

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 13

a)

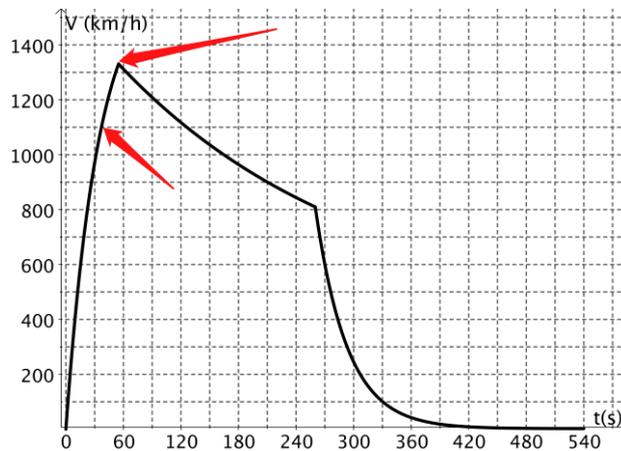
Considerando uma Progressão Aritmética com $a_0 = 0 \text{ km}$ e razão $r = 35 \frac{\text{km}}{\text{h} \times \text{s}}$,

$$a_{30} = a_0 + r \times 30s = 0 + 35 \frac{\text{km}}{\text{h} \times \text{s}} \times 30s = 1050 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

b)

A velocidade máxima atingida foi um pouco mais que 1.300km/h.

O saltador atingiu a velocidade do som em torno de 45 s.

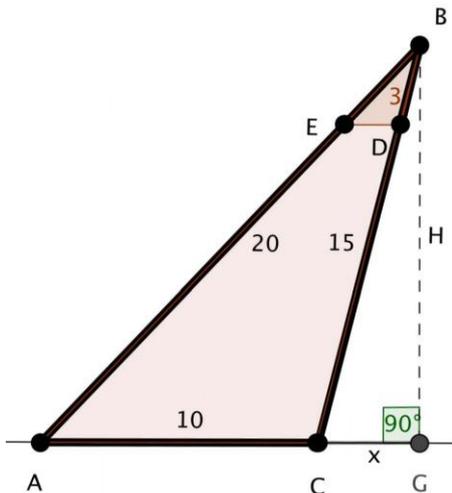


Questão 14

a)

Por semelhanças de triângulos,

$$\frac{H}{15} = \frac{h}{3} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{15}{3} = 5$$



RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)

Considerando os dois triângulos retângulos ABG e CBG, podemos escrever

$$(10 + x)^2 + H^2 = 20^2, \quad x^2 + H^2 = 15^2.$$

Desenvolvendo a primeira equação e eliminando x , obtemos

$$10^2 + 20x + x^2 + H^2 = 20^2 \Leftrightarrow 10^2 + 20x + 15^2 = 20^2 \Rightarrow 20x = 20^2 - 10^2 - 15^2 = 400 - 100 - 225 = 75.$$

Portanto,

$$x = \frac{75}{20} = \frac{15}{4}.$$

E, assim,

$$H^2 = 15^2 - x^2 = 15^2 \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = 15^2 \times \frac{15}{4^2} \Rightarrow H = \frac{15}{4} \sqrt{15} \approx 14,52.$$

É possível usar a fórmula de Heron em conjunto com a definição da área do triângulo.

Questão 15

a)

Seja x o comprimento de um dos lados. Então, $x \times 2x = 32 \times 10^4 m^2 \Rightarrow x = 400m$. Os quatro retângulos laterais da APP terão área $6x \times 100m^2 = 24 \times 10^4 m^2$.

Para completar a APP, há quatro setores circulares iguais a um quarto de círculo de raio $100m$, resultando em um círculo completo de área $\pi \times 100^2 m^2 = \pi \times 10^4 m^2$. Assim, a APP será de $(24 + \pi) \times 10^4 m^2$.

b)

$$\frac{V(t)}{V_0} = 10\% = 0,1 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{10} \Rightarrow 2^t = 10 \Rightarrow t \log_{10} 2 = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\log_{10} 2} \approx \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

