Caio dos Santos Guimarães

Matemática Em Nível IME/ITA

Volume 1:
Números Complexos e Polinômios

1ª Edição

Editora Vestseller
São José dos Campos – SP
2008

caioguima@gmail.com

Editor responsável: Renato Brito Bastos Neto
Editoração: Renato Brito Bastos Neto
Capa: Cleiton Maciel

Esta obra pode ser adquirida diretamente na
EDITORA VESTSELLER
através de sua página eletrônica *www.vestseller.com.br*

FICHA CATALOGRÁFICA: Preparada por
Ruth Helena Linhares Leite e Luiza Helena de Jesus Barbosa.

B327m Guimarães, Caio dos Santos

Matemática em Nível IME ITA / Caio dos Santos Guimarães -
São José dos Campos: Vestseller, 2008. 324p. ; v.1.

I. Matemática II. Complexos (segundo grau) III. Polinômios
IV. Título

CDD 531


RESPEITE O DIREITO AUTORAL
FOTOCÓPIA

Sumário

06 – Polinômios: Análise Gráfica de Funções Polinomiais

07 – Resoluções Comentadas

Apêndice

Bibliografia

Projeto Rumo ao ITA

Prefácio

Os estudantes e professores do segmento IME ITA sempre estudaram Complexos e Polinômios por bons livros didáticos, mas ainda não dispunham do livro que contasse todos os segredos, teoremas e artimanhas poderosas para a resolução de problemas mais avançados de nível IME ITA. O livro só agora foi publicado.

Esse manual de Complexos e Polinômios do Caio Guimarães pode ser chamado de "*O Livro vermelho dos Complexos e Polinômios*". O autor não poupou esforços para revelar em sua obra todas as ferramentas poderosas importantes relacionadas aos Complexos e Polinômios, fornecendo ao leitor tanto interpretações algébricas quanto geométricas sempre que possível, versatilidade essa que proporcionará ao leitor desse livro *"uma visão além do alcance"*. Mesmo os problemas mais inquietantes agora terão soluções elegantes e concisas, quando se dispõe das melhores ferramentas para resolvê-los. Essas ferramentas foram todas concentradas nessa obra prima.

Assim, é com muita honra que a VestSeller brinda os estudantes e professores de todo o Brasil com a publicação dessa obra de valor inestimável. Estamos certos de que o empenho e a dedicação investidos pelo autor em mais de ano ano de trabalho árduo certamente foram compensados.

Ganhamos todos, os estudantes, os professores e a sofrida educação brasileira

Parabéns ao Caio Guimarães.

Prof. Renato Brito Bastos neto
(autor do livro Mecânica Para Vestibulandos IME ITA)

Apresentação

O livro ‘Matemática em Nível IME/ITA’ tem como objetivo não somente dar a base aos alunos que desejam encarar as difíceis provas de vestibular do IME e do ITA, mas também ajudar a aumentar a barra de dificuldade das matérias de matemática lecionadas no ensino médio, a fim de atingir o nível exigido nessas provas. A leitura desse material também é indicada a professores de cursos preparatórios para pré-vestibular, principalmente aqueles com ênfase nos vestibulares militares.

Compilamos neste livro um material que contém tanto a carga teórica que o aluno pode precisar para consulta, quanto séries de exercícios (e muitos!), com resoluções, que darão a ele a confiança necessária para encarar o vestibular militar.

Neste primeiro volume, abordamos dois assuntos de extrema importância, e principalmente, reincidência nas provas tanto do IME quanto do ITA: Números Complexos e Polinômios. O nosso objetivo, neste volume, é de, junto à teoria básica desses assuntos, também mostrar diferentes aplicações dos mesmos, bem como diversas ‘situações problemas’ que podem ser pedidas no “grande dia” da prova e os ‘grandes truques’ de como se comportar frente a ela.

Caio dos Santos Guimarães

São José dos Campos, SP - 2008

Dedicatória

Esse livro é dedicado à minha família (as pessoas mais importantes na minha vida): Ciro, Lúcia, Marcos e à minha companheira mais do que especial de todos os momentos, Fernanda. Amo vocês!

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos colaboradores desse projeto. Em especial, os que tiveram contato direto com o trabalho. Entre elas cito meus verdadeiros amigos aqui no ITA (meus colegas de quarto), que colaboraram, não só com o apoio moral (e uma amizade fundamental), mas também muitas vezes com seu intelecto, ajudando na confecção de diversas partes do livro: Hélder Suzuki, Henry Wei, Rodolpho Castro, Luiz Adolfo Schiller, Rafael Daigo Hirama, Felipe Moraes. Agradeço a Alessandra Porto pela ajuda com o material para o contexto histórico do livro e pelo pessoal da AER-09 pela ajuda na revisão do material.

Agradeço também aos colaboradores Edmilson Motta (Etapa), a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e Sergio Lima Netto, que permitiram o uso de seus artigos e trabalhos para referência. Não poderia esquecer também os grandes mentores que tive durante a minha preparação para o vestibular, os professores e restante da equipe GPI (RJ) – Turma IME/ITA 2003-2005 (verdadeiros mestres que nunca esquecerei!). Junto a eles gostaria de agradecer aos meus companheiros de cursinho (turma IME/ITA GPI 2004): Marcello Nunes, Jorge Veloso, Vinicius Assis; sem eles, eu não teria alcançado os objetivos dos meus sonhos de passar no tão sonhado vestibular.

E, finalmente, gostaria de agradecer à minha família e aos meus amigos, que sempre estiveram presente em todas as minhas dificuldades e sucessos. Na hora de apoiar a escrita desse livro não foi diferente. A eles devo tudo que tenho e conquistei até hoje (e ainda sonho em conquistar!)

Como Estudar o Livro?

O livro é muito voltado a resoluções de questões do nível IME/ITA. Portanto, a teoria apresentada é direcionada a resultados que serão bastante úteis na resolução das questões do gênero. O livro não é destinado àqueles que nunca estudaram o assunto antes. Embora abranja todo conteúdo, para a melhor compreensão do material, é aconselhável que o aluno/professor já tenha tido contato com o assunto previamente.

As questões do IME e do ITA, em geral, abrangem mais de um assunto em um mesmo enunciado, portanto comumente nas questões que aqui são propostas, será requerido que o aluno/professor saiba o básico de outros ramos da matemática (progressões aritméticas e geométricas, geometria analítica, etc.). Quando isso for requisitado em algum segmento da parte teórica, mencionaremos o assunto que deve ser pesquisado (por fora) para a total compreensão do segmento.

Recomendamos que o aluno/professor leia toda a parte teórica (mais de uma vez, se necessário) para a fixação das idéias destacadas (lembre-se que todo o conteúdo aqui apresentado será importante, não sendo aconselhável que parte alguma seja descartada). Dê uma atenção especial aos exemplos resolvidos, que servirão de base para a resolução dos 'Exercícios de Fixação'.

Feito isso, o aluno/professor deve passar então para a parte dos "Exercícios de Fixação". Nessa seção você não encontrará exercícios fáceis (todos têm o estilo de questões IME/ITA), porém encontrará alguns exercícios mais difíceis que os outros. Para melhor orientação criamos o seguinte código:

⚡ - Nível Difícil
☠ - Nível Insano

Muitas das questões acompanham o nome de onde foram tiradas (algum vestibular, ou livro citado na bibliografia). Em alguns casos é comum ver a palavra 'adaptada' junto à referência. Isso acontece nos casos em que a questão é a mesma que caiu no vestibular citado, porém com alguma alteração, tornando-a mais interessante para o nosso assunto (em alguns casos, a adaptação é tornar uma questão múltipla-escolha em discursiva).

Recomendamos que, tendo resolvido as questões propostas em cada capítulo, o leitor olhe as resoluções comentadas no Capítulo 7 para conferir suas respostas e confirmar se não houve algum descuido na hora de formular sua solução. Lembramos aos leitores que organização é fundamental na hora de resolver uma questão numa prova (a banca precisa entender seu raciocínio), então recomendamos que o leitor se baseie no estilo de formulação das soluções propostas no capitulo 7 para treinar sua 'escrita'.

Bons estudos!

Capítulo 1 - Números Complexos Introdução

1.1 A História dos Complexos

A entidade conhecida na Matemática por número complexo é um número da forma a + bi, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, possuindo a propriedade de que $i^2 = -1$, ou ainda, $i = \sqrt{-1}$.

Mas qual o sentido e, mais importante, a utilidade, de se definir a raiz de números negativos? De onde surgiu o conceito de número complexo?

Os matemáticos da Grécia antiga julgavam óbvia a constatação de que um número negativo não possuía raiz. As equações matemáticas eram representações de problemas concretos – ou seja, chegando-se à raiz de um negativo, concluía-se que o problema não tinha solução.

A necessidade de se atribuir um sentido à raiz de -1 não surgiu, como muitos crêem, a partir do estudo das equações de segundo grau, mas sim da análise da solução de Cardano-Tartaglia para as equações de terceiro grau da forma:

$$x^3 = ax + b$$

A solução dessa equação (veremos a demonstração adiante) é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

De acordo com o raciocínio anterior sobre raízes de negativos, uma equação dessa forma só terá solução se

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0$$

Mas tomemos como exemplo a equação $x^3 = 15x + 4$. É evidente que x = 4 é solução dessa equação, pois $4^3 = 64 = 15.4 + 4$.

