Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

AFA 2023

ELETROMAGNETISMO

AULA 05
ELETRODINÂMICA II

Prof. João Maldonado

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Introdução

Nessa aula daremos continuidade ao estudo de Eletrodinâmica, dirigindo nossos trabalhos para resistores e tipos de associação. Esse tema possui grande incidência.

Estude com calma a ponte de Wheatstone e suas variações. É muito comum vermos esse tema, das mais variáveis formas. Lembre-se que a ponte de Wheatstone não vai ser sempre bonitinha do jeito que é aprendido, na maioria das vezes os vestibulares mudam o seu formato para confundir o vestibulando. Estude também a ponte de fio, pois ela é uma versão muito útil da ponte de Wheatstone.

Além disso, vamos trabalhar caso especiais de associação de resistores. Estes temas não são comuns no ensino médio brasileiro, por isso pode ser novidade para você, assim como a transformação delta-estrela. Esses temas são mais importantes nos vestibulares do ITA e IME, mas auxiliam na resolução dos exercícios da EFOMM, AFA e EN. É desnecessário ficar expert nesses temas se você não vai prestar ITA e IME ok!

Os temas trabalhados nessa aula serão muito importantes para a próxima aula que é sobre resolução de circuitos elétricos.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@prof.maldonado

1. Resistores

Vimos na aula 17 o efeito Joule e suas aplicações em aquecimento. Além disso, existem diversas situações em que esse efeito é indesejável pois promove desperdícios de energia elétrica e pode danificar condutores ou outros elementos de um circuito.

Em algumas situações, é necessário conhecer bem a qualidade do condutor para minimizar o efeito Joule. Geralmente, quando deseja-se melhorar a condução e minimizar o aquecimento são utilizados excelentes condutores, como é o caso do cobre.

Entretanto, existem condutores que são fabricados com o intuito exclusivo de converter energia elétrica em energia térmica, isto é, com a finalidade de aproveitar ao máximo o efeito Joule. Chamamos esses condutores de **resistores**.

O filamento de uma lâmpada incandescente, aquecedores elétricos de ambiente, ferros elétricos de passar roupa, chuveiros elétricos, soldadores elétricos são exemplos comuns de resistores. Para proteger os circuitos e instalações elétricos utilizamos fusíveis – filamento que derrete após uma determinada corrente que provoca um superaquecimento por efeito Joule. Os fusíveis também são resistores.

Vimos na aula anterior que um resistor é representado pelo símbolo de sua resistência:

Figura 1: Simbologia de um resistor em um circuito elétrico.

Dessa forma, vamos trabalhar nessa aula como trabalhar com os resistores, associação de resistores e casos especiais, que tem aparecido cada vez mais difícil no ITA e no IME.

1.1. Potência dissipada num resistor

Como vimos, a potência dissipada em um bipolo elétrico é dada pela expressão $Pot = U \cdot i$. Contudo, usando a primeira Lei de Ohm nessa expressão, podemos encontrar outras fórmulas que agilizaram nossos cálculos, tudo vai depender do que é pedido pela questão.

1.1.1. Resistores em série – corrente constante

Considere a configuração de três resistores em série, como na figura abaixo:

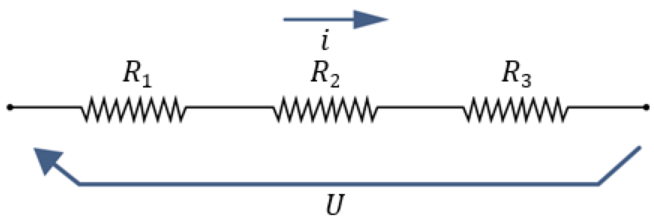


Figura 2: Três resistores conectados em série. A corrente que passa por eles é a mesma.

Neste caso, os três resistores são percorridos pela mesma corrente, basta lembrar do vimos em densidade de corrente. Dessa forma, se escrevermos a potência em função da corrente (que é a mesma para todos os resistores) e a resistência, podemos comparar a potência em cada resistor e teremos como avaliar aquele que dissipa maior resistência, por exemplo.

Para isso, basta combinar a primeira lei de Ohm e a potência dissipada por um bipolo, buscando deixar a resistência e a corrente na expressão da potência.

$$Pot = U \cdot i \text{ e } U = R \cdot i$$

Portanto:

$$Pot = (R \cdot i) \cdot i$$

$$\boxed{Pot = R \cdot i^2}$$

Ou seja, podemos dizer que:

$$\begin{cases} Pot_1 = R_1 \cdot i^2 \\ Pot_2 = R_2 \cdot i^2 \\ Pot_3 = R_3 \cdot i^2 \\ Pot_{Total} = R_{eq} \cdot i^2 \end{cases}$$

Em que $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$.

Com este resultado, podemos ver que o maior resistor dissipará a maior potência, já que a corrente que passa por todos é a mesma.

1.1.2. Resistores em paralelo – tensão constante

Considere a configuração de três resistores em paralelo, conforme a figura abaixo:

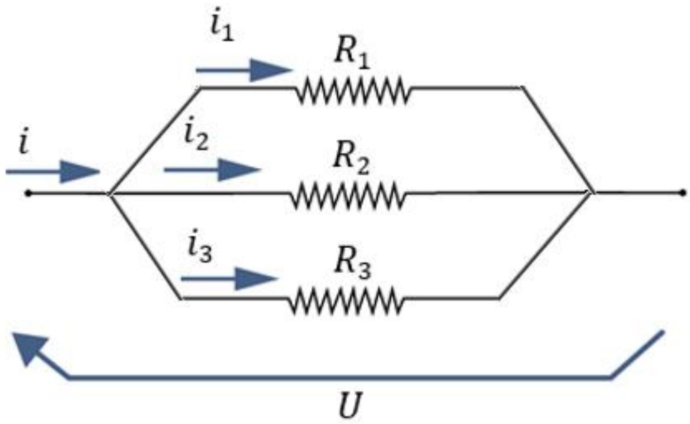


Figura 3: Resistores conectados em paralelo. A tensão eles estão sob a mesma diferença de potencial.

Note que neste tipo de configuração a ddp é a mesma nos três resistores. Por isso, é muito interessante encontrar uma expressão para a potência dissipada no resistor em que um dos termos seja a ddp U. Dessa forma, podemos combinar as equações da seguinte forma:

$$Pot = U \cdot i \text{ e } U = R \cdot i \text{ e } i = \frac{U}{R}$$

$$Pot = U \cdot \left(\frac{U}{R}\right) \Rightarrow \boxed{Pot = \frac{U^2}{R}}$$

Com esse resultado vemos que a potência é inversamente proporcional a resistência nesse caso. Portanto, o maior resistor dissipará a menor potência. Para cada um deles e para o circuito equivalente, temos:

$$\begin{cases} Pot_1 = \dfrac{U^2}{R_1} \\ Pot_2 = \dfrac{U^2}{R_2} \\ Pot_3 = \dfrac{U^2}{R_3} \\ P_{ot_{total}} = \dfrac{U^2}{R_{eq}} \end{cases}$$

Em que $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Como já vimos, por efeito Joule haverá uma dissipação de energia térmica quando o condutor é percorrido por uma corrente elétrica. Dessa forma, o resistor elevará a sua temperatura até uma um valor limite.

Considere um resistor à temperatura ambiente θ_0. Esse resistor é ligado a um gerador elétrico, estabelecendo nele uma corrente elétrica e, dessa maneira, a temperatura começa a se elevar.

Enquanto a temperatura do resistor aumenta, cresce o fluxo de calor do resistor para o ambiente (por condução, convecção ou radiação). Assim, se não houver uma fusão do resistor, sua temperatura irá se estabilizar num valor limite θ_{limite}, que é atingido quando a potência transferida para o ambiente se iguala à potência dissipada no resistor.

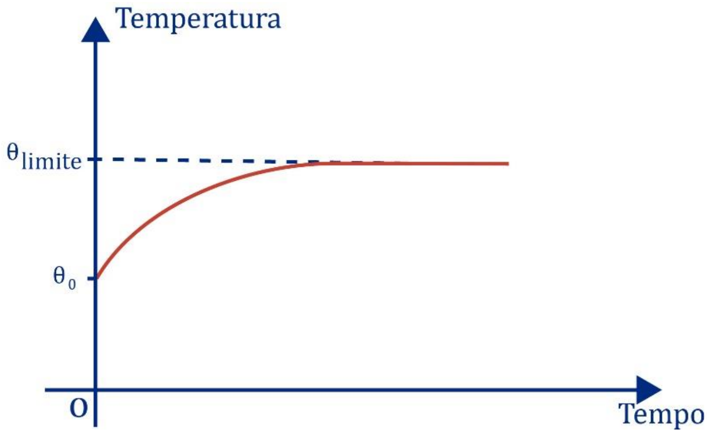


Figura 4: Gráfico da temperatura com o tempo em um resistor.

Assim, um chuveiro elétrico é projetado para que opere a uma temperatura inferior à temperatura de fusão do metal de que é feito. De forma análoga acontece com o filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente. Geralmente, a temperatura limite do filamento é situada perto de 2.500 °C, de tal maneira que a temperatura de fusão (3.380 °C) não é alcançada.

Por outro lado, os fusíveis são projetados para que a temperatura limite seja inferior à de fusão, quando a corrente elétrica tiver valores normais e seja superior à de fusão, quando houver corrente excessiva, derretendo o dispositivo neste último caso.

1.2. Segunda lei de ohm

Dando sequência aos seus trabalhos, George Ohm buscou identificar quais grandezas influenciariam a resistência elétrica e verificou que ela era função do material, do comprimento e da sua secção transversal.

Considere dois fios condutores de mesmo material e de mesma secção transversal, mas de comprimentos diferentes.

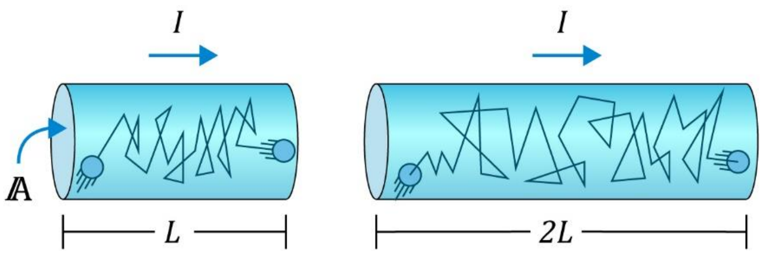


Figura 5: Movimento do elétron no interior de um condutor.

Podemos imaginar que a resistência ao fluxo de carga em um condutor é o resultado dos choques dos portadores de carga em movimento com os íons da rede cristalina. Quando se duplica o comprimento do filamento, o número de choques dobra. Assim, a resistência do condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento L. Ou seja:

$$R \propto L$$

Agora, vamos considerar um condutor do mesmo material, mas de secções transversais diferentes.

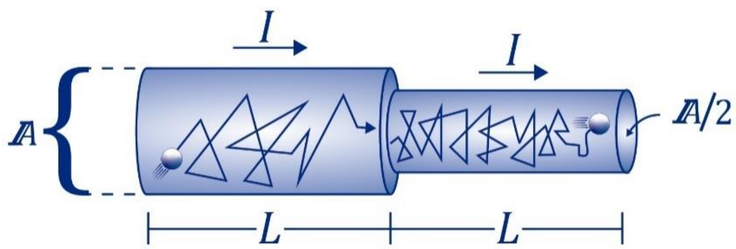


Figura 6: Condutor com área variável.

Podemos explicar a influência da secção transversal do condutor sobre sua resistência pelo fato de que ao diminuir a secção do condutor, o fluxo de elétrons com uma mesma intensidade de corrente será mais denso, quer dizer, passa mais carga e, por isso, os choques dos elétrons com as partículas da substância aumentam. Se a área reduz à metade, então a resistência dobra de valor, mostrando que é inversamente proporcional a área da secção transversal do condutor.

$$R \propto \frac{1}{A}$$

Por outro lado, a quantidade de elétrons livres e a estrutura da rede cristalina dependem da espécie do metal. Portanto, a resistência do condutor está intimamente ligada com a espécie da substância que o compõe. A magnitude que caracteriza a dependência entre a resistência do condutor e o tipo de material que está sendo empregado se denomina resistividade da substância e é representada pela letra grega ρ.

Portanto, a Segunda Lei de Ohm pode ser escrita como:

A resistência elétrica R de um condutor homogêneo de secção transversal uniforme é diretamente proporcional ao seu comprimento L, inversamente proporcional à área A de sua secção transversal e depende do material e da temperatura:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A}$$

Em que:

- ρ: resistividade elétrica $(\Omega \cdot m)$.
- L: comprimento do condutor (m).
- A: área da secção transversal (m^2).

Observação:

- Chamamos de condutividade elétrica de um material, simbolizada por σ, a grandeza física definida como o inverso da resistividade, ou seja:
$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$
- No SI, a unidade de σ é o **siemens por metro** (S/m):
$$\frac{1}{\Omega\, m} = \frac{\Omega^{-1}}{m} = \frac{S}{m}$$

1.3. Dependência da resistência com a temperatura

Em metais puros, ao se aumentar a temperatura, a resistividade também aumenta. Tal fato decorre do aumento das amplitudes de oscilação dos átomos que constituem o metal (aumenta o movimento caótico das partículas). Com isso, há um aumento da probabilidade de choques entre estes e os elétrons livres.

Quando esquentamos um condutor metálico, suas dimensões geométricas aumentam muito pouco e a resistência do condutor varia por causa da variação da resistividade (ρ). Experimentalmente, verifica-se que o aumento da resistividade é diretamente proporcional ao aumento de temperatura. Assim, podemos escrever que:

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Em que α é chamado de **coeficiente de temperatura** do material. Para alguns metais temos as seguintes curvas da resistividade em função da temperatura:

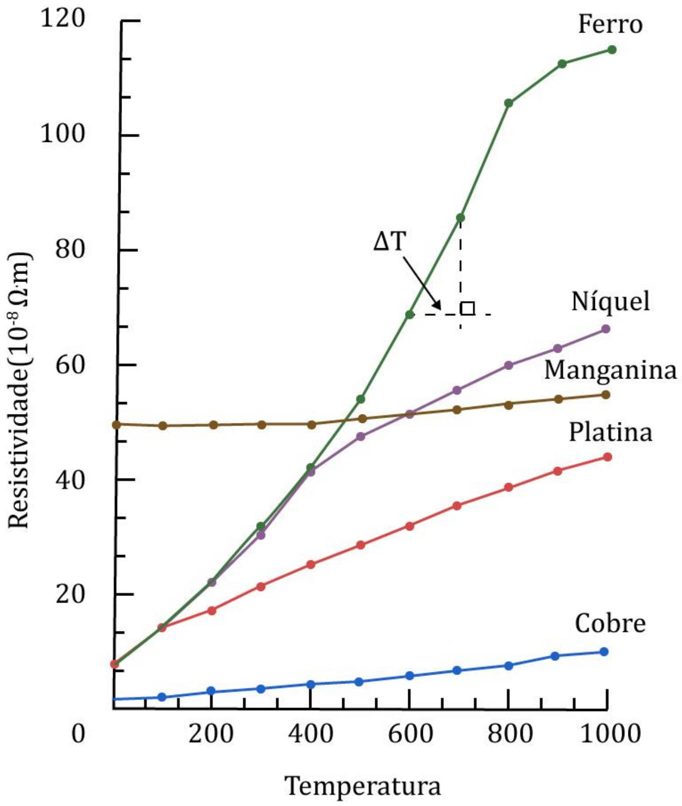


Figura 7: Gráfico da resistividade pela temperatura para algumas substâncias.

Como se pode notar cada metal possui a própria curva de resistividade elétrica. Então, para projetar um resistor que sofrerá variações em sua resistência com a temperatura, é necessário escolher o metal que melhor se encaixa com o comportamento desejado.