Ou seja, aproximadamente 3 meses e 10 dias.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 16

a)

$$\frac{t - t_0}{x - x_0} = \frac{t_m - t_0}{x_m - x_0} \Leftrightarrow \frac{t - 35}{x - 23,8} = \frac{42 - 35}{27,3 - 23,8} = \frac{7}{3,5} = 2$$

De

$$\frac{t - 35}{x - 23,8} = 2,$$

segue que

$$t = 2x - 2 \times 23,8 + 35 = 2x - 12,6$$

e

$$x = t/2 - 35/2 + 23,8 = \frac{t}{2} + 6,3.$$

Assim,

$$a = 2 \times cm^{-1}, b = -12,6, c = \frac{1}{2} \times cm \text{ e } d = 6,3 \times cm.$$

b)

$$n_5 = n_1 + \frac{1}{2} \times 4 = 5 + 2 = 7 \implies f(c_5) = 7$$

$$\implies \frac{5}{3} (c_5 - 20) = 7 \implies c_5 = \frac{21}{5} + 20 = 4 + \frac{1}{5} + 20 = 24,2$$

Portanto, $c_5 = 24,2$ cm.

Questão 17

a)

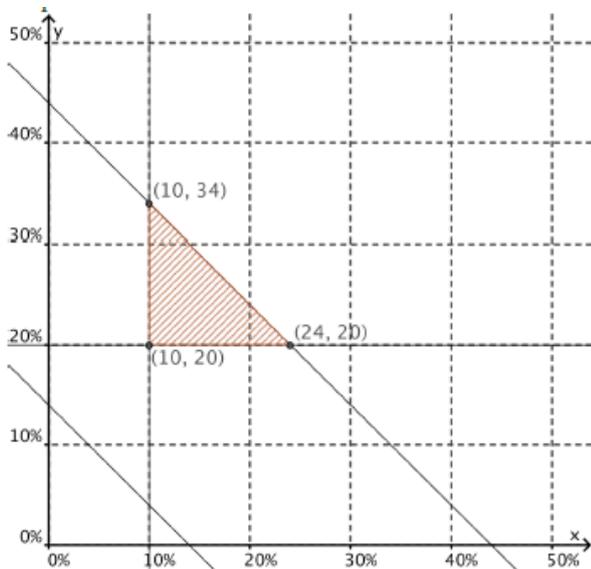
A solução do sistema é obtida por substituição revertida.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0,20 \Rightarrow 3x = (0,20 - 0,15 + 0,25) = 0,30 \Rightarrow x = 0,10 = 10\% \\ 2y + z = 0,55 \Rightarrow 2y = 0,55 - 0,25 = 0,3 \Rightarrow y = 0,15 = 15\% \\ z = 0,25 = 25\% \end{cases}$$

b)

Substituindo o valor de $z = 10\%$, temos $14\% \leq x + y \leq 44\%$, que define uma região entre duas retas. As outras duas retas paralelas aos eixos, $x = 10\%$ e $y = 20\%$, estabelecem a fronteira esquerda e a fronteira inferior da região, respectivamente.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA



Questão 18

a)

2 cursos: $2 \times 600 = 1.200$. O desconto de 20% é igual a 240. Assim,

$$\frac{240}{600} = 0,4 = 40\%$$

3 cursos: $3 \times 600 = 1.800$. O desconto de 30% é igual a 540. Assim:

$$\frac{540}{600} = 0,9 = 90\%$$

b)

Matriculados em pelo menos dois cursos: $3+2+4+7=16$ alunos

Total de alunos: $16+6+8+9=39$ alunos.

Probabilidade de um aluno estar matriculado em apenas um curso:

$$\frac{39-16}{39} = \frac{23}{39} \approx 59\%$$

Questão 19

a)

$y = \text{constante}$ implica $2 - p = 0 \Rightarrow p = 2$.

Substituindo esses valores na expressão, obtemos $5y + 16 + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = -4$. Portanto, o ponto de interseção é $(0, -4)$.

b)

$y = 0 \Rightarrow x = -12$. Portanto, $A = (-12, 0)$.