No entanto,

1.3 Representação Trigonométrica do Complexo

Uma das formas mais comuns de se ver representado um número complexo é na sua forma trigonométrica. Todo complexo pode ser representado como um vetor no plano complexo de Argand-Gauss, tendo sua parte imaginária marcada no eixo vertical e parte real marcada no eixo horizontal.

Da representação geométrica da figura 1.2.3:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = |z|.\cos\theta \\ \operatorname{Im}(z) = |z|.\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

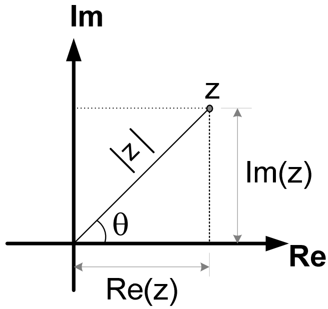


Fig. 1.2.3

Podemos então escrever um complexo z qualquer, de argumento θ como sendo:

$$\boxed{z = |z|.(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta)}$$

Definição 1.3.1

Notação: É comum denotar $\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$ pela abreviação $\operatorname{cis}\theta$. Faremos o mesmo deste ponto em diante no livro.

Exemplo 1.3.a Determine a forma trigonométrica do complexo $z = 1 + i$

Solução:

Podemos representar o afixo z no plano complexo de Argand-Gauss. Da geometria do problema na Fig. I, o módulo de z, que corresponde à hipotenusa do triângulo, é determinado pelo Teorema de Pitágoras.

$$|z|^2 = 1^2 + 1^2 \qquad \therefore \qquad |z| = \sqrt{2}$$

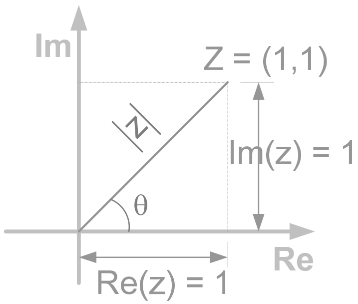


Fig. I

Com uma ajuda de trigonometria básica, podemos achar o valor do argumento do complexo z.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Sabendo-se o módulo e o argumento, podemos montar o complexo (Def. 1.3.1)

$$z = 1 + i = \sqrt{2}.\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 1.3.b
É possível mostrar duas importantes relações, citadas a seguir:

$$\begin{cases} z = 1 + \operatorname{cis}\theta = 2.\cos\left(\theta/2\right).\operatorname{cis}\left(\theta/2\right) \\ w = 1 - \operatorname{cis}\theta = -2.i.\operatorname{sen}\left(\theta/2\right).\operatorname{cis}\left(\theta/2\right) \end{cases}$$

Solução:
Vamos utilizar três identidades trigonométricas conhecidas (ver Apêndice):

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 2.\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 + \cos\theta = 2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 - \cos\theta = 2.\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Se você não conhece as relações acima, sugerimos que pesquise a respeito de transformações em arco-metade (trigonometria)!

Analisando primeiro z:

$$z = 1 + \operatorname{cis}\theta = 1 + \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$$

$$= 2.\cos^2\left(\theta/2\right) + i.2.\operatorname{sen}\left(\theta/2\right).\cos\left(\theta/2\right) = 2.\cos\left(\theta/2\right).\underbrace{\left[\cos\left(\theta/2\right) + i.\operatorname{sen}\left(\theta/2\right)\right]}_{\operatorname{cis}\left(\theta/2\right)}$$

$$\therefore \quad z = 2.\cos\left(\theta/2\right).\operatorname{cis}\left(\theta/2\right)$$

Ou seja:

$$z = 1 + \text{cis}\theta = 2.\cos\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right)$$

Fórmula 1.3.1

OBS: O complexo z tem argumento igual à metade de θ e módulo igual a

$$2.\cos\left(\theta/2\right)$$

Fazendo o mesmo com w:

$$
\begin{aligned}
w = 1 - \text{cis}\theta &= 1 - \cos\theta - i.\text{sen}\theta \\
&= 2.\text{sen}^2\left(\theta/2\right) - i.2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\cos\left(\theta/2\right) \\
&= 2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\left[\text{sen}\left(\theta/2\right) - i.\cos\left(\theta/2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ao contrário do caso anterior, a expressão dentro dos colchetes não é exatamente $\text{cis}(\theta/2)$. Vamos tentar fazer com que se torne algo do tipo.

Multiplicando em cima por –i. i = 1, não alteramos o valor de w:

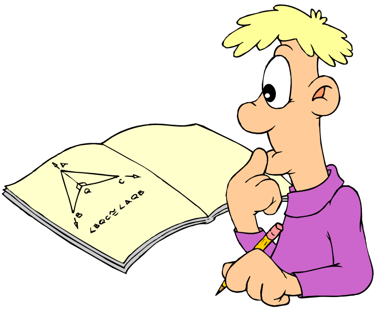
$$
\begin{aligned}
w = 1 - \text{cis}\theta &= 2.\text{sen}\left(\theta/2\right).\left[\text{sen}\left(\theta/2\right) - i.\cos\left(\theta/2\right)\right].(-i.i) \\
&= -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).(i)\left[\text{sen}\left(\theta/2\right) - i.\cos\left(\theta/2\right)\right] \\
&= -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\underbrace{\left[\cos\left(\theta/2\right) + i.\text{sen}\left(\theta/2\right)\right]}_{\text{cis}\left(\theta/2\right)} \\
&= -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\left[\text{cis}\left(\theta/2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$w = 1 - \text{cis}\theta = -2.i.\text{sen}\left(\theta/2\right).\text{cis}\left(\theta/2\right)$$

Fórmula 1.3.2

Expressões tão específicas como essas necessitam ser decoradas? Qual será a utilidade delas?



Autor: *Não é necessário que o aluno decore essas duas expressões mostradas acima, mas é importante saber que é possível representar os complexos z e w na forma trigonométrica, pois isso terá um papel importante na resolução de muitos dos exercícios que veremos ainda. A dedução, uma vez entendida, poderá ser facilmente reproduzida pelo aluno ao ser requisitado que a mesma seja utilizada.*

1.4 Representação Exponencial do Complexo

Eu tenho uma outra idéia de representação para os complexos que facilitará muito a nossa vida quando formos demonstrar algumas relações e propriedades!

Não se assuste com a demonstração. Leia e releia quantas vezes for necessário!

Leonard Euler

Outra forma comum, e muito útil como veremos mais a frente, de se representar um número complexo é usando a sua forma exponencial (forma de Euler):

$$z = |z|.(\cos x + i.\text{sen}x) = |z|.e^{i.x}$$

Fórmula 1.4.1

Demonstração:

Para mostrarmos que todo complexo pode ser escrito na forma exponencial acima, devemos mostrar que, para todo x real, vale:

$$\cos x + i.\text{sen}x = e^{i.x}$$

Para isso, vamos recorrer a um resultado conhecido do Cálculo Diferencial. O Teorema de Taylor diz que funções deriváveis em qualquer ordem num ponto de seu domínio podem ser escritas na forma de um polinômio com grau infinito em torno desse ponto (também chamados de Séries Infinitas).

$$\cos x = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + A_3.x^3 + \ldots$$
$$\text{sen}x = B_0 + B_1.x + B_2.x^2 + B_3.x^3 + \ldots$$
$$e^x = C_0 + C_1.x + C_2.x^2 + C_3.x^3 + \ldots$$

Vamos tentar descobrir os coeficientes desses polinômios. Faremos como exemplo a série infinita de $\cos x$.

$$\cos x = A_0 + A_1.x + A_2.x^2 + A_3.x^3 + \ldots$$

A expressão deve ser válida para qualquer x. Fazendo $x = 0$

$$\cos 0 = A_0 + A_1.0 + A_2.0^2 + A_3.0^3 + \ldots \quad \Rightarrow A_0 = 1$$

Derivando a Série de Taylor de $\cos x$ em relação a x:

$$-\text{sen}x = A_1 + 2.A_2.x + 3.A_3.x^2 + 4A_4.x^3 + \ldots.$$

Novamente a expressão deve ser válida para todo x. Fazendo $x = 0$

$$-\text{sen}0 = A_1 + 2.A_2.0 + 3.A_3.0^2 + 4A_4.0^3 + \ldots \quad \Rightarrow A_1 = 0$$

Derivando novamente a Série de Taylor em relação a x:

Exemplo 1.5c (IME) Mostre que a seguinte expressão representa um complexo (ou mais de um), e escreva-o(s) na forma x + y.i

$$\frac{1}{\sqrt{7+24.i}}$$

Solução:

Vimos que a radiciação de um complexo gera mais de um complexo (Fórmula 1.5.7), i.e., podemos ter mais de uma raiz quadrada de um dado complexo.

$$\sqrt{7+24.i} = a+b.i \quad \Leftrightarrow \quad 7+24.i = (a+b.i)^2 = a^2 - b^2 + 2.a.b.i$$

$$\overset{\text{Identidade}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2.a.b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ b = 12/a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{144}{a^2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 7.a^2 - 144 = 0$$

Como ‘a’ é real, devemos ter como única solução dessa equação do segundo grau em a² a solução positiva:

$$a^2 = \frac{7+25}{2} \Rightarrow \quad a = \pm 4$$

Como a.b = 12, temos: $\sqrt{7+24.i} = \begin{cases} 4+3.i \\ -4-3.i \end{cases}$

De onde segue:

$$\frac{1}{\sqrt{7+24.i}} = \pm\frac{1}{4+3.i} = \pm\frac{4-3.i}{(4+3.i).(4-3.i)} = \pm\frac{4-3.i}{25}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7+24.i}} = \pm\frac{4-3.i}{25} \in \mathbb{C}$$

Mostraremos a seguir uma **Segunda Solução** para o mesmo problema.

