta v < 0$, mas vimos que o módulo da velocidade aumentou ($|-100| > |-80|$). Assim, temos que no movimento acelerado retrógrado $\boldsymbol{v < 0}$ e $\boldsymbol{a < 0}$.

Podemos resumir da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{movimento\ acelerado}\begin{cases}\boldsymbol{progressivo}: \boldsymbol{v > 0\ e\ a > 0} \\ \boldsymbol{ou} \\ \boldsymbol{retr\acute{o}grado}: \boldsymbol{v < 0\ e\ a < 0}\end{cases}}$$

Assim, concluímos que no **movimento acelerado $\boldsymbol{v}$** e **$\boldsymbol{a}$ têm mesmo sinal**. De outra forma: $\boxed{v.a > 0}$ caracteriza o movimento acelerado.

4.2.2. Movimento retardado

Chamamos de **movimento retardado** quando o módulo da velocidade escalar **diminui** com o decorrer do tempo. Em outras palavras:

$$\boxed{movimento\ retardado\ \leftrightarrow |v|\ diminui\ com\ o\ tempo}$$

Como sabemos da teoria de módulo de um número real, v pode ser maior ou menor que zero, mas $|v| > 0$ sempre.

Dessa, existem dois tipos de movimentos retardados:

1) Movimento retardado é progressivo:

Nesse caso $\boldsymbol{v > 0}$ e se $|\boldsymbol{v}|$ **diminui** com o tempo, então v também diminui com o tempo. Assim, Δv é negativo, em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a < 0}$**.**

Exemplo: Móvel viajando na Dutra de São Paulo para Rio de Janeiro com velocidade escalar de 100 km/h passa para 80 km/h em alguns minutos.

A velocidade do móvel é positiva se adotarmos o eixo de São Paulo para o Rio de Janeiro. Portanto, sabemos que a velocidade é positiva, o que nos mostra um movimento progressivo (o móvel está se deslocando na direção do aumento da posição s). Ao calcularmos a variação da velocidade, encontramos que: $\Delta v = v_2 - v_1 = 80 - 100 = -20\ km/h$. Logo, $\Delta v < 0$. Portanto, $a_m < 0$. Dessa forma, temos o movimento retardado progressivo: $v > 0\ e\ a < 0$.

2) Movimento retardado é retrógrado

Nesse caso $\boldsymbol{v < 0}$ e se $|\boldsymbol{v}|$ **diminui** como tempo, então v aumenta. Assim, $\Delta v > 0$ em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a > 0}$.

Exemplo: Agora vamos dizer que o carro está na Dutra indo do Rio de Janeiro para São Paulo, mas você não alterou o eixo da posição, de forma que o móvel tem uma velocidade -100 km/h (negativa para indicar que está indo no sentido contrário ao adotado para o espaço s) aplica uma desaceleração no carro e chega a -80 km/h em alguns minutos.

Neste caso, trata-se de um movimento retrógrado, pois o móvel está na direção contrária ao adotado pelo espaço, isto é, $v < 0$. Além disso, podemos ver que $\Delta v = -80 - (-100) = +20\ km/h$, ou seja, $\Delta v > 0$, mas podemos perceber que o módulo da velocidade diminuiu ($|-80| < |-100|$). Assim, temos que no movimento retardado retrógrado $\boldsymbol{v < 0}$ e $\boldsymbol{a > 0}$.

Podemos resumir da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{movimento\ retardado} \begin{cases} \boldsymbol{progressivo: v > 0\ e\ a < 0} \\ \boldsymbol{ou} \\ \boldsymbol{retrógrado: v < 0\ e\ a > 0} \end{cases}}$$

Assim, concluímos que no **movimento retardado v e a têm sinais contrários**. De outra forma: $\boxed{v.a < 0}$ caracteriza o movimento retardado.

A partir de agora, estudaremos movimentos onde existe mudança de velocidade causa por uma aceleração. Mas ainda nos restringiremos a mudanças uniformes nas velocidades, isto é, mudança de velocidade a uma taxa constante. Por isso, caracterizamos este movimento como ***uniformemente variado***.

Assim, dizemos que o móvel sofre variações de velocidades iguais em intervalos de tempos iguais. Em outras palavras, dizemos que no MUV a aceleração escalar média também é a aceleração escalar instantânea, isto é:

$$\boxed{a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Assim, dizemos que o móvel sofre variações de velocidades iguais em intervalos de tempos iguais.

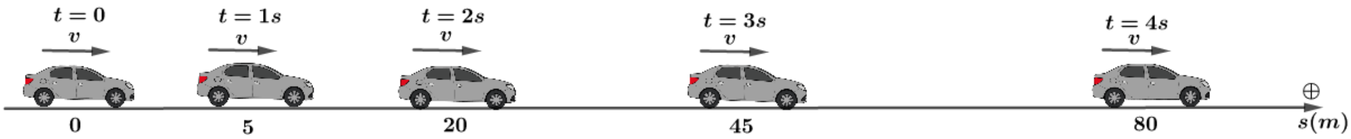


Figura 34: Representação de um MRUV.

Quando a trajetória do MUV for uma reta chamamos de MRUV – movimento retilíneo uniformemente variado. Quando a trajetória do MUV for uma circunferência, chamamos de MCUV – movimento curvilíneo uniformemente variado.

4.3. Função horária da velocidade no MUV

Neste movimento, temos como principal característica:

$$a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se um móvel com velocidade v_0 no instante t_0 passa a ter uma velocidade v em um instante t, podemos escrever que:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v - v_0 = a(t - t_0) \therefore \boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$

Para simplificar nossa vida, vamos contar o início do movimento na origem dos tempos, isto é, $t_0 = 0$. Então:

$$\boxed{v = v_0 + a \cdot t}$$

A partir desse resultado, podemos concluir que:

1) a função horária da velocidade no MUV é uma função do primeiro grau em t.

2) v_0 é a velocidade para o instante $t = 0$, sendo o coeficiente linear da nossa função do primeiro grau em t.

3) a é a aceleração escalar instantânea diferente de zero, sendo o coeficiente angular da nossa função do primeiro grau em t. O valor de $|a|$ é quem determina a taxa de crescimento ou diminuição da nossa velocidade.

4) v é a velocidade em um dado instante t.

4.4. Função horária do espaço no MUV

Para chegarmos à função horária do espaço no MUV, vamos utilizar o caso de um móvel com velocidades positivas e aceleração positiva, isto é, descrevendo um movimento acelerado progressivo. Sem perdas de generalidade, podemos desenhar o gráfico da função horária de sua velocidade da seguinte forma:

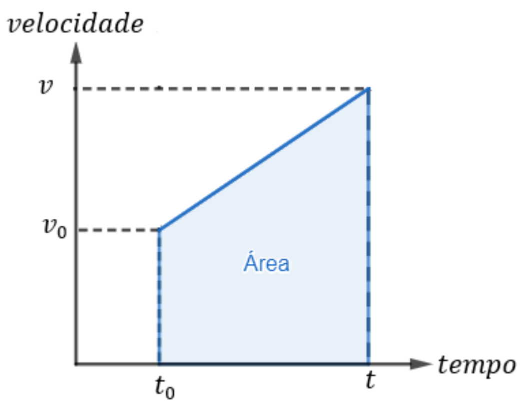


Figura 35: Representação da área no gráfico vxt.

Para a dedução da função horária do espaço no MUV vamos utilizar o conceito de áreas de gráficos na cinemática, que será nosso próximo capítulo. Antecipando algumas definições, temos que a área azul do gráfico de $v \times t$ é numericamente igual à variação do espaço para o tempo correspondente, isto é:

$$\boxed{\Delta s \overset{N}{=} \acute{a}rea\ azul}$$

Nossa área em questão é um trapézio retângulo, com base menor igual a v_0, base maior igual a v e altura igual a $\Delta t = t - t_0$. Assim:

$$\acute{a}rea\ azul = \frac{(base\ maior + base\ menor)}{2}.\,altura$$

$$\therefore \boxed{\Delta s = \frac{(v + v_0)}{2}.\Delta t}$$

Essa relação é extremamente importante para a dedução de algumas equações, a chamaremos de equação coringa.

No MUV, sabemos que a velocidade obedece a seguinte equação: $v = v_0 + a(t - t_0)$. Logo:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + a(t - t_0) + v_0)}{2}.(t - t_0) \Rightarrow s - s_0 = \frac{2v_0(t - t_0)}{2} + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

$$\therefore \boxed{s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}}$$

Ou ainda, quando tomamos a contagem do tempo na origem dos tempos, ou seja, $t_0 = 0$, temos finalmente que:

$$\boxed{s = s_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}}$$

Dessa forma, a função horária do espaço no MUV é uma função do segundo grau em t ($a \neq 0$), onde:

1) s_0 é o espaço inicial quando $t = 0$.

2) v_0 é a velocidade inicial, isto é, velocidade para $t = 0$.

3) a é a aceleração escalar instantânea.

4) s o espaço para um dado instante t.

Notamos que $s_0, v_0\ e\ a$ são constantes no MUV.

Neste momento podemos observar que conhecendo a função horária do espaço, podemos determinar a função horária da velocidade e podemos determinar a aceleração do movimento.

4.5. Cálculo da velocidade média no MUV

Apenas no MU a velocidade escalar média (v_m) é igual à velocidade escalar instantânea (v). Entretanto, o conceito de velocidade não muda no MUV:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Dessa forma, podemos usar nossa equação coringa para calcular de forma simples a velocidade média no MUV:

$$\Delta s = \frac{(v + v_0)}{2} . \Delta t \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2}}$$

Ao analisarmos está última relação, apenas manipulando algebricamente a equação coringa, podemos observar que para dois instantes genéricos ($t = 0$ e t), a velocidade escalar média é a média aritmética das velocidades escalares instantâneas nos correspondentes instantes, então:

$$\boxed{v_m = \frac{(v + v_0)}{2}}$$

Neste momento não podemos confundir as condições do MU e do MUV. No MU não podíamos simplesmente calcular a velocidade média entre dois instantes como a média aritmética das velocidades. Apenas para trechos iguais calculávamos a velocidade escalar média como a média harmônica das velocidades de cada trecho.

