GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

9ª edição | São Paulo – 2013

Atual Editora

Copyright desta edição:
SARAIVA S. A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
SAC: 0800-0117875
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — 9. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1680-1 (aluno)
ISBN 978-85-357-1681-8 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) – Testes I. Murakami, Carlos II. Título III: Conjuntos, funções.

12-12850 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 1

Gerente editorial: Lauri Cericato
Editor: José Luiz Carvalho da Cruz
Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos / Alexandre da Silva Sanchez / Juracy Vespucci / Guilherme Reghin Gaspar
Auxiliares de serviços editoriais: Rafael Rabaçallo Ramos / Margarete Aparecida de Lima / Vanderlei Aparecido Orso
Digitação e cotejo de originais: Guilherme Reghin Gaspar / Elillyane Kaori Kamimura
Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.) / Enio Rodrigo Lopes
Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.) / Renata Palermo / Rhennan Santos / Felipe Toledo / Eduardo Sigrist / Maura Loria / Patricia Cordeiro
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan
Projeto gráfico: Carlos Magno
Capa: Homem de Melo & Tróia Design
Imagem de capa: Buena Vista Images/Getty Images
Diagramação: TPG
Encarregada de produção e arte: Grace Alves
Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves
Impressão e Acabamento: Prol Editora Gráfica

729.170.009.001

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 1, Conjuntos e Funções, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I — Noções de lógica

6.

r	s	$r \vee s$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$(r \vee s)$	$p \rightarrow (r \vee s)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1

1 $p \rightarrow (r \wedge s)$ é falsa, por hipótese.

Então, isso significa que p é V, $(r \vee s)$ é F, ou seja, r e s são F.
Como o condicional $(q \wedge s) \leftrightarrow p$ é V e p é V, então $q \wedge \sim s$ é V; portanto, q é V.

CAPÍTULO II — Conjuntos

33. $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow e \in X$
$\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\} \Rightarrow a \in X, e \in X$
$\{b, c, d\} \cap X = \{c\} \Rightarrow c \in X, b \notin X$ e $d \notin X$
$X = \{a, c, e\}$

34. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$
$A \cap B = \{2, 3, 8\}$

$$A \cap C = \{2, 7\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ e } 7 \text{ pertencem a } A \\ 2 \text{ e } 7 \text{ pertencem a } C \end{cases}$$

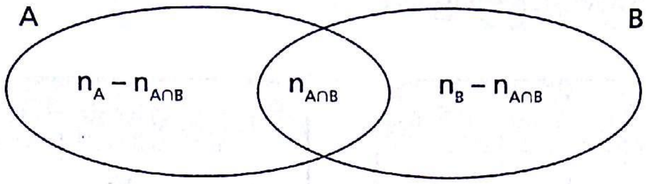
$$B \cap C = \{2, 5, 6\} \Rightarrow \begin{cases} 2, 5 \text{ e } 6 \text{ pertencem a } B \\ 2, 5 \text{ e } 6 \text{ pertencem a } C \end{cases}$$

$A \cup B = \{1, 2, ..., 7, 8\} \Rightarrow 9$ e 10 não pertencem a $A \cup B$ e, então, 9 e 10 pertencem a C. Portanto, $C = \{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

37. Como $(A \cap B) \cap C$ é subconjunto de A, temos $n(A \cap B \cap C) \leqslant 2$; então o número máximo é 2.

45. $y + 1 \leqslant 6 \Rightarrow y \leqslant 5 \Rightarrow F = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \overline{F} = \{6, 7, 8\}$

48.



$$n_{A\cup B} = \underbrace{[n_A - n_{A\cap B}]}_{①} + \underbrace{n_{A\cap B}}_{②} + \underbrace{[n_B - n_{A\cap B}]}_{③}$$

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$$

Obs.: ① elementos que pertencem só ao conjunto A

② elementos que pertencem aos conjuntos A e B

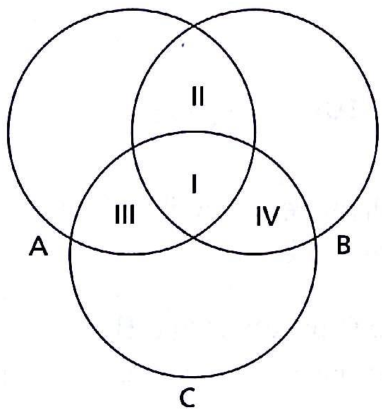
③ elementos que pertencem só ao conjunto B

49. $n_{(A\cup B)} = n_A + n_B - n_{(A\cap B)}$

$n_{(A\cup B)} = 4 + 5 - 3 = 6$

Então, o número de subconjuntos de A ∪ B é $2^6 = 64$.

50.



(I) $n_{A\cap B\cap C}$

(II) $n_{A\cap B} - n_{A\cap B\cap C}$

(III) $n_{A\cap C} - n_{A\cap B\cap C}$

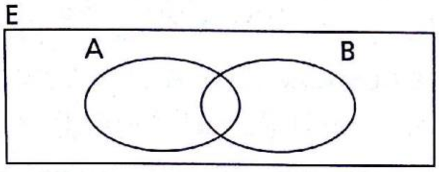
(IV) $n_{B\cap C} - n_{A\cap B\cap C}$

$$n_{A\cup B\cup C} = n_A + \{n_B - (II) - (I)\} + \{n_C - (III) - (IV) - (I)\}$$

$$n_{A\cup B\cup C} = n_A + \{n_B - [n_{A\cap B} - n_{A\cap B\cap C}] - n_{A\cap B\cap C}\} +$$
$$+ \{n_C - [n_{A\cap C} - n_{A\cap B\cap C}] - [n_{B\cap C} - n_{A\cap B\cap C}] - n_{A\cap B\cap C}\}$$

$$n_{A\cup B\cup C} = n_A + n_B + n_C - n_{A\cap B} - n_{A\cap C} - n_{B\cap C} + n_{A\cap B\cap C}$$

52. E: conjunto dos alunos da escola ($n_E = 415$)
A: conjunto dos alunos que estudam inglês ($n_A = 221$)
B: conjunto dos alunos que estudam francês ($n_B = 163$)



$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B} = \\ = 221 + 163 - 52 = 332$$
$$n_{\overline{A \cup B}} = n_E - n_{A \cup B} = 415 - 332 = 83$$

53. $[P' \cup (P \cap Q)] = \underbrace{(P' \cup P)}_{\text{conj. universo}} \cap (P' \cup Q) = P' \cup Q$

54. Como $C \subset B$, temos $n(B \cup C) = n(B) = 16$ e daí:

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$24 = n(A) + 16 - 4$
então, $n(A) = 12$
Portanto: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 12 - 4 = 8$.

b) $n(A \cap B \cap C) = n(A) - n(A - C) = 12 - 11 = 1$

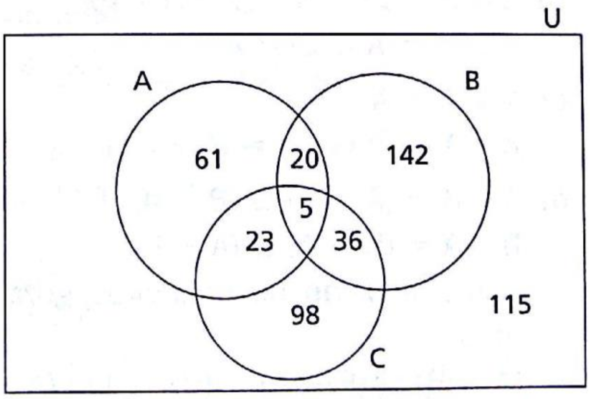
c) $n[B - (C \cup A)] = n(A \cup B) - n(A) - n(C) + n(A \cap B \cap C) =$
$= 24 - 12 - 6 + 1 = 7$

d) $n[(A \cap B) - C] = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 4 - 1 = 3$

e) $n[B - (A \cap B)] = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 4 = 12$

55. $\overline{A} = \{e, f, g, h, i\} \Rightarrow e, f, g, h, i \notin A$
$A \cap B = \{c, d\} \Rightarrow c, d \in A$ e $c, d \in B$
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\} \Rightarrow a, b, c, d, e, f \in A$ ou $\in B$
então, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$

56. Com base na tabela é possível montar o diagrama dos conjuntos e indicar o número de elementos de cada um.



a) o número de pessoas consultadas:
$n_U = 115 + 61 + 20 + 142 + 5 + 36 + 98 + 23 = 500$

b) o número de pessoas que só consomem a marca A:
$n_A - n_{A\cap B} - n_{A\cap C} + n_{A\cap B\cap C} = 109 - 25 - 28 + 5 = 61$

c) o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C:
$n_{\overline{A\cup C}} = n_U - n_{A\cup C} = 500 - (109 + 162 - 28) = 257$

d) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas:
$n_{A\cap B} + n_{B\cap C} + n_{C\cap A} - 2 \cdot n_{A\cap B\cap C} = 25 + 41 + 28 - 10 = 84$

58. B: conjunto dos indivíduos da raça branca
P: conjunto dos indivíduos da raça preta
A: conjunto dos indivíduos da raça amarela

$$\left.\begin{array}{l} n(B) = 70 \\ n(\overline{P}) = n(A\cup B) = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow n(A) = n(A\cup B) - n(B) = 280$$

a) número de indivíduos da comunidade: $2 \cdot n(A) = 560$

b) $n(A) = 280$

59. Matriz: $20\% \cdot 45\% = \dfrac{900}{10\,000}$

Santos: $35\% \cdot 20\% = \dfrac{700}{10\,000}$

Campinas: $x\% \cdot 35\% = \dfrac{35x}{10\,000}$

$$\frac{900}{10\,000} + \frac{700}{10\,000} + \frac{35x}{10\,000} = \frac{30}{100} \Rightarrow x = 40$$

60. a) $$\left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e, f, g\} \end{array}\right\} \Rightarrow A - B = \{a, b\} \text{ e } B - A = \{e, f, g\}$$

Então: $A \vartriangle B = \{a, b\} \cup \{e, f, g\} = \{a, b, e, f, g\}$.

b) $\forall A, A - \varnothing = A$ e $\varnothing - A = \varnothing$
$A \vartriangle \varnothing = A \cup \varnothing = A$

c) $\forall A, A - A = \varnothing$
$A \vartriangle A = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

d) $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$
$B \vartriangle A = (B - A) \cup (A - B)$
Como a união de conjuntos goza da propriedade comutativa, então:
$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) \Rightarrow A \vartriangle B = B \vartriangle A$.

CAPÍTULO III — Conjuntos numéricos

63. Chamando M_4, M_6 e M_{12} os conjuntos de múltiplos, temos:
$M_4 \cap M_6 = M_{12} \Rightarrow M_{12} \subset M_4$ e $M_{12} \subset M_6$
então X é formado por:
5 múltiplos de 12 (que também são múltiplos de 4 e 6)
$7 - 5 = 2$ múltiplos de 6 (que não são múltiplos de 4 ou 12)
$12 - 5 = 7$ múltiplos de 4 (que não são múltiplos de 6 ou 12)
8 números ímpares
num total de $5 + 2 + 7 + 8 = 22$ elementos

73. Seja $r_1 = \frac{a}{b}$, $r_2 = \frac{c}{d}$. Como $r_1 < r_2$, então $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc$.

Seja *r* a média aritmética entre r_1 e r_2: $r = \frac{ad + bc}{2bd}$.
Comparemos r_1 e *r*:

$$r_1 - r = \frac{a}{b} - \frac{ad + bc}{2bd} = \frac{ad - bc}{2bd} \Rightarrow r_1 - r < 0 \Rightarrow r_1 < r$$

Comparemos *r* e r_2:

$$r - r_2 = \frac{ad + bc}{2bd} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{2bd} \Rightarrow r - r_2 < 0 \Rightarrow r < r_2$$

Portanto, existe *r*, tal que $r_1 < r < r_2$.

76. Dividir *a* por 40 é o mesmo que multiplicar *a* pelo inverso de 40, que é $\frac{1}{40} = 0{,}025$.

77. $\alpha = 1 + 0{,}4 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + ... = 1{,}41111... = \frac{127}{90}$

78. Renda total do país A: $2 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^7 = 10 \cdot 10^{11}$
Renda total do país B: $1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^{11}$
A renda *per capita* dos dois países juntos é a renda total dividida pela população total:

$$\frac{10 \cdot 10^{11} + 2 \cdot 10^{11}}{7 \cdot 10^7} = 17\,142{,}86.$$

A renda *per capita* dos dois países juntos (novo país) será de aproximadamente 17000 dólares.

79. Pela lei de Boyle, temos:
$(P + \Delta P) \cdot (V + \Delta V) = K$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{125}{100} P_1 - P_1 = \frac{25}{100} P_1 = \frac{P_1}{4}.$$

Então: $\left(P + \frac{P}{4}\right) \cdot (V + \Delta V) = K$

$5P(V + \Delta V) = 4K$ e $PV = K \Rightarrow \Delta V = -\frac{V}{5}$, isto é, haverá uma diminuição correspondente à 5ª parte do volume inicial, ou seja, 20%.

82. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$

83. $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow a = 4$ e $b = -1$

84. Comparemos *a* e *g*:

$$a - g = \frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0.$$

Então, $a \geqslant g$.

85. a) Seja $a = \sqrt{2}$.

Então, $a^4 = (\sqrt{2})^4 = 4$ e $a^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$ são racionais.

b) $a^{12} \in \mathbb{Q}$ e $a^7 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^5 = \frac{a^{12}}{a^7} \in \mathbb{Q}$

$a^7 \in \mathbb{Q}$ e $a^5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^2 = \frac{a^7}{a^5} \in \mathbb{Q}$

$a^5 \in \mathbb{Q}$ e $a^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \frac{a^5}{a^4} = \frac{a^5}{(a^2)^2} \in \mathbb{Q}$

87. Prova-se com contraexemplos.

Um contraexemplo é o número racional 2 cuja raiz quadrada não é racional.

De fato, se $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ é número par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ é par $\Rightarrow q$ é par.

Mas *p* e *q* pares é absurdo, pois $\text{mdc}(p, q) = 1$.

88. Fazendo $r = \frac{x + 1}{x} = -1$, temos $x + 1 = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, ou seja,

$$-1 = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{-\frac{1}{2}}.$$

Analogamente, fazendo *r* assumir cada um dos valores 0, 1, 2 e 3 e tentando calcular *x* real, só não conseguimos quando $r = 1$.

98. 1º) P(1) é verdadeira porque $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

2º) Admitamos a validade para n = k:

$P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$

e provemos que vale para n = k + 1, isto é:

$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Temos:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + k}_{P(k)} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

99. 1º) P(0) é verdadeira porque $2 = \frac{(0+1)(4+0)}{2}$.

2º) Admitamos a validade para n = k:

$P(k)$: $2 + 5 + 8 + ... + (2 + 3k) = \frac{(k+1)(4+3k)}{2}$

e provemos que vale para n = k + 1, isto é:

$2 + 5 + 8 + ... + (2 + 3k) + [2 + 3(k+1)] = \frac{(k+2)[4 + 3(k+1)]}{2}$.

Temos:

$$\underbrace{2 + 5 + 8 + ... + (2 + 3k)}_{P(k)} + [2 + 3(k+1)] =$$

$$= \frac{(k+1)(4+3k)}{2} + 2 + 3(k+1) = \frac{(k+1)(4+3k) + 4 + 6(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{3k^2 + 13k + 14}{2} = \frac{(k+2)(3k+7)}{2}$$

100. 1º) P(1) é verdadeira porque $2^0 = 2^1 - 1$.

2º) Admitamos a validade de P(k − 1), isto é:

$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{k-2} = 2^{k-1} - 1$ e, então, devemos provar que vale P(k), ou seja,

$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{k-2} + 2^{k-1} = 2^k - 1$.

Temos:

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{k-2}}_{P(k-1)} + 2^{k-1} = 2^{k-1} - 1 + 2^{k-1} =$$

$$= 2 \cdot 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$$

101. 1º) P(1) é verdadeira porque $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$.

2º) Admitamos que vale para n = k, isto é,

$P(k)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ e provemos que vale para n = k + 1, ou seja:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Temos:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2}_{P(k)} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

102. 1º) P(1) é verdadeira porque $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1 = 1^3$.

2º) Admitamos válida para n = k, isto é:

$P(k)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ e provemos que vale para n = k + 1, isto é:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Temos:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}_{P(k)} + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

104. 1º) P(1) é verdadeira porque $6 \mid 1(1+1)(1+2)$.

2º) Admitamos válida para n = k, isto é, $6 \mid k(k+1)(k+2)$ e provemos que vale para n = k + 1: $6 \mid (k+1)(k+2)(k+3)$.

Temos:

$$(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 6 \mid k(k+1)(k+2) \\ 6 \mid 3(k+1)(k+2) \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \mid k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \mid (k+1)(k+2)(k+3)$$

105. 1º) P(0) é válida: $2 \mid 0$.

2º) Admitamos verdadeira para $n = k$, isto é, $2 \mid (k^2 + k)$, ou seja, $2 \mid k(k + 1)$ e provemos que vale para $n = k + 1$:

$2 \mid [(k + 1)^2 + (k + 1)] \Leftrightarrow 2 \mid (k + 1)(k + 2)$

$(k + 1)^2 + (k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1) =$

$= (k + 1)(k + 2) = k(k + 1) + 2(k + 1)$

$$\left.\begin{matrix} 2 \mid k(k+1) \\ 2 \mid 2(k+1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \mid k(k + 1) + 2(k + 1) \Rightarrow 2 \mid (k + 1)(k + 2)$$

106. 1º) P(0) é verdadeira, pois $3 \mid (0^3 + 2 \cdot 0)$.

2º) Admitamos P(k) verdadeira, ou seja, $3 \mid (k^3 + 2k)$ e provemos que P(k +1) é verdadeira, ou seja:

$3 \mid [(k + 1)^3 + 2(k + 1)]$.

Temos:

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) =$

$= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$

$$\left.\begin{matrix} 3 \mid k^3 + 2k \\ 3 \mid 3(k^2 + k + 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 \mid (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 \mid [(k + 1)^3 + 2(k + 1)]$

107. 1º) P(1) é válida porque $1 + 1 = (1 + 1)$.

2º) Admitamos que seja válida para $n = k$:

$P(k): (1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1$ e provemos que vale para $n = k + 1$, isto é:

$(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) = k + 2.$

Temos:

$$\underbrace{(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{P(k)}\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) = (k + 1)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) =$$

$$= (k + 1)\left(\frac{k + 1 + 1}{k + 1}\right) = k + 2$$

108. 1º) P(1) é válida: $\frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$

2º) Admitamos que seja válida para $n = k$:

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k + 1)} = \frac{k}{k + 1}$ e provemos que é válida para $n = k + 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Temos:

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}}_{P(k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

109. 1º) P(1) é verdadeira: $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 1(1+1) = 1 \cdot 2.$

2º) Admitamos que seja válida para $n = k$:

$P(k) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ e provemos que vale para $n = k + 1$:

$$P(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Temos:

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1)}_{P(k)} + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

111. 1º) P(0) é verdadeira: $2^0 > 0$.

2º) Admitamos verdadeira para $n = k$: $2^k > k$, com $k > 1$, e provemos que vale para $n = k + 1$: $2^{k+1} > k + 1$.

Temos: $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 > k + 2 > k + 1$.

112. 1º) P(1) é verdadeira: $1^3 > \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4}.$

2º) Admitamos P(k): $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 > \frac{k^4}{4}$ verdadeira e provemos que vale P(k + 1): $1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 > \frac{(k+1)^4}{4}.$

Temos:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + k^3}_{P(k)} + (k+1)^3 > \frac{k^4}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{k^4 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4} =$$

$$= \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 6k^2 + 8k + 3}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^4}{4} + \frac{6k^2 + 8k + 3}{4} > \frac{(k+1)^4}{4}$$

pois $6k^2 + 8k + 3 > 0, \forall k$.

113. 1º) P(1) é válida: $(1 + a)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot a$.

2º) Suponhamos válida para $n = k$: $(1 + a)^k \geqslant 1 + ka$ e provemos que vale para $n = k + 1$: $(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)a$.

Temos:

$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k \cdot (1 + a) \geqslant (1 + ka)(1 + a) =$

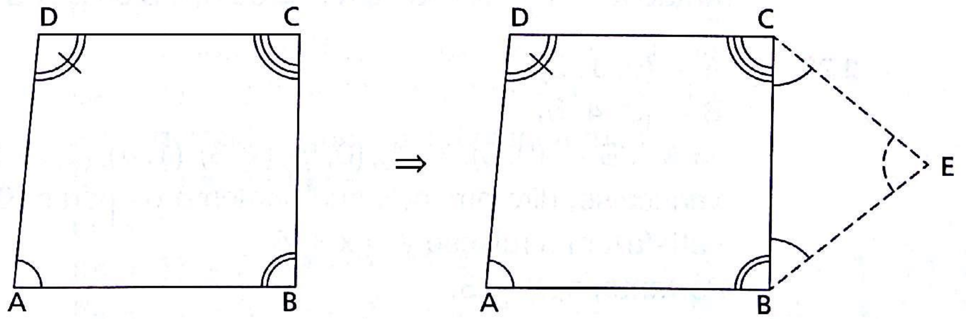
$= 1 + ka + a + ka^2 \geqslant 1 + ka + a = 1 + (k + 1)a$.

115. 1º) P(3) é verdadeira:

$S_3 = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$ (soma dos ângulos internos de um triângulo).

2º) Admitamos válido para $n = k$: $S(k) = (k - 2) \cdot 180°$ e provemos que é verdadeira para $n = k + 1$: $S(k + 1) = (k - 1) \cdot 180°$.

Observemos que, ao acrescentar um vértice (E), na verdade estamos acrescentando, à figura anterior, um triângulo (BCE) cuja soma dos ângulos internos é 180°.



Então, temos:

$$S_{k+1} = S_k + 180° = (k - 2) \cdot 180° + 180° =$$
$$= 180° (k - 2 + 1) = (k - 1) \cdot 180°$$

116. 1º) P(0) é verdadeira, pois $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, que é unitário e portanto tem $2^0 = 1$ elemento.

2º) P(1) é verdadeira, pois $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \varnothing\}$, que é binário e portanto tem $2^1 = 2$ elementos.

3º) P(2) é verdadeira, pois $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing\}$ é quartenário e portanto tem $2^2 = 4$ elementos.

4º) Admitamos que a proposição seja verdadeira para um conjunto A com *k* elementos, ou seja, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^k elementos. Provemos que a proposição é verdadeira para um conjunto B com $k + 1$ elementos, ou seja, $\mathcal{P}(B)$ tem 2^{k+1} elementos.

