Livro Eletrônico

Aula 09

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 09: Prismas e Cilindros.

Sumário

Olá meu jovem/minha jovem! Como vai você? Hoje estaremos dando prosseguimento à nossa trajetória em relação ao estudo da geometria espacial, falando sobre prismas e cilindros.

A maioria dos textos não costuma colocá-los juntos num mesmo material de leitura. Porém o estudo que aqui será feito é tão parecido para ambos que resolvi teorizá-los juntos, em capítulos separados. Veremos sobre o cálculo de áreas, volumes, planificações, e algumas métricas internas pertinentes a ambos.

Vamos lá, então? Avente então com o conteúdo de Prismas e Cilindros!


ESA
PARE

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial: poliedros.*
Aula 09	*Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 10	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 11	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 12	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

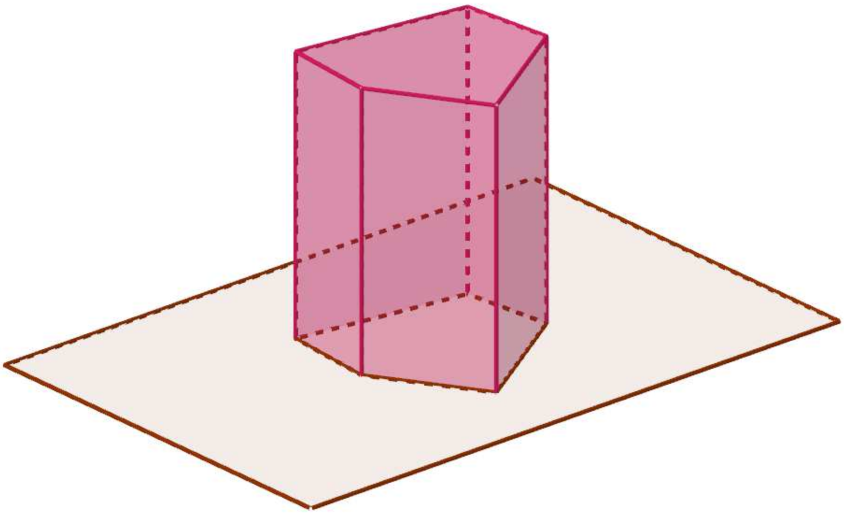
1.0– Prismas

1.1– Definição e elementos básicos

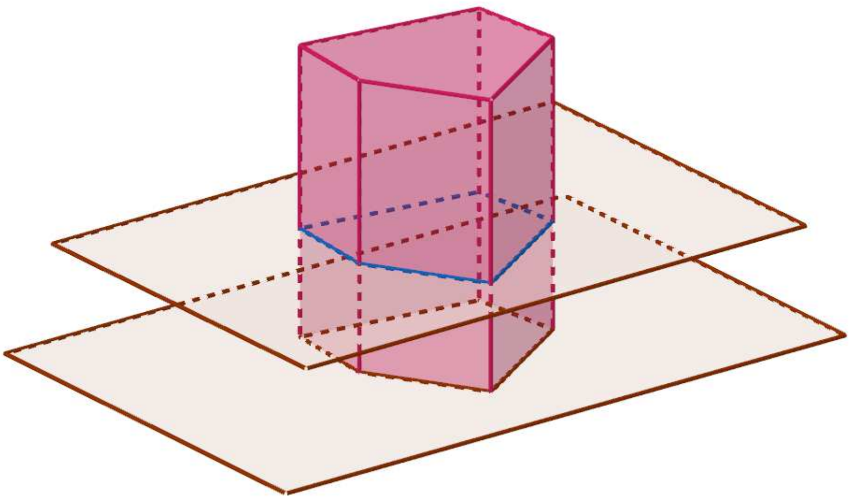
Uma pequena intuição sobre o conceito de prisma

Um prisma é um sólido longo, de bases iguais e paralelas, cujos cortes paralelos às bases sejam sempre congruentes. Eu sei, essa é uma definição meio esquisita, não é?

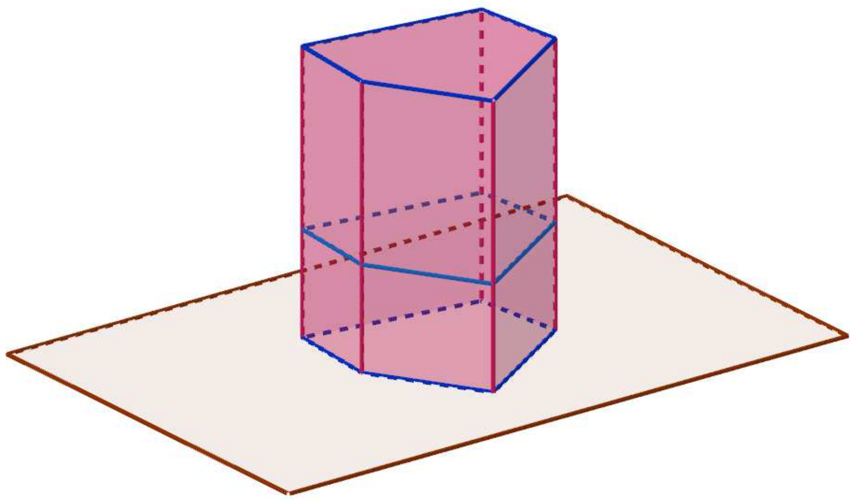
Então, para facilitarmos a nossa vida, vamos dar uma olhada no sólido abaixo:



Vamos, então, cortar esse sólido de modo paralelo ao plano de sua base:

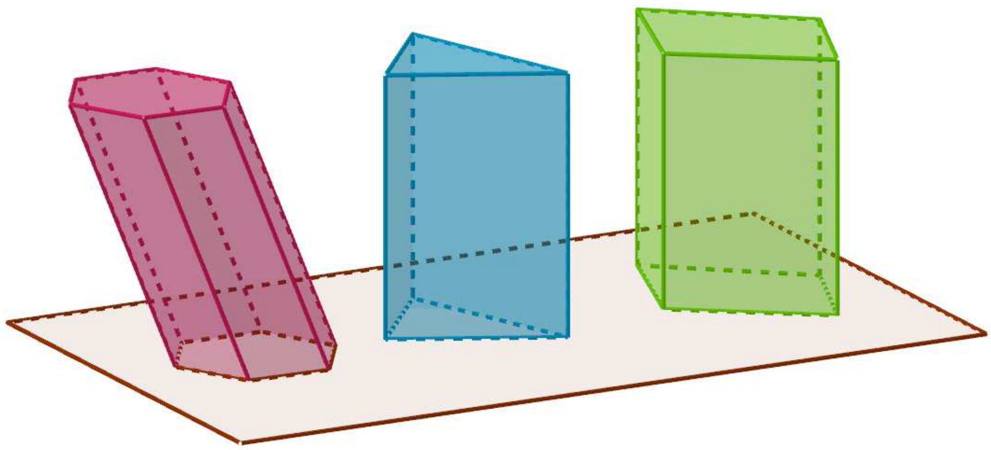


Perceba que um polígono azul formou-se na interseção do corte, consegue ver? Deixe-me desenhá-lo separadamente para que fique mais claro:



Veja que esses polígonos são todos, de fato, congruentes; isso é o que caracteriza um prisma: não importa quantos cortes paralelos à base você faça, os polígonos de interseção com o corte serão todos congruentes.

Veja mais alguns exemplos de prismas a seguir.

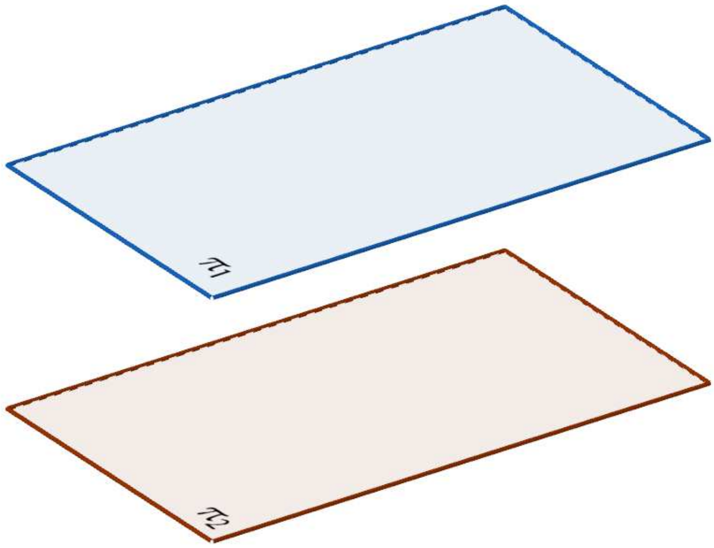


Tente imaginar esses sólidos sendo cortados paralelamente ao plano da base, como fizemos anteriormente. Consegue ver que esses cortes formarão ***secções*** iguais? é justamente por isso que são todos prismas.

