o anglo resolve

É trabalho pioneiro.
Prestação de serviços com tradição de confiabilidade.
Construtivo, procura colaborar com as Bancas Examinadoras em sua tarefa de não cometer injustiças.
Didático, mais do que um simples gabarito, auxilia o estudante no processo de aprendizagem, graças a seu formato: reprodução de cada questão, seguida da resolução elaborada pelos professores do Anglo.
No final, um comentário sobre as disciplinas.

a prova de Matemática do ITA dezembro de 2005

O Instituto Tecnológico de Aeronáutica — ITA — é uma escola de engenharia mundialmente conhecida.
Com o mesmo zelo com que trata seus excelentes cursos (Engenharia Aeronáutica, Engenharia Mecânica Aeronáutica, Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica, Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação), trata seu vestibular, que é realizado em 4 dias:

1º dia: FÍSICA, com 20 questões de múltipla escolha e 10 questões dissertativas.

2º dia: PORTUGUÊS, com 20 questões de múltipla escolha, 5 questões dissertativas e uma redação, e INGLÊS, com 20 questões de múltipla escolha.

3º dia: MATEMÁTICA, com 20 questões de múltipla escolha e 10 questões dissertativas.

4º dia: QUÍMICA, com 20 questões de múltipla escolha e 10 questões dissertativas.

A prova de Inglês é eliminatória e não entra na classificação final.
Em Matemática, Física e Química, as questões de múltipla escolha equivalem a 50% do valor da prova, e a parte dissertativa, aos outros 50%.
Na prova de Português, as questões de múltipla escolha equivalem a 40% do valor da prova; as dissertativas, a 20% e a Redação, a 40%.
Só é corrigida a parte dissertativa dos melhores classificados nas questões de múltipla escolha.
Serão considerados aprovados nos exames de escolaridade os candidatos que obtiverem nota igual ou superior a 40 (na escala de 0 a 100) e média igual ou superior a 50 (na escala de 0 a 100).
A nota final é a média aritmética das provas de Matemática, Física, Química e Português.

Código: 83580306

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

ℂ: conjunto dos números complexos
ℚ: conjunto dos números racionais
ℝ: conjunto dos números reais
ℤ: conjunto dos números inteiros
ℕ: {0, 1, 2, 3, …}
ℕ = {1, 2, 3, …}*
∅: conjunto vazio
$A \setminus B = \{x \in A: x \notin B\}$
detA: determinante da matriz A
A^{-1}: inversa da matriz A
$\binom{a}{b}$: combinação de a elementos, b a b, onde a e b são inteiros maiores ou iguais a zero
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$\mathcal{P}(X)$: conjunto de todos os subconjuntos de X
n(X): número de elementos do conjunto X (X finito)

i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re z: parte real de $z \in \mathbb{C}$
Im z: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leqslant x \leqslant b\}$
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leqslant x < b\}$
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leqslant b\}$

Obs.: São cartesianos ortogonais os sistemas de coordenadas considerados

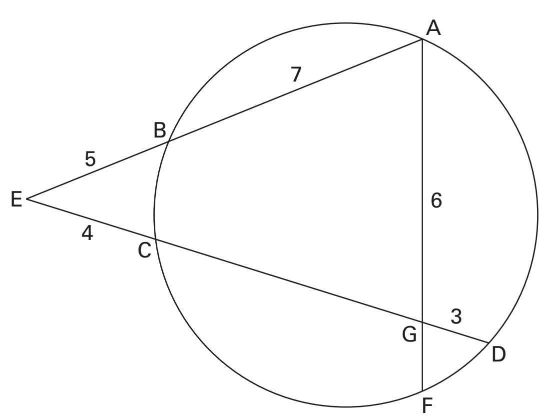
Questão 1

Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolução

Do enunciado, temos a figura:



Da potência do ponto E em relação à circunferência, temos:

$$EC \cdot ED = EB \cdot EA \quad \therefore \quad 4 \cdot ED = 5 \cdot 12 \quad \therefore \quad ED = 15$$

Sendo EC + CG + GD = ED, temos que 4 + CG + 3 = 15, ou seja, CG = 8.

Da potência do ponto G em relação à circunferência, temos:

$$AG \cdot GF = CG \cdot GD \quad \therefore \quad 6 \cdot GF = 8 \cdot 3 \quad \therefore \quad GF = 4$$

Resposta: D

Questão 2

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geqslant 1$. Seja S um subconjunto de $\mathcal{P}(U)$ com a seguinte propriedade:

$$\text{Se } A, B \in S, \text{ então } A \subset B \text{ ou } B \subset A.$$

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

A) 2^{n-1}

B) $\frac{n}{2}$, *se n for par, e* $\frac{(n+1)}{2}$ *se n for ímpar*

C) $n + 1$

D) $2^n - 1$

E) $2^{n-1} + 1$

Resolução

Sejam A e B, com $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, elementos distintos de S. Como $S \subset \mathcal{P}(U)$, podemos concluir que $A \in \mathcal{P}(U)$ e $B \in P(U)$.