No MUV, a velocidade escalar média em dois instantes é sim a média das velocidades para estes dois instantes. Para o caso de a velocidade instantânea variar de forma não linear com o tempo, a velocidade média deverá ser unicamente calculada pela forma tradicional:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Graficamente, temos que:

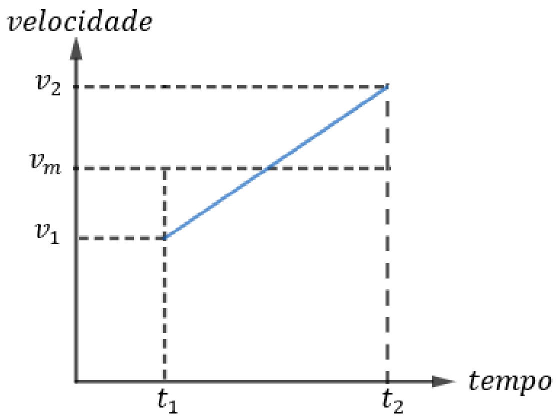


Figura 36: Cálculo da área no gráfico vxt, dado que ela é numericamente igual à variação do espaço.

Vamos calcular a área do trapézio ($A_{trapézio}$) retângulo definido por v_1, v_2, t_1 e t_2, e, a área do retângulo ($A_{retângulo}$) delimitado por v_m, t_1 e t_2. Logo:

$$A_{trapézio} = \frac{(v_1 + v_2)}{2} . (t_2 - t_1)$$

$$A_{retângulo} = v_m . (t_2 - t_1)$$

Como, $v_m = \frac{(v_1+v_2)}{2}$, temos que:

$$A_{trapézio} = \frac{(v_1 + v_2)}{2}.(t_2 - t_1) = v_m.(t_2 - t_1) = A_{retângulo}$$

Isto é, calcular a velocidade escalar média obter uma velocidade que satisfaça a condição do móvel percorrer a mesma variação de espaço no intervalo de tempo correspondente.

4.6. A equação de Torricelli

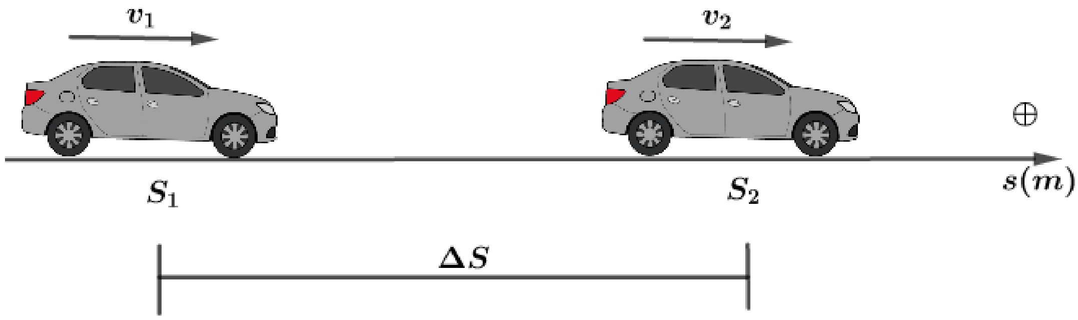


Figura 37: Móvel realizando um MRUV dois momentos onde sabemos suas velocidades, a variação de espaço e a aceleração.

Novamente, vamos utilizar a função horária da velocidade e isolar o Δt, com o objetivo de encontrar uma equação que relaciona velocidade, aceleração e deslocamento, sem ter o tempo como termo da equação:

$$v = v_0 + a.\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{v - v_0}{a}}$$

Observação: como estamos no MUV, a aceleração escalar instantânea é diferente de zero, logo, não há problemas fazer está manipulação matemática.

A partir desse resultado, vamos utilizar novamente nossa equação coringa e substituir o Δt que acabamos de encontrar:

$$\Delta s = \frac{(v + v_0).\Delta t}{2} \Rightarrow \Delta s = \frac{(v + v_0)}{2}.\frac{(v - v_0)}{a} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2.a.\Delta s$$

$$\therefore \boxed{v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta s}$$

4.7. Movimento vertical no vácuo

Segundo a história, por volta de 1590, Galileu Galilei realizou um experimento na torre de Pisa que o tornou famoso. Ele subiu no alto da torre e abandonou simultaneamente duas pequenas esferas de pesos diferentes e elas chegaram juntas ao solo.

Galileu ainda observou que para variações de tempos iguais, as variações de espaços das esferas não eram linearmente proporcionais as variações de tempo, isto é, o movimento era acelerado e, ainda, elas estavam sempre lado a lado, chegando ao solo juntas, conforme a figura abaixo:

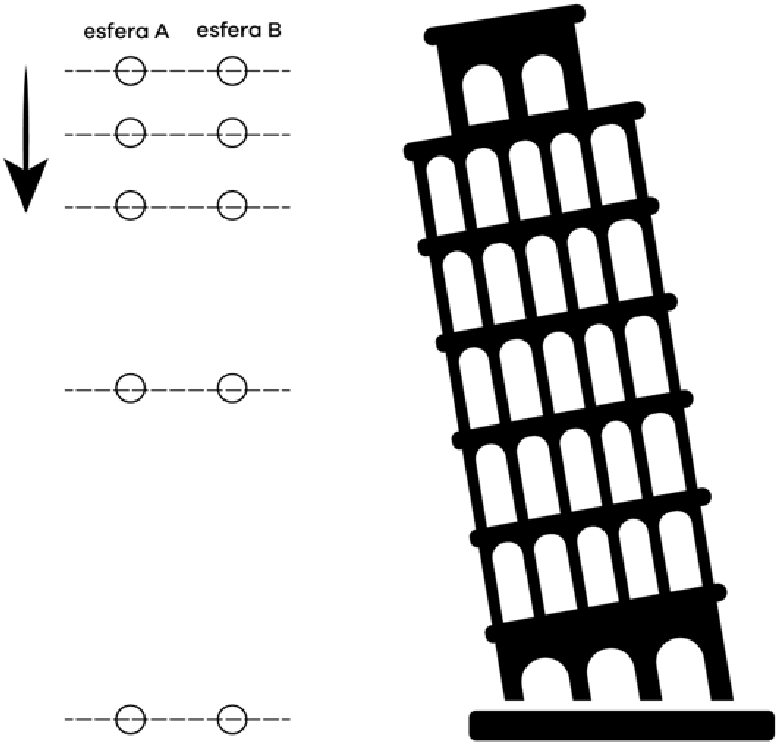


Figura 38: Esferas diferentes caindo simultaneamente do alto da torre de Pizza.

Hoje sabemos que o resultado obtido por Galileu é verdadeiro somente se abandonarmos os corpos em queda livre, ou seja, no vácuo ou num local desprovido de qualquer resistência.

Dessa forma, concluímos que, próximo a superfície da Terra, todo corpo em queda livre tem aceleração constante, chamada aceleração da gravidade ou aceleração gravitacional, onde o módulo é representado pela letra g. Futuramente, quando estudarmos Gravitação, veremos o que de fato é o campo gravitacional e como a aceleração da gravidade varia com o raio da Terra, com a latitude e com a altitude.

Para o nosso estudo de queda livre, geralmente, os problemas estão delimitados em regiões pequenas, onde os fatores que alteram a gravidade pouco influenciam na mudança e, por isso, consideramos a aceleração da gravidade constante.

Muitas vezes os exercícios fornecem o módulo da aceleração da gravidade, outras vezes você deve apenas considerar que o módulo é g e, em alguns casos, é aconselhado usar $|\vec{g}| = 10 m/s^2$ para facilitar as contas na questão. Além disso, veremos em gravitação como se comporta o campo gravitacional e como se orienta a aceleração da gravidade.

Por enquanto, aceitaremos que a aceleração da gravidade está orientada para o centro da Terra. Logo, para os corpos se movimentando na vertical próximo da Terra, sempre adotamos que a aceleração gravitacional está sempre apontando para baixo, na direção do centro da Terra.

Dessa forma, se lançamos um objeto para cima, ele terá velocidade para cima e aceleração da gravidade para baixo durante a subida, ou seja, o objeto está em um movimento retardado, até chegar no ponto onde a velocidade vertical dele se anula. Após este instante, o objeto inverte sua trajetória e passa a ser acelerado para baixo, aumentando novamente o módulo da velocidade, como visto na figura abaixo:

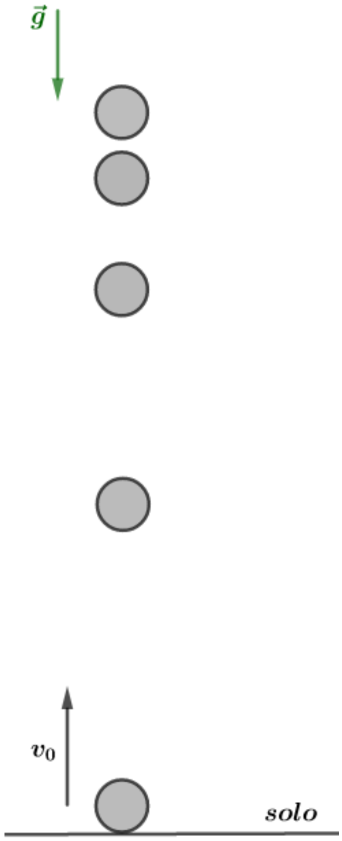


Figura 39: Lançamento de uma esfera a partir do solo.

Consideração: No nosso estudo de lançamento vertical, não levamos em consideração outros movimentos que existem, como a rotação da Terra, ventos e resistência do ar, por isso, podemos afirmar nossa trajetória apenas na vertical. Somente em um curso universitário você verá outros efeitos sobre um corpo lançado verticalmente para cima.

