FRENTE: MATEMÁTICA III

PROFESSOR(A): JUDSON SANTOS

ASSUNTO: GEOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

EAD – ITA/IME

AULAS 12 A 15

Resumo Teórico

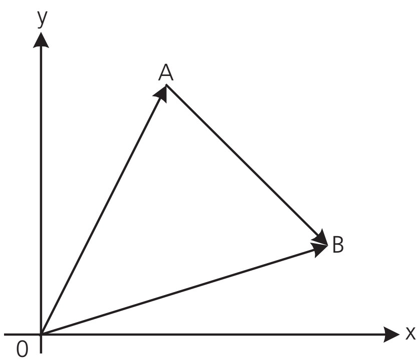
Vetor definido por dois pontos

Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$, de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$.

Os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm expressões analíticas:

$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

Por outro lado, do triângulo OAB da figura, vem:



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$,

donde:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$

Com isso:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

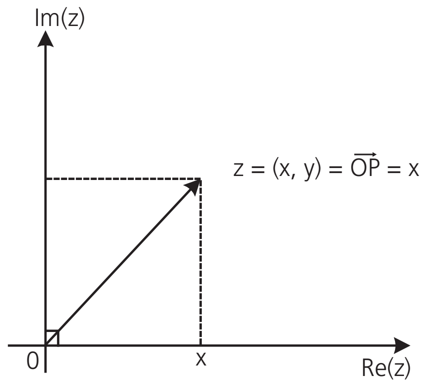
isto é, as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade **B** as coordenadas da origem **A**, razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Representação vetorial dos números complexos

No complexo **C**, cada número complexo **z** pode ser representado por um vetor de origem O(O, O) e extremidade P(x, y) afixo de **z**.

z é caracterizado por $\overrightarrow{OP}$.

- Geometricamente:



Da figura, um complexo pode ser escrito na forma trigonométrica:

$$Z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Notação: Usaremos no decorrer do curso as notações:

$$\text{cis}\ \theta = \cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta$$

A unidade complexa é definida como $i = \sqrt{-1}$.

Considere o complexo $z = x + y \cdot i$ onde $x, y \in \Re$. Definimos:

- Módulo de z: $|z| = |x + y \cdot i| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Parte Real e Imaginária de z : $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$
- Argumento de z: $\theta = \arg(z) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi, k \in Z$
- Complexo conjugado de z: $\bar{z} = x - y \cdot i$

Adição na forma vetorial

Considerando os números complexos como vetores, a adição de dois ou mais números complexos é da mesma forma que a adição de vetores no plano que os representam pela regra do paralelogramo.

Diferença na forma vetorial

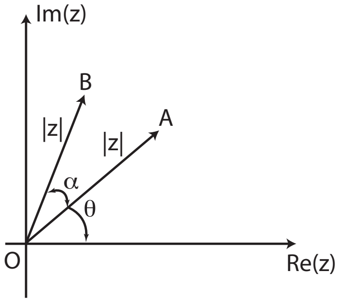
A diferença entre dois números complexos, geometricamente, representa a adição do primeiro vetor pelo simétrico do segundo, sob a condição da regra do paralelogramo.

Rotação de vetores com números complexos

Conforme visto anteriormente, a multiplicação de complexos procede da seguinte maneira:

$$(r \cdot \text{cis}\alpha) \cdot (s \cdot \text{cis}\beta) = r \cdot s \cdot \text{cis}(\alpha+\beta)$$

Podemos entender a multiplicação de um **z** por um outro complexo (de módulo **r** e argumento α) multiplica o seu módulo original por **r**, e rotaciona (no sentido trigonométrico) sua posição de α no plano complexo.
Ou seja:



$$\boxed{\overline{OA} = z \text{ e } \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \text{cis}(\alpha + \theta)}$$

Rotação de um complexo **z** de um ângulo α (sentido trigonométrico), gerando um novo complexo **z'**:

$$z' = z \cdot \text{cis}\alpha$$

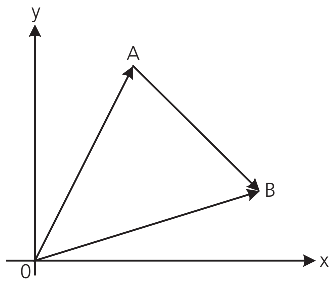
Rotação de um complexo **z** de um ângulo de 90 graus, gerando um novo complexo **z´**:

$$z' = z \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \cdot z$$

Lugar geométrico envolvendo números complexos

Vetor definido por dois pontos

Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$:
Os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm expressões analíticas:
$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_1, y_1)$
Por outro lado, do triângulo OAB da figura, vem