Suponhamos que $n(A) = n(B)$. Como $A \neq B$, existe a, $a \in A$ e existe b, $b \in A$, tais que $a \notin B$ e $b \notin A$ e, portanto, $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

- Logo, o conjunto S não pode ter, como elementos, dois conjuntos A e B, com $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, com $n(A) = n(B)$. (1)
- Seja $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

  Se $A \in S$, então $A \in \mathcal{P}(U)$ e, portanto, $A \subset U$. Logo, $0 \leqslant n(A) \leqslant n$. (2)
- De (1) e (2), podemos concluir que $n(S) \leqslant n + 1$. (3)
- Consideremos o conjunto

  $S_1 = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}$.

  Temos que $n(S_1) = n + 1$. (4)
- De (3) e (4), podemos concluir que o número máximo de elementos que S pode ter é n + 1.

Resposta: C

Questão 3

Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B\backslash A)$, $n(A\backslash B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B\backslash A)$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A\backslash B)$ é igual a

A) 12
B) 17
C) 20
D) 22
E) 24

Resolução

Como $n(B\backslash A)$, $n(A\backslash B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão r e $n(B\backslash A) = 4$, temos $n(A\backslash B) = 4 + r$ e $n(A \cap B) = 4 + 2r$.

Como n(B\A) + n(A\B) + n(A ∩ B) = n(A ∪ B) e n(A ∪ B) = 64 – r, temos:

$$(4) + (4 + r) + (4 + 2r) = 64 - r$$
$$4r = 64 - 12$$
$$r = 13$$

Comon(A\B) = 4 + r, temos n(A\B) = 17.

Resposta: B

Questão 4

Seja f: IR → IR definida por $f(x) = \sqrt{77}\ \mathrm{sen}\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ *e seja B o conjunto dado por B = {x ∈ IR: f(x) = 0}. Se m é o maior elemento de B ∩ (–∞, 0) e n é o menor elemento de B ∩ (0, +∞), então m + n é igual a*

A) $\frac{2\pi}{15}$

B) $\frac{\pi}{15}$

C) $-\frac{\pi}{30}$

D) $-\frac{\pi}{15}$

E) $-\frac{2\pi}{15}$

Resolução

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{77} \cdot \mathrm{sen}\left[5 \cdot \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$
$$\mathrm{sen}\left[5 \cdot \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$
$$5 \cdot \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\therefore x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Logo, $B = \left\{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$

- $k = 0 \to x = -\frac{\pi}{6}$
- $k = 1 \to x = \frac{\pi}{30}$

Portanto, $m = -\frac{\pi}{6}$, $n = \frac{\pi}{30}$ e $m + n = -\frac{2\pi}{15}$.

Resposta: E

Questão 5

Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, como $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$
B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C) $(-1, 1)$
D) $(0, \infty)$
E) $(-\infty, +\infty)$

Resolução

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m$$

Com $a^x = t$, temos:

$$\frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = m$$

$$t - \frac{1}{t} = mt + \frac{m}{t}$$

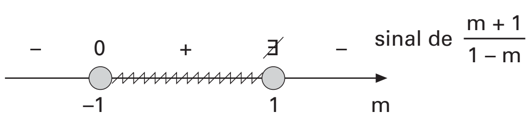
$$t^2 - 1 = mt^2 + m$$

$$(1 - m)t^2 = m + 1 \qquad (*)$$

• Com $m = 1$, temos $0 \cdot t^2 = 2$, equação que não admite solução.

• Com $m \neq 1$, temos de (*): $t^2 = \dfrac{m+1}{1-m}$.

Essa equação admite solução positiva se, e somente se, $\dfrac{m+1}{1-m} > 0$.



O conjunto de todos os valores de m que satisfazem essa condição é o intervalo aberto $(-1, 1)$.

Resposta: C

Questão 6

Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

A) $4^4 \cdot 30$
B) $4^3 \cdot 60$
C) $5^3 \cdot 60$
D) $\binom{7}{3} \cdot 4^3$
E) $\binom{10}{7}$

Resolução

O candidato tem uma única opção para assinalar a alternativa correta (acertar a questão) e 4 opções para assinalar uma incorreta (errar a questão). Assim:

$$\underbrace{\binom{10}{7}}_{\substack{\text{acertar quaisquer}\\ \text{7 questões}}} \overset{\text{e}}{\cdot} \underbrace{4^3}_{\substack{\text{errar as}\\ \text{outras 3}}} = 120 \cdot 4^3 = 30 \cdot 4^4$$

Resposta: A

Questão 7

Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 (4^k \sqrt{2})$:

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita.
II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3
III. S = 3451
IV. $S \leqslant 3434 + \log_8 \sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

A) I e III
B) II e III
C) II e IV
D) II
E) III

Resolução

Note que:

$$\log_8 (4^k \cdot \sqrt{2}) = \log_{2^3} (2^{2k + \frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \log_2 2$$

$$\therefore \quad \log_8 (4^k \cdot \sqrt{2}) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}k$$

Assim:

$$S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 (4^k \cdot \sqrt{2})$$

é a soma dos 102 primeiros elementos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\frac{1}{6}$ e cuja razão é $\frac{2}{3}$.