2ª Solução:
No ensino médio é comum os alunos aprenderem (ao estudarem fatoração em geral) a expressão conhecida como "Expressão do Radical Duplo".

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \pm\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)$$

A demonstração dessa expressão é simples e deixamos para que o leitor a faça como **exercício** (Basta elevar o membro à direita ao quadrado para concluirmos a prova). O sinal negativo para o membro direito veio do fato de que estamos trabalhando com complexos, e a radiciação pode sim levar a um resultado negativo. Vamos utilizar esse resultado na solução da questão proposta.

$$\sqrt{7+24.i} = \sqrt{7+24\sqrt{-1}} = \sqrt{7+\sqrt{-576}}$$

Utilizando a "Expressão do Radical Duplo":

$$\sqrt{7+24.i} = \sqrt{7+\sqrt{-576}} = \pm\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{49+576}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49+576}}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{625}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{625}}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{7+25}{2}}+\sqrt{\frac{7-25}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{16}+\sqrt{-9}\right)$$

$$= \pm\left(4+3.i\right)$$

A partir daí, a solução é análoga à Solução 1 e obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{7+24.i}} = \pm\frac{4-3.i}{25} \in \mathbb{C}$$

Autor: *Por enquanto o assunto parece não servir para muita coisa, a menos que a questão cobre especificamente as propriedades das raízes n-ésimas da unidade. Guarde a ansiedade para o capítulo 2 no qual usaremos e muito as tais raízes da unidade para resolver problemas interessantíssimos de geometria!*

1.7 Exercícios de Fixação

Exercício 1.1 Para que valores de n natural será real o número:

$$z = i.\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$$

Exercício 1.2 Determine o valor de θ para que o complexo

$$\frac{i-1}{tg\theta + i}$$

esteja sobre a bissetriz do primeiro quadrante do plano de Argand-Gauss.

Exercício 1.3 Mostre que se $z = x + y.i$ pertence à circunferência de raio unitário centrada na origem do plano complexo, com exceção do complexo -1 então z pode ser escrito na forma:

$$z = \frac{1+x+y.i}{1+x-y.i}$$

Exercício 1.4 (IME - 1983) Prove que se $P(x) = x^2 + (a+b.i)x + (c+d.i)$ onde a,b,c,d são reais não-nulos, admite uma raiz real, então $abd = d^2 + b^2c$

Exercício 1.5 ☠ Mostre que todo complexo de módulo unitário e com parte real diferente de 1 pode ser escrito na forma abaixo, sendo k é um número real arbitrário.

$$\frac{k+i}{k-i}$$

Exercício 1.6 Mostre que as raízes n-ésimas da unidade estão em progressão geométrica, e determine a razão dessa P.G.

Exercício 1.7 Determine os complexos que satisfazem à seguinte equação:

$$z^5 = -\bar{z}$$

Exercício 1.8 Resolva novamente o exemplo 1.4ª, desta vez usando o resultado já mostrado:

$$1 + \text{cis}\theta = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercício 1.9 Mostre que o seguinte produtório é real:

$$\left(z + \bar{z}\right)\left(z^3.\bar{z}^3\right)\left(z^5 + \bar{z}^5\right)\left(z^7.\bar{z}^7\right)$$

Exercício 1.10 (IME - 1983) Seja $S_n = \sum_{1}^{n} a_n$ onde os a_n são complexos.

Os módulos dos a_n estão em P.G. e os seus argumentos em P.A. Calcule o limite da soma S_n quando n tende a infinito. São dados:

$$a_1 = \frac{27}{2}.\left(\sqrt{3} + i\right) \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{\left(i.\sqrt{3} - 1\right)}{2},$$

Exercício 1.11 (IME - 1977) Seja o conjunto: $A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\right\}$.

Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa tal que: $g(z) = \left(4 + 3i\right)z + 5 - i$.

Exercício 1.12 (IME, ITA) ☠ Mostre que todas as raízes da equação: $\left(z+1\right)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário no plano complexo.

Exercício 1.13 (IME - 2003) ☠ Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um conjunto de valores para a,b,c,z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a}+\frac{1}{z^b}+\frac{1}{z^c}=\frac{1}{z^9}$$

Exercício 1.14 (IME - 1982 adaptada) Sabendo que $x^{-1}+x=2.\cos\theta$, mostre que é real a seguinte expressão, e a calcule, em função de θ:

$$x^{-2008}+x^{2008}$$

Exercício 1.15 (OBM-U) Determine todos os valores inteiros positivos de *m* para os quais o polinômio $(x+1)^m+x^m+1$ é divisível por $\left(x^2+x+1\right)$.
Sugestão: Um polinômio P(x) é divisível por Q(x) quando todas as raízes de Q forem raízes de P.

Exercício 1.16 (ITA - 2003) Seja z pertencente aos complexos. Calcule a soma das raízes $z^3+z^2-|z|^2+2z=0$.

Exercício 1.17 (ITA - 2000) O número complexo z a seguir possui argumento igual a 45°. Determine o valor de a.

$$z=\frac{1-\cos a}{\text{sen}a.\cos a}+i.\frac{1-2\cos a+2.\text{sen}a}{\text{sen}2a} \quad ; \ a\in\left(0,\pi/2\right)$$

Exercício 1.18 Mostre que: $\text{Re}\left(\frac{|z|-i.z}{|z|+i.z}\right)=0$ para qualquer z complexo.

Exercício 1.19 (ITA - 2002) Seja z complexo. Das seguintes informações, julgue quais são as verdadeiras.

I – Se $w=\dfrac{2iz^2+5\bar{z}-i}{1+3.\bar{z}^2+2iz+3|z|^2+2|z|} \Rightarrow \bar{w}=\dfrac{-2i\bar{z}^2+5z+i}{1+3.z^2-2i\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|}$

II – Se $z\neq 0$ e $w=\dfrac{2iz+3i+3}{(1+2i)z}$, então $|w|\le\dfrac{2|z|+3.\sqrt{2}}{|z|\sqrt{5}}$

III – Se $w=\dfrac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3}+4i}$, então $2\arg z+\dfrac{\pi}{12}$ é um $\arg(w)$

a) Todas b) apenas I e II c) apenas II e III
d) apenas I e III e) apenas II

Exercício 1.20 (ITA - 2002) Das seguintes informações a respeito da equação $1+z+z^2+z^3+z^4=0$, julgue quais são as verdadeiras.

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.
II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.
III. Se n é um natural não nulo, e r é uma raiz dessa equação, então:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^{k}<\frac{1}{2}$$

a) Nenhuma b) apenas I c) apenas II
d) apenas III e) apenas I e III

Exercício 1.21 (ITA - 1994 adaptada) Seja z um complexo satisfazendo $\operatorname{Re}(z)>0$ e $(z+i)^2+|\bar{z}+i|^2=6$. Determine o menor n natural para que z^n é um imaginário puro.

Exercício 1.22 Sendo w uma raiz n-ésima da unidade diferente de 1, mostre que: $1+2w+3w^2+4w^3+...+n.w^{n-1}=\dfrac{n}{w-1}$

Exercício 1.23 Mostre que se um polinômio de coeficientes reais de grau n possui uma raiz complexa, então o conjugado dessa raiz também será raiz do polinômio.

Exercício 1.24 Determine o lugar geométrico do conjunto das imagens no plano complexo do conjunto de complexos z tais que:

$$z(t)=2+4.e^{it},\qquad t\in[0,2\pi]$$

Determine também o módulo do complexo de módulo máximo dentro do conjunto imagem dos complexos definidos acima.

Exercício 1.25 Mostre como poderíamos obter um valor numérico para o numero complexo: $i^{\,i}$

Exercício 1.26 (Spiegel) Sendo $z=\operatorname{cis}\theta$, determine o valor de $\arg\left(e^{i.z}\right)$

Exercício 1.27 (ITA – 1991 adaptada) Sendo $2.\operatorname{cis}\left(\pi/20\right)$ uma raiz quíntupla de w. Determine as raízes da equação:

Capítulo 2 – Números Complexos
Geometria e os Complexos

Neste capítulo apresentaremos a importante relação entre o estudo dos números complexos e questões de geometria. Obviamente, mesmo dominando o conteúdo desse capítulo e resolvendo todos os respectivos exercícios não significará que todos os seus problemas acabaram.

A geometria é, não só um dos ramos mais bonitos da matemática, como também um dos mais difíceis. Por essa razão devemos ter em mente que as questões que serão resolvidas com o auxílio dos números complexos são bastante específicas, e cabe ao aluno saber quando usar essa ferramenta na resolução de um exercício. Para que essa capacidade de distinguir quando ou não usar essa ferramenta se torne mais acentuada, propomos que o leitor dedique sua atenção à leitura desse capítulo. Vamos começar o capítulo exemplificando que os complexos e a geometria caminham lado a lado.