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

Donde,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Ou

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

e

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

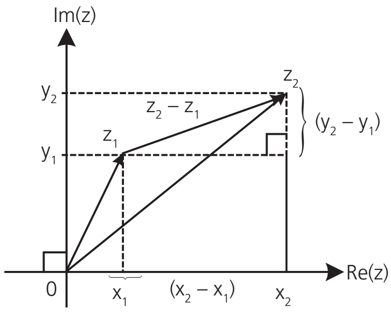
isto é, as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade **B** as coordenadas da origem **A**, razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$

Distância de dois pontos

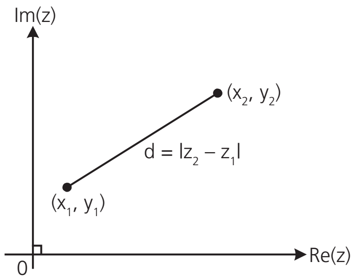
Sejam $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$. Determinando o módulo de $(z_2 - z_1)$, temos:

$$|z_2 - z_1| = |(x_1 + y_1 i) - (x_1 + y_1 i)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Representação geométrica:



O módulo de $(z_2 - z_1)$ representa a distância entre os afixos de z_1 e z_2, isto é, $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$.



Pelo fato de que **C** herda naturalmente a mesma métrica do R^2 nos induz a caracterizar uma função de maneira intuitiva, denominada de função distância.
Seja **d** uma função definida de C x C em R, tal que $d : C \times C \to R$ dada por $d(z, w) = |z - w|$, **d** é denominada de função distância.

Reta mediatriz

O lugar geométrico de $z \in C$ tal que $|z - z_1| = |z - z_2|$ representa a equação da mediatriz do segmento de extremidade z_1 e z_2 com $z_1 \neq z_2$.

Demonstração.:

Se $|z - z_1| = |z - z_2|$ representa uma equação da reta **r** tal que $z = x + i \cdot y$, $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ e $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$.

Então vamos mostrar que essa reta **r** passa pelo ponto médio $M = \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ e é perpendicular à reta **s**.

$|z - z_1|^2$ e $|z - z_2|^2$

Temos:

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$

desenvolvendo encontramos:

$$(r): 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

Com isso, para provar que essa reta **r** passa pelo ponto médio **M** e é perpendicular à reta **s** vamos fazer duas verificações: Vamos substituir as coordenadas do ponto **M** na equação da reta **r** e vamos verificar se a igualdade é verdadeira.
Isto é:

$$(r): 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

logo:

$$2(x_2 - x_1).\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2(y_2 - y_1).\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0 \therefore 0 = 0$$

Agora vamos mostrar que essas duas retas **r** e **s** são perpendiculares. Isto é, usando geometria analítica, temos:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dada uma equação da reta ax + by + c = 0 temos que o coeficiente angular é dado por $-\frac{a}{b}$

logo,

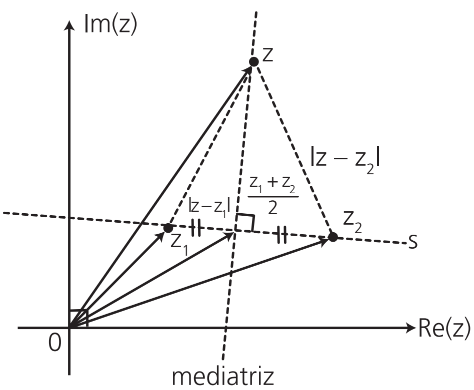
$$m_r = -\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)$$

porém para essas duas retas **r** e **s** serem perpendiculares temos: $m_r m_s = -1$

logo,

$$m_r m_s = -\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \therefore m_r m_s = -1$$

Geometricamente:



Circunferência

O lugar geométrico $z \in C$ tal que $|z - z_1| = R$, em que **R** é uma constante real positiva e $z \neq z_1$ representa uma circunferência de centro em z_1 e raio **R**.