Suponhamos que $B = A \cup \{b\}$, ou seja, b é o elemento que está em B e não pertence a A. Então $\mathcal{P}(B)$ é formado com os subconjuntos de A (que são 2^k) e mais a reunião de {b} com cada um desses subconjuntos (que são outros 2^k conjuntos).

Conclusão: $\mathcal{P}(B)$ possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos.

Observação: Para melhor entender, veja como fizemos para passar de $\mathcal{P}(\{a\})$ para $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

CAPÍTULO IV — Relações

122. Utiliza-se a propriedade: se X é subconjunto de X' e Y é subconjunto de Y', então $X \times Y$ é subconjunto de $X' \times Y'$ e também vale a recíproca.

Por exemplo:

$$A \times B \subset X' \times Y' \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset X' \Leftrightarrow X' = A \text{ ou } B \text{ ou } C \\ B \subset Y' \Leftrightarrow Y' = B \text{ ou } C \end{cases}$$

então $X' \times Y' = A \times B$ ou $A \times C$ ou $B \times B$ ou $B \times C$ ou $C \times B$ ou $C \times C$.

128. $\left.\begin{array}{l} A = \{0, 1, 2\} \\ B = \{3, 4, 5\} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$.

Verifica-se, diretamente, que somente os pares (0, 4), (0, 5) e (1, 5) satisfazem a relação $y \geqslant x + 4$.

Portanto, $n(D) = 3$.

CAPÍTULO V — Introdução às funções

155. Fazendo $x = 0$, devemos ter:

$f(m \cdot 0) = m \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = m \cdot f(0)$

Então:

$m = 1 \Rightarrow f(0)$ é qualquer real.

$m \neq 1 \Rightarrow (m - 1) \cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

156. $f(3 + \sqrt{2}) = f(3) \cdot f(\sqrt{2})$

Calculando f(3), vem:

$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$

$f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) = 4 \cdot 2 = 8$

Então: $f(3 + \sqrt{2}) = f(3) \cdot f(\sqrt{2}) = 8 \cdot 4 = 32$.

157. a) $f(1) = f(0 + 1) = 2 \cdot f(0) + 3 = 3$

$f(2) = f(1 + 1) = 2 \cdot f(1) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$f(3) = f(2 + 1) = 2 \cdot f(2) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$

$f(4) = f(3 + 1) = 2 \cdot f(3) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$

$f(5) = f(4 + 1) = 2 \cdot f(4) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
f(5) = 93 &= 2 \cdot 45 + 3 = \\
&= 2 \cdot (2 \cdot 21 + 3) + 3 = \\
&= 2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot 9 + 3) + 3] + 3 = \\
&= 2 \cdot \{2 \cdot [2(2 \cdot 3 + 3) + 3] + 3\} + 3 = \\
&= 2 \cdot \{2 \cdot [2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3] + 3\} + 3 = \\
&= 2 \cdot \{2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3\} + 3 = \\
&= 2^4 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 = \\
&= 3(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)
\end{aligned}$$

ou seja: $f(n) = 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1)$.

b) 1º) Vale para $n = 1$, isto é, $f(1) = 3 \cdot (2^0) = 3$.

2º) Admitamos verdadeira para

$n = k$: $f(k) = 3(2^{k-1} + 2^{k+2} + \ldots + 2 + 1)$

e provemos que é válida para $n = k + 1$, ou seja,

$f(k + 1) = 3(2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1)$.

Considerando a função definida, temos:

$f(k + 1) = 2 \cdot f(k) + 3$

Então:

$f(k + 1) = 2 \cdot [3 \cdot (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1)] + 3$

$f(k + 1) = 3 \cdot [2 \cdot (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1)] + 3$

$f(k + 1) = 3 \cdot (2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2^2 + 2) + 3$

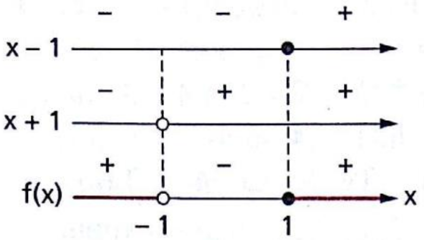
$f(k + 1) = 3 \cdot (2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2^2 + 2 + 1)$

165. $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \text{ se } x \geqslant 0 \\ f(x) \neq g(x) \text{ se } x < 0 \end{cases}$

$g(x) = x$

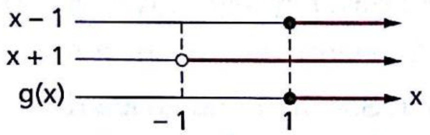
Portanto, f(x) e g(x) não são iguais.

166. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$ está definida se $\dfrac{x - 1}{x + 1} \geqslant 0$, ou seja:



$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

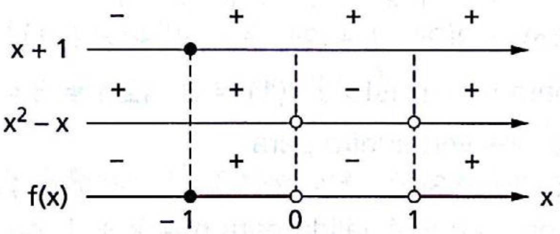
$g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ está definida se $x - 1 \geqslant 0$ e $x + 1 > 0$, ou seja:



$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

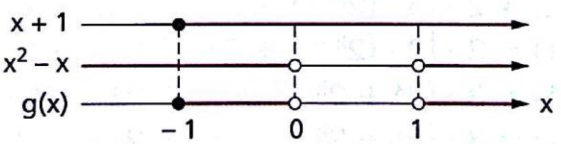
$f(x)$ e $g(x)$ serão iguais somente no conjunto $x \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

167. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2 - x}}$ está definida se $\dfrac{x+1}{x^2-x} \geqslant 0$.



$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 0$ ou $x > 1\}$

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}}$ está definida se $x + 1 \geqslant 0$ e $x^2 - x > 0$.



$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 0$ ou $x > 1\}$

Por possuírem exatamente o mesmo domínio, $f(x) = g(x)$.

168. $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

Não são iguais porque os domínios são diferentes.

CAPÍTULO VI — Função constante — Função afim

175. a) $\begin{cases} a + b = \dfrac{3}{4} \ (1) \\ a - b = -\dfrac{1}{4} \ (2) \end{cases}$

Somando membro a membro (1) e (2), vem:

$2a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Substituindo $a = \dfrac{1}{4}$ em (1), temos $b = \dfrac{1}{2}$. Daí vem:

$a = \dfrac{1}{x - y} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x - y = 4$ (3)

$b = \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x + y = 2$ (4)

O sistema formado por (3) e (4) é $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Somando membro a membro (3) e (4), vem: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$.

Substituindo $x = 3$ em (4), temos: $y = -1$, isto é, $S = \{(3, -1)\}$.

b) Fazendo $\dfrac{1}{x + y + 1} = a$ e $\dfrac{1}{2x - y + 3} = b$, vem:

$\begin{cases} 3a - 2b = \dfrac{5}{12} \\ 2a + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + 4b = -\dfrac{5}{6} \\ 6a + 9b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$ e $b = \dfrac{1}{6}$.

Então: $\begin{cases} x + y + 1 = 4 \\ 2x - y + 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2$ e $y = 1$.

$S = \{(2, 1)\}$.

178. x = nº de bolas brancas
y = nº de bolas pretas

após 1ª retirada: $\dfrac{x - 15}{y} = \dfrac{1}{2}$ (1)

após 2ª retirada: $\dfrac{x - 15}{y - 10} = \dfrac{4}{3}$ (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem: $x = 23$ e $y = 16$.

179. $\begin{cases} f(-1) = -a + b = 3 \\ f(1) = a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$ e $b = 2$

Então, $f(x) = -x + 2$ e daí $f(3) = -1$.

186. A partir do gráfico verificamos que a função C(x) passa pelo ponto (8, 520) e tem coeficiente linear 400.

$C(x) = ax + 400 \Rightarrow C(8) = 8a + 400 = 520 \Rightarrow a = 15$

Portanto, $C(x) = 15x + 400$.

Considerando um custo de R$ 700,00, vem:

$15x + 400 = 700 \Rightarrow x = 20$ litros.

187. a) $x \leqslant 1637{,}11 \Rightarrow f(x) = 0$

$1637{,}12 \leqslant x \leqslant 2453{,}50 \Rightarrow f(x) = \frac{3x}{40} - 122{,}78$

$2453{,}51 \leqslant x \leqslant 3271{,}38 \Rightarrow f(x) = \frac{3x}{20} - 306{,}80$

$3271{,}39 \leqslant x \leqslant 4087{,}65 \Rightarrow f(x) = \frac{9x}{40} - 552{,}15$

$x > 4087{,}65 \Rightarrow f(x) = \frac{11x}{40} - n$

b) Para não haver descontinuidade em $x = 4087{,}65$, efetuamos:

$\frac{9x}{40} - 552{,}15 = \frac{11x}{40} - n$

$n = \frac{2x}{40} + 552{,}15 \Rightarrow n = \frac{2 \cdot 4087{,}65}{40} + 552{,}15 \Rightarrow n = 756{,}53$

188. Seja H a herança,

x a parte da mãe,

2x a parte de cada filho do sexo masculino,

3x a parte da filha.

Então: $H = x + 2 \cdot 2x + 3x = 8x \Rightarrow x = \frac{H}{8}$.

mãe: $\frac{H}{8}$; cada menino: $\frac{H}{4}$; a menina: $\frac{3H}{8}$

189. $S = vt \Rightarrow \begin{cases} S = 275 \cdot t_h \\ S = 660 \cdot t_j \\ t_j = t_h - 7 \end{cases} \Rightarrow 275 \cdot t_h = 660(t_h - 7) \Rightarrow t_h = 12$

Então: $S = 275 \cdot 12 = 3300$.

A distância entre São Paulo e Boa Vista é de 3300 km.

190. 110 trabalhadores $\begin{cases} \text{100 homens com média salarial 265} \\ \text{10 mulheres com média salarial } x \end{cases}$

$\frac{100 \cdot 265 + 10x}{110} = 250 \Rightarrow x = 100$

O salário médio das mulheres é de R$ 100,00.

191. x = salário/hora de Paulo e Joana.

Paulo trabalhou 40 minutos $\left(\frac{2}{3} \text{ de hora}\right)$ a mais que Joana e, por esse período, recebeu 150.

Então: $\frac{2}{3}x = 150 \Rightarrow x = 225$.

Portanto, Paulo recebeu $4 \cdot 225 = 900$ e $\frac{1}{10} \cdot 900 = 90$.

Um décimo do que Paulo recebeu são R$ 90,00.

192. A engrenagem *a* tem 18 dentes e a engrenagem *c* tem 36 dentes. Ambas as engrenagens dão um número inteiro de voltas quando os números de dentes que "passam" pelo ponto de contato com a engrenagem *b* forem um múltiplo comum de 18 e 36.

O mmc(18, 36) é 36. Então, se *c* der uma volta e *a* der 2 voltas, as duas retornam à situação inicial.

193. Quando o piloto mais veloz (72 segundos por volta) completar *x* voltas, o piloto menos veloz (75 segundos por volta) terá dado $(x - 1)$ voltas.

Então, temos:

$72x = 75(x - 1) \Rightarrow x = 25$.

205. $f(x)$ passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(2, -2)$.

$$\begin{cases} 0 = 3a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = -6 \Rightarrow f(x) = 2x - 6$$

$g(x)$ passa por $(0, 1)$ e $(2, -2)$.

$$\begin{cases} 1 = b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \text{ e } b = 1 \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{2}x + 1$$

$h(x)$ passa por $(0, 1)$ e $(-1, -1)$.

$$\begin{cases} 1 = b \\ -1 = -a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1 \Rightarrow h(x) = 2x + 1$$

a) $f(x) > g(x) \Rightarrow 2x - 6 > -\frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow x > 2$

b) $g(x) \leqslant h(x) \Rightarrow -\frac{3}{2}x + 1 \leqslant 2x + 1 \Rightarrow x \geqslant 0$

c) $f(x) \geqslant h(x) \Rightarrow 2x - 6 \geqslant 2x + 1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant h(x)$

d) $g(x) > 4 \Rightarrow -\frac{3}{2}x + 1 > 4 \Rightarrow x < -2$

e) $f(x) \leqslant 0 \Rightarrow 2x - 6 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$

209. $\dfrac{6{,}3 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 2 + 3x}{6} \geqslant 6{,}5$

$6{,}3 + 9 + 3x \geqslant 39$

$3x \geqslant 23{,}7 \Rightarrow x \geqslant 7{,}9$

211. a) $\dfrac{3x - 2}{1 - x} \leqslant -3 \Rightarrow \dfrac{1}{1 - x} \leqslant 0 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

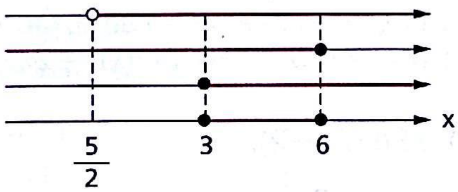
b) $\dfrac{4x - 5}{2x - 1} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{-3}{2x - 1} \geqslant 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2}\right\}$

c) $\dfrac{-4 - 3x}{3x + 2} < -1 \Rightarrow \dfrac{-2}{3x + 2} < 0 \Rightarrow 3x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{2}{3}$

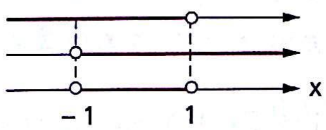
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{2}{3}\right\}$

213. c) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \Rightarrow x \leqslant 6 \\ x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 6\}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5}{1 - x} \leqslant -2 \Rightarrow \dfrac{-3}{1 - x} \leqslant 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \Rightarrow \dfrac{3}{x + 1} > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

214. f(x) passa pelos pontos $(-3, 1)$ e $(1, -4)$.

$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{5}{4}$ e $b = -\dfrac{11}{4} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{11}{4}$

g(x) passa por (4, 4) e (1, −4).

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3} \text{ e } b = -\frac{20}{3} \Rightarrow g(x) = \frac{8}{3}x - \frac{20}{3}$$

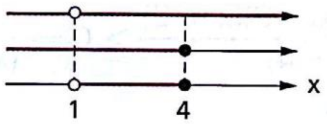
h(x) passa por (4, 4) e (−3, 1).

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ -3a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{7} \text{ e } b = \frac{16}{7} \Rightarrow h(x) = \frac{3}{7}x + \frac{16}{7}$$

a) $f(x) < g(x) \leqslant h(x)$

$$f(x) < g(x) \Rightarrow -\frac{5}{4}x - \frac{11}{4} < \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \Rightarrow x > 1$$

$$g(x) \leqslant h(x) \Rightarrow \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \leqslant \frac{3}{7}x + \frac{16}{7} \Rightarrow x \leqslant 4$$

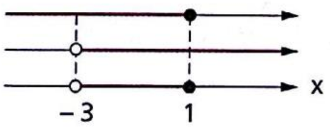


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 4\}$

b) $g(x) \leqslant f(x) < h(x)$

$$g(x) \leqslant f(x) \Rightarrow \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \leqslant -\frac{5}{4}x - \frac{11}{4} \Rightarrow x \leqslant 1$$

$$f(x) < h(x) \Rightarrow -\frac{5}{4}x - \frac{11}{4} < \frac{3}{7}x + \frac{16}{7} \Rightarrow x > -3$$

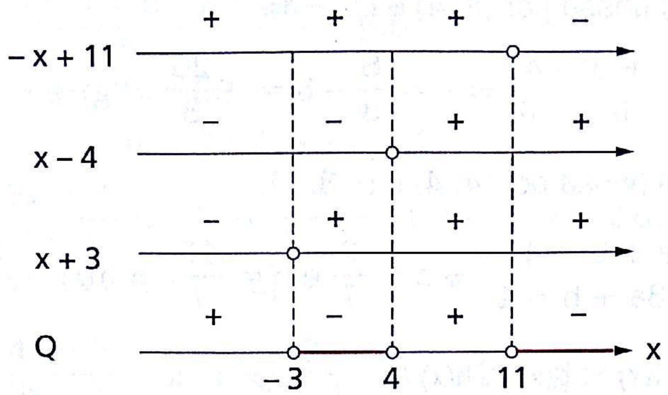


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 1\}$

c) $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$

$$\left.\begin{aligned} h(x) \leqslant f(x) &\Rightarrow \frac{3}{7}x + \frac{16}{7} \leqslant -\frac{5}{4}x - \frac{11}{4} \Rightarrow x \leqslant -3 \\ f(x) < g(x) &\Rightarrow -\frac{5}{4}x - \frac{11}{4} < \frac{8}{3}x - \frac{20}{3} \Rightarrow x > 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \varnothing$$

223. a) $\dfrac{1}{x-4} < \dfrac{2}{x+3} \Rightarrow \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{2}{x+3} < 0 \Rightarrow \dfrac{-x+11}{(x-4)(x+3)} < 0$

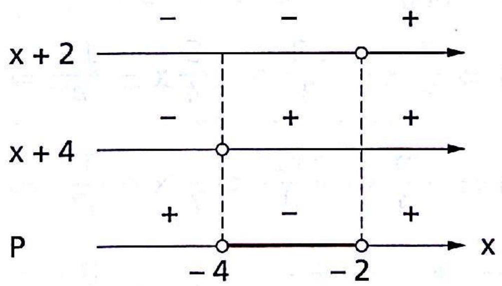


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4 \text{ ou } x > 11\}$

c) $\dfrac{x+1}{x+2} > \dfrac{x+3}{x+4} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x+3}{x+4} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0 \Rightarrow \dfrac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)(x+4) < 0$

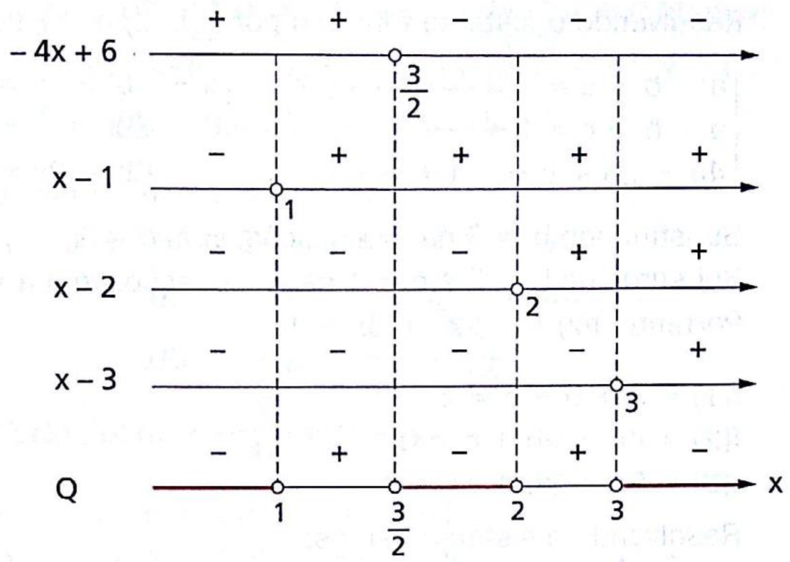


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$

f) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x-3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-3) - 3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0 \Rightarrow$

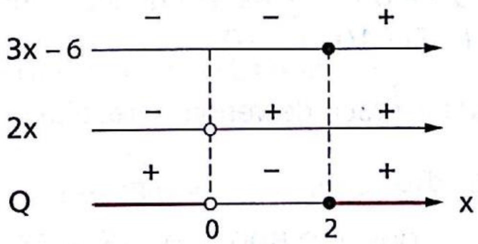
$\Rightarrow \dfrac{-4x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2 \text{ ou } x > 3\right\}$$

224. $-\frac{4}{x} + \frac{3}{2} \geqslant -\frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{4}{x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{3}{x} + \frac{3}{2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{3x - 6}{2x} \geqslant 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$$

CAPÍTULO VII — Funções quadráticas

226. $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida se $m^2 - 4 \neq 0$, isto é, se $m \neq 2$ e $m \neq -2$.

227. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Então: $f(-1) = a - b + c = -4$ (1)

$f(1) = a + b + c = 2$ (2)

$f(2) = 4a + 2b + c = -1$ (3)

Resolvendo o sistema formado por (1), (2) e (3), temos:

$$\begin{cases} a - b + c = -4 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = -4 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \\ 6b - 3c = 15 \end{cases}$$

Substituindo $b = 3$ na 3ª equação, vem $c = 1$.
Substituindo $b = 3$ e $c = 1$ na 1ª equação, vem $a = -2$.
Portanto, $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$.

228. $f(1) = a + b + c = 4$
$f(2) = 4a + 2b + c = 0$
$f(3) = 9a + 3b + c = -2$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2b + 3c = 16 \\ -6b - 8c = -38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2b + 3c = 16 \\ c = 10 \end{cases}$$

Substituindo $c = 10$ na 2ª equação, obtemos $b = -7$.
Substituindo $c = 10$ e $b = -7$ na 1ª equação, vem $a = 1$.
Então: $abc = 1 \cdot (-7) \cdot 10 = -70$.

230. quantidade vendida × preço de venda = receita

$$x \cdot \left(50 - \frac{x}{2}\right) = 1\,250$$

Então, temos: $x^2 - 100x + 2\,500 = 0 \Rightarrow x = 50$.

231. $$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{x + y}{xy} = \frac{7}{12} \\ xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \quad (1) \\ xy = 12 \quad (2) \end{cases}$$

Considerando (1) e (2), temos: $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 4$.
Como $xy = 12$, então, para $x = 3$, $y = 4$ e para $x = 4$, $y = 3$.
$S = \{(3, 4), (4, 3)\}$.

232. a) $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -1$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \quad (1) \\ 2x + xy = -8 \quad (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), vem:

$2x + x(4 - 2x) = -8 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ (item *a*)

Então, para $x = 4$, $y = -4$ e para $x = -1$, $y = 6$.

$S = \{(4, -4), (-1, 6)\}$.

236. $a \neq 0 \Rightarrow m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$

$\Delta > 0 \Rightarrow (2m + 3)^2 - 4m(m - 1) > 0$

$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 + 4m > 0$

$16m > -9 \Rightarrow m > -\dfrac{9}{16}$

Portanto: $m > -\dfrac{9}{16}$ e $m \neq 1$.

237. $a \neq 0 \Rightarrow m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow (3 - 2m)^2 - 4(m + 2)(m - 1) \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -16m + 17 \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \dfrac{17}{16}$

Portanto: $m \leqslant \dfrac{17}{16}$ e $m \neq -2$.

238. $a \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4m(m + 1) = 0 \Rightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -1$ ou $m = \dfrac{1}{3}$

Portanto: $m = -1$ ou $m = \dfrac{1}{3}$.