Exemplo: Vamos mostrar, usando um argumento geométrico, a relação já provada analiticamente no capítulo 1 (Exemplo 1.3b).

$$1+\text{cis}\theta = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Representação do circulo unitário no plano complexo:

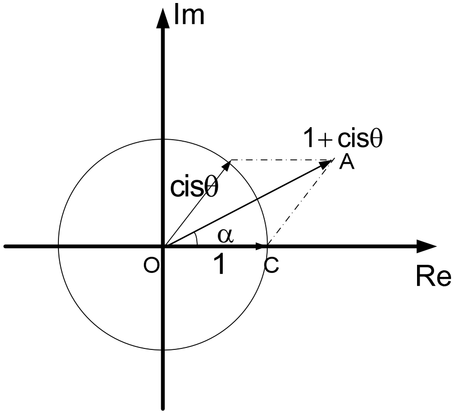


Fig. 1

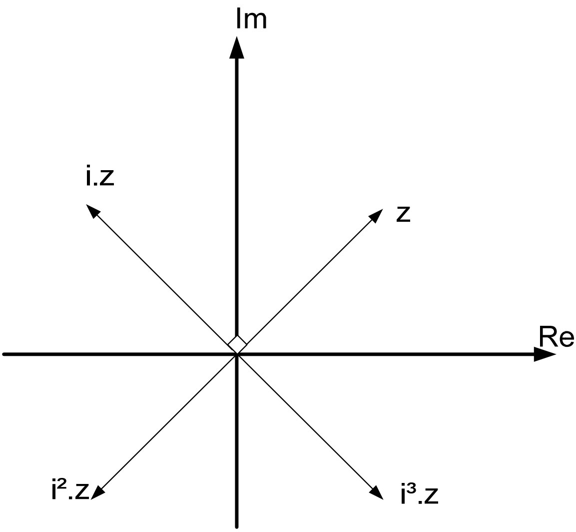


Fig. 2.1.3

Autor:
A representação vetorial de complexos nos permite resolver problemas de vetores com a ferramenta dos números complexos e vice-versa!

Vejamos como essa nova ferramenta poderá nos ajudar a resolver aquelas questões trabalhosas de rotação de vetores!

Exemplo 2.1.a Considere o quadro ABCD definido pela diagonal AC com extremidades $A = (1,1)$; $B = (3,4)$. Determine os demais vértices do polígono.

Solução:

Vamos imaginar o problema no plano complexo. Note que o vetor $\overrightarrow{BC}$ é dado pela rotação do vetor $\overrightarrow{AB}$ de 90 graus nos sentido trigonométrico. Podemos escrever:

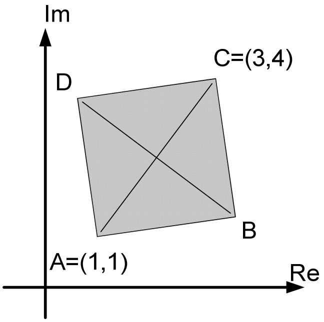


Fig. I

$$\overrightarrow{BC} = i.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow C - B = i.(B - A)$$
$$\Leftrightarrow (3+4i) - B = i.B - i.(1+i)$$
$$\Leftrightarrow (3+4i) + (i-1) = (1+i).B$$
$$\Leftrightarrow B = \frac{2+5i}{1+i} = \frac{2+5i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}$$
$$= \frac{7+3i}{2} = \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$
$$\boxed{\therefore\ B = \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)}$$

Para achar o ponto D poderíamos proceder da mesma forma. Outra forma seria perceber que os vetores são $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ equivalentes (vetores eqüipolentes).

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow B - A = C - D \Leftrightarrow D = C - B + A = \left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$\boxed{D = \left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)}$$

Rotação de Eixos

Um famoso problema da Geometria Analítica consiste em determinar as coordenadas de um ponto de uma figura geométrica em relação a um novo sistema de coordenadas rotacionado de certo ângulo em relação ao sistema de eixos original. Tal problema nos permite determinar, por rotação, equações simplificadas de figuras geométricas (por exemplo, as seções cônicas).

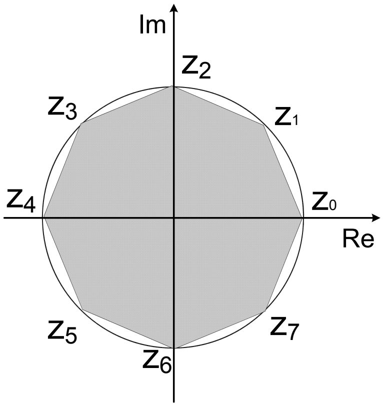


Fig. 2.2.1

Exemplo: $z^8 - 1 = 0$

A soma das raízes da equação, pela relação de Girard, é nula (já estudamos isso!), o que está coerente com o fato do polígono formado acima ser regular (uma vez que, nesse caso, todos os vetores representantes dos afixos se anulam).

Conclusão*:* Os afixos das raízes n-ésimas da unidade formam no plano complexo um polígono regular de n lados.

Condições para um triângulo ser eqüilátero

Teorema: Os afixos dos complexos z_1, z_2, z_3 formam um triângulo eqüilátero, se e somente se $z_1 + w.z_2 + w^2.z_3 = 0$, onde w é <u>uma</u> raiz cúbica da unidade, diferente de 1.

Resultado 2.2.1

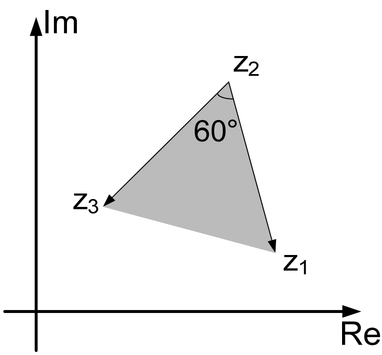


Fig. 2.2.2

Demonstração:

z_1, z_2, z_3 formam um triângulo eqüilátero $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{z_2z_1}$ e $\overrightarrow{z_2z_3}$ formam um ângulo de $\pm$ 60° $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z_3 - z_2).\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = z_1 - z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2.\underbrace{\left(\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) - 1\right)}_{=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}=\text{cis}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)=w} - z_3.\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2.\text{cis}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) - z_3.\underbrace{\text{cis}\left(\pm\frac{4\pi}{3}\right)}_{=w^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2.w + z_3.w^2 = 0$$

Exemplo 2.2.a (Putnam 67) Seja *ABCDEF* um hexágono inscrito em uma circunferência de raio r. Mostre que se $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = r$, então os pontos médios de $\overline{BC}, \overline{DE}, \overline{FA}$ são os vértices de um triângulo eqüilátero.

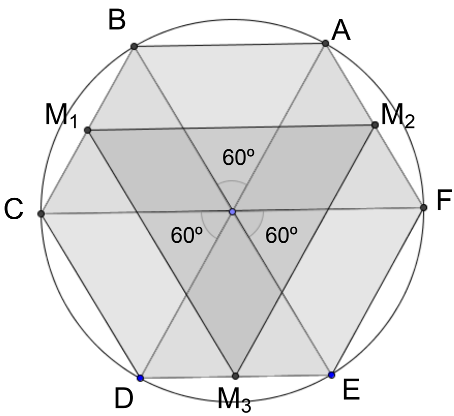


Fig. I

Solução: Consideremos a origem do plano complexo no centro da circunferência. Sabendo que os afixos B, D, F correspondem, respectivamente, às extremidades dos vetores rotacionados de 60° representantes dos afixos A, C, E, podemos escrever:

Teorema: Dois triângulos são semelhantes ($\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$) se e somente se:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resultado 2.2.4

Demonstração:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1.w_2 + z_3.w_1 + z_2.w_3 - z_3.w_2 - z_2.w_1 - z_1 w_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Note que a condição para que um triângulo seja eqüilátero está coerente com esse resultado.

Se o triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ for semelhante ao triângulo $\Delta 1 w w^2$ onde w é uma raiz cúbica da unidade diferente de 1, deveremos ter que o triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é eqüilátero.

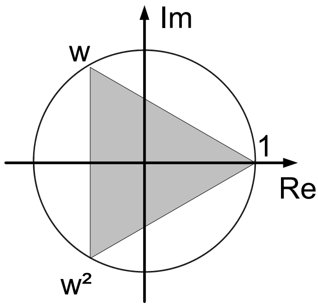


Fig. 2.2.4

De fato, usando o teorema que acabamos de mostrar:

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \\ z_3 & w^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 w + z_2 w^2 + z_3 - z_3.w - z_1.w^2 - z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; z_1.\left(w - w^2\right) + z_2.\left(w^2 - 1\right) + z_3.\left(1 - w\right) = 0$$

Se $w^2 + w + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \; z_1.w\left(1 - w\right) + z_2.\left(w^2 - 1\right) + z_3.\left(1 - w\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; z_1.w\left(1 - w\right) - z_2.\left(1 - w\right)\left(1 + w\right) + z_3.\left(1 - w\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; z_1.w - z_2.\underbrace{\left(1 + w\right)}_{-w^2} + z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; z_1.w + z_2.w^2 + z_3 = 0$$

2.3 Representações de Lugares Geométricos

Vimos no capítulo I que podemos interpretar o módulo da diferença entre dois complexos como sendo a distância entre os afixos dos mesmos no plano complexo. Muitos lugares geométricos dos mais estudados na geometria analítica são definidos pelo conceito de distância. Não nos preocuparemos com propriedades específicas desses L.G., mas sim, como trabalharmos com eles no ramo dos complexos. Sugerimos que para a total compreensão do que discutiremos a seguir, o aluno tenha uma noção das definições dos L.G. citados, consultando um livro de geometria analítica. Vamos agora justamente analisar como descrever esses lugares geométricos na forma de representação no plano complexo.