Demonstração.:

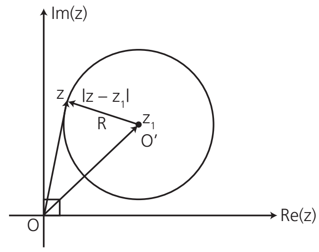
Analiticamente:

Substituindo $z = x + yi$ e $z_1 = x_1 + yi$ na equação, temos:

$|(x - x_1) + (y - y_1)i| = R$

pela definição de módulo $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = R$, isto é, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$ esta equação reprepsenta uma circunferência de centro (x_1, y_1) e raio **R**.

Geometricamente:



Elipse

Dados dois números complexos $z_1 = c + 0 \cdot i$ e $z_2 = -c + 0 \cdot i$, e um número real positivo.

O lugar geométrico dos pontos $z = x + y \cdot i$ do plano complexo tal que $|z - z_1| + |z - z_2| = 2 \cdot a$, representa uma elipse de centro na origem de coordenadas focais (–c, 0), (c, 0) com $a > c$, $z \neq z_1$ e $z \neq z_2$.

Demonstração.:

Analiticamente:

Sendo $|z - z_1| + |z - z_2|/2a$ e $z = x + yi$ um elemento qualquer de **C**.

Substituindo os valores z_1, z_2, z na equação, temos:

$|(x - c)| + yi| + |(x + c)+ yi| = 2a;$

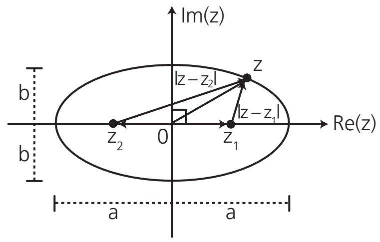
Pela definição de módulo, temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e reduzindo os termos semelhantes, chegaremos ao resultado $a\sqrt{(c + x)^2 + y^2} - a + cx$, repetindo as operações anteriores, tem-se

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$; a expressão $a^2 - c^2$ é positiva, então existe b^2 real tal que $a^2 - c^2 = b^2$, assim $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, dividindo a expressão por a^2b^2, tem-se $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Geometricamente:

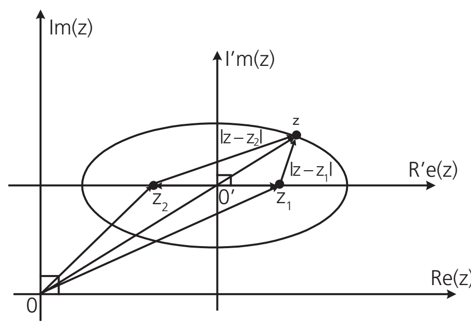


Para a equação $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, $z_1 = x_1, y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ e $|z_1 - z_2| < 2a$.

Transladando os eixos, isto é, tome:

$$\boxed{x = x' + \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = y' + \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

A nova equação $|z - z_1| + |z - z_2| = 2 \cdot a$, fica representada geometricamente:



Dicas e Macetes

Representa uma elipse:

Centro: $\frac{z_1 + z_2}{2}$

Focos: z_1 e z_2 em relação aos eixos Im(z) e Re(z).

Hipérbole

Dados dois números complexos $z_1 = c + 0 \cdot i$ e $z_2 = -c + 0 \cdot i$ em que **c** é um número real positivo, o lugar geométrico de $z = x + yi$ no plano complexo tal que $|z - z_1| - |z - z_2| = 2 \cdot c$ representa uma hipérbole de focos (– c, 0), (c, 0) centrada na origem com $c > a$, $a \in \mathfrak{R}$, $z \neq z_1$ e $z \neq z_2$

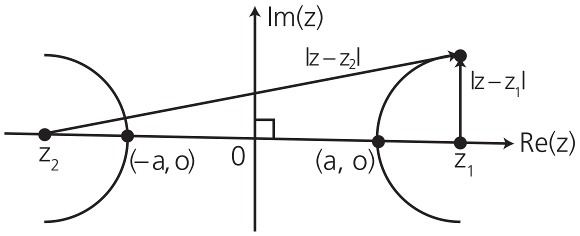
Demonstração.:

Analiticamente:

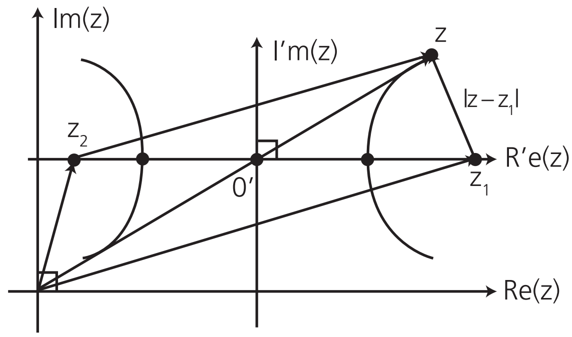
Vamos verificar que a equação $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ representa uma hipérbole de focos z_1 e z_2 para qualquer **z** diferente z_1 e z_2; procedendo de modo análogo ao caso anterior, vamos obter $(c^2 - a^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$, $c^2 - a^2$ podendo substituir por b^2.