Desse modo, a afirmação (I) é falsa e a (II) é verdadeira.

Como o 102º termo dessa P.A. é

$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot 101 = \frac{405}{6}$, S é dada por:

$$S = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{405}{6}\right) \cdot 102}{2} \quad \therefore \quad S = 3451.$$

A afirmação (III) é verdadeira.

Temos ainda que S = 3434 + 17

$$\therefore\ S > 3434 + \frac{1}{6}$$

$$S > 3434 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 2$$

$$S > 3434 + \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}}$$

$$S > 3434 + \log_8 \sqrt{2}$$

Assim, a afirmação (IV) é falsa.

Logo, apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Resposta: B

Questão 8

Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

A) 1
B) 2z
C) 2Re z
D) 2Im z
E) $2|z|^2$

Resolução

- De $|f(z)| = |z|$, temos $|f(1)| = |1|$ e, portanto, $|f(1)| = 1$.
- De $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, temos:

$$|f(z) - f(1)|^2 = |z - 1|^2$$

$$[f(z) - f(1)] \cdot \overline{[f(z) - f(1)]} = (z - 1)\overline{(z - 1)}$$

$$[f(z) - f(1)] \cdot [\overline{f(z)} - \overline{f(1)}] = (z - 1)(\bar{z} - \bar{1})$$

$$[f(z) - f(1)]\,[\overline{f(z)} - \overline{f(1)}] = (z - 1)(\bar{z} - 1)$$

$$f(z) \cdot \overline{f(z)} - f(z) \cdot \overline{f(1)} - f(1) \cdot \overline{f(z)} + f(1) \cdot \overline{f(1)} = z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1$$

$$|f(z)|^2 - [\overline{f(1)} \cdot f(z) + f(1) \cdot \overline{f(z)}] + |f(1)|^2 = |z|^2 - z - \bar{z} + 1$$

$$|z|^2 - [\overline{f(1)} \cdot f(z) + f(1) \cdot \overline{f(z)}] + 1 = |z|^2 - z - \bar{z} + 1$$

$$\overline{f(1)} \cdot f(z) + f(1) \cdot \overline{f(z)} = z + \bar{z}$$

Sendo z = a + bi, com a e b reais, temos que $z + \bar{z} = 2a$, isto é, $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$.

Portanto, $\overline{f(1)} \cdot f(z) + f(1) \cdot \overline{f(z)} = 2\,\mathrm{Re}\,z$.

Resposta: C

Questão 9

O conjunto solução de $(tg^2x - 1)(1 - cotg^2x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é

A) $\{\pi/3 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$
B) $\{\pi/4 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$
C) $\{\pi/6 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$
D) $\{\pi/8 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$
E) $\{\pi/12 + k\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$

Resolução

$$(tg^2x - 1)(1 - cotg^2x) = 4$$

$$(tg^2x - 1)\left(1 - \frac{1}{tg^2x}\right) = 4$$

$$(tg^2x - 1)^2 = 4tg^2x$$

$$\left(\frac{2tgx}{1 - tg^2x}\right)^2 = 1$$

$$tg^2 2x = 1 \quad \therefore \quad tg\,2x = \pm 1$$

Assim:

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$$

O conjunto solução é $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Resposta: D

Questão 10

Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\,sen(n\alpha)$, então, é verdade que

A) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π
B) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π
C) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$
D) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2
E) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

Resolução

Sendo $\alpha \in [0; 2\pi)$ o argumento de $z \neq 0$, temos:

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = i\,sen(n\alpha)$$

$$\left(\frac{|z| \cdot (\cos\alpha + i\,sen\alpha)}{|z|}\right)^n = i\,sen(n\alpha)$$

$$\cos(n\alpha) + i\,sen(n\alpha) = i\,sen(n\alpha)$$

$$\therefore \quad \cos(n\alpha) = 0.$$

Logo:

$$n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$2n\alpha = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$2n\alpha - \pi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π.

Resposta: B

Questão 11

A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$ *é*

A) $a - b \neq 2$
B) $a + b = 10$
C) $4a - 6b = 0$
D) $a/b = 3/2$
E) $a \cdot b = 24$

Resolução

Para que o sistema linear dado seja incompatível é necessário que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \;\therefore\; a - 6 = 0 \;\therefore\; a = 6$

Substituindo a = 6 no sistema linear dado e escalonando:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 & \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\ x + 2y + 5z = 1 \xleftarrow{+} \\ 2x + 2y + 6z = b \xleftarrow{+} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ \quad y + 2z = -1 \\ \qquad 0 = b - 4 \end{cases}$$

Para que o sistema seja incompatível:

$b - 4 \neq 0$

$b \neq 4$

Com a = 6 e $b \neq 4$, temos:

$b \neq 4$

$-b \neq -4$

$a - b \neq 6 - 4$

$a - b \neq 2$

Resposta: A

Questão 12

Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$*, então o valor do* $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ *é igual a*