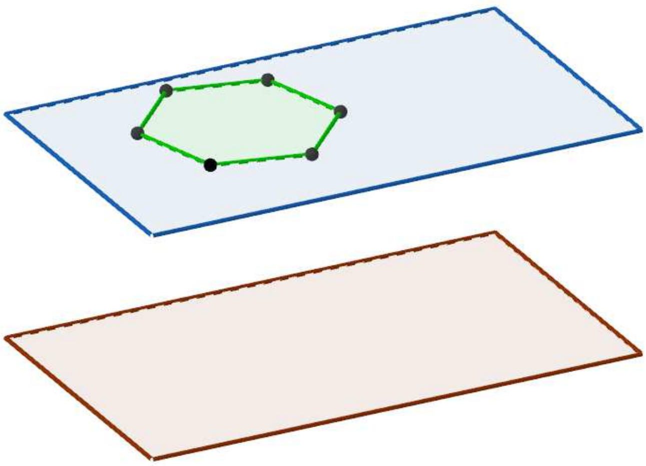
Construção formal de um prisma

Vamos então entender como um prisma pode ser formado de modo formal, isto é, como que podemos com certeza generalizar um método para a construção de um prisma.

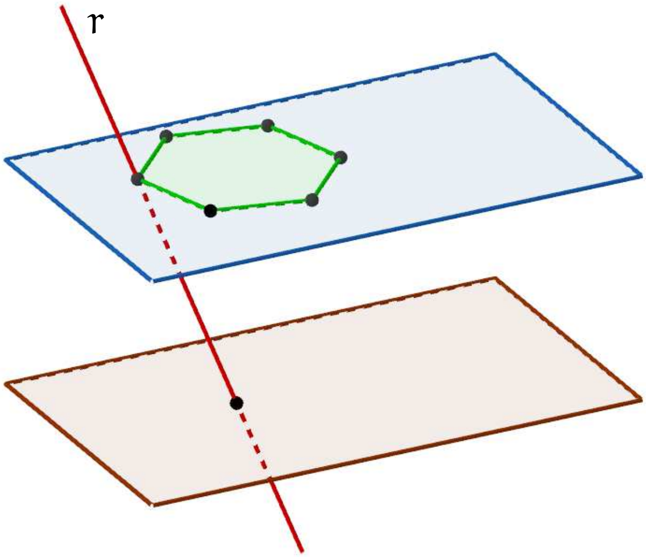
Em primeiro lugar, considere dois planos paralelos π_1 e π_2, como os dois abaixo:



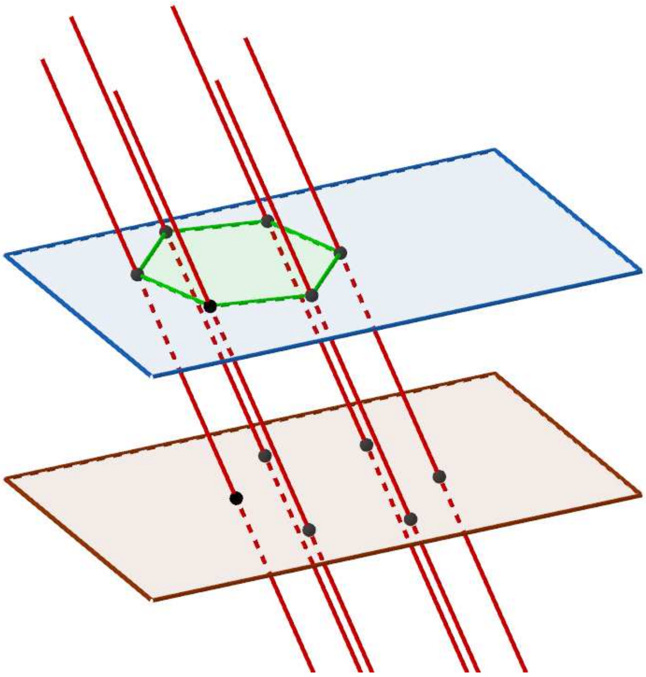
Em seguida, desenhe um polígono em um dos dois planos. Desenharei em π_1, mas realmente tanto faz. Farei um hexágono, mas nada de espacial acerca de hexágonos (só acho que fica mais visual para entendermos a dinâmica da construção):



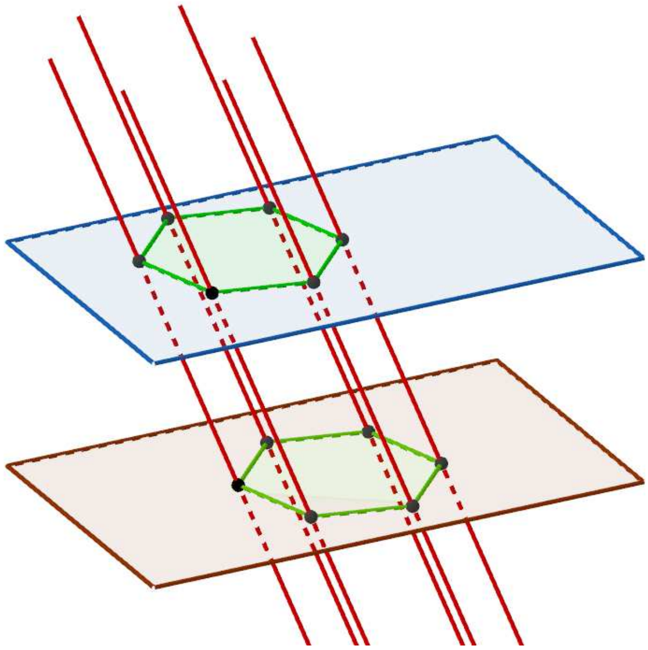
Agora, escolha uma ***direção*** não-paralela aos planos e intersecte um dos vértices do polígono desenhado por uma reta com essa direção escolhida. Ficou complicado? O que falei não foi mais do que: fure o plano de cima furando também o debaixo, veja:



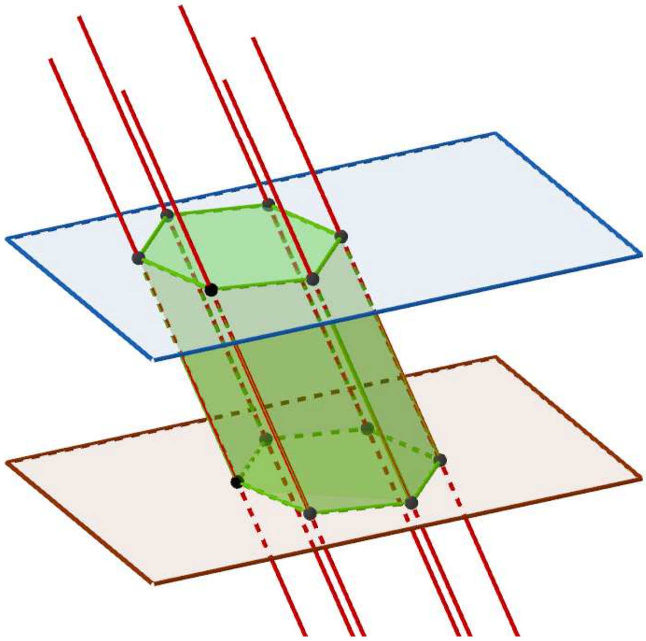
Essa reta pode ter ***qualquer*** direção, só não pode ser paralela aos planos. Bom, perceba que conseguimos um ponto em π_2. A partir de agora, trace retas paralelas a r passando por cada vértice do polígono de cima, dessa forma:



Perceba que pela nossa construção, o polígono que está desenhado em cima acabou aparecendo embaixo também! Isso é bastante intuitivo, devido ao paralelismo das retas em questão. Deixe-me destacar esse polígono novo para você:



Com isso, podemos fechar um sólido ***entre os planos***:

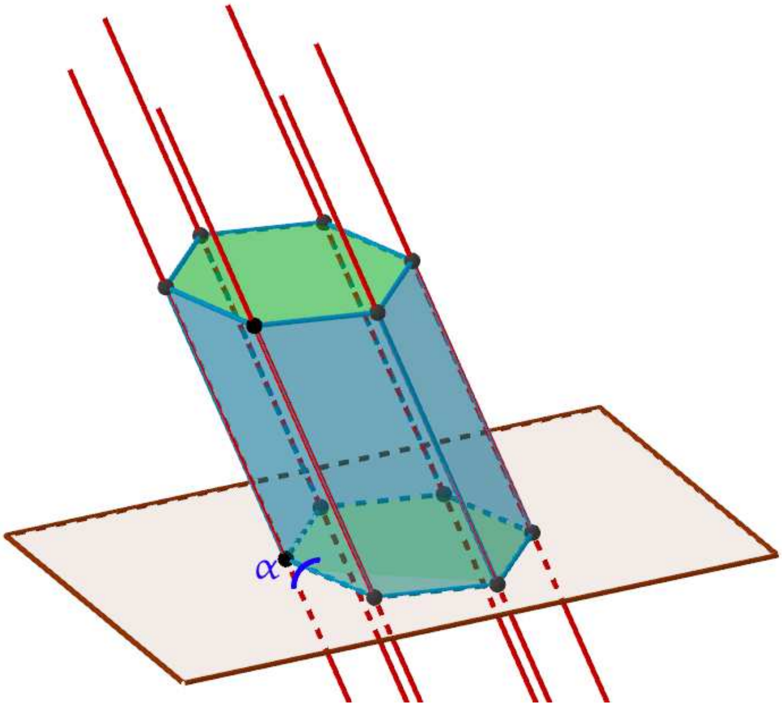


Esse sólido que conseguimos fechar e destacar é o nosso ***prisma***. Perceba que os outros elementos da construção não fazem parte do prisma em si, apenas os planos que o delimita e, claro, o seu interior.