Assim: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Geometricamente:



Para a equação $|z - z_1| - |z - z_2| = 2 \cdot c$, em que $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ é suficiente fazer uma translação dos eixos ($z_1 \neq z_2$).



Parábola

Sejam $z_1 = \frac{a}{2} + 0i$, $z_2 = \frac{-a}{2} + yi$ e $z = x + yi$, em que z_1 é um número fixo, z_2 e z números complexos quaisquer. O lugar geométrico dos pontos **z** tais que $|z - z_1| = |z - z_2|$ em que "a" é um número real não nulo não representa uma parábola de foco $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ e diretriz $x = \frac{-a}{2}$.

Demonstração.:

Analiticamente:

Pelas condições dadas, temos: $|z - z_1| = |z - z_2|$. Substituindo os respectivos valores $\left|\left(x - \frac{a}{2}\right) + yi\right| = \left|\left(x + \frac{a}{2}\right) + 0i\right|$. Aplicando a definição de módulo, temos:

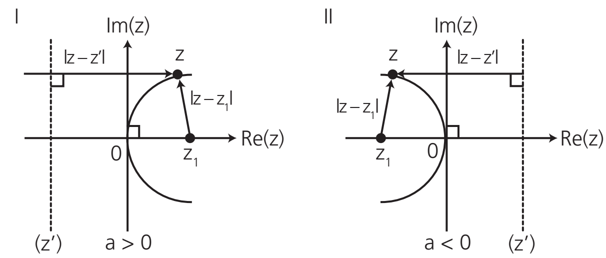
$\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 0}$; elevando ao quadrado ambos os membros, temos:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

Desenvolvendo os quadrados e reduzindo os termos semelhantes, chegaremos ao resultado $y^2 = 2ax$.

Estudaremos dois casos $a > 0$ e $a < 0$.

Geometricamente:



$|z - z_1| = |z - z_2|$ representa uma parábola de vértice na origem, coordenada do foco no afixo de z_1 e diretriz $x = Re(z_2)$.

Chamo a atenção dos alunos, que existem outras maneiras de definirmos os lugares geométricos diferentes dos quais foram apresentados.

Lei dos senos e cossenos envolvendo números complexos

Estudaremos duas importantes situações envolvendo os lados e os ângulos de um triângulo qualquer que denominamos de,

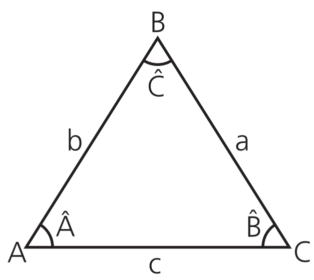
(i) Lei dos cossenos

(ii) Lei dos senos

Lei dos cossenos

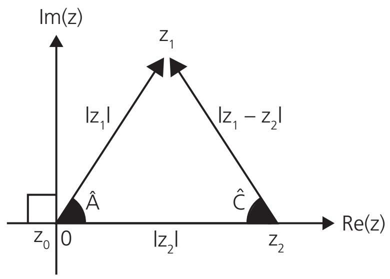
Faremos a Demonstração. plotando o triângulo no plano dos números complexos e tornando um dos seus vértices como origem e um dos lados sobre o eixo real.

Seja ABC um triângulo qualquer.



Os vértices A, B e C representaremos por Z_0, Z_1 e Z_2, respectivamente, quando plotados no plano **C**.