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de um mesmo ponto fixo no plano. A expressão que nos dá a noção de distância é o módulo da diferença entre dois complexos.

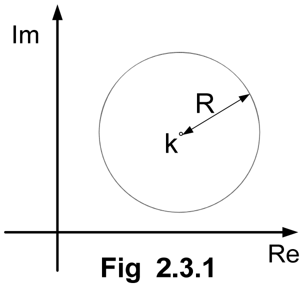


Fig 2.3.1

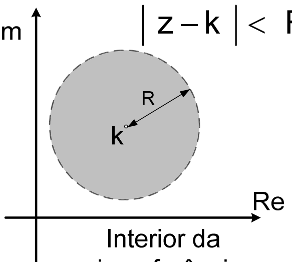
$$|z-k| = R$$

Circunferência de centro em k e raio R

$k \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}$

Alguns casos particulares:

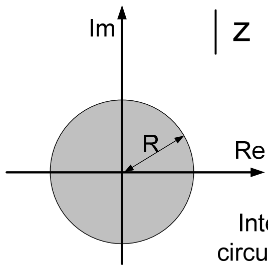
$$|z-k| < R$$



Interior da circunferência (excluindo as bordas)

Fig 2.3.2

$$|z| \leq R$$



Interior da circunferência centrada em (0,0) (incluindo as bordas)

Fig 2.3.3

Elipse é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma das distâncias desses pontos a dois pontos fixos (os focos da elipse) é constante e maior que a distância entre os mesmos dois pontos fixos.

Com essa definição fica evidente que podemos representar o conjunto de elipses no plano complexo como sendo:

$$|z - F_1| + |z - F_2| = 2a$$

Elipse de focos
F_1 e F_2, e eixo maior 2a.

$$F_1, F_2 \in \mathbb{C}, \ a \in \mathbb{R}$$

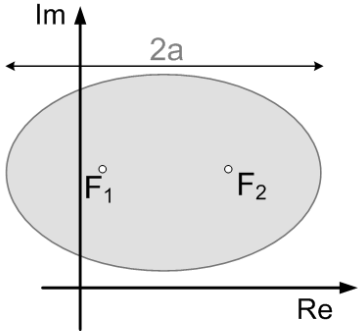
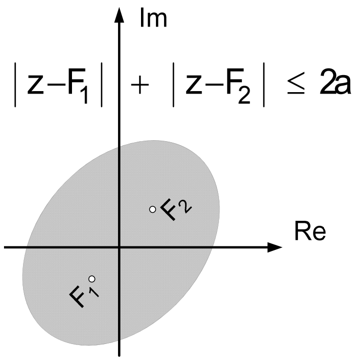


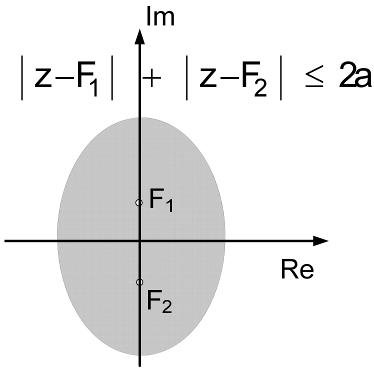
Fig. 2.3.4

Alguns casos particulares:



Interior de uma elipse
rodada, centrada em (0,0)
(incluindo as bordas)

Fig. 2.3.5



Interior de uma elipse com eixo
maior vertical, centrada em (0,0)
(incluindo as bordas)

Fig. 2.3.6

Vejamos outro exemplo de degeneração:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| = 1\}$$

Não é difícil verificar que não existe z complexo que atenda à condição dada no conjunto (deixamos como **exercício** pro leitor que verifique isso). Quando isso acontece dizemos que a imagem do conjunto dado é o **conjunto vazio**.

Exemplo 2.3.a (ITA) Considere o conjunto dos complexos tais que:

$$|\, z - i.a \,| \leq k$$

onde a e k são constantes reais positivas tais que $a > k$. Determine o complexo z pertencente à imagem desse conjunto com o menor argumento.

Solução: A representação geométrica do conjunto no plano complexo é a mostrada na Fig. I

Note que as imagens de z percorrem a circunferência ilustrada, ou o interior dela, e para que z tenha argumento mínimo z deve ser tal que seu vetor representante seja tangente à circunferência.

Do triângulo retângulo OAT formado segue:

$$a^2 = |z|^2 + k^2 \quad \therefore \quad |z| = \sqrt{a^2 - k^2}$$

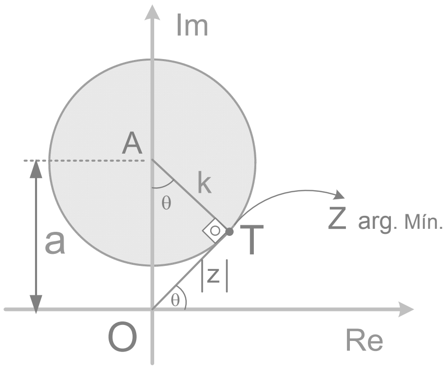


Fig. I

Da geometria do problema, é fácil ver que:

$$\cos\theta = \frac{k}{a} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{|z|}{a} = \frac{\sqrt{a^2-k^2}}{a}$$

Logo o complexo de argumento mínimo será:

$$z = |z|.\operatorname{cis}\theta = \sqrt{a^2-k^2}\,.\left(\frac{k}{a} + i.\frac{\sqrt{a^2-k^2}}{a}\right)$$

$$\boxed{z = k.\sqrt{1-\left(\frac{k}{a}\right)^2} + i.\left(\frac{a^2-k^2}{a}\right)}$$

2.4 Exercícios de Fixação

Exercício 2.1 Dados dois vértices (0,0) e (4,3), qual é a coordenada do terceiro vértice que faz desse polígono um triângulo eqüilátero?

Exercício 2.2 Dados dois vértices (0,0) e (4,3), quais são as coordenadas dos outros dois vértices que fazem desse polígono um quadrado cujos vértices dados são de um mesmo lado?

Exercício 2.3 Determine uma condição entre $z, w, u, v, \overline{z}, \overline{w}, \overline{u}, \overline{v}$ para que $\overrightarrow{zw}$ e $\overrightarrow{uv}$ sejam vetores paralelos no plano complexo.

Exercício 2.4 Determine uma condição entre $z, w, u, v, \overline{z}, \overline{w}, \overline{u}, \overline{v}$ para que $\overrightarrow{zw}$ e $\overrightarrow{uv}$ sejam vetores ortogonais no plano complexo.

Exercício 2.5 Considere o ponto (1,3) no sistema de coordenadas ortogonal. Determine as coordenadas do mesmo ponto num sistema rotacionado de 30° no sentido trigonométrico em relação ao sistema original.

Exercício 2.6 Considere $u = 3 + 11i;\ v = -2 - 4i;\ w = 1 + 5i;\ z = 1 + i$. Sobre os afixos desses complexos citados, podemos afirmar:

(a) u,v,w são colineares (b) u,v,w formam um triângulo eqüilátero

(c) uv é paralelo a wz (d) uv é perpendicular a wz

Exercício 2.7 – (SBM; Colômbia) Dados um ponto *P* sobre uma circunferência unitária e os vértices $A_1, A_2, \ldots A_n$ de um *n*-ágono regular inscrito, prove que $PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2$ é constante.

Exercício 2.8 Se $A_1, A_2, \ldots A_n$ são vértices de um polígono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, prove que:

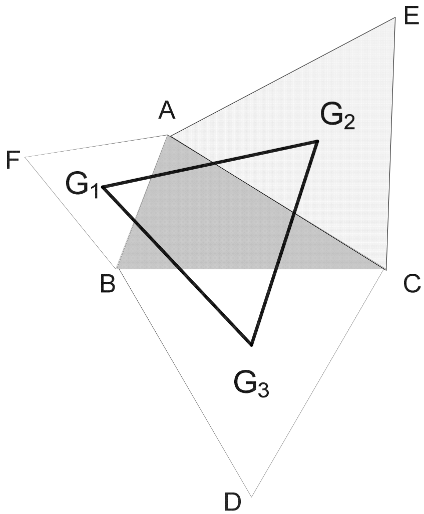
$$\left(\overline{A_1A_2}\right).\left(\overline{A_1A_3}\right).\left(\overline{A_1A_4}\right).....\left(\overline{A_1A_n}\right) = n$$

Exercício 2.9 – (Putnam 55) $A_1, A_2, \ldots A_n$ é um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio *r* e centro *O*. *P* é um ponto sobre $\overrightarrow{OA_1}$. Mostre que:

$$\prod_{k=1}^{n} PA_k = OP^n - r^n.$$

Exercício 2.10 ☠ Utilize o resultado do desafio (Exercício 1.34) para mostrar que os ângulos agudos do triângulo retângulo 3, 4, 5 são irracionais quando expressos em graus.