A) 0
B) 4
C) 8
D) 12
E) 16

Resolução

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\cdot(2)\cdot(3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0$$

$$= (-2)\cdot(2)\cdot(3)\cdot(-1)$$

$$= 12$$

Resposta: D

Questão 13

Seja p *um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite 1 – i como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de* p *são, respectivamente, 10 e –40. Sendo afirmado que três raízes de* p *são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são*

A) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{193}}{6}, 3, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{193}}{6}$

B) $2 - 4\sqrt{13}, 2, 2 + 4\sqrt{13}$

C) $-4, 2, 8$

D) $-2, 3, 8$

E) $-1, 2, 5$

Resolução

Podemos representar as três raízes reais por a – r, r e a + r, em que a e r são números reais. (1)
Como os coeficientes do polinômio são reais e 1 – i é raiz dupla, podemos afirmar que 1 + i também é raiz dupla.
Como a soma dessas raízes é 10, temos:

$$(a - r) + (a) + (a + r) + (1 - i) + (1 + i) + (1 - i) + (1 + i) = 10$$
$$3a + 4 = 10 \quad \therefore \quad a = 2. \qquad (2)$$

Como o produto dessas raízes é –40, temos:

$$(2 - r)(2)(2 + r)(1 - i)(1 + i)(1 - i)(1 + i) = -40$$

Como $(1 - i)(1 + i) = 2$, temos:

$$(2 - r)(2)(2 + r) \cdot 2 \cdot 2 = -40$$
$$4 - r^2 = -5$$
$$r^2 = 9 \quad \therefore \quad r = \pm 3 \qquad (3)$$

De (1), (2) e (3), podemos concluir que as raízes reais são os números –1, 2 e 5.

Resposta: E

Questão 14

Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ *podemos afirmar que*

A) *x = 2 não é raiz de p*

B) *p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais*

C) *p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira*

D) *p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras*

E) *p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais*

Resolução

	1	0	–5	4	–3	–2
2	1	2	–1	2	1	0

$\therefore \quad p(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$

- Temos p(2) = 0 e, portanto, 2 é raiz de p. (1)

  De $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$, temos:

$$x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = -3$$

- De $x + \frac{1}{x} = 1$, temos $x^2 - x + 1 = 0$.

  Essa equação não admite raízes reais, pois seu discriminante é negativo ($\Delta = -3$).

- De $x + \frac{1}{x} = -3$, temos $x^2 + 3x + 1 = 0$ e, portanto, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

  Logo, p admite somente 3 raízes reais, sendo uma inteira e duas irracionais.

Resposta: E

Questão 15

Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a - b)x - (a + b)y = 1 \\ (a + b)x + (a - b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se a = b = 0

II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos

III. $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

A) I

B) II

C) III

D) I e II

E) II e III

Resolução

O determinante do sistema

$$\begin{cases} (a - b)x - (a + b)y = 1 \\ (a + b)x + (a - b)y = 1 \end{cases} \quad \text{é:}$$

$$D = \begin{vmatrix} (a-b) & -(a+b) \\ (a+b) & (a-b) \end{vmatrix} = 2(a^2 + b^2)$$

- Se D = 0, ou seja, $2 \cdot (a^2 + b^2) = 0$, então a = 0 e b = 0, pois a e b são reais.

  Nessas condições o sistema será dado por:

  $$\begin{cases} 0x + 0y = 1 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases} \quad \text{(O sistema não admite solução.)}$$

  Logo, a afirmação (I) é falsa.

- Se $D \neq 0$, então $a^2 + b^2 \neq 0$, ou seja, a e b não são simultaneamente nulos.
  Nessas condições o sistema é possível e determinado, e x e y serão dados por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & (a-b) \end{vmatrix}}{2 \cdot (a^2 + b^2)} \quad \therefore \quad x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (a-b) & 1 \\ (a+b) & 1 \end{vmatrix}}{2 \cdot (a^2 + b^2)} \quad \therefore \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

  Assim:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2 \quad \therefore$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}.$$

Logo, as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Resposta: E

Questão 16

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a + 1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio p(x) só admite raízes inteiras, é

A) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$
B) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$
C) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$
D) $\{n(n + 1), n \in \mathbb{N}\}$
E) $\mathbb{N}$

Resolução

	1	0	−a −1	a
1	1	1	−a	0

$p(x) = (x - 1)(x^2 + x - a)$

- Para todo a, $a \in \mathbb{Z}$, 1 é raiz.
- Consideremos a expressão $x^2 + x - a$.
  Seu discriminante é $\Delta = 1 + 4a$.

  Para que a equação $x^2 + x - a = 0$ admita raízes inteiras, devemos ter $\Delta \geqslant 0$, ou seja, $a \geqslant \frac{-1}{4}$.

  Como $a \in \mathbb{Z}$, devemos ter $a \geqslant 0$ e, portanto, $a \in \mathbb{N}$.

