www.betaconcursos.com

Matemática

Beta Concursos

Unidade 1

Revisão de Tópicos Fundamentais do Ensino Médio

1.1 Apresentação

Devido à flagrante heterogeneidade dos alunos, e já tendo tido várias turmas anteriores de experiência, optamos por apresentar, mesmo que de forma sucinta, alguns assuntos básicos que entendemos como sendo absolutamente fundamentais para o restante do curso, e esperamos que os estudantes que estejam fora do "bom combate" há algum tempo, ou há muito tempo, possam colocar suas idéias de novo em ordem, e os conceitos fundamentais nos seus devidos lugares.

1.2 Simbologia Matemática mais usual

Esperamos que o estudante conheça a seguinte simbologia:

a) $=$ (igual à)

b) $\neq$ (diferente de)

c) ϕ ou $\{\ \}$ (conjunto vazio)

d) $\in$ (pertence à)

e) $\notin$ (não pertence à)

f) $\subset$ (está contido)

g) $\not\subset$ (não está contido)

h) $\supset$ (contém)

i) $\not\supset$ (não contém)

j) $\exists$ (existe pelo menos um)

k) $\nexists$ (não existe)

l) $\exists|$ (existe e é único)

m) $|$ (tal que / tais que)

n) $\vee$ (ou)

o) $\wedge$ (e)

p) $A \cap B$ (interseção dos conjuntos *A* e *B*)

q) $A \cup B$ (união dos conjuntos *A* e *B*)

r) $\forall$ (para todo e qualquer, qualquer que seja)

s) $\Rightarrow$ (implica)

t) $\Leftrightarrow$ (implica e a recíproca é equivalente)

u) $\therefore$ (donde se conclui)

1.3 Conjuntos Numéricos

É lógico que, para a Matemática, os conjuntos de maior importância são aqueles formados por números, e certos conjuntos numéricos são especialmente importantes devido às propriedades das operações entre seus elementos e, portanto, recebem nomes especiais, quais sejam:

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

é o conjunto dos números inteiros não-negativos.

b) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

é o conjunto dos números inteiros.

c) $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \dfrac{p}{q} \right\}$ sendo $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

É o conjunto dos números racionais.

São exemplos de números racionais: $-\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{9}{2}$, $+\dfrac{8}{3}$, etc.

São exemplos de números irracionais: $\pi = 3{,}14159\ldots$ (pi), $e = 2{,}71828\ldots$ (base dos logaritmos neperianos), $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$, etc.

d) $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, formados por todos os números racionais e irracionais, e costumamos associar tais números aos pontos de uma reta que, por definição, é infinita em ambos os sentidos.

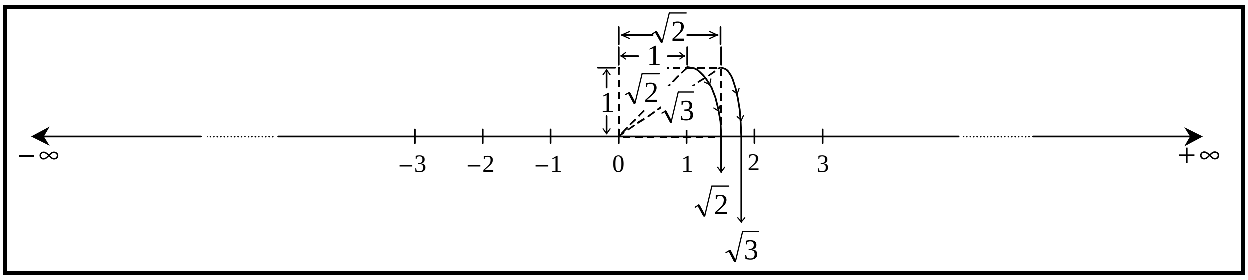


Fig. 1.1 Representação gráfica de alguns elementos do conjunto $\mathbb{R}$.

e) $C = \{z \mid z = x + \boldsymbol{j}y\}$, sendo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$, é o conjuntos dos números complexos (voltaremos a tal assunto na seção 1.14).

Quando incluímos o **símbolo *** (asterisco), estamos indicando que **o zero foi excluído do conjunto**. Assim, temos:

f) $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0\}$

é o conjunto dos números naturais.

g) $Z^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq 0\}$

h) $Q^* = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \neq 0\}$

i) $R^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\}$

j) $C^* = \{x \mid x \in \mathbb{C} \text{ e } x \neq 0\}$

Quando incluímos o **símbolo +** (mais), estamos indicando que **foram excluídos todos os números negativos dos conjunto**.

k) $Z_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \geq 0\} = N$

é o conjunto dos números inteiros não negativos.

l) $Q_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \geq 0\}$

é o conjunto dos números racionais não negativos

m) $R_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 0\}$

é o conjunto dos números reais não negativos.

Quando acrescentamos o **símbolo –** (menos) estamos indicando que **foram excluídos todos os números positivos do conjunto**. Assim, temos:

n) $Z_- = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \leq 0\}$

é o conjunto dos números inteiros não positivos.

o) $Q_- = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x \leq 0\}$

é o conjuntos dos números racionais não positivos.

p) $R_- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 0\}$

é o conjunto dos números reais não positivos.

Devemos notar que o zero é elemento dos conjuntos Z_+, Z_-, Q_+, Q_-, R_+, R_-. Se excluímos o zero destes conjuntos, teremos:

q) $Z_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 0\}$

r) $Z_-^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x < 0\}$

s) $Q_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x > 0\}$

t) $Q_-^* = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } x < 0\}$

u) $R_{+}^{*} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$

v) $R_{-}^{*} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 0\}$

O conjunto R_{+}^{*} é chamado conjunto dos **números reais estritamente positivos e** R_{-}^{*} é o conjunto dos **números reais estritamente negativos**. Os outros têm nomes semelhantes.

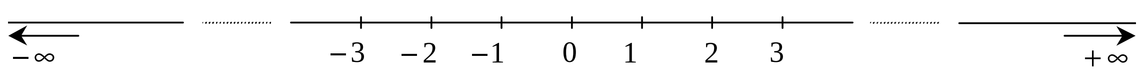
Notemos a propriedade:

$N^{*} \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

isto é, todo número natural é inteiro, todo número inteiro é racional, todo número racional é real e todo número real é também complexo.

1.4 Operações com Números Relativos

• Ilustração 1.1: Números relativos



1.4.1 Soma ou Adição

Quando os números têm o mesmo sinal basta conservá-lo e adicionar os números; quando os sinais são contrários subtraímos o menor do maior, e o sinal que prevalece é o deste último. É bom lembrar também que o sinal mais (+) antes de um parêntese não vai alterar o sinal do número que está entre parênteses, ocorrendo o oposto quando o sinal antes do parêntese for o de (–). Se não houver nenhum sinal antes do parêntese estará implícito que o sinal será o de mais (+).

• ILUSTRAÇÃO 1.2

a) $(+10)+(+2)=+10+2=+12$

b) $(+10)+(-2)=+10-2=+8$

c) $(-10)+(+2)=-10+2=-8$

d) $(-10)+(-2)=-10-2=-12$

Quando devemos somar mais de dois números relativos o resultado é obtido somando o primeiro com o segundo, o resultado obtido com o terceiro, e assim por diante até a última parcela.

• **ILUSTRAÇÃO 1.3**

$$\underbrace{(+5)+(-3)}+(-7)+(+3)+(+4)=$$

$$=\underbrace{(+2)+(-7)}+(+3)+(+4)=$$

$$=\underbrace{(-5)+(+3)}+(+4)=$$

$$=(-2)+(+4)=2$$

Podemos também adicionar separadamente todas as parcelas positivas e todas as negativas e, em seguida, somar os dois números de sinais contrários obtidos.

• **ILUSTRAÇÃO 1.4**

Efetuando a soma do exemplo anterior, temos:

— soma das parcelas positivas:

— $(+5)+(+3)+(+4)=+12$

— soma das parcelas negativas:

— $(-3)+(-7)=-10$

— soma de ambos os resultados:

— $(+12)+(-10)=+2$

1.4.2 Subtração ou Diferença

Cumpre observar que o sinal de menos (–) antes de um parêntese troca o sinal do número que está entre parênteses e, no mais, procedemos como na operação anterior.

• **ILUSTRAÇÃO 1.5**

a) $(+10)-(+2)=+10-2=+8$

b) $(+10)-(-2)=+10+2=+12$

c) $(-10)-(+2)=-10-2=-12$

d) $(-10)-(-2)=-10+2=-8$

Para as operações de multiplicação e divisão que virão logo a seguir vale a seguinte regra: “Números de mesmo sinal dão sempre resultado positivo, enquanto que os de sinais contrários conduzem sempre à resultados negativos”.

1.4.3 Multiplicação

• Ilustração 1.6

a) $(+10)\times(+2)=+20$

b) $(+10)\times(-2)=-20$

c) $(-10)\times(+2)=-20$

d) $(-10)\times(-2)=+20$

1.4.4 Divisão

• Ilustração 1.7

a) $(+10)\div(+2)=+5$

b) $(+10)\div(-2)=-5$

c) $(-10)\div(+2)=-5$

d) $(-10)\div(-2)=+5$

1.4.5 Potenciação

Quando, em uma multiplicação, os fatores são todos iguais, em módulo e em sinal, esta operação recebe o nome de potenciação. Assim sendo, a potência de um número é o produto de fatores iguais a este número, sendo representada por:

a^p $p \rightarrow$ expoente (n.º de repetições dos fatores iguais)
$a \rightarrow$ base (é o número ou fator em questão)

Conforme veremos a seguir, toda potência de expoente par é positiva, qualquer que seja o sinal da base, porém, toda potência de expoente ímpar tem o sinal de base.

• Ilustração 1.8

a) $(+2)^4 = (+2)\times(+2)\times(+2)\times(+2) = 16$

b) $(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16$

c) $(+2)^3 = (+2)\times(+2)\times(+2) = 8$

d) $(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = -8$

Para executar a potenciação de um número relativo em uma minicalculadora, a seqüência de operações é simples:

(a) Determinar 2^4:

1.º) Digitamos a base (2)

2.º) Pressionamos a tecla exponencial $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{y^x} \text{ (CASIO modelo fx-82LB)} \\ \text{ou} \\ \boxed{x^y} \text{ (CASIO modelo fx-6300 G)} \end{array} \right\}$,

que depende do modelo da minicalculadora.

3.º) Digitamos o expoente (4)

4.º) Pressionamos a tecla exponencial $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\equiv} \text{ (CASIO modelo fx – 82LB)} \\ \qquad \text{ou} \\ \boxed{\text{EXE}} \text{ (CASIO modelo fx – 6300G)} \end{array} \right\}$,

que depende do modelo da minicalculadora.