Então, a circunferência tem Centro = $(-6, 0)$ e Raio = 6. Assim, a equação é $(x + 6)^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + 12x + y^2 = 0$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 20

a)

Se as arestas medem a, qa e q^2a com $q > 1$, então o perímetro da menor face é $2(a + qa)$ e o da maior face é $2(qa + q^2a)$. Portanto, o quociente pedido é

$$\frac{2(qa + q^2a)}{2(a + qa)} = \frac{qa(1 + q)}{a(1 + q)} = q$$

b)

A área total da piscina é

$$2(a^2q + a^2q^2 + a^2q^3) = 2a^2q(1 + q + q^2) = 4a^2(1 + 2 + 2^2) = 28a^2 = 252$$

Portanto, $a^2 = 252/(7 \times 4) = 9 \Rightarrow a = 3$ m. Assim, as arestas medem 3,6 e 12m.

Logo, o volume da piscina é $V = a \times qa \times q^2a = (qa)^3 = (2 \times 3)^3 = 216 \text{ m}^3$

Questão 21

a)

Por divisão explícita,

$$\begin{array}{r} x^2 - 11x + k + 2 \\ -x^2 + x \\ \hline -10x + k + 2 \\ +10x - 10 \\ \hline k - 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} |x - 1 \\ x - 10 \end{array}$$

Por Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -11 & k+2 & 1 \\ 1 & -10 & k-8 & \end{array}$$

Pelo teorema do resto, $p(1) = 1 - 11 + k + 2 = k - 8 = \text{resto}$.

Assim, para que $k - 8 = 3 \Rightarrow k = 11$.

b)

Agora temos $p(x) = x^2 - 11x + 6$ e, pelas propriedades das raízes desse polinômio, $a + b = 11$ e $ab = 6$. Por outro lado,

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} = \frac{\pi(a + b)}{ab} = \frac{11\pi}{6} = \frac{12 - 1}{6}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Assim, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 22

a)

A soma das matrizes é:

$$A_{\alpha} + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} .$$

Sua multiplicação por ela mesma é:

$$(A_{\alpha} + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \frac{9}{2} & 6\alpha - 6\alpha \\ -\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} & -\frac{9}{2} + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

b)

O determinante da matriz é zero. Portanto, o sistema vai admitir solução se as duas equações forem dependentes, isto é,

$$\begin{cases} x + \alpha y = -6 \\ -\frac{1}{\alpha}x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \alpha y = -6 \\ -x - \alpha y = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3$$

Questão 23

a)

O volume do recipiente sem água é $\frac{1}{4}a^3$. Como o cubo gira em torno de uma aresta da base, podemos observar a superfície da seção do cubo. (Veja a figura.)

A área da região sem água deve ser a mesma nos dois casos. Então, $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}z \times a \Rightarrow z = a/2$.

Portanto,

$$\tan \alpha = \frac{z}{a} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}.$$

b)

A $\tan \alpha = 1/4$, com $0 < \alpha < \pi/2$ corresponde a um triângulo retângulo de catetos 1 e 4, e, assim, de hipotenusa $\sqrt{17}$, de onde tiramos os valores de

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Temos, então, as identidades trigonométricas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{17} - \frac{1}{17} = \frac{15}{17}$$

e

$$\sin 2\alpha = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 2 \times \frac{4}{17}$$

Portanto, a diferença é

$$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{15 - 8}{17} = \frac{7}{17}$$

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 24

a)

Precisamos conhecer o ângulo interno $A\hat{O}B$. Para tal, basta vislumbrar o triângulo AOS , de que se conhece um cateto, adjacente ao ângulo $A\hat{O}S$, que mede o raio da Terra, e a hipotenusa, que mede o dobro do raio da Terra.

$$\text{Assim, } \cos A\hat{O}S = \frac{6.400}{2 \times 6.400} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Portanto, } A\hat{O}S = 60^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{ radianos.}$$

O comprimento do arco é, então, $\frac{2}{3}\pi \times 6.400 \text{ km} \approx 13.400 \text{ km}$.

b)

Pela Lei dos Cossenos, temos que

$$\begin{aligned} d^2 &= [4 + 1 - 4 \times \cos(\theta)] \times 6.400^2 \text{ km}^2 = \left[4 + 1 - 4 \times \frac{3}{4}\right] \times 6.400^2 \text{ km}^2 \\ &= 2 \times 6.400^2 \text{ km}^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \times 6.400 \text{ km} \approx 9.000 \text{ km} \end{aligned}$$