Como já mencionado, para resolvermos os problemas de cinemática, sempre adotamos uma orientação para a trajetória e verificamos os sinais das nossas grandezas físicas de acordo com essa orientação. Neste movimento, sempre vamos adotar uma orientação (fica a seu critério) e, a partir disso, escrever nossas equações matemáticas que representam o fenômeno físico da questão.

Existem duas orientações possíveis, entretanto, falaremos apenas da orientação positiva para cima para você não se confundir nos estudos.

Orientação positiva para cima: quando o móvel está subindo, sua velocidade é positiva ($v > 0$, sentido da trajetória) mas a aceleração da gravidade para baixo. Logo, teremos um movimento retardado progressivo ($v.a < 0$).

Fisicamente, isto mostra que o módulo da velocidade ($|v|$) da bolinha está diminuindo (ela está sendo freada) até que chegue em um ponto onde sua velocidade é zero. Neste ponto, dizemos que a bolinha atingiu a altura máxima, pois, a partir desse instante, a bolinha terá velocidade negativa ($v < 0$), indicando que ela inverteu o sentido do movimento (orientação da trajetória para cima).

Em seguida, a bolinha começa a descer, isto é, ela está sendo acelerada para baixo e o módulo da velocidade ($|v|$) começa a aumentar à medida que ela está descendo, inicia-se o movimento acelerado retrógrado ($v.a > 0$).

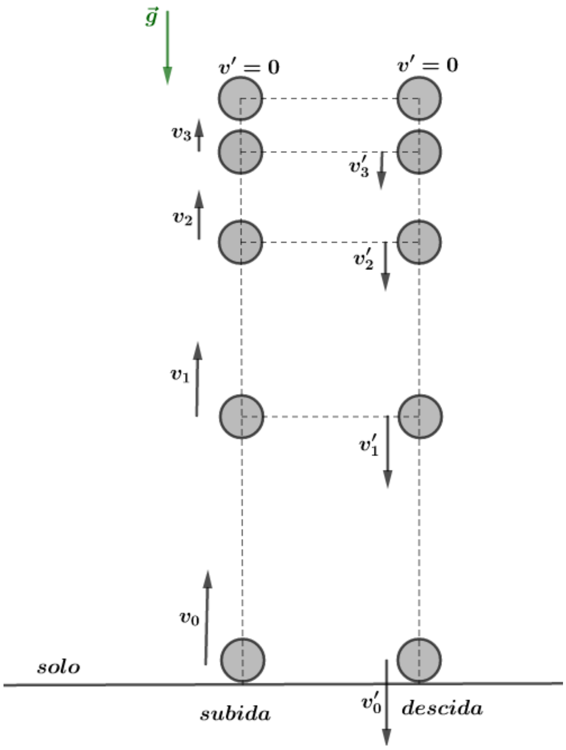


Figura 40: Na subida temos um movimento retardado, até a velocidade zerar e a esfera inverter o sentido. Após este instante, a esfera desce em um movimento acelerado. Repare que todo movimento é simétrico.

Assim, para o movimento vertical no vácuo, vamos utilizar nossas equações do MUV, com as devidas alterações para se encaixar no movimento do problema.

4.8. Altura máxima

Vamos estudar o lançamento vertical de um corpo, a partir do solo, com velocidade inicial v_0, sujeito exclusivamente a ação da gravidade durante o movimento, isto é, vamos desprezar quaisquer resistências.

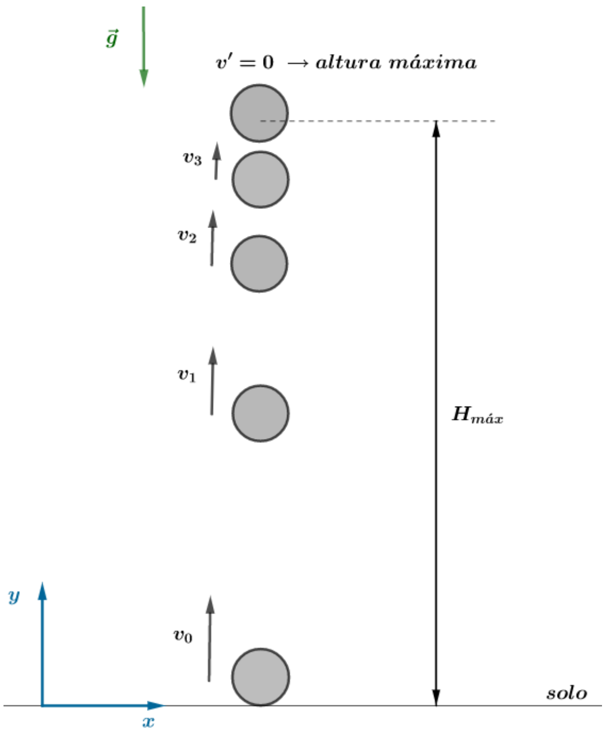


Figura 41: Lançamento vertical de um corpo para cima até atingir a altura máxima.

A altura máxima que o corpo pode atingir, quando lançado como uma velocidade v_0, pode ser determinada diretamente pela equação de Torricelli, da seguinte maneira:

$$v^2 = v^2 + 2.a.\Delta s$$

Em que:

1) $a = -g$, pois, a aceleração da gravidade é contrária ao sentido adotado;
2) $v_0 > 0$, pois, quando lançamos a velocidade está na direção da orientação;
3) $\Delta s > 0$, dado que a orientação é para cima, o deslocamento vertical pode ser escrito como $\Delta s = h_{máx} - h_0$, onde h_0 está situado na origem do eixo adotado, portanto, $h_0 = 0$;
4) $v = 0$, pois, quando a bolinha atinge a altura máxima, sua velocidade é nula (característica de inversão de trajetória).

Dessa forma, temos que:

$$v^2 = v_0^2 + 2.(-g).(h_{máx} - h_0) \Rightarrow 0^2 = v_0^2 - 2gh_{máx}$$

$$\therefore \boxed{h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

4.9. Tempo de subida até altura máxima

Para determinar o tempo de subida, precisamos de uma equação que correlacione tempo e alguma informação que já sabemos. Dessa forma, a função horária da velocidade é perfeita para determinar o tempo de subida, pois sabemos que a velocidade escalar quando atinge a altura máxima é nula. Logo:

$$v = v_0 + a.t$$

A aceleração da gravidade aponta para baixo, logo, $a = -g$. Então

$$v = v_0 - g.t \Rightarrow 0 = v_0 - g.t_{subida}$$

$$\therefore \boxed{t_{subida} = \frac{v_0}{g}}$$

4.10 Tempo de subida e tempo de descida entre dois pontos A e B

Vamos tomar dois pontos da vertical A e B, como visto abaixo:

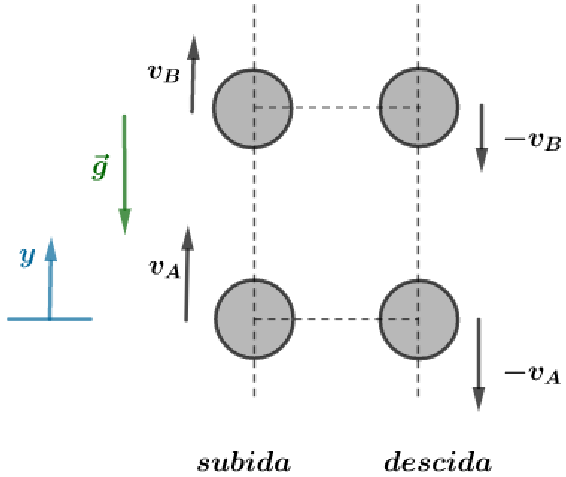


Figura 42: Intervalo de tempos iguais na subida e na descida entre dois níveis horizontais.

Pela função horaria da velocidade, podemos escrever a equação da velocidade em B a partir do ponto A no momento de subida, isto é:

$$v_B = v_A - g.(t_B - t_A) \Rightarrow (t_B - t_A) = \boxed{t_{subida\ A\rightarrow B} = \frac{v_A - v_B}{g}}$$

No momento da descida, o corpo vai de B para A, sentido contrário à orientação adotada, logo:

$$-v_A = -v_B - g.(t_{B'} - t_{A'}) \Rightarrow (t_{B'} - t_{A'}) = \boxed{t_{descida\ B\rightarrow A} = \frac{v_A - v_B}{g}}$$

Dessa forma, vemos que entre dois pontos da trajetória, o tempo de subida é igual ao tempo de descida, isto é, o movimento é simétrico. Então, o tempo de subida até a altura máxima é igual ao tempo de descida da altura máxima até o solo, ou seja:

$$t_{subida} = t_{descida} = \frac{v_0}{g}$$

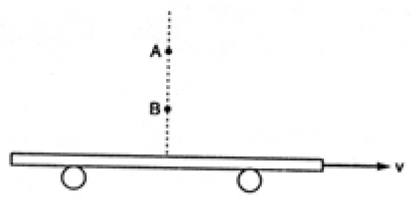
Logo, o tempo total de voo do corpo lançado do solo para cima com velocidade escalar v_0 no vácuo é dado por:

$$t_{total} = t_{subida} + t_{descida}$$

$$\boxed{t_{total} = \frac{2v_0}{g}}$$

18) (IME – 1994)

De dois pontos A e B situados sobre a mesma vertical, respectivamente, a 45 metros e a 20 metros do solo, deixa-se cair no mesmo instante duas esferas, conforme mostra a figura abaixo. Uma prancha se desloca no solo, horizontalmente, com movimento uniforme. As esferas atingem a prancha em pontos que distam 2,0 metros. Sendo $g = 10\ m/s^2$ e desprezando a resistência do ar, determine a velocidade da prancha.



Comentários:

Primeiramente, vamos considerar que a velocidade da prancha não se altera quando uma esfera atinge ela. O assunto de colisões será abordado bem mais para frente, mas a título de curiosidade, esse resultado pode ser obtido quando consideramos que a massa da prancha é muito maior que a massa das esferas, considerando choque inelástico.