239. $a = 1 \neq 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (3m + 2)^2 - 4(m^2 + m + 2) = 0 \Rightarrow 5m^2 + 8m - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \dfrac{2}{5}$ ou $m = -2$

Portanto: $m = \dfrac{2}{5}$ ou $m = -2$.

240. $a \neq 0 \Rightarrow m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2m + 3)^2 - 4(m + 1)(m - 1) < 0 \Rightarrow 12m < -13 \Rightarrow m < -\dfrac{13}{12}$

Portanto: $m < -\dfrac{13}{12}$.

241. $a \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4m(m - 2) < 0 \Rightarrow 4m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\dfrac{1}{4}$

Portanto: $m < -\dfrac{1}{4}$.

242. Em $ax^2 + bx + c = 0$, temos $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Em $\dfrac{a}{\alpha}x^2 + \beta bx + \alpha\beta^2 c = 0$, temos:

$$\Delta = \beta^2 b^2 - 4\frac{a}{\alpha}\alpha\beta^2 = \beta^2(b^2 - 4ac)$$

$$x = \frac{-\beta b \pm \beta\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\dfrac{a}{\alpha}} = \alpha\beta \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou seja, são as mesmas raízes, multiplicadas por $\alpha\beta$.

243. Em $ax^2 + bx + c = 0$, temos $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

244. a) $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{2}$

b) $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5$

d) Sabendo que $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, então:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{4}.$$

e) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{\frac{29}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{29}{2}$

f) Sabendo que $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$, temos:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) =$$
$$= \frac{155}{8}.$$

245. $2x^2 - 2mx + 3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{2} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = m \\ 3x_2^2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (rejeitada) ou } x_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto: $4x_2 = m \Rightarrow m = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$.

246. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = 47 \end{cases}$

Como as raízes são inteiras e 47 é número primo, então $x_1 = 1$ ou $x_2 = 47$ (ou vice-versa).

Portanto: $|x_1 - x_2| = |1 - 47| = 46$.

247. $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s^2 + r^2}{r^2s^2}$

Sabendo que $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2 \Rightarrow r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs =$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Portanto, vem: $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s^2 + r^2}{r^2s^2} = \dfrac{\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\dfrac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b^2 - 2ac}{c^2}$.

248. $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 = -m > 0 \Rightarrow m < 0$

$\left.\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = m^2 - m - 12 \\ x_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ ou } m = -3$

então, $m = -3$.

249. $x^2 - 5x + k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = k & (2) \end{cases}$

$x^2 - 7x + 2k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = 7 & (3) \\ x' \cdot x'' = 2k & (4) \end{cases}$

Fazendo $x' = 2x_1$ em ③ e ④, vem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x'' = 7 \\ 2x_1 \cdot x'' = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - x_2) + x'' = 7 \\ 2 \cdot \dfrac{k}{x^2} \cdot x'' = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' - 2x_2 = -3 \\ \dfrac{x''}{x^2} = 1 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

Substituindo $x_2 = 3$ em ①, vem $x_1 = 2$.

Em ②, $x_1 \cdot x_2 = k \Rightarrow 2 \cdot 3 = k \Rightarrow k = 6$.

250. Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Já provamos no exercício 243 que $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Então, temos: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$.

252. a) $$\begin{cases} S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2} \\ P = (x_1 \cdot x_2)^2 = \dfrac{c^2}{a^2} \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - \left(\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)x + \dfrac{c^2}{a^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$.

b) $$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \dfrac{-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{c}{a}} = -\dfrac{b}{c} \\ \dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{\dfrac{c}{a}} = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - \left(-\dfrac{b}{c}\right)x + \dfrac{a}{c} = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$.

c) $$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\dfrac{c}{a}} = \dfrac{b^2 - 2ac}{ac} \\ \dfrac{x_1}{x_2} \cdot \dfrac{x_2}{x_1} = 1 \end{cases}$$

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{b^2 - 2ac}{ac}\right)x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

d) Sabendo que $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^3$, temos:

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^3 - 3\dfrac{c}{a}\left(-\dfrac{b}{a}\right) = \\ = \dfrac{-b^3 + 3abc}{a^3} \\ x_1^3 \cdot x_3^3 = \dfrac{c^3}{a^3} \end{cases}$$

$$x^2 - \left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right)x + \frac{c^3}{a^3} = 0 \Rightarrow a^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + c^3 = 0$$

253. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = 4 \Rightarrow \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = 4 \Rightarrow \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\left[\dfrac{2(m-1)}{m}\right]^2 - 2}{1} = 4 \Rightarrow m^2 + 4m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{6}$$

254. Sendo S = p' e Q = q' de um trinômio g(x), em que $\dfrac{1}{a}$ e $\dfrac{1}{b}$ são as raízes, temos:

$$\begin{cases} p' = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{p}{q} \\ q' = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^2 - \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$$

255. $m = 2x - 1$ e $n = 2x + 1$ são ímpares, positivos e consecutivos.
$m \cdot n = 1599 \Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 1599 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 1599 \Rightarrow x = 20$
Portanto, $m = 39$ e $n = 41 \Rightarrow m + n = 80$.

258. $\Delta = 4 - 12m$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{12 - 4m}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow m = 2$$

259. $\Delta = [2(m - 1)]^2 - 4(-3)(m + 1) = 4m^2 + 4m + 16$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow m^2 + m + 4 = 6 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

ou $m = 1$

260. $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m + 2)$ tem máximo se $m < 0$.
$\Delta = (m - 1)^2 - 4m(m + 2) = -3m^2 - 10m + 1$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \frac{3m^2 + 10m - 1}{4m} = 2 \Rightarrow m = \begin{cases} \dfrac{1}{3} > 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ -1 \text{ (valor procurado)} \end{cases}$$

261. $f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 1)x - m$ tem mínimo se $m > 1$.

$\Delta = (m + 1)^2 + 4m(m - 1) = 5m^2 - 2m + 1$

$y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow \dfrac{-5m^2 + 2m - 1}{4(m - 1)} = 1 \Rightarrow 5m^2 - 2m + 3 = 0$, que não tem soluções reais.

Portanto, $\nexists m \in \mathbb{R} \mid f(x)$ tenha mínimo igual a 1.

263. Sendo $y = -x^2 + 5x - 1$, verificamos que:

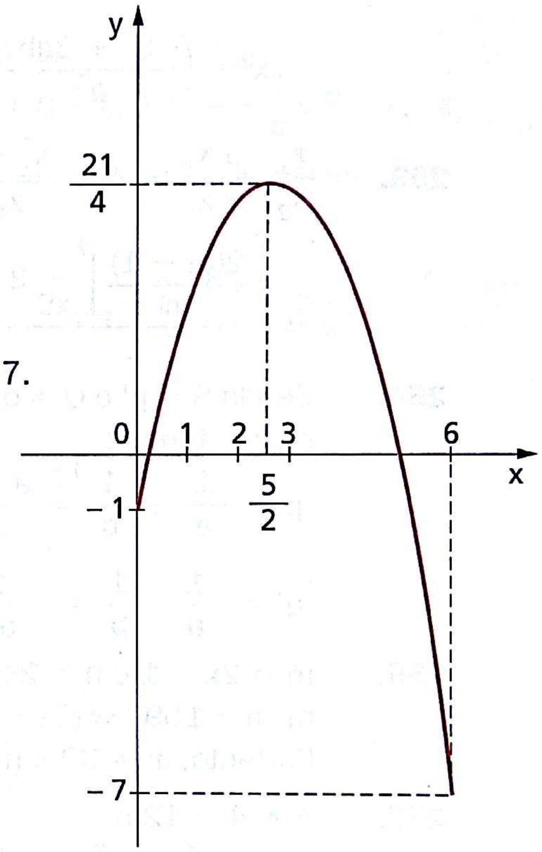
para $x = 0, y = -1$

para $x = 6, y = -7$

$V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = V\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{21}{4}\right)$

Assim, no intervalo [0, 6],

$y_M = y_V = \dfrac{21}{4}$ e $y_m = f(6) = -7$.



265. $y = -2x^2 + bx + c$ passa por (1, 0). Então:

$0 = -2 + b + c \Rightarrow b + c = 2$ (1)

$x_V = 3 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = 12$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem $c = -10$.

Portanto, $y = -2x^2 + 12x - 10$ e, então, $y = y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-64}{-8} = 8$.

266. $\left.\begin{array}{l} 2x + z = 8 \Rightarrow z = 8 - 2x \\ \text{Seja } y = xz \end{array}\right\} \Rightarrow y = x(8 - 2x) \Rightarrow y = -2x^2 + 8x$

Como $a = -2 < 0$, existe máximo, quando $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

Então, $x = \dfrac{-8}{2(-2)} = 2$ e, portanto, $z = 8 - 2x \Rightarrow z = 4$.

267. Seja um retângulo de lados *a* e *b*.
Então: $2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$.
A área $y = ab$ é tal que $y = a(10 - a) = -a^2 + 10a$.
Como o coeficiente de a^2 é negativo, existe máximo, que é dado por

$$a = \frac{-10}{2(-1)} = 5.$$

Então, $b = 10 - 5 = 5$.
Ou seja, a área **é máxima** para o quadrado de lado 5 cm.

268.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Seja } x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x \\ \text{Seja } z = x^2 + y^2\end{array}\right\} \Rightarrow z = x^2 + (36 - 12x + x^2) \Rightarrow \Rightarrow z = 2x^2 - 12x + 36$$

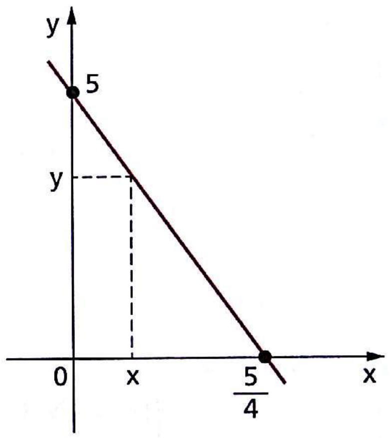
Como $a = 2 > 0$, existe mínimo, dado por $x = \dfrac{12}{2 \cdot 2} = 3$.
Então, $y = 6 - 3 = 3$.

269. Seja a área $z = xy$.
Como um dos vértices pertence à reta $y = -4x + 5$, temos:
$z = x(-4x + 5) = -4x^2 + 5x$
(como $a < 0$, existe máximo)

Então: $x = \dfrac{-5}{2(-4)} \Rightarrow x = \dfrac{5}{8}$.

Então: $y = -4\left(\dfrac{5}{8}\right) + 5 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$.

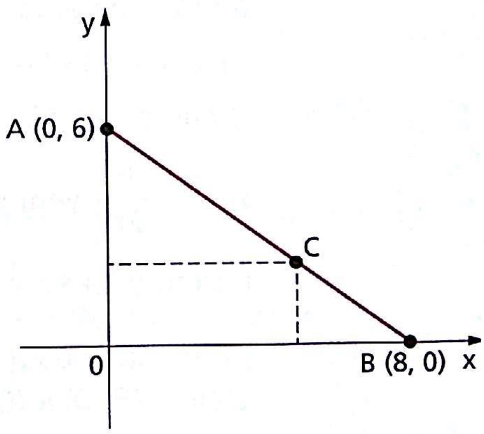
Lados do retângulo: $\dfrac{5}{8}$ e $\dfrac{5}{2}$.



270. Consideremos o triângulo com os catetos sobre os eixos cartesianos.
A reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa pelos pontos A (0, 6) e B (8, 0). Determinemos a equação $y = ax + b$ dessa reta:

$$\begin{cases} 6 = a \cdot 0 + b \\ 0 = 8a + b \end{cases} \Rightarrow b = 6 \text{ e } a = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $y = -\dfrac{3}{4}x + 6$.



Como o vértice C do retângulo pertence a essa reta, temos:

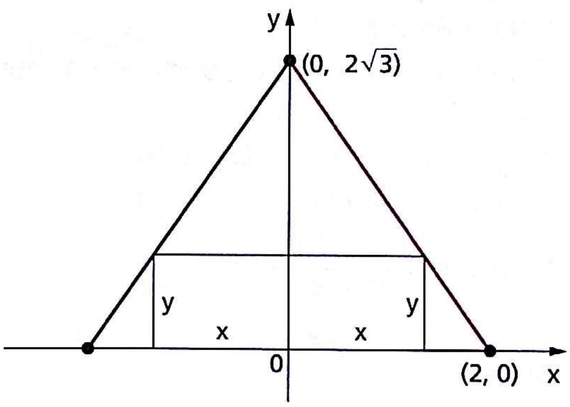
$$\text{Área } z = xy \Rightarrow z = x\left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \Rightarrow z = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$$

Como $a = -\frac{3}{4} < 0$, então existe máximo.

$$x_V = \frac{-6}{2\left(\frac{-3}{4}\right)} \Rightarrow x_V = 4 \Rightarrow y = 3$$

Portanto, o retângulo tem lados 3 e 4.

271. Localizemos o triângulo equilátero conforme a figura abaixo. A altura sobre o eixo *y* corta o lado da base no seu ponto médio.
Por Pitágoras, $h^2 = 4^2 - 2^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$.
Determinemos a reta que passa pelos pontos $(0, 2\sqrt{3})$ e $(2, 0)$:



$$\begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ 0 = 2a + b \Rightarrow a = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{reta: } y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

Metade da área do retângulo: $z = xy \Rightarrow z = x(-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = -\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$.

Como $a = -\sqrt{3}$, negativo, existe máximo.

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \text{ vem } x = -\frac{2\sqrt{3}}{2(-\sqrt{3})} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Portanto, base $= 2x = 2$ e altura $y = \sqrt{3}$.

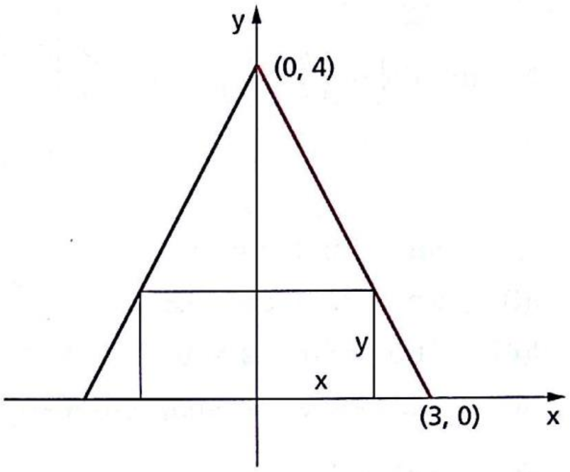
272. Determinemos a reta que passa pelos pontos (3, 0) e (0, 4).

$$\begin{cases} 4 = b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}x + 4$

Metade da área: $z = xy \Rightarrow z = x\left(-\dfrac{4}{3}x + 4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -\dfrac{4}{3}x^2 + 4x$



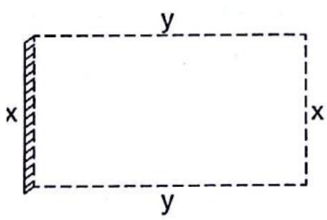
Como $a = -\dfrac{4}{3} < 0$, existe máximo.

$x_V = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x = -\dfrac{4}{2\left(-\dfrac{4}{3}\right)} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = 2$

Portanto, base $= 2x = 3$ e altura $y = 2$.

273. $Q(x, -6) \in$ parábola $y = x^2 - 6$; então, $-6 = x^2 - 6 \Rightarrow x = 0$.
Distância horizontal $= 4 - 0 = 4$

274.



$2y + x = 400 \Rightarrow y = \dfrac{400 - x}{2}$

Área $z = xy \Rightarrow z = -\dfrac{x^2}{2} + 200x$

Como $a = -\dfrac{1}{2} < 0$, existe máximo.

Então: $x_V = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x = -\dfrac{200}{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = 200 \Rightarrow y = 100$.

Portanto, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{200}{100} = 2$ ou $\dfrac{y}{x} = \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2}$.

276. $$\left.\begin{array}{l} y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \\ \Delta = 16 - 12m \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{12m - 16}{12} = 2 \Rightarrow m = \dfrac{10}{3}$$

277. $$\left.\begin{array}{l} y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = 7 \\ \Delta = m^2 - 4\left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = m^2 - \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{2}{3} - m^2}{4\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = 7 \Rightarrow m^2 - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = -\sqrt{10} \text{ ou } m = \sqrt{10}$$

285. $f(2) = 4a + 2b + c = 0$

$f(3) = 9a + 3b + c = -2$

$f(4) = 16a + 4b + c = 0$

Resolvendo esse sistema, vem $a = 2$.

286. $f(x) = -x^2 + 2x$

$V_{f(x)}$ (1, 1) e zeros: $x = 0$ ou $x = 2$

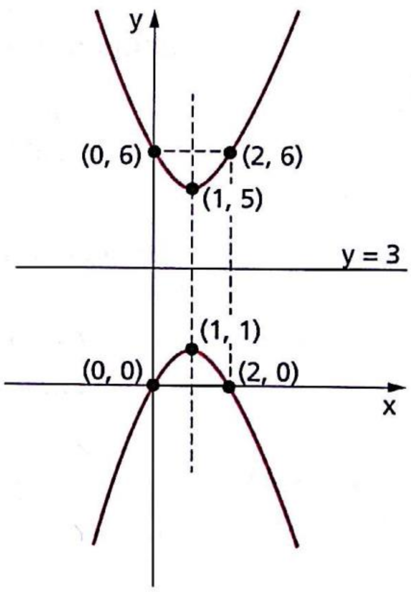
Como $g(x)$ deve ser simétrico a $f(x)$ em relação à reta $y = 3$, então temos:

$f(x) \longrightarrow g(x)$

ponto (0, 0) $\longrightarrow$ ponto (0, 6)

vértice (1, 1) $\longrightarrow$ vértice (1, 5)

ponto (2, 0) $\longrightarrow$ ponto (2, 6)



Fazendo $g(x) = ax^2 + bx + c$, devemos ter:

$g(0) = c = 6$

$g(1) = a + b + c = 5$

$g(2) = 4a + 2b + c = 6$

Resolvendo o sistema, vem:

$a = 1, b = -2, c = 6$

287. Notemos inicialmente que x_1 e x_2 são abscissas dos pontos de interseção das curvas $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = -x^2 - x + 4$; portanto, são as raízes da equação $x^2 + x = -x^2 - x + 4$, ou seja, $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$.

Temos:

$g(x) = x^2 + x \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 0$

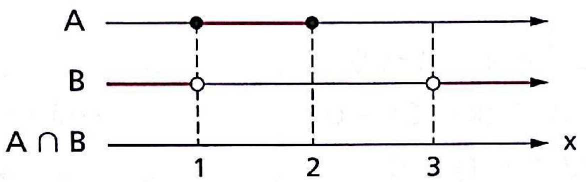
$h(x) = -x^2 - x + 4 \Rightarrow d = -1, e = -1, f = 4$

$$F(x) = \frac{d-a}{3}x^3 + \frac{e-b}{2}x^2 + (f-c)x = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$$

$$F(x_2) - F(x_1) = F(1) - F(-2) = \frac{7}{3} - \left(-\frac{20}{3}\right) = 9$$

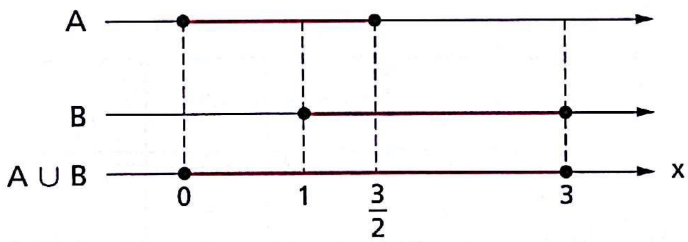
296. $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2$

$x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow x < 1$ ou $x > 3$

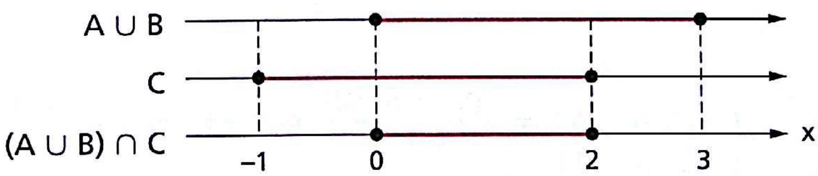


$A \cap B = \varnothing$

297. $-2x^2 + 3x \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$



$x^2 - x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$



$(A \cup B) \cap C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

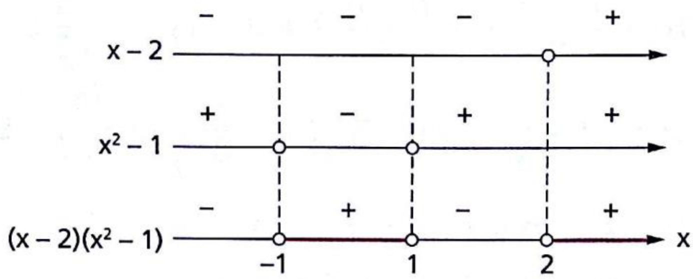
298. $p(a) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 < 0 \Rightarrow 2 < a < 3$

Calculando $q(a)$ para $a = 2$ e $a = 3$, vem: $q(2) = 20$ e $q(3) = 30$. Então, para $2 < a < 3$, $20 < q(a) < 30$, pois nesse intervalo $q(x)$ é crescente.

301. e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

$x^2(x - 2) - (x - 2) > 0$

$(x - 2)(x^2 - 1) > 0$

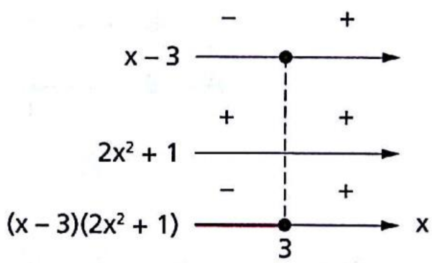


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leqslant 0$

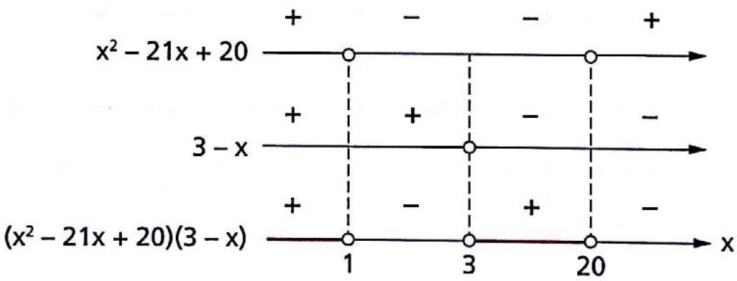
$2x^2(x - 3) + (x - 3) \leqslant 0$

$(x - 3)(2x^2 + 1) \leqslant 0$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

303.