Exercício 2.11 – (Teorema de Napoleão) ☠ Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam BCD, ACE e ABF triângulos eqüiláteros externos do triângulo ABC. Prove que os baricentros dos triângulos BCD, ACE e ABF são vértices de um triângulo eqüilátero.



Exercício 2.12 ☠ Seja ABCD...PQ um polígono regular de n lados inscrito em um circulo de raio unitário. Calcule o produto das medidas das diagonais AC, AD,...,AP.

Exercício 2.13 (ITA 03) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número w pertence ao conjunto dos Reais. Interprete o conjunto geometricamente.

$$w = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

Exercício 2.14 (ITA 06) Determine o conjunto A dos complexos z tais que:

$$\frac{\bar{z}}{z-2i} + \frac{2z}{\bar{z}+2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z-2i| \le 1$$

Capítulo 3 – Números Complexos Aplicação em Somatórios

Neste capítulo apresentaremos mais uma aplicação de números complexos em possíveis situações de questão tanto do IME quanto do ITA. A dificuldade do assunto está em saber exatamente quando utilizar a ferramenta apresentada para resolver problemas de 'somatórios', que não são resolvidos convencionalmente usando números complexos.

3.1 Somatórios Binomiais

Algo interessante que podemos retirar das propriedades de números complexos é a propriedade cíclica de suas potências. Em ciclos de quatro potências o numero complexo i^n se repete.

$$i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = ... = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = ... = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = ... = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = ... = -i$$

Vejamos como podemos tirar proveito disso. Vamos analisar o desenvolvimento binomial conhecido como Binômio de Newton:

$$(1+x)^n = C_n^0.(x)^0 + C_n^1.(x)^1 + C_n^2.(x)^2 + ... + C_n^n.(x)^n$$

Dessa expressão do Binômio de Newton, podemos tirar algumas importantes propriedades, também conhecidas como os teoremas do triângulo de Pascal.

Fazendo $x = 1$ na expressão do binômio:

$$(1+1)^n = C_n^0.(1)^0 + C_n^1.(1)^1 + C_n^2.(1)^2 + ... + C_n^n.(1)^n$$

De onde segue o importante resultado, conhecido, como **Teorema das Linhas** do triângulo de Pascal.

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n}$$

Resultado 3.1.1

Analogamente, fazendo $x = -1$ na expressão do binômio:

$$(1-1)^n = C_n^0.(-1)^0 + C_n^1.(-1)^1 + C_n^2.(-1)^2 + ... + C_n^n.(-1)^n$$

De onde segue mais um importante resultado:

$$\boxed{C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + - ... + (-1)^n C_n^n = 0}$$

Resultado 3.1.2

Somando os dois últimos resultados 3.1.1 e 3.1.2, e dividindo por 2 nos dois membros da soma, temos ainda:

$$\boxed{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}}$$

Resultado 3.1.3

Da mesma forma, subtraindo os mesmos resultados 3.1.1 e 3.1.2, e dividindo por 2 nos dois membros da soma, temos também:

$$\boxed{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}}$$

Resultado 3.1.4

OBS: *Usamos as reticências (...) para representar os demais binomiais da mesma seqüência (<u>cuidado</u> para não achar que existem infinitos termos nessa sequência). Continuaremos a usar essa notação nos próximos exemplos.*

Procuramos um número que se repita em potências de 3. Ou seja, procuramos um número z, tal que

$$z^0 = z^3 = z^6 = \ldots$$

Ou ainda:

$$z^3 = 1$$

Ora, nós conhecemos os complexos que possuem essa propriedade, e, inclusive, já os estudamos! Basta tomar z como sendo uma das raízes triplas da unidade.

$$z = \text{cis}\left(\frac{2.k.\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2$$

Ou seja, é aconselhável que analisemos o comportamento do desenvolvimento de Newton, para o binômio, por exemplo:

$$\left(1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^n$$

A soma acima foi pedida justamente em uma prova do IME do ano de 2005, e encontra-se na lista de exercícios na seção 3.3 (Exercício 3.4). Sua resolução pode ser encontrada no capítulo 7.

3.2 Outras Somas

Vimos na seção anterior que somatórios muitas vezes estão ligados aos números complexos. As resoluções de questões envolvendo esses somatórios se baseiam na forma trigonométrica da representação de um complexo e se utilizam das suas propriedades (Lei de De Moivre, por exemplo).

É comum vermos também progressões geométricas como sendo a saída de problemas do mesmo gênero. Vejamos um exemplo a seguir:

Exemplo 3.2.a (Spiegel)

Determine o valor da soma, para n natural, tal que n > 1:

$$S = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \ldots + \text{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

Solução:

Os termos do somatório são funções seno com o argumento crescendo em progressão aritmética. A experiência adquirida na seção anterior nos sugere analisar a seguinte soma:

$$A = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{cis}\left(2.\frac{2\pi}{n}\right) + \text{cis}\left(3.\frac{2\pi}{n}\right) + ... + \text{cis}\left((n-1).\frac{2\pi}{n}\right)$$

Ora, pela Lei de De Moivre a soma A torna-se:

$$A = \left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + \left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^3 + ... + \left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^{n-1}$$

Sendo: $z = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Temos: $A = z + z^2 + z^3 + ... + z^{n-1}$

Note que a soma A é exatamente uma soma de termos em progressão geométrica de razão z.

$$A = z.\left(\frac{z^{n-1} - 1}{z-1}\right) = \left(\frac{z^n - z}{z-1}\right)$$

Da Lei de De Moivre: $z = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow z^n = 1$

Portanto $A = \left(\frac{1-z}{z-1}\right) = -1$ para n > 1

Ora, pela construção da resolução, sabemos que a soma pedida S é justamente a parte imaginária de A, que é nula

$$S = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right) + ... + \text{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Exemplo 3.2.b (SBM)
Determine o valor da soma, ligeiramente diferente da anterior para n natural:

$$S = \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right) + ... + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$\left(1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\right)\ldots\left(1-\text{cis}\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)\left(1-\text{cis}\left(-\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=n^2$$

Percebendo que, a cada 2 termos do produto, temos algo do tipo:

$$(1-\text{cis}\theta)(1-\text{cis}(-\theta))=2-(\text{cis}\theta+\text{cis}(-\theta))=2-2.\cos\theta$$

Aplicando isso no produto:

$$\left(2-2.\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(2-2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(2-2\cos\frac{2.(n-1)\pi}{n}\right)=n^2$$

$$\Rightarrow 2^{n-1}.\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right).\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=n^2$$

Portanto:

$$\boxed{\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right).\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n^2}{2^{n-1}}}$$

3.5 Exercícios de Fixação

Exercício 3.1 Considere o seguinte desenvolvimento:

$$(1+x+x^2)^n=A_0+A_1.x+A_2.x^2+\ldots+A_{2n}.x^{2n}$$

Determine expressões matemáticas simplificadas para as seguintes somas:

a) $A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{2n}$
b) $A_0+A_2+A_4+\ldots+A_{2n}$
c) $A_1+A_3+A_5+\ldots+A_{2n-1}$
d) $A_0-A_2+A_4-A_6+-\ldots$
e) $A_1-A_3+A_5-A_7+-\ldots$
f) $A_0+A_4+A_8+\ldots$

Exercício 3.2 Calcule uma expressão matemática para a soma:

$$C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+C_n^{14}\ldots=?$$

Exercício 3.3 Faça o mesmo para a soma:

$$C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+C_n^{15}\ldots=?$$

Exercício 3.4 ☠ **(IME-05)** Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por:

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3\lfloor n/3 \rfloor}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3\lfloor (n-1)/3 \rfloor + 1}$$

Calcule o valor de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que $\lfloor r \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a r. *Sugestão: utilize o desenvolvimento do binômio de Newton para*

$$\left(1 + \text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n$$

Exercício 3.5 (ITA 95 – adaptada) Para cada n pertencente aos naturais, quanto vale a seguinte soma ?

$$1 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \ldots - C_{4n}^{4n-2} + 1$$

Exercício 3.6 ⚡ Determine uma expressão matemática simples, em função de x para a seguinte soma:

$$C_n^1.\text{sen}(x) + C_n^2.\text{sen}(2x) + C_n^3.\text{sen}(3x) + \ldots + C_n^n.\text{sen}(n.x)$$

Exercício 3.7 Mostre (sem necessariamente utilizar números complexos) :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2.C_n^k = n.2^{n-1} + n.(n-1).2^{n-2}$$

Exercício 3.8 ☠ Faça o mesmo para a soma, com k sendo tomado em grupos de 4:

$$\sum_{k=0,4,8,\ldots} k^2.C_n^k$$

Exercício 3.9 Mostre (sem necessariamente utilizar números complexos):

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1).C_n^k = n.2^{n-1} + 2^n$$

Exercício 3.10 ☠ Faça o mesmo para a soma, com k sendo tomado em grupos de 4:

$$\sum_{k=1,5,9,\ldots} (k+1).C_n^k$$

Exercício 3.11 Mostre (sem necessariamente utilizar números complexos):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Exercício 3.12 Faça o mesmo para a soma, com k sendo tomado em grupos de 4:

$$\sum_{k=0,4,8,\dots}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$$

Exercício 3.13 (Spiegel) Mostre que:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{n}\right)+\dots+\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=-1$$

Exercício 3.14 Determine uma expressão simples para as somas:

a) $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\dots+\cos(nx)$

b) $\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(3x)+\dots+\operatorname{sen}(nx)$

Exercício 3.15 – (ITA 04) Sendo $z=\frac{1}{\sqrt{2}}.(1+i)$, calcule:

$$\left|\sum_{k=1}^{60} z^k\right| = \left|z+z^2+z^3+\dots+z^{60}\right|$$

Exercício 3.16 Interprete geometricamente o resultado da soma da questão anterior.