5.º) Vai aparecer o número 16 no visor da calculadora.

(b) Determinar $(-2)^4$:

Primeiramente digitamos a base (–2). Em algumas calculadoras (CASIO fx 82 – LB, por exemplo) digitamos o número 2 e depois apertamos a tecla $\boxed{+\ -}$ para trocar o sinal para menos. Em outras (CASIO fx – 6300G) apertamos a tecla $\boxed{-}$ e depois digitamos o número 2. O restante da seqüência de operações é igual a do item a: tecla exponencial, expoente...

A esta altura é interessante notar a diferença entre a **potenciação seqüencial** e a **potenciação escalonada**, que serão analisadas logo a seguir.

• Ilustração 1.9

a) Potenciação Seqüencial:

$\left[(2)^2\right]^3 = [4]^3 = 64$, que também pode ser efetuada diretamente mantendo-se a base e multiplicando-se os expoentes:

$2^{2\times 3} = 2^6 = 64$

b) Potenciação Escalonada:

2^{2^3} que pode ser entendida como $2^{2^{3}}$, ou seja:

$2^{2^3} = 2^8 = 256$

1.4.6 Radiciação

a) Raiz *n*-ésima de um número:

Dizemos que um número “*b*” é a raiz *n*-ésima exata de um número “*a*” quando

$$a = b^n$$

e ela é representada por

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Denomina-se **radiciação** a operação pela qual se obtém a raiz *n*-ésima de um número. Nas operações exatas, a **radiciação** é a operação inversa da **potenciação**.

Temos então: $\begin{cases} \text{O sinal } \sqrt{\ } \text{ é o radical} \\ \text{O número "}a\text{" é o radicando} \\ \text{O número "}n\text{" é o índice do radical} \end{cases}$

Assim sendo

$\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

No caso de $n = 2$ a raiz se diz **quadrada** e não é usual escrever este índice no radical.

No caso de $n = 3$ a raiz se diz **cúbica**, mas este índice aparece no radical.

b) Valor algébrico dos radicais:

Se o radicando é considerado em valor absoluto (módulo), a radiciação é uma operação unívoca. No entanto, se este radicando é um **número relativo** a unicidade, em alguns casos, não estará mais garantida e por isso vamos considerar três casos:

1.º) Índice par e radicando positivo.

Neste caso o radical admitirá duas raízes reais e simétricas no conjunto dos números reais, bem como um par complexo conjugado (vide exercício proposto 39, item j da seção 1.15).

2.º) Índice ímpar.

Sendo o índice do radical um número ímpar, temos uma raiz no conjunto dos números reais, tendo o mesmo sinal que o radicando, e (n – 1) raízes no conjunto dos números complexos (vide exercício proposto 38, item f, da seção 1.15).

3.º) Índice par e radicando negativo.

Neste caso não existe nenhum valor do conjunto dos números reais que elevado ao índice par seja igual ao radicando. Este assunto será abordado na seção 1.14.

• Ilustração 1.10

$$1.^{\text{o}}\ \text{caso}\ \begin{cases} \sqrt{+64} = \pm 8 \text{ pois } \begin{cases} (+8)^2 = +64 \\ (-8) = +64 \end{cases} \\ \sqrt[4]{+625} = \pm 5 \text{ pois } \begin{cases} (+5)^4 = +625 \\ (-5)^4 = +625 \end{cases} \end{cases}$$

$$2.^{\text{o}}\ \text{caso}\ \begin{cases} \sqrt[5]{+32} = +2 \text{ pois } (+2)^5 = +32 \\ \sqrt[5]{-32} = -2 \text{ pois } (-2)^5 = -32 \end{cases}$$

$$3.^{\text{o}}\ \text{caso}\ \begin{cases} \sqrt{-4} = \pm \boldsymbol{j} \text{ e, conforme já mencionado} \\ \text{tal assunto será abordado na seção } 1.14 \end{cases}$$

Observação: pelo que foi exposto, se alguém lhe perguntar qual é o valor de $\sqrt{9}$, a resposta e simplesmente 3. Agora se for pedido o valor algébrico do $\sqrt{9}$ teremos então $\pm$ 3.

A determinação de raízes através de minicalculadoras é simples:

a) Determinar $\sqrt[4]{625}$:

a.1) Utilizando uma CASIO fx-82 LB:

1.º) Digitamos o radicando 625

2.º) Pressionamos as teclas $\boxed{\text{2nd F}}$ e $\boxed{y^x}$ a fim de convocar a operação $\sqrt[x]{y}$

3.º) Digitamos o expoente 4

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{=}$

5.º) O número 5 aparece no visor de calculadora, e devemos ter em mente que se desejamos o valor algébrico da raiz a resposta completa é $\pm$ 5.

a.2) Utilizando uma CASIO fx-6300 G

1.º) Digitamos o índice 4

2.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$

3.º) Digitamos o radicando 625

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\text{EXE}}$

5.º) O número 5 aparece no visor

b) Determinar $\sqrt[5]{-32}$:

a.1) Utilizando um CASIO fx-82 LB

1.º) Digitamos o valor 32 e pressionamos a tecla $\boxed{+\diagdown-}$ para trocar o seu sinal

2.º) Pressionamos as teclas $\boxed{\text{2nd F}}$ e $\boxed{y^x}$ a fim de convocar a operação $\sqrt[x]{y}$

3.º) Digitamos o índice 5

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{=}$

5.º) O valor – 2 aparece no visor.

a.2) Utilizando uma CASIO fx-6300 G

1.º) Digitamos o índice 5

2.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$

3.º) Pressionamos a tecla $\boxed{-}$ e depois o valor 32

4.º) Pressionamos a tecla $\boxed{\text{EXE}}$

5.º) O valor – 2 aparece no visor.

Observação: Devemos notar que as rotinas para calculadoras do mesmo fabricante (CASIO), mas de modelos diferentes, são totalmente diferentes. O que não esperar de modelos de outros fabricantes?

Por isso insistimos que cada estudante deve adquirir logo sua própria calculadora, a fim de se familiarizar com o uso da mesma.

1.4.7 Produto e Divisão de Potências de Mesma Base

a) Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

b) Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos o expoente do denominador do expoente do numerador.

• *Ilustração 1.11*

a) $a^3 \times a^2 \times a^{-4} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{3+2-4+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{b^8}{b^5} = b^{8-5} = b^3$

c) $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$

d) $\frac{I^3}{I^{-4}} = I^{3-(-4)} = I^7$

1.4.8. Expoente Nulo

Toda potência de expoente nulo é igual à unidade.

Ilustração 1.12

$$a^0 = 1$$

Observação:

São exceções 0^0 e ∞^0, que não têm qualquer significado numérico, sendo símbolos de indeterminação, e são abordados em Análise Matemática na parte de Limites.

1.4.9 Expoente Negativo

Toda potência de expoente negativo equivale a uma fração cujo numerador é a unidade e o denominador é a potência com o expoente positivo ou seja: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$. **(1)**

• *Ilustração 1.13*

a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Observações:

1ª) Em conseqüência do exposto anteriormente temos:

$$\boxed{a^n = \frac{1}{a^{-n}}} \quad \textbf{(2)}$$

2ª) Agora podemos obter o mesmo resultado do item (d) da ilustração 11 por outro caminho:

$$\frac{I^3}{I^{-4}} = I^3 \times I^4 = I^7$$

1.4.10 Expoente Fracionário

Toda potência de expoente fracionário equivale a uma raiz cujo índice é o denominador da fração e cujo radicando é a base elevada a um expoente igual ao numerador, ou seja:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}} \quad \textbf{(3)}$$

• *Ilustração 1.14*

Determinar os **valores algébricos** das seguintes operações:

a) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \pm 4$

c) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{2}$

1.4.11 Emprego de Potências de Dez para simplificar a representação de certos Números

• Ilustração 1.15

No Brasil:		Nos E.U.A.:
a) $2\,000 = 2\times10^3$*	$\longrightarrow$	$2{,}000 = 2\times10^3$
b) $4\,000\,000 = 4\times10^6$*	$\longrightarrow$	$4{,}000{,}000 = 4\times10^6$
c) $0{,}0003 = 3\times10^{-4}$	$\longrightarrow$	$0.0003 = 3\times10^{-4}$
d) $0{,}025 = 25\times10^{-3}$	$\longrightarrow$	$0.025 = 25\times10^{-3}$

(*) Antigamente representava-se 2 e 4 milhões, respectivamente por 2.000 e 4.000.000. Já há alguns anos aboliram-se os pontos separatrizes de classes, mantendo-se agora um espaço entre as mesmas.

1.5 Produtos Notáveis

1.5.1 Quadrado de um binômio

a) $(a+b)^2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$\begin{array}{l} \quad a + b \\ \underline{\quad a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{\quad\;\; + ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \textbf{(4)}$$

b) $(a-b)^2$:

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ou

$$\begin{array}{l} \quad a - b \\ \underline{\quad a - b} \\ a^2 - ab \\ \underline{\quad\;\; - ab + b^2} \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \textbf{(5)}$$

1.5.2 Produto da soma de dois termos pela diferença entre eles

$(a+b)\,(a-b)$:

$(a+b)\,(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

ou

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & & \\ a & - & b & & \\ \hline a^2 & + & ab & & \\ & - & ab & - & b^2 \\ \hline a^2 & & & - & b^2 \end{array}$$

$\boxed{(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2}$ **(6)**

1.5.3 Cubo de um binômio

a) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) =$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ou

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ \ a + \ \ b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \qquad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ **(7)**

b) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ou

$$
\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + b^2 \\
\underline{\;a - \;\; b\qquad\quad} \\
a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
\underline{\quad - a^2b + 2ab^2 - b^3} \\
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{array}
$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad \textbf{(8)}$$

• *Ilustração 1.16*

a) $(a+5x)^2 = a^2 + 2(a)(5x) + (5x)^2 =$
$= a^2 + 10ax + 25x^2$

b) $(5x^2 - 3y)^2 = (5x^2)^2 - 2(5x^2)(3y) + (3y)^2 =$
$= 25x^4 - 30x^2y + 9y^2$

c) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$

d) $(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 =$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

e) $(x-2y)^3 = x^3 - 3(x^2)(2y) + 3(x)(2y)^2 - (2y)^3 =$
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

1.6 Equações

1.6.1 Equação do 1º Grau com uma Incógnita

Toda equação do 1º grau com uma incógnita pode ser reduzida a forma

$$\boxed{az + b = 0} \quad \textbf{(9)}$$

em que $a \neq 0$.