Até aqui então, jovem, estivemos interessados inicialmente numa intuição básica de que seja um prisma e, em seguida, demonstramos uma construção formal para todo e qualquer prisma. Agora, falaremos dos elementos do prisma.

Elementos do prisma

Utilizarei o nosso recém-construído prisma para analisarmos os seus mais importantes elementos. Sabe aquelas palavrinhas que a gente nada entende na hora que uma questão menciona? Palavras como: base, geratriz, prismas regulares, oblíquos, retos, enfim. todas elas serão explicadas a partir de agora. Sigamos então? Observemos o nosso recém-construído prisma:



Vamos a uma descrição detalhada de seus principais elementos:

- **Retas vermelhas**: as retas vermelhas que podemos ver são as chamadas ***geratrizes*** do prisma. As geratrizes formam com o prisma as chamadas ***arestas laterais do prisma***;
- **Bases verdes**: Como o próprio nome sugere, são as ***bases*** do prisma. Perceba que todo prisma possui duas bases: uma superior e uma inferior;
- **Quadriláteros azuis**: Seriam os quadriláteros que envolvem a lateral do prisma. É por isso que cada um desses quadriláteros (paralelogramos) são chamados de ***as faces laterais*** do prisma;
- **Ângulo azul**: O ângulo azul α que ali ilustrei é chamado de ***a inclinação do prisma***;
- **Distância entre as bases**: Quando construímos o prisma, precisamos de dois planos, certo? Pois bem, a distância entre esses planos é chamado de ***a altura do prisma***.

Perceba também que a altura h do prisma, sua geratriz e a sua inclinação α se relacionam por meio da seguinte expressão (tente verificar você mesmo o porquê):

$$h = g \cdot \text{sen}\,\alpha.$$

Classificações dos prismas

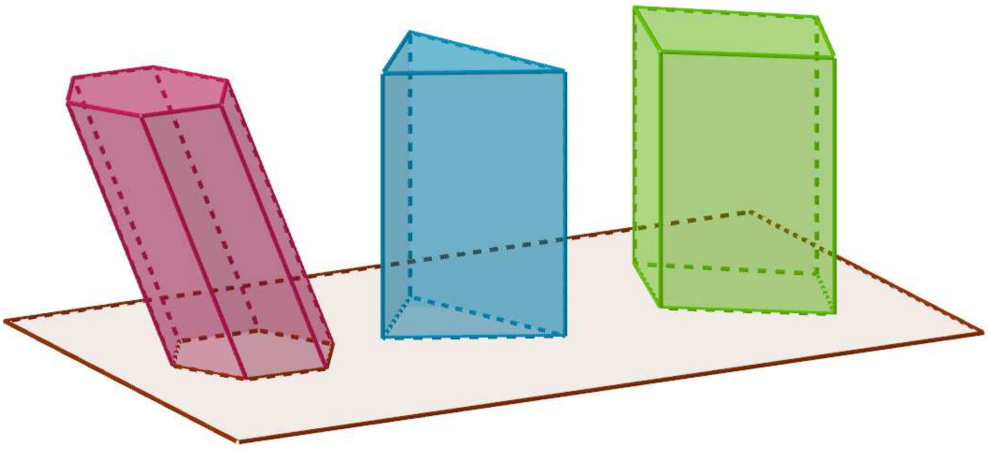
Prismas possuem classificações assim como quase todos os sólidos geométricos possuem. Em primeiro lugar:

Todos os prismas são poliedros.

Então, a Relação de Euler aprendida na aula anterior funciona aqui, assim como tudo o que aprendemos acerca de poliedros.

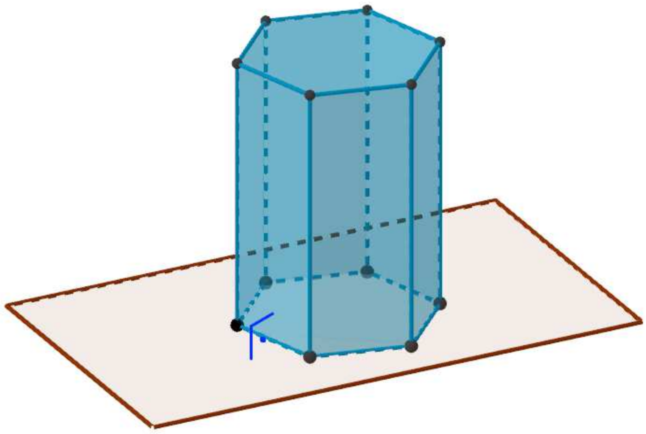
Agora, vamos a algumas classificações mais específicas:

- **Prisma oblíquo:** São prismas em que a inclinação é diferente de $90°$. O prisma que construímos, da forma que foi construído, ficou oblíquo, concorda? Também vimos, lá no início de nossa aula, a figura a seguir:



Nessa figura, o prisma avermelhado é um prisma oblíquo (está inclinado em relação à vertical). Tudo bem, jovem?

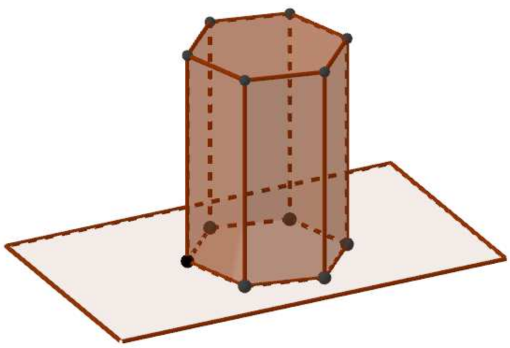
- **Prisma reto:** É todo prisma cuja inclinação é de $90°$. Na figura acima, os prismas azul e verde são retos. Veja a seguir mais um exemplo de prisma reto:



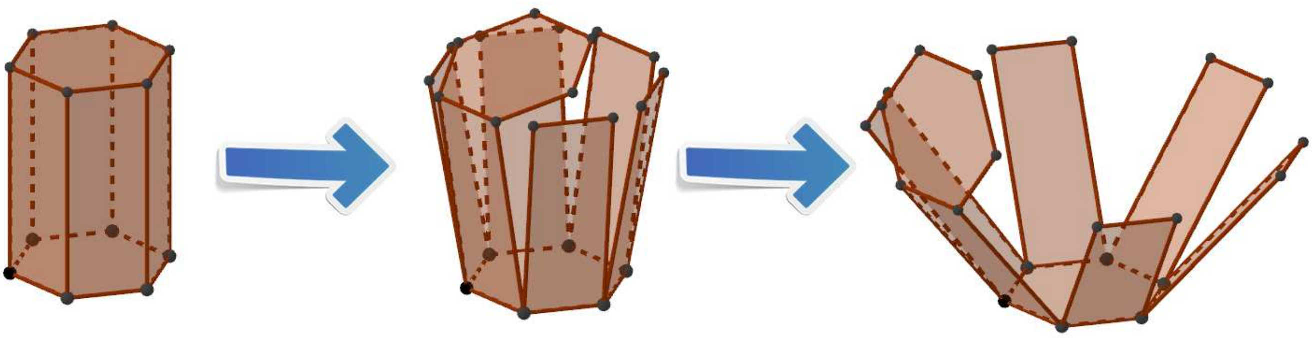
- **Prisma regular:** é todo prisma cuja base é um polígono regular. O prisma acima, que acabei de exemplificar, é um exemplo de prisma regular, pois o hexágono construído para as bases é regular.