Em alguns semicondutores como a grafite, o silício e o germânio, a resistividade diminui ao se elevar a temperatura. Com o aumento da temperatura, algumas ligações são quebradas entre os átomos e, dessa forma, elétrons que participavam dessas ligações agora estão livres. Com isso, aumenta a quantidade de elétrons livres e o material torna-se mais condutor.

Em soluções eletrolíticas, a resistividade também diminui com a elevação da temperatura.

Além disso, existem algumas ligas de cobre, manganês e níquel, como a manganina mostrada no gráfico da figura 7, que possuem suas resistividades quase constantes com o aumento da temperatura.

Podemos resumir que:

Tipos de condutores	Resistividade (ρ)	Coeficiente de temperatura (σ)
Metais puros	$\rho > \rho_0$	$\alpha > 0$
Semicondutores	$\rho < \rho_0$	$\alpha < 0$
Algumas ligas metálicas	$\rho \cong \rho_0$	$\alpha \cong 0$

Podemos resumir, graficamente, da seguinte forma:

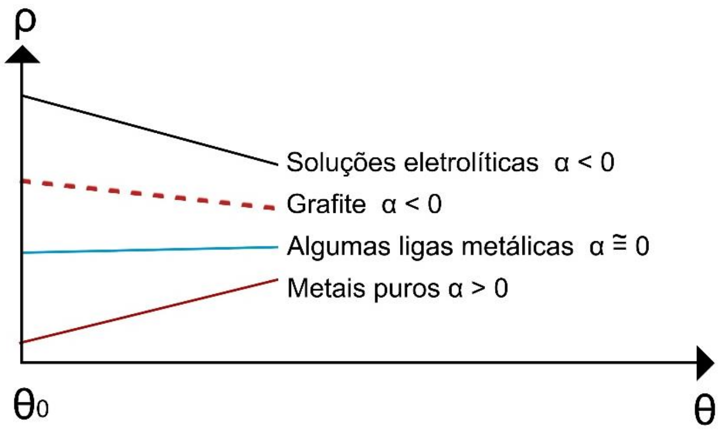


Figura 8: Gráfico dos tipos de curvas da resistividade com a temperatura, de acordo com o coeficiente de temperatura do material.

Se um resistor apresenta resistência elétrica R_0 a uma temperatura θ_0, e resistência R a uma temperatura θ. Desprezando os efeitos de dilatação térmica do material e levando em conta a lei de variação da resistividade do material, podemos dizer que:

$$\rho_0 = \frac{R_0 \cdot A}{l} \text{ e } \rho = \frac{R \cdot A}{l}$$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$\frac{R \cdot A}{l} = \frac{R_0 \cdot A}{l}(1 + \alpha \cdot (\theta - \theta_0) \Rightarrow \boxed{R = R_0\big(1 + \alpha \cdot (\theta - \theta_0)\big)}$$

1.4. Reostato

Chamamos de reostato o dispositivo eletrônico que possui resistência variável. Ele pode ser representado por dois tipos de símbolos:

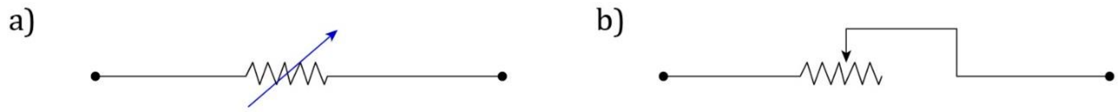


Figura 9: As duas simbologias de reostatos que são utilizadas em circuitos elétricos.

Um exemplo muito comum é o reostato de cursor, em que a variação da resistência elétrica é definida pela variação contínua do comprimento de um filamento condutor.

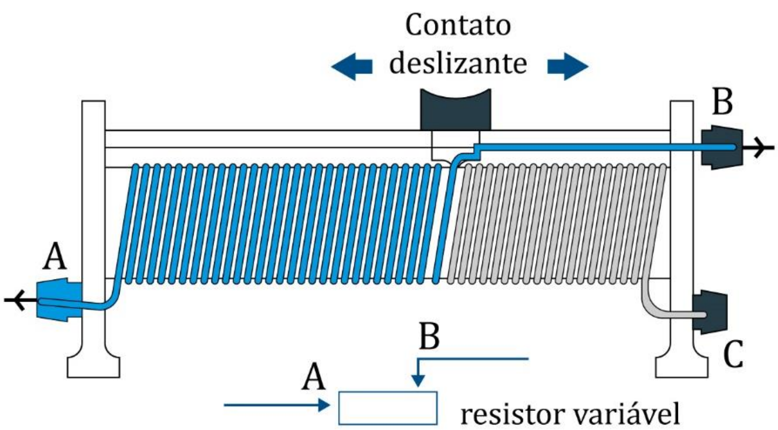


Figura 10: Esquema simplificado de um reostato de cursor.

Basicamente, ele utiliza a segunda lei de Ohm, já que a resistência é diretamente proporcional ao comprimento do fio:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

1. (ITA – 1989)

Com um certo material de resistividade elétrica ρ foi construída uma resistência na forma de um bastão de $5{,}0\ cm$ de comprimento e seção transversal quadrada de $5{,}0\ mm$ de lado. A resistência assim construída, ligada a uma tensão de $120\ V$, foi usada para aquecer água. Em operação, verificou-se que o calor fornecido pela resistência ao líquido em $10\ s$ foi de $1{,}7 \cdot 10^3\ cal$. Use: $1\ cal = 4{,}2\ J$.

a) Calcule o valor da resistividade ρ.

b) Quantos segundos seriam necessários para aquecer 1 litro de água da temperatura de 20 °C até 37 °C?

Observação: considere a resistividade do material e o calor específico da água constantes naquele intervalo de temperatura.

Comentários:

a)

A potência dissipada pelo material é igual ao calor fornecido ao líquido no referido intervalo de tempo:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{U^2}{R} = \frac{Q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{120^2}{R} = \frac{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2}{10} \Rightarrow R = \frac{120^2 \cdot 10}{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2}$$

Mas, pela segunda lei de Ohm, temos:

$$\rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{120^2 \cdot 10}{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2} \Rightarrow \rho = \frac{(5 \cdot 10^{-3})^2}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{120^2 \cdot 10}{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2}$$

$$\boxed{\rho = 0{,}01\ \Omega \cdot m}$$

b)

A quantidade de calor fornecida ao líquido será de:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

$$Q = 1000 \cdot 1 \cdot (37 - 20)$$

$$Q = 17000\ cal$$

Se em 10 segundos o calor fornecido pela resistência ao líquido foi de $1700\ cal$, então, para $17.000\ cal$ serão necessários $100\ s$.

2. (ITA – SP)

Um objeto metálico é colocado próximo a uma carga de $+0{,}02\ C$ e aterrado com um fio de resistência de $8\ \Omega$. Suponha que a corrente que passa pelo fio seja constante por um tempo de $0{,}1\ ms$ até o sistema entrar em equilíbrio e que a energia flanada no processo seja de 2 J. Conclui-se que, no equilíbrio, a carga no objeto metálico é:

a) $-0{,}02\ C$

b) $-0{,}01\ C$

c) $-0{,}005\ C$

d) $0\ C$

e) $+0{,}02\ C$

Comentários:

A potência dissipada no objeto metálico quando percorrido por uma corrente i é dada por:

$$P = R \cdot i^2$$

Além disso, sabemos que a potência pode ser escrita como a variação da energia no intervalo de tempo considerado. Ou seja:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Então:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = R \cdot i^2$$

A corrente que flui no condutor devido a indução é dada por:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Portanto:

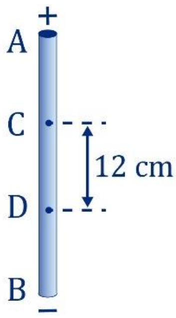
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = R \cdot \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)^2$$

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{\Delta E \cdot \Delta t}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{8}} = \sqrt{\frac{10^{-4}}{4}} = \frac{10^{-2}}{2} = 0{,}005\ C$$

Note que calculamos o módulo da carga, mas a carga que induziu é positiva, portanto, a carga no condutor deverá ser negativa. Logo, a alternativa correta é a letra C.

3.

As extremidades A e B de um fio condutor cilíndrico e homogêneo, de $30\ cm$ de comprimento, são ligadas numa bateria, submetendo-se a uma ddp igual a $6\ V$. Calcule:



a) a intensidade do campo elétrico no interior desse fio;

b) a ddp $V_D - V_C$, entre os pontos D e C.

Comentários:

a)

Considerando que o campo no interior do condutor será uniforme, podemos dizer que:

$$U = E \cdot d = V_A - V_B$$

$$6 = E \cdot 0{,}3 \Rightarrow \boxed{E = 20\,V/m}$$

b)

Dessa forma, a ddp entre os pontos D e C é dada por:

$$V_C - V_D = E \cdot d_{CD}$$

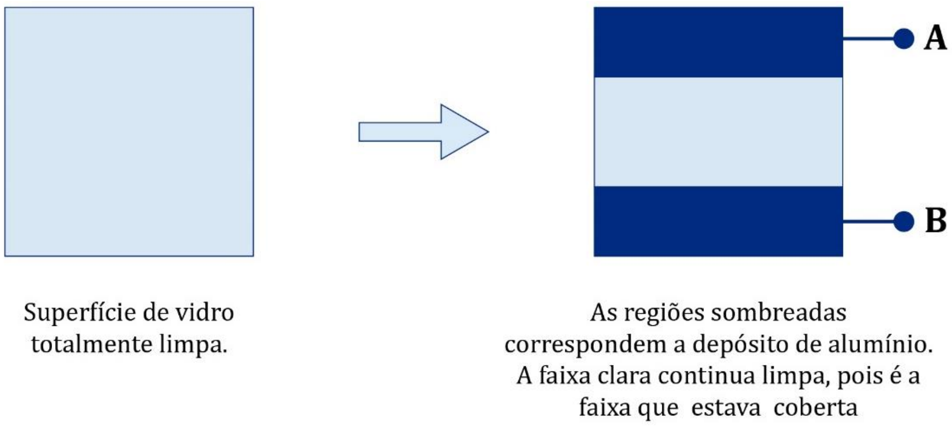
$$V_C - V_D = 20 \cdot 0{,}12 = 2{,}4\,V$$

Mas a ddp pedida é $V_D - V_C$, portanto:

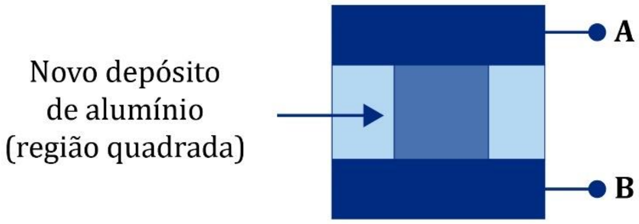
$$\boxed{V_D - V_C = -2{,}4\,V}$$

4. (Tópicos de Física)

Um experimentador deseja conseguir uma película de alumínio de espessura igual a $50\,\dot{A}$ ($1\,\dot{A} = 10^{-10}\,m$), através da evaporação desse metal sobre uma superfície limpa de vidro, situada num recinto onde se fez o vácuo. Inicialmente, o experimentador cobre uma faixa da superfície de vidro e deposita, por evaporação, uma espessa (muito mais que $50\,\dot{A}$) camada de alumínio no resto da superfície. Evidentemente, a faixa coberta continua limpa, sem alumínio.



Em seguida, cobrindo novamente e convenientemente a placa, inicia uma nova evaporação de alumínio numa faixa de mesma largura e perpendicular à que se deixou limpa:



À medida que se processa essa nova evaporação, o experimentador vai medindo a resistência elétrica entre os terminais A e B. Em qual valor da resistência ele deve interromper o processo, a fim de que a nova película depositada (região quadrada) apresente a espessura desejada ($50\ \dot{A}$)?

Dado: resistividade do alumínio na temperatura ambiente $= 2{,}83 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot m$.

Comentários:

A região quadrada tem resistência elétrica dada pela segunda lei de Ohm:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A_t}$$

Dado que ela é quadrada, então a área transversal é expressa por:

$$A_t = e \cdot L$$

Em que e é a espessura da camada de alumínio. Então:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{e \cdot L} \Rightarrow R = \frac{\rho}{e}$$

Substituindo os valores, temos:

$$R = \frac{2{,}83 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-10}} = 566\ \Omega$$

5.

Um filamento metálico é esticado de modo que seu comprimento triplique e o volume permanece inalterado. Qual deve ser a nova resistência do fio, se no início era R_0?

Comentários:

Antes e depois de esticar o fio, o volume será o mesmo. Então:

$$V_{antes} = V_{depois} \Rightarrow A_0 \cdot L_0 = A \cdot L$$

Mas o comprimento final é 3 vezes o inicial. Assim:

$$A_0 \cdot L_0 = A \cdot 3 \cdot L_0 \Rightarrow A = \frac{A_0}{3}$$

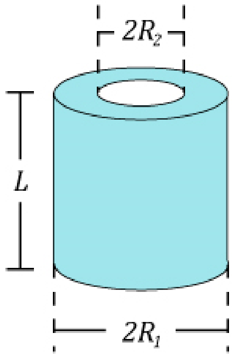
Pela segunda lei de Ohm, a resistência final é de:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} = \rho \cdot \frac{3 \cdot L_0}{\frac{A_0}{3}} = 9 \cdot \left(\rho \cdot \frac{L_0}{A_0}\right)$$

$$\boxed{R = 9 \cdot R_0}$$

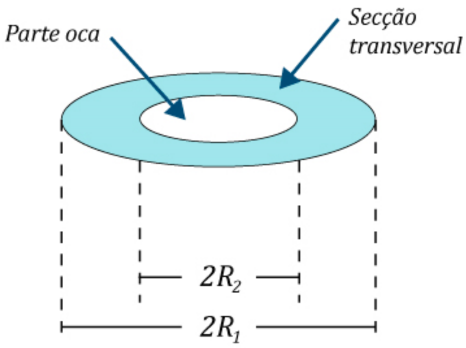
6.

Na figura temos um tubo condutor de raio externo R_1 e raio interno R_2, com comprimento L. Calcule a resistência elétrica do condutor, dado que sua resistividade elétrica é igual a ρ.



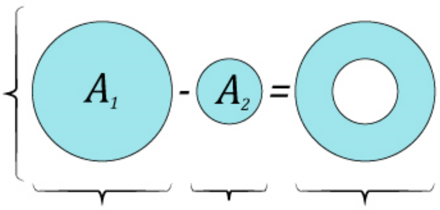
Comentários:

A resistência do condutor pode ser determinada pela segunda lei de Ohm.



Podemos superpor as áreas da seguinte forma:

$$A = \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)$$



$$\underbrace{A_1}\ -\ \underbrace{A_2}\ =\ \underbrace{A_{\text{secção transversal}}}$$

$$\pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)$$

Então:

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{L}{\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}}$$

2. Associação de resistores

É muito comum em circuitos elétricos a necessidade de determinar uma resistência que teria a mesma corrente quando submetido a mesma tensão.

Nessas ocasiões, a configuração dos resistores pode ser classificada em três categorias: série, paralela ou mista.

O resistor equivalente à associação é o único que, quando submetido à mesma ddp que a associação inicial, é atravessado pela mesma corrente.

2.1. Associação em série

Dizemos que dois ou mais resistores estão associados em série quando são interligados de tal modo que, ao serem percorridos por uma corrente elétrica, ela terá a mesma intensidade em todos eles.