  Ainda, sendo r uma raiz inteira da equação $x^2 + x - a = 0$, temos:

  $r^2 + r - a = 0$

  $\therefore \quad a = r^2 + r$

  $\therefore \quad a = r(r + 1)$
- Como a é um número natural, podemos afirmar que ele é da forma $n(n + 1)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Resposta: D

Questão 17

Numa circunferência C_1 de raio $r_1 = 3\,cm$ está inscrito um hexágono regular H_1; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm^2) é a área do hexágono H_n, então $\Sigma_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm^2) é igual a

A) $54\sqrt{2}$

B) $54\sqrt{3}$

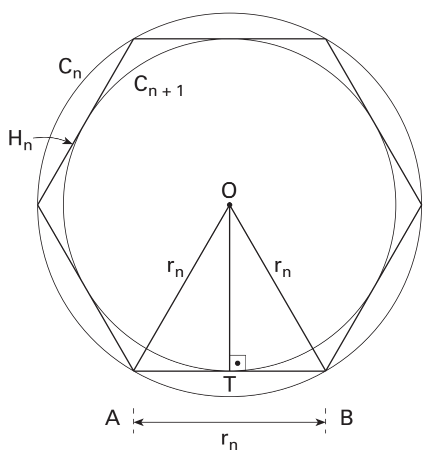
C) $36\left(1+\sqrt{3}\right)$

D) $\dfrac{27}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$

E) $30\left(2+\sqrt{3}\right)$

Resolução

Do enunciado, temos a figura, em que r_n é a medida, em cm, do raio da circunferência C_n:



O: centro da circunferência C_n
$\overline{OT}$: raio da circunferência C_{n+1}

$\overline{OT}$ é a altura do triângulo eqüilátero OAB, de lado r_n. Logo, $OT = r_{n+1} = \dfrac{r_n \cdot \sqrt{3}}{2}$, ou seja, $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Como os hexágonos regulares H_{n+1} e H_n são semelhantes, temos:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2 \quad \therefore \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad A_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot A_n$$

Logo, a seqüência (A_1, ..., A_n, ...) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{3}{4}$. Como $A_1 = 6 \cdot \dfrac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, ou seja,

$A_1 = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\dfrac{27\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{3}{4}} \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 54\sqrt{3}\,cm^2$$

Resposta: B

Questão 18

Sejam a reta s: $12x - 5y + 7 = 0$ e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

A) $\left(-\frac{91}{12}, -\frac{81}{12}\right)$

B) $\left(-\frac{81}{12}, -\frac{74}{12}\right)$

C) $\left(-\frac{74}{12}, -\frac{30}{12}\right)$

D) $\left(\frac{30}{12}, \frac{74}{12}\right)$

E) $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$

Resolução

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$$
$$x^2 + 4x + \underline{4} + y^2 + 2y + \underline{1} = 11 + \underline{4} + \underline{1}$$
$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

Assim, a circunferência C tem centro O(–2, –1) e raio 4.
Temos que:

$$(s)\quad 12x - 5y + 7 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{12}{5}x + \frac{7}{5}$$

O coeficiente angular da reta s é $\frac{12}{5}$. Como $p \perp s$, então o coeficiente angular da reta p é $\frac{-5}{12}$.

Sendo q a ordenada do ponto onde a reta p corta o eixo Oy, uma equação de p é $y = -\frac{5}{12}x + q$, ou seja,

$5x + 12y - 12q = 0$.

Como p é secante a C, a distância do centro O(–2, –1) até a reta p é menor do que o raio. Assim,

$$\frac{|5 \cdot (-2) + 12 \cdot (-1) - 12q|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} < 4$$
$$|-22 - 12q| < 52$$
$$-\frac{74}{12} < q < \frac{30}{12}$$

Portanto, não é correto afirmar que a ordenada do ponto onde a reta p corta o eixo Oy pertence a qualquer um dos intervalos apresentados.

Sem resposta

Questão 19

Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos A(0, 9) e B(x, 3), $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

A) $22\sqrt{10}$

B) $18\sqrt{10}$

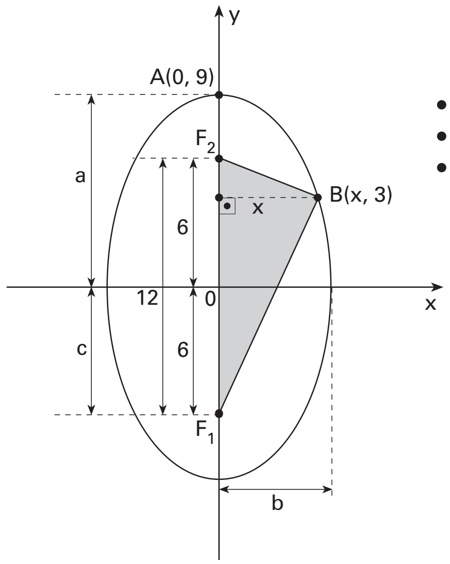
C) $15\sqrt{10}$

D) $12\sqrt{10}$

E) $6\sqrt{10}$

Resolução

Do enunciado, temos a figura:



- semi-eixo maior: a = 9
- semi-eixo menor: b
- semidistância focal: c = 6

Temos que: $b^2 + c^2 = a^2$

$b^2 + 6^2 = 9^2 \quad \therefore \quad b^2 = 45$

Assim, uma equação da elipse é $\dfrac{y^2}{81} + \dfrac{x^2}{45} = 1.$

Como B(x, 3) pertence à elipse, temos:

$$\frac{3^2}{81} + \frac{x^2}{45} = 1 \quad \therefore \quad x = 2\sqrt{10}$$

Logo, a área do triângulo BF_1F_2 é igual a $\dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{10}$, ou seja, $12\sqrt{10}$.