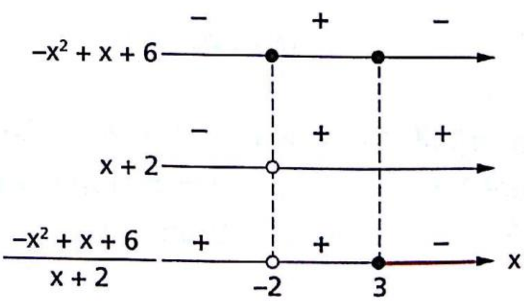


O maior número inteiro que satisfaz a inequação é 19.

310. $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 \\ f(-2) = -4 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \leqslant f(-1) \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 + 4}{x + 2} \leqslant -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-x^2 + x + 6}{x + 2} \leqslant 0 \Rightarrow$

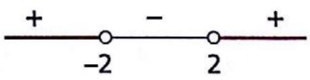
$\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$



315. b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leqslant -5x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 > x^2 + 1 \text{ (I)} \\ 2x^2 - 3 \leqslant -5x \text{ (II)} \end{cases}$

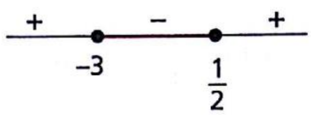
(I) $2x^2 - 3 - x^2 - 1 > 0$

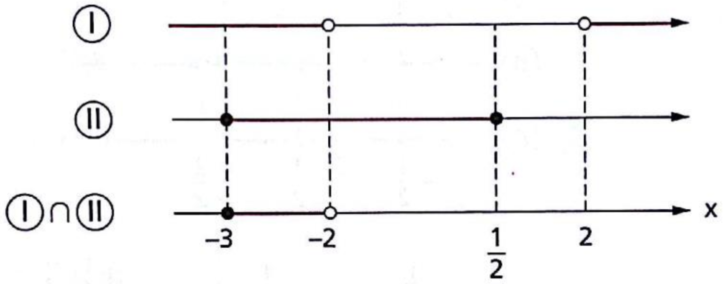
$x^2 - 4 > 0$



(II) $2x^2 - 3 + 5x \leqslant 0$

$2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0$





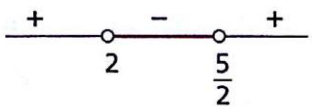
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2\}$

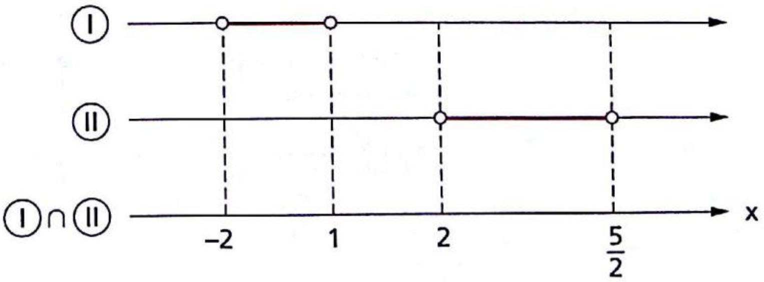
f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 \text{ (I)} \\ 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) $x^2 + x - 2 < 0$

(II) $2x^2 - 9x + 10 < 0$

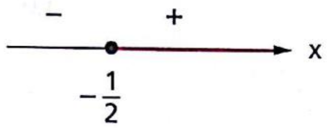




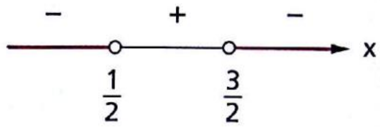
$S = \varnothing$

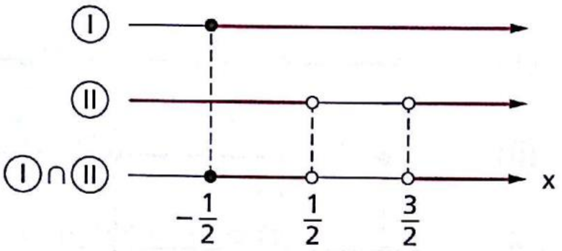
316. c) $\begin{cases} 1 + 2x \geq 0 & \text{(I)} \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $1 + 2x \geq 0$



(II) $-4x^2 + 8x - 3 < 0$

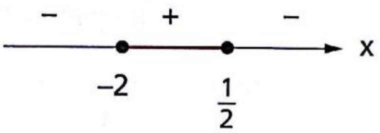




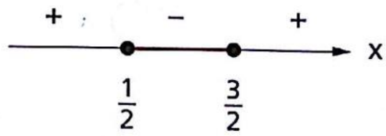
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}$$

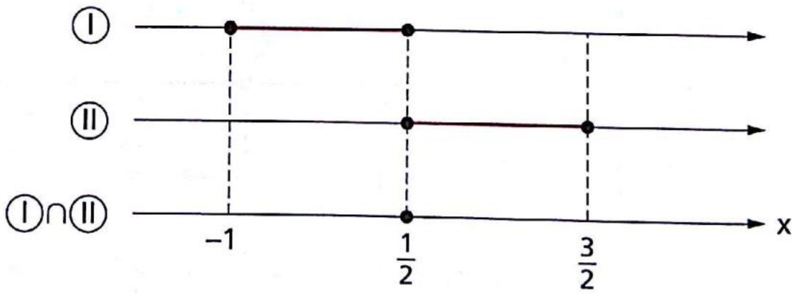
d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geq 0 & \text{(I)} \\ 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $-2x^2 - x + 1 \geq 0$



(II) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$





$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

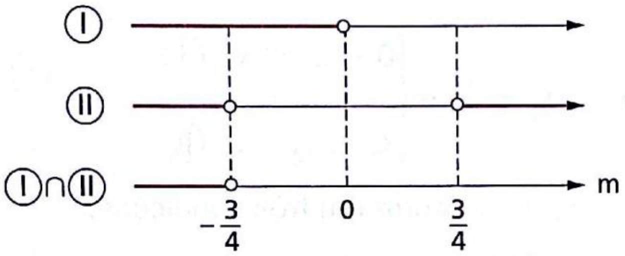
324. c) $\dfrac{x}{x^2+4} > \dfrac{x+m}{x^2+1} \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+4} - \dfrac{x+m}{x^2+1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x(x^2+1)-(x^2+4)(x+m)}{(x^2+4)(x^2+1)} > 0 \Rightarrow \dfrac{-mx^2-3x-4m}{(x^2+4)(x^2+1)} > 0$

Como $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então:

$-mx^2 - 3x - 4m > 0, \forall x$ e daí $-m > 0$ (I) e $\Delta < 0$ (II)

$\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 16m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > \dfrac{9}{16} \Rightarrow m < -\dfrac{3}{4}$ ou $m > \dfrac{3}{4}$



Então, $m < -\dfrac{3}{4}$.

325. $x^2 + 2x + (p - 10) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4(p - 10) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 44 - 4p < 0 \Rightarrow p > 11$

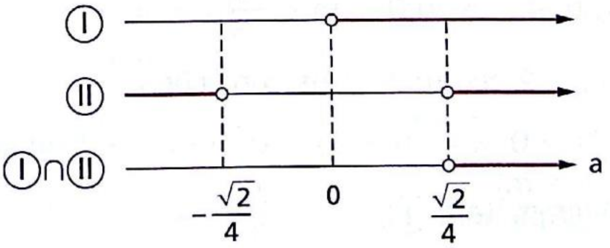
327. $\dfrac{x-a}{x^2+1} < \dfrac{x+a}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{x-a}{x^2+1} - \dfrac{x+a}{x^2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2ax^2 - x - a}{x^2(x^2+1)} < 0$

Como $x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ e $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então devemos ter:

$-2ax^2 - x - a < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e daí $-2a < 0$ (I) e $\Delta < 0$ (II)

$\Delta = 1 - 8a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > \dfrac{1}{8} \Rightarrow a < -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ou $a > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$



Portanto, $a > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

333. Para ter uma raiz positiva e outra negativa, 0 (zero) deve estar entre elas, ou seja, $x_1 < 0 < x_2$, isto é, devemos ter: $(m - 2) \cdot f(0) < 0$ e daí $(m - 2)(m + 2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$.

334. Como as raízes devem ter sinais contrários, então devemos ter: $x_1 < 0 < x_2$, ou seja, $2 \cdot f(0) < 0 \Rightarrow 2 \cdot (k - 5) < 0 \Rightarrow k < 5$ (I)

Como $|x_1| < |x_2|$, então $\dfrac{S}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} < 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} < -\dfrac{k}{4} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k > 0$ (II)

De (I) e (II) vem $0 < k < 5$; então, o menor valor inteiro é $k = 1$.

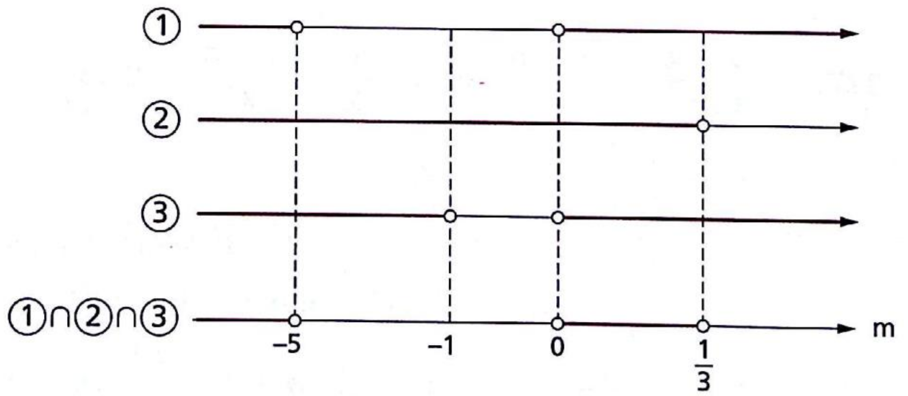
338. $0 < x_1 < x_2 < 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_1 < x_2 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x_1 < x_2 < 2 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) $0 < x_1 < x_2$ ocorre em três condições:

(1) $m \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m(m + 5) > 0 \Rightarrow m < -5$ ou $m > 0$

(2) $\Delta > 0 \Rightarrow 4(m^2 + 2m + 1) - 4m(m + 5) > 0 \Rightarrow m < \dfrac{1}{3}$

(3) $\dfrac{S}{2} > 0 \Rightarrow \dfrac{2(m + 1)}{2m} > 0 \Rightarrow \dfrac{m + 1}{m} > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 0$



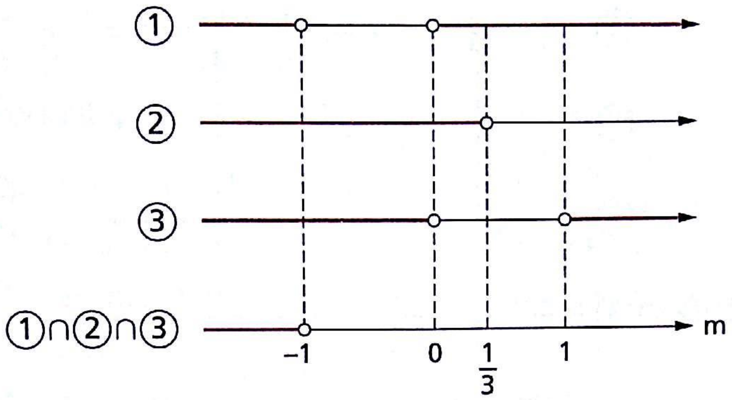
Então: (I) $m < -5$ ou $0 < m < \dfrac{1}{3}$.

(II) $x_1 < x_2 < 2$ ocorre em três condições:

(1) $m \cdot f(2) > 0 \Rightarrow m(m + 1) > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 0$

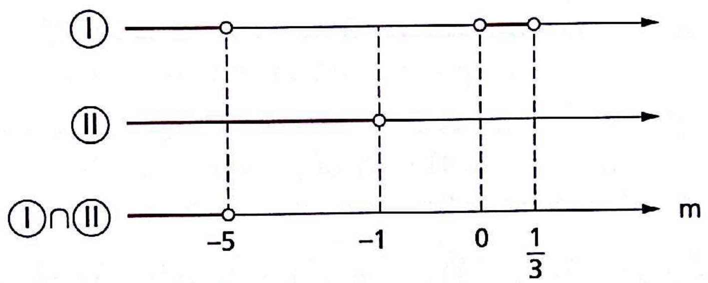
(2) $\Delta > 0$ (idem item (I)): $m < \dfrac{1}{3}$

(3) $\dfrac{S}{2} < 2 \Rightarrow \dfrac{2(m + 1)}{2m} < 2 \Rightarrow \dfrac{-m + 1}{m} < 0 \Rightarrow m < 0$ ou $m > 1$



Então: (II) $m < -1$.

De (I) e (II), vem:



Resposta: $m < -5$.

339. $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$

$$x_1 < 0 < x_2 < 2 \iff \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \quad \text{(I)} \\ \text{e} \\ x_1 < x_2 < 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $x_1 < 0 < x_2$

$a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m(m + 5) < 0 \Rightarrow -5 < m < 0$

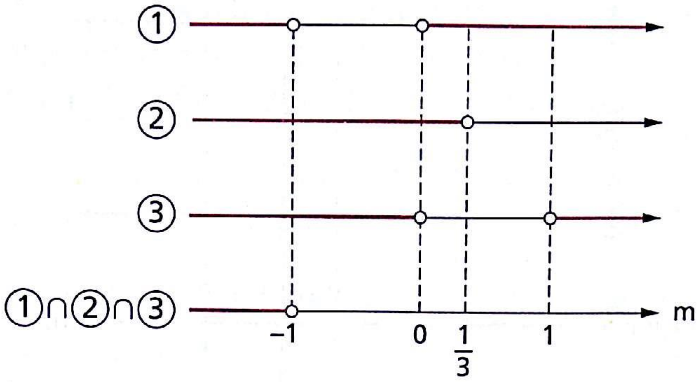
(II) $x_1 < x_2 < 2$

(1) $a \cdot f(2) > 0 \Rightarrow m[4m - 4(m + 1) + m + 5] > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(m + 1) > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 0$

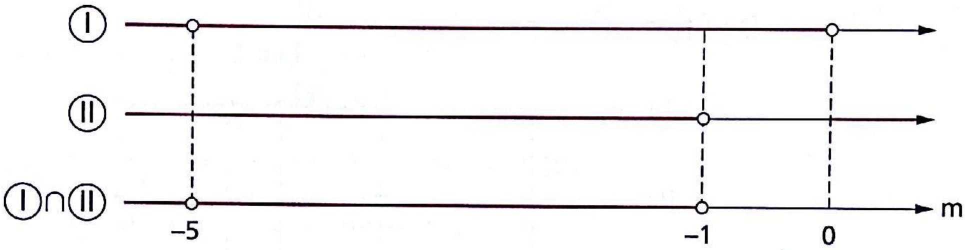
(2) $\Delta > 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4m(m + 5) > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{3}$

(3) $\frac{S}{2} < 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 2 \Rightarrow \frac{2(m + 1)}{2m} < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-m + 1}{m} < 0 \Rightarrow m < 0$ ou $m > 1$



Considerando (I) e (II), temos:



Então: $-5 < m < -1$.

344. $(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ (raízes negativas)

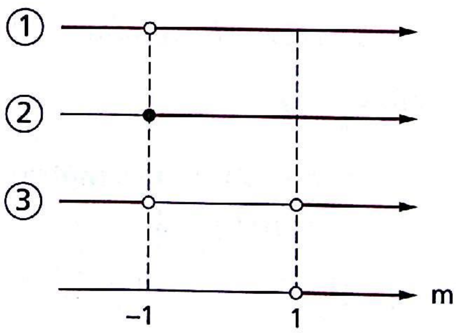
(1) $m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

(2) $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4(m + 1)(m - 1) \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant -1$

(3) $P > 0 \Rightarrow \dfrac{m - 1}{m + 1} > 0 \Rightarrow m < -1$ ou $m > 1$

(4) $S < 0 \Rightarrow \dfrac{-2(m + 1)}{m + 1} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Portanto, temos:



Então: $m > 1$.

346. $(m - 2)x^2 + (3m - 1)x + (m + 1) = 0$ (sinais contrários)

(1) $m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$

② $P < 0 \Rightarrow \dfrac{m+1}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$

Portanto: $-1 < m < 2$.

350. $2x^2 + kx + k - 5 = 0$

① raízes de sinais contrários $\Rightarrow P < 0 \Rightarrow \dfrac{k-5}{2} < 0 \Rightarrow k < 5$

② raiz negativa em valor absoluto menor que a raiz positiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow S > 0 \Rightarrow \dfrac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0$

De ① e ②, vem: $0 < k < 5$ e, como $k < \mathbb{Z}$, $k = 1$ é o menor valor.

351. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

a) $m \in A$ e $n \in A$, *m* e *n* coeficientes de $x^2 + 2mx + n = 0$; considerando A^2 como o conjunto de pares ordenados que representam o par (m, n), teremos 49 possíveis soluções.

b) As equações que têm raízes reais e distintas são aquelas que verificam a condição $\Delta > 0$, ou seja, $m^2 > n$. Essa condição é satisfeita pelos pares (m, n) seguintes:

$(-3, -3), (-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-3, 2), (-3, 3)$

$(-2, -3), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3)$

$(-1, 0)$

$(1, 0)$

$(2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$

$(3, -3), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$

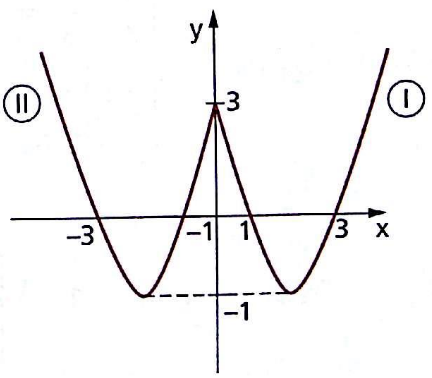
num total de 30 pares.

c) As equações que têm raízes reais, distintas e positivas verificam também as condições $P = n > 0$ e $S = -2m > 0$, ou seja, $n > 0$ e $m < 0$. Essas condições são satisfeitas por 6 dos pares do item *b*.

CAPÍTULO VIII — Função modular

368. g) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

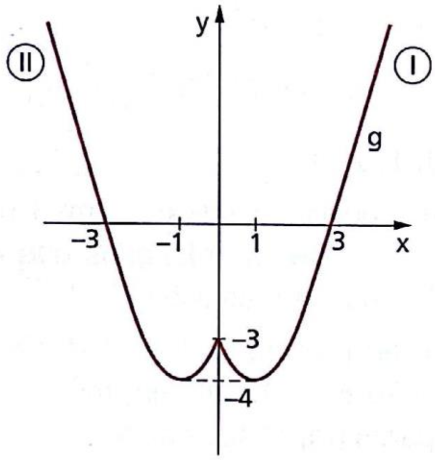
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ se } x \geqslant 0 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

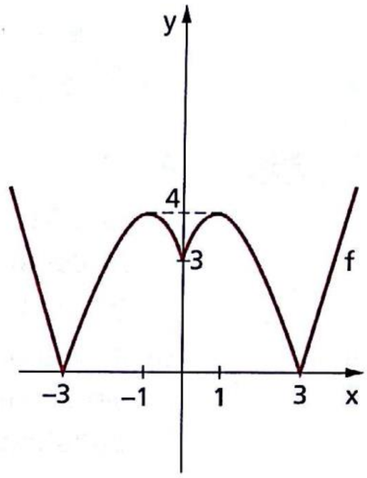


h) $f(x) = |x^2 - 2|x| - 3|$

Consideremos inicialmente a função (sem o módulo):

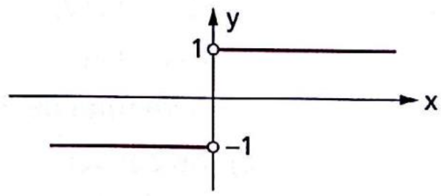
$$g(x) = x^2 - 2x - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ se } x \geqslant 0 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x^2 + 2x - 3, \text{ se } x < 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$





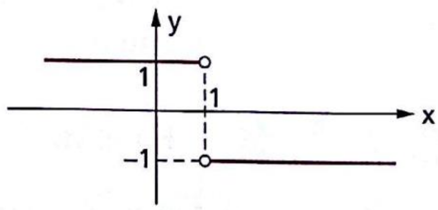
Como a função $f(x) = |g(x)|$, então na região entre -3 e 3 tem sua imagem simétrica em relação ao eixo x.

372. $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

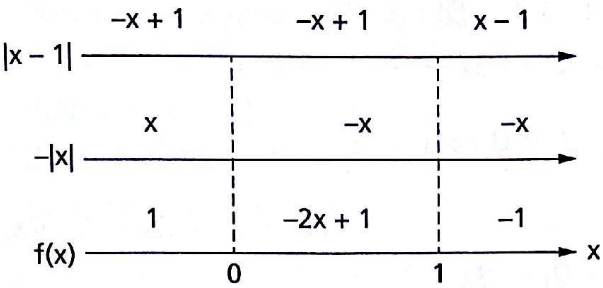


373. $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{1 - x} =$

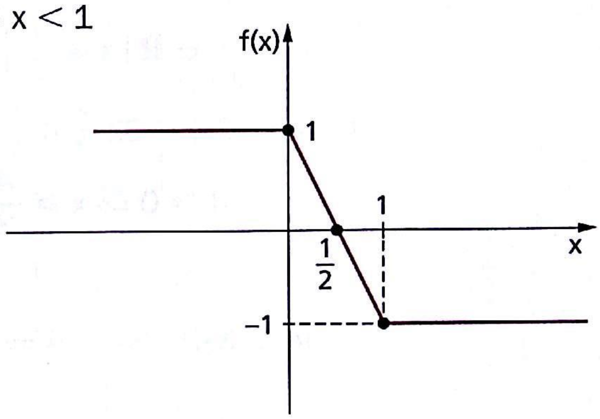
$$= \begin{cases} \dfrac{x - 1}{1 - x} = -1 \text{ se } x > 1 \\ \dfrac{-(x - 1)}{1 - x} = 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$



375. a) $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -x + 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$ e $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$



$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x < 0 \\ -2x + 1 \text{ se } 0 \leqslant x < 1 \\ -1 \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$



382. a) $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -x + 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$

$$x + |x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 \text{ se } x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

b) $f(x) = g(x) = k$ tem solução única quando o gráfico de f intercepta a reta $y = k$ em um único ponto, e isso só ocorre para $k > 1$.