Esquematicamente, temos que:

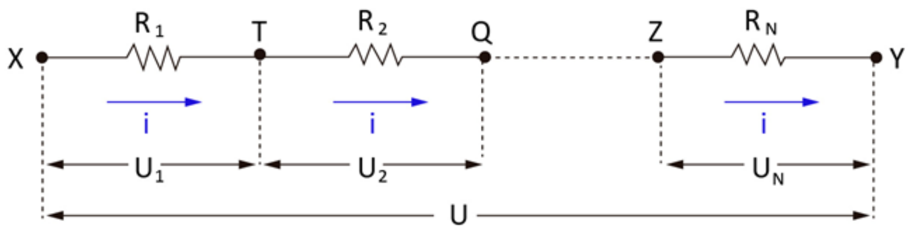


Figura 11: N resistores conectados em série são percorridos pela mesma corrente elétrica.

Como vimos em densidade de corrente, a corrente que passa pelos resistores, nessa configuração, será a mesma em todos os resistores. Portanto:

$$i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_n = i$$

Podemos substituir a associação de resistores logo acima por um resistor equivalente, tal que:

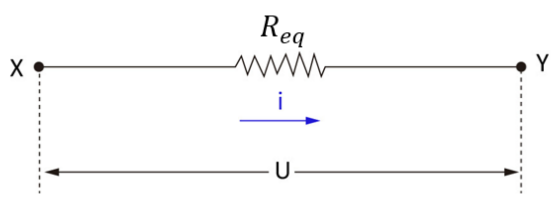


Figura 12: Pela primeira Lei de Ohm, quando o resistor equivalente é submetido à uma ddp U, a corrente percorrida nele é de mesma intensidade i.

Se denotarmos por $U_1, U_2, \ldots, U_N$ as ddp nos respectivos resistores, então temos que:

$$U_1 = V_X - V_T$$

$$U_2 = V_T - V_Q$$
$$\vdots$$
$$U_N = V_Z - V_Y$$

Somando membro a membro as ddp, chegamos em:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_N = V_X - V_Y$$

Note que $V_X - V_Y$ é a ddp entre os terminais X e Y da associação. Então:

$$\boxed{U_1 + U_2 + \cdots + U_N = U}$$

Como bem sabemos, a corrente elétrica vai do maior para o menor potencial. Assim, aplicando a primeira Lei de Ohm a cada um dos resistores associados e ao resistor equivalente, temos:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_N = U$$
$$R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + \cdots + R_N \cdot i = R_{eq} \cdot i$$
$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N}$$

Dizemos que a resistência elétrica R_{eq} é igual à soma das resistências elétricas dos resistores associados em série.

Observações:

i. Quando isolamos i nas equações da Lei de Ohm aplicada a cada resistor, chegamos que:

$$i = \frac{U_1}{R_2} = \frac{U_2}{R_2} = \cdots = \frac{U_N}{R_N}$$

Esse resultado mostra que a ddp está submetido o resistor é diretamente proporcional à sua resistência elétrica. Portanto, quem possui maior resistência elétrica terá a maior queda de tensão nele.

ii. Se as resistências dos resistores associados em série são iguais a R, então a resistência equivalente é dada por:

$$R_{eq} = n \cdot R$$

Nesse caso, cada resistor está submetido à mesma diferença de potencial, de tal maneira que:

$$U = n \cdot u$$

Um exemplo clássico de associação em serie é o reostato de pontos. Nele a resistência varia descontinuamente, pois à medida que chaveamos o reostato, sua resistência varia dependendo do posicionamento da chave:

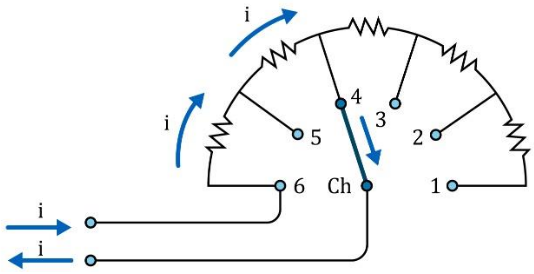
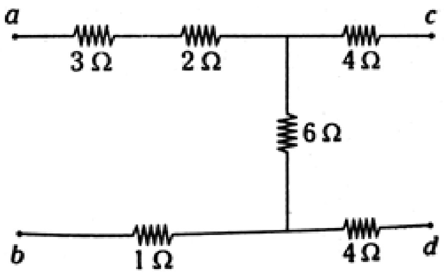


Figura 13: Esquema de um reostato de pontos.

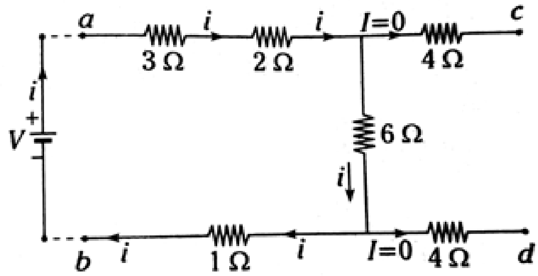
7.

Determine a resistência equivalente entre os pontos a e b, e entre os terminais c e d.



Comentários:

Para determinar a resistência equivalente entre a e b, devemos aplicar uma fonte entre estes pontos e analisar como se distribui a corrente no circuito, como na figura abaixo:

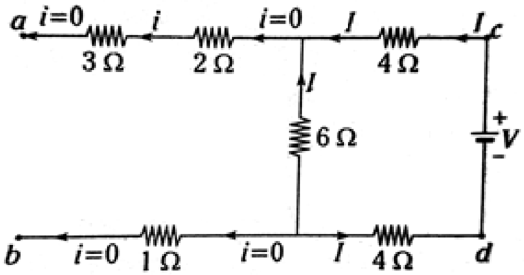


Como o circuito está aberto nos pontos c e d, nos dois resistores de $4\ \Omega$ não passa corrente elétrica ($i = 0$). Dessa forma, os resistores de $4\ \Omega$ podem ser retirados do circuito sem prejudicar o funcionamento do circuito.

Dessa forma, há corrente passando apenas nos resistores de $3\ \Omega$, $2\ \Omega$, $6\ \Omega$ e $1\ \Omega$. Note que esses resistores serão percorridos pela mesma corrente e estão em série. Portanto:

$$R_{eq_{ab}} = 3 + 2 + 6 + 1 = 12\ \Omega$$

Pela mesma linha de raciocínio, para determinar a resistência equivalente entre c e d, devemos colocar uma fonte entre esses pontos, como no circuito da figura abaixo:



Então, os pontos a e b estão abertos e não há corrente passando por eles. Assim, a corrente entre i deverá passar pelos resistores de $4\ \Omega$, $6\ \Omega$ e $4\ \Omega$, formando uma associação em série. Logo, a resistência equivalente entre c e d é dada por:

$$R_{eq_{cd}} = 4 + 6 + 4 = 14\,\Omega$$

2.2. Associação em paralelo

Dois ou mais resistores estão em paralelo quando seus terminais estão conectados nos mesmos pontos a e b, como mostrado na figura abaixo:

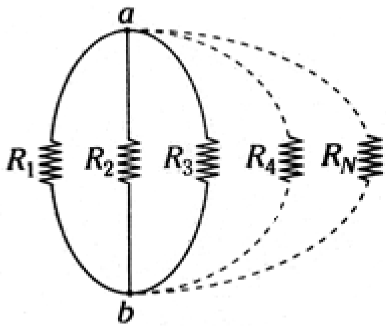


Figura 14: Associação de N resistores em paralelo. Eles estão submetidos a mesma diferença de potencial.

Se ligarmos três lâmpadas em paralelo a uma fonte de tensão, teremos que:

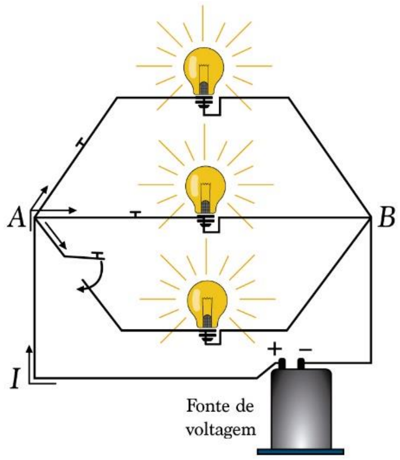


Figura 15: Circuito formado por três lâmpadas em paralelo.

Note que as três lâmpadas estão submetidas a mesma ddp da fonte. Como bem sabemos, a corrente irá se estabelecer do polo positivo (maior potencial) para o polo negativo (menor potencial). Entretanto, em cada lâmpada terá uma corrente determinada pelo valor de sua resistência:

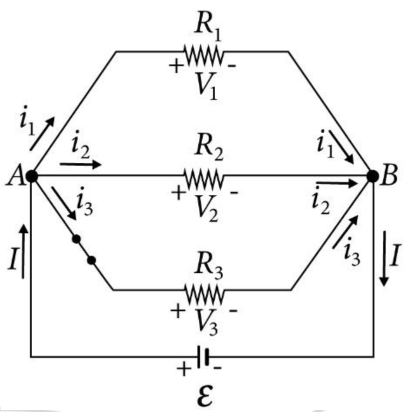


Figura 16: Representação do circuito formado pelas lâmpadas.

Esse tipo de configuração possui algumas características:

1. Os resistores estão conectados ao mesmo terminais, por isso eles estão submetidos a mesma diferença de potencial:
$$V_{AB} = V_1 = V_2 = V_3$$
2. A corrente I proveniente da fonte se divide no ponto A em três partes, isto é, se reparte para cada resistor.
$$I = i_1 + i_2 + i_3$$
Este fato pode ser explicado pela conservação da carga elétrica no condutor. A carga que flui pelos condutores não se acumula em nenhuma parte do condutor. Então, a quantidade de carga que chega em um segundo no ponto de ramificação A é a igual à quantidade de carga sai deste ponto em um segundo.

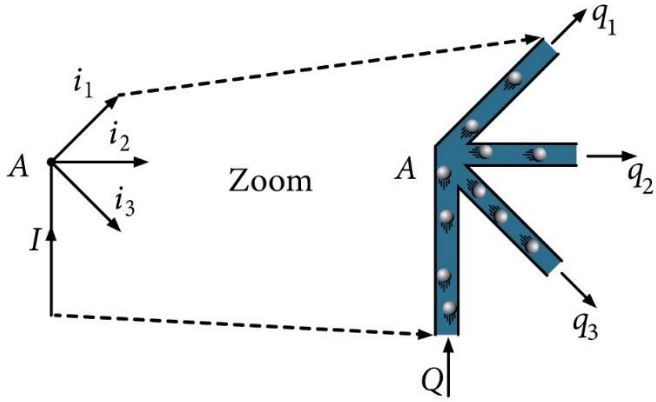


Figura 17: Ramificação da corrente elétrica em um nó.

Então:
$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$
$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{q_1}{\Delta t} + \frac{q_2}{\Delta t} + \frac{q_3}{\Delta t}$$
$$I = i_1 + i_2 + i_3 \ (eq. 1)$$
3. Aplicando a primeira Lei de Ohm para cada resistor, temos:
$$i_1 = \frac{V_{AB}}{R_1}; i_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}; i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}$$
Substituindo as correntes na equação 1, temos:
$$I = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3}$$
$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot V_{AB}$$
$$\frac{I}{V_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$
Note que $\frac{I}{V_{AB}}$ corresponde a $\frac{1}{R_{eq_{AB}}}$, no circuito das lâmpadas. Então:
$$\boxed{\frac{1}{R_{eq_{AB}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$
Embora fizemos para 3 lâmpadas (3 resistores), podemos aplicar a mesma ideia para n resistores e o resultado seria:
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

4. Se tivermos n resistores de resistência R em paralelo, então a resistência elétrica equivalente é dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{n}{R} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R}{n}}$$

Nessas condições, todos os resistores serão percorridos pela mesma corrente elétrica i. Então, se a corrente total é I, temos:

$$\boxed{i = \frac{I}{n}}$$

5. Como a corrente é inversamente proporcional à resistência, o ramo que tiver a maior resistência terá a menor corrente passando por ele. Pense sempre que a movimentação de cargas busca o caminho que oferece a menor resistência.
6. A resistência equivalente de uma associação em paralelo é sempre menor que a menor das resistências associadas.

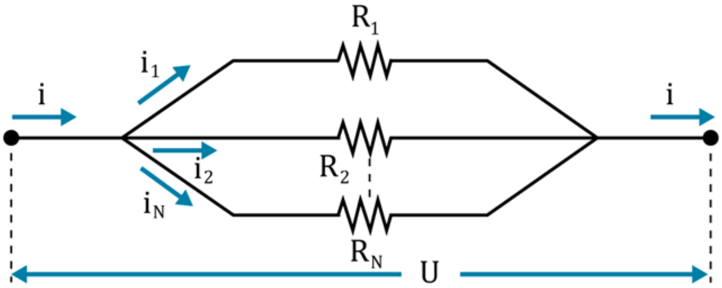


Figura 18: N resistores em paralelo.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Como todos os termos da equação são positivos, então:

$$\frac{1}{R_{eq}} > \frac{1}{R_1}; \frac{1}{R_{eq}} > \frac{1}{R_2}; \ldots; \frac{1}{R_{eq}} > \frac{1}{R_n}$$

Portanto:

$$R_{eq} < R_1; R_{eq} < R_2; \ldots; R_{eq} < R_n$$

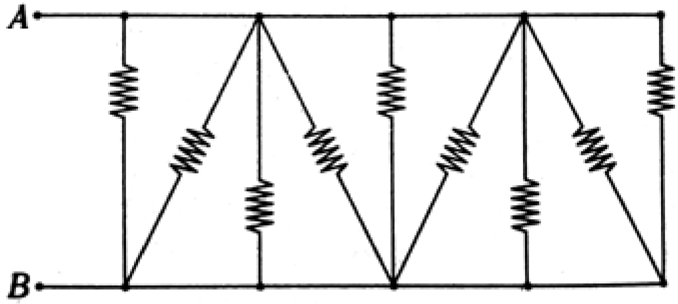
7. Uma regra prática simples para obter a resistência do resistor equivalente para associação de dois resistores em paralelo é a seguinte:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

Dizemos que a resistência do resistor equivalente é o produto pela soma dos dois resistores associados.

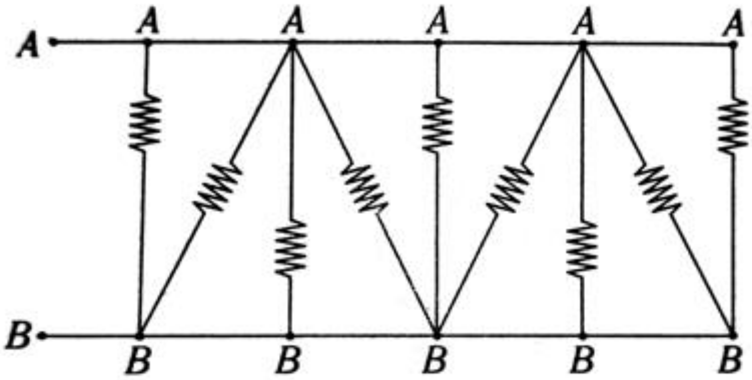
8.

Calcule a resistência equivalente entre A e B, se todos os resistores possuem resistência igual a R.



Comentários:

Nesse tipo de problema, é conveniente nomear os pontos da associaçao para verificar qual tipo de associação está em jogo. Deve-se levar em conta que se não existe resistência entre dois pontos de um condutor, estes pontos são equivalentes e recebem nomes iguais. Portanto:



Assim, verificamos que todos os resistores estão associados em paralelo entre os pontos A e B. Portanto, temos 9 resistores de resistências iguais a R conectados em paralelo. Logo:

$$R_{eq} = \frac{R}{9}$$

2.3. Fusível

Denominamos por fusível o dispositivo eletrônico que é associado em série a um circuito ou a um ramo de um circuito com a finalidade de protegê-lo. Basicamente, ele é um condutor feito de um material com baixo ponto de fusão (chumbo e estanho são ótimos materiais para fusíveis).