Geometricamente, temos:



O triângulo ABC de lados **a**, **b** e **c** tem como medidas $|z_1 - z_2|$, $|z_2|$ e $|z_1|$, respectivamente.
O Ângulo Â representa geometricamente o argumento principal de z_1,então:
$z_1 = |z_1| \cos \hat{A} + i\,|z_1| \operatorname{sen} \hat{A}$ e $z_2 = |z_2| (\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$, assim:
$|z_1 - z_2| = |(|z_1| \cos \hat{A} - |z_2| \cos 0°) + i\,(|z_1| \operatorname{sen} \hat{A} - |z_2| \operatorname{sen} 0°)|$

Aplicando a definição de módulo de um número complexo, obtemos:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(|z_1| \cos \hat{A} - |z_2|.1)^2 + (|z_1| \operatorname{sen} \hat{A} - 0)^2}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis e reduzindo os termos, chegaremos ao resultado:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2| \cos \hat{A}} \quad (*)$$

Vamos determinar o valor de $(\cos^2 \hat{A} + \operatorname{sen}^2 \hat{A})$. Tomemos $z_1 = (x_1, y_1)$; por construção, Â é o seu argumento, então:

$$\cos \hat{A} = \frac{x_1}{|z_1|} \text{ e } \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{y_1}{|z_2|}, \text{assim:}$$

$$\cos^2 \hat{A} + \operatorname{sen}^2 \hat{A} = \frac{x_1^2}{|z_1|^2} + \frac{y_1^2}{|z_1|^2} = \frac{|z_1|^2}{|z_1|^2} = 1 \ (**)$$

Substituindo (**) em (*), obtemos:

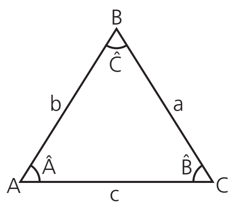
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2| \cos \hat{A}}$$

Substituindo pelos respectivos valores dos lados do triângulo, temos:

$$a^2 = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$

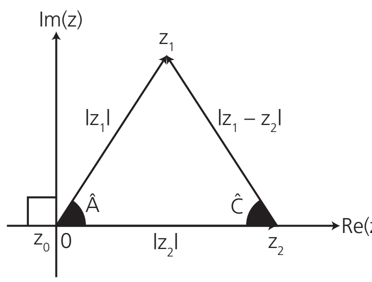
Lei dos senos

Utilizando o triângulo do item (i) com as mesmas condições e representação geométrica, como mostram as figuras abaixo:



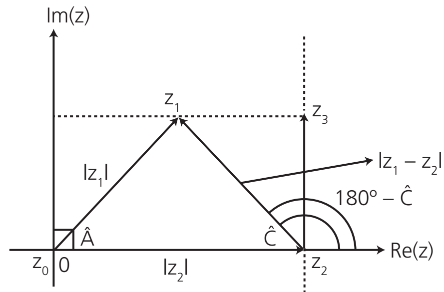
ΔABC

Geometricamente, temos:



Seja $z_1 = x_1 + y_1 i$ de argumento Â, representando z_1 na forma trigonométrica $z_1 = |z_1| \cos \hat{A} + i\,|z_1| \operatorname{sen} \hat{A}$.

Tomando um novo eixo auxiliar Im'(z) perpendicular à Re(z) de origem z_2, temos:



A representação do número complexo z_3 na forma trigonométrica em Re(z) Im'(z) é:
$z_1 = \{(-|z_1 - z_2|) \cos(180 - \hat{C})\} + i\,\{(|z_1 - z_2|) \operatorname{sen}(180 - \hat{C})\}$, então:
$z_3 = -|z_1 - z_2| \cos\hat{C} + |z_1 - z_2| \operatorname{sen}\hat{C}$

Observando a construção geométrica, concluímos que:
$\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_3)$ no eixo Im(z).

Assim $|z_1| \operatorname{sen} \hat{A} = |z_1 - z_2| \operatorname{sen} \hat{C}$, o que acarreta em:

$$\frac{|z_1|}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{|z_1 - z_2|}{\operatorname{sen}\hat{A}}$$

Resumo teórico

Lugares geométricos

- **Mediatriz:**
  $|z - z_1| = |z - z_2|$

- **Segmento da reta:**
  $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2|$

- **Semirretas:**
  s_1: $|z - z_2| - |z - z_1| = 2c$
  s_2: $|z - z_1| - |z - z_2| = 2c$
  $s_1 \cup s_2$: $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2c$
  $2c = |z_1 - z_2|$

- **Circunferência:**
  $|z - z_1|_2 + |z - z_2|_2 + ... + |z - zn|_2 = k$

- **Círculo de Apolônio:**
  $|z - z_1| = k\,|z - z_2|,\ k \in \Re$

- **Círculo:**
  $$\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \alpha\,(\text{fixo})$$
  $$\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \left(\begin{matrix}\textbf{z} \text{ é círculo com } z_1 \text{ e } z_2 \\ \text{como vértices do diâmetro}\end{matrix}\right)$$