Planificação

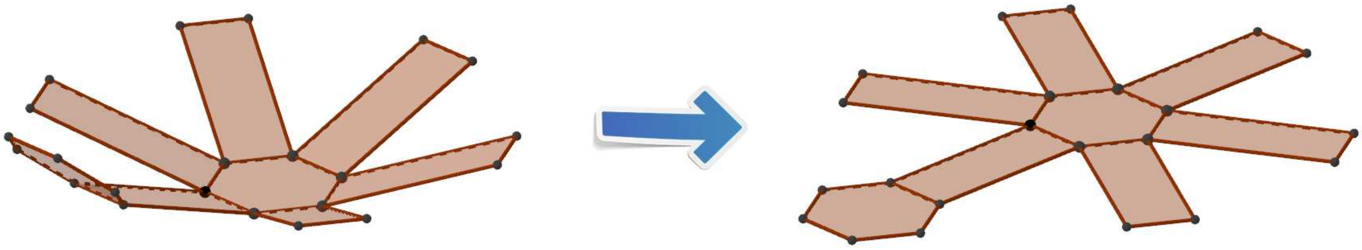
Planificar um sólido significa "desmontá-lo" conservando as suas métricas planas de forma que seu formato final seja plano. Fica mais fácil ver do que falar, então, observe o prisma abaixo:



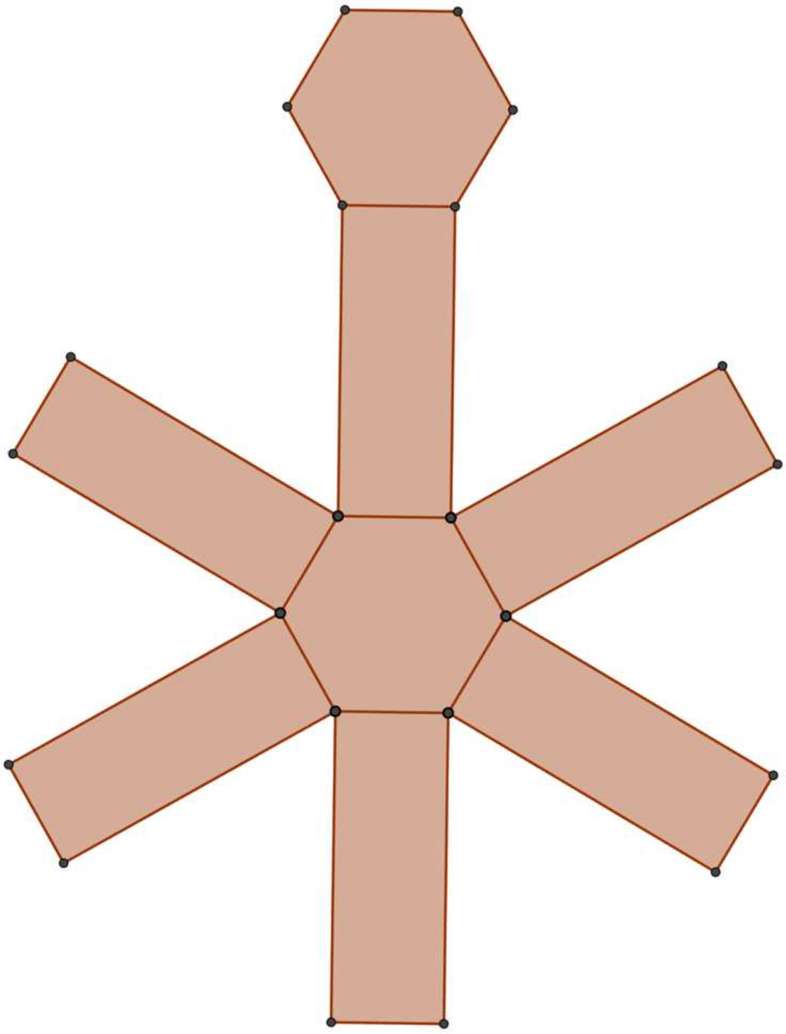
Vejamos o início do processo de planificação desse prisma:



Tente de fato imaginá-lo se abrindo na sua imaginação, como se fosse uma dobradura feita de cartolina ou papelão. Veja a finalização do seu processo de planificação:



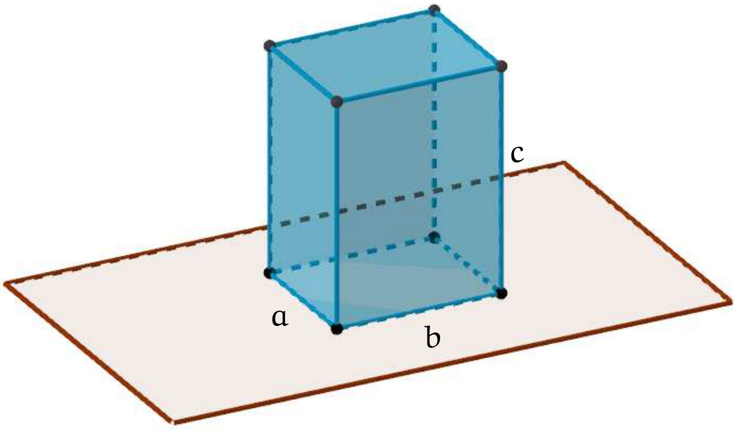
Nosso prisma planificado assume, então, o seguinte formato:



É claro que essa é a forma planificada de um prisma hexagonal regular. Cada prisma tem a sua forma planificada, mas o que mais importa aqui é que você tenha entendido o que significa planificar um prisma. Tudo bem até aqui, jovem?

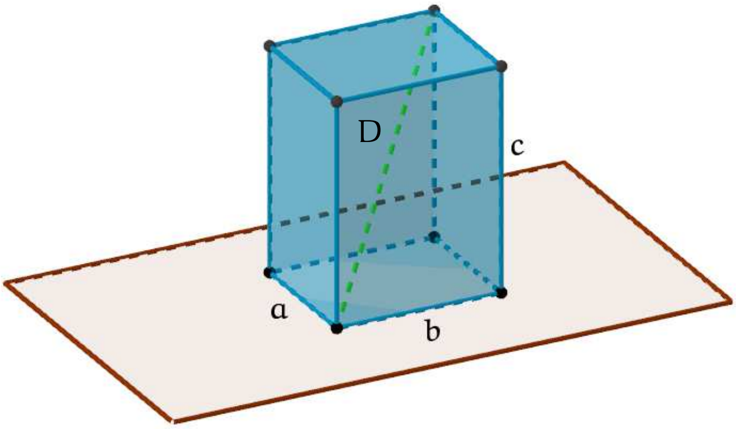
Paralelepípedos reto-retângulos

Um prisma será chamado de ***paralelepípedo*** quando todas as suas faces forem paralelogramos. Caso o paralelepípedo seja reto com base retangular, será chamado de ***paralelepípedo reto-retângulo***, como o sólido abaixo:

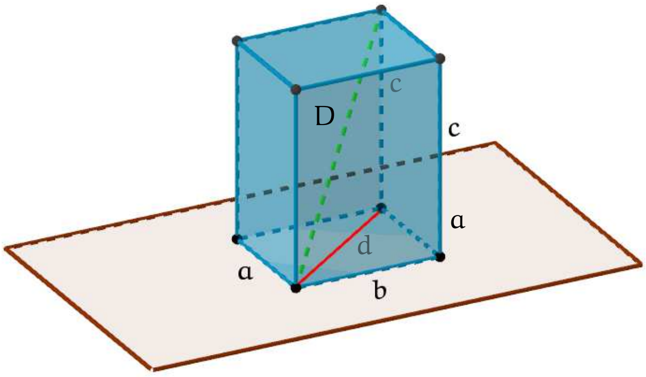


Um item importante que pode vir a ser cobrado acerca dos paralelepípedos reto-retângulos é a medida de sua ***diagonal***.

Vamos, então, desenhar uma das diagonais desse sólido (colori a diagonal de verde para você localizá-la melhor):



O objetivo é calcularmos D em função de a, b e c. Vejamos como podemos fazer isso. Em primeiro lugar, desenhe a diagonal da face inferior, dessa forma:



Pelo triângulo retângulo formado na base, temos:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Daí, pelo triângulo retângulo formado no meio (de lados D, d e c):

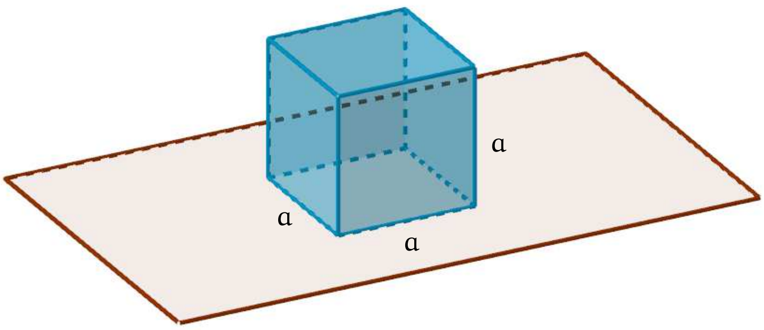
$$\begin{aligned} D^2 &= d^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Disso, concluímos que:

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.}$$

Cubos

Um cubo é um paralelepípedo reto-retângulo com todas as arestas de mesmas medidas. trata-se também de um dos Poliedros de Platão, o hexaedro regular, como vimos na aula anterior. Observe abaixo um cubo:



Para calcularmos a giagonal de um cubo, basta utilizarmos a expressão $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ com $a = b = c$:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \\ &= \sqrt{3a^2} \end{aligned}$$

E daí, temos finalmente que:

$$\boxed{D = a\sqrt{3}.}$$

1.2– Áreas e volumes em um prisma

Área lateral de um prisma qualquer

Em um prisma qualquer, a área lateral (identificada por S_ℓ) é a ***soma de todas as áreas das faces laterais do prisma***. Se o prisma for reto, suas faces laterais serão todas congruentes.