Sua solução é:

$az + b = 0 \Rightarrow az = -b \Rightarrow$

$$\boxed{z = -\frac{b}{a}} \quad \textbf{(10)}$$

EXEMPLO 1.1

Resolver as seguintes equações do 1º grau:

a) $3z+1=7z-3$

b) $\frac{5}{2x}=\frac{15}{12}$

c) $\frac{3}{y-2}=\frac{6}{4}$

d) $pz+q=0$ (sendo $p \neq 0$)

Solução:

a) $3z+1=7z-3 \therefore$

$3z-7z=-1-3 \therefore$

$-4z=-4 \therefore$

$z=\frac{-4}{-4} \therefore \qquad z=1$

b) $\frac{5}{2x}=\frac{15}{12} \therefore$

$(2x)15=5\times 12 \therefore$

$30x=60 \therefore$

$x=\frac{60}{30} \therefore x=2$

c) $\frac{3}{y-2}=\frac{6}{4} \therefore$

$6(y-2)=3\times 4 \therefore$

$6y-12=12 \therefore$

$6y=24 \therefore$

$y=\frac{24}{6} \therefore y=4$

d) $pz+q=0 \therefore$

$pz=-q \therefore$

$z=-\frac{q}{p}$

1.6.2 Equação do 2º Grau com uma Incógnita

A forma geral da equação do 2º grau com uma incógnita é:

$\boxed{az^2+bz+c=0}$ **(11)**

onde $a \neq 0$.

Vamos então transformar a equação em outra equivalente, de modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito do tipo indicado na equação **(4)**.

a) Transpondo a constante para o segundo membro, vem:

$$az^2 + bz = -c$$

b) Multiplicando por $4a$, teremos:

$$4a^2z^2 + 4abz = -4ac$$

c) Somando b^2 aos dois membros, resulta:

$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 = b^2 - 4ac$$

d) Verificando que o 1º membro é um quadrado perfeito, teremos:

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

e) Extraindo as raízes quadradas de ambos os membros, obtemos:

$$2az + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \therefore$$
$$2az = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \therefore$$

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \textbf{(12)}$$

que é a conhecida fórmula da Bhaskara, onde

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} \quad \textbf{(13)}$$

é o discriminante da equação, e três casos podem ocorrer:

1º) $\Delta > 0 \Rightarrow$ teremos duas raízes reais e desiguais.

2º) $\Delta = 0 \Rightarrow$ teremos duas raízes reais e iguais.

3º) $\Delta < 0 \Rightarrow$ não teremos raízes no conjunto dos números reais, e este caso será abordado na seção 1.14.

Exemplo 1.2

Resolver as seguintes equações do 2º grau:

a) $2z^2 + 5z - 3 = 0$

b) $4z^2 - 4z + 1 = 0$

c) $z^2 + 4z + 13 = 0$

Solução:

a) $2z^2 + 5z - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$z_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

b) $4z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm 0}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 0}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{4+0}{8} = \frac{1}{2} \\ z_2 &= \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{raiz dupla}$$

c) $z^2 + 4z + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 13 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 < 0$$

e esta equação não admite raízes no campo real. Sua solução será apresentada na subseção **1.14.1** ($z_1 = -2 + \boldsymbol{j}3$ e $z_2 = -2 - \boldsymbol{j}3$ são as suas raízes).

1.7 Progressão Aritmética (P.A.)

1.7.1 Definição

É uma sucessão de termos

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{n \text{ termos}}, a_{n+1}, \ldots,)$$

finita ou infinita, sendo que, a partir do 2º termo inclusive, a diferença entre um termo qualquer e o seu antecedente é igual a uma quantidade constante ***r***, denominada razão da progressão, ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = r$$

As seguintes seqüências são exemplos de P.A.:

a) $(2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 2$ e $r = 5$

b) $(x,\ x+2t,\ x+4t,\ x+6t\ \ldots) \Rightarrow a_1 = x$ e $r = 2t$

c) $(5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 5$ e $r = 0$

d) $\left(7,\ \frac{15}{2},\ 8,\ \frac{17}{2},\ 9\ \ldots\right) \Rightarrow a_1 = 7$ e $r = \frac{1}{2}$

e) $(8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 8$ e $r = -3$

1.7.2 Classificação

As progressões aritméticas podem ser classificadas de acordo com o valor da razão ***r***:

$r > 0 \Rightarrow$ P.A. crescente

$r = 0 \Rightarrow$ P.A. constante ou estacionária

$r < 0 \Rightarrow$ P.A. decrescente

1.7.3 Termo geral

A partir da definição, podemos escrever os termos da P.A. da seguinte forma:

$$\begin{array}{lcllcl}
a_2 - a_1 = r & \Rightarrow & a_2 = a_1 + r & & \\
a_3 - a_2 = r & \Rightarrow & a_3 = a_2 + r & = & (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\
a_4 - a_3 = r & \Rightarrow & a_4 = a_3 + r & = & (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \\
\hdashline
a_n - a_{n-1} = r & \Rightarrow & a_n = a_{n-1} + r & = & \cdots = a_1 + (n-1)r
\end{array}$$

Observe que cada termo é obtido adicionando-se ao primeiro um número de razões ***r*** igual à posição do termo menos uma unidade, ou seja:

$$\begin{array}{lcccl}
a_2 & = & a_1 + r & = & a_1 + (2-1)r \\
a_3 & = & a_1 + 2r & = & a_1 + (3-1)r \\
a_4 & = & a_1 + 3r & = & a_1 + (4-1)r \\
\hdashline
a_n & = & \cdots & = & a_1 + (n-1)r
\end{array}$$

O termo de ordem ***n*** da P.A. é dado, portanto, pela fórmula a seguir:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \qquad \textbf{(14)}$$

que pode também ser obtida da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 \quad = r \\ a_3 - a_2 \quad = r \\ a_4 - a_3 \quad = r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} = r \end{array}\right\}$$

Somando membro a membro estas ***n* – 1** igualdades obtemos a expressão do termo de ordem ***n***.

$$a_n - a_1 \quad = (n-1)r$$

e

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \qquad \textbf{(14)}$$

que é a mesma equação anteriormente encontrada.

1.7.4 Propriedades

I) Numa P.A. cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo precedente e o termo seguinte.

Com efeito, se

$$\ldots\ a_{n-1}\,,\ a_n\,,\ a_{n+1}\ \ldots$$

são termos consecutivos de uma P.A., então podemos escrever:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

ou seja,

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

e

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} \qquad \textbf{(15)}$$

II) Em qualquer P.A. limitada, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é constante e igual à soma dos próprios extremos.

Seja pois a P.A. limitada, com ***n*** termos, razão ***r***, e ***A*** e ***B*** os termos eqüidistantes dos extremos, conforme ilustrado a seguir:

$$(\underbrace{a_1\,,\ a_2\,, \ldots,\ A}_{p\text{ termos}}, \ldots,\ \underbrace{B\,, \ldots,\ a_{n-1}\,,\ a_n}_{p\text{ termos}})$$

Pela fórmula do termo geral,

$$\boxed{A = a_1 + (p-1)r} \qquad \textbf{(16)}$$

Considerando agora a progressão

$$\underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}}$$

temos pela fórmula de termo geral,

$$\boxed{a_n = B + (p-1)r} \quad \textbf{(17)}$$

Subtraindo **(17)** de **(16)** resulta:

$$A - a_n = a_1 - B$$

o que nos conduz a

$$\boxed{A + B = a_1 + a_n} \quad \textbf{(18)} \quad \text{C.Q.D}$$

I) Em uma P.A. limitada cujo número de termos é ímpar, o termo médio é a média aritmética dos extremos.

Neste caso temos:

$$(\underbrace{\underbrace{a_1, a_2, \ldots, A}_{p \text{ termos}}, M, \underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}}}_{\text{P.A. com } n = 2p+1 \text{ termos}})$$

Pelas propriedades I e II temos:

$$M = \frac{A+B}{2}$$

e

$$A + B = a_1 + a_n$$

Logo,

$$\boxed{M = \frac{a_1 + a_n}{2}} \quad \textbf{(19)} \quad \text{C.Q.D.}$$

1.7.5 Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

Com relação a P.A.:

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n}_{n \text{ termos}}, a_{n+1}, \ldots)$$

podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n} \quad \textbf{(20)}$$

ou, invertendo-se a ordem das parcelas,

$$\boxed{S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1} \quad \textbf{(21)}$$

Somando **(20)** e **(21)** membro a membro obtemos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$, onde temos ***n*** parênteses.

No entanto, pela propriedade II todos os parênteses são iguais a $a_1 + a_n$.

Logo,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

e

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}} \quad \textbf{(22)}$$

Observações:

1) Se a progressão for crescente, ilimitada, temos $S_n > N$, sendo *N* um número arbitrariamente grande.

   Poremos:

   $$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

   ou

   $S_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$

2) No caso de uma progressão decrescente, ilimitada, teremos as seguintes condições:

   $$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty$$

   ou

   $S_n \to -\infty$ quando $n \to +\infty$

Exemplo 1.3

Calcule o 17: termo da P.A. $(3,\ 8,\ 13,\ \ldots)$

Solução:

Temos que:

$a_1 = 3$ e $r = 5$

Logo,

$$a_{17} = a_1 + (17 - 1)r = a_1 + 16r = 3 + 16 \times 5 = 83$$

Exemplo 1.4

Calcule a soma dos doze primeiros números ímpares.

Solução:

Temos então:

$(1,\ 3,\ 5,\ \ldots)$

Donde,

$a_1 = 1$ e $r = 2$, logo

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r = a_1 + 11r = 1 + 11 \times 2 = 23$$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \times 12}{2} = \frac{(1 + 23) \times 12}{2} = 144$$

Exemplo 1.5

No depósito de uma firma de informática, costuma-se empilhar as caixas de um determinado equipamento em filas horizontais superpostas, conforme ilustrado na figura. Quantas dessas filas seriam necessárias para empilhar 171 dessas caixas?