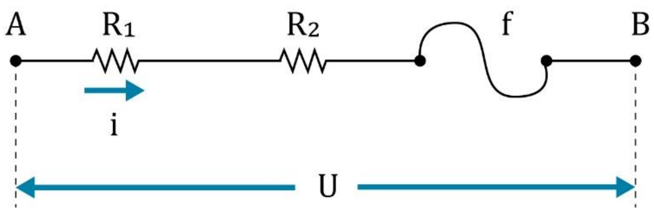


Figura 19: Desenho esquemático de um fusível no circuito composto de dois resistores em série.

Se o fusível é atravessado por uma corrente elétrica cuja intensidade é maior que um certo valor, ele se funde, interrompendo a passagem da corrente.

Um dos fusíveis mais utilizado em circuito elétrico de carros e em instalações elétricas (no quadro de entrada) é o fusível de cartucho.

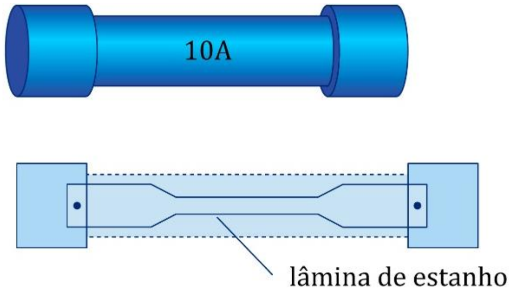


Figura 20: Exemplo de fusível de cartucho, vista em perspectiva e em corte.

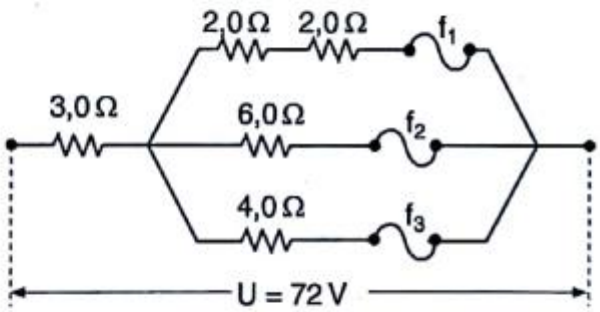
Geralmente, a intensidade da corrente máxima suportada pelo fusível vem registrada em sua superfície.

Note que uma vez fundido o fusível, ele deve ser descartado. Assim, surgiu a necessidade de desenvolver um dispositivo que apenas interrompesse a passagem de corrente elétrica, caso ela excedesse o valor desejado e, depois, quando a corrente se reestabelecer ao valor correto, ele fosse capaz de ser conectado novamente ao circuito.

Assim, foi criada os disjuntores, dispositivos capazes de interromperem automaticamente a passagem da corrente quando sua intensidade excede certo valor. Ele é baseado no efeito magnético da corrente elétrica e têm a vantagem da reutilização imediata após sanado o defeito que originou à sobrecarga da corrente.

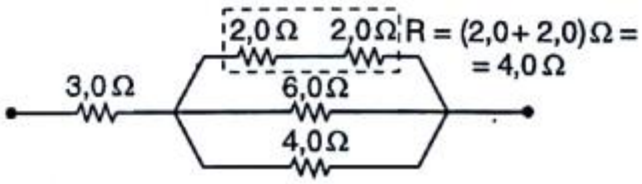
9.

A figura mostra uma associação de resistores mista e os fusíveis que suportam correntes máximas iguais a $5{,}0\ A$. Diga quais fusíveis se danificarão.

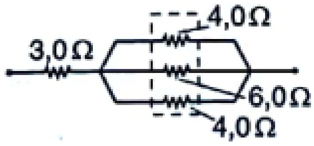


Comentários:

Inicialmente, devemos determinar qual a corrente total no circuito e a corrente que passa em cada resistor. Para isso, é necessário determinar a resistência equivalente. Note que os dois resistores de $2\ \Omega$ estão em série. Então:



Dessa forma, temos o seguinte circuito:



Portanto:

$$R_{eq} = 3,0 + 4,0//6,0//4,0$$

$$R_{eq} = 4,5\ \Omega$$

A corrente total que passa pelo circuito é de:

$$I = \frac{72}{4,5} = 16\ A$$

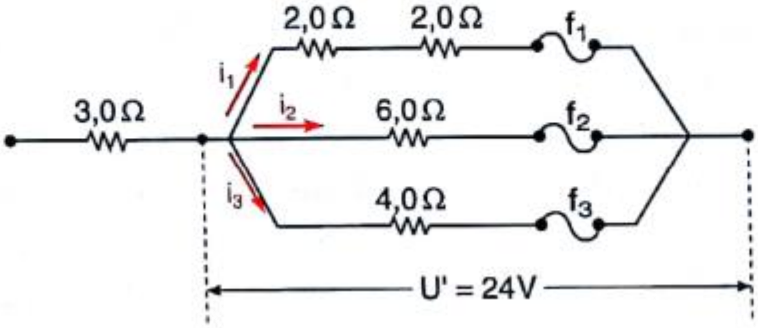
Logo, a ddp no resistor de 3 Ω é de:

$$U_1 = 3 \cdot 16 = 48\ V$$

Consequentemente, a ddp nos terminais em paralelo é de:

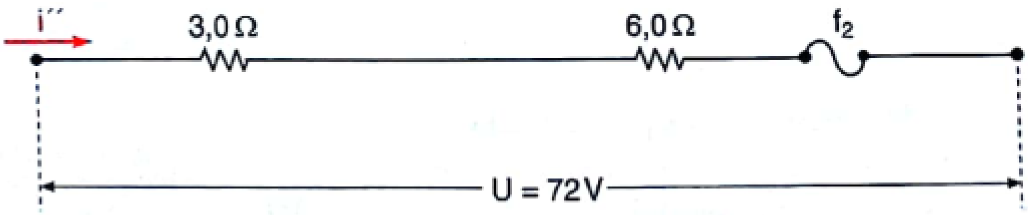
$$U_2 = 72 - 48 = 24\ V$$

Portanto, a corrente em cada ramo em paralelo é dada por:



$$i_1 = \frac{24}{4} = 6\ A;\ i_2 = \frac{24}{6} = 4\ A;\ i_3 = \frac{24}{4} = 6\ A$$

Como os fusíveis podem suportar até $5\ A$, então f_1 e f_3 se danificam. Quando f_1 e f_3 se danificam, o circuito fica aberto nesses ramos e agora temos uma nova configuração do circuito:



Agora, a nova corrente que passa por f_2 é dada por:

$$i'' = \frac{72}{3+6} = \frac{72}{9} = 8\ A$$

Novamente, a corrente é superior a aquela suportada pelo fusível f_2. Logo, ele também se danifica.

2.4. Curto-circuito

Quando ligamos um fio condutor de resistência desprezível aos terminais de um resistor, a ddp nos terminais desse resistor torna-se nula.

Esquematicamente:

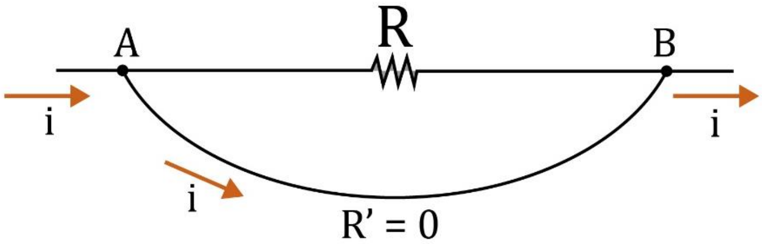


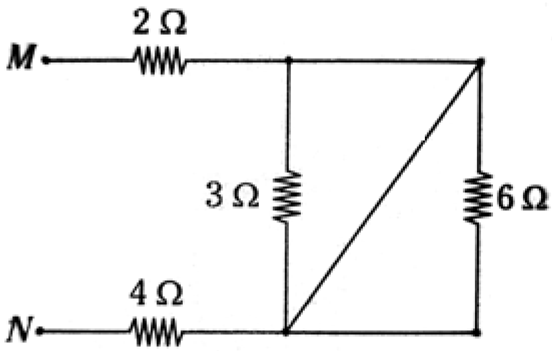
Figura 21: Representação de um resistor em curto-circuito.

Como a corrente elétrica busca o caminho de menor resistência, se o fio condutor ligado entre os terminais A e B tem resistência nula, então toda corrente passará por ele e não haverá corrente elétrica passando por R.

Assim, dizemos que o resistor R está em curto-circuito. Para efeitos práticos, é como se o resistor fosse retirado do circuito. Assim, podemos considerar que os pontos A e B ligados pelo condutor são coincidentes, já que eles possuem o mesmo potencial.

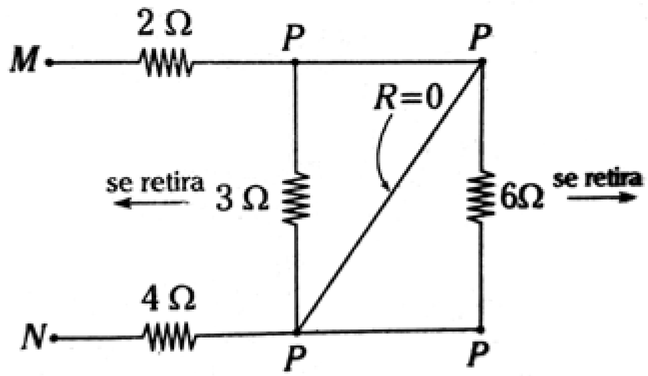
10.

Calcule a resistência equivalente entre os terminais M e N.

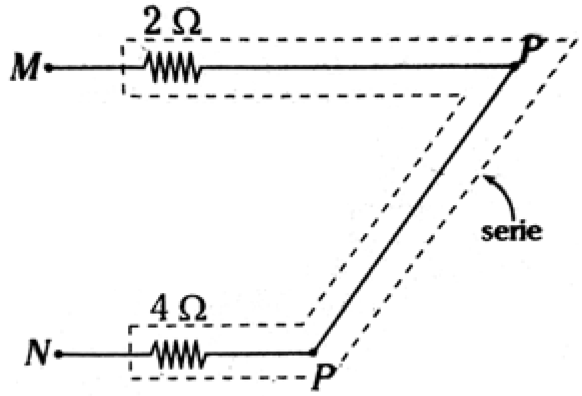


Comentários:

Nomeando os pontos que possuem o mesmo potencial, temos:



Note que os resistores de $3\ \Omega$ e de $6\ \Omega$ estão em curto-circuito. Portanto, eles podem ser retirados do circuito sem danificar a análise dele. Então:

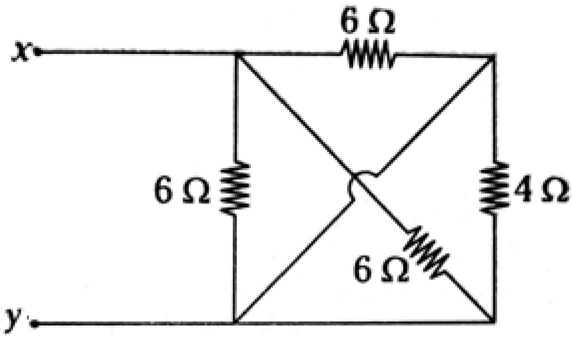


Com isso, o resistor equivalente entre os pontos M e N é de:

$$R_{eq_{MN}} = 2 + 4 = 6\ \Omega$$

11.

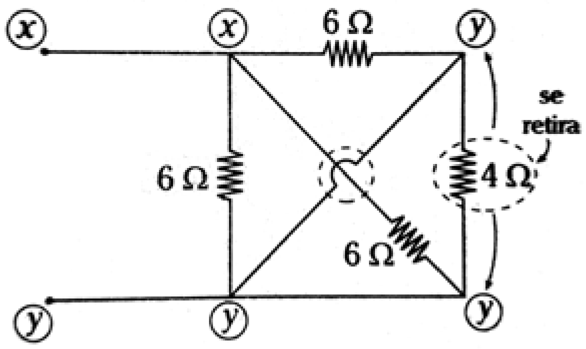
Calcule a resistência equivalente entre os terminais x e y.



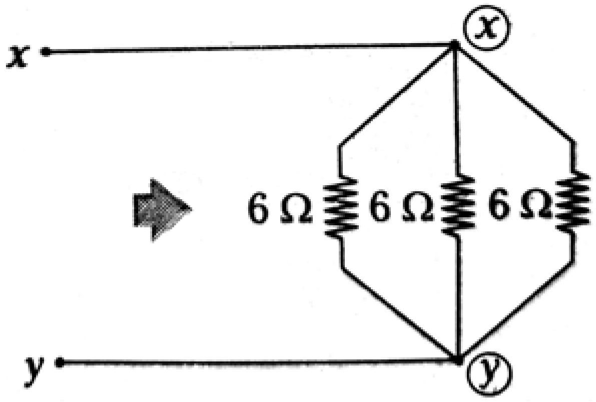
Comentários:

Quando queremos mostrar que um fio passa por outro sem haver contato, representamos pelo símbolo:

Assim, podemos nomear os pontos que possuem o mesmo potencial elétrico:



Podemos notar que o resistor de $4\ \Omega$ está curto-circuitado. Além disso, vemos que os demais resistores estão sofrendo a mesma diferença de potencial, já que seus terminais estão com os mesmos nomes. Então, o circuito é equivalente a:



Portanto:

$$R_{eq_{xy}} = \frac{6}{3} = 2\ \Omega$$

Com estes exercícios, vemos um padrão para resolver problemas que envolvam associação de resistores:

1) Nomeie os pontos com os mesmos potenciais e pontos com diferentes potenciais adiciona um novo nome.

2) Redesenhe o seu circuito colocando de tal forma que você possa enxergar melhor a disposição das conexões, destacando os pontos onde você deseja calcular a resistência equivalente.

3) Simplifique seu circuito até chegar no único resistor entre os pontos desejado.

2.5. Aparelhos para medidas elétricas

Chamamos de amperímetro o instrumento utilizado para medir a intensidade de corrente e voltímetro o aparelho destinado para medir a diferença de potencial (ddp) entre dois pontos do circuito.

Obviamente, quando colocamos um instrumento de medida, desejamos que ele meça a grandeza física desejada sem alterar as configurações do circuito. Entretanto, essa condição é meramente teoria, ideal, já que os aparelhos de medidas elétricas são constituídos por condutores se torna inevitável que, quando adicionados a um circuito, os aparelhos não causem interferências nos valores buscados.

Chamamos de amperímetro e de voltímetro ideal aqueles que não causam alterações quando inseridos no circuito.

O ***amperímetro*** é um aparelho que deve ser ***associado em série*** com o elemento do circuito ou no trecho do circuito em que se deseja ***medir a corrente*** que por ali passa, pois o aparelho deve ser atravessado pela corrente.

Dessa forma, para que o amperímetro não altere a medição desejada, ele deve possuir resistência interna nula ($\boldsymbol{R_A = 0}$). Obviamente, pela primeira lei de Ohm, a ddp entre os terminais deste aparelho deve ser nula também. Esquematicamente:

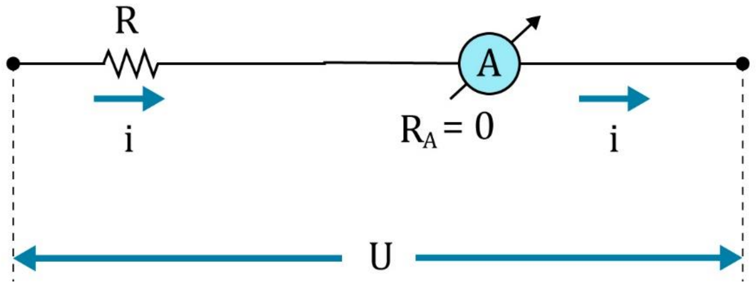


Figura 22: O amperímetro deve ser associado em série no local onde deseja-se medir a intensidade da corrente. Se o amperímetro é ideal, sua resistência elétrica deve ser praticamente zero e considerada nula.