Perceba que as bases não são incluídas na área lateral.

Área total

A área total de um prisma (identificada por S_t) é a soma de sua área lateral com a área das duas bases juntas, ou seja:

$$\boxed{S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b.}$$

Volume de um prisma

Considere um prisma cuja área da base seja S_b e cuja altura seja h. Seu volume pode ser calculado da seguinte forma:

$$\boxed{V = S_b \cdot h.}$$

Algo importante para percebermos aqui é a ***importância*** da matéria de ***áreas*** nessa parte do conteúdo. De nada adiantará continuarmos a estudar esse assunto se não pudermos calcular a área de um hexágono ou de um losango, por exemplo. Precisamos estar bastante familiarizados com todas as áreas que vimos.

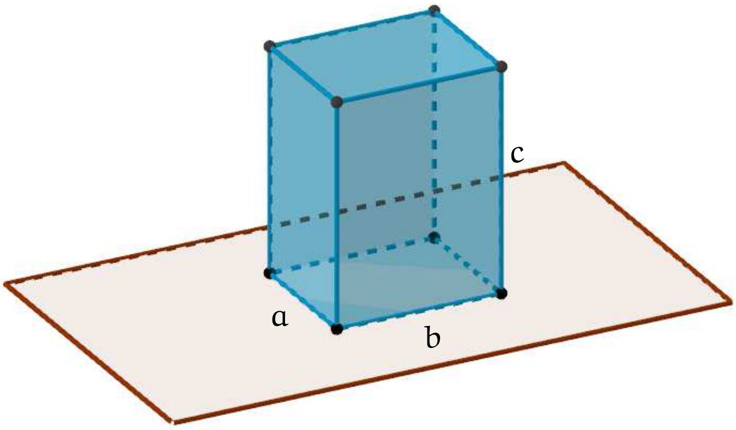
Áreas no paralelepípedo reto-retângulo

Como as fórmulas anteriores funcionam para qualquer prisma, também funcionam para o paralelepípedo reto-retângulo. Se um paralelepípedo reto-retângulo possuir dimensões a, b e c, sua área total S_t será:

$$\boxed{S_t = 2 \cdot (ab + ac + bc).}$$

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

Considere o seguinte paralelepípedo reto-retângulo:



Façamos as contas para calcular o seu volume:

$$\begin{aligned} V &= S_b \cdot h \\ &= a \cdot b \cdot c. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c.}$$

Áreas no cubo

Um cubo é um paralelepípedo reto-retângulo com $a = b = c$, certo? Então:

$$\begin{aligned} S_t &= 2 \cdot (ab + ac + bc) \\ &= 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \\ &= 2 \cdot (a^2 + a^2 + a^2) \\ &= 2 \cdot 3a^2 \\ &= 6a^2. \end{aligned}$$

Assim, temos que, para o cubo:

$$\boxed{S_t = 6a^2.}$$

Volume de um cubo

Visto que no paralelepípedo reto-retângulo temos $V = a \cdot b \cdot c$, então, para o cubo:

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ &= a \cdot a \cdot a \\ &= a^3. \end{aligned}$$

Temos então que, para o cubo:

$$\boxed{V = a^3.}$$

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(EEAR-2001) QUESTÃO 1

A base de um prisma quadrangular regular está inscrita numa circunferência cujo círculo tem 100π cm^2 de área. Se a altura do prisma mede $1,5$ cm, então o volume desse prisma, em cm^3, é de:

(a) 200
(b) 300
(c) 400
(d) 800

(EEAR-2002) QUESTÃO 2

A base de um prisma regular é um hexágono inscrito num círculo de raio R. Se o prisma é equivalente ao cubo, cuja base está inscrita no mesmo círculo, então a altura do prisma hexagonal, em cm, é

(a) $2R$
(b) $\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$
(c) $\dfrac{4R\sqrt{6}}{3}$
(d) $\dfrac{4R\sqrt{6}}{9}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 3

A área lateral de um prisma hexagonal regular de 25 cm de altura e de apótema da base igual a $2\sqrt{3}$ cm, em cm^2, é

(a) 1200

(b) $600\sqrt{2}$
(c) $600\sqrt{3}$
(d) 600

(EEAR-2003) QUESTÃO 4

Um prisma reto tem base hexagonal regular e as faces laterais quadradas. Sabendo-se que a área do círculo inscrito em sua base é igual a $25\pi \text{cm}^2$, a área total, em cm^2, desse prisma é

(a) 400
(b) $100(6+\sqrt{3})$
(c) $100(2+\sqrt{3})$
(d) 600

(EEAR-2003) QUESTÃO 5

Seja V o volume de um cubo de aresta a. Constrói-se um prisma quadrangular de volume V' e de vértices nos pontos médios das arestas das bases do cubo. O volume V' desse prisma é igual a

(a) $\frac{V}{2}$
(b) V
(c) $\frac{V}{3}$
(d) $\frac{V}{4}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 6

Se uma das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo é 6cm, a soma das outras duas dimensões é 25cm e a área total é 600cm^2, então a razão entre as duas dimensões desconhecidas é

(a) $\frac{2}{3}$
(b) $\frac{3}{5}$
(c) $\frac{1}{2}$
(d) $\frac{2}{5}$

(EEAR-2004) QUESTÃO 7

Um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado k, tem volume igual ao de um cubo de aresta k. A altura do prisma é igual a

(a) $\frac{4k\sqrt{3}}{3}$

(b) $k\sqrt{3}$.

(c) $\frac{3k\sqrt{3}}{4}$.

(d) $4k\sqrt{3}$.

(EEAR-2004) QUESTÃO 8

Um prisma regular de base triangular tem altura igual ao lado da base e volume igual a $16\sqrt{3}\,cm^3$. A área lateral desse prisma, em cm^2, é

(a) 24.

(b) 8.

(c) 4.

(d) 48.

(EEAR-2005) QUESTÃO 9

Considere: I- No prisma reto, II- No prisma oblíquo, III- No prisma regular,

A- as arestas laterais não são perpendiculares ao plano da base.

B- as bases são polígonos regulares.

C- as faces laterais são quadriláteros cujos ângulos são retos.

D- as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.

E- as faces laterais são losangos ou paralelogramos propriamente ditos.

F- as bases são polígonos regulares ou não.

O número de afirmações corretas que se pode fazer, iniciando-se com I, II ou III e completando-se com A, B, C, D, E, ou F, é

(a) 9.

(b) 8.

(c) 7.

(d) 6.

(EEAR-2006) QUESTÃO 10

Se as dimensões de um paralelepípedo retângulo medem, em cm, a, $a+3$ e $a+5$, então a soma das medidas de todas as arestas desse paralelepípedo é maior que 48 cm, se a for maior que ____cm.

(a) $\frac{4}{3}$
(b) $\frac{5}{4}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $\frac{4}{5}$

(EEAR-2006) QUESTÃO 11

Um cubo tem $216\,cm^2$ de área total. A medida, em cm, de sua diagonal é

(a) $6\sqrt{2}$
(b) $6\sqrt{3}$
(c) $2\sqrt{6}$
(d) $2\sqrt{2}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 12

A medida da altura de um prisma triangular regular é igual à medida da aresta de sua base. Se a área lateral desse prisma é $10\,m^2$, então sua altura mede, em m,

(a) $\sqrt{15}$
(b) $\sqrt{30}$
(c) $\frac{\sqrt{15}}{2}$
(d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 13

Uma piscina, com a forma de paralelepípedo retângulo, tem 8 m de comprimento, 4 m de largura e 2 m de profundidade. Não estando completamente cheia, um grupo de 8 pessoas "pula" em seu interior, sem haver perda de água, fazendo com que o nível da água varie em $0,5$ m. O volume correspondente às 8 pessoas na piscina, em litros, é igual a

(a) 32000.

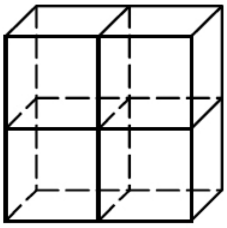
(b) 16000.

(c) 8000.

(d) 4000.

(EEAR-2008) QUESTÃO 14

Quatro cubos idênticos são dispostos como na figura a seguir, formando um único sólido.



Considerando que a diagonal de cada cubo mede $10\sqrt{3}$ cm, a diagonal desse sólido é, em cm, igual a

(a) $30\sqrt{3}$

(b) $40\sqrt{3}$

(c) 20

(d) 30

(EEAR-2008) QUESTÃO 15

Um prisma reto é regular quando suas bases

(a) são paralelas.

(b) têm a mesma área.

(c) têm arestas congruentes.