Resposta: D

Questão 20

Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2, é

A) $81\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B) $81\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

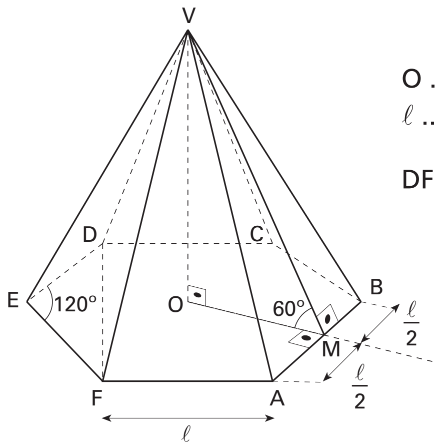
C) $\dfrac{81}{2}$

D) $27\sqrt{3}$

E) $27\sqrt{2}$

Resolução

Do enunciado temos a figura, cotada em cm, em que está representada a pirâmide regular hexagonal VABCDEF, de vértice V:



O ... centro do hexágono regular ABCDEF;
ℓ ... medida de cada lado do hexágono regular ABCDEF;
$DF = 3\sqrt{3}$.

Aplicando o teorema dos co-senos ao triângulo DEF, temos:

$$(DF)^2 = (DE)^2 + (EF)^2 - 2 \cdot DE \cdot EF \cdot \cos 120^\circ$$

$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2 \cdot \ell \cdot \ell \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad \ell = 3$$

Sendo $\overline{OM}$ uma altura do triângulo eqüilátero OAB, temos que $OM = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

No triângulo retângulo VOM, temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{VM} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{VM} \quad \therefore \quad VM = 3\sqrt{3}$$

Logo, a área S pedida é tal que:

$$S = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad S = \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: A

Questão 21

Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_m\} \subset \mathcal{P}(A)$ é uma **partição de** *A se as seguintes condições são satisfeitas:*

I. $A_i \neq \varnothing$, $i = 1, ..., m$

II. $A_i \cap A_j = \varnothing$, *se* $i \neq j$, *para* $i,j = 1, ..., m$

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$

Dizemos ainda que $\mathcal{F}$ é uma partição **de ordem** *k se $n(A_i) = k$, $i = 1, ..., m$.*

Supondo que $n(A) = 8$, determine:

a) As ordens possíveis para uma partição de A

b) O número de partições de A que têm ordem 2

Resolução

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, com $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant 8$ e $1 \leqslant j \leqslant 8$.

a) Consideremos os seguintes exemplos de partições de A:

- de ordem 1: $f = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$, com $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$, ..., $A_8 = \{a_8\}$.
- de ordem 2: $f = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, com $A_1 = \{a_1, a_2\}$, $A_2 = \{a_3, a_4\}$, $A_3 = \{a_5, a_6\}$ e $A_4 = \{a_7, a_8\}$.
- de ordem 4: $f = \{A_1, A_2\}$, com $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $A_2 = \{a_5, a_6, a_7, a_8\}$.
- de ordem 8: $f = \{A\}$.

Sedo $f = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ uma partição de ordem k, temos que $k \cdot m = 8$.

Logo, k deve ser um divisor natural de 8 e, portanto, k = 1, ou k = 2, ou k = 4, ou k = 8.

Resposta: 1, 2, 4 ou 8

b) Uma partição de A de ordem 2 é da forma $f = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, em que cada um dos conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4 possui exatamente dois dos oito elementos de A.

Nessas condições, o número de maneiras de definir a partição f é dado por:

$$\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{4!} = 105$$

Resposta: 105

Questão 22

Seja $f: [0,1) \to IR$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$.

Seja $g: \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to IR$ *dada por* $g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2), & 0 \leqslant x < 1/2 \end{cases}$, *com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.*

Resolução

- Para $-\frac{1}{2} < x < 0$, temos $0 < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ e $g(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad g(x) = 2x + 1.$

- Para $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, temos $\frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} < 1$ e $g(x) = 1 - \left[2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) - 1\right] \quad \therefore \quad g(x) = -2x + 1.$

- Com $0 \leqslant t < \frac{1}{2}$, temos $-\frac{1}{2} < -t \leqslant 0$, $g(-t) = 2 \cdot (-t) + 1$ e, portanto, $g(-t) = g(t)$.

Logo, g(x) é par.