O ***voltímetro*** é um aparelho que deve ser ***associado em paralelo*** entre os pontos nos quais deseja-se ***medir a ddp***. Assim, para não desviar nenhuma corrente para o voltímetro, temos que sua resistência deve ser muito alta, isto é, $\boldsymbol{R_V} \to \infty$. Esquematicamente:

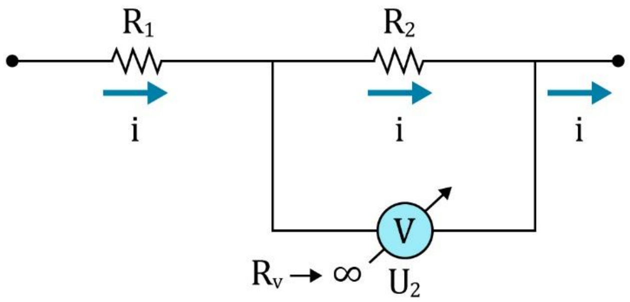


Figura 23: Voltímetro ideal (resistência muito alta), ligado em paralelo ao resistor R_2, medindo a ddp entre os terminais deste resistor, sem desviar corrente que passa em R_1 e em R_2.

Na prática, os amperímetros e os voltímetros não são ideais, isto é, eles possuem uma pequena resistência (amperímetro) e a resistência não é infinita (voltímetro). Entretanto, um bom amperímetro tem resistência elétrica muito pequena, da ordem de $10^{-1}\ \Omega$, e um bom voltímetro deve ter resistência da ordem de $10^4\ \Omega$.

Em muitos exercícios de vestibulares, os aparelhos de medidas são ideais. Somente quando mencionado ou em casos que levando a suspeita sobre a idealidade dos aparelhos que se deve levar em conta como instrumentos reais, alterando a forma de trabalhar com o circuito. Fique tranquilo, trabalharemos todos os tipos de problemas.

Em alguns problemas surge o termo **galvanômetro**, que é um instrumento análogo ao amperímetro, mas utilizado para medir correntes muito pequenas.

2.6. Ponte de wheatstone

Trata-se de uma associação especial de resistores, que tem a sua utilidade prática quando ela está equilibrada. Embora tenha sido idealizada por S. H. Christie no ano de 1833, ela foi usada nas condições de equilíbrio elétrico por Charles Wheatstone com a finalidade de determinar o valor de uma resistência desconhecida, tendo conhecimento do valor das outras três resistências.

Na configuração de uma ponte Wheatstone, R_1 e R_4 são resistências conhecidas, R_3 é variável, porém conhecida, e R_2 é uma resistência desconhecida, que desejamos encontrar seu valor. É muito importante a presença de um galvanômetro ligando os pontos C e D, pois ele indicará uma condição crucial para o equilíbrio da ponte. Esquematicamente, temos:

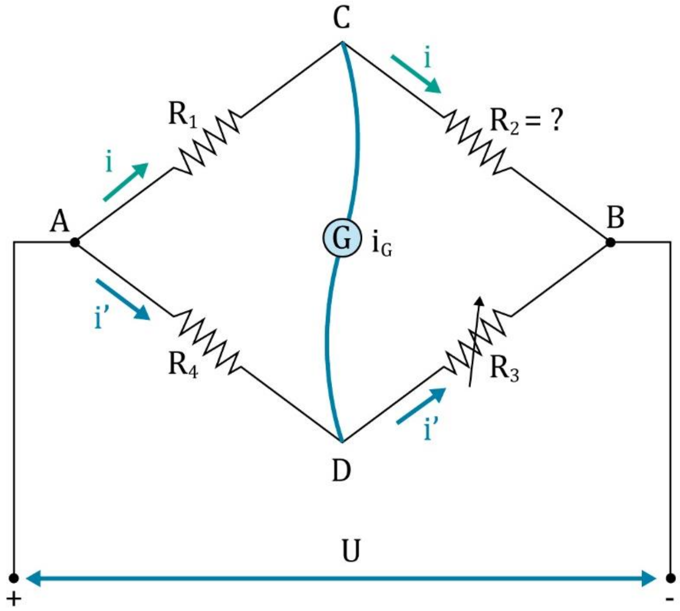


Figura 24: Representação esquemática de uma ponte de Wheatstone.

Para determinar R_2, devemos variar R_3 até que a corrente que passa pelo galvanômetro seja nula. No momento que isto acontecer, os potenciais em C e D serão iguais ($V_C = V_D$) e podemos dizer que a ponte está em ***equilíbrio***.

Quando a ponte está equilibrada, ou seja, não há corrente passando pelo galvanômetro, R_1 e R_2 são percorridas por uma mesma corrente i, ao passo que R_4 e R_3 são percorridas por uma mesma corrente i'.

Aplicando a primeira Lei de Ohm em cada resistor, temos:

$$\begin{cases} U_{AC} = R_1 \cdot i \\ U_{AD} = R_4 \cdot i' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A - V_C = R_1 \cdot i \\ V_A - V_D = R_4 \cdot i' \end{cases}$$

Na condição de equilíbrio, $i_G = 0$ e $V_C = V_D$, então:

$$R_1 \cdot i = R_4 \cdot i' \ (eq. 1)$$

Para os outros dois resistores, temos:

$$\begin{cases} U_{CB} = R_2 \cdot i \\ U_{DB} = R_3 \cdot i' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_C - V_B = R_2 \cdot i \\ V_D - V_B = R_3 \cdot i' \end{cases}$$

Novamente, pela condição de equilíbrio, $i_G = 0$ e $V_C = V_D$, obtemos:

$$R_2 \cdot i = R_3 \cdot i' (eq. 2)$$

Dividindo membro a membro a equação 1 pela equação 2, vem:

$$\frac{R_1 \cdot i}{R_2 \cdot i} = \frac{R_4 \cdot i'}{R_3 \cdot i'} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

$$\therefore \boxed{R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4}$$

Com este resultado, podemos concluir que:

Em uma ponte de Wheatstone equilibrada, os produtos das resistências de ramos opostos são iguais:

$$\boxed{R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4}$$

Assim, conhecendo R_1, R_3 e R_4, você é capaz de determinar R_2 que era desconhecida.

Para proporcionar melhor precisão às medidas, é utilizada uma variação da ponte de Wheatstone conhecida como ponte de fio. Para isso, basta substituir dois dos resistores por um fio homogêneo AB, de secção transversal uniforme, como na figura ao lado:

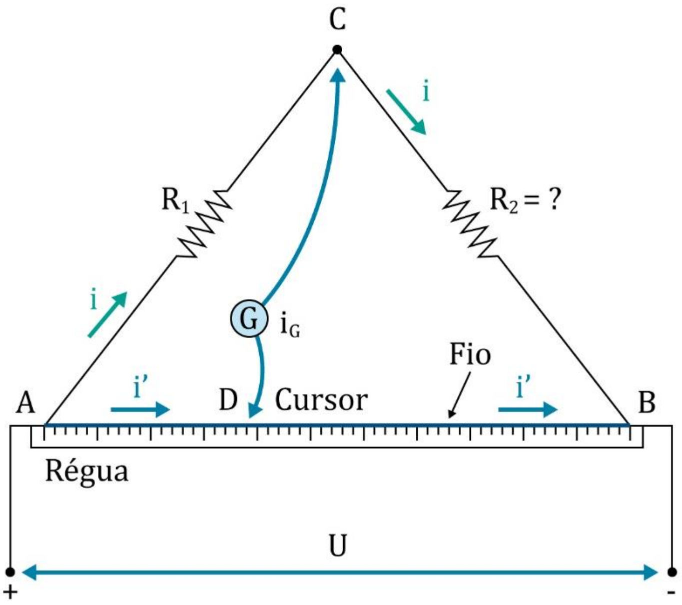


Figura 25: Representação esquemática de uma ponte de fio.

Nesse caso, R_1 é conhecida, R_2 é desconhecida, mas R_3 e R_4 são determinadas pelos trechos dos fios, de acordo com a segunda Lei de Ohm. Para determinar o valor de R_2, desliza-se o cursor ao longo do fio até que o galvanômetro não indique nenhuma corrente passando por ele, isto é, $i_G = 0$ (ponte equilibrada). Nesse caso, temos que:

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$$

Mas, pela segunda Lei de Ohm, R_3 e R_4 são diretamente proporcionais aos comprimentos $\overline{DB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. Então:

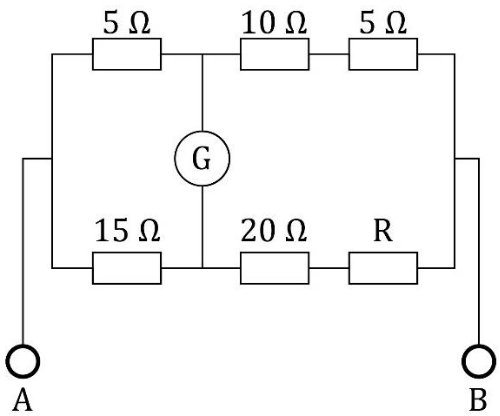
$$R_1 \cdot \rho \cdot \frac{\overline{DB}}{A} = R_2 \cdot \rho \cdot \frac{\overline{AD}}{A}$$

$$\therefore \boxed{R_2 = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} \cdot R_1}$$

Perceba a praticidade nesse método, pois basta medir $\overline{DB}$ e $\overline{AD}$, sabendo o valor de R_1, e o valor de R_2 é facilmente determinado.

12. (Mackenzie – SP)

No circuito abaixo, a ddp entre os terminais A e B é de 60 V e o galvanômetro G acusa uma intensidade de corrente elétrica zero. Se a ddp entre os terminais A e B for duplicada e o galvanômetro continuar acusando zero, podemos afirmar que:



a) a resistência R permanecerá constante e igual a $25\ \Omega$.

b) a resistência R permanecerá constante e igual a $15\ \Omega$.

c) a resistência R permanecerá constante e igual a $10\ \Omega$.

d) a resistência R, que era de $25\ \Omega$, será alterada para $50\ \Omega$.

e) a resistência R, que era de $50\ \Omega$, será alterada para $12{,}5\ \Omega$.

Comentários:

Na primeira condição, ddp igual a $60\ V$, vemos que a ponte está equilibrada, já que a corrente é nula pelo galvanômetro. Então:

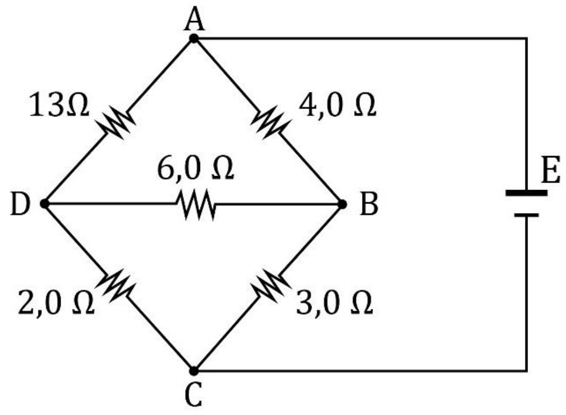
$$5 \cdot (20 + R) = 15 \cdot (10 + 5) \Rightarrow 5 \cdot (20 + R) = 3 \cdot 5 \cdot 15$$

$$20 + R = 45 \Rightarrow \boxed{R = 25\ \Omega}$$

Perceba que essas relações entre as resistências determinam a condição de equilíbrio na ponte, independentemente do valor de tensão entre os pontos A e B. Portanto, ao dobrar a ddp entre A e B, o valor de R permanecerá o mesmo e ele é igual a $25\ \Omega$. Gabarito A.

13. (FAAP – SP)

No circuito indicado na figura a intensidade da corrente no gerador é $I = 7{,}0\ A$ e no ramo AB é $I_1 = 5{,}0\ A$. Calcule a tensão entre os terminais do gerador ideal.



Comentários:

Se a corrente que chega ao ponto A é de 7,0 A e a corrente no ramo AB é de 5,0 A, então a corrente no AD é igual 2,0 A. Dessa maneira, a queda de tensão no ramo AD e no ramo AB são dadas por:

$$U_{AD} = V_A - V_D = 13 \cdot 2{,}0 = 26\ V$$

$$U_{AB} = V_A - V_B = 4 \cdot 5{,}0 = 20\ V$$

Fazendo uma menos a outra, temos:

$$V_A - V_D - (V_A - V_B) = 26 - 20$$

$$\boxed{V_B - V_D = 6\ V}$$

Ou seja, a corrente que passa pelo resistor de 6 Ω, temos:

$$V_B - V_D = 6 \cdot i' = 6$$

$$\therefore i' = 1{,}0\ A$$

Note que $V_B > V_D$, já que $V_B - V_D = +6\ V$. Então a corrente no resistor de 6 Ω vai de B para D.

Logo, chega ao nó D 2,0 A do ramo AD e 1,0 A do ramo BD. Assim, a corrente pelo ramo DC é de $2{,}0 + 1{,}0 = 3{,}0\ A$. Com isso, a diferença de potencial entre os terminais do resistor deste ramo é de:

$$V_D - V_C = 2{,}0 \cdot 3{,}0 = 6{,}0\ V$$

Portanto, a diferença de potencial da fonte E é de:

$$E = V_A - V_C = (V_A - V_D) + (V_D - V_C) = 26 + 6 = 32\ V$$

Perceba que a corrente que chega ao nó B por AB é de 5,0 A. Como sai 1,0 A para o ramo BD, então deverá ir 4,0 A para o ramo BC. Logo, a tensão neste ramo é de:

$$V_B - V_C = 3{,}0 \cdot 4{,}0 = 12\ V$$

Apenas para verificação, note que:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) = 20 + 12 = 32\ V = E$$

Poderíamos ter escolhido qualquer um dos dois caminhos. Note ainda que a ponte de Wheatstone apresentada nesse exercício não está equilibrada, pois:

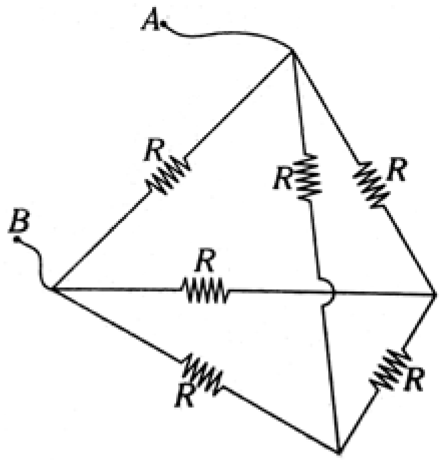
$$13 \cdot 3{,}0 \neq 2{,}0 \cdot 4{,}0$$

$$i_{6\,\Omega} = 1{,}0\ A$$

Por isso, foi uma informação muito valiosa ele ter mencionado os valores das correntes. Mais a frente veremos uma técnica de transformação de circuito delta-estrela que será útil em algumas ocasiões.

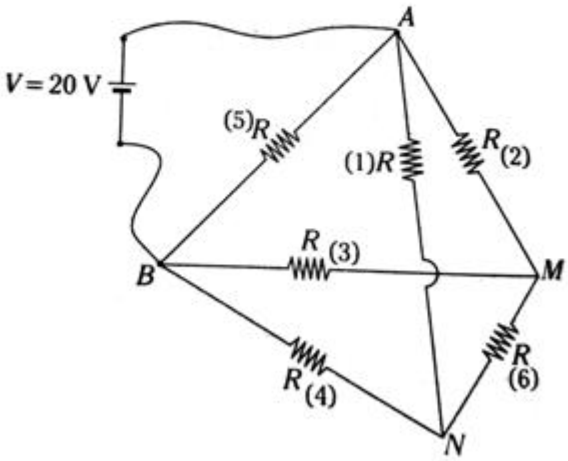
14.