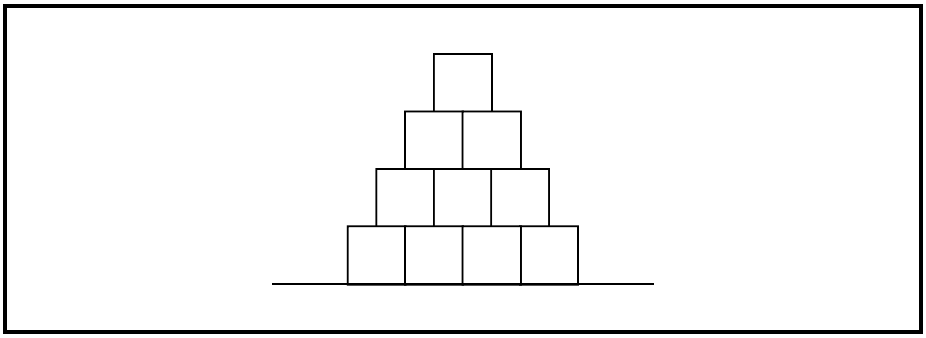


Fig. 1.2

Solução:

Temos uma P.A. representada por

$(1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

onde, $a_1 = 1$ e $r = 1$

Desejamos saber o ***n*** para o qual temos $S_n = 171$.

Sabemos que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)\times r]n}{2}$$

Substituindo valores,

$$171 = \frac{[2\times 1 + (n-1)\times 1]n}{2},$$
$$342 = [2 + n - 1]n,$$
$$342 = [1 + n]n,$$
$$342 = n^2 + n,$$
$$n^2 + n - 342 = 0$$

que é uma equação do 2º grau para a qual $a = 1$, $b = 1$ e $c = -342$.

Assim sendo,

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times(-342)}}{2\times 1} =$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1369}}{2} = \frac{-1 \pm 37}{2} =$$
$$n_1 = 18$$
$$n_2 = -19$$

Como não existe número de fileiras negativo, só a 1ª raiz tem significado físico.

1.8 Progressão Geométrica (P.G.)

1.8.1 Definição

É uma sucessão de termos

$$(\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots\ ,\ a_{n-1},\ a_n}_{n \text{ termos}},\ a_{n+1},\ \dots\ ,)$$

finita ou infinita, sendo que , a partir do 2º termo inclusive, a razão entre um termo qualquer e o seu antecedente é igual a uma quantidade constante ***q***, denominada razão da progressão, ou seja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

As seqüências a seguir são exemplos de P.G.:

a) (1 , 4 , 16 , 64 , $\dots$) $\Rightarrow$ $a_1 = 1$ e $q = 4$

b) (x , xt^2 , xt^4 , xt^6 , $\dots$) $\Rightarrow$ $a_1 = x$ e $q = t^2$

c) (8 , 2 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\dots$) $\Rightarrow$ $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{4}$

d) (7 , 7 , 7 , 7 , $\ldots$) $\Rightarrow$ $a_1 = 7$ e $q = 1$

e) $(-4$, 8 , -16 , 32 , $\ldots)$ $\Rightarrow$ $a_1 = 4$ e $q = -2$

1.8.2 Classificação

$$\left.\begin{array}{l} a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \\ \qquad \text{ou} \\ a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G. crescente}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 < 0 \text{ e } q > 1 \\ \qquad \text{ou} \\ a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G. decrescente}$$

$\forall a_1$ e $q < 0 \Rightarrow$ P.G. alternante

$\forall a_1$ e $q = 0 \Rightarrow$ P.G. constante ou estacionária

1.8.3 Termo geral

A partir da definição, podemos escrever os termos da P.G. da seguinte forma:

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3$$

. . . .

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1} q = \ldots = a_1 q^{n-1}$$

Observe que cada termo é obtido multiplicando-se o primeiro por uma potência cuja base é a razão. Note que o expoente da razão é igual à posição do termo menos uma unidade, ou seja:

$$a_2 = a_1 q = a_1 q^{2-1}$$

$$a_3 = a_1 q^2 = a_1 q^{3-1}$$

$$a_4 = a_1 q^3 = a_1 q^{4-1}$$

. . . .

$$a_n = \ldots = a_1 q^{n-1}$$

O termo de ordem ***n*** da P.G. é dado, portanto, pela fórmula a seguir:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}} \quad \textbf{(23)}$$

que pode também ser obtida da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_2}{a_1} = q \\ \dfrac{a_3}{a_2} = q \\ \dfrac{a_4}{a_3} = q \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array}\right\}$$

Multiplicando membro a membro estas $n-1$ igualdades obtemos a expressão do termo de ordem ***n***

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \ldots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1}$$

Fazendo os cancelamentos, obtemos:

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$$

o que nos leva a

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \textbf{(23)}$$

conforme há havia sido deduzido anteriormente.

1.8.4 Propriedades

I) Numa P.G. cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo precedente e o termo seguinte.

Realmente, se

$$\ldots a_{n-1} \;,\; a_n \;,\; a_{n+1} \ldots$$

são termos consecutivos de uma P.G., então podemos escrever:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ou seja,

$$a_n^2 = a_{n-1} \times a_{n+1}$$

e

$$\boxed{a_n = \pm\sqrt{a_{n-1} \times a_{n+1}}}. \quad \textbf{(24)}$$

C.Q.D. Onde os sinais (+) ou (–) são usados de acordo com as características da P.G.

II) Numa P.G. limitada, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Seja então a P.G. limitada, com ***n*** termos, razão ***q***, e ***A*** e ***B*** os termos eqüidistantes dos extremos, conforme mostrado logo a seguir:

$$(\underbrace{a_1\,,\ a_2\,,\ldots,\ A}_{p\text{ termos}},\ldots,\ \underbrace{B\,,\ldots,\ a_{n-1}\,,\ a_n}_{p\text{ termos}})$$

Pela fórmula do termo geral,

$\boxed{A = a_1 q^{p-1}}$. **(25)**

Considerando agora a progressão

$$\underbrace{B\,,\ldots,\ a_{n-1}\,,\ a_n}_{p\text{ termos}}$$

temos pela fórmula do termo geral,

$\boxed{a_n = Bq^{p-1}}$. **(26)**

Dividindo as igualdades (25) e (26) membros a membro resulta:

$$\frac{A}{a_n} = \frac{a_1}{B}$$

o que nos leva a:

$\boxed{AB = a_1 \times a_n}$. **(27)** C.Q.D.

III) Em uma P.G. limitada cujo número de termos é ímpar, o termo médio é a média geométrica dos extremos.

Neste caso temos:

$$(\underbrace{\underbrace{a_1\,,\ a_2\,,\ldots,\ A}_{p\text{ termos}},\ M,\ \underbrace{B\,,\ldots,\ a_{n-1}\,,\ a_n}_{p\text{ termos}}}_{\text{P.G. com } n=2p+1 \text{ termos}})$$

Pelas propriedades I e II temos:

$$M = \sqrt{AB}$$

e

$$AB = a_1 \times a_n$$

logo,

$\boxed{M = \pm\sqrt{a_1 \times a_n}}$. **(28)** C.Q.D.

1.8.5 Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.

Com relação a P.G.

$$(\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n}_{n\ \text{termos}},\ a_{n+1},\ \ldots\ ,)$$

podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}. \qquad \textbf{(29)}$$

Multiplicando ambos os membros por ***q*** resulta:

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + \ldots + a_{n-2}q + a_{n-1}q + a_nq$$

o que é equivalente a

$$\boxed{qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}} \qquad \textbf{(30)}$$

Subtraindo (30) de (29) temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

ou já que $a_{n+1} = a_1q^n$,

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n$$

e

$$\boxed{S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},\ (q \neq 1)} \qquad \textbf{(31)}$$

Observações:

1.ª) Se a progressão for crescente, ilimitada, temos $S_n > N$, sendo *N* um número arbitrariamente grande. Poremos,

$$\lim S_n = +\infty$$

$$n \to +\infty$$

ou

$S_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$

2.ª) Na hipótese da progressão decrescente $q < 1$,

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

se admitirmos que $n \to +\infty$ (cresça cada vez mais), a primeira parcela, $\frac{a_1}{1-q}$, não sofre qualquer modificação, enquanto que a segunda pode ser tomada tão próxima de zero quanto quisermos.

Poremos:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}} \quad \textbf{(32)}$$

Exemplo 1.6

Determine o 10º termo da P.G. (1 , 2 , 4 , …)

Solução:

$a_1 = 1$ e $q = 2$

Logo,

$$a_{10} = a_1 q^{10-1} = a_1 q^9 = (1)(2)^9 = 512$$

Exemplo 1.7

Determine a soma dos vinte primeiros termos da P.G. (2^{-2} , 2^{-1} , 2^0 , …)

Solução:

Temos:

$$a_1 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad q = \frac{2^{-1}}{2^{-2}} = 2^{-1-(-2)} = 2^{-1+2} = 2$$

Logo,

$$S_{20} = \frac{a_1\left(1-q^{20}\right)}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}\left(1-2^{20}\right)}{1-2} =$$

$$= 262\ 143{,}75$$

Exemplo 1.8

Um barco patrulha está distante 65 milhas de um navio carregado de contrabando de armas pesadas. Sabendo-se que ambas as embarcações estão seguindo o mesmo rumo (movimentos na mesma direção e mesmo sentido) e que a velocidade do barco patrulha é o dobro da velocidade do navio, pede-se calcular a distância que o barco deve percorrer para alcançar o navio.

Solução:

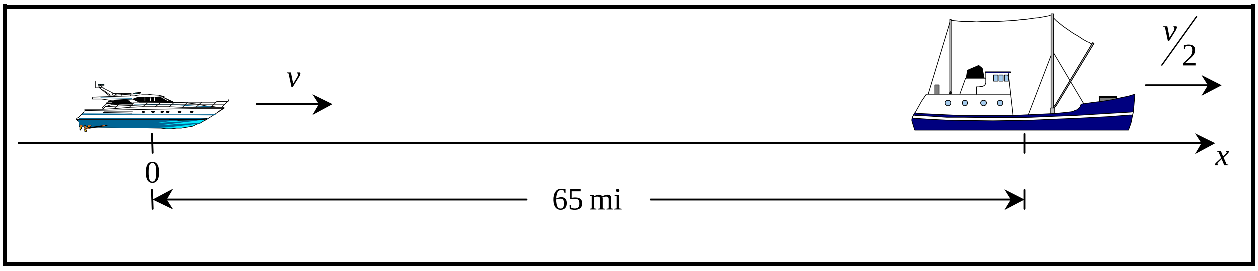


Fig. 1.3

Quando o barco patrulha tiver percorrido as 65 milhas iniciais, o navio terá percorrido $\frac{65}{2}$ milhas, uma vez que sua velocidade é a metade da do barco. Assim o barco terá que percorrer também $\frac{65}{2}$ milhas. Quando o barco tiver percorrido estas últimas $\frac{65}{2}$ milhas, o navio terá percorrido $\frac{65}{4}$ milhas, e assim por diante, de modo que a distância total a ser percorrida pelo barco é:

$$x_b = 65\,\text{mi} + \frac{65}{2}\,\text{mi} + \frac{65}{4}\,\text{mi} + \ldots.$$

Temos pois uma P.G. decrescente ilimitada, para qual a $a_1 = 65$ mi e $q = \frac{1}{2}$. Logo,

$$x_b = \frac{a_1}{1-q} = \frac{65\,\text{mi}}{1-\frac{1}{2}} = 130\,\text{mi.}$$

Claro, o estudante deve estar se perguntando: o problema não poderia ter sido pelos métodos da Cinemática aprendidos na Física do 2º grau?