Resposta: par

Questão 23

Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

Resolução

Considere o binômio $[(1 + x) + x^2]^9$, cujo termo geral T é dado por:

I) $T = \binom{9}{p} \cdot (1 + x)^{9-p} \cdot (x^2)^p$, com $p \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant 9$

Considere o binômio $(1 + x)^{9-p}$ cujo termo geral T' é dado por:

II) $T' = \binom{9-p}{q} \cdot 1^{9-p-q} \cdot x^q = \binom{9-p}{q} \cdot x^q$, com $q \in \mathbb{N}$ e $q \leqslant 9 - p$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$T = \binom{9}{p} \cdot \binom{9-p}{q} \cdot x^q \cdot x^{2p}$$

III) $T = \binom{9}{p} \cdot \binom{9-p}{q} \cdot x^{2p+q}$

Assim, devemos ter:

$x^{2p+q} = x^4$, ou seja, $2p + q = 4$

Portanto,

$q = 0$ e $p = 2$ ou $q = 2$ e $p = 1$ ou $q = 4$ e $p = 0$.

Substituindo os valores de q e p em III:

$$T = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{0} \cdot x^4 + \binom{9}{1} \cdot \binom{8}{2} \cdot x^4 + \binom{9}{0} \cdot \binom{9}{4} \cdot x^4$$

$T = 36x^4 + 252x^4 + 126x^4$

$\therefore\ T = 414x^4$

Logo, o coeficiente pedido é 414.

Resposta: 414

Questão 24

Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos x}(4\operatorname{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

Resolução

Considerando as condições:

- $\cos x > 0$ e $\cos x \neq 1$ (I)
- $4\operatorname{sen}^2 x - 1 > 0 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$ (II)
- $4 - \sec^2 x > 0 \quad \therefore \quad 4 - \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \therefore$

$$\frac{4\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} > 0 \quad \therefore \quad \cos x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x > \frac{1}{2} \quad \text{(III)}$$

Como $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, de (I), (II) e (III) tem-se: $-\frac{\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ (IV)

Nessas condições, temos: $\log_{\cos x}(4\text{sen}^2 x - 1) > \log_{\cos x}\cos^2 x + \log_{\cos x}\left(4 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$$\log_{\cos x}(4\text{sen}^2 x - 1) > \log_{\cos x}(4\cos^2 x - 1)$$

Como $0 < \cos x < 1$, temos: $4\text{sen}^2 x - 1 < 4\cos^2 x - 1 \quad \therefore \quad \text{tg}^2 x < 1$

$$\therefore \quad -1 < \text{tg} x < 1 \qquad \text{(V)}$$

De IV e V, temos:

$-\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$

Resposta: $-\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$

Questão 25

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:
"Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

Resolução

Sejam $x_1; x_2; x_3 \in \mathbb{R}$ as raízes de $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com $a \in \mathbb{Q}$, tais que $(x_1 - x_2) \in \mathbb{Q}$, isto é, $x_1 - x_2 = d$, $d \in \mathbb{Q}$.
Considere a afirmação:
"Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais".
Existem três possibilidades:

1) Se $x_1 \in \mathbb{Q}$, então $x_2 = -d - x_1$, ou seja:

$$x_2 \in \mathbb{Q}$$

Das relações de Girard:

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$

$x_3 = -a - x_1 - x_2 \quad \therefore \quad x_3 \in \mathbb{Q}$

Nesse caso, a afirmação é verdadeira.

2) Se $x_2 \in \mathbb{Q}$, então $x_1 = d + x_2$, ou seja:

$x_1 \in \mathbb{Q}$

Das relações de Girard:

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$

$x_3 = -a - x_1 - x_2 \quad \therefore \quad x_3 \in \mathbb{Q}$

Nesse caso, a afirmação também é verdadeira.

3) Se $x_3 \in \mathbb{Q}$, então, das relações de Girard:

$x_1 + x_2 = -a - x_3 \quad \therefore \quad (x_1 + x_2) \in \mathbb{Q}$

Assim: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a - x_3 \\ x_1 - x_2 = d \end{cases} \quad \therefore$

$x_1 = \frac{-a - x_3 + d}{2} \quad \therefore \quad x_1 \in \mathbb{Q}$, e

$x_2 = \frac{-a - x_3 - d}{2} \quad \therefore \quad x_2 \in \mathbb{Q}$,

Nessas condições, a afirmação também é verdadeira.

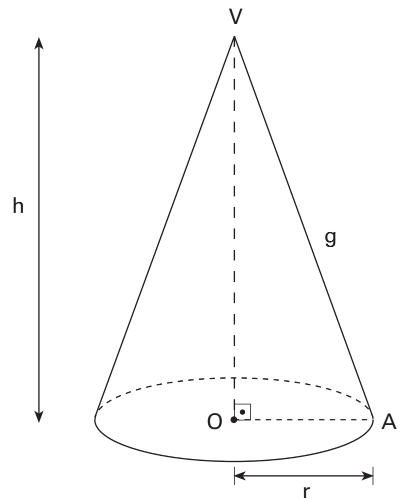
De (1), (2) e (3), a afirmação sempre é verdadeira.

Questão 26

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

Resolução

Do enunciado temos a figura, cotada em m, em que O é o centro do círculo de raio medindo r:



r = OA;
h… medida da altura do cone;
g… medida da geratriz do cone;
$r > 0$, $h > 0$ e $g > 0$.