384. d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

$x^2 + 2x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 1$

$|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 15x - 3 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = -13 \end{cases} \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 15x - 3 = -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases} \end{cases}$$

$S = \{-13, -6\}$

e) $|3x - 2| = 3x - 2$

$3x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{2}{3}$

$$|3x - 2| = 3x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 3x - 2, \forall x, x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ 3x - 2 = -3x + 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{2}{3}\right\}$$

f) $|4 - 3x| = 3x - 4$

$3x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{4}{3}$

$$|4 - 3x| = 3x - 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3x = 3x - 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ 4 - 3x = -3x + 4, \forall x, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{4}{3}\right\}$$

387. a) $|x + 1| = \begin{cases} x + 1, x \geqslant -1 \\ \text{ou} \\ -x - 1, x < -1 \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

	$x < -1$	$-1 \leqslant x < 0$	$x \geqslant 0$
$\lvert x + 1\rvert$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x
$\lvert x + 1\rvert - \lvert x\rvert$	-1	$2x + 1$	1

$$|x + 1| - |x| = \begin{cases} -1, x < -1 \\ 2x + 1, -1 \leqslant x < 0 \\ 1, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Portanto, a equação dada fica:

$-1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$ (rejeitado porque *x* deve ser menor que -1)

$2x + 1 = 2x + 1, \forall x, x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x < 0$

$1 = 2x + 1 \Rightarrow x = 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\}$

b) $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|x-1|}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x-1|}{x} = 0$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -1, x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -1, x < 1 \end{cases}$$

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$\frac{\lvert x\rvert}{x}$	-1		1		1
$\frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$	-1		-1		1
$\frac{\lvert x\rvert}{x} - \frac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$	0		2		0

$$\frac{|x|}{x} - \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 2, 0 \leqslant x < 1 \\ 0, x \geqslant 1 \end{cases}$$

Então, $\dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x-1|}{x-1} = 0$ tem $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

389. e) $\left|\dfrac{2x-3}{3x-1}\right| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{3x-1} < -2 \quad \text{I} \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-3}{3x-1} > 2 \quad \text{II} \end{cases}$

I $\dfrac{2x-3}{3x-1} < -2 \Rightarrow \dfrac{8x-5}{3x-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{8}$

II $\dfrac{2x-3}{3x-1} > 2 \Rightarrow \dfrac{-4x-1}{3x-1} > 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{3}$

Fazendo a reunião de I e II, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \text{ e } x \neq \frac{1}{3}\right\}$$

g) $\left| |x| - 2 \right| > 1 \Leftrightarrow (|x| - 2 < -1 \text{ ou } |x| - 2 > 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (|x| < 1 \text{ ou } |x| > 3) \Rightarrow (-1 < x < 1 \text{ ou } x < -3 \text{ ou } x > 3)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

390. $\left|2 - \frac{1}{x}\right| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2 - \frac{1}{x} \leqslant 5 \Rightarrow -7 \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant 3 \Rightarrow$

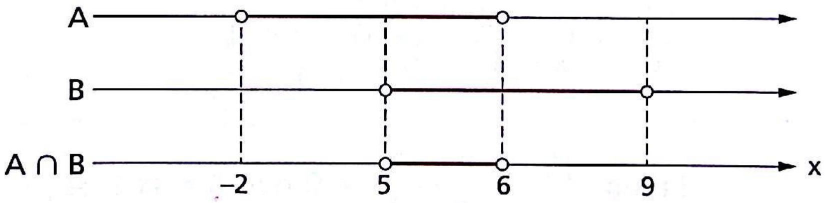
$\Rightarrow -3 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 7 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + 3 \geqslant 0 \text{ e } \frac{1}{x} - 7 \leqslant 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3x+1}{x} \geqslant 0 \text{ e } \frac{1-7x}{x} \leqslant 0\right) \Rightarrow \left(x \leqslant -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{7}\right)$

Todos os números inteiros positivos menores que 30 satisfazem a condição.

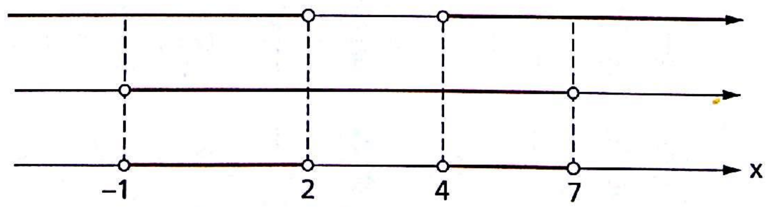
392. $|x - 2| < 4 \Rightarrow -2 < x < 6$ e

$|x - 7| < 2 \Rightarrow 5 < x < 9$



O intervalo]5, 6[tem comprimento igual a 1.

393. $1 < |x - 3| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 3| > 1 \Rightarrow (x < 2 \text{ ou } x > 4) \\ \text{e} \\ |x - 3| < 4 \Rightarrow -1 < x < 7 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 7\}$

395. $|x - 2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$ ①

$|x^2 - 4| < N \Rightarrow 4 - N < x^2 < 4 + N \Rightarrow \sqrt{4 - N} < x < \sqrt{4 + N}$ ②

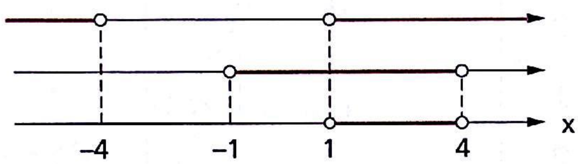
Considerando que ② deve estar contido em ①, o maior valor possível para N é 3.

400. $|x^2 - 4| < 3x \Leftrightarrow -3x < x^2 - 4 < 3x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x^2 - 4 < 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) $x < -4$ ou $x > 1$

(II) $-1 < x < 4$

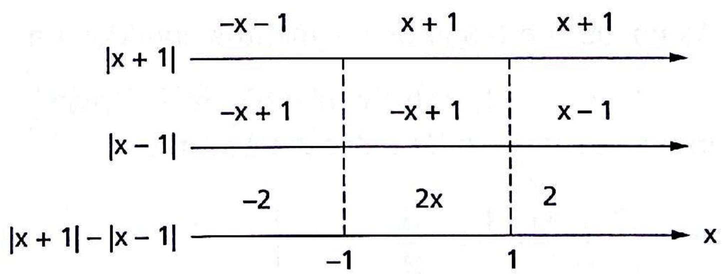
(I) $\cap$ (II)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

404. f) $3\{|x + 1| - |x - 1|\} \leqslant 2x^2 - 4x$

$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, x \geqslant -1 \\ \text{ou} \\ -x - 1, x < -1 \end{cases}$ e $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, x \geqslant 1 \\ \text{ou} \\ -x + 1, x < -1 \end{cases}$



Então: $3\{|x + 1| - |x - 1|\} = \begin{cases} -6, x < -1 \\ 6x, -1 \leqslant x < 1 \\ 6, x \geqslant 1 \end{cases}$

1º) se $x < -1$, $-6 \leqslant 2x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x + 6 \geqslant 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

2º) se $-1 \leqslant x < 1$, $6x \leqslant 2x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 5x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 5$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 5\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\}$

3º) se $x \geqslant 1$, $6 \leqslant 2x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$

$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 3\} =$

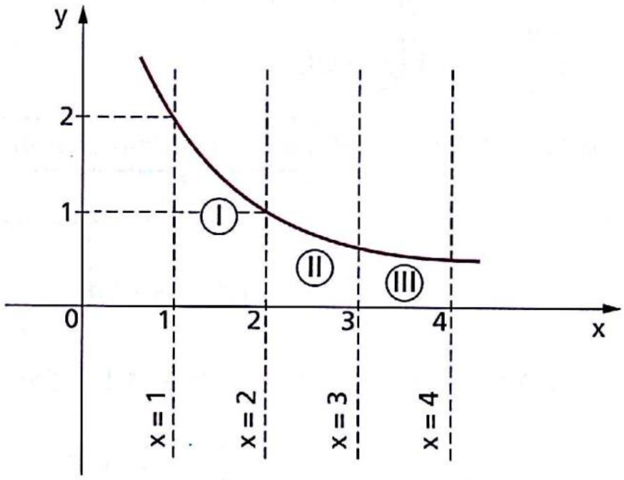
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

CAPÍTULO IX — Outras funções elementares

413.

x	$\frac{2}{x}$
1	2
2	1
3	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{2}$



$$\text{Área do trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

As bases B e *b* são os segmentos contidos nas retas $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$, entre o eixo Ox e a curva $\frac{2}{x}$. A altura *h* são os intervalos no eixo Ox entre essas retas.

$$\left.\begin{aligned} A_I &= \frac{(2 + 1) \cdot 1}{2} = \frac{3}{2} \\ A_{II} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 1}{2} = \frac{5}{6} \\ A_{III} &= \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = \frac{7}{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{35}{12}$$

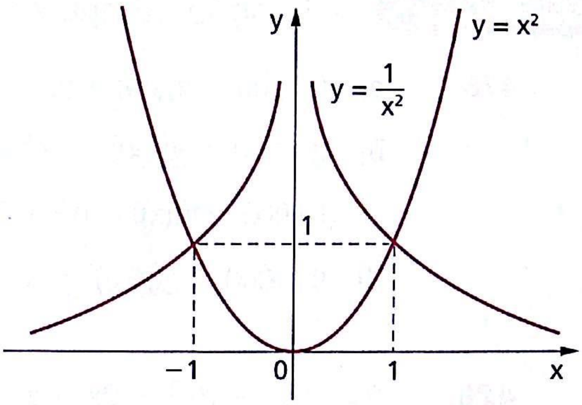
415. $\frac{1}{x^2} = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x^2 = 1$

$S = \{(1, 1), (-1, 1)\}$

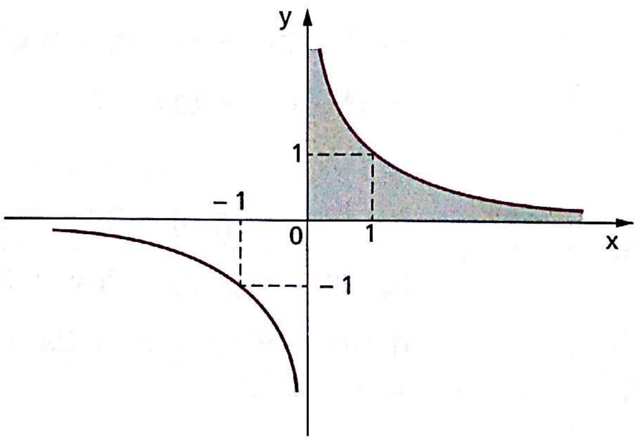


416. $1 + \frac{1}{x} = x \Rightarrow \frac{x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} \xRightarrow{x \neq 0} x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

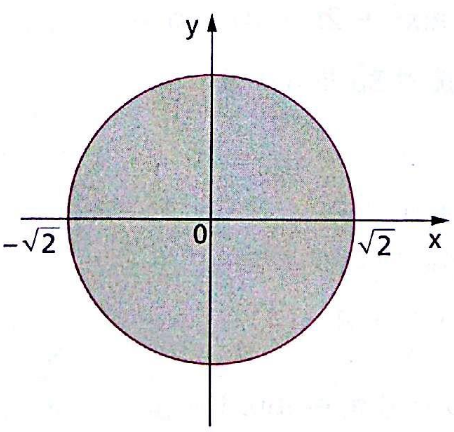
417. $0 \leqslant xy \leqslant 1 \Rightarrow$

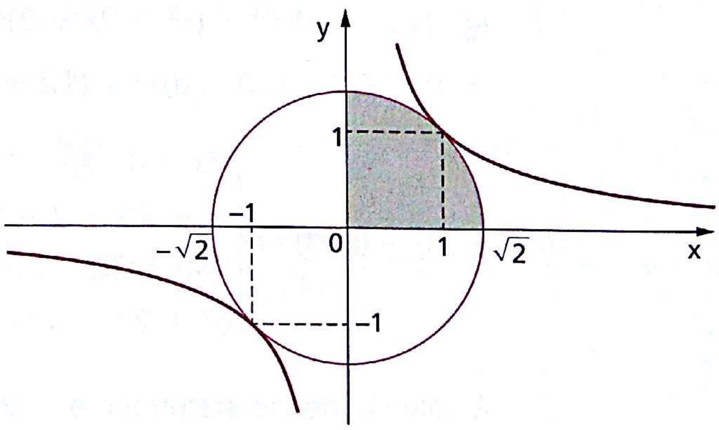
$\Rightarrow 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}$

$x^2 + y^2 \leqslant 2$ é o círculo de centro C (0, 0) e raio $\sqrt{2}$.



A intersecção que soluciona o sistema é:





CAPÍTULO X — Função composta — Função inversa

425. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 3)^2 + 2 = (x^2 - 6x + 9) + 2 = x^2 - 6x + 11$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 + 2) - 3 = x^2 - 1$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2 + 2)^2 + 2 = (x^4 + 4x^2 + 4) + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x - 3) - 3 = x - 6$

426. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2(-x) - 1 = -x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 1$

$f(x - 1) = (x - 1)^3 - 3(x - 1)^2 + 2(x - 1) - 1 =$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3(x^2 - 2x + 1) + 2x - 2 - 1 =$

$= x^3 - 6x^2 + 11x - 7$

427. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(2x + a) + 2 = 6x + 3a + 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(3x + 2) + a = 6x + 4 + a$

$(f \circ g) = (g \circ f) = 6x + 3a + 2 = 6x + 4 + a = 3a + 2 = 4 + a \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 1$

429. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 + ax + b)^2 + 2(x^2 + ax + b) + 3 =$

$= x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b + 2)x^2 + (2ab + 2a)x + b^2 + 2b + 3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 + 2x + 3)^2 + a(x^2 + 2x + 3) + b =$

$= x^4 + 4x^3 + (10 + a)x^2 + (12 + 2a)x + 3a + b + 9$

$$(f \circ g) = (g \circ f) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 & (1) \\ a^2 + 2b + 2 = 10 + a & (2) \\ 2ab + 2a = 12 + 2a & (3) \\ b^2 + 2b + 3 = 3a + b + 9 & (4) \end{cases}$$

A solução desse sistema é $a = 2$ e $b = 3$ e, então: $f = g$.

432. $(f \circ g)(x) = \dfrac{(2x + 3) + 1}{(2x + 3) - 2} = \dfrac{2x + 4}{2x + 1}$

$D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$

$(g \circ f)(x) = 2\left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right) + 3 = \dfrac{5x - 4}{x - 2}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

433. $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = 3(x^2 - 1) + 2 = 3x^2 - 1$

$[(h \circ g) \circ f](x) = [(h \circ g)f(x)] = 3(2x + 1)^2 - 1 = 12x^2 + 12x + 2$

434. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (1 - x)^2 - (1 - x) + 2 = x^2 - x + 2$

$[h \circ (g \circ f)](x) = h \circ (g \circ f)(x) = 2(x^2 - x + 2) + 3 = 2x^2 - 2x + 7$

435. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - 4\,\text{sen}^2\, 2\theta}$

$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\,\text{sen}^2\, 2\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}\, 2\theta = \pm\dfrac{1}{2}$ e, então, temos:

$$\text{sen}\, 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{ou sen}\, 2\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2\theta = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Portanto: $(f \circ g)$ se anula para $\theta = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi$, $\theta = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$ ou $\theta = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$.

436. $(f \circ g)(x) = 2(ax + b) + 3 = 2ax + 2b + 3$

$(g \circ f)(x) = a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$

$(f \circ g) = (g \circ f) \Rightarrow 2b + 3 = 3a + b \Rightarrow b = 3a - 3$

Portanto: $C = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 3a - 3\}$.

440. $$(f \circ f)(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1 - x - 1}{1 - x}} = \frac{1 - x}{-x} = \frac{x - 1}{x}$$

$$(f \circ [f \circ f])(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x - x + 1}{x}} = \frac{x}{1} = x$$

448. $g(x) = 2x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{g(x) - 3}{2}$

$$f(g(x)) = \frac{2x + 5}{x + 1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{2\left(\frac{g(x) - 3}{2}\right) + 5}{\frac{g(x) - 3}{2} + 1} = \frac{g(x) - 3 + 5}{\frac{g(x) - 3 + 2}{2}} =$$

$$= \frac{2(g(x) + 2)}{g(x) - 1} = \frac{2g(x) + 4}{g(x) - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{2x + 4}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

450. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + b)^2 = 4x^2 + 4bx + b^2 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4b = -12 \Rightarrow b = -3$ e $b^2 = 9$

451. $$f(x + 1) = \frac{3x + 5}{2x + 1} = \frac{3(x + 1) + 2}{2(x + 1) - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$$

452. $g(x) = 2x + 3$

Trocando x por f(x), vem: $g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 3$.

Mas $g(f(x)) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$.

Então: $2 \cdot f(x) + 3 = \dfrac{2x + 5}{x + 1} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x + 2}{2x + 2}$.

Então: $f\left(-\dfrac{12}{15}\right) = f\left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{\dfrac{4}{5} + 2}{-\dfrac{8}{5} + 2} = 7$.

453. $g(x) = x^2 - x$

Trocando x por f(x), vem: $g(f(x)) = [f(x)]^2 - f(x)$.

Mas $g(f(x)) = x^2 + 13x + 42$.

Então:

$[f(x)]^2 - f(x) = x^2 + 13x + 42$

$[f(x)]^2 - f(x) - (x^2 + 13x + 42) = 0$

$\Delta = 1 + 4x^2 + 52x + 168 = 4x^2 + 52x + 169 = (2x + 13)^2$

$$f(x) = \frac{1 \pm (2x + 13)}{2} = \begin{cases} \dfrac{2x + 14}{2} = x + 7 \\ \dfrac{-2x - 12}{2} = -x - 6 \end{cases}$$

Com coeficientes positivos: $f(x) = x + 7$, cujo termo independente de *x* é 7.

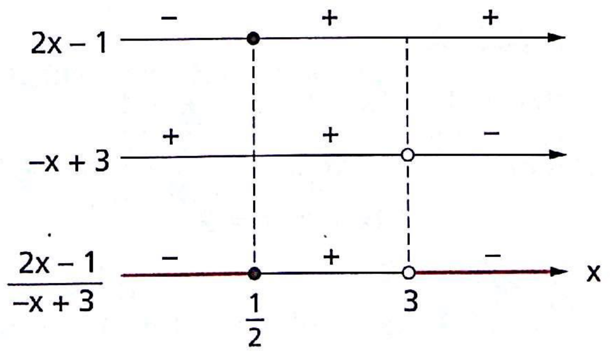
454. a) $f(f(x)) = 2(2x + k) + k = 4x + 3k = 4x - 3 \Rightarrow k = -1$

Então, $f(x) = 2x - 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x)) = 2(-x + t) - 1 = -2x + 2t - 1 \\ g(f(x)) = -(2x - 2) + t = -2x + t + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2t - 1 = t + 2 \Rightarrow t = 3$$

Então, $g(x) = -x + 3$.

b) $\dfrac{2x - 1}{-x + 3} \leqslant 0$



$x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x > 3$

456. Fazendo $g(x) = y$, $f(g(x)) = f(y)$:

1º) $y \geqslant 2 \Rightarrow g(x) \geqslant 2 \Leftrightarrow 2x + 3 \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

$$f(y) = y^2 - 4y + 3 \Rightarrow f(g(x)) = [g(x)]^2 - 4g(x) + 3 =$$
$$= (2x + 3)^2 - 4(2x + 3) + 3 = 4x^2 + 4x$$

2º) $y < 2 \Rightarrow g(x) < 2 \Leftrightarrow 2x + 3 < 2 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{2}$

$$f(y) = 2y - 3 \Rightarrow f(g(x)) = 4x + 6 - 3 = 4x + 3$$

Portanto: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x \text{ se } x \geqslant -\dfrac{1}{2} \\ 4x + 3 \text{ se } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Consideremos, agora, a lei $(g \circ f)(x)$:

$g(f(x)) = 2(x^2 - 4x + 3) + 3 = 2x^2 - 8x + 9$, se $x \geqslant 2$

$g(f(x)) = 2(2x - 3) + 3 = 4x - 3$, se $x < 2$

Portanto: $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9, \text{ se } x \geqslant 2 \\ 4x - 3, \text{ se } x < 2 \end{cases}$

458. $f(x) = \begin{cases} 4x - 3, x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2, x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1, x > 2 \\ 1 - x^2, x \leqslant 2 \end{cases}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

$$= \begin{cases} f(x+1) = \begin{cases} 4(x + 1) - 3, x + 1 \geqslant 0 \text{ e } x > 2 \ \text{I} \\ (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 2, x + 1 < 0 \text{ e } x > 2 \ \text{II} \end{cases} \\ f(1 - x^2) = \begin{cases} 4(1 - x^2) - 3, 1 - x^2 \geqslant 0 \text{ e } x \leqslant 2 \ \text{III} \\ (1 - x^2)^2 - 3(1 - x^2) + 2, 1 - x^2 < 0 \text{ e } x \leqslant 2 \ \text{IV} \end{cases} \end{cases}$$

Simplificando essas expressões, temos:

I $f(g(x)) = 4x + 1$ se $x > 2$

II é impossível

III $f(g(x)) = 1 - 4x^2$ se $-1 \leqslant x \leqslant 1$

IV $f(g(x)) = x^4 + x^2$ se $x < -1$ ou $1 < x \leqslant 2$

Então: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, x > 2 \\ 1 - 4x^2, -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^4 + x^2, x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

$$= \begin{cases} g(4x-3) = \begin{cases} (4x-3)+1,\ 4x-3 > 2 \text{ e } x \geqslant 0 \ \text{(I)} \\ 1-(4x-3)^2,\ 4x-3 \leqslant 2 \text{ e } x \geqslant 0 \ \text{(II)} \end{cases} \\ g(x^2-3x+2) = \begin{cases} (x^2-3x+2)+1,\ x^2-3x+2 > 2 \text{ e } x < 0 \ \text{(III)} \\ 1-(x^2-3x+2),\ x^2-3x+2 \leqslant 2 \text{ e } x < 0 \ \text{(IV)} \end{cases} \end{cases}$$

Simplificando essas expressões, temos:

(I) $g(f(x)) = 4x - 2$ se $x > \dfrac{5}{4}$

(II) $g(f(x)) = -16x^2 + 24x - 8$ se $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4}$

(III) $g(f(x)) = x^2 - 3x + 3$ se $x < 0$

(IV) é impossível

Portanto:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x-2,\ x > \dfrac{5}{4} \\ -16x^2+24x-8,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4} \\ x^2-3x+3,\ x < 0 \end{cases}$$

459. $f(g(x)) = \begin{cases} 4x^2-6x-1,\ x \geqslant 1 \\ 4x+3,\ x < 1 \end{cases}$

Como $g(x) = 2x - 3 \Rightarrow x = \dfrac{g(x)+3}{2}$ e, para $x \geqslant 1$, $g(x) \geqslant -1$.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 4\left(\dfrac{g(x)+3}{2}\right)^2 - 6\left(\dfrac{g(x)+3}{2}\right) - 1,\ g(x) \geqslant -1 \\ 4\left(\dfrac{g(x)+3}{2}\right) + 3,\ g(x) < -1 \end{cases}$$

Simplificando, encontramos:

$$f(g(x)) = \begin{cases} [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) - 1,\ g(x) \geqslant -1 \\ 2 \cdot g(x) + 9,\ g(x) < -1 \end{cases}$$

Portanto: $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-1,\ x \geqslant -1 \\ 2x+9,\ x < -1 \end{cases}$

463. condição: $f(x) = x^2 - 4x + 6 \geqslant b, \forall x \in \mathbb{R}$ (ou seja, *b* é o valor mínimo de *f*)

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = b \Rightarrow \frac{16}{8} = b \Rightarrow b = 2$$

464. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, injetora.

