Matrizes

1- Matrizes

Uma matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ é uma tabela de números reais de dimensão ou tipo mxn, isto é, com m linhas ou n colunas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Exemplos

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{1x3}$

(Matriz Linha)

2) $A=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1/3 \\ \pi \end{bmatrix}_{3x1}$

(Matriz Coluna)

3) $0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$

(Matriz Nula)

4) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$

(Matriz Quadrada)

Observação

Numa matriz quadrada A_{mxm} ou A_m (de ordem m) chamamos os elementos em que i = j de diagonal principal

5) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3x3}$

(Matriz Diagonal: $a_{ij}=0$, se $i \neq j$)

6) $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{mxn}$

(Matriz Identidade: $a_{ij}=1$, se $i=j$; $a_{ij}=0$, se $i \neq j$)

7) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow -A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2x3}$

(Matriz Oposta: $-A=(-a_{ij})_{mxn}$)

8) $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$

(Matriz Transposta: $A^t=(a_{ji})_{nxm}$)

9) $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} = A$

(Matriz Simétrica: $A^t = A$)

10) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} = -A$

(Matriz Antissimétrica: $A^t=-A$)

2 - Operações com Matrizes

Sejam $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$

Definimos:

A) $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2x2}$

B) $A-B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -8 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$

C) $2.A=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$

Observação

Notemos que a adição e a subtração só estarão definidas se as matrizes forem da mesma dimensão ou tipo.

3 - Multiplicação de Matrizes

O produto de duas matrizes só estará definido se o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

Assim: $A_{mxn} \, . \, B_{nxk} = (AB)_{mxk}$

Exemplos

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2x2}$

Como A_{2x3} e B_{3x2}, o produto A.B está definido e terá dimensão $2x2$. Para calcularmos, tomamos as linhas de A e multiplicamos, elemento a elemento, pelas colunas de B. A soma dos produtos obtidos constitui os elementos da matriz produto.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2x1 + 1x(-1) + 5x4 & 2x2 + 1x0 + 5x3 \\ 3x1 + (-1)x(-1) + 0x4 & 3x2 + (-1)x0 + 0x3 \end{bmatrix}_{2x2}$$
$$= \begin{bmatrix} 21 & 19 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{2x2}$$

2) Analogamente, o produto B.A também está definido. Entretanto ele terá dimensão 3x3, mostrando que, em geral, A.B $\neq$ B.A, isto é, o produto de matrizes não é comutativo. Assim: B.A= $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -5 \\ 17 & 1 & 20 \end{bmatrix}_{3x2}$

QUESTÕES DE MATRIZES

1. (UFPR-2014) Um criador de cães observou que as rações das marcas A, B, C e D contêm diferentes quantidades de três nutrientes, medidos em miligramas por quilograma, como indicado na primeira matriz abaixo. O criador decidiu misturar os quatro tipos de ração para proporcionar um alimento adequado para seus cães. A segunda matriz abaixo dá os percentuais de cada tipo de ração nessa mistura.

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{nutriente 1} \\ \text{nutriente 2} \\ \text{nutriente 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 210 & 370 & 450 & 290 \\ 340 & 520 & 305 & 485 \\ 145 & 225 & 190 & 260 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \text{percentuais de mistura} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} & \begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} \end{array}$$

Quantos miligramas do nutriente 2 estão presentes em um quilograma da mistura de rações?

A) 389 mg. B) 330 mg. C) 280 mg. D) 210 mg. E) 190 mg.

2. (INSPER-2014) Três amigos foram a uma papelaria para comprar material escolar. As quantidades adquiridas de cada produto e o total pago por cada um deles são mostrados na tabela.