Exercício 3.17 Calcule: $\operatorname{Im}\left(1+2i+3.i^2+4.i^3+\dots+2004.i^{2003}\right)$

Exercício 3.18 (Spiegel) Calcule:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right)\dots\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

Exercício 3.19 (ITA – adaptada) Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases}$$

Então o número complexo x+ i.y é tal que z^3 e $|z|$ valem?

Exercício 3.20 A partir dos resultados do Exercício 2.8, usando um argumento geométrico, determine novamente o valor do produto:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right)\dots\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

Capítulo 4 – Polinômios

4.1 A História dos Polinômios

Ao longo da história da humanidade, um dos problemas mais fascinantes entre os matemáticos antigos era o de resolver equações polinomiais. Para que valores de x, por exemplo, seria satisfeita a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0\ ?$$

A solução de equações do 2º grau creditadas ao hindu Báskara é na verdade, de autoria de Sridahara, do século XI, também hindu. Os hindus participaram com um grande papel na matemática, junto aos árabes, uma vez que uma das grandes potências da matemática, a Grécia antiga, estagnou-se em suas pesquisas durante à invasão de seu território pelo Império Romano.

Uma das grandes discussões matemáticas registradas na história é a ocorrida entre os matemáticos italianos Girolamo Cardano e Nicoló Fontana, mais conhecido como Tartaglia (Tartaglia traduzido a português significa “gago”, apelido dado ao matemático devido aos seus distúrbios de fala) em meados do século XVI. Naquela época eram comuns publicações anuais de matemática, nos quais as mentes brilhantes da Europa propunham desafios a outros matemáticos. Publicações essas que faziam crescer o nome de muitos matemáticos que conhecemos historicamente hoje, como Newton, irmãos Bernouilli, Leibniz, entre outros.

A história diz que no início do século XVI o matemático Scipione del Ferro descobriu uma solução para a equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, porém faleceu antes de publicá-la. Seu discípulo, Antonio Fior, conhecia o método e resolveu publicar em uma dessas edições anuais o desafio, afim de engrandecer seu nome perante os matemáticos contemporâneos. O desafio constava em dar as soluções numéricas de equações do tipo que del Ferro havia estudado.

O matemático Tartaglia, um humilde matemático de origem pobre, aceitou o desafio e respondia todos com respostas diretas e precisas a respeito das raízes, porém não revelava seu método de obtenção das mesmas. Por mais que Fior ousava desafiar Tartaglia, a resposta vinha sempre com precisão por parte do matemático com distúrbio de fala.

Para finalizar a humilhação para cima de Fior, Tartaglia propôs um desafio ao mesmo que era de resolver equações do tipo: $x^3 + n.x^2 + px + q = 0$. Ao matemático Fior, que não tinha méritos o suficiente para responder ao desafio, restou aceitar a humilhação perante todos os matemáticos contemporâneos.


Nicolo Fontana Tartaglia

Nesta mesma época, Girolamo Cardano, também italiano, estava escrevendo um trabalho de Álgebra, e solicitou a Tartaglia que revelasse o método de resolução das equações do 3º grau para que fosse publicado, com os devidos créditos, no seu livro. Tartaglia recusou, alegando que iria publicar ele mesmo o método. Cardano era conhecido por sua "falsidade", mas mesmo assim conseguiu convencer (sob juras de que seria devidamente creditado) o matemático Tartaglia a revelar a solução. Quebrando sua promessa, em meados do século, surgiu a publicação *Ars Magna* contendo a solução das equações do 3º grau sem menção alguma ao seu conterrâneo.

Com a solução de equações cúbicas conhecida, um grande problema na matemática surgiu (refira-se à introdução histórica dada aos Números Complexos no capítulo 1 deste livro) quando os matemáticos pararam para analisar melhor a solução de Cardano-Tartaglia para equações do 3º grau: $x^3 = a.x + b$.

A solução vinda do matemático italiano dizia que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Até o momento não era tido como algo matematicamente verdadeiro a raiz quadrada de números negativos, de modo que equações como $x^3 = 15.x + 4$, não apresentassem soluções de interpretação matemática concreta, uma vez que de acordo com a solução de Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Desta forma criou-se em paralelo ao estudo das equações algébricas polinomiais, o estudo dos Números Complexos.

II) Polinômios do 3º Grau sem o termo do 2º grau (Regra de Cardano)
A partir do grau 3, fica mais difícil determinar algebricamente (sem o auxílio de outras condições do problema) as raízes para o *polinômio*, em geral. Veremos mais a frente (pedimos que por enquanto o leitor apenas acredite) que todo polinômio do 3º grau com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz real. A Regra de Cardano mostra que é possível determinar um algoritmo para achar essa raiz para um polinômio de 3º grau do tipo:

$$P(x) = x^3 + b.x + c \quad , b,c \in \mathbb{R}^*$$

Ex: $P(x) = x^3 + b.x + c \quad , b,c \in \mathbb{R}^*$

Vamos supor uma raiz real do tipo: $\alpha = u + v$ com u e v a serem determinados.

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (u+v)^3 + b.(u+v) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(u^3 + 3.u.v.(u+v) + v^3\right) + b.(u+v) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(u^3 + v^3\right) + (u+v).(3.u.v + b) + c = 0 \end{aligned}$$

Queremos achar u e v para que a igualdade acima seja satisfeita. Vamos tomar, por exemplo, u e v tais que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -c \\ 3.u.v = -b \end{cases}$$

Para u e v acima, teremos α = u + v sendo raiz do polinômio. Podemos, ainda, escrever:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -c \\ u^3.v^3 = \dfrac{-b^3}{27} \end{cases}$$

Vamos denotar: $u^3 = p$, $v^3 = q$

$$\begin{cases} p + q = -c \\ p.q = \dfrac{-b^3}{27} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p + \left(-\frac{b^3}{27}\right).\frac{1}{p} = -c \quad \Rightarrow \quad p^2 + c.p - \frac{b^3}{27} = 0$$

Usando a “Regra de Báskara” para resolver a equação do 2º grau acima:

$$p = -\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}} \quad ; \quad q = -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}$$

Voltando às variáveis u e v:

Exemplo 4.3.b (IME – 1994) Mostre que P(x) é divisível por Q(x) onde P e Q são os dados:

$$P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + x^{666} + x^{555} + x^{444} + x^{333} + x^{222} + x^{111} + 1$$

$$Q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Solução:

Vamos determinar todas as raízes de Q(x):

$$Q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

O desenvolvimento de Q(x) é uma soma de P.G. de razão x: $Q(x) = \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1}$

Portanto, as raízes de Q(x) serão do tipo α, tais que:

$$Q(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha^{10} - 1}{\alpha - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^{10} - 1 = 0 \\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Utilizando a fórmula 1.6.1 da seção de Números Complexos, temos que as raízes de Q(x) são:

$$\alpha = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{10}\right), \; k = 1, 2, 3, \ldots, 9$$

Verifiquemos se todas essas raízes são raízes de P(x):

$$P(\alpha) = \left(\alpha^{111}\right)^9 + \left(\alpha^{111}\right)^8 + \left(\alpha^{111}\right)^7 + \left(\alpha^{111}\right)^6 + \left(\alpha^{111}\right)^5 + \ldots + \left(\alpha^{111}\right) + 1 =$$

$$= \frac{\left(\alpha^{111}\right)^{10} - 1}{\alpha^{111} - 1} = \frac{\left(\alpha^{10}\right)^{111} - 1}{\alpha^{111} - 1} = \frac{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{10}\right)^{10}\right)^{111} - 1}{\alpha^{111} - 1} = \frac{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{\cancel{10}}.\cancel{10}\right)\right)^{111} - 1}{\alpha^{111} - 1}$$

$$= \frac{\left(\operatorname{cis}(2k\pi)\right)^{111} - 1}{\alpha^{111} - 1} = \frac{1 - 1}{\alpha^{111} - 1} = 0$$

Portanto, todas as raízes de Q(x) são raízes de P(x). Do Resultado 4.3.3, temos que P(x) é divisível por Q(x).

Exemplo 4.3.c (ITA – adaptada) Suponhamos que os polinômios P(x), Q(x), p(x) e q(x) satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} P(x).p(x) + Q(x).q(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{C} \\ P(\,p(1)\,) = 0 \;,\; Q(0) = 0 \end{cases}$$

Mostre que p(x) não é divisível por (x – 1).

Como as raízes estão em progressão aritmética, podemos dizer que são do tipo:

$$\alpha - r,\ \alpha\ ,\ \ \alpha + r$$

Das relações de Girard para o polinômio, obtemos:

$$\begin{cases} S_G^1 = (\alpha - r) + (\alpha) + (\alpha + r) = 15 \Rightarrow 3\alpha = 15 \quad \therefore \quad \alpha = 5 \\ S_G^3 = (\alpha - r).(\alpha).(\alpha + r) = 80 \quad \Rightarrow \alpha.(\alpha^2 - r^2) = 80 \quad \therefore \quad r = \pm 3 \end{cases}$$

De onde segue que as 3 raízes são:

$$\boxed{2, 5, 8}$$

Exemplo 4.4.b Para o polinômio $P(x) = x^4 - 5.x^3 + 9x^2 - 8$ determine a soma dos quadrados das suas raízes.