Seja $f(a) = 2a^2 - 3a + 4$.

Então: $2x^2 - 3x + 4 = 2a^2 - 3a + 4$

$$2(x^2 - a^2) - 3(x - a) = 0 \Rightarrow x + a = \frac{3}{2}$$

Mas, como *f* é injetora, $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$.

Então: $2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$.

475. Notemos que $f(x) = \frac{x + (x - s)}{x(x - s)} = \frac{1}{x - s} + \frac{1}{x}$.

1. Para todo $y \in \mathbb{R}$, se $y = \frac{2x - s}{x(s - x)}$, resulta:

   $y(xs - x^2) = 2x - s \Rightarrow yx^2 + (2 - ys)x - s = 0$

   Fazendo $g(x) = yx^2 + (2 - ys)x - s$, vem:

   $$\left.\begin{array}{l} a \cdot g(0) = y(-s) \\ a \cdot g(s) = y(s) \end{array}\right\} \Rightarrow ag(0) \text{ e } ag(s) \text{ têm sinais opostos} \Rightarrow$$

   $\Rightarrow$ existe um $\bar{x}$ tal que $g(\bar{x}) = 0$ e $0 < \bar{x} < s \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ existe $\bar{x}$ tal que $y = \frac{2\bar{x} - s}{\bar{x}(s - x)}$

   então *f* é sobrejetora.

2. Dados x_1 e x_2 tais que $0 < x_1 < s$ e $0 < x_2 < s$, se $f(x_1) = f(x_2)$, temos:

   $$\frac{2x_1 - s}{x_1(s - x_1)} = \frac{2x_2 - s}{x_2(s - x_2)} \Rightarrow (2x_1 - s)(x_2s - x_2^2) =$$

   $$= (2x_2 - s)(x_1s - s_1^2) \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow s^2(x_1 - x_2) + s(x_1 + x_2)(x_2 - x_1) + 2x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow (x_1 - x_2)(s^2 - (x_1 + x_2)s + 2x_1x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

   então *f* é injetora.

476. Seja I_f o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Então, $I_f \subset \mathbb{N}$ (1)

Pelo enunciado $m \in \mathbb{N}$ e $\exists n$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geqslant m$.

Então, $m \in \mathbb{N}$ e $m \leqslant f(n)$, ou seja:

$A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leqslant f(n)\} \subset I_f$ e, portanto, $m \in I_f$.

Como $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset I_f$. (2)

De (1) e (2), conclui-se que $I_f = \mathbb{N}$, ou seja, que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função sobrejetora.

477. $f(x) = y$, $I_A(x) = x$ e $I_B(x) = x$

$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$

$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = I_B(y) = y = f(x)$

480. Ao escolher a imagem de *a* temos 4 possibilidades.
Escolhida a imagem de *a*, ao escolher a imagem de *b* temos 3 possibilidades.
Então, o total é $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

481. $f_1 = \{(a, d), (b, d), (c, e)\}$ $\quad f_4 = \{(a, e), (b, d), (c, d)\}$

$f_2 = \{(a, d), (b, e), (c, d)\}$ $\quad f_5 = \{(a, e), (b, d), (c, e)\}$

$f_3 = \{(a, d), (b, e), (c, e)\}$ $\quad f_6 = \{(a, e), (b, e), (c, d)\}$

483. a) Sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.
Temos:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2$

então *f* é injetora.

b) Dado um *y* em $\mathbb{R}$, existe um *x* em $\mathbb{R}$ tal que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x')$ em que $x' = f(x)$. Então, *g* é sobrejetora.

484. a) $f(x) = 2x - 5$

1º) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 5 = 2x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$ é injetora

$I_f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ é sobrejetora

Portanto, *f* é bijetora.

2º) $y = 2x - 5$

Permutando as variáveis *x*, *y*, vem:

$$x = 2y - 5 \Rightarrow y = \frac{x + 5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$$

b) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 4}$

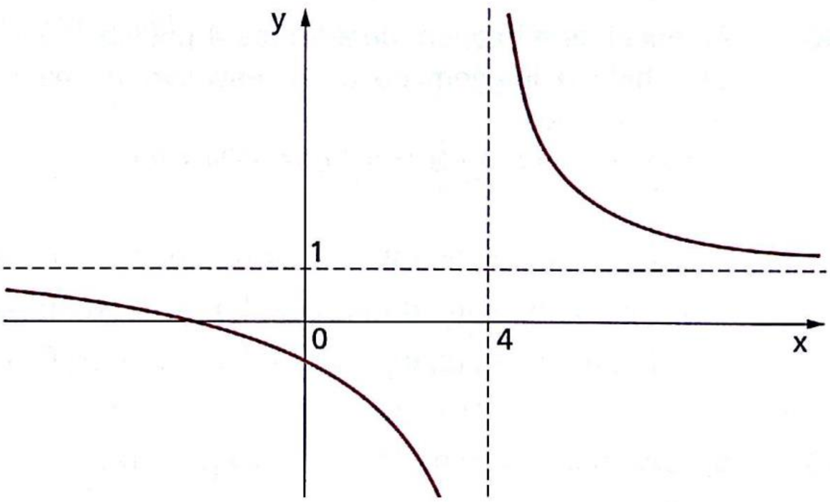
1º) $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1 + 1}{x_1 - 4} = \dfrac{x_2 + 1}{x_2 - 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 - 4) = (x_2 + 1)(x_1 - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ *g* é injetora

Verifica-se que para todo $y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists x, x \in \mathbb{R} - \{4\} \mid g(x) = y$; portanto, *g* é sobrejetora.

Então, *g* é bijetora.



2º) $y = \dfrac{x + 1}{x - 4}$

Permutando as variáveis, vem:

$$x = \frac{y + 1}{y - 4} \Rightarrow x(y - 4) = y + 1 \Rightarrow y = \frac{1 + 4x}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1 + 4x}{x - 1}$$

c) $h(x) = x^5$

1º) $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1^5 = x_2^5 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ *h* é injetora

$I_h = \mathbb{R} \Rightarrow$ *h* é sobrejetora.

Portanto, *h* é bijetora.

2º) $y = x^5$

Permutando as variáveis, vem:

$x = y^5 \Rightarrow y = \sqrt[5]{x} \Rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$

487. Determinemos $f(x) = ax + b$:

$$\begin{cases} -3a + b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \text{ e } b = 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

Permutando as variáveis em $y = -\frac{2}{3}x + 2$, vem:

$$x = -\frac{2}{3}y + 2 \rightarrow y = -\frac{3x}{2} + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3x}{2} + 3 \rightarrow f^{-1}(2) = 0$$

494. $f(x) = 3 + 2^{x-1}$

a) $g = f^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow A \Rightarrow A$ é I_f (sim)

b) Verifiquemos se existem valores para x quando $y \leqslant 4$.

$3 + 2^{x-1} \leqslant 4 \Rightarrow 2^{x-1} \leqslant 1 \Rightarrow x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$

Como existem valores x para $y \leqslant 4$, então a resposta é não.

c) Determinemos a inversa de f:

$y = 3 + 2^{x-1}$

Permutando as variáveis: $x = 3 + 2^{y-1} \Rightarrow x - 3 = 2^{y-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-3) = 2^y \Rightarrow y = \log_2 2(x-3) \Rightarrow g(x) = \log_2 2(x-3)$

Então: $g\left(\frac{11}{2}\right) = \log_2 2\left(\frac{11}{2} - 3\right) = \log_2 5$. (sim)

d) Determinemos $h(x)$:

$f(x) = 3 + 2^{x-1} \Rightarrow f(h(x)) = 3 + 2^{h(x)-1}$

Mas $f(h(x)) = 3 + 2x$.

Então: $3 + 2^{h(x)-1} = 3 + 2x \Rightarrow 2^{h(x)} = 4x \Rightarrow h(x) = \log_2 4x$.

Então: $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. (sim)

e) $f(2x + 1) < 1 + 3 \cdot 2^x \Rightarrow 3 + 2^{2x} < 1 + 3 \cdot 2^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow]0, 1[$ (sim)

f) $g(x) = \log_2 2(x-3) \Rightarrow g(1) = \log_2 2(1-3) =$

$= \log_2 (-4)$ (não está definido) (não)

497. $y = \log_4 (x - 1)$

Permutando as variáveis, temos:

$x = \log_4 (y - 1) \Rightarrow 4^x = y - 1 \Rightarrow y = 4^x + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = 4^x + 1.$

$(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = 3^{4^x + 1} - 1$

Então: $(f \circ g^{-1})(0) = 3^{4^0 + 1} - 1 = 3^2 - 1 = 8.$

498. $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{a\}$

$$y = \frac{2 + x}{2 - x}$$

Aplicando a regra prática, vem:

$$x = \frac{2 + y}{2 - y} \Rightarrow 2x - xy = 2 + y \Rightarrow 2x - 2 = y(1 + x) \Rightarrow y = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

Domínio: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow a = -1.$

504. f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{se } x \geqslant 2 \\ 2x - 1, & \text{se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4, & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$

1º) $x \geqslant 2$, então $y = x^2 - 4x + 7$; logo, $y \geqslant 3$.

2º) $-1 < x < 2$, então $y = 2x - 1$; logo, $-3 < y < 3$.

3º) $x \leqslant -1$, então $y = -x^2 - 2x - 4$; logo, $y \leqslant -3$.

Aplicando a regra prática, vem:

1º) $y \geqslant 2$ e $x \geqslant 3 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 7 \Rightarrow y^2 - 4y + (7 - x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 2 + \sqrt{x - 3}$

2º) $-1 < y < 2$ e $-3 < x < 3 \Rightarrow x = 2y - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x + 1}{2}$

3º) $y \leqslant -1$ e $x \leqslant -3 \Rightarrow x = -y^2 - 2y - 4 \Rightarrow y^2 + 2y + (4 + x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -1 - \sqrt{-x - 3}$

Então:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x - 3}, & \text{se } x \geqslant 3 \\ \dfrac{x + 1}{2}, & \text{se } -3 < x < 3 \\ -1 - \sqrt{-x - 3}, & \text{se } x \leqslant -3 \end{cases}$$

506. $f(x) = 2x + |x + 1| - |2x - 4|$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geqslant -1 \\ -x - 1, & \text{se } x < -1 \end{cases} \text{ e } |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{se } x \geqslant 2 \\ -2x + 4, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

	$x < -1$	$-1 \le x < 2$	$x \ge 2$
$\lvert x + 1\rvert$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$-\lvert 2x - 4\rvert$	$2x - 4$	$2x - 4$	$-2x + 4$
$2x$	$2x$	$2x$	$2x$
$f(x)$	$3x - 5$	$5x - 3$	$x + 5$

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5, \text{ se } x < -1 \\ 5x - 3, \text{ se } -1 \leqslant x < 2 \\ x + 5, \quad \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Então, temos:

1º) $x < -1$, $y = 3x - 5$; logo, $y < -8$.

2º) $-1 \leqslant x < 2$, $y = 5x - 3$; logo, $-8 \leqslant y < 7$.

3º) $x \geqslant 2$, $y = x + 5$; logo, $y \geqslant 7$.

Aplicando a regra prática, vem:

1º) $x < -8$ e $y < -1$, $x = 3y - 5 \Rightarrow y = \dfrac{x + 5}{3}$

2º) $-8 \leqslant x < 7$ e $-1 \leqslant y < 2$, $x = 5y - 3 \Rightarrow y = \dfrac{x + 3}{5}$

3º) $x \geqslant 7$ e $y \geqslant 2$, $x = y + 5 \Rightarrow y = x - 5$

$$\text{Portanto, } f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 5}{3}, \text{ se } x < -8 \\[2mm] \dfrac{x + 3}{5}, \text{ se } -8 \leqslant x < 7 \\[2mm] x - 5, \quad \text{se } x \geqslant 7 \end{cases}$$

Assim: $f^{-1}(42) = 42 - 5 = 37$.

510. d) $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}_+$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4(x^2 - 3x) + 9 = 4x^2 - 12x + 9 = y$

Aplicando a regra prática para obter a inversa, vem:

$x = 4y^2 - 12y + 9 \Rightarrow 4y^2 - 12y + (9 - x) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{x}}{2}$

Como $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R}_+ \to A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{3}{2}\right\}$, então $y = \dfrac{3 + \sqrt{x}}{2}$.

e) $(g \circ f) : A \to C$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1 + 4} = \sqrt{x^2 + 3} = y$

Aplicando a regra prática, vem:

$x = \sqrt{y^2 + 3} \Rightarrow x^2 = y^2 + 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 3}$

Como $(g \circ f)^{-1} : C \to A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$, então $y = \sqrt{x^2 - 3}$.

512. $f : A \to \mathbb{R}_-$ $\quad g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ $\quad h : \mathbb{R}_+ \to B$

$f(x) = 2x - 1$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad h(x) = 4x - 1$

$[h \circ (g \circ f)] : A \to B$

Determinemos $h \circ (g \circ f)$:

1º) $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

2º) $[h \circ (g \circ f)](x) = 4(4x^2 - 4x + 1) - 1 = 16x^2 - 16x + 3$

Então: $[h \circ (g \circ f)](x) = y = 16x^2 - 16x + 3$.

Aplicando a regra prática para determinar a inversa, temos:

$$x = 16y^2 - 16y + 3 \Rightarrow 16y^2 - 16y + (3 - x) = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{x+1}}{4}$$

Como $[h \circ (g \circ f)]^{-1}(x) : B \to A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, então $y = \dfrac{2 - \sqrt{x+1}}{4}$.

APÊNDICE I — Equações irracionais

516. $|\sqrt{2 + x}| = x$, então devemos ter $x \geqslant 0$.

$$2 + x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

$S = \{2\}$

517. a) $\left(\dfrac{9 + a}{3}\right)^3 = \left(3 + \dfrac{a}{3}\right)^3 = 27 + 3 \cdot 9 \cdot \dfrac{a}{3} + 3 \cdot 3\dfrac{a^3}{9} + \dfrac{a^3}{27} =$

$= 27 + 9a + a^2 + (3^{-1} \cdot a)^3$ (V)

b) $2{,}333... = 2 + 0{,}3 + 0{,}03 + ... = 2\frac{1}{3}$ (V)

porque $0{,}3 + 0{,}03...$ é uma P.G. infinita de primeiro termo $\dfrac{3}{10}$ e

razão $\dfrac{1}{10} \Rightarrow S = \dfrac{\frac{3}{10}}{1} = \dfrac{1}{3}$ e, então, $2 + \dfrac{1}{3} = 2\dfrac{1}{3}$.

c) $\sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, que tem duas raízes reais e positivas. (V)

d) $|a| - |a + 1| < 0 \Leftrightarrow |a| < |a + 1|$ é *falso*, porque, por exemplo, se $a = -2$, vem: $|-2| < |-2 + 1| \Rightarrow 2 < 1$.

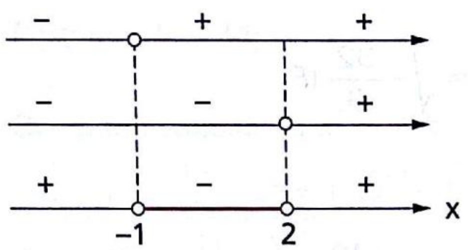
e) $\frac{a + d}{2} = \frac{5}{12}$ e $\frac{b + c}{2} = \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b + c + d = \frac{5}{3}$ (V)

f) $|x - 1|\,(x + 1)(x - 2) < 0$

Como $|x - 1| > 0$, sempre, então $(x + 1)(x - 2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$.



Portanto, f) é verdadeiro.

g) $\frac{b^4 - a^2}{b - \sqrt{a}} = \frac{(b^2 - a)(b^2 + a)}{b - \sqrt{a}} = \frac{(b - \sqrt{a})(b + \sqrt{a})(b^2 + a)}{b - \sqrt{a}} =$

$= (b + \sqrt{a})(b^2 + a) = b^3 + b^2a^{\frac{1}{2}} + ab + a^{\frac{3}{2}}$ e, então, g) é falso.

523. Devemos, inicialmente, verificar se 0 ou 1 são soluções da equação:

$x = 0 \Rightarrow 0^{\sqrt{0}} = \sqrt{0^0}$ (V)

$x = 1 \Rightarrow 1^{\sqrt{1}} = \sqrt{1^1}$ (V)

Resolvendo, vem: $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

$x^{2\sqrt{x}} = x^x \Rightarrow 2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$

$S = \{0, 1, 4\}$

526. e) $\sqrt{x + 1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x + 8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + 1 = x - \sqrt{x + 8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{x + 1} - 2 = \sqrt{x + 8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x + 1) - 8\sqrt{x + 1} + 4 = x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\sqrt{x + 1} = 3x \Rightarrow 64(x + 1) = 9x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9x^2 - 64x - 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{8}{9} \end{cases}$$

Fazendo a verificação, temos:

para $x = 8$: $\sqrt{8+1} - 1 = \sqrt{8 - \sqrt{8+8}} \Rightarrow 3 - 1 = \sqrt{8-4}$ (V)

para $x = -\dfrac{8}{9}$: $\sqrt{-\dfrac{8}{9} + 1} - 1 = \sqrt{-\dfrac{8}{9} - \sqrt{-\dfrac{8}{9} + 8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{3}} - 1 = \sqrt{-\dfrac{32}{9}}$ (F)

$S = \{8\}$

530. a) $x + \sqrt{x^2+16} = \dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+16} + x^2 + 16 = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+16} = -x^2 + 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(x^2+16) = x^4 - 48x^2 + 576 \Rightarrow 64x^2 = 576 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm 3$

Verificando:

para $x = 3$: $3 + \sqrt{9+16} = \dfrac{40}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 3 + 5 = \dfrac{40}{5}$ (V)

para $x = -3$: $-3 + \sqrt{9+16} = \dfrac{40}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow -3 + 5 = \dfrac{40}{5}$ (F)

Então: $S = \{3\}$.

b) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}\right) + x + 2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x} = -x + 2 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Verificando:

para $x = \dfrac{2}{3}$: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3} + 2}\right) + \dfrac{2}{3} + 2 = 4 \Rightarrow \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{3} = 4$ (V)

Portanto: $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

d) $(\sqrt{4x+20})\sqrt{x} = (4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x}) \Rightarrow \sqrt{4x^2+20x} = 16 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 20x = 256 - 32x + x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2 + 52x - 256 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{64}{3} \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

Verificando para $x = 4$:

$$\frac{\sqrt{16+20}}{4+\sqrt{4}} = \frac{4-\sqrt{4}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{6}{6} = \frac{2}{2} \text{ (V)}$$

Portanto: $S = \{4\}$.

532. a) Devemos considerar $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$.

$$\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-(x^2-1)}} + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-(x^2-1)}} = \sqrt{2(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x^2-(x^2-1)} + x + \sqrt{x^2-1} = 2(x^2+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 2(x^2+1) \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Verificando para $x = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{0}}} = \sqrt{2\cdot(2)} \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ (V)}$$

$S = \{1\}$

c) $$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}$$

Devemos considerar: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + \sqrt{3} \geqslant 0 \\ x - \sqrt{3} \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x > +\sqrt{3}$

$$\frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})} +$$

$$+ \frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})} = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}{-\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}\right)+\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}=\sqrt{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x\sqrt{x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^3}}{\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^3}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{x}\Rightarrow \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^3}=3\sqrt{3x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+\sqrt{3}\right)^3+\left(x-\sqrt{3}\right)^3+2\sqrt{\left[\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\right]^3}=27x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}=-2x^3+9x\Rightarrow 4\left(x^2-3\right)^3=4x^6-36x^4+81x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27x^2=108\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ x=2 \end{cases}$$

A verificação para $x = 2$ segue os mesmos passos utilizados na resolução e chega-se a um resultado verdadeiro.
Portanto: $S = \{2\}$.

533. b) Inicialmente, para existência das raízes, devemos ter $x > 0$, $x + \sqrt{x} > 0$ e $x - \sqrt{x} > 0$, ou seja, $x > 1$.

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}}{3\sqrt{x+\sqrt{x}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\frac{4\sqrt{x}}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{4\sqrt{x}}{3}\Rightarrow \sqrt{x^2-x}=x-\frac{\sqrt{x}}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x=x^2-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\frac{x}{9}\Rightarrow \frac{2x\sqrt{x}}{3}=\frac{10x}{3}\xRightarrow{x\neq 0}\sqrt{x}=\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{25}{9}$$

Verificação:

$$\sqrt{\frac{25}{9}+\sqrt{\frac{25}{9}}}-\sqrt{\frac{25}{9}-\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{\sqrt{40}}{3}-\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{\frac{25}{9}}}{3\sqrt{\frac{25}{9}+\sqrt{\frac{25}{9}}}} = \frac{\frac{20}{3}}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$S = \left\{\frac{25}{9}\right\}$$

c) Notemos inicialmente que a condição para existência das raízes é $x \geqslant 0$.

$$\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} = \frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + x - \sqrt{2x + x^2})(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}) =$$

$$= (\sqrt{2 + x} + \sqrt{x})(1 + x + \sqrt{2x + x^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + x} - \sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} - x\sqrt{x} - (x + 2)\sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} =$$

$$= \sqrt{2 + x} + \sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} + x\sqrt{x} + (x + 2)\sqrt{x} + x\sqrt{2 + x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}(x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot (2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{2} \text{ (rejeitada)} \end{cases}$$

Verificação:

$$\frac{1 + 0 - \sqrt{0}}{1 + 0 + \sqrt{0}} = \frac{\sqrt{2} + 0}{\sqrt{2} - 0} \text{ (V)}$$

$$S = \{0\}$$

534. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b - 2x}$

I $a - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant a$

$b - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant b$

$a + b - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{a + b}{2}$

Então, se $a < b$, temos $x \leqslant a < b$; e, se $a \geqslant b$, temos $x < b \leqslant a$.