Sim, é claro! Senão vejamos:

As equações horárias dos movimentos são:

Barco $\longrightarrow\ x_b = vt$

Navio $\longrightarrow\ x_n = 65 + \frac{v}{2}t$

No encontro $x_b = x_n$

e

$$vt = 65 + \frac{v}{2}t\,,$$

$$vt - \frac{vt}{2} = 65,$$

$$\frac{vt}{2} = 65$$

e o tempo de encontro é:

$$t = \frac{130}{v}.$$

Voltando à equação do barco, temos então:

$$x_b = vt = v \times \frac{130}{v} = 130 \text{ mi}$$

e concluímos, mais uma vez, que o barco deve percorrer 130 mi para alcançar o navio.

Aí cabe uma outra pergunta: Por quê não termos utilizados diretamente o segundo método?

A resposta é simples: esta foi apenas uma ilustração de soma de parcelas, que são termos de uma P.G., as quais vão se tornando cada vez menores.

1.9 Coordenadas Cartesianas no Plano

Este nome é em homenagem ao grande matemático francês René Descartes (Renatus Cartesius em Latim).

Aqui em nosso curso vamos utilizar apenas as coordenadas cartesianas planas (duas dimensões) e ortogonais, e isto nos leva a um sistema de eixos *x* e *y*, perpendiculares, que têm a mesma origem comum, conforme ilustrado a seguir:

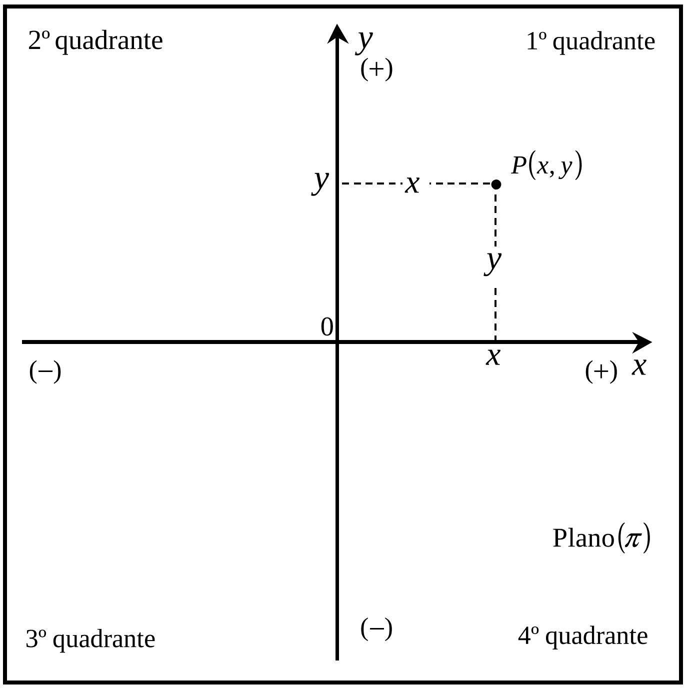


Fig. 1.4

A localização de um ponto *P* qualquer de uma plano (π) genérico, fica então perfeitamente determinada através de suas coordenadas ***x*** (abscissa) e ***y*** (ordenada), e a representação genérica é $P(x, y)$. No caso presente o ponto genérico foi representado no 1º quadrante, onde $x > 0$ e $y > 0$ mas, de um modo geral temos:

$$\begin{cases} x > 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ x < 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ x < 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ x > 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases}$$

Temos também que se

i) $x = 0 \Rightarrow$ ponto situado no eixo *y*

ii) $y = 0 \Rightarrow$ ponto situado no eixo *x*

iii) $x = y = 0 \Rightarrow$ ponto situado origem

Exemplo 1.9

Marcar em um diagrama cartesiano as localizações dos pontos a seguir:

$P_1(4,3)$; $P_2(-2,5)$; $P_3(-3,-4)$; $P_4(2,-6)$; $P_5(5,0)$; $P_6(0,4)$

Solução:

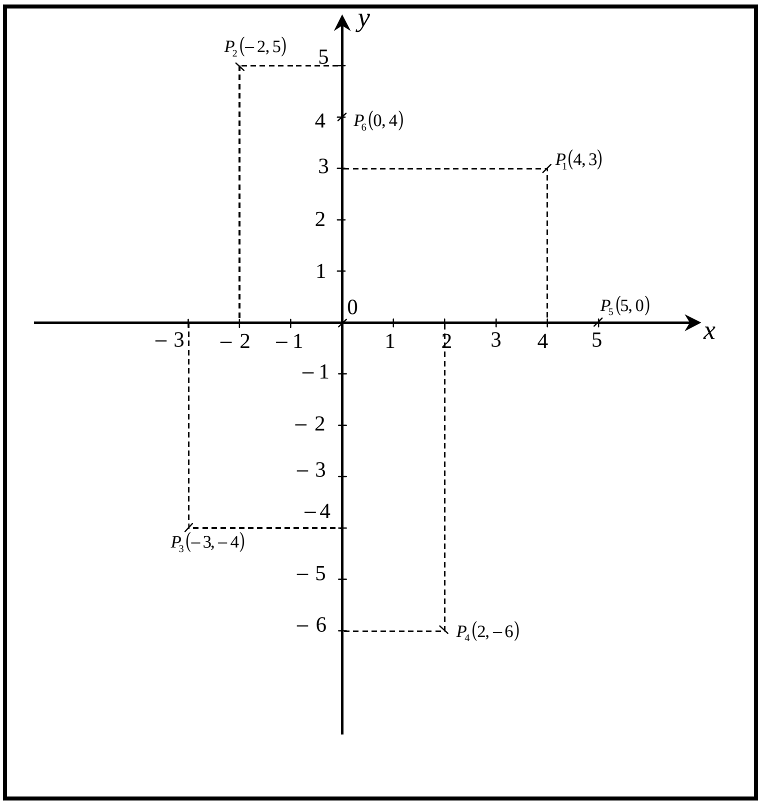


Fig. 1.5

1.10 Equação Reduzida da Reta

Em Geometria Analítica demonstra-se que toda equação do primeiro grau em *x* e *y* representa, no plano, uma reta, ou seja:

$$\boxed{y = mx + p} \quad \textbf{(33)}$$

onde $m = tg\alpha$ é coeficiente angular da reta, isto é, a tangente do ângulo que a mesma forma com a direção horizontal (paralela ao eixo *x*), e ***p*** é o coeficiente linear, sendo igual à ordenada do ponto onde a reta corta o eixo *y*. Por esta convenção teremos sempre $0 \leq \alpha < 180°$.

Analisemos então algumas situações mostradas na figura 1.6. São evidentes as seguintes propriedades:

1ª) Se α **é agudo**, então ***m*** **é positivo**, pois a tangente de um ângulo é sempre positiva no 1º quadrante.

2ª) Se α **é obtuso**, então ***m*** **é negativo**, pois a tangente de uma ângulo do 2º quadrante é negativa.

3ª) Se α **é nulo**, então ***m*** **é nulo**, pois a *tg* de 0 é nula e, neste caso, a equação da reta se reduz a $y = \text{constante}$, uma vez que ela é paralela ao eixo *x*.

4ª) Se α **é reto**, então ***m*** **não é definido**, pois $tg 90° = \nexists$, e neste caso a equação da reta tem a forma $x = \text{constante}$, uma vez que ela é paralela ao eixo *y*.

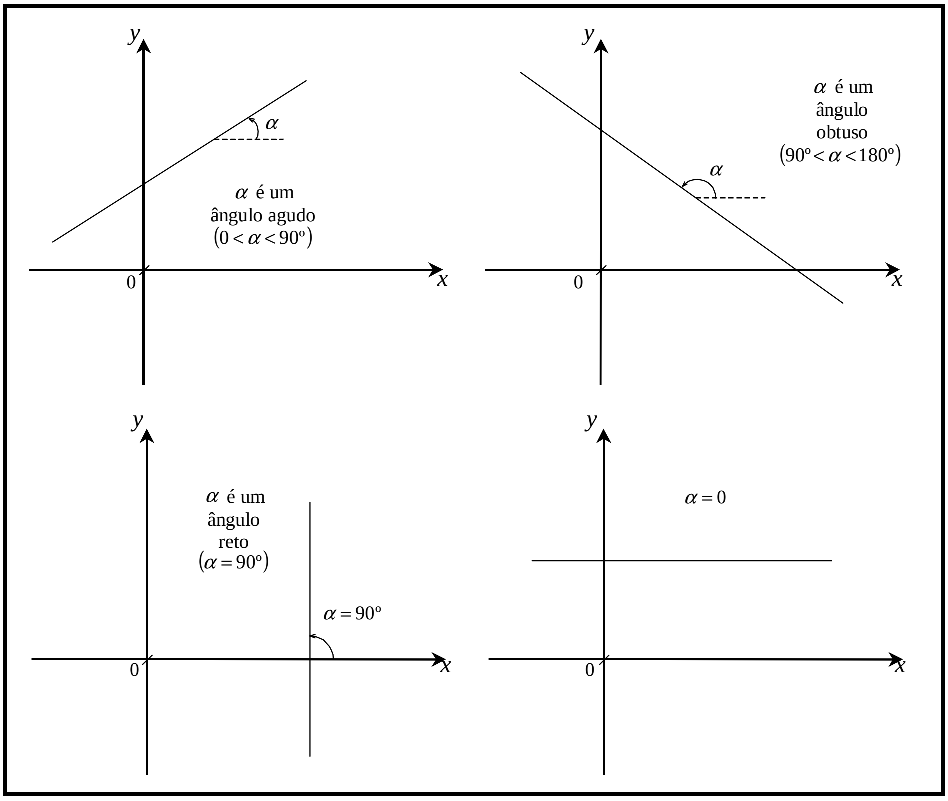


Fig. 1.6

É também oportuno, baseados no que se viu até então, listarmos algumas situações na figura 1.7, lembrando que, se ***p*** = 0, a reta passa pela origem, e sua equação é da forma $y = mx$.