(d) são polígonos regulares.

(EEAR-2008) QUESTÃO 16

A diagonal de um paralelepípedo retângulo, de dimensões 4 cm, 6 cm e 8 cm, mede, em cm,

(a) $7\sqrt{5}$

(b) $3\sqrt{3}$

(c) $5\sqrt{31}$

(d) $2\sqrt{29}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 17

A base de um prisma reto é um triângulo retângulo, cujos catetos medem 3cm e 4cm. Se esse prisma tem altura igual a $3,5\text{cm}$, então seu volume, em cm^3, é

(a) 21.
(b) 18.
(c) 15.
(d) 12.

(EEAR-2009) QUESTÃO 18

A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede 2cm. Se a diagonal desse prisma mede $2\sqrt{11}\text{cm}$, sua altura, em cm, mede

(a) 8.
(b) 6.
(c) 4.
(d) 2.

(EEAR-2010) QUESTÃO 19

A diagonal de um cubo de aresta a_1 mede 3cm, e a diagonal da face de um cubo de aresta a_2 mede 2cm. Assim, $a_1 \cdot a_2$, em cm^2, é igual a

(a) $2\sqrt{6}$
(b) $2\sqrt{3}$
(c) $\sqrt{6}$
(d) $\sqrt{3}$

(EEAR-2011) QUESTÃO 20

Um cubo tem 3cm de altura, e um paralelepípedo retângulo tem dimensões 1cm, 2cm e 3cm. A razão entre os volumes do cubo e do paralelepípedo é

(a) $\frac{3}{2}$.
(b) $\frac{4}{3}$.

(c) $\frac{9}{2}$.
(d) $\frac{8}{3}$.

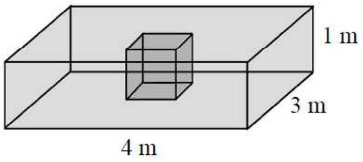
(EEAR-2011) QUESTÃO 21

O perímetro da base de um prisma quadrangular regular é 8cm. Se a altura desse prisma é 3cm, então sua área total, em cm^2, é

(a) 32.
(b) 34.
(c) 36.
(d) 38.

(EEAR-2013) QUESTÃO 22

Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo retângulo e tem, no seu centro, um cubo de concreto de 1m de aresta, como mostra a figura.



O volume de água necessário para encher a piscina, em m^3, é

(a) 12.
(b) 11.
(c) 10.
(d) 9.

(EEAR-2013) QUESTÃO 23

Considere $\sqrt{3} = 1,73$ e um cubo de aresta $a = 10$cm. A medida da diagonal desse cubo, em cm, é um número entre

(a) 18 e 20.
(b) 16 e 18.
(c) 14 e 16.

(d) 12 e 14.

(EEAR-2013) QUESTÃO 24

Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado 3cm, e como altura o dobro da medida de sua aresta da base. Então, a área lateral desse prisma, em cm^2, é

(a) 36
(b) 48
(c) 54
(d) 60

(EEAR-2014) QUESTÃO 25

Um prisma hexagonal regular tem aresta da base medindo ℓ e altura igual a 3ℓ. A área lateral desse prisma é ____ ℓ^2.

(a) 9
(b) 12
(c) 18
(d) 24

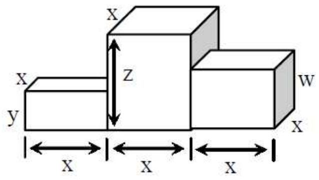
(EEAR-2015) QUESTÃO 26

Uma embalagem de chocolate tem a forma de um prisma triangular regular cuja aresta da base mede 2cm e cuja altura mede 12cm. Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, o volume de chocolate contido nessa embalagem, em cm^3, é

(a) $20,4$.
(b) $23,4$.
(c) $28,4$.
(d) $30,4$.

(EEAR-2015) QUESTÃO 27

Um pódio é composto por três paralelepípedos retângulos justapostos, conforme mostra a figura. Ao considerar $x = 5$dm, $y = 2$dm, $z = 6$dm e $w = 4$dm, o volume desse pódio, em dm^3, é



(a) $150.$
(b) $200.$
(c) $250.$
(d) $300.$

(EEAR-2019) QUESTÃO 28

Um pedaço de queijo, em forma de prisma triangular regular, tem $6\,\text{cm}$ de altura e possui como base um triângulo de $10\,\text{cm}$ de lado. O volume desse pedaço de queijo é ____ $\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

(a) 150
(b) 165
(c) 185
(d) 200

(ESSA-2009) QUESTÃO 29

A altura de um prisma hexagonal regular é de $5\,\text{m}$. Sabe-se também que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em m^3, é:

(a) $270\sqrt{3}$
(b) $220\sqrt{3}$
(c) $200\sqrt{3}$
(d) $285\sqrt{3}$
(e) $250\sqrt{3}$

2.0– Cilindros

2.1– Definição e elementos básicos

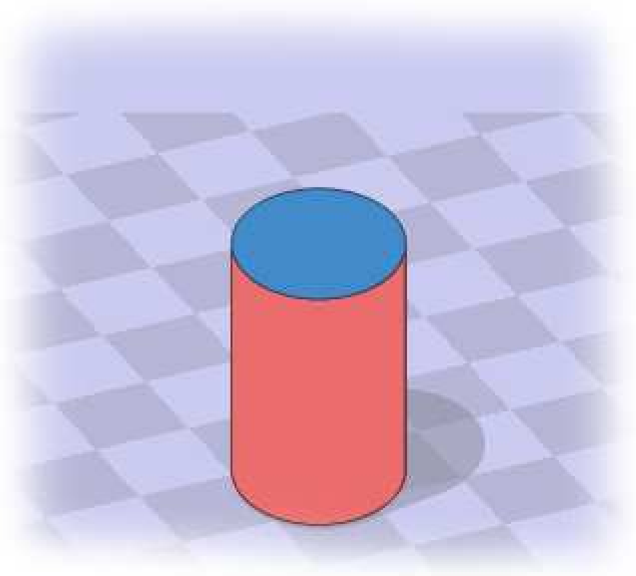
Uma analogia sincera

Jovem, teoricamente falando, um cilindro e um prisma são sólidos distintos. Porém, podemos dizer aqui, para fins unicamente didáticos, que:

Um cilindro é um prisma de base circular.

Essa definição não é estritamente correta, dado que na construção de um prisma começamos com um polígono desenhado em um dos planos (e um círculo não é um polígono).

Mas além desse pequeno detalhe teórico, em termos práticos, essa afirmação nos será muito útil. Dessa forma, ***todas as classificações que fizemos para os prismas, servem para os cilindros*** (exceto a de prisma regular, visto que não faz sentido dizermos que um cilindro é regular). Entyão, da mesma forma que para prismas, pudemos classificá-lo como: oblíquo, reto, pudemos distinguir bases, geratrizes, enfim; para cilindros, tudo se repete. Veja abaixo um exemplo de cilindro:

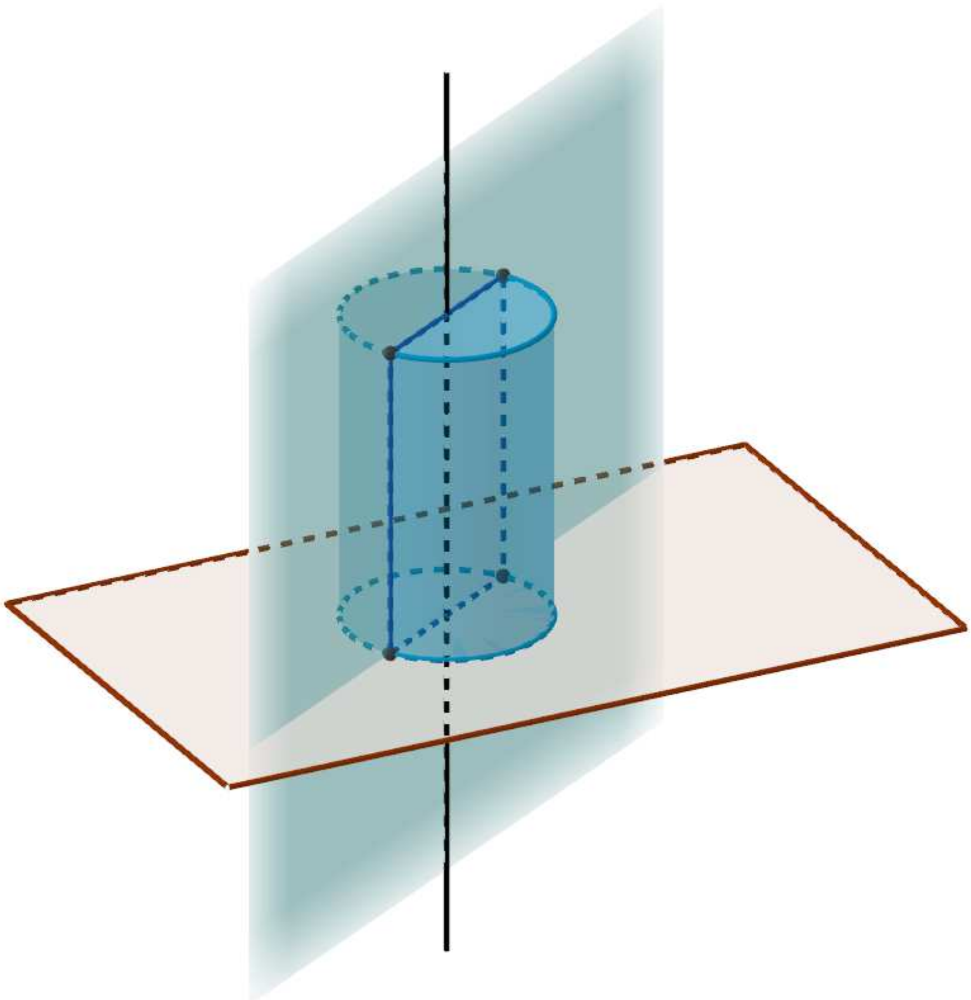


Seguem as repetidas classificações que demos na teoria de prismas:

- As retas paralelas que geram o cilindro continuam sendo chamadas de geratrizes;
- Um cilindro continua tendo duas bases, igual ao prisma, duas bases circulares de raio R;
- A altura h de um cilindro continua sendo a distância entre as suas bases;
- Um cilindro será dito oblíquo quando a sua inclinação for diferente de $90°$;
- Um cilindro será dito reto quando a sua inclinação for igual a $90°$;

Secção meridional

Considere o cilindro abaixo, cortado por um plano que contém os centros de suas duas bases:



Essa secção feita no cilindro é dita uma ***secção meridional***. Um corte desses será dito meridional sempre que contiver os dois centros das bases.

Cilindros equiláteros

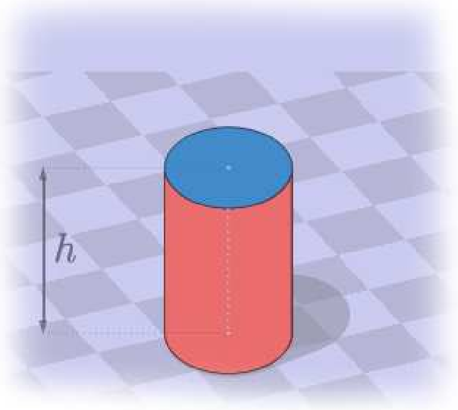
Essa definição é muito importante para o seu exame. Segue abaixo a definição:

Considere um cilindro reto de altura h e de raio da base R. Esse cilindro será dito equilátero quando $h = 2R$.

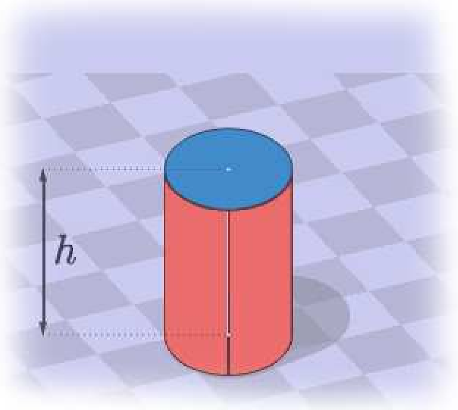
Isso acontece porque quando você realiza uma secção meridional num cilindro equilátero, a secção fica em formato de quadrado (que é um polígono equilátero).

Planificação

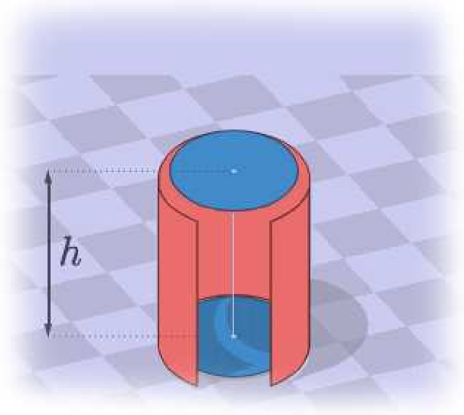
Considere novamente um cilindro reto como o abaixo.



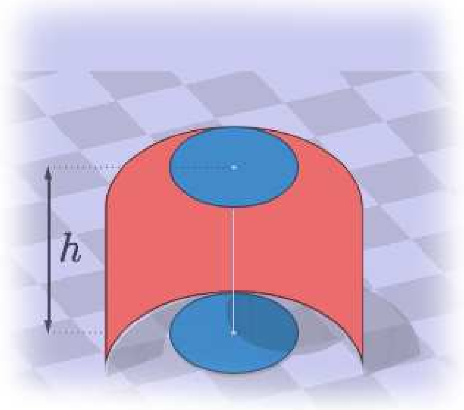
Farei uma série de alterações nesse cilindro a fim de planificá-lo. Vejamos. Primeiro, faço um corte na direção de uma de suas geratrizes, como abaixo:



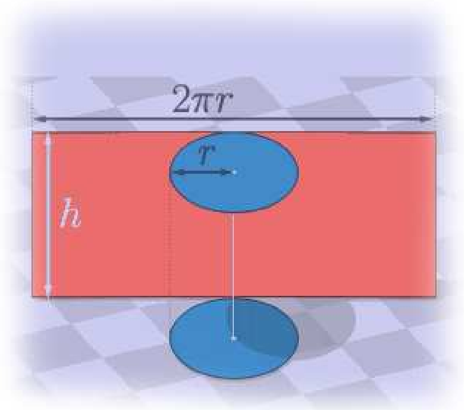
Agora, vou abri-lo um pouco para que você possa ir acompanhando aos poucos a sua planificação:



Você já consegue ver um retângulo se formando nessa planificação? Vamos abri-lo mais um pouco:



Agora acho que acabou o mistério, Já consegues ver que a sua planificação resultará em dois círculos e um retângulo, certo? Veja:



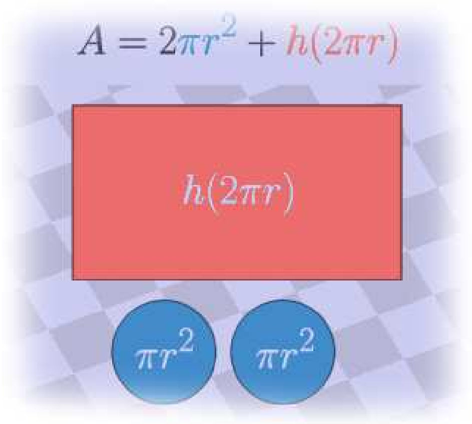
Perceba que o comprimento da base desse retângulo mede $2\pi r$, pois é o comprimento do círculo que há pouco envolvia, antes da planificação.

2.2– ÁREAS E VOLUME EM UM CILINDRO

Áreas

Antes de qualquer coisa, você se lembra de como se calcula a área de um círculo de raio r? Precisaremos utilizar esse conceito agora, vamos nos lembrar então que podemos calcular a área de um círculo de raio r pela expressão: $A = \pi r^2$. Agora, vamos ao raciocínio.

Perceba que, após a planificação, o nosso cilindro pode ser decomposto na figura abaixo:



Temos então que a área lateral desse cilindro é:

$$\boxed{S_\ell = 2\pi r h.}$$

Veja também que a área total é calculável por:

$$\begin{aligned} S_t &= S_\ell + 2 \cdot S_b \\ &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Colocando $2\pi r$ em evidência, temos finalmente que:

$$\boxed{S_t = 2\pi r(h + r).}$$

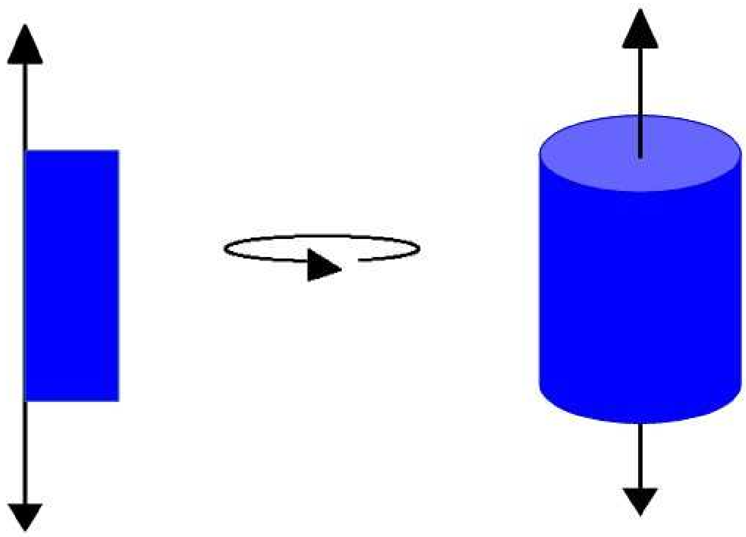
Volume

Análogo ao prisma, o volume de um cilindro pode ser calculado por $V = S_b \cdot h$. Porém, sabemos que a base de um cilindro é um círculo de raio r. Logo, podemos deduzir que o volume de um prisma de altura h e raio da base r é:

$$\boxed{V = \pi r^2 h.}$$

2.3– Cilindro de revolução

Para finalizarmos, considere um retângulo girando em torno de um de seus lados, como ilustra a figura a seguir:



Quando um retângulo realiza essa rotação, forma-se um cilindro denominado ***cilindro de revolução***. Perceba que a altura desse cilindro coincidirá com o lado em torno do qual rotacionou-se o retângulo. O outro lado desse retângulo será o raio da base desse cilindro reto.