Diante disso, podemos calcular o tempo de queda de cada esfera:

$$t_A = \sqrt{\frac{2h_A}{g}} = \sqrt{\frac{2.45}{10}} = 3\ s$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2h_B}{g}} = \sqrt{\frac{2.20}{10}} = 2\ s$$

Então, o intervalo de tempo de cada choque é de 1 segundo. Por outro lado, a diferença dos pontos onde as esferas atingem na prancha é de 2 m, ou seja, a prancha andou 2 m em 1 s. Portanto:

$$v_{prancha} = \frac{\Delta s_{prancha}}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2\ m/s$$

4.12 Lista de exercícios

1. (EsPCEx – 2016)

Um móvel descreve um movimento retilíneo uniformemente acelerado. Ele parte da posição inicial igual a $40\ m$ com uma velocidade de $30\ m/$s, no sentido contrário â orientação positiva da trajetória, e a sua aceleração ê de $10\ m/s^2$ no sentido positivo da trajetória. A posição do móvel no instante 4s é

a) 0 m

b) 40 m

c) 80 m

d) 100 m

e) 240 m

2. (EsPCEx – 2013)

Um carro está desenvolvendo uma velocidade constante de 72 km/h em uma rodovia federal. Ele passa por um trecho da rodovia que está em obras, onde a velocidade máxima permitida é de 60 km/h. Após 5 s da passagem do carro, uma viatura policial inicia uma perseguição, partindo do repouso e desenvolvendo uma aceleração constante. A viatura se desloca 2,1 km até alcançar o carro do infrator. Nesse momento, a viatura policial atinge a velocidade de

a) 20 m/s

b) 24 m/s

c) 30 m/s

d) 38 m/s

e) 42 m/s

3. (EsPCEx – 2012)

Um automóvel percorre a metade de uma distância D com uma velocidade média de 24 m/s e a outra metade com uma velocidade média de 8 m/s. Nesta situação, a velocidade média do automóvel, ao percorrer toda a distância D, é de:

a) 12 m/s

b) 14 m/s

c) 16 m/s

d) 18 m/s

e) 32 m/s

4. (EsPCEx – 2012)

Um avião bombardeiro deve interceptar um comboio que transporta armamentos inimigos quando este atingir um ponto A, onde as trajetórias do avião e do comboio se cruzarão. O comboio partirá de um ponto B, às 8 h, com uma velocidade constante igual a 40 km/h, e percorrerá uma distância de 60 km para atingir o ponto A. O avião partirá de um ponto C, com velocidade constante igual a 400 km/h, e percorrerá uma distância de 300 km até atingir o ponto A. Consideramos o avião e o comboio como partículas descrevendo trajetórias retilíneas. Os pontos A, B e C estão representados no desenho abaixo.

Para conseguir interceptar o comboio no ponto A, o avião deverá iniciar o seu voo a partir do ponto C às:

a) 8 h e 15 min.

b) 8 h e 30 min.

c) 8 h e 45 min.

d) 9 h e 50 min.

e) 9 h e 15 min.

5. (EAM – 2019)

Um garoto em repouso no alto de um tobogã desliza por um desnível de $5\ m$. Desconsiderando qualquer tipo de atrito, possibilidade de rolamento e considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale a opção que apresenta a velocidade, em m/s, com que o garoto chegará ao final.

(A) 10

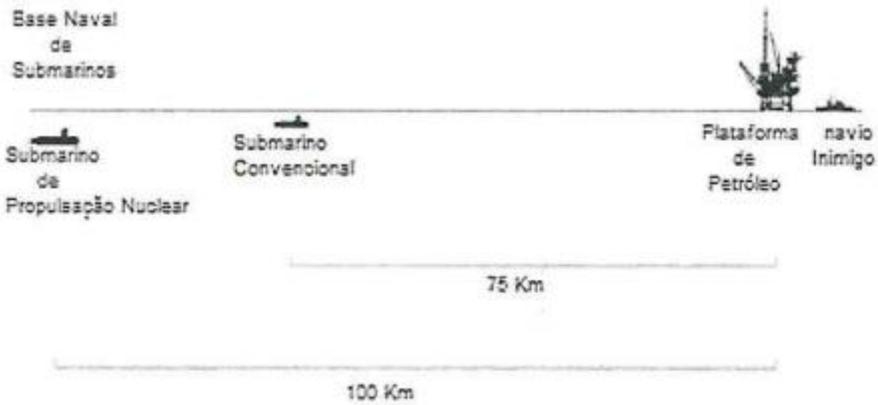
(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 50

6. (EAM – 2018)



O Programa de Desenvolvimento de Submarinos (PROSUB) da Marinha do Brasil (MB) prevê para os próximos anos a conclusão da construção de quatro submarinos convencionais e um submarino de propulsão nuclear. O moderno submarino convencional pode manter, quando submerso, uma velocidade média de 25 km/h, enquanto o nuclear 50 km/h. Considere o cenário em que um navio inimigo se aproxima de uma Plataforma de Petróleo da Petrobrás distante 100 km da Base Naval de Submarinos. A MB resolve, então, enviar um submarino a fim de dissuadir o inimigo. O nuclear encontra-se pronto para partir da base e o convencional encontra-se em pronto-emprego no mar a 75 km de distância da mencionada plataforma. Desconsiderando qualquer tipo de correnteza e considerando que tanto um como o outro possam se deslocar em linha reta submersos até a plataforma e que o critério de escolha do submarino por parte da MB se baseie apenas no menor intervalo de tempo de deslocamento para chegar ao destino, marque a opção que apresenta o submarino que será escolhido e a diferença de intervalo de tempo entre eles.

(A) O nuclear, 1 h antes do que o convencional.

(B) O nuclear, 2 h antes do que o convencional.

(C) Os dois chegarão juntos.

(D) O convencional, 2 h antes do que o nuclear.

(E) O convencional, 1 h antes do que o nuclear.

7. (EFOMM – 2018)

Em um determinado instante um objeto é abandonado de uma altura H do solo e, 2,0 segundos mais tarde, outro objeto é abandonado de uma altura h, 120 metros abaixo de H. Determine o valor H, em m, sabendo que os dois objetos chegam juntos ao solo e a aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$.

a) 150

b) 175

c) 215

d) 245

e) 300

8. (EFOMM – 2016)

Uma videochamada ocorre entre dois dispositivos móveis localizados sobre a superfície da Terra, em meridianos opostos, e próximo ao equador. As informações, codificadas em sinais eletromagnéticos, trafegam em cabos de telecomunicações com velocidade muito próxima â velocidade da luz no vácuo. O tempo mínimo, em segundos, para que um desses sinais atinja o receptor e retorne ao mesmo dispositivo que o transmitiu é. aproximadamente.

Dados: raio médio da Terra.$R_{med} = \frac{1}{15} \cdot 10^8\ m$; velocidade da luz (vácuo), $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.

a) 1/30

b) 1/15

c) 2/15

d) 1/5

e) 3/10

9. (EEAR – 2019)

Um atleta pratica salto ornamental, fazendo uso de uma plataforma situada a 5m do nível da água da piscina. Se o atleta saltar desta plataforma, a partir do repouso, com que velocidade se chocará com a água?

Obs.: despreze a resistência do ar e considere o módulo da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$.

a) 10 m/s.

b) 20 m/s.

c) 30 m/s.

d) 50 m/s.

10. (EEAR – 2018)

Um móvel completa 1/3 de um percurso com o módulo da sua velocidade média igual a 2 km/h e o restante com o módulo da velocidade média igual a 8 km/h. Sendo toda a trajetória retilínea, podemos afirmar que a velocidade média desse móvel durante todo o percurso, em km/h, foi igual a

a) 4

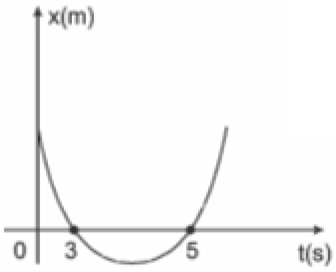
b) 5

c) 6

d) 10

11. (EEAR 2018)

A posição (x) de um móvel em função do tempo (t) é representado pela parábola no gráfico a seguir.



Durante todo o movimento o móvel estava sob uma aceleração constante de módulo igual a $2\ m/s^2$. A posição inicial desse móvel, em m, era

a) 0

b) 2

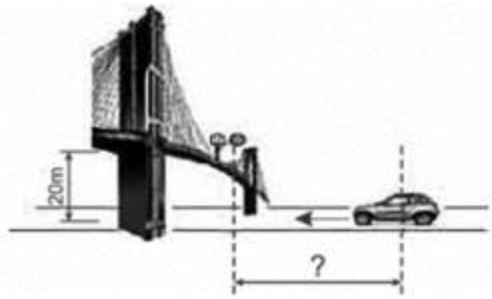
c) 15

d) -8

12. (EEAR – 2017)

Um garoto que se encontra em uma passarela de altura 20 metros, localizada sobre uma estrada, observa um veículo com teto solar aproximando-se. Sua intenção é abandonar uma bolinha de borracha para que ela caia dentro do carro, pelo teto solar. Se o carro viaja na referida estrada com velocidade constante de 72km/h, a que distância, em metros, do ponto diretamente abaixo da passarela sobre a estrada deve estar o carro no momento em que o garoto abandonar a bola.

Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$.



a) 10

b) 20

c) 30

d) 40

13. (EEAR – 2016)

Ao término de uma formatura da EEAR. um terceiro sargento recém-formado. para comemorar, lançou seu quepe para cima na direção vertical, até uma altura de 9,8 metros.

Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desconsiderando o atrito com o ar. A velocidade de lançamento, em m/s. foi de

a) 8

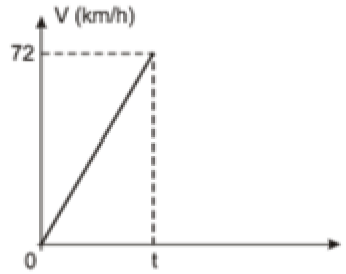
b) 14

c) 20

d) 26

14. (Colégio Naval – 2014)

Um jovem, desejando estimar a altura do terraço onde se encontrava, deixou cair várias esferas de aço e, munido de um cronômetro, anotou o tempo de queda de todas. Após alguns cálculos, elaborou o gráfico abaixo com o tempo médio T gasto pelas esferas na queda.



Considere que. para facilitar os cálculos, o jovem desprezou a resistência do ar o adotou $g = 10\ m/s^2$. Pode-se afirmar que: o valor encontrado para o tempo médio (t) e a altura do terraço foram, respectivamente:

a) 1,0 s e 10 m

b) 1,2 s e 12 m

c) 2,0 s e 20 m

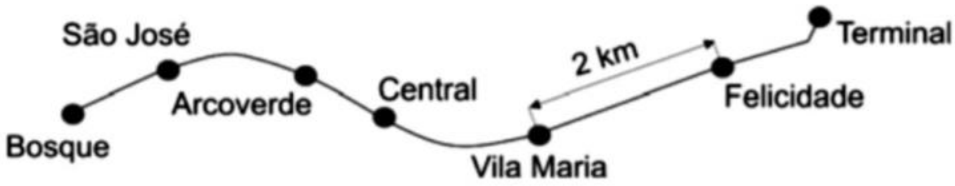
d) 2,5 s e 25 m

e) 3,0 s e 30 m

15. (Fuvest 2007)

Um passageiro, viajando de metrô, fez o registro de tempo entre duas estacoes e obteve os valores indicados na tabela.

	Chegada	Partida
Vila Maria	0:00min	1:00min
Felicidade	5:00min	6:00min



Supondo que a velocidade média entre duas estações consecutivas seja sempre a mesma e que o trem pare o mesmo tempo em qualquer estação da linha, de 15 km de extensão, é possível estimar que um trem, desde a partida da Estação Bosque até a chegada à Estação Terminal, leva aproximadamente:

a) 20 min.

b) 25 min.

c) 30 min.

d) 35 min.

e) 40 min.

16. (UNEB-1998)

Um fazendeiro percorre, com seu jeep, os limites de sua fazenda, que tem o formato de um losango, com os lados aproximadamente iguais. Devido às peculiaridades do terreno, cada lado foi percorrido com uma velocidade média diferente: o primeiro a 20KM/h, o segundo a 30 Km/h, o terceiro a 40Km/h e, finalmente, o último a 60Km/h.

A velocidade média desenvolvida pelo fazendeiro para percorrer todo o perímetro da fazenda, em km/h, foi de:

a) 50

b) 42

c) 38

d) 36

e) 32

17. (UFSM 2002)

Um motoqueiro obtém velocidades médias (v) e (kv) na primeira metade e no percurso todo, respectivamente, onde k é uma constante positiva. Se $kv \neq 0$, é correto afirmar que:

01. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi igual a k.

02. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi $[(1+K)v]/2$.

04. é impossível que se tenha $K = 2$.

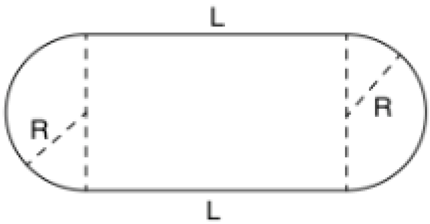
08. o tempo gasto, no percurso todo, foi o dobro daquele gasto na primeira metade.

16. é impossível determinar a razão entre os tempos gastos na primeira e na segunda metade.

Soma:

18. (UEL-2010)

Um ciclista descreve uma volta completa em uma pista que se compõe de duas retas de comprimento L e duas semicircunferências de raio R conforme representado na figura a seguir.



A volta dá-se de forma que a velocidade escalar média nos trechos retos seja v e nos trechos curvos seja 2v/3. O ciclista completa a volta com uma velocidade escalar média em todo o percurso igual a 4v/5. A partir dessas informações, é correto afirmar que o raio dos semicírculos é dado pela expressão:

a) $L = \pi R$

b) $L = \frac{\pi R}{2}$

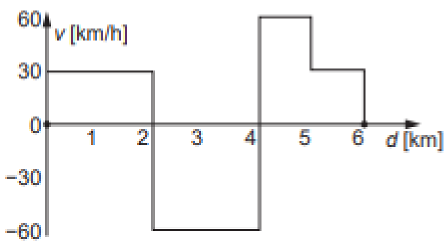
c) $L = \frac{\pi R}{3}$

d) $L = \frac{\pi R}{4}$

e) $L = \frac{3\pi R}{2}$

19. (ITA 2017)

Um automóvel percorre um trecho retilíneo de uma rodovia. A figura mostra a velocidade do carro em função da distância percorrida, em km, indicada no odômetro. Sabendo que a velocidade escalar média no percurso é de 36 km/h, assinale respectivamente o tempo total dispendido e a distância entre os pontos inicial e final do percurso.



a) 9 min e 2 km

b) 10 min e 2 km

c) 15 min e 2 km

d) 15 min e 3 km

e) 20 min e 2 km

20. (ITA 1978)

Um motorista deseja perfazer a distância de 20 km com velocidade escalar média de 80 km/h. Se viajar durante os primeiros 15 minutos com velocidade de 40 km/h, com que velocidade escalar média deverá fazer o percurso restante?

a) 120 km/h

b) 160 km/h

c) É impossível estabelecer a velocidade média desejada nas circunstâncias apresentadas

d) Nula

e) Nenhuma das afirmações acima é correta

21. (ITA)

Um avião voando horizontalmente a 4000 m de altura numa trajetória retilínea com velocidade constante passou por um ponto A e depois por um ponto B situado a 3000 m do primeiro. Um observador no solo, parado no ponto verticalmente abaixo de B, começou a ouvir o som do avião, emitido em A, 4,00 segundos antes de ouvir o som proveniente de B. Se a velocidade do som no ar era de 320 m/s, qual era velocidade do avião?

a) 960 m/s

b) 750 m/s

c) 390 m/s

d) 421 m/s

e) 292 m/s

GABARITO

4.13 Gabarito sem comentários

1. A
2. E
3. A
4. C
5. A
6. A
7. D
8. C
9. A
10. A
11. C
12. D
13. B
14. C
15. D
16. E
17. 04
18. A
19. B
20. C
21. D

4.14 Lista de exercícios comentada

1. (EsPCEx – 2016)

Um móvel descreve um movimento retilíneo uniformemente acelerado. Ele parte da posição inicial igual a $40\ m$ com uma velocidade de $30\ m/$s, no sentido contrário â orientação positiva da trajetória, e a sua aceleração ê de $10\ m/s^2$ no sentido positivo da trajetória. A posição do móvel no instante 4s é

a) 0 m

b) 40 m

c) 80 m

d) 100 m

e) 240 m

Comentários:

Como o corpo executa em MRUV, sua função horária do espaço é dada por:

$$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Substituindo os valores fornecidos para as respectivas grandezas físicas, temos:

$$S(t) = 40 + (-30) \cdot t + \frac{10 \cdot t^2}{2}$$

$$S(t) = 40 - 30 \cdot t + 5 \cdot t^2$$

Para o tempo de 4 segundos, temos:

$$S(4) = 40 - 30 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2$$

$$S(4) = 40 - 120 + 80$$

$$\boxed{S(4) = 0\ m}$$

Gabarito: A

---

2. (EsPCEx – 2013)

Um carro está desenvolvendo uma velocidade constante de 72 km/h em uma rodovia federal. Ele passa por um trecho da rodovia que está em obras, onde a velocidade máxima permitida é de 60 km/h. Após 5 s da passagem do carro, uma viatura policial inicia uma perseguição, partindo do repouso e desenvolvendo uma aceleração constante. A viatura se desloca 2,1 km até alcançar o carro do infrator. Nesse momento, a viatura policial atinge a velocidade de

a) 20 m/s

b) 24 m/s

c) 30 m/s

d) 38 m/s

e) 42 m/s

Comentários:

O carro se desloca com velocidade uniforme. Logo, para percorrer 2,1 km (ou 2100 m), ele leva um tempo Δt, dado por:

$$\Delta S = v_{carro} \cdot \Delta t$$

$$2100\ m = \frac{72}{3{,}6}\left(\frac{m}{s}\right) \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = 105\ s$$

Como a viatura executa um MUV, sua velocidade média é dada por:

$$\frac{v_{final} + v_{inicial}}{2} = \frac{\Delta S_{policial}}{\Delta t_{policial}}$$

Note que $\Delta t_{policial} = 105 - 5 = 100\ s$, já que a viatura sai 5 segundos após a passagem do carro. Portanto:

$$\frac{v_{final} + 0}{2} = \frac{2100}{100}$$

$$\frac{v_{final}}{2} = 21$$

$$\boxed{v_{final} = 42\ m/s}$$

Gabarito: E

---

3. (EsPCEx – 2012)

Um automóvel percorre a metade de uma distância D com uma velocidade média de 24 m/s e a outra metade com uma velocidade média de 8 m/s. Nesta situação, a velocidade média do automóvel, ao percorrer toda a distância D, é de:

a) 12 m/s

b) 14 m/s

c) 16 m/s

d) 18 m/s

e) 32 m/s

Comentários:

Como apresentado em teoria, neste caso, a velocidade média do automóvel é dada pela média harmônica das velocidades:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{24} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{\frac{1}{24} + \frac{3}{3 \cdot 8}}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot 24}{1 + 3}$$

$$\boxed{v_m = 12\ m/s}$$

Gabarito: A

---

4. (EsPCEx – 2012)

Um avião bombardeiro deve interceptar um comboio que transporta armamentos inimigos quando este atingir um ponto A, onde as trajetórias do avião e do comboio se cruzarão. O comboio partirá de um ponto B, às 8 h, com uma velocidade constante igual a 40 km/h, e percorrerá uma distância de 60 km para atingir o ponto A. O avião partirá de um ponto C, com velocidade constante igual a 400 km/h, e percorrerá uma distância de 300 km até atingir o ponto A. Consideramos o avião e o comboio como partículas descrevendo trajetórias retilíneas. Os pontos A, B e C estão representados no desenho abaixo.