Como r, h e g formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros, temos que $r = h - 2$ e $g = h + 2$.
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo VOA, temos:

$r^2 + h^2 = g^2 \quad \therefore \quad (h-2)^2 + h^2 = (h+2)^2 \quad \therefore \quad h = 8,\ r = 6 \text{ e } g = 10.$

A área S pedida é tal que:

$S = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 \quad \therefore \quad S = 96\pi$

Resposta: 96π

Questão 27

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

Resolução

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \det(A+B) = 99$$

Como $C = (A + B)^{-1}$, o elemento c_{34} será dado por:

$$c_{34} = \frac{1}{\det(A+B)} \cdot \mathrm{Cof}_{43}(A+B)$$

$$c_{34} = \frac{1}{99}(-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c_{34} = \frac{1}{99}(-1)(12+6)$$

$$c_{34} = -\frac{2}{11}$$

Resposta: $\frac{-2}{11}$

Questão 28

Seja (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de a + r.

Resolução

Como as somas dadas são limitadas, podemos afirmar que (a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...) é uma progressão geométrica convergente.
Como a razão r é positiva, temos:

$$0 < r < 1$$

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2k} + \ldots = 4 \\ a_3 + a_6 + a_9 + \ldots + a_{3k} + \ldots = \dfrac{16}{13}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Com $a_1 = a$, $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} ar + ar^3 + ar^5 + \ldots = 4 & (1) \\ ar^2 + ar^5 + ar^8 + \ldots = \dfrac{16}{3} & (2) \end{cases}$$

Note que (1) representa a soma dos elementos de uma P.G. de primeiro termo $\underline{ar}$ e razão r^2, e (2), a soma de outra P.G. de primeiro termo $\underline{ar^2}$ e razão r^3.
Nessas condições, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{ar}{1-r^2} = 4 & (3) \\ \dfrac{ar^2}{1-r^3} = \dfrac{16}{13} & (4) \end{cases}$$

Dividindo-se (4) por (3), vem:

$$\frac{\dfrac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}}{\dfrac{ar}{(1-r)(1+r)}} = \frac{\dfrac{16}{13}}{4}$$

$$\frac{r\,(1+r)}{1+r+r^2}=\frac{4}{13}$$

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{3}\quad \text{ou}\quad r=-\frac{4}{3}\quad \text{(não convém)}$$

Substituindo em (3), temos:

$$\frac{a\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=4\quad\therefore\quad a=\frac{32}{3}$$

Assim: $a+r=\frac{32}{3}+\frac{1}{3}$, ou seja, $a + r = 11$.

Resposta: 11

Questão 29

Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Resolução

$9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$

$9y^2 - 144y - 16x^2 + 224x = 352$

$9(y^2 - 16y + 64) - 16(x^2 - 14x + 49) = 352 + 9 \cdot 64 - 16 \cdot 49$

$9(y - 8)^2 - 16(x - 7)^2 = 144$

$$\frac{9(y-8)^2}{144}-\frac{16(x-7)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(y-8)^2}{16}-\frac{(x-7)^2}{9}=1$$

Assim, $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$. Temos que: $c^2 = a^2 + b^2 \quad\therefore\quad c^2 = 16 + 9 \quad\therefore\quad c = 5$

Portanto, a distância focal é $2 \cdot 5$, ou seja, 10.

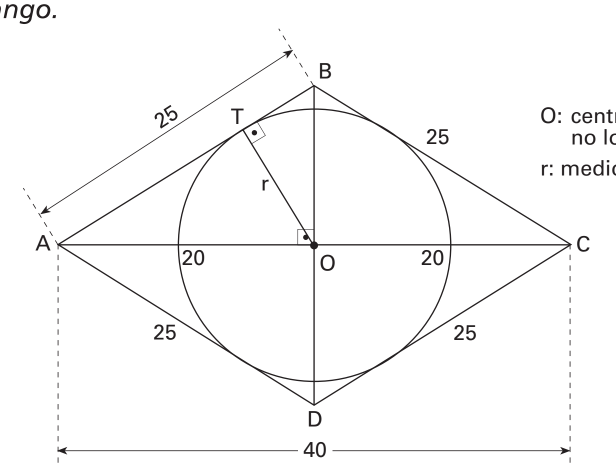
Resposta: 10

Questão 30

Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm², do círculo inscrito neste losango.

Resolução

Do enunciado, temos a figura ao lado cotada em cm:



O: centro do círculo inscrito no losango ABCD;

r: medida do raio desse círculo.

No triângulo retângulo ABO, temos:

$(OB)^2 + (OA)^2 = (AB)^2 \quad \therefore \quad (OB)^2 + 20^2 = 25^2 \quad \therefore \quad OB = 15$

Ainda,

$(AB) \cdot (OT) = (OB) \cdot (OA) \quad \therefore \quad 25 \cdot r = 15 \cdot 20 \quad \therefore \quad r = 12$

Logo, a área pedida é igual a $\pi \cdot 12^2$, ou seja, 144π.

Resposta: 144π

COMENTÁRIO

Mantendo a tradição, essa prova foi muito bem elaborada. Apresentou uma boa distribuição de assuntos e os enunciados das questões foram claros e precisos.

Lamentamos apenas o fato de a questão 18 não apresentar alternativa correta.