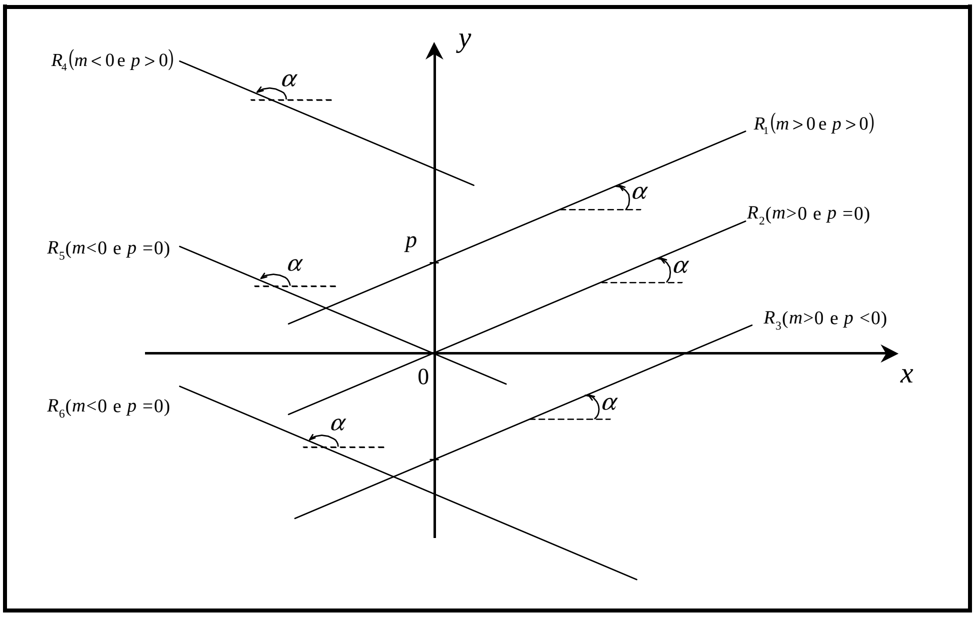


Fig. 1.7

Exemplo 1.10

Representar graficamente as seguintes retas:

a) $R_1: \ y = 2x + 1$

b) $R_2: \ y = -\dfrac{x}{2} + 1$

c) $R_3: \ y = 2x$

d) $R_4: \ y = 4$

e) $R_5: \ x = 5$

Solução:

As representações das retas R_4 e R_5 são imediatas. Entretanto, para as retas R_1, R_2 e R_3 vamos construir as tabelas a seguir onde os valores assumidos para *x*, ao serem substituídos nas equações conduzem aos valores de *y* correspondentes. Bastaria um par de pontos para determinar cada reta, uma vez que, por dois pontos do plano passa tão somente uma reta ou, em outras palavras: dois pontos determinam uma reta. No entanto, a fim de que o estudante possa verificar, na prática, que uma equação do 1.º grau em ***x*** e ***y*** representa uma reta, optamos por eleger três pontos para cada uma delas, e concluir que, em cada caso, os três pontos estão alinhados ao longo de uma mesma direção, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

R_1

X	y
0	1
1	3
2	5

R_2

x	*y*
0	1
1	$1/2$
2	0

R_3

x	*y*
0	0
1	2
2	4

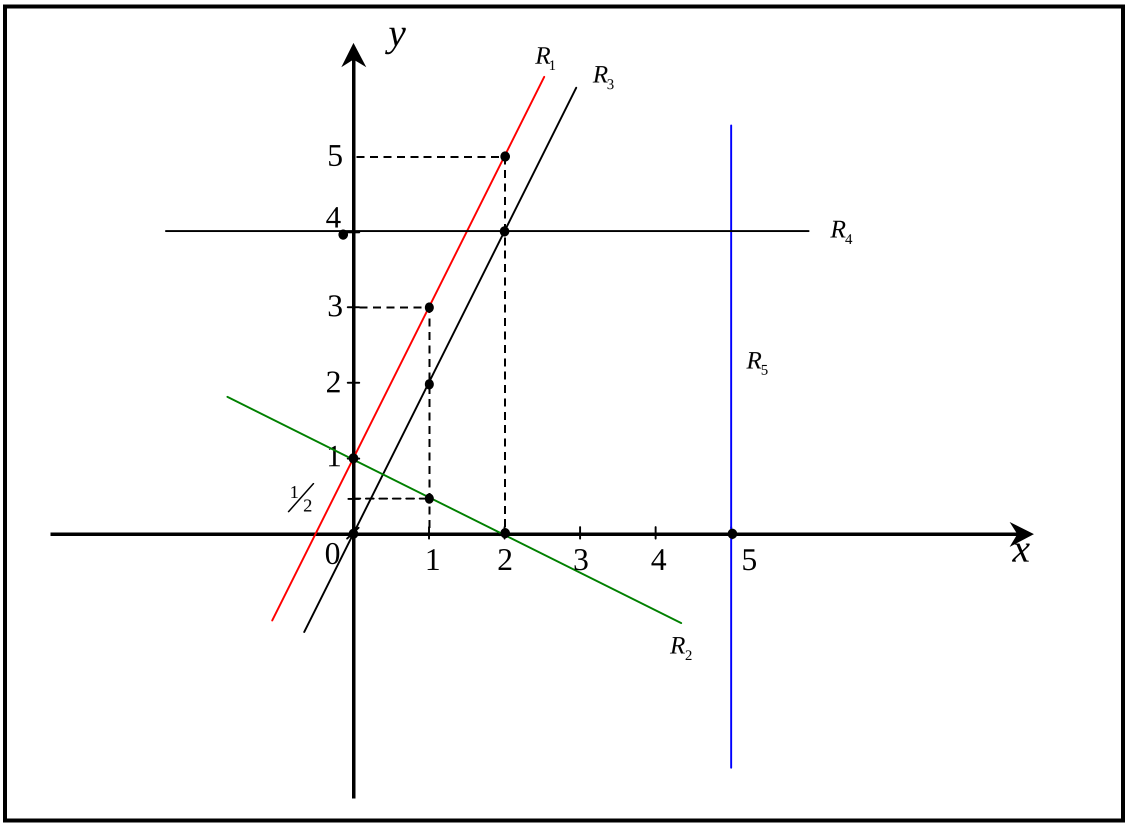


Fig. 1.8

Exemplo 1.11

Uma firma de projeto *A* cobra R$ 1000,00 fixos mais R$ 600,00 por dia de trabalho e uma firma *B* cobra R$ 400,00 fixos mais R$ 800,00 por dia.

a) Representar em um mesmo diagrama cartesiano os custos dos serviços de ambas as empresas.

b) Estabelecer um critério para a escolha da melhor firma pelo usuário, sob o ponto de vista financeiro, admitindo que, hipoteticamente, ambas tenham a mesma competência.

Solução:

a) Do enunciado vem que:

Custo de *A*: $C_A = (\text{R\$ }600{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$}1000{,}00)$

Custo de *B*: $C_B = (\text{R\$}800{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$ }400{,}00)$

em que C_A e C_B representam, respectivamente, os custos dos serviços das empresas e ***d*** os dias trabalhados.

Temos então as seguintes correspondências:

$x \leftrightarrow d$

$y \leftrightarrow C$

Tratam-se, portanto, das equações de duas retas e a reta *A* começa em um ponto de ordenada mais baixa (p_A = 400) e a reta *B* em um ponto de ordenada mais alta (p_B = 1000). No entanto, o coeficiente angular de *B* (m_B = 800) é maior do que o coeficiente angular de *A* (m_A = 600). Isto significa que $\text{tg}\alpha_B > \text{tg}\alpha_A$, ou seja $\alpha_B > \alpha_A$, e as retas vão se interceptar. Determinemos pois as coordenadas do ponto de intersecção:

$$C_A = C_B \Rightarrow (\text{R\$ }600{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$}1000{,}00) = (\text{R\$ }800{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$ }400{,}00) \therefore$$

$$\text{R\$}1000{,}00 - \text{R\$ }400{,}00 = (\text{R\$ }800{,}00/\text{dia})d - (\text{R\$ }600{,}00/\text{dia})d \therefore$$

$$\text{R\$ }600{,}00 = (\text{R\$ }200{,}00/\text{dia})d \therefore$$

$$d = 3\,\text{dias} \Rightarrow C_A = C_B = \text{R\$ }2800{,}00$$

Lembrando também que para $d = 0$ temos

$$C_A = \text{R\$}1000{,}00$$

e

$$C_B = \text{R\$ }400{,}00$$

podemos traçar as retas de custos. Assim sendo:

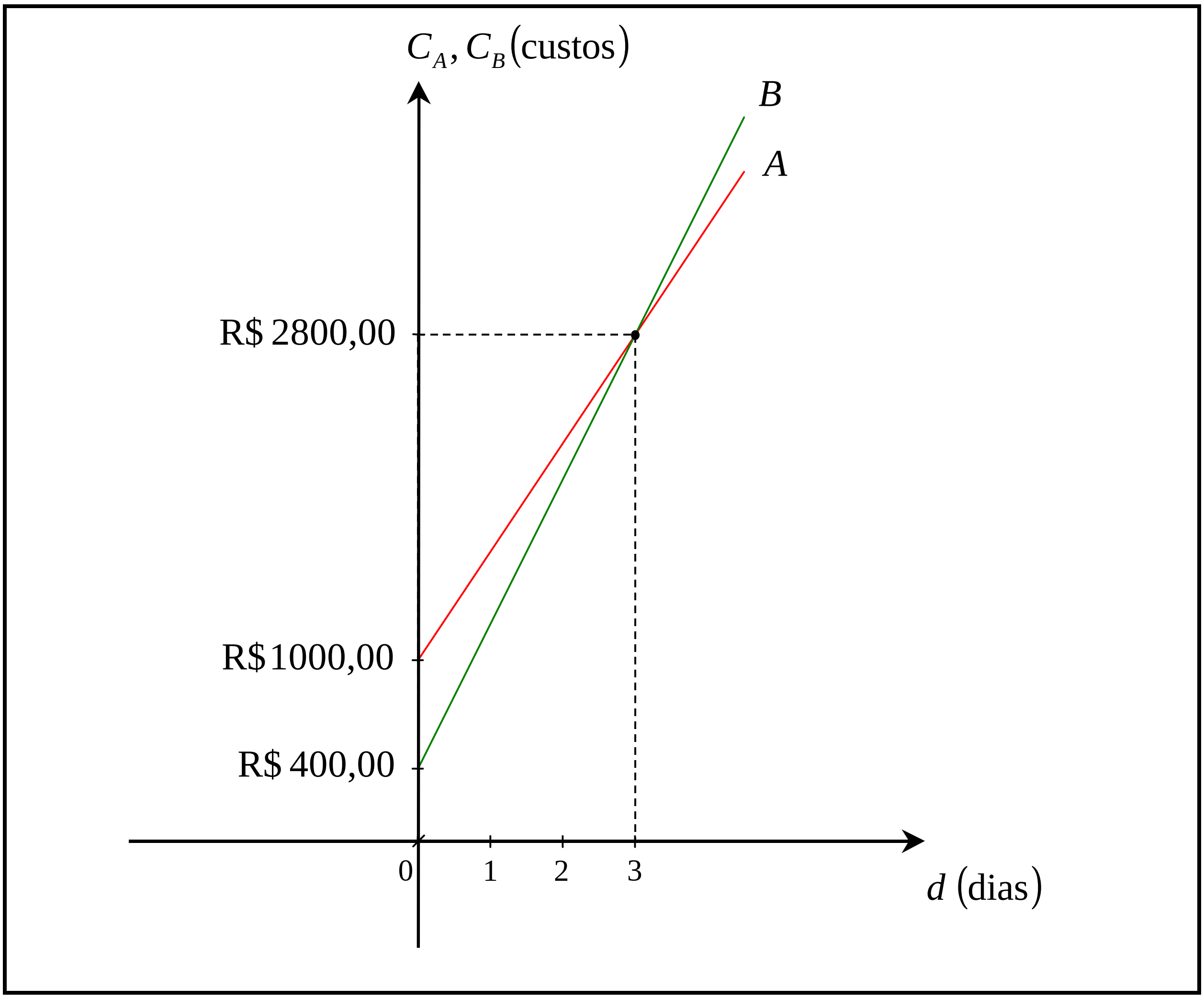


Fig. 1.9

b) Uma rápida análise dos gráficos nos conduzem às seguintes conclusões:

1.ª) $d < 3$ dias $\Rightarrow$ *B* é mais econômica.

2.ª) $d = 3$ dias $\Rightarrow$ o custo é o mesmo.

3.ª) $d > 3$ dias $\Rightarrow$ *A* é mais econômica.

1.11 Noção de Aplicação

Dados dois conjuntos ***A*** e ***B***, denominamos **aplicação** de ***A*** em ***B*** a toda correspondência em que a cada elemento $x \in$ ***A*** temos associado um único $y \in$ ***B***.

Por exemplo: dados os conjuntos ***A*** = {5, 6, 7, 8} e ***B*** = {*g*, *h*, *i*, *j*, *l*} vamos apresentar a seguir algumas aplicações de ***A*** em ***B***:

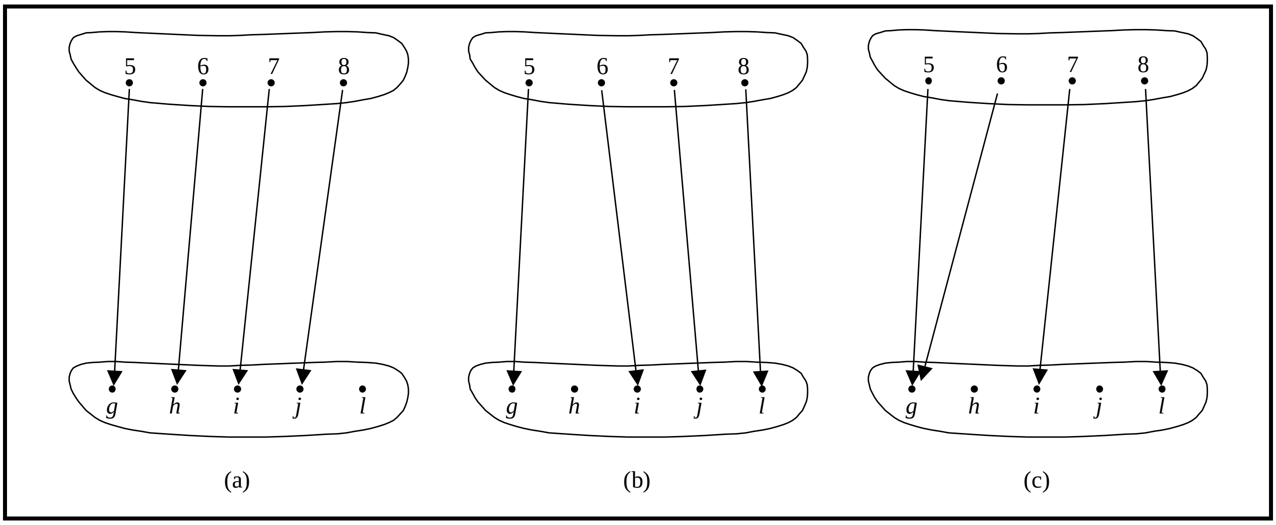


Fig. 1.10

A flecha indica a correspondência entre os elementos de ***A*** e ***B***. Na parte (a), a aplicação é o conjunto de pares ordenados.

{(5, *g*), (6, *h*), (7, *i*), (8, *j*)}

na parte (b)

{(5, *g*), (6, *i*), (7, *j*), (8, *l*)}

e na parte (c)

{(5, *g*), (6, *g*), (7, *i*), (8, *l*)}.

Devemos ressaltar que cada elemento de ***A*** é unido pela flecha a um só elemento de ***B***. Assim sendo, do mesmo elemento $x \in$ ***A*** **não podem** partir duas ou mais flechas.

Deste modo a correspondência

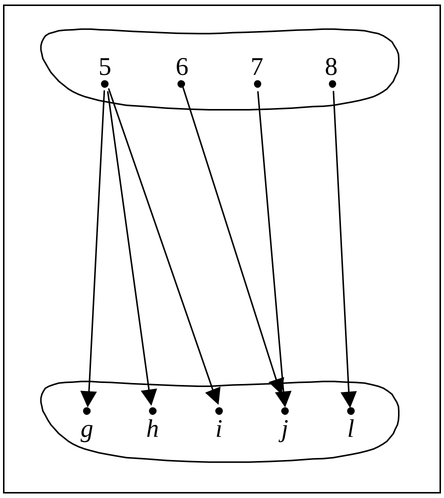


Fig. 1.11

não é uma aplicação.

O conjunto ***A*** é denominado **domínio da aplicação** e o elemento ***y***, correspondente de ***x***, é denominado imagem de ***x***. No exemplo (a) da figura 1.9 temos.

Elemento de *A* **Imagem**

$5 \longrightarrow$

$6 \longrightarrow$

$7 \longrightarrow$

$8 \longrightarrow$

O conjunto das imagens de uma aplicação ***f*** de ***A*** em ***B*** denomina-se **imagem da aplicação** e será representado por ***f***(*A*). Devemos notar que ***f***(*A*) é uma sucessão, ou seja, um conjunto ordenado. Para o exemplo (a) da figura 1.9 temos:

$\boldsymbol{f}(A)=(g,h,i,j)$ e não $\underbrace{(h,g,j,i)}_{\text{ordem incorreta}}$

1.12 **Exercícios Propostos**

1) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+5)+(-12)$

b) $(+3{,}7)+(-0{,}7)$

c) $(+1{,}72)+(-0{,}28)$

d) $(+2)+(-7)+(+4)+(+2)+(-5)+(+3)$

e) $(+9)+(-6)+(-2)+(-1)+(-5)+(+7)$

2) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+4)-(+2)$

b) $(+10)-(+4)$

c) $(-9)-(+3)$

d) $(-7)-(-5)$

e) $(+6)-(-2)$

3) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+4)\times(+5)$

b) $(-4)\times(-5)$

c) $(-2)\times(+1)$

d) $(-4)\times(-1)\times(+3)\times(-2)\times(-5)$

e) $(+2)\times(-3)\times(-1)\times(-4)\times(+5)$

4) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+12)\div(+3)$

b) $(-15)\div(-3)$

c) $(+36)\div(-4)$

d) $(-42)\div(+6)$

e) $(-81)\div(-9)$

5) Calcular as seguintes potências:

a) $(+2)^5$

b) $(-3)^3$

c) $(-2)^3$

d) $(-7)^3$

e) $(+10)^4$

6) Calcular os **valores algébricos** das seguintes raízes:

a) $\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[3]{8}$

c) $\sqrt[4]{81}$

d) $\sqrt[3]{-27}$

e) $\sqrt[5]{32}$

7) Efetuar os seguintes produtos notáveis:

a) $\left(2m^3y^4 - 5b^3m\right)^2$

b) $\left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}x^5\right)^2$

c) $\left(5 - a\sqrt{2}\right)\left(5 + a\sqrt{2}\right)$

8) Resolver as seguintes equações do 1.º grau:

a) $\frac{x}{2} = 5$

b) $5(z-3) - 4(z+2) = 3(1-2z) + 2$

c) $6 - \frac{2y-5}{5} = y$

9) Resolver as seguintes equações do 2.º grau:

a) $z^2 - 8z + 15 = 0$

b) $6z^{-2} - 5z^{-1} + 1 = 0$

c) $\frac{z(z-1)}{7} = 6$

d) $z^2 - 4z + 4 = 0$

e) $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$

10) Calcular a_{13} na progressão aritmética

(1 , 5 , 9 , …)

11) Calcular a_1 em uma progressão aritmética, sabendo-se que $r = 4$ e $a_8 = 31$.

12) Somar os 15 primeiros termos da progressão aritmética (3 , $\frac{7}{2}$, 4 , …)

13) Quantas vezes bate um relógio em 24 horas, admitindo-se que apenas bata as horas?

14) Calcular o 5.º e 8.º termos da progressão geométrica (2 , 4, …)

15) Em uma progressão geométrica, sabemos que $a_4 = 128$ e $q = 4$. Achar a_1.

16) Sendo *x* e *y* positivos, calcular os limites das expressões a seguir quando o número de radicais cresce indefinidamente.

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\ \ldots$

b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y}}}}\ \ldots$

c) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\ \ldots$

1.13 Respostas dos Exercícios Propostos

1) a) -7; b) $+3{,}0$; c) $+1{,}44$; d) -1 e) $+2$

2) a) $+2$; b) $+6$; c) -12; d) -2 e) $+8$

3) a) $+20$; b) $+20$; c) -2; d) $+120$ e) -120

4) a) $+4$; b) $+5$; c) -9; d) -7; e) $+9$

5) a) $+32$; b) -27; c) -8; d) -343; e) $+10.000$

6) a) ± 5; b) $+2$; c) ± 3; d) -3; e) $+2$

7) a) $4m^6y^8 - 20b^3m^4y^4 + 25b^6m^2$

b) $\frac{4}{9}a^4 + a^2x^5 + \frac{9}{16}x^{10}$

c) $25 - 2a^2$

8) a) $x = 10$; b) $z = 4$; c) $y = 5$

9) a) $z_1 = 3$; $z_2 = 5$

b) $z_1 = 3$; $z_2 = 2$

c) $z_1 = 7$; $z_2 = -6$

d) $z = 2$

e) Não admite raízes no conjunto dos números reais. Voltaremos a esse assunto após estudar a seção 1.14 (suas raízes são: $z_1 = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{3}}{6}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{3}}{6}$).