Se uma bateria de 20 V é conectada nos terminais A e B, determine a corrente que atravessa a bateria.

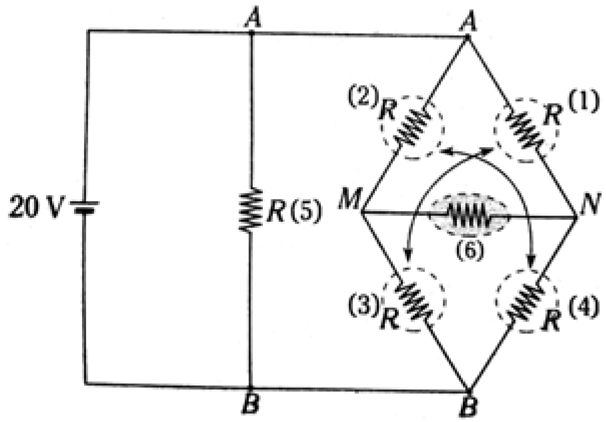


Comentários:

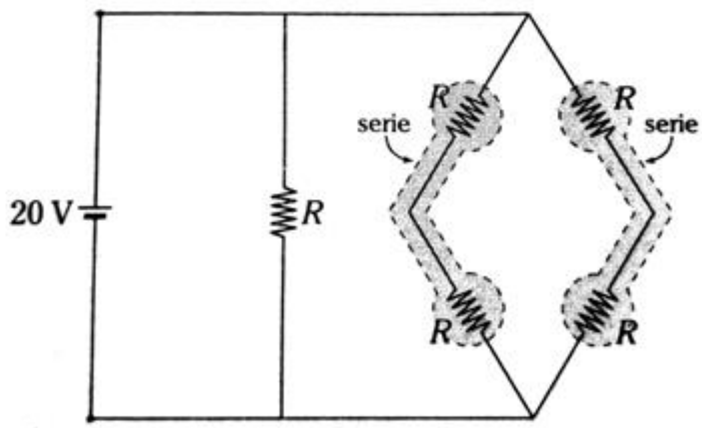
Conectando o sistema resistivo aos terminais da fonte e nomeando os nós, temos:



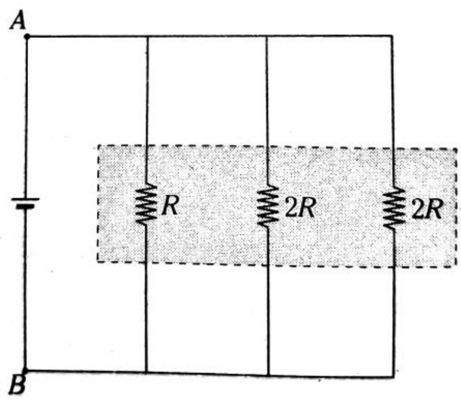
Se rearranjarmos o circuito, notaremos que se trata de uma ponte de Wheatstone equilibrada:



Como o produto das resistências dos ramos opostos são iguais, então a corrente que passa por 6 é nula e ele pode ser removido do circuito. Então, teremos uma nova configuração:



Dessa forma, temos a seguinte associação mista:



Logo, temos que:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = 10\ \Omega}$$

Pela primeira Lei de Ohm, a corrente que atravessa a fonte é de:

$$U = R_{eq} \cdot i \Rightarrow 20 = 10 \cdot i \Rightarrow \boxed{i = 2\ A}$$

2.7. Associações especiais

2.7.1. Transformação delta-estrela ($\Delta - Y$)

Vimos anteriormente a ponte de Wheatstone equilibrada, onde a corrente pelo resistor central na ponte era nula. Determinamos a relação entre as resistências para a condição de equilíbrio e mostramos como trabalhar com o circuito após a retirada do resistor central.

No exercício resolvido de número 13, mostramos um caso em que a ponte não está equilibrada, pois não há igualdade entre os produtos das resistências nos ramos opostos. Para resolver a questão de forma mais fácil, o enunciado forneceu uma dica valiosíssima – os valores das correntes em alguns resistores.

Entretanto, é comum nos vestibulares do ITA e do IME não aparecer essa dica e o candidato saber trabalhar com essa associação de resistores que não está em série e não está em paralelo, em uma ponte não equilibrada.

Para isso, vamos desenvolver uma técnica para transformar esse circuito resistivo em um mais fácil de resolver. Para isso, considere o circuito da figura abaixo:

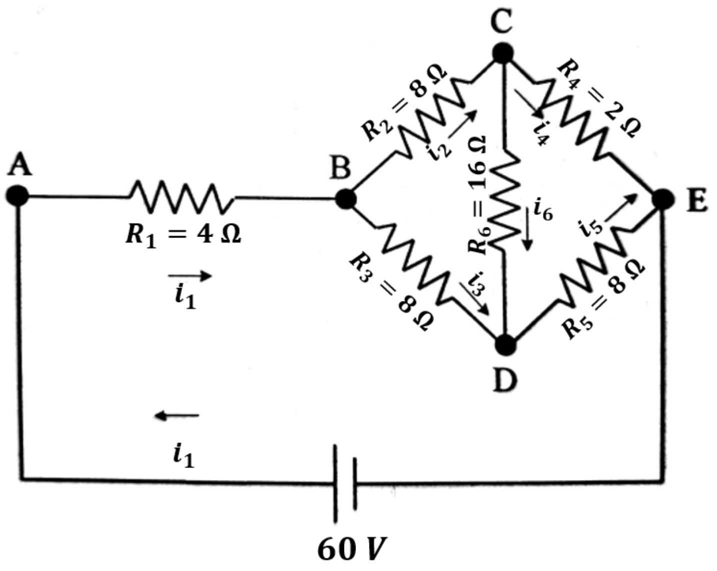


Figura 26: Circuito exemplo para a transformação delta-estrela.

Claramente, se conhecermos as correntes elétricas em cada resistor do circuito, teremos todas as informações para julgar quaisquer preposições a respeito do circuito resistivo. Então, a primeira necessidade é determinar a resistência equivalente.

Entretanto, note que não é um circuito simples, já que a ponte não está equilibrada:

$$R_2 \cdot R_5 \neq R_3 \cdot R_4$$

$$8 \cdot 8 \neq 8 \cdot 2$$

Dessa forma, não podemos retirar R_6, já que i_6 é diferente de zero e $U_{CD} \neq 0$. Então, como podemos calcular a resistência equivalente?

Para resolver esse problema precisamos utilizar a técnica de transformação desse circuito chamada delta-estrela. Ela ganha este nome pois converte uma configuração semelhante a um Delta (Δ) de resistores em uma configura parecida com uma estrela (Y), como na figura abaixo:

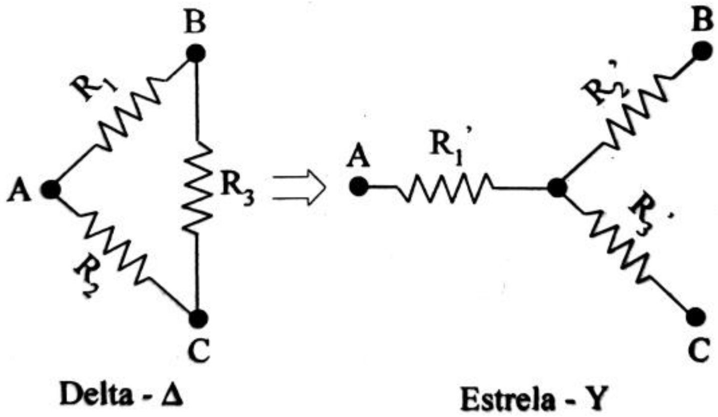


Figura 27: Transformação delta-estrela.

Evidentemente, quando fazemos a transformação a resistência equivalente não pode ser alterada, assim como os potenciais dos nós não deve ser alterado. Portanto, as correntes elétricas nos ramos que não compõem o delta ou a estrela permanecem inalteradas.

Mas, afinal, como calcular os valores das resistências que compõe a estrela ($R_1', R_2'\ e\ R_3'$) em função das resistência que formam a configuração delta ($R_1, R_2\ e\ R_3$). Considere a seguinte transformação delta em estrela:

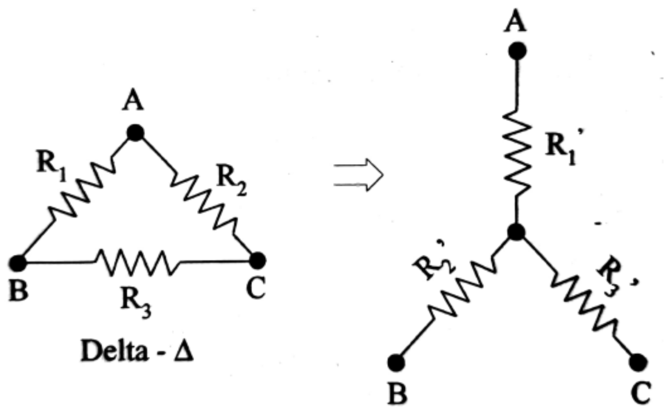


Figura 28: Transformação delta-estrela.

Utilizando o fato de que a transformação não altera a resistência equivalente, a resistência equivalente entre os nós no delta (Δ) deve ser igual à estrela (Y). Então:

- A resistência entre os nós A e B no delta:

$$R_{AB} = R_1 // (R_2 + R_3) = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Na estrela:

$$R_{AB} = R_1' + R_2'$$

Perceba que R_3' está em aberto, portanto, não passaria corrente por ele e, assim, não entra no cálculo da resistência equivalente entre A e B. Assim:

$$R_1' + R_2' = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- A resistência entre os nós A e C no delta:

$$R_{AC} = R_2//(R_1 + R_3) = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Na estrela:

$$R_{AC} = R_1' + R_3'$$

Perceba que R_2' está em aberto, portanto, não passaria corrente por ele e, assim, não entra no cálculo da resistência equivalente entre A e C. Assim:

$$R_1' + R_3' = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- A resistência entre os nós B e C no delta:

$$R_{BC} = R_3//(R_1 + R_2) = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Na estrela:

$$R_{BC} = R_2' + R_3'$$

Perceba que R_1' está em aberto, portanto, não passaria corrente por ele e, assim, não entra no cálculo da resistência equivalente entre A e C. Assim:

$$R_2' + R_3' = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Portanto, temos o sistema três por três:

$$\begin{cases} R_1' + R_2' = \dfrac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_1' + R_3' = \dfrac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_2' + R_3' = \dfrac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos que:

$$\boxed{R_1' = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}}; \boxed{R_2' = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}; \boxed{R_3' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

Note que não é preciso gravar a fórmula, já que se quisermos a resistência ligada a um certo vértice da estrela, basta realizar o produto das duas resistências que estão ligadas ao mesmo vértice no delta e dividir pela soma das resistências.

Com este resultado, somos capazes de resolver o circuito utilizado no início deste tópico.

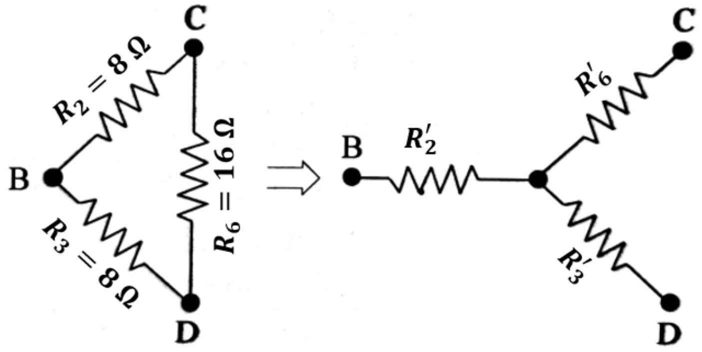


Figura 29: Aplicação da transformação delta-estrela no exemplo trabalhado.

Se quisermos determinar o valor da resistência ligada ao vértice C (R_6'), basta olhar que R_2 e R_6 estão ligados a C no delta. Então:

$$R_6' = \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_3 + R_6} \Rightarrow R_6' = \frac{8 \cdot 16}{8 + 8 + 16} = \frac{8 \cdot 16}{32} \Rightarrow \boxed{R_6' = 4\,\Omega}$$

O mesmo procedimento é aplicado para as outras resistências:

$$R_2' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3 + R_6} = \frac{8 \cdot 8}{32} = 2\,\Omega$$

$$R_3' = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_2 + R_3 + R_6} = \frac{8 \cdot 16}{32} = 4\,\Omega$$

Desse modo, após a transformação delta-estrela, chegamos a um circuito equivalente da seguinte maneira:

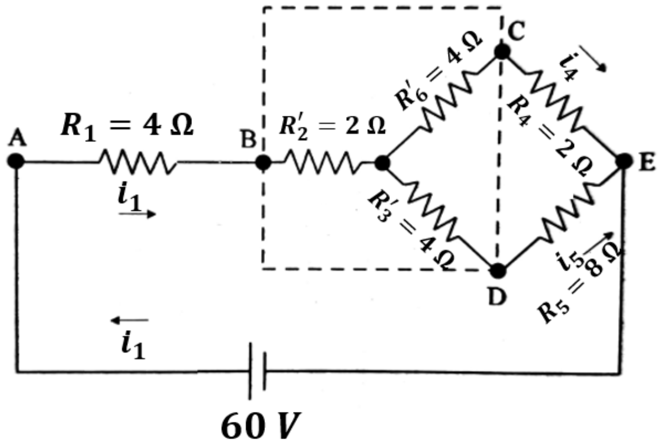


Figura 30: Circuito após a transformação do delta em estrela.

Após a transformação, as correntes fora do delta (regiao limitada pelo tracejado) ficam inalteradas. Note que é bem mais fácil agora determinar a resistência equivalente do nosso circuito:

$$R_{eq} = 4 + 2 + (6//12)$$

$$R_{eq} = 10\,\Omega$$

Logo, a corrente i_1 é de:

$$i_1 = \frac{60}{10} = 6\,A$$

Então, após passar por R_2', a corrente se divide e note que $R_2' + R_4 = \frac{1}{2}(R_3' + R_5)$, então a corrente no ramo superior será o dobro da corrente no ramo inferior. Se a corrente antes de dividir é de 6 A, então irão 4 A no ramo superior e 2 A no ramo inferior. Portanto:

$$i_4 = 4\,A \text{ e } i_5 = 2\,A$$

Assim:

$$V_C - V_E = R_4 \cdot i_4 = 2 \cdot 4 = 8\,V$$
$$V_D - V_E = R_5 \cdot i_5 = 8 \cdot 2 = 16\,V$$

Portanto:

$$V_D - V_C = (V_D - V_E) - (V_C - V_E) = 16 - 8 = 8\,V$$

Dessa forma, podemos determinar as correntes antes da transformação em estrela. Para isso, basta calcular i_6 e a aplicar a continuidade da corrente nos nós C e D.A corrente i_6 é de:

$$i_6 = \frac{V_D - V_C}{R_6} = \frac{8}{16} = 0{,}5\,A$$

No nó C:

$$i_2 + i_6 = i_4 \Rightarrow i_2 + 0{,}5 = 4 \Rightarrow \boxed{i_2 = 3{,}5\,A}$$

Para o nó D, temos:

$$i_3 = i_6 + i_5 \Rightarrow i_3 = 0{,}5 + 2 \Rightarrow \boxed{i_3 = 2{,}5\,A}$$

Diante disso, temos nosso circuito resolvido:

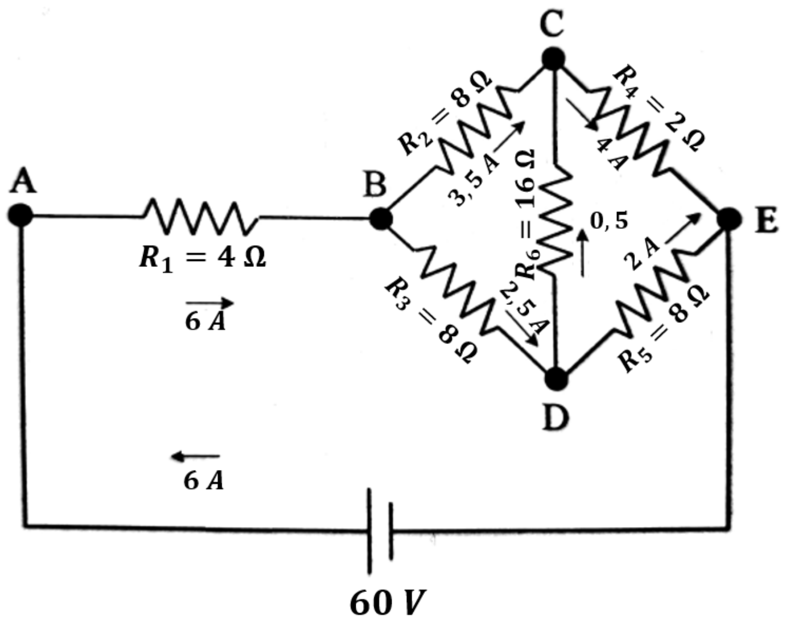


Figura 31: Circuito inicial com as correntes em todos os resistores.