Para conseguir interceptar o comboio no ponto A, o avião deverá iniciar o seu voo a partir do ponto C às:

a) 8 h e 15 min.

b) 8 h e 30 min.

c) 8 h e 45 min.

d) 9 h e 50 min.

e) 9 h e 15 min.

Comentários:

Partindo do ponto B, às 8h, com velocidade constante de 40 km/h, o comboio chegará em A às:

$$t_{comboio} = \frac{\Delta S_{BA}}{v} = \frac{60}{40} = 1{,}5\ h$$

Logo, o comboio chegará em A às $8 + 1{,}5 = 9{,}5h = 9h30min$. O tempo de voo do avião é igual a:

$$\Delta_{t_{voo}} = \frac{\Delta S_{avião}}{v_{avião}} = \frac{300}{400} = 0{,}75\ h$$

$$\Delta t_{voo} = 45\ min$$

Ou seja, para conseguir interceptar o comboio no ponto A, o avião deverá sair 45 minutos antes das 9h30min, isto é:

$$9h30min - 45min = 8h45min$$

Gabarito: C

---

5. (EAM – 2019)

Um garoto em repouso no alto de um tobogã desliza por um desnível de $5\ m$. Desconsiderando qualquer tipo de atrito, possibilidade de rolamento e considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale a opção que apresenta a velocidade, em m/s, com que o garoto chegará ao final.

(A) 10

(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 50

Comentários:

Considerando que o tobogã está disposto na direção vertical, podemos aplicar a equação de Torricelli de forma bizurada, já que ele não falou nada de tempo e não precisamos saber o tempo quando usamos esta equação.

Portanto, a intensidade (o módulo) da velocidade do corpo ao chegar no final do percurso é de:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta h$$

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5$$

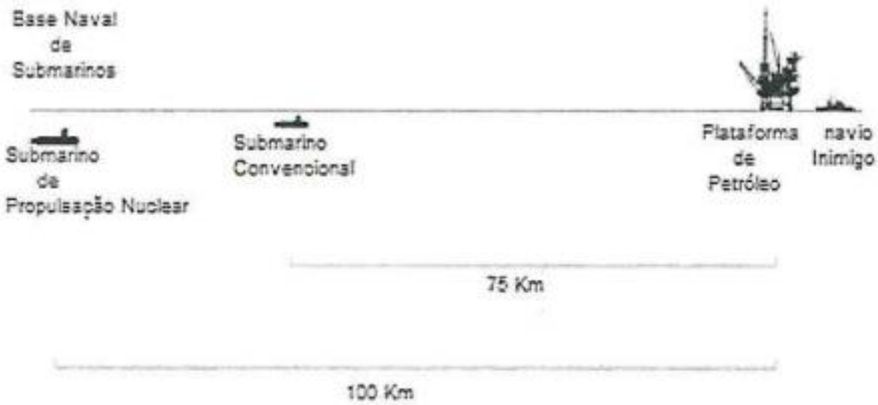
$$v^2 = 100$$

$$\boxed{v = 10\ m/s}$$

Gabarito: A

---

6. (EAM – 2018)



O Programa de Desenvolvimento de Submarinos (PROSUB) da Marinha do Brasil (MB) prevê para os próximos anos a conclusão da construção de quatro submarinos convencionais e um submarino de propulsão nuclear. O moderno submarino convencional pode manter, quando submerso, uma velocidade média de 25 km/h, enquanto o nuclear 50 km/h. Considere o cenário em que um navio inimigo se aproxima de uma Plataforma de Petróleo da Petrobrás distante 100 km da Base Naval de Submarinos. A MB resolve, então, enviar um submarino a fim de dissuadir o inimigo. O nuclear encontra-se pronto para partir da base e o convencional encontra-se em pronto-emprego no mar a 75 km de distância da mencionada plataforma. Desconsiderando qualquer tipo de correnteza e considerando que tanto um como o outro possam se deslocar em linha reta submersos até a plataforma e que o critério de escolha do submarino por parte da MB se baseie apenas no menor intervalo de tempo de deslocamento para chegar ao destino, marque a opção que apresenta o submarino que será escolhido e a diferença de intervalo de tempo entre eles.

(A) O nuclear, 1 h antes do que o convencional.

(B) O nuclear, 2 h antes do que o convencional.

(C) Os dois chegarão juntos.

(D) O convencional, 2 h antes do que o nuclear.

(E) O convencional, 1 h antes do que o nuclear.

Comentários:

Os tempos gastos por cada submarinhos até chegar a plataforma são dados por:

$$\Delta t_{convencial} = \frac{\Delta S_{convencional}}{v_{convencional}} = \frac{75\ km}{25\ km/h} = 3\ h$$

$$\Delta t_{nuclear} = \frac{\Delta S_{nuclear}}{v_{nuclear}} = \frac{100\ km}{50\ km/h} = 2\ h$$

Portanto, o submarino nuclear chegará primeiro, uma hora antes do convencional.

Gabarito: A

---

7. **(EFOMM – 2018)**

Em um determinado instante um objeto é abandonado de uma altura H do solo e, 2,0 segundos mais tarde, outro objeto é abandonado de uma altura h, 120 metros abaixo de H. Determine o valor H, em m, sabendo que os dois objetos chegam juntos ao solo e a aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$.

a) 150

b) 175

c) 215

d) 245

e) 300

Comentários:

Para o primeiro objeto solto da altura H, temos:

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5 \cdot t^2$$

Para o segundo corpo, temos:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t - 2)^2$$

$$h = 5 \cdot (t - 2)^2$$

De acordo com o enunciado, as alturas são relacionadas como:

$$H = 120 + h$$

$$5 \cdot t^2 = 120 + 5 \cdot (t - 2)^2$$

$$5 \cdot [t^2 - (t - 2)^2] = 120$$

$$\big(t - (t - 2)\big)\big(t + (t - 2)\big) = 24$$

$$2(2t - 2) = 24$$

$$2 \cdot 2 \cdot (t - 1) = 24$$

$$\boxed{t = 7\ s}$$

Logo, a altura H é dada por:

$$H = 5 \cdot t^2 = 5 \cdot 7^2 = 245\ m$$

Gabarito: D

---

8. (EFOMM – 2016)

Uma videochamada ocorre entre dois dispositivos móveis localizados sobre a superfície da Terra, em meridianos opostos, e próximo ao equador. As informações, codificadas em sinais eletromagnéticos, trafegam em cabos de telecomunicações com velocidade muito próxima â velocidade da luz no vácuo. O tempo mínimo, em segundos, para que um desses sinais atinja o receptor e retorne ao mesmo dispositivo que o transmitiu é. aproximadamente.

Dados: raio médio da Terra.$R_{med} = \frac{1}{15} \cdot 10^8\ m$; velocidade da luz (vácuo), $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.

a) 1/30

b) 1/15

c) 2/15

d) 1/5

e) 3/10

Comentários:

Considerando a Terra como uma esfera perfeita, sem interferência no percurso da onda, para percorrer uma volta completa em torno da Terra, o tempo gasto pela onda eletromagnética é dado por:

$$\Delta t = \frac{2\pi \cdot R_{med}}{c}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{15} \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{3 \cdot 15}$$

Admitindo $\pi \approx 3$, temos:

$$\boxed{\Delta t = \frac{2}{15}\ s}$$

Gabarito: C

---

9. (EEAR – 2019)

Um atleta pratica salto ornamental, fazendo uso de uma plataforma situada a 5m do nível da água da piscina. Se o atleta saltar desta plataforma, a partir do repouso, com que velocidade se chocará com a água?

Obs.: despreze a resistência do ar e considere o módulo da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$.

a) 10 m/s.

b) 20 m/s.

c) 30 m/s.

d) 50 m/s.

Comentários:

Como não foi mencionado nada sobre o tempo do deslocamento, deve vir na sua mente a equação de Torricelli. Aplicando a equação de Torricelli para o problema, na direção vertical, podemos encontrar a intensidade com que o atleta chega a água:

$$v_{final}^2 = v_{inicial}^2 + 2 \cdot |a| \cdot \Delta S$$
$$v_{final}^2 = 0^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5$$
$$v_{final}^2 = 100 \Rightarrow \boxed{v_{final} = 10\, m/s}$$

Gabarito: A

---

10. (EEAR – 2018)

Um móvel completa 1/3 de um percurso com o módulo da sua velocidade média igual a 2 km/h e o restante com o módulo da velocidade média igual a 8 km/h. Sendo toda a trajetória retilínea, podemos afirmar que a velocidade média desse móvel durante todo o percurso, em km/h, foi igual a

a) 4

b) 5

c) 6

d) 10

Comentários:

A velocidade média ao longo de todo o percurso é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta S_{total}}{\Delta t_{total}} = \frac{\Delta S_{total}}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

Os tempos em cada trechos são dados por:

$$\Delta t_1 = \frac{\frac{\Delta S_{total}}{3}}{v_1} = \frac{\frac{\Delta S_{total}}{3}}{2} = \frac{\Delta S_{total}}{6}$$
$$\Delta t_2 = \frac{\frac{2\Delta S_{total}}{3}}{v_2} = \frac{\frac{2\Delta S_{total}}{3}}{8} = \frac{\Delta S_{total}}{12}$$

Portanto:

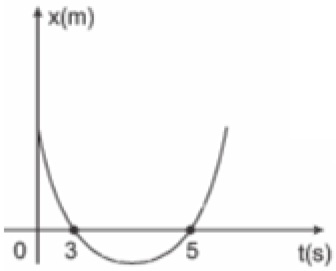
$$v_m = \frac{\Delta S_{total}}{\frac{\Delta S_{total}}{6} + \frac{\Delta S_{total}}{12}} = \frac{\Delta S_{total}}{\Delta S_{total}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)}$$
$$v_m = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{2+1}{12}} = \frac{12}{3} = 4\, km/h$$
$$\boxed{v_m = 4\, km/h}$$

Gabarito: A

---

11. (EEAR 2018)

A posição (x) de um móvel em função do tempo (t) é representado pela parábola no gráfico a seguir.