II $a - x + b - x + 2\sqrt{(a - x)(b - x)} = a + b - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(a - x)(b - x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = b \end{cases}$$

Portanto, de I e II, vem:

se $a < b$, $S = \{a\}$; e, se $a \geqslant b$, $S = \{b\}$.

535. $2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

(I) $a^2 + x^2 \geqslant 0$, quaisquer que sejam *x* e *a* reais.

(II) $2x\sqrt{a^2 + x^2} + 2(a^2 + x^2) = 5a^2 \Rightarrow 2x\sqrt{a^2 + x^2} = 3a^2 - 2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2(a^2 + x^2) = 9a^4 - 12a^2x^2 + 4x^4 \Rightarrow 16a^2x^2 = 9a^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3a}{4}$

Verificando:

para $x = -\dfrac{3a}{4}$, vem: $2\left(-\dfrac{3a}{4}\right) + 2\sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{16}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{6a}{4} + 2 \cdot \dfrac{5a}{4} = \dfrac{4a^2}{a} \Rightarrow a = 4a$ (F)

para $x = \dfrac{3a}{4}$, vem: $\dfrac{6a}{4} + 2 \cdot \dfrac{5a}{4} = 4a \Rightarrow \dfrac{16a}{4} = 4a$ (V)

Portanto: $S = \left\{\dfrac{3a}{4}\right\}$.

536. $\sqrt{x + a} = \sqrt{x} + \sqrt{b}$

(I) $x + a \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -a$
$x \geqslant 0$
$b \geqslant 0$

(II) $x + a = x + 2\sqrt{bx} + b \Rightarrow 2\sqrt{bx} = a - b$

Como $2\sqrt{bx} \geqslant 0$, então $\begin{cases} a - b \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant b > 0 \text{ (há solução)} \\ a - b < 0 \Rightarrow a < b \text{ (não há solução)} \end{cases}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem:

$4bx = (a - b)^2 \Rightarrow x = \dfrac{(a - b)^2}{4b} \Rightarrow$ se $b = 0$ (não há solução)

Portanto:

$a < b$ ou $b = 0 \Rightarrow S = \varnothing$

$a \geqslant b > 0 \Rightarrow S = \left\{\dfrac{(a - b)^2}{4b}\right\}$

$a = b = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x} \Rightarrow S = \mathbb{R}_+$

537. a) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$

(I) Condições iniciais

$\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\neq 0 \Rightarrow \sqrt{a+x}\neq\sqrt{a-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+x\neq a-x \Rightarrow 2x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$

$\left.\begin{array}{l} a+x\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant -a \\ a-x\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow -a\leqslant x\leqslant a$

$b\geqslant 0$

(II) $\dfrac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\sqrt{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{a+x-(a-x)}=\sqrt{b} \Rightarrow \dfrac{2a-2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=\sqrt{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+x^2}=a-\sqrt{b}\,x \Rightarrow a^2-x^2=a^2-2a\sqrt{b}\,x+bx^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (b+1)x^2-2a\sqrt{b}\,x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\left[(b+1)x-2a\sqrt{b}\right]=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}\ (b\neq -1) \end{array}\right.$

Assim, como $-a\leqslant x\leqslant a$, vem:

$-a\leqslant \dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}\leqslant a \Rightarrow -1\leqslant \dfrac{2\sqrt{b}}{b+1}\leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(b+1)\leqslant 2\sqrt{b}\leqslant b+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [-(b+1)]^2\leqslant 4b\leqslant (b+1)^2 \Rightarrow b\geqslant 1$

Portanto, se $b\geqslant 1$, $S=\left\{\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}\right\}$.

b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(I) Condições iniciais

$a\geqslant 0$

$b\geqslant 0$

$x-b\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant b$

$x-a\geqslant b \Rightarrow x\geqslant a$

$\dfrac{a}{b}\geqslant 0 \Rightarrow a\geqslant b$

Então: $x\geqslant a\geqslant b\geqslant 0$.

(II) $\sqrt{ab} + \sqrt{b(x-b)} = \sqrt{ab} + \sqrt{a(x-a)} \Rightarrow$

$\Rightarrow b(x-b) = a(x-a) \Rightarrow (b-a)x = b^2 - a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a + b$ (se $a \neq b$)

Se $a = b$, então $x \geqslant a \geqslant 0$.

Portanto: se $a = b$, $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \geqslant a\}$;

se $a \neq b$, $S = \{a + b\}$.

c) $\dfrac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \dfrac{b}{a}$

(I) Condições iniciais

$$\left.\begin{array}{l} a + x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -a \\ a - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

$\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a+x} \neq \sqrt{a-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow a + x \neq a - x \Rightarrow x \neq 0$

$\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > a$

(II) $\dfrac{a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x - (a - x)} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{bx - a^2}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - x^2 = \dfrac{b^2x^2 - 2a^2bx + a^4}{a^2} \Rightarrow (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2bx = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x[(a^2 + b^2)x - 2a^2b] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (rejeitada)} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Mas $-a \leqslant x \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant \dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2} \leqslant a \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(a^2 + b^2) \leqslant 2ab \leqslant (a^2 + b^2) \Rightarrow \begin{cases} -(a + b)^2 \leqslant 0 \\ \text{e} \\ (a - b)^2 \geqslant 0 \end{cases} \text{verdadeiras, } \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Portanto, para $b > a$, $S = \left\{\dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2}\right\}$.

538. (I) $x - a \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant a$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 + x^2 - a^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant a^2 - b^2 \\ \text{mas } x^2 \geqslant 0, \forall x, x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 \geqslant b^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a| \geqslant |b|$

E, se $|a| \geqslant |b|$, então $b^2 + x^2 - a^2 \geqslant 0$ e
$a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} \geqslant 0$ se $x \geqslant 0$

(II) $a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x^2 - 2ax + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x(x - 2a) \Rightarrow$ se $x \neq 0$,

$\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x - 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + x^2 - a^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 \Rightarrow x = \dfrac{5a^2 - b^2}{4a}$; se $a \neq 0$

Como $x > 0$ e $|a| \geqslant |b|$, então $\dfrac{5a^2 - b^2}{4a} > 0 \Rightarrow$

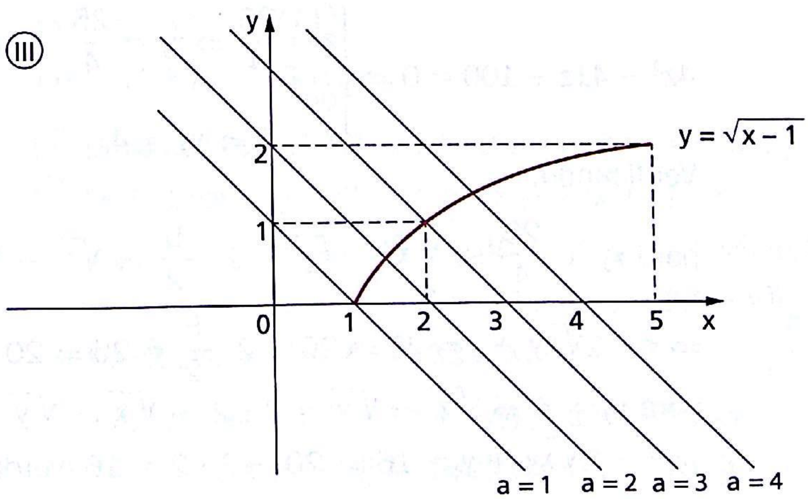
$\Rightarrow 5a^2 - b^2 > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ e, então, $a > 0$.

Portanto: $a > 0$ e $|a| \geqslant |b| \Rightarrow S = \left\{\dfrac{5a^2 - b^2}{4a}\right\}$.

539. $\sqrt{x - 1} = a - x$

(I) $a - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant a$
$x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$
Então: se $a < 1$, não há solução;
se $a = 1, x = 1$;
se $a > 1, 1 \leqslant x \leqslant a$.

(II) $x - 1 = a^2 - 2ax + x^2$
$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{(2a + 1) \pm \sqrt{4a - 3}}{2} \left(\text{se } a \geqslant \dfrac{3}{4}\right)$

(III)


Já sabemos, em (I), que, se $a = 1$, $x = 1$, o que é confirmado pelo gráfico, e, pela substituição em (II), verificamos que é satisfeito para $x = \dfrac{(2a + 1) - \sqrt{4a - 3}}{2}$. Essa escolha se verifica para outros valores de *a*. Então, são esses os pontos de menor abscissa.

540. a) $\begin{cases} xy = 36 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \text{ (devemos ter } x > 0 \text{ e } y > 0) \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \Rightarrow x + 2\sqrt{xy} + y = 25 \Rightarrow x + y = 13$

Então: $\begin{cases} xy = 36 \\ x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 9) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y = 9 \text{ ou } y = 4)$

Verificando: $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ e $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 + 2 = 5$
$S = \{(4, 9), (9, 4)\}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \text{ (devemos ter } x > 0 \text{ e } y > 0) \Rightarrow 2\sqrt{xy} > 0 \Rightarrow \\ x + y = 20 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow x > y$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 4xy \Rightarrow -2\sqrt{xy} = 4xy - 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{xy} = 10 - 2xy \Rightarrow xy = 100 - 40xy + 4x^2y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2y^2 - 41xy + 100 = 0$

Fazendo $xy = z$, temos:

$$4z^2 - 41z + 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{25}{4} \Rightarrow xy = \dfrac{25}{4} \\ \text{ou} \\ z = 4 \Rightarrow xy = 4 \end{cases}$$

Verificando:

para $xy = \dfrac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \cdot \dfrac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 25 \Rightarrow 20 - 2 \cdot \dfrac{5}{2} = 25 \Rightarrow 20 - 5 = 25$ (falso)

para $xy = 4 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 16 \Rightarrow 20 - 2 \cdot 2 = 16$ (verdadeiro)

Então, temos:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 20x + 4 = 0 \Rightarrow x = 10 \pm 4\sqrt{6} \Rightarrow y = 10 \pm 4\sqrt{6}$$

Portanto: $S = \{(10 + 4\sqrt{6}, 10 - 4\sqrt{6})\}$.

c) I $\frac{x}{y} > 0$ e $\frac{y}{x} > 0$

II $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{17}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x^2 + y^2) = 17xy$

Sabemos que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.

Então: $4(100 - 2xy) = 17xy \Rightarrow xy = 16$.

Portanto, temos:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow y = 2 \\ \text{ou} \\ x = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Assim: I $\frac{x}{y} = 4$ e $\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$ e II $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ e $\frac{y}{x} = 4$

Verificando:

I $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (V)

II $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ (V)

Então: $S = \{(2, 8), (8, 2)\}$.

d) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \ \text{①} \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \ \text{②} \end{cases}$

I Devemos ter $xy > 0 \Rightarrow x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$

II De ①, vem: $xy = 49 - 14(x + y) + (x + y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = 49 - 14(x + y) + (x^2 + y^2) + 2xy \Rightarrow$

$\Rightarrow -xy = 49 - 14(x + y) + (x^2 + y^2)$

De ②, vem: $x^2 + y^2 = 133 - xy$.

Então: $-xy = 49 - 14(x + y) + 133 - xy \Rightarrow$

$\Rightarrow 14(x + y) = 182 \Rightarrow x + y = 13$ ③

Portanto, (1) $-\sqrt{xy} = 7 - 13 \Rightarrow \sqrt{xy} = 6 \Rightarrow xy = 36$ (4)

De (3) e (4), temos:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ ou } x = 4$$

Então, para $x = 9$, $y = 4$ e para $x = 4$, $y = 9$.

Verificando: $(4, 9) \Rightarrow 4 + 9 - \sqrt{36} = 7 \Rightarrow 13 - 6 = 7$ (V)

$(9, 4) \Rightarrow 9 + 4 - \sqrt{36} = 7 \Rightarrow 13 - 6 = 7$ (V)

$S = \{(4, 9), (9, 4)\}$

541. a) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y} \end{cases}$

(I) $x^2 - 3y - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 3y + 1 \Rightarrow -3y - 1 < x < 3y + 1$

$x + 6y > 0 \Rightarrow x > -6y$

(II) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} - 2\sqrt{x + 6y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\sqrt{x^2 - 3y - 1} + 3\sqrt{x + 6y} = 57 \\ -15\sqrt{x^2 - 3y - 1} + 10\sqrt{x + 6y} = -5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13\sqrt{x + 6y} = 52 \Rightarrow x + 6y = 16$ (1)

$\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} - 2\sqrt{x + 6y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{x^2 - 3y - 1} + 2\sqrt{x + 6y} = 38 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} - 2\sqrt{x + 6y} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 39 \Rightarrow x^2 - 3y = 10$ (2)

De (1) e (2), vem:

$$\begin{cases} x + 6y = 16 \\ x^2 - 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 16 \\ 2x^2 - 6y = 20 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -\frac{9}{2}$$

Para $x = 4$ temos $y = 2$ e para $x = -\dfrac{9}{2}$ temos $y = \dfrac{41}{12}$.

Verificando: $-3y - 1 < x < 3y + 1$.

Para (4, 2), vem: $-7 < 4 < 7$.

Para $\left(-\frac{9}{2}, \frac{41}{12}\right)$, vem: $-\frac{45}{4} < -\frac{9}{2} < \frac{45}{4}$.

Portanto: $S = \left\{(4, 2), \left(-\frac{9}{2}, \frac{41}{12}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{x+2y} = 4 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$

I $x + y > 0 \Rightarrow x > -y$

$x + 2y > 0 \Rightarrow x > -2y$

II $\begin{cases} \sqrt{2}\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x+2y} = 4\sqrt{2} + 2 \\ -\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+2y} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y = 8$ (1)

$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{x+2y} = 4 + \sqrt{2} \\ 2\sqrt{x+y} - \sqrt{2}\sqrt{x+2y} = -4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 2$ (2)

De (1) e (2), vem:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ -x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = 6 \text{ e } x = -4$

Como $x > -y$, vem $S = \{(-4, 6)\}$.

547. $\sqrt[3]{x+9} = 3 + \sqrt[3]{x-9}$

$x + 9 = 27 + 27\sqrt[3]{x-9} + 9\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2 + x - 9$

Fazendo $\sqrt[3]{x-9} = y$, temos:

$9y^2 + 27y + 9 = 0 \Rightarrow y^2 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Então: $\sqrt[3]{x-9} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2\sqrt[3]{x-9} = -3 \pm \sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\sqrt[3]{x-9}\right)^3 = \left(-3 \pm \sqrt{5}\right)^3 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 80.$

548. $\left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2x-3}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} +$

$+ x - 2 = 2x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} = -\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2(x-2) = -(x-1)(x-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2(x-2) + (x-1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-1+x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{1, \dfrac{3}{2}, 2\right\}$

549. $\left(\sqrt[3]{2 - x}\right)^3 = \left(1 - \sqrt{x - 1}\right)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 - x = 1 - 3\sqrt{x - 1} + 3(x - 1) - (x - 1)\sqrt{x - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 2)\sqrt{x - 1} = 4x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 + 4x + 4)(x - 1) = 16x^2 - 32x + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 13x^2 + 32x - 20 = 0$

Tendo notado que 1 é raiz da equação, vamos dividir o 1º membro por $x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 13x^2 + 32x - 20 & x - 1 \\
 & -x^3 + x^2 & \overline{x^2 - 12x + 20} \\ \hline
 & -12x^2 + 32x - 20 & \\
 & +12x^2 - 12x & \\ \hline
 & 20x - 20 & \\
 & -20x + 20 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Então: $(x - 1)(x^2 - 12x + 20) = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 2$ ou $x = 1$.
Portanto: $S = \{1, 2, 10\}$.

552. $\begin{cases} x + y = 72 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

Fazendo $A = \sqrt[3]{x}$, $B = \sqrt[3]{y}$ e $A + B = 6$, em
$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$, vem:
$216 = x + y + 18\sqrt[3]{xy} \Rightarrow 216 = 72 + 18\sqrt[3]{xy} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[3]{xy} = 8 \Rightarrow xy = 512.$

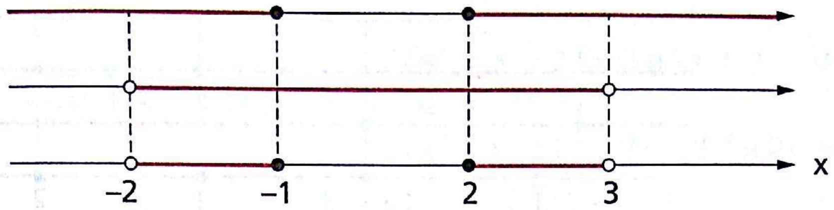
Então: $\begin{cases} x + y = 72 \\ xy = 512 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 72x + 512 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 64 \Rightarrow y = 8 \\ \text{ou} \\ x = 8 \Rightarrow y = 64 \end{cases}$

$S = \{(8, 64), (64, 8)\}$

APÊNDICE II — Inequações irracionais

554. c) $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 - x - 2 < 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \text{e} \\ -2 < x < 3 \end{cases}$$



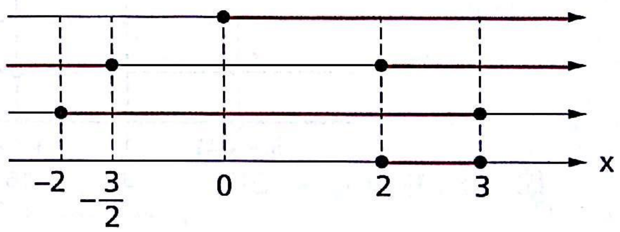
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 2 \leqslant x < 3\}$

e) $\sqrt{2x^2 + x + 3} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2x^2 + x + 3 < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 3 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x^2 + x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{e} \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow S = \varnothing$$

555. f) $\sqrt{2x^2 - x - 6} \leqslant x \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 0 \leqslant 2x^2 - x - 6 \leqslant x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x^2 - x - 6 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$

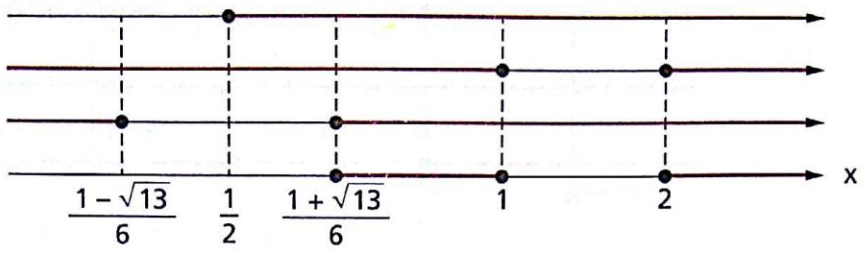
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x \leqslant -\dfrac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \text{e} \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

i) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 0 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant (2x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow$

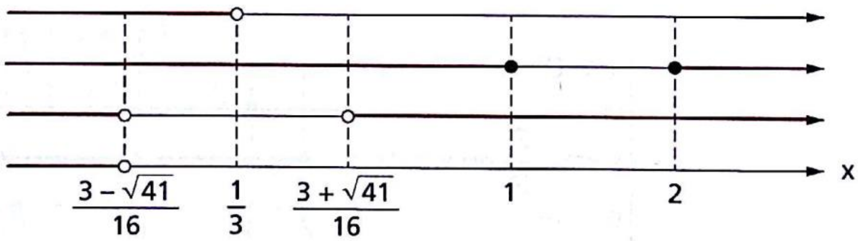
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{e} \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -3x^2 + x + 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{e} \\ x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \text{e} \\ x \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6} \text{ ou } x \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6} \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{13}}{6} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$$

556. $$\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 1 - 3x \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3x > 0 \\ \text{e} \\ 0 \leqslant x^2 - 3x + 2 < (1-3x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x > -1 \\ \text{e} \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -8x^2 + 3x + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ \text{e} \\ x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ \text{e} \\ x < \frac{3-\sqrt{41}}{16} \text{ ou } x > \frac{3+\sqrt{41}}{16} \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3-\sqrt{41}}{16}\right\}$$

558. d) $\sqrt{4x^2 - 13x + 7} > 2 \Rightarrow 4x^2 - 13x + 7 > 4 \Rightarrow 4x^2 - 13x + 3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 3 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 3\right\}$

f) $\sqrt{-5x^2 - 19x + 4} \geqslant -3 \Rightarrow -5x^2 - 19x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow -4 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}\right\}$

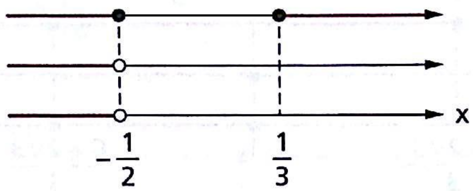
g) $\sqrt{-2x^2 + 5x + 5} \geqslant 3 \Rightarrow -2x^2 + 5x + 5 \geqslant 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 + 5x - 4 \geqslant 0$, em que $\Delta = -7 < 0$

$S = \varnothing$

559. d) $\sqrt{6x^2 + x - 1} > 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + x - 1 \geqslant 0 \text{ e } 2x + 1 < 0 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ 6x^2 + x - 1 > (2x+1)^2 \text{ e } 2x + 1 \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$

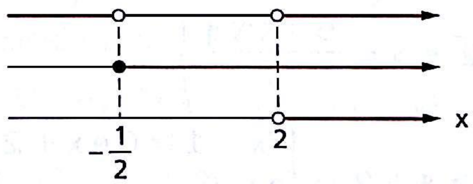
$$\text{(I)} \begin{cases} 6x^2 + x - 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ \text{e} \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{1}{2}\right\}$

$$\text{(II)} \begin{cases} 6x^2 + x - 1 > (2x+1)^2 \\ \text{e} \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ \text{e} \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ \text{e} \\ x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

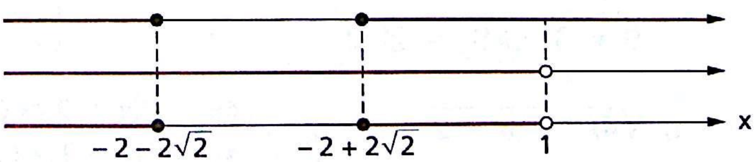


$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

f) $\sqrt{x^2 + 4x - 4} \geqslant 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 4 \geqslant 0 \text{ e } 2x - 2 < 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x^2 + 4x - 4 \geqslant (2x-2)^2 \text{ e } 2x - 2 \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$