2.7.2. Transformação estrela-delta

Considere o circuito da figura abaixo, onde destacamos um exemplo claro de uma configuração estrela entre os pontos A, B, C e D.

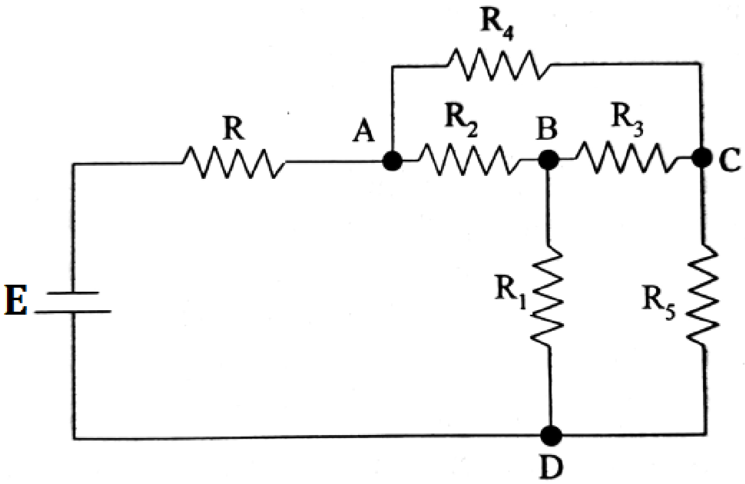


Figura 32: Circuito exemplo para a transformação estrela-delta.

Note que há uma configuração estrela formada por ABCD que ao ser transformada em delta facilitará o cálculo da resistência equivalente.

Para isso, o bizu para uma transformação estrela-delta segue os moldes da figura abaixo:

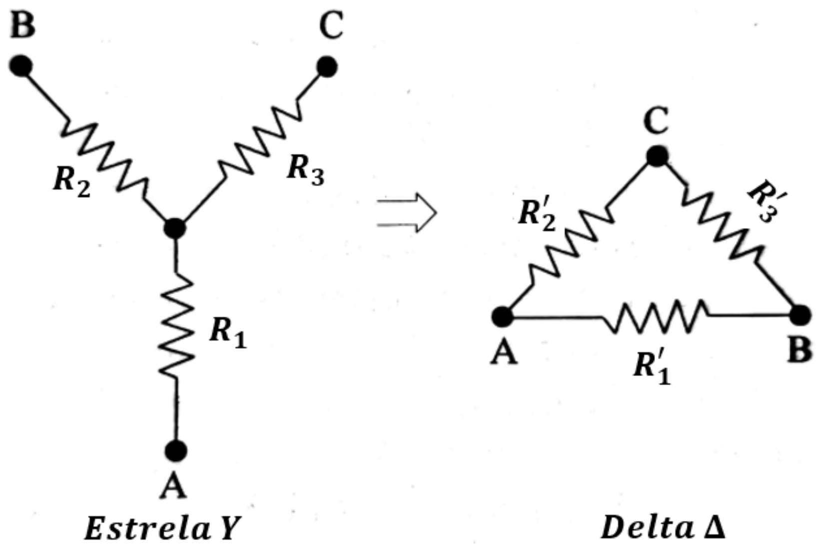


Figura 33: Esquema de transformação estrela-delta.

A ideia de transformar a configuração estrela em delta segue as mesmas propriedades da transformação delta-estrela, isto é, não altera os potenciais nos nós do circuito, assim como não altera a corrente nos ramos fora da estrela. Repetindo o mesmo procedimento para a transformação delta-estrela, você encontrará os valores de R'_1, R'_2 e R'_3 em função de R_1, R_2 e R_3, iguais a:

TOME NOTA!

$$R'_1 = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

$$R'_2 = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_2}$$

$$R_3' = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

Repare que o numerador é igual para todos e dado pelo produto dois a dois de todas as resistências. Então, o que difere é o denominador. Um jeito mnemônico para gravar esse resultado é olhar da seguinte maneira:

- para o ponto C: quem olha para o ponto C no delta é R_1' e quem faz contato com C na estrela é R_3, então:

$$R_1' = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

- para o ponto B: quem olha para o ponto B no delta é R_2' e quem faz contato com B na estrela é R_2, então:

$$R_2' = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_2}$$

- para o ponto A: quem olha para o ponto A no delta é R_3' e quem faz contato com A na estrela é R_1, então:

$$R_3' = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

2.7.3. Associação de infinitos resistores que apresentam um padrão

Considere a associação de infinitos resistores conforme a figura abaixo:

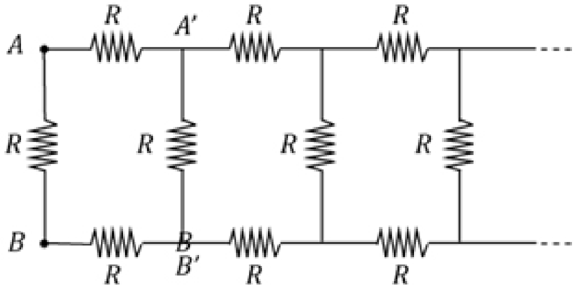


Figura 34: Exemplo de associação infinita de resistores.

Vamos chamar de R_{eq} a resistência equivalente entre os pontos A e B. Como a resistência é infinita e apresenta um padrão, se olharmos para os pontos A' e B', a resistência entre estes pontos é também igual a R_{eq}. Então, podemos redesenhar nosso circuito da seguinte forma:

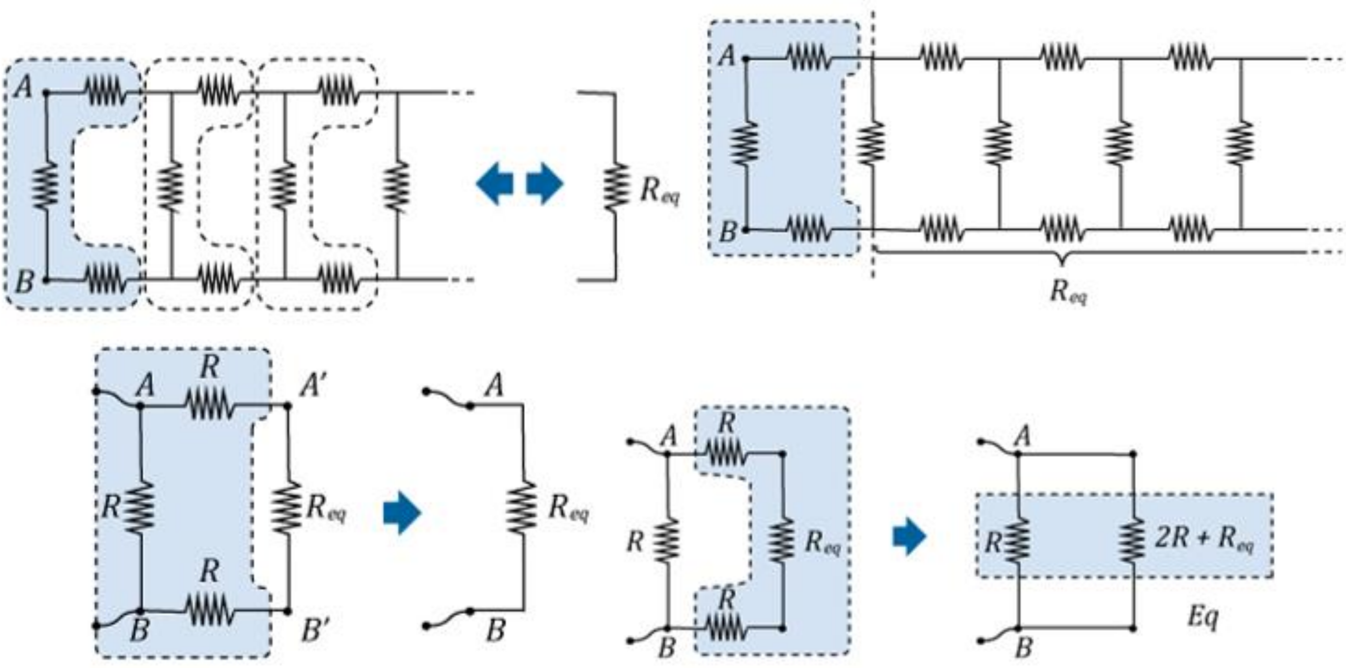


Figura 35: Rearranjos do circuito em questão.

Dessa forma, a resistência R_{eq} é dada por:

$$R_{eq} = \frac{R \cdot (2R + R_{eq})}{R + (2R + R_{eq})} \Rightarrow 3R \cdot R_{eq} + R_{eq}^2 = 2R^2 + R \cdot R_{eq}$$

$$R_{eq}^2 + 2R \cdot R_{eq} + R^2 = 3R^2$$

$$(R_{eq} + R)^2 = 3R^2$$

Como resistência só pode ter valor positivo, temos:

$$R_{eq} + R = \sqrt{3}R$$

$$\therefore \boxed{R_{eq} = (\sqrt{3} - 1) \cdot R}$$

2.7.4. Associações tridimensionais de resistores

Outra associação muito importante é o caso das conexões tridimensionais de resistores. Para isso, vamos tomar um cubo onde cada aresta é composta por um resistor e vamos calcular a resistência equivalente entre os pontos A e H, que formam a diagonal principal do cubo:

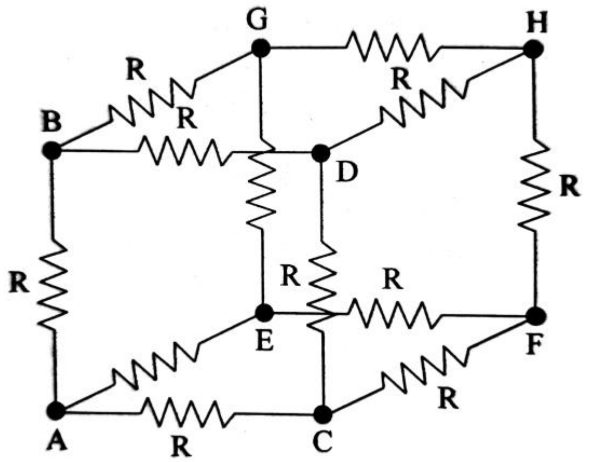


Figura 36: Cubo de resistores.

Para resolver problemas deste tipo é necessário observar a simetria dos resistores. Entretanto, a simetria é verificada a partir dos pontos onde se deseja calcular a resistência equivalente.

Quando desejamos conhecer a resistência equivalente entre dois pontos, devemos ligar uma fonte de tensão entre esses dois pontos e analisar como a corrente total é drenada da fonte.

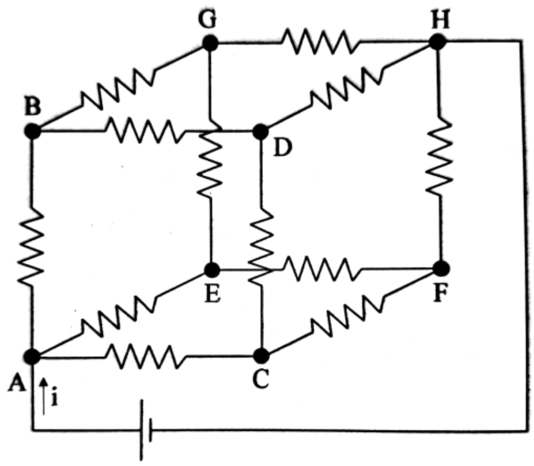


Figura 37: Fonte aplicada entre os terminais A e H.

Note que a corrente que chega no vértice A se divide em três de mesma intensidade, já que elas percorrem o mesmo caminho até chegar ao vértice H. Com isso, podemos dizer que a queda de tensão nos resistores AB, AC e AE são iguais. Portanto:

$$U_{AB} = V_A - V_B = U_{AC} = V_A - V_C = U_{AE} = V_A - V_E$$
$$\therefore V_B = V_C = V_E$$

De forma análoga, podemos verificar que os resistores de BG, BD, CF, CD, GE e EF estão sob a mesma queda de tensão. Portanto:

$$V_D = V_F = V_G$$

Se redesenharmos o circuito, podemos ver que:

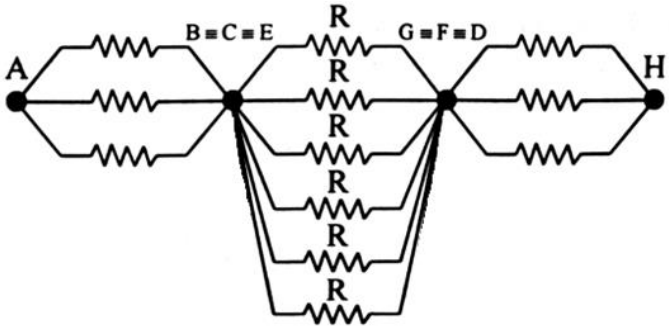


Figura 38: Planificação dos resistores do cubo, de acordo com os potenciais elétricos.

Pela figura acima, a resistência entre A e H é facilmente calcaluda por:

$$\left(R_{eq}\right)_{AH} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} \Rightarrow \boxed{\left(R_{eq}\right)_{AH} = \frac{5R}{6}}$$

Podemos chegar a mesma conclusão se observarmos que, estabelecidos os pontos entre os quais se deseja calcular a resistência equivalente (no nosso exemplo, A e H), existe um plano de simetria que passa pelos nós A, B, F e H, de tal maneira que os nós simétricos a este plano estão em um mesmo potencial elétrico.

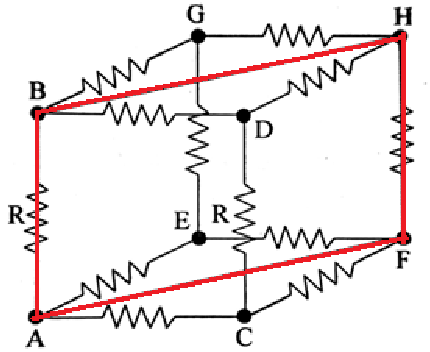
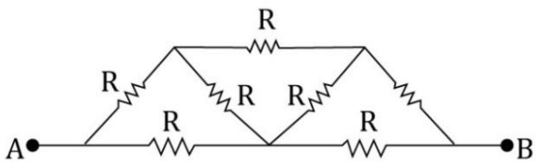


Figura 39: Plano de simetria no cubo de acordo com a resistência equivalente desejada.