10) $a_{13} = 49$

11) $a_1 = 3$

12) $S_{15} = \frac{195}{2}$

13) 156

14) $a_5 = 32$; $a_8 = 256$

15) $a_1 = 2$

16) a) x; b) $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2y}$ c) $\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$

1.14 Números Complexos

1.14.1 Introdução

(a) Do mesmo modo que a generalização da noção de raiz de índice qualquer para um número positivo exigiu a introdução do conceito de número irracional (p.ex.: $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$, $\sqrt{3}=1{,}732\ldots$), também a impossibilidade da determinação de raízes de índice par de um número negativo levou à noção de número imaginário.

(b) Os números positivos e negativos recebem, em conjunto, o nome de **números reais**.

Em contrapartida, denomina-se **número imaginário** ou **número complexo** à toda expressão de forma $x+\boldsymbol{j}y$ [1], na qual x e y são números reais e $\boldsymbol{j}=\sqrt{-1}$ é a **unidade imaginária**.

(c) Conforme já vimos na subseção 1.6.2, as raízes de uma equação do 2º grau,

$$az^2+bz+c=0$$

são dadas pela conhecida fórmula

$$\boxed{z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}. \qquad \textbf{(12)}$$

Obtemos, então duas raízes reais e desiguais quando o discriminante é positivo e uma raiz real dupla se ele for nulo.

Quando o discriminante é negativo, a fórmula **(12)** não conduz a nenhuma raiz real e o trinômio $az^2+bz+c=0$ é sempre diferente de zero qualquer que seja o valor real que se atribua à z. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$z^2+4z+13=0$$

que já havia sido abordada no Exemplo 2, item c, somos conduzidos a:

$$z=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times13}}{2\times1}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}$$

que não representa nenhum número real. Por outro lado, se operarmos normalmente como se $\sqrt{-1}$ fosse um número, teremos:

---

[1] Os matemáticos usam <u>*i*</u> no lugar do ***j*** e os eletricistas preferem a letra <u>j</u> minúscula normal, já que estes últimos usam a letra <u>*i*</u> para representar a corrente. No entanto, na Unidade 3, Matrizes, é quase que universal a notação a_{ij} para representar o elemento genérico. Assim sendo optamos por ***j*** minúscula em negrita e itálica para representar a unidade imaginária.

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{36(-1)}}{2} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm 3\sqrt{-1}$$

ou seja

$$z_1 = -2 + 3\sqrt{-1}$$

e

$$z_1 = -2 - 3\sqrt{-1}$$

Vamos substituir tais “números” na equação original a fim de verificar se eles são realmente raízes. Ao procedermos desta forma devemos encarar o símbolo $\sqrt{-1}$ como se ele fosse mesmo um número em especial, lembrando inclusive que o seu quadrado é:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 .$$

Temos então:

$$(z_1)^2 + 4z_1 + 13 = \left(-2 + 3\sqrt{-1}\right)^2 + 4\left(-2 + 3\sqrt{-1}\right) + 13 =$$
$$= 4 - 12\sqrt{-1} - 9 - 8 + 12\sqrt{-1} + 13 = 0$$

e

$$(z_2)^2 + 4z_2 + 13 = \left(-2 - 3\sqrt{-1}\right)^2 + 4\left(-2 - 3\sqrt{-1}\right) + 13 =$$
$$= 4 + 12\sqrt{-1} - 9 - 8 - 12\sqrt{-1} + 13 = 0$$

A partir de tais considerações conclui-se ser possível resolver a equação do 2º grau mesmo quando temos $b^2 - 4ac < 0$, se operarmos com o símbolo $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$ como se fosse um número. Conforme já mencionado ele deve ter a propriedade de que $\boldsymbol{j}^2 = -1$, e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis que regem formalmente tais números. Temos então os números complexos da forma $x + \boldsymbol{j}y$ onde, conforme já mencionado, *x* e *y* são reais e $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$, tais como:

$$4 + \boldsymbol{j}6 \;,\quad \frac{1}{3} - \boldsymbol{j}2 \;,\quad \sqrt{3} + \boldsymbol{j}\frac{4}{9} \;,\quad -2 - \boldsymbol{j}\frac{3}{\sqrt{7}}$$

onde o novo elemento $\boldsymbol{j} = \sqrt{-1}$ é denominado **unidade imaginária**.

Utilizando tal notação, as raízes da equação que acabamos de resolver assumem as formas seguintes:

$$z_1 = -2 + \boldsymbol{j}3$$

e

$$z_2 = -2 - \boldsymbol{j}3$$

e no final da subseção **1.14.3** veremos por que tais raízes constituem um par complexo conjugado.

<u>Temos então de forma geral:</u>

$$\boxed{z = x + jy} \quad \textbf{(34)}$$

onde as grandezas reais *x* e *y* são denominadas as partes **real** e **imaginária** de *z*, respectivamente. Podemos, inclusive, usar as notações $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ para representar tais partes, ou seja:

$$\boxed{x = \mathrm{Re}(z)} \quad \textbf{(35)}$$

e

$$\boxed{y = \mathrm{Im}(z)} \quad \textbf{(36)}$$

Em particular quando $x = 0$ temos a expressão jy que será denominada **número imaginário puro** ou simplesmente **imaginário**, reservando-se o nome **número complexo** para o caso geral.

Quando $y = 0$ o número complexo reduz-se à sua parte real *x*.

(d) Uma vez que os números complexos não pertencem ao corpo dos números reais, alguns “desavisados de plantão” podem pensar que tais soluções são meramente fictícias e não representam nenhum fenômeno físico real. Para estes é bom mencionar que a corrente alternada que chega às indústrias, hospitais e residências, é representada por funções senoidais ou cossenoidais, que têm a mesma representação gráfica a menos de uma defasagem de 90º. Acontece que o equacionamento de circuitos elétricos sob excitação harmônica (senoidal) é bem mais simples no domínio da freqüência, no qual a solução para a corrente é dada por um “fasor” $\dot{I}$, que é um **número complexo**. A fim de relacionarmos o domínio da freqüência com o domínio do tempo é utilizada a relação

$$i(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{I}e^{j\omega t}\right)$$

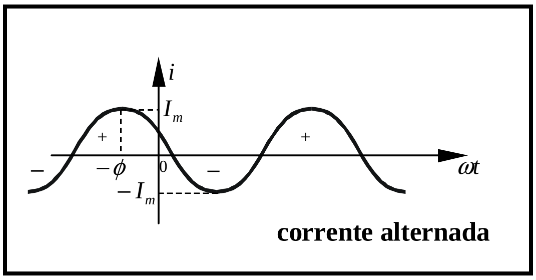


Fig. 1.12

que é bem conhecida do pessoal da área da Eletricidade. Ora, a corrente alternada senoidal do tipo $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ tem existência física real (qualquer dúvida é só tocar com um dedo no terminal da fase de uma tomada energizada!). Assim sendo, as **soluções complexas** ou **imaginárias** (sendo este último termo um tanto impróprio pois pode levar à conclusões erradas) estão bem longe de serem fictícias sendo, é bem verdade, artifícios engenhosos, nascidos no problema primordial de lidar com raízes de índices pares de números negativos.

Exemplo 1.12

Determine $x \in \mathbb{R}$ para que o número complexo $\left(5x^2 - 7x\right) + \boldsymbol{j}7$ seja imaginário puro.

Solução:

Para ele ser um número imaginário puro devemos ter parte real nula, ou seja:

$$5x^2 - 7x = 0 \therefore x\left(5x - 7\right) = 0 \therefore \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

1.14.2 Potências de *j*

As potências sucessivas de ***j*** reproduzem-se periodicamente de quatro em quatro, ou seja:

$$\boldsymbol{j}^0 = +1$$

$$\boldsymbol{j}^1 = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\boldsymbol{j}^3 = \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^4 = \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j}^2 = \left(-1\right)\left(-1\right) = +1$$

$$\boldsymbol{j}^5 = \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j}^3 = \left(-1\right)\left(-\boldsymbol{j}\right) = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^6 = \boldsymbol{j}^3 . \boldsymbol{j}^3 = \left(-\boldsymbol{j}\right)\left(-\boldsymbol{j}\right) = \boldsymbol{j}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{j}^7 = \boldsymbol{j}^3 . \boldsymbol{j}^4 = \left(-\boldsymbol{j}\right)\left(+1\right) = -\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^8 = \boldsymbol{j}^4 . \boldsymbol{j}^4 = \left(+1\right)\left(+1\right) = +1$$

$$\boldsymbol{j}^9 = \boldsymbol{j}^4 . \boldsymbol{j}^5 = \left(+1\right)\left(\boldsymbol{j}\right) = \boldsymbol{j}$$

....

Podemos escrever em geral:

$$\boldsymbol{j}^{4p} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p = 1$$

$$\boldsymbol{j}^{4p+1} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}^{4p+2} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p \boldsymbol{j}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{j}^{4p+3} = \left(\boldsymbol{j}^4\right)^p \boldsymbol{j}^3 = -\boldsymbol{j}$$

Regra geral: para determinar o valor de uma potência de $\boldsymbol{j}$ qualquer, basta dividir o expoente da potência por 4 e elevar $\boldsymbol{j}$ à potência determinada pelo resto da divisão.

Exemplo 1.13

Efetuar as seguintes potências:

a) $\boldsymbol{j}^7$; b) $\boldsymbol{j}^{513}$; c) $\boldsymbol{j}^{1998}$; d) $\boldsymbol{j}^{500}$

Solução:

a) $\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{j}^7 = \boldsymbol{j}^3 = -\boldsymbol{j}$

b) $\begin{array}{r|l} 513 & 4 \\ \hline 11 & 128 \\ 33 & \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{j}^{513} = \boldsymbol{j}$

c) $\begin{array}{r|l} 1998 & 4 \\ \hline 39 & 499 \\ 38 & \\ 2 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{j}^{1998} = \boldsymbol{j}^2 = -1$

d) $\begin{array}{r|l} 500 & 4 \\ \hline 10 & 125 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathrm{j}^{500} = \mathrm{j}^0 = 1$