Durante todo o movimento o móvel estava sob uma aceleração constante de módulo igual a $2\ m/s^2$. A posição inicial desse móvel, em m, era

a) 0

b) 2

c) 15

d) -8

Comentários:

Como visto em teoria, sabemos que a curva apresentada na questão é uma parábola, que pode ser expressa na sua forma fatorada:

$$x(t) = p \cdot (t-3) \cdot (t-5)$$
$$x(t) = p \cdot (t^2 - 8t + 15)$$
$$x(t) = p \cdot t^2 - 8p \cdot t + p \cdot 15$$

Para uma aceleração constante, a função horária do espaço é dada por:

$$x(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + x_0$$

Fazendo comparação, temos:

$$p = \frac{a}{2} \Rightarrow p = \frac{2}{2}$$
$$\boxed{p = 1}$$

Portanto, o termo que representa a posição inicial no gráfico é dado por:

$$x_0 = p \cdot 15 = 1 \cdot 15 = 15$$

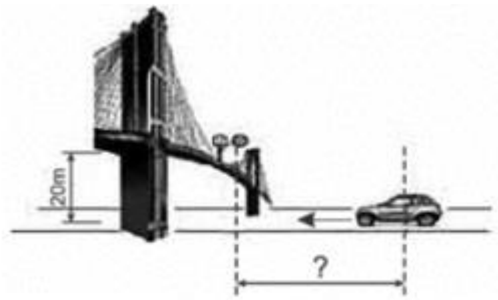
Gabarito: C

---

12. (EEAR – 2017)

Um garoto que se encontra em uma passarela de altura 20 metros, localizada sobre uma estrada, observa um veículo com teto solar aproximando-se. Sua intenção é abandonar uma bolinha de borracha para que ela caia dentro do carro, pelo teto solar. Se o carro viaja na referida estrada com velocidade constante de 72km/h, a que distância, em metros, do ponto diretamente abaixo da passarela sobre a estrada deve estar o carro no momento em que o garoto abandonar a bola.

Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$.



a) 10

b) 20

c) 30

d) 40

Comentários:

Para que a bolinha caia exatamente dentro do carro, é necessário que o tempo de queda da bolinha seja igual o tempo de deslocamento do carro. O tempo de queda da bolinha é dada por:

$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}}$$

$$\boxed{t_{queda} = 2\ s}$$

Assim, durante estes dois segundos, o carro deverá ter deslocado, com velocidade constante (em m/s):

$$\Delta S_{carro} = v_{carro} \cdot t_{queda}$$

$$\Delta S_{carro} = \frac{72}{3{,}6} \cdot 2$$

$$\boxed{\Delta S_{carro} = 40\ m}$$

Gabarito: D

---

13. (EEAR – 2016)

Ao término de uma formatura da EEAR. um terceiro sargento recém-formado. para comemorar, lançou seu quepe para cima na direção vertical, até uma altura de 9,8 metros.

Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desconsiderando o atrito com o ar. A velocidade de lançamento, em m/s. foi de

a) 8

b) 14

c) 20

d) 26

Comentários:

Aplicando a equação de Torricelli, já que não foi mencionado o tempo em questão, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

Se adotarmos o eixo de referência para cima, a aceleração da gravidade tem sentido contrário ao eixo adotado. Portanto, a equação de Torricelli, aplicada entre o ponto de lançamento e o ponto onde atinge a altura máxima, temos:

$$0 = v_0^2 + 2 \cdot (-g) \cdot \Delta h$$

$$-v_0^2 = -2 \cdot g \cdot \Delta h$$

$$v_0^2 = 2 \cdot 10 \cdot 9{,}8$$

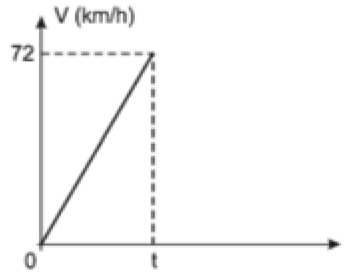
$$v_0 = \sqrt{196} = 14\ m/s$$

Gabarito: B

---

14. (Colégio Naval – 2014)

Um jovem, desejando estimar a altura do terraço onde se encontrava, deixou cair várias esferas de aço e, munido de um cronômetro, anotou o tempo de queda de todas. Após alguns cálculos, elaborou o gráfico abaixo com o tempo médio T gasto pelas esferas na queda.



Considere que. para facilitar os cálculos, o jovem desprezou a resistência do ar o adotou $g = 10\ m/s^2$. Pode-se afirmar que: o valor encontrado para o tempo médio (t) e a altura do terraço foram, respectivamente:

a) 1,0 s e 10 m

b) 1,2 s e 12 m

c) 2,0 s e 20 m

d) 2,5 s e 25 m

e) 3,0 s e 30 m

Comentários:

Para a queda livre do corpo, sua velocidade (em módulo) ao chegar ao solo é dada por:

$$v = v_0 + a_{vertical} \cdot t$$
$$v = 0 + |g| \cdot t$$
$$v = 10 \cdot t$$

Repare que a velocidade final foi dada em km/h, então:

$$v = 72\ km/h = \frac{72}{3{,}6} = 20\ m/s$$

Logo, o tempo de queda é dado por:

$$20 = 10 \cdot t$$
$$\boxed{t = 2\ s}$$

Portanto, a altura do terraço é igual a:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{|g| \cdot t^2}{2}$$
$$h = 0 + 0 \cdot t + \frac{10 \cdot 2^2}{2}$$
$$\boxed{h = 20\ m}$$

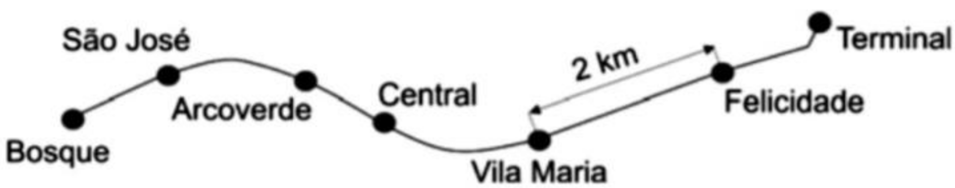
Gabarito: C

---

15. (Fuvest 2007)

Um passageiro, viajando de metrô, fez o registro de tempo entre duas estacoes e obteve os valores indicados na tabela.

	Chegada	Partida
Vila Maria	0:00 min	1:00 min
Felicidade	5:00 min	6:00 min



Supondo que a velocidade média entre duas estações consecutivas seja sempre a mesma e que o trem pare o mesmo tempo em qualquer estação da linha, de 15 km de extensão, é possível estimar que um trem, desde a partida da Estação Bosque até a chegada à Estação Terminal, leva aproximadamente:

a) 20 min.

b) 25 min.

c) 30 min.

d) 35 min.

e) 40 min.

Comentários:

Vamos calcular a velocidade média do trem, dado que, ele anda 2 km (de Vila Maria a Felicidade) em 4 min, de acordo com a tabela.

$$v_{trem} = \frac{2}{\frac{4}{60}} = 30\ km/h$$

Com isso, podemos calcular o tempo gasto para o trem sair da Bosque até a Terminal:

$$\Delta t = \frac{15}{30} = 0,5\ h = 30\ min$$

Entretanto, devemos lembrar que o trem fica 1 min parado nas estações até chegar na Terminal, isto é, ele gasta um minuto nas estações de São José até a Felicidade, ou seja, mais 5 minutos.

Então, o tempo total será de 35 minutos.

Gabarito: D

---

16. (UNEB-1998)

Um fazendeiro percorre, com seu jeep, os limites de sua fazenda, que tem o formato de um losango, com os lados aproximadamente iguais. Devido às peculiaridades do terreno, cada lado foi percorrido com uma velocidade média diferente: o primeiro a 20KM/h, o segundo a 30 Km/h, o terceiro a 40Km/h e, finalmente, o último a 60Km/h.

A velocidade média desenvolvida pelo fazendeiro para percorrer todo o perímetro da fazenda, em km/h, foi de:

a) 50

b) 42

c) 38

d) 36

e) 32

Comentários:

Como visto em teoria, se um móvel percorre distâncias iguais, com velocidades diferentes, a velocidade média é dada pela média harmônica das velocidades, logo, temos que:

$$\boldsymbol{v_m = \frac{4}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 32\ km/h}$$

Gabarito: E

17. (UFSM 2002)

Um motoqueiro obtém velocidades médias (v) e (kv) na primeira metade e no percurso todo, respectivamente, onde k é uma constante positiva. Se $kv \neq 0$, é correto afirmar que:

01. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi igual a k.

02. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi $[(1+K)v]/2$.

04. é impossível que se tenha $K = 2$.

08. o tempo gasto, no percurso todo, foi o dobro daquele gasto na primeira metade.

16. é impossível determinar a razão entre os tempos gastos na primeira e na segunda metade.

Soma:

Comentários:

Novamente, sabemos que a velocidade média do percurso todo é:

$$\boldsymbol{v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} \Rightarrow kv = \frac{2}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_2}} \Rightarrow \frac{1}{v_2} = \frac{2}{kv} - \frac{1}{v} \Rightarrow v_2 = \frac{k}{2-k}.v}$$

Assim, podemos ver de imediato que as duas primeiras afirmações são falsas, e a informação (04) é verdadeira, pois, para $\boldsymbol{k = 2}$ não podemos definir $\boldsymbol{v_2}$, ela seria tão grande quanto queiramos, quando k tende a 2.

Tempo para a primeira metade: $\Delta \boldsymbol{t_1} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{v}}$ (considere que o caminho todo tenha uma distância 2d para não ficar trabalhando com frações).