Amigo	Quantidades Compradas de			Total Pago (R$)
	Cadernos	Canetas	Lápis	
Júlia	5	5	3	96,00
Bruno	6	3	3	105,00
Felipe	4	5	2	79,00

Os preços unitários, em reais, de um caderno, de uma caneta e de um lápis, são, respectivamente, x, y e z. Dessa forma, das igualdades envolvendo matrizes fornecidas a seguir, a única que relaciona corretamente esses preços unitários com os dados da tabela é

A) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 & 105 & 79 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 105 \\ 79 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 & 105 & 79 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 105 \\ 79 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 96 \\ 105 \\ 79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. (UERJ-2015) Observe a matriz A, quadrada e de ordem três.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,47 & 0,6 \\ 0,47 & 0,6 & x \\ 0,6 & x & 0,77 \end{pmatrix}$$

Considere que cada elemento a_{ij} dessa matriz é o valor do logaritmo decimal de (i+j).

O valor de x é igual a

A) 0,50 B) 0,70 C) 0,77 D) 0,87

4. (UEL-2014) Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz 4 × 4 dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz 4 × 4 se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário, coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição X = Y, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa CORRETA.

A) Pode-se ir da cidade A até B passando por outras cidades.

B) Pode-se ir da cidade D até B passando por outras cidades.

C) Pode-se ir diretamente da cidade D até C.

D) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.

E) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

5. (UFRRJ-2003) Observe a tabela.

Quantidade Comprada por Cada Amiga			
	Carne (Kg)	**Arroz (pct)**	**Café (pct)**
Laura	20	3	4
Simone	5	2	2
Lisa	10	2	3

Preço dos iInsumos em Cada Mercado			
	Mercado A	**Mercado B**	**Mercado C**
Carne (Kg)	R$ 6,00	R$ 5,50	R$ 5,50
Arroz (5 Kg)	R$ 4,00	R$ 4,50	R$ 3,00
Café (500 g)	R$ 2,00	R$ 2,00	R$ 3,00

Simone e duas vizinhas se encontraram após fazerem uma pesquisa de preços em três mercados. Levando-se em conta três itens de suas listas, a saber: carne, arroz e café e os preços desses insumos em cada mercado, conforme mostra a tabela acima, é CORRETO afirmar que

A) Lisa e Simone gastarão menos comprando no mercado C, do que gastariam no mercado B.

B) Simone e Lisa gastarão menos comprando no mercado B, do que gastariam nos mercados A ou C.

C) As três gastarão menos comprando no mercado A, do que gastariam no mercado B.

D) Laura e Simone gastarão menos comprando no mercado C, do que gastariam nos mercados A ou B.

E) Laura e Lisa gastarão menos comprando no mercado B, do que gastariam no mercado C.

6. (UEL-2003) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecidos por cada grama ingerida dos alimentos citados.

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array} ; \quad M = \begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array}$$

A) $\begin{bmatrix} 18,20 \\ 36,30 \\ 454,20 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 29,70 \\ 16,20 \\ 460,20 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 48,30 \\ 36,00 \\ 432,40 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 51,90 \\ 48,30 \\ 405,60 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{bmatrix}$

7. (UFRJ-2006) Uma fábrica de guarda-roupas utiliza três tipos de fechaduras (dourada, prateada e bronzeada) para guarda-roupas em mogno e cerejeira, nos modelos básico, luxo e requinte. A tabela 1 mostra a produção de móveis durante o mês de outubro de 2005, e a tabela 2, a quantidade de fechaduras utilizadas em cada tipo de armário no mesmo mês.

Produção de Armários em Outubro de 2005

Tabela 1

Madeira \ Modelo	Básico	Luxo	Requinte
Mogno	3	5	4
Cerejeira	4	3	5

Fechaduras Usadas em Outubro de 2005

Tabela 2

Tipo \ Madeira	Mógno	Cerejeira
Dourada	10	12
Prateada	8	8
Bronzeada	4	6

A quantidade de fechaduras usadas nos armários do modelo requinte nesse mês foi de

A) 170 B) 192 C) 120 D) 218 E) 188

GABARITO

Questões de Matrizes

1	2	3	4	5	6	7
A	D	B	A	D	E	D