Pelo plano de simetria, podemos ver que $V_C = V_E$ e $V_G = V_D$. Note que estas conclusões estão de acordo com o que vimos anteriormente.

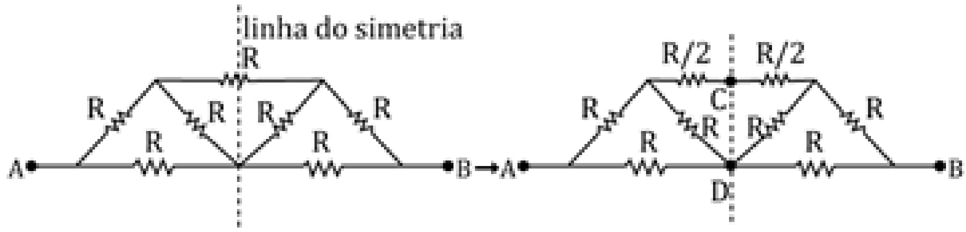
15.

Determine a resistência equivalente da associação de resistores abaixo, entre os pontos A e B.

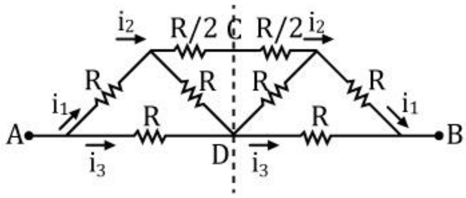


Comentários:

Note que existe uma simetria no circuito em questão. Podemos desenhar uma linha tracejada de tal forma que garanta uma simetria e podemos utilizar a propriedade de que pontos do circuito pertencentes a essa linha têm o mesmo potencial elétrico e, por isso, são considerados coincidentes:



Lembrando que, devido à simetria do circuito, podemos afirmar que as tensões elétricas entre A e C, juntamente com C e B, são iguais, assim como entre A e D, e D e B:

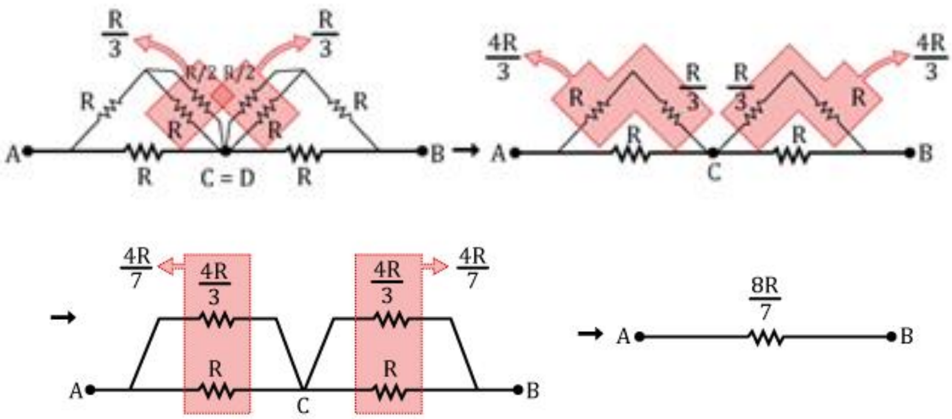


$$U_{AC} = U_{CB} \Rightarrow V_A - V_C = V_C - V_B \Rightarrow V_A + V_B = 2V_C$$
$$U_{AD} = U_{DB} \Rightarrow V_A - V_D = V_D - V_B \Rightarrow V_A + V_B = 2V_D$$

Portanto:

$$\boxed{V_C = V_D}$$

Se $V_C = V_D$, então podemos reescrever o circuito das seguintes formas:



Portanto:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{8R}{7}}$$

Note que essa propriedade permite o desenvolvimento de circuitos complexos a partir de circuitos bem simples, como é o caso da figura abaixo:

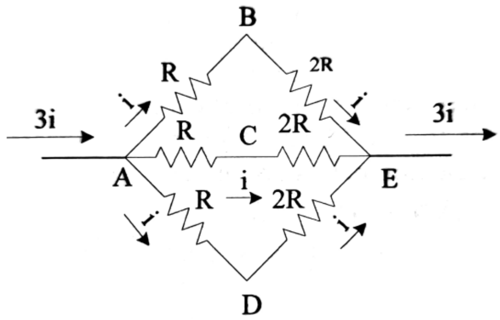


Figura 40: Circuito com elevado grau de simetria.

Note que:

$$\left(R_{eq}\right)_{AE} = \frac{3R}{3} = R$$

Esse circuito apresenta como plano de simetria que passa pelos pontos B, C e D. Dessa forma, podemos concluir que estes pontos estão sob o mesmo potencial elétrico. Podemos verificar essa propriedade também analisando as correntes.

Com isso, se adicionarmos quaisquer bipolos passivos (resistores, capacitores, indutores etc.) entre esses pontos não haverá nenhuma alteração no circuito, seja do fluxo de corrente elétrica, seja de sua resistência equivalente.

Sendo assim, podemos brincar com esse circuito, criando circuitos bem mais complexos, quando olhamos em um primeiro momento:

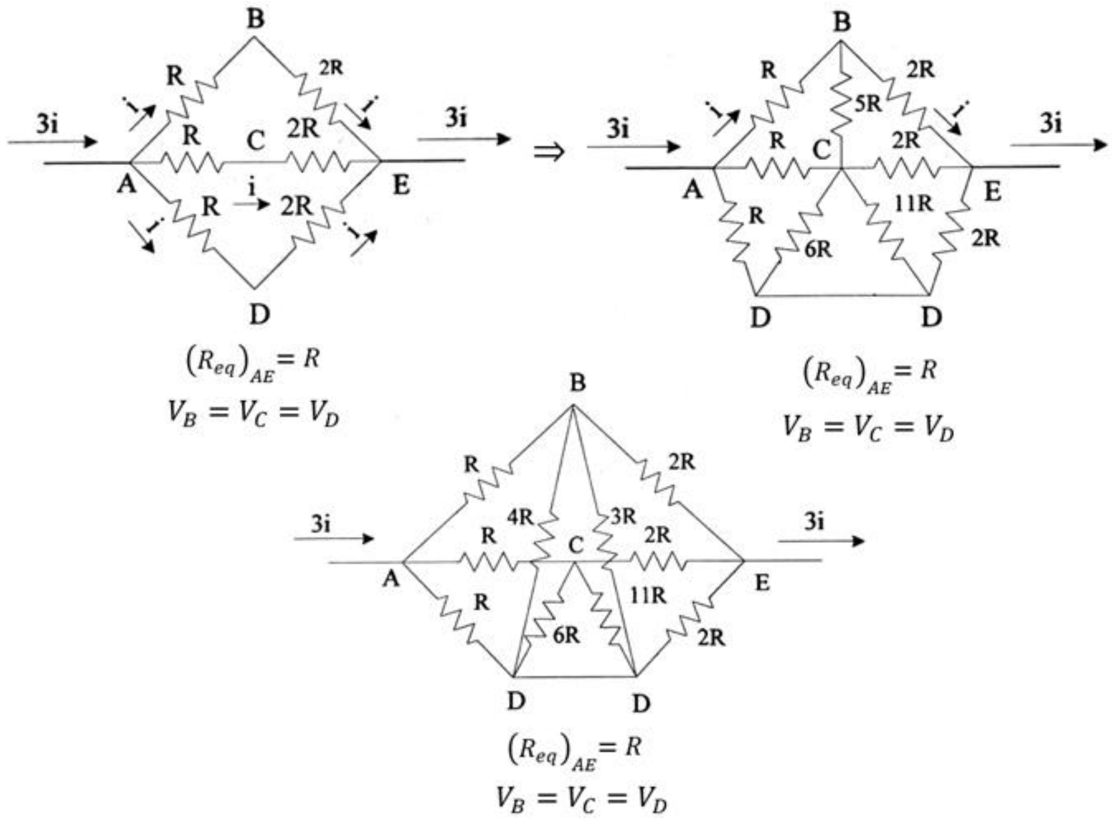


Figura 41: Variações do exemplo de exercício de simetria.

Veja como seria extremamente difícil resolver o último circuito da figura logo acima, se não tivéssemos essa ferramenta poderosa.

Por fim, vamos apresentar um último problema que apresenta um elevado grau de simetria.

Considere uma rede infinita de células hexagonais em que é fornecida no ponto A uma corrente I, de tal forma que no ponto B se toma novamente a corrente I, qual deve ser a intensidade da corrente que circula pela resistência entre os pontos A e B? Qual deve ser a resistência equivalente de todo o circuito entre estes pontos, se cada lado tem resistência r?

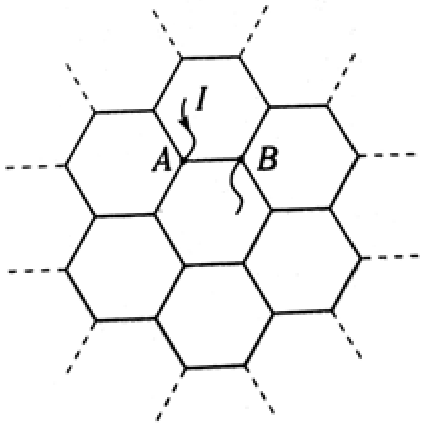


Figura 42: Rede infinita de células hexagonais.

Quando a corrente entra no ponto A, esta se redistribui por toda a rede de células para que finalmente se reagrupe e saia pelo ponto B. Devido a redistribuição da corrente I, uma porção desta passa pelo lado que os dois pontos, criando uma diferença de potencial V_{AB}.

Por outro lado, a resistência equivalente entre A e B ($R_{Eq_{AB}}$) é aquela resistência que vai substituir toda a rede de células. Por isso, $R_{Eq_{AB}}$ a ser substituída entre A e B deve gerar os mesmo efeitos que toda a rede de células, isto é, ao entrar a corrente I por A, a resistência equivalente deve gerar a mesma diferença de potencial entre os pontos A e B que é produzida por toda rede de células.

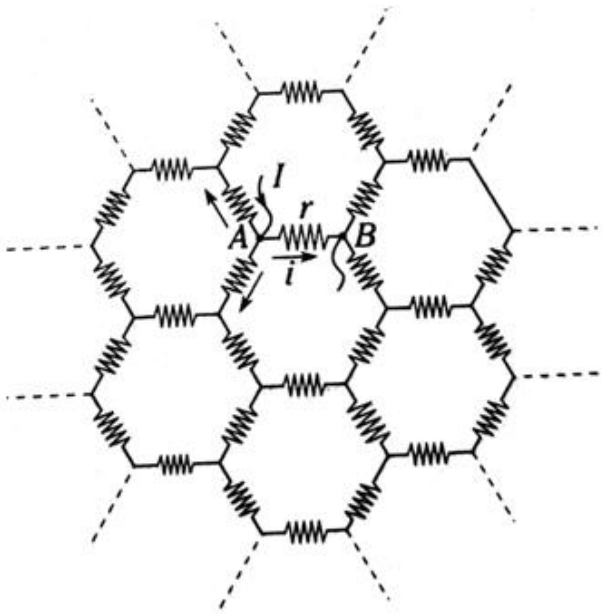


Figura 43: Ramificações da corrente I no nó A.

Equivalente a:

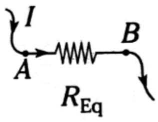


Figura 44: Resistor equivalente desejado.

Devido à equivalência:

$$V_{AB} = i \cdot r = I \cdot R_{Eq}$$

Assim, para determinar o valor de R_{Eq}, devemos obter o valor da corrente i em função da corrente conhecida que entra pelo ponto A (I). Nesse sentido, vamos fazer uma pequena consideração: quando a corrente entra em A, ela se redistribui para todas as infinitas resistências, já que nessa região encontram-se todos os nós de saída. Como a rede é infinita, podemos considerar que o nó A é o centro da rede e, consequentemente, a corrente encontrará o mesmo caminho para qualquer caminho que ela tomar.

Diante disso, podemos dizer que a corrente se divide igualmente no ponto A:

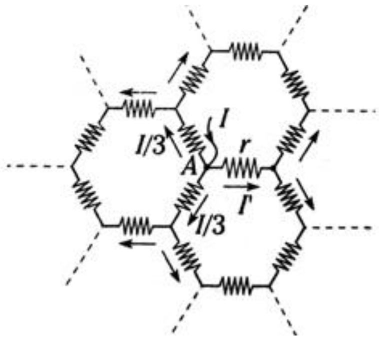


Figura 45: Corrente I' *indo de A para B.*

Assim, podemos dizer que a corrente que se dirige ao infinito I' é igual a:

$$I' = \frac{I}{3}$$

Agora, vamos considerar o processo inverso, isto é, vamos considerar que a corrente entra pelos nós que se encontram no infinito e vão se reagrupando pouco a pouco até chegar ao centro da rede (ponto A) e finalmente sair por B, e como no caso anterior um ramo antes de chegar ao centro. Os três caminhos oferecem a mesma resistência, consequentemente, por elas circulam a mesma corrente e, como são três ramos, seu valor é de $I/3$.

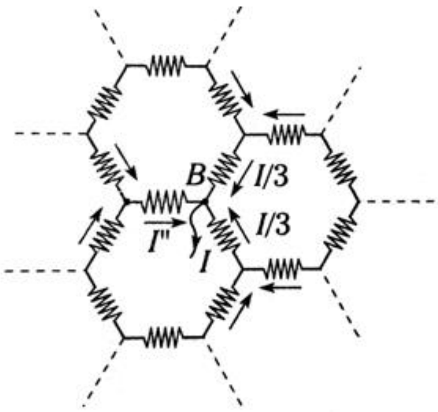


Figura 46: Correntes que vão se agrupando em B.

Por fim, para obter o valor de i, devemos ter em mente os resultados obtidos levando em conta as duas considerações, sobrepondo-as. Já que a corrente deve entrar em A e sair por B, assim, consideraremos o módulo e a direção das correntes parciais (I' e I''). Fazendo a sobreposição, temos:

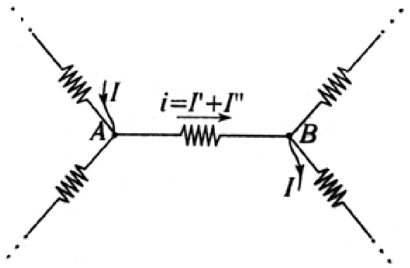


Figura 47: Sobreposição das correntes $I' + I''$.

Portanto:

$$i = I' + I'' = \frac{I}{3} + \frac{I}{3} = \frac{2I}{3}$$

Com este resultado e a condição inicial para o resistor equivalente, temos:

$$V_{AB} = i \cdot r = I \cdot R_{Eq}$$

$$\frac{2I}{3} \cdot r = I \cdot R_{Eq}$$

$$\boxed{R_{Eq} = \frac{2}{3} \cdot r}$$

Observação: os resultados aplicados para resistores também podem ser utilizados para associação de capacitores. Lembrando que o processo de associação de capacitores em série é semelhante à associação de resistores em paralelo e para conexões de capacitores em paralelo, o resultado é semelhante a conexão de resistores em série.

3. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os conceitos estudado nessa aula e reviso com calma os tópicos relacionados a casos especiais de associação de resistores, principalmente os casos de simetria. O IME e o ITA adoram este tema.

Coloque em suas anotações a transformação delta-estrela, pois ela é recorrente na prova do IME e pode vir a aparecer no ITA.

Na próxima aula, trabalharemos com geradores, receptores e começaremos a resolver circuitos elétricos. Encontrar a resistência equivalente de um circuito e saber quando o resistor está em série ou em paralelo é fundamental para resolução de circuitos elétricos.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@prof.maldonado

4. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.

[5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.

[6] Associación Fondo de Investigadores y Editores. Una visión analítica del movimento volume II. 11ª ed. Lumbreras editores. 989 p.