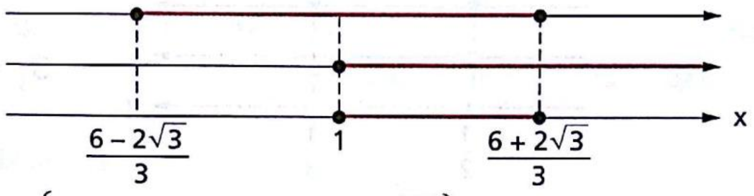
$$\text{(I)} \begin{cases} x^2 + 4x - 4 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant -2 + 2\sqrt{2} \\ \text{e} \\ x < 1 \end{cases}$$



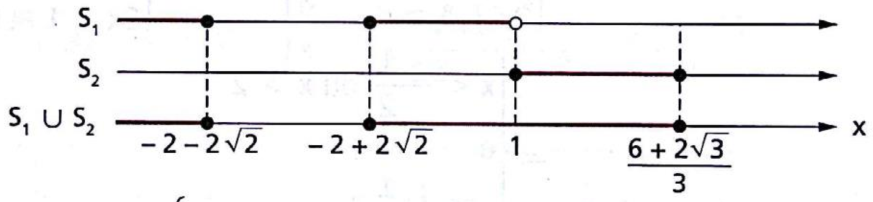
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } -2 + 2\sqrt{2} \leqslant x < 1\}$

$$\text{II} \begin{cases} x^2 + 4x - 4 \geqslant 4x^2 - 8x + 4 \\ \text{e} \\ 2x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 12x - 8 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \\ \text{e} \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$



$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right\}$



$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } \right.$

$\left. -2 + 2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right\}$

g) $\sqrt{7x - 1} \geqslant x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 7x - 1 \geqslant 0 \text{ e } x + 2 < 0 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ 7x - 1 \geqslant (x + 2)^2 \text{ e } x + 2 \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$

$$\text{I} \begin{cases} 7x - 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{7} \\ \text{ou} \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \varnothing$$

$$\text{II} \begin{cases} 7x - 1 \geqslant x^2 + 4x + 4 \\ \text{e} \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 5 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \varnothing$$

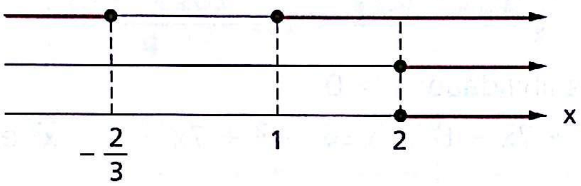
$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

h) $\sqrt{4x^2 - 5x + 2} \geqslant x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0 \text{ e } x - 2 < 0 \text{ (I)} \\ 4x^2 - 5x + 2 \geqslant (x - 2)^2 \text{ e } x - 2 \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$

$$\text{I}\begin{cases} 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{e} \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$\text{II}\begin{cases} 4x^2 - 5x + 2 \geqslant x^2 - 4x + 4 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3} \text{ ou } x \geqslant 1 \\ \text{e} \\ x \geqslant 2 \end{cases}$$



$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

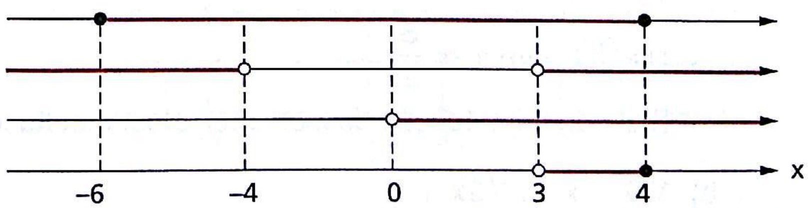
$S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$

561. b) $\dfrac{\sqrt{-x^2 - 2x + 24}}{x} < 1$

1ª possibilidade: $x > 0$

$\sqrt{-x^2 - 2x + 24} < x \Rightarrow 0 \leqslant -x^2 - 2x + 24 < x^2$ e $x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 24 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -2x^2 - 2x + 24 < 0 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{e} \\ x < -4 \text{ ou } x > 3 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases}$$



$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4\}$

2ª possibilidade: $x < 0$

$$\frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 24}}{x} < 1 \Rightarrow \sqrt{-x^2 - 2x + 24} > x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 24 \geqslant 0 \text{ e } x < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 24 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{e} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x < 0\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x < 0 \text{ ou } 3 < x \leqslant 4\}$$

d) $\dfrac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{x} \geqslant 1$

1ª possibilidade: $x > 0$

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} \geqslant x \Rightarrow -x^2 + 7x - 6 \geqslant x^2 \text{ e } x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + 7x - 6 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

2ª possibilidade: $x < 0$

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant -x^2 + 7x - 6 \leqslant x^2 \text{ e } x > 0$$

Como as condições sobre *x* são imcompatíveis, então $S_2 = \varnothing$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

563. a) $\sqrt{3x - 2} \geqslant \sqrt{2x - 3}$

$$\sqrt{3x - 2} \geqslant \sqrt{2x - 3} \Rightarrow \underbrace{3x - 2 \geqslant 2x - 3}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{2x - 3 \geqslant 0}_{\text{II}}$$

De I, vem $x \geqslant -1$

De II, vem $x \geqslant \dfrac{3}{2}$

Fazendo a interseção desses intervalos, resulta $x \geqslant \dfrac{3}{2}$.

b) $\sqrt{5 - x} < \sqrt{2x + 7}$

$$\sqrt{2x + 7} > \sqrt{5 - x} \Rightarrow \underbrace{2x + 7 > 5 - x}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{5 - x \geqslant 0}_{\text{II}}$$

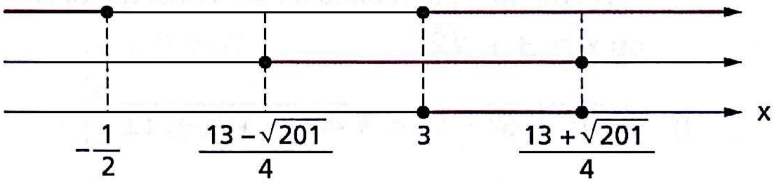
De (I) vem $x > -\dfrac{2}{3}$

De (II) vem $x \leqslant 5$

Fazendo a interseção desses intervalos, encontramos $-\dfrac{2}{3} < x \leqslant 5$.

c) $\sqrt{2x^2 - 5x - 3} \leqslant \sqrt{8x + 1} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x^2 - 5x - 3 \leqslant 8x + 1 \end{cases} \Rightarrow$

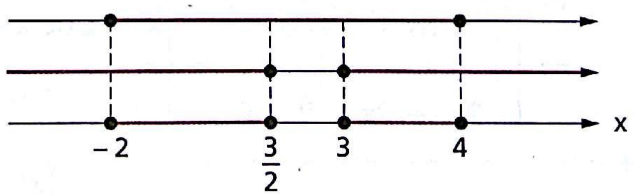
$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3 \\ \text{e} \\ \dfrac{13 - \sqrt{201}}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{13 + \sqrt{201}}{4} \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant \dfrac{13 + \sqrt{201}}{4}\right\}$$

d) $\sqrt{x^2 - 7x + 17} \geqslant \sqrt{8 + 2x - x^2} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 7x + 17 \geqslant -x^2 + 2x + 8 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x^2 - 9x + 9 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \text{e} \\ x \leqslant \dfrac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2} \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 4\right\}$$

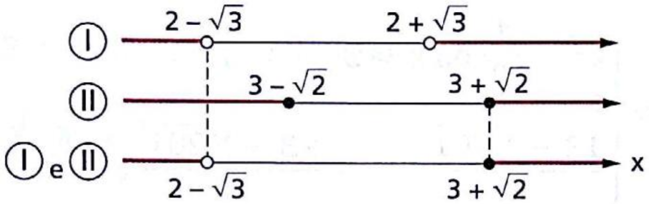
e) $\sqrt{2x^2 - 10x + 8} > \sqrt{x^2 - 6x + 7}$

A inequação proposta equivale ao sistema:

$$\underbrace{2x^2 - 10x + 8 > x^2 - 6x + 7}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{x^2 - 6x + 7 \geq 0}_{\text{II}}$$

De I vem $x^2 - 4x + 1 > 0 \Rightarrow x < 2 - \sqrt{3}$ ou $x > 2 + \sqrt{3}$

De II vem $x \leq 3 - \sqrt{2}$ ou $x \geq 3 + \sqrt{2}$



Procurando a interseção desses intervalos, encontramos $x < 2 - \sqrt{3}$ ou $x \geq 3 + \sqrt{2}$.

f) $\sqrt{-x^2 + 5x - 6} < \sqrt{4x^2 - 12x + 11}$

A inequação proposta equivale ao sistema:

$$\underbrace{4x^2 - 12x + 11 > -x^2 + 5x - 6}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{-x^2 + 5x - 6 \geq 0}_{\text{II}}$$

De I vem $5x^2 - 17x + 17 > 0$ cuja solução é $x \in \mathbb{R}$, x qualquer.

De II vem $2 \leq x \leq 3$

Portanto, a solução é $2 \leq x \leq 3$.

g) $\sqrt{-x^2 - 3x + 2} > \sqrt{x^2 - 5x + 4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ \text{e} \\ -x^2 - 3x + 2 > x^2 - 5x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ \text{e} \\ -2x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4 \\ \text{e} \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow S = \varnothing$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} < \sqrt{2x^2 - x + 4} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \geq 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 2x + 2 < 2x^2 - x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ -x^2 - 1x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{e} \\ \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

564. a) $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} > \sqrt{2 - x} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ 4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x \text{ (II)} \end{cases}$

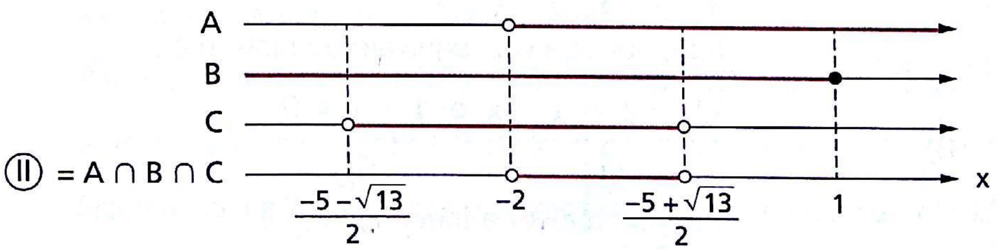
(I) $2 - x \geqslant 0 \Rightarrow -x \geqslant -2 \Rightarrow x \leqslant 2$

(II) $4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x \Rightarrow -\sqrt{1 - x} > -x - 2 \Rightarrow$

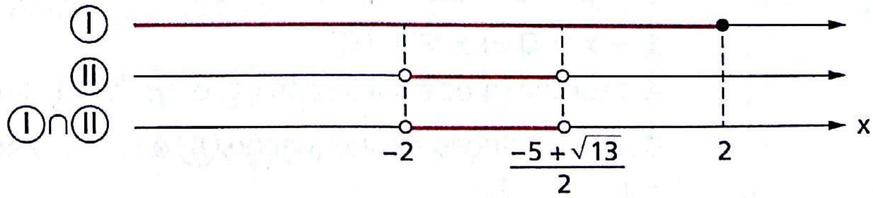
$$\Rightarrow \sqrt{1 - x} < x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ \text{e} \\ 0 \leqslant 1 - x < (x + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ \text{e} \\ 1 - x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 + 4x + 4 > 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \text{e} \\ -x \geqslant -1 \\ \text{e} \\ x^2 + 5x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -2 \text{ (A)} \\ \text{e} \\ x \leqslant 1 \text{ (B)} \\ \text{e} \\ x < \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2} \text{ ou } x > \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2} \text{ (C)} \end{cases}$$



Então, vem:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}\right\}$$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{x+3}} - \sqrt{4 + x} < 0$

A inequação dada equivale a:

$\sqrt{4 + x} > \sqrt{2 - \sqrt{x + 3}}$

que, por sua vez, equivale ao sistema:

$$\underbrace{4 + x > 2 - \sqrt{x + 3}}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{2 - \sqrt{x + 3} \geqslant 0}_{\text{II}}$$

Vamos resolver a inequação I:

$4 + x > 2 - \sqrt{x + 3} \Rightarrow \sqrt{x + 3} > -2 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 > (-2 - x)^2 \Rightarrow x + 3 > 4 + 4x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

Vamos resolver a inequação II:

$2 - \sqrt{x + 3} \geqslant 0 \Rightarrow 2 \geqslant \sqrt{x + 3} \Rightarrow (4 \geqslant x + 3 \text{ e } x + 3 \geqslant 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 1$

Procurando a interseção das soluções, obtemos:

$\dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} < x \leqslant 1$

c) $\sqrt{1 - x} \leqslant \sqrt{\sqrt{5 + x}}$

A inequação dada equivale a:

$\sqrt{\sqrt{5 + x}} \geqslant \sqrt{1 - x}$

que, por sua vez, equivale ao sistema:

$$\underbrace{\sqrt{5 + x} \geqslant 1 - x}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{1 - x \geqslant 0}_{\text{II}}$$

Vamos resolver a inequação I:

$\sqrt{5 + x} \geqslant 1 - x \Rightarrow 5 + x \geqslant (1 - x)^2 \text{ e } 1 - x \geqslant 0$

$5 + x \geqslant 1 - 2x + x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 4$ A

$1 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$ B

A interseção dos conjuntos A e B é $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Como a solução da inequação II é $x \leqslant 1$, a solução do sistema é $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

d) $\sqrt[4]{x + 8} < \sqrt{x + 2}$

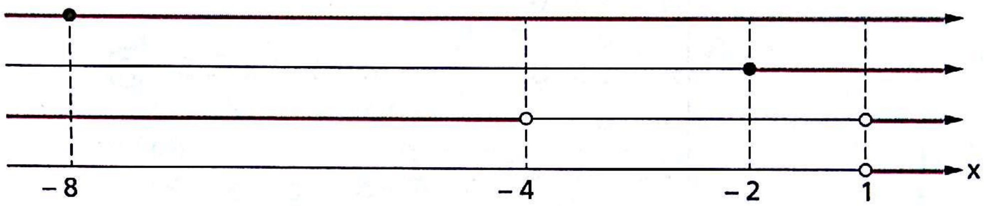
Condições preliminares:

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -8 \\ \text{e} \\ x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant -2 \quad (A)$$

Retomando a inequação inicial, temos:

$$\sqrt[4]{x + 8} < \sqrt{x + 2} \Rightarrow x + 8 < (x + 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0 \Rightarrow x \leqslant -4 \text{ ou } x > 1 \quad (B)$$



Procurando a interseção dos conjuntos (A) e (B), encontramos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

566. a) $\sqrt{x + 5} < 1 + \sqrt{x - 2}$

Condições preliminares:

$$\begin{cases} x + 5 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -5 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 2 \quad (A)$$

Retomando a inequação inicial, temos:

$$\sqrt{x + 5} < 1 + \sqrt{x - 2} \Rightarrow x + 5 < 1 + x - 2 + 2\sqrt{x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 < 2\sqrt{x - 2} \Rightarrow \sqrt{x - 2} > 3 \Rightarrow x - 2 > 9 \Rightarrow x > 11 \quad (B)$$

Procurando a interseção dos conjuntos (A) e (B), encontramos $x > 11$.

b) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 4} < 3$

Condições preliminares:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1 \\ \text{e} \\ x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 4 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 4 \quad (A)$$

Retomando a inequação inicial:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} < 3 \Rightarrow \sqrt{x-1} < 3 + \sqrt{x-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 < 9 + 6\sqrt{x-4} + x - 4 \Rightarrow -6 < 6\sqrt{x-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-4} > -1 \quad (B)$$

A condição (B) é satisfeita para todo x do domínio (A), então: $x \geqslant 4$.

c) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

Condições preliminares:

$$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ \quad \text{e} \\ x + 1 \geqslant 0 \\ \quad \text{e} \\ \sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3 \quad (A)$$

Retomando a inequação original, temos:

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{3 - x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{\frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \geqslant 0}_{\text{II}}\Big)$$

Solução de (II):

$\dfrac{1}{2} + \sqrt{x+1} \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geqslant -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ qualquer x tal que $x \geqslant -1$ (B)

Solução de (I):

$$3 - x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1 \Rightarrow \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{4} - 2x\right)^2 > x + 1 \Rightarrow \frac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \Rightarrow x < \underbrace{1 - \frac{\sqrt{31}}{8}}_{0{,}3040} \text{ ou } x > \underbrace{1 + \frac{\sqrt{31}}{8}}_{1{,}6959} \quad (C)$$

Procurando a interseção de Ⓐ, Ⓑ e Ⓒ, encontramos

$-1 \leqslant x < 1 - \dfrac{\sqrt{31}}{8}$.

d) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$

(I) $\left.\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1 \\ x^2 - x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \forall x, x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1$

(II) Notemos que, para os valores de x que satisfazem (I), ambos os membros da inequação são positivos e, então, podemos quadrá-la sem necessidades de verificação.

$x^2 + 3x + 2 < 1 + x^2 - x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x < 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} > 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 \geqslant 0 \text{ e } 2x < 0 \text{ (A)} \\ \text{ou} \\ x^2 - x + 1 > 4x^2 \text{ e } 2x \geqslant 0 \text{ (B)} \end{cases}$

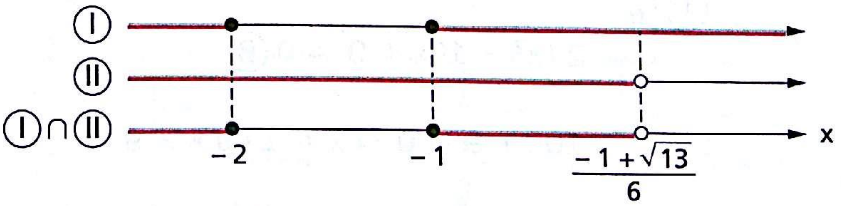
(A) $\begin{cases} x^2 - x + 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{e} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0$

(B) $\begin{cases} -3x^2 - x + 1 > 0 \\ \text{e} \\ 2x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{6} < x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6} \\ \text{e} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leqslant x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

De (A) e (B) vem: $x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}$.

Assim:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } -1 \leqslant x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right\}$

567. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$

$$\text{I}\begin{cases} x+6 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x+1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x-5 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -6 \\ \text{e} \\ x \geqslant -1 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{5}{2} \\ \text{e} \\ x \geqslant \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

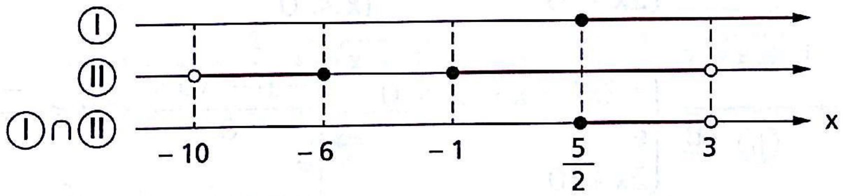
II Como $x + 6 > x + 1$, então para qualquer valor de x, inclusive para os que satisfazem I, $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > 0$ e, portanto, podemos quadrar a inequação sem preocupações com verificação.

$$x + 6 + x + 1 - 2\sqrt{(x+6)(x+1)} > 2x - 5 \Rightarrow \sqrt{x^2+7x+6} < 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+7x+6 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2+7x+6 < 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -6 \text{ ou } x \geqslant -1 \\ \text{e} \\ -10 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 < x \leqslant -6 \text{ ou } -1 \leqslant x < 3$$

Assim:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leqslant x < 3\right\}$$

568. $x + \sqrt{x^2-10x+9} > \sqrt{x + 2\sqrt{x^2-10x+9}}$

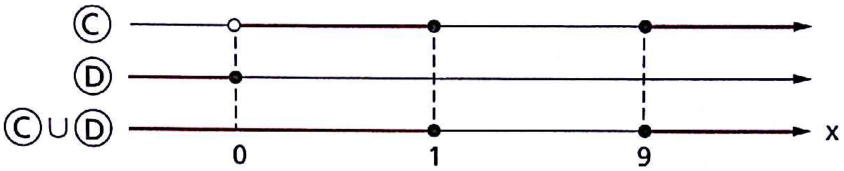
$$\text{I}\begin{cases} x^2-10x+9 \geqslant 0 \ \text{(A)} \\ \text{e} \\ x + 2\sqrt{x^2-10x+9} \geqslant 0 \ \text{(B)} \end{cases}$$

(A) $x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 9$

(B) $2\sqrt{x^2-10x+9} \geqslant -x \Rightarrow \begin{cases} x^2-10x+9 \geqslant 0 \text{ e } -x < 0 \ \text{(C)} \\ \text{e} \\ x^2-10x+9 \geqslant x^2 \text{ e } -x \geqslant 0 \ \text{(D)} \end{cases}$

$$\text{Ⓒ}\begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \\ e \\ -x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9 \\ e \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9$$

$$\text{Ⓓ}\begin{cases} -10x + 9 \geqslant 0 \\ e \\ -x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{9}{10} \\ e \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant 0$$



Assim: Ⓒ ∪ Ⓓ = Ⓑ $\Rightarrow x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 9$.

Então: Ⓐ = Ⓑ $\Rightarrow$ Ⓐ ∩ Ⓑ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9\}$.

(II) $x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} > \sqrt{x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x^2 - 10x + 9 + 2x\sqrt{x^2 - 10x + 9} > x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 11x + 9 > (2 - 2x)\sqrt{x^2 - 10x + 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 - 2x)\left(-x + \dfrac{9}{2}\right) > (2 - 2x)\sqrt{x^2 - 10x + 9}$

Se $x \leqslant 1$, temos $2(1 - x) \geqslant 0$ e recaímos em

$\sqrt{x^2 - 10x + 9} < -x + \dfrac{9}{2}$

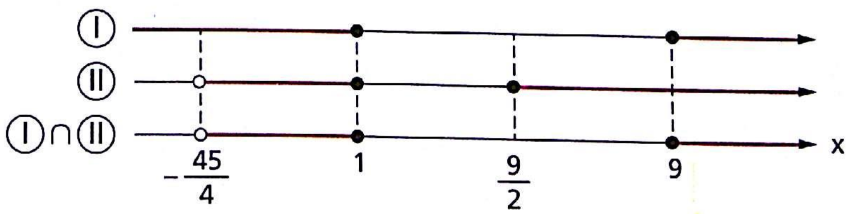
cuja solução é $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{45}{4} < x < 1\right\}$.

Se $x \geqslant 1$, temos $2(1 - x) \leqslant 0$ e recaímos em

$\sqrt{x^2 - 10x + 9} < -x + \dfrac{9}{2}$

cuja solução é $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{9}{2}\right\}$.

Portanto, vem:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{45}{4} < x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 9\right\}$$

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

Atual Editora

ISBN 978-85-357-1681-8

9 788535 716818