Solução:
Não sabemos o método prático de determinar as raízes do polinômio do 4º grau dado. Porém, para calcular a soma dos quadrados delas não é preciso que as conheçamos individualmente. Sejam a, b, c, d essas raízes:

Das relações de Girard para o polinômio, obtemos:

$$\begin{cases} S_G^1 = (a + b + c + d) = 0 \\ S_G^2 = (a.b + b.c + a.c + a.d + b.d + c.d) = -5 \end{cases}$$

Levando em consideração que:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2.(a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d)$$

Teremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \underbrace{(a + b + c + d)}_{S_G^1 = 0}{}^2 - 2.\underbrace{(a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d)}_{S_G^2 = -5}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$$

OBS: *Note que, no exercício anterior, calculamos a soma dos quadrados das raízes do polinômio, sem conhecermos as mesmas, ou sequer sabermos se as raízes eram reais puras ou não. De fato, o resultado de Girard é geral, e não faz essa distinção, nos permitindo aplicá-lo para qualquer polinômio de coeficientes complexos.*

$$\Rightarrow \begin{cases} a.\alpha^k + b.\alpha^{k-1} + c.\alpha^{k-2} + d.\alpha^{k-3} = 0 \\ a.\beta^k + b.\beta^{k-1} + c.\beta^{k-2} + d.\beta^{k-3} = 0 \\ a.\gamma^k + b.\gamma^{k-1} + c.\gamma^{k-2} + d.\gamma^{k-3} = 0 \end{cases}$$

Se somarmos membro a membro as 3 equações teremos:

$$a.\underbrace{\left(\alpha^k + \beta^k + \gamma^k\right)}_{S_k^*} + b.\underbrace{\left(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \gamma^{k-1}\right)}_{S_{k-1}^*} +$$
$$+c.\underbrace{\left(\alpha^{k-2} + \beta^{k-2} + \gamma^{k-2}\right)}_{S_{k-2}^*} + d.\underbrace{\left(\alpha^{k-3} + \beta^{k-3} + \gamma^{k-3}\right)}_{S_{k-3}^*} = 0$$

Exemplo 4.5.a Sendo a, b, c, d as raízes do polinômio $x^4 - 5.x^2 + 2x + 1 = 0$, determine a soma $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$.

Solução: A soma pedida é justamente S_4^* (leia-se "S quatro de Newton"). Pelo teorema de Newton (4.6.1), temos:

$$(S_4^*) + 0.(S_3^*) - 5.(S_2^*) + 2.(S_1^*) + 1.(S_0^*) = 0.$$

Calculando as demais somas de Newton necessárias:

$$\begin{cases} S_2^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ \quad = (a+b+c+d)^2 - 2.(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ \quad = \left(S_G^1\right)^2 - 2.\left(S_G^2\right) = (0)^2 - 2.(-5) = 10 \\ (S_1^*) = a+b+c+d = (S_G^1) = 0 \\ (S_0^*) = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 = 4 \end{cases}$$

Substituindo na expressão de Newton:

$$(S_4^*) + 0.(S_3^*) - 5 \times 10 + 2 \times 0 + 1 \times 4 = 0$$

$$\therefore \; S_4^* = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 46$$

4.9 Exercícios de Fixação

Exercício 4.1 (ITA – 2005 adaptada) O número complexo 2 + i é raiz do polinômio $x^4 + x^3 + p.x^2 + x + q$ com p, q sendo reais. Determine todas as raízes do polinômio.

Exercício 4.2 (IME/ITA) Mostre que é racional:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Exercício 4.3 (ITA – 2003) Sejam a, b, c, d constantes reais. Sabendo que a divisão de $x^4 + a.x^2 + b$ por $x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $x^3 + c.x^2 + dx - 3$ por $x^2 - x + 2$ tem resto igual a – 5. Determine o valor de a + b + c + d.

Exercício 4.4 (IME) O polinômio P(x) de grau 2n + 1 tem todos os seus coeficientes iguais a 1. Ao dividirmos P(x) por D(x) do 3º grau encontramos o resto R(x). Sabendo que as raízes de D(x) são distintas e são raízes de $x^4 - 1$ e D(1) é não nulo, determine R(x).

Exercício 4.5 (IME-1979) Resolva as equações abaixo sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

$$\begin{cases} x^3 - 7.x^2 - 204x + 1260 = 0 \\ x^3 - 15.x^2 - 394x + 840 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.6 (IME-1983) Determine os valores de m para os quais as raízes da equação biquadrada abaixo sejam reais e estejam em progressão aritmética.

$$x^4 - (3m+5).x^2 + (m+1)^2 = 0$$

Exercício 4.7 Demonstre as relações de Girard (Resultado 4.4.1) pelo processo de Indução Finita.

Exercício 4.8 (IME - 2006) Considere o polinômio:

$$x^5 - 3.x^4 - 3.x^3 + 27.x^2 - 44.x + 30$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a 3 – i e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Exercício 4.9 (IME) Sem resolver a equação, calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes (para m inteiro maior que zero):

$$m.x^4 + 8.x^3 - 139.x^2 - 18.x + 9 = 0$$

Exercício 4.10 Determine as soluções da equação abaixo dados que uma das raízes é igual à soma das outras duas. $36.x^3 - 12.x^2 - 5x + 1 = 0$

Exercício 4.11 (IME - 1995) Determine o valor de b para que o polinômio, de coeficientes reais, $x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ tenha quatro raízes não-reais, duas somando 3 + 4.i e as outras duas com produto 13 + i.

Exercício 4.12 (IME – 2006 adaptada) Seja p(x) um polinômio do 5º grau com coeficientes inteiros (sendo o coeficiente do termo de maior grau unitário). Sabe-se que as cinco raízes de p(x) são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de p(x) é?

Exercício 4.13 Mostre que a fatoração a seguir é válida.

$$\left(1 + x + x^2 + x^3\right)^2 \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$$

Exercício 4.14 (IME - 2003) As raízes distintas do polinômio a seguir são $z_1, \dots, z_n$. $P(x) = x + 2.x^2 + 3.x^3 + \dots + 23.x^{23} + 24.x^{24} + 23.x^{25} + \dots + x^{47}$

Seja b_k a parte real de z_k^2. Determine o valor da soma: $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$

Exercício 4.15 (IME - 2000) Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2.x^m + a^{3n}.x^{m-3n} - a^m$ é divisível por x + a, onde a é não-nulo.

Exercício 4.16 O valor da soma das raízes comuns às equações é

$$\begin{cases} x^4 - 7.x^3 + 16.x^2 - 15.x + 3 = 0 \\ x^4 - 3.x^3 - x^2 - 7.x + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.17 (IME – 2004 adaptada) Determine o valor das raízes comuns das equações:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - 11.x^2 + 18.x + 18 = 0 \\ x^4 - 12x^3 + 44.x^2 - 32.x - 52 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.18 Determine o polinômio do 3º grau que satisfaça $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$ e utilize o resultado para determinar a soma:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$$

Exercício 4.19 (ITA – 1994) A identidade abaixo é valida para todo x real, diferente de -1. Determine o valor de a + b + c.

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} \equiv 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b.x+c}{x^2-x+1}$$

Exercício 4.20 (ITA) Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e $x^2 + rx + s$, demonstrar que $b = -r.(a+r)$.

Exercício 4.21 (ITA – 1999) Seja P(x) um polinômio de grau m, A(x) e B(x) polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios C(x) e D(x) tais que a igualdade A(x).C(x) + B(x).D(x) = 1 se verifique para todo x real. Prove que A(x) não é divisível por B(x).

Exercício 4.22 Determine o maior valor de k inteiro para o qual $(x-1)^k$ divide $x^{2n+1} - (2n+1).x^{n+1} + (2n+1).x^n - 1$.

Exercício 4.23 (ITA) Verifique a veracidade da afirmação: "Seja P(x) um polinômio de grau m. Mostre que, se P(x) admite raiz inteira, então P(–1).P(0).P(1) é divisível por 3".

Exercício 4.24 (IME - 2001) Determine a condição que os coeficientes de P(x) do quarto grau devem satisfazer para que P(x) = P(1-x) para todo x real. Resolva este exercício utilizando a condição de identidade entre dois polinômios.

Exercício 4.25 (ITA – adaptada) Seja um polinômio P(x) do 6º grau, com P(0) = 1 e tal que: $P(1) = P(-1) = P(2) = P(-2) = P(-3) = P(3) = 2$. Determine o valor de P(4).

Exercício 4.26 (IME) Seja um polinômio P(x) do 5º grau tal que a divisão de P(x) por $(x+1)^3$ nos dá resto 1 e a divisão por $(x-1)^3$ nos dá resto –1. Determine P(x). *Sugestão: Monte as equações de divisão euclidiana do enunciado e derive-as com relação à variável x.*

Exercício 4.27 (ITA – 1994) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + a.x^2 + b.x + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então, quanto vale $a^2 + b^2 + c^2$?