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(EEAR-2001) QUESTÃO 30

A secção meridiana de um cilindro equilátero tem $4\sqrt{2}$cm de diagonal. O volume do cilindro, em cm^3, é de:

(a) 16π
(b) 24π
(c) 32π
(d) 54π

(EEAR-2001) QUESTÃO 31

Um cilindro circular reto tem o volume igual ao de um cubo de aresta a e a área lateral igual à área total do cubo. O raio e a altura desse cilindro medem, respectivamente:

(a) $\frac{a}{2}$ e $3\pi a$
(b) $\frac{a}{3}$ e $\frac{9a}{\pi}$
(c) $2a$ e $3\pi a$
(d) $3a$ e $\frac{9a}{\pi}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 32

Um tanque cilíndrico com água tem raio da base R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{9}{16}R$. O raio da esfera é

(a) $\frac{3}{4}R$
(b) $\frac{9}{16}R$

(c) $\frac{3}{5}R$
(d) $\frac{R}{2}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 33

A área da secção paralela ao eixo de um cilindro circular reto, de 8 m de altura e 1 m de raio, feita a $0,6$ m do eixo, em m^2, é

(a) $16,00$
(b) $12,80$
(c) $6,40$
(d) $8,60$

(EEAR-2002) QUESTÃO 34

A geratriz de um cilindro de revolução mede 10 cm. Qual o seu raio da base, sabendo-se que, aumentando-se esse raio em 10 cm e mantendo-se a altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro?

(a) $2,5$ cm
(b) $5\sqrt{2}$ cm
(c) 10 cm
(d) 20 cm

(EEAR-2002) QUESTÃO 35

Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de altura 6 m e raio da base 3 m. O nível da água nele contida está a uma distância do fundo do tanque igual aos $\frac{2}{3}$ da sua altura. Adotando-se $\pi = 3,14$, a quantidade de litros de água que o cilindro contém é

(a) 113010
(b) 113040
(c) 113050
(d) 113080

(EEAR-2003) QUESTÃO 36

Um barril, cuja forma é a de um cilindro reto, está repleto de vinho. Este vinho deve ser distribuído em copos cilíndricos de altura igual a $\frac{1}{8}$ da altura do barril, e de diâmetro da base igual a $\frac{1}{5}$ do diâmetro da base do barril. A quantidade de copos necessária para distribuir todo o vinho é

(a) 400
(b) 300
(c) 200
(d) 100

(EEAR-2004) QUESTÃO 37

Um vaso tem formato de um cilindro reto, de 16cm de altura interna e 6cm de diâmetro interno. Ele contém água até $\frac{1}{3}$ de sua altura. Acrescentando-se uma quantidade de água equivalente ao volume de uma esfera de 6cm de diâmetro, o nível da água subirá

(a) 3cm.
(b) 4cm.
(c) 5cm.
(d) 6cm.

(EEAR-2005) QUESTÃO 38

Num cilindro circular reto, o diâmetro da base mede 8cm e a geratriz, 10cm. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é

(a) 160π.
(b) 80π.
(c) 80.
(d) 40.

(EEAR-2005) QUESTÃO 39

Um prisma quadrangular regular esta circunscrito a um cilindro equilátero. Se a aresta da base do prisma mede 4cm, então o volume do cilindro, em cm^3, é:

(a) 16π.
(b) 12π.
(c) 8π.

(d) 4π.

(EEAR-2006) QUESTÃO 40

Um plano determina dois semicilindros quando secciona um cilindro reto de $2,5\,\text{cm}$ de altura e $4\,\text{cm}$ de diâmetro da base, passando pelos centros de suas bases. A área total de cada um desses semicilindros, em cm^2, é aproximadamente igual a

(a) 28.
(b) 30.
(c) 38.
(d) 40.

(EEAR-2007) QUESTÃO 41

O raio da base de um cilindro equilátero e a aresta de um cubo são congruentes. A razão entre as áreas totais do cilindro e do cubo é

(a) 2.
(b) 4.
(c) π.
(d) 2π.

(EEAR-2008) QUESTÃO 42

Um cilindro de cobre tem volume V, raio da base $R = 50\,\text{cm}$ e altura $H = 40\,\text{cm}$. Este cilindro será derretido para fazer cilindros de volume v, raio $r = \frac{R}{5}$ e altura $h = \frac{H}{4}$. Dessa forma, $\frac{V}{v} =$

(a) 50.
(b) 100.
(c) 150.
(d) 200.

(EEAR-2008) QUESTÃO 43

Um retângulo, de lados $2\,\text{m}$ e $5\,\text{m}$, gira $360°$ em torno de seu maior lado. A área lateral do sólido obtido, em m^2, é

(a) 10.
(b) 20.
(c) 10π.
(d) 20π.

(EEAR-2008) QUESTÃO 44

A diagonal da secção meridiana de um cilindro equilátero mede $10\sqrt{2}$cm. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é

(a) 250π.
(b) 200π.
(c) 100π.
(d) 50π.

(EEAR-2012) QUESTÃO 45

Um cilindro de altura $H = 5$cm e raio da base $R = 4$cm, tem volume $V =$ ____ πcm^3.

(a) 50
(b) 60
(c) 70
(d) 80

(EEAR-2013) QUESTÃO 46

Um cilindro equilátero cuja geratriz mede 8 cm, tem área lateral igual a ____ πcm^2.

(a) 128
(b) 64
(c) 32
(d) 16

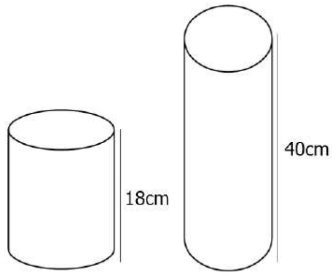
(EEAR-2015) QUESTÃO 47

Os especialistas alertam que é preciso beber, em média, 2 litros de água por dia. Isso equivale a 10 copos com capacidade de 200cm^3. Um copo cilíndrico com esta capacidade e 2cm de raio da base tem, aproximadamente, ____ cm de altura. (Considere $\pi = 3$)

(a) 17
(b) 18
(c) 19
(d) 20

(EEAR-2016) QUESTÃO 48

Um cilindro de 18cm de altura e raio da base igual a 5cm contém água até a metade de sua altura. Por algum motivo, houve necessidade de despejar essa água em um outro cilindro com 40cm de altura, cujo raio da base mede 4cm.



Considerando $\pi = 3$, o valor que mais se aproxima da altura atingida pela água no segundo cilindro é

(a) 14cm
(b) 16cm
(c) 20cm
(d) 24cm

(EEAR-2018) QUESTÃO 49

Um cilindro equilátero tem $196\pi \text{cm}^2$ de área lateral. O raio da base desse cilindro mede ____ cm.

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8

(EEAR-2019) QUESTÃO 50

Um cilindro circular reto, de altura igual a $\frac{2}{3}$ do raio da base e de $12\pi \text{cm}^2$ de área lateral, possui raio da base igual a ____ cm.

(a) 5
(b) 4
(c) 3
(d) 2

2.4– GABARITO

Q. 1: B	**Q. 11**: B	**Q. 21**: A	**Q. 31**: B	**Q. 41**: C
Q. 2: D	**Q. 12**: D	**Q. 22**: B	**Q. 32**: A	**Q. 42**: B
Q. 3: D	**Q. 13**: B	**Q. 23**: B	**Q. 33**: B	**Q. 43**: D
Q. 4: C	**Q. 14**: D	**Q. 24**: C	**Q. 34**: C	**Q. 44**: C
Q. 5: A	**Q. 15**: D	**Q. 25**: C	**Q. 35**: B	**Q. 45**: D
Q. 6: A	**Q. 16**: D	**Q. 26**: A	**Q. 36**: C	**Q. 46**: B
Q. 7: A	**Q. 17**: A	**Q. 27**: D	**Q. 37**: B	**Q. 47**: A
Q. 8: D	**Q. 18**: B	**Q. 28**: A	**Q. 38**: B	**Q. 48**: A
Q. 9: A	**Q. 19**: C	**Q. 29**: E	**Q. 39**: A	**Q. 49**: C
Q. 10: A	**Q. 20**: C	**Q. 30**: A	**Q. 40**: C	**Q. 50**: C