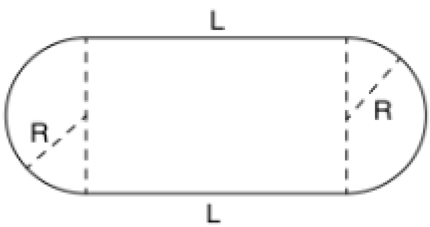
Tempo para a segunda metade: $\Delta \boldsymbol{t_2} = \frac{\boldsymbol{d}}{\frac{\boldsymbol{kv}}{\boldsymbol{2-k}}}$.

Portanto, a relação dos tempos é dada por: $\frac{\Delta \boldsymbol{t_2}}{\Delta \boldsymbol{t_1}} = \frac{\boldsymbol{2-k}}{\boldsymbol{k}}$. Logo, as duas últimas afirmações estão erradas também. Dessa forma, a única afirmativa correta é a 04. Portanto, soma igual a 04.

Gabarito: 04

18. (UEL-2010)

Um ciclista descreve uma volta completa em uma pista que se compõe de duas retas de comprimento L e duas semicircunferências de raio R conforme representado na figura a seguir.



A volta dá-se de forma que a velocidade escalar média nos trechos retos seja v e nos trechos curvos seja 2v/3. O ciclista completa a volta com uma velocidade escalar média em todo o percurso igual a 4v/5. A partir dessas informações, é correto afirmar que o raio dos semicírculos é dado pela expressão:

a) $L = \pi R$

b) $L = \frac{\pi R}{2}$

c) $L = \frac{\pi R}{3}$

d) $L = \frac{\pi R}{4}$

e) $L = \frac{3\pi R}{2}$

Comentários:

A velocidade média de uma volta é dada por:

$$v_m = \frac{2L + 2\pi R}{\frac{L}{v} + \frac{L}{v} + \frac{\pi R}{\frac{2}{3}v} + \frac{\pi R}{\frac{2}{3}v}}$$

$$\Rightarrow \frac{4v}{5} = \frac{2(L + \pi R)}{\frac{2L}{v} + \frac{3\pi R}{v}}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}L + \frac{12\pi}{5}R = 2L + 2\pi R$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}L = \frac{2\pi}{5}R \Rightarrow$$

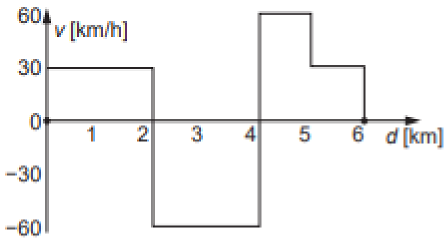
$$\therefore L = \pi R$$

Gabarito: A

---

19. (ITA 2017)

Um automóvel percorre um trecho retilíneo de uma rodovia. A figura mostra a velocidade do carro em função da distância percorrida, em km, indicada no odômetro. Sabendo que a velocidade escalar média no percurso é de 36 km/h, assinale respectivamente o tempo total dispendido e a distância entre os pontos inicial e final do percurso.



a) 9 min e 2 km

b) 10 min e 2 km

c) 15 min e 2 km

d) 15 min e 3 km

e) 20 min e 2 km

Comentários:

Analisando o gráfico, observamos que o móvel percorre 2 km para frente e 2 km para trás, retornando para a posição inicial. Depois, ele percorre dois trechos para frente, ambos de 1 km. Dessa forma, o Δs do percurso é dado por $\Delta s = s_{final} - s_{inicial} = 2\ km$.

Entretanto, a distância percorrida pelo móvel é o módulo dos deslocamentos, isto é:

$$d = |\Delta s_{0\to 2}| + |\Delta s_{2\to 4}| + |\Delta s_{4\to 6}| = 2 + 2 + 2 = 6$$

Para o percurso todo, temos que:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} h = 10\ min$$

Se contarmos o tempo para cada trecho, podemos calcular o tempo total também:

$$\Delta t = \frac{2}{30} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{30} = \frac{9}{60} h = 9\ min$$

Portanto, concluímos que o móvel esteve parado por 1 min.

Observação: a rigor, a velocidade escalar média é definida pela razão entre a variação de posição Δs e a variação do tempo Δt. Assim, teríamos que:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{36} = 3min20s$$

Gabarito: B

---

20. (ITA 1978)

Um motorista deseja perfazer a distância de 20 km com velocidade escalar média de 80 km/h. Se viajar durante os primeiros 15 minutos com velocidade de 40 km/h, com que velocidade escalar média deverá fazer o percurso restante?

a) 120 km/h

b) 160 km/h

c) É impossível estabelecer a velocidade média desejada nas circunstâncias apresentadas

d) Nula

e) Nenhuma das afirmações acima é correta

Comentários:

A distância total é de 20 km. Se ele viajar durante 15 min com velocidade de 40 km/h, ele deslocará:

$$\Delta s_1 = 40\frac{km}{h}.\frac{15}{60}h = 10\ km$$

Logo, restarão 10 km. Nestes últimos 10 km ele deverá andar a uma velocidade que compensará o fato dele andar mais lento no primeiro trecho de forma que a velocidade escalar média (v_m) dele nos 20 km seja 80 km/h. Então, vamos calcular v_m:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow 80 = \frac{20}{\frac{15}{60} + \Delta t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{60} + \Delta t_2 = \frac{20}{80} \Rightarrow \frac{1}{4} + \Delta t_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = 0$$

Perceba que para ele andar 20 km com a velocidade de 80 km/h, ele gasta 1/4 de hora, tempo que ele já gastou nos 10 km iniciais. Portanto, não é possível estabelece uma velocidade média nestas circunstâncias.

Gabarito: C

---

21. (ITA)

Um avião voando horizontalmente a 4000 m de altura numa trajetória retilínea com velocidade constante passou por um ponto A e depois por um ponto B situado a 3000 m do primeiro. Um observador no solo, parado no ponto verticalmente abaixo de B, começou a ouvir o som do avião, emitido em A, 4,00 segundos antes de ouvir o som proveniente de B. Se a velocidade do som no ar era de 320 m/s, qual era velocidade do avião?

a) 960 m/s

b) 750 m/s

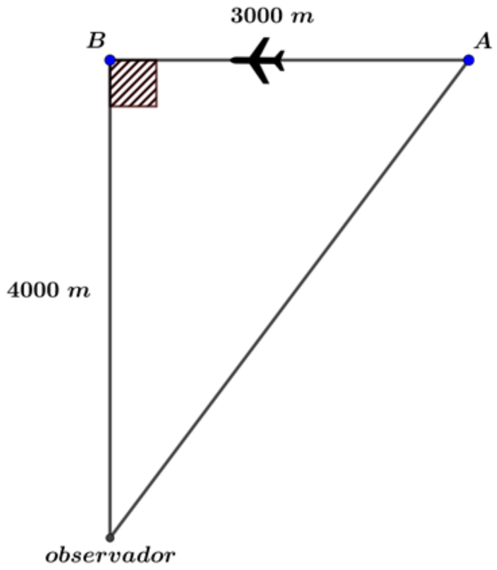
c) 390 m/s

d) 421 m/s

e) 292 m/s

Comentários:

Trata-se de um problema que exige uma interpretação visual do problema:



Pela observação do triângulo, notamos se tratar do pitagórico, cujas dimensões são 3, 4 e 5, multiplicado por 1000. Isso nos permite concluir que a distância do observador ao ponto B vale $5000\ m$.

Podemos isolar o tempo na relação da velocidade para o MRU para determinarmos o tempo para o som ir do ponto B ao observador:

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{v_{som}}$$

Substituindo-se os valores fornecidos:

$$\Delta t_{B \rightarrow observador} = \frac{5000}{320} = \frac{125}{8}\ s$$

De maneira análoga, para o som ir do ponto A até o observador, temos:

$$\Delta t_{A \rightarrow observador} = \frac{4000}{320} = \frac{100}{8}\ s$$

Como o som vem do ponto A $4\ segundos$ antes de começar a vir do ponto B, temos que o tempo para o avião percorrer a distância de A até B é:

$$\Delta t_{A \rightarrow observador} + \Delta t_{avião\ A \rightarrow B} = \Delta t_{B \rightarrow observador} + \Delta t_{percepção\ do\ som}$$

$$\frac{100}{8} + \Delta t_{avião\ A \rightarrow B} = \frac{125}{8} + 4$$

$$\Delta t_{avião\ A \rightarrow B} = \frac{125}{8} - \frac{100}{8} + 4 = \frac{57}{8}\ s$$

Por fim, a velocidade do avião no trecho AB pode ser encontrada por:

$$v_{avião} = \frac{\Delta s_{A \rightarrow B}}{\Delta t_{avião\ A \rightarrow B}} = \frac{3000}{\frac{57}{8}} = 421{,}05\ m/s$$

Gabarito: D

5. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa primeira aula de introdução à Física e de introdução à Cinemática. Na próxima aula, começaremos a estudar os tipos de movimentos mais simples na cinemática e como abordar as questões dos vestibulares.

A prova do CN é difícil e você se deparar com uma questão um pouco fora da curva, por isso é fundamental na hora da prova reconhecer esse tipo de exercício e ter humildade para pular esse tipo de questão.

Tente fazer todas as questões da lista sem olhar o gabarito. O caminho para passar no CN difícil, por isso é muito importante fazer as questões e não abandonar nenhuma dúvida.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

@proftoniburgatto

6. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Departamento de Física do ITA. Algarismos significativos. Disponível em: <http://www.fis.ita.br/labfis45/erros/errostextos/erros1.htm>

[5] IM-UFRJ. Aula 8 Produto Escalar. Disponível em <http://www.im.ufrj.br/nuno/aula8.pdf>

[6] Camargo, Ivan de. Boulos, Paulo. Geometria analítica: Um tratamento vetorial. 3. Ed. Person Education, 2004, 560p.

7. Versão de aula

Versão da aula	Data da atualização
1.0	29/11/2019