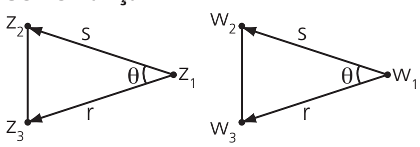
- **Elipse:**
  $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$
  $2a > |z - z_2|$

- **Hipérbole:**
  r_1: $|z - z_2| - |z - z_1| = 2a$
  r_2: $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$
  H: $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$

- **Propriedades dos argumentos dos números complexos**

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) = 2k\pi - \arg(z)$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2 \ldots z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \ldots + \arg(z_n)$$
$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$$
$$\arg(z_1 \cdot \overline{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

- **Semelhança**



$\Delta\, z_1\, z_2\, z_3 \sim \Delta\, w_1\, w_2\, w_3$

$$\frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_3 - Z_1|} = \frac{|W_2 - W_1|}{|W_3 - W_1|}$$

$\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg(w_3 - w_1) - \arg(w_2 - w_1)$

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right)$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \quad \begin{pmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 2 \\ z_3 & w_3 & 3 \end{pmatrix} = 0 \text{ (condição de semelhança)}$$

$|z_1 - z_2|$ como distância entre dois pontos.

Tem-se que $|z_1 - z_2|$ representa a distância entre os afixos de z_1 e z_2:

$$|z_1 - z_2| = \overline{Z_1 Z_2}.$$

- $|z_1 - z_2| = \mathbf{r}$ representa a circunferência de centro Z_1 e raio **r**.
- $|z_1 - z_2| < \mathbf{r}$ representa o interior da circunferência de centro Z_1 e raio **r**.
- $|z_1 - z_2| > r$ representa o exterior da circunferência de centro Z_1 e raio **r**.

Exercícios

01. Sabendo que z_1 e z_2 são raízes da equação $z^2 + pz + q = 0$, onde os coeficientes de **p** e **q** podem ser números complexos. Sejam **A** e **B** que representam z_1 e z_2 no plano complexo. Se $<AOB = \alpha \neq 0$ e OB = OA, onde O é a origem. Então o valor da expressão $\dfrac{p^2}{q \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ é igual a:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

02. (ITA/1997) Seja **s** o conjunto dos números complexos que satisfazem simultaneamente, às equações:

$$|z - 3i| = 3 \text{ e } |z + i| = |z - 2 - i|$$

O produto de todos os elementos de S é igual a:

A) $-2 + i\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$
D) $-3 + 3i$
E) $-2 + 2i$

03. Sejam A = (–8;5), B = (–15,–19) e C = (1;–7) vértices do triângulo ABC tal que a reta **a** (r): ax + 2y + c = 0 passa pelo vértice **A** dividindo-o em dois ângulos iguais (bissetriz do ângulo **A**). Então o valor de a + c é igual a:

A) 72
B) 75
C) 78
D) 81
E) 89

04. Seja **f** uma função complexa-valorizado definida por $f(z) = (a + bi) \cdot z$, onde **a** e **b** são números reais e o módulo do complexo $|a + i \cdot b| = 8$. Sabendo que f(z) tem a seguinte propriedade: é sempre equidistante entre 0 e **z**. Então o valor de $4 \cdot b^2$ é igual a:

A) 251
B) 252
C) 253
D) 254
E) 255

05. Seja **S** a área do maior triângulo equilátero que pode ser inscrito em um retângulo com lados 10 cm e 11 cm. Então, o valor da expressão $\dfrac{S + 330}{\sqrt{3}}$ é igual a:

A) 121
B) 221
C) 363
D) 440
E) 330

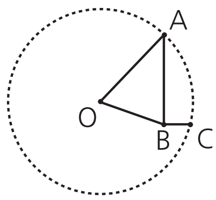
06. Sabendo que **A** é a área da região do plano complexo de $\left(\dfrac{z}{40}\right)$ e $\left(\dfrac{40}{\bar{w}}\right)$ que tem a parte real e imaginária pertencente ao intervalo (0, 1), onde **w** é o conjugado do número complexo **z**. Considerando $\pi = 3{,}142$, o valor do inteiro mais próximo da área A é igual a:

A) 600
B) 590
C) 580
D) 570
E) 560

07. (ITA/1997) Considere no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente $z_1, z_2, \ldots z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$, então $2z_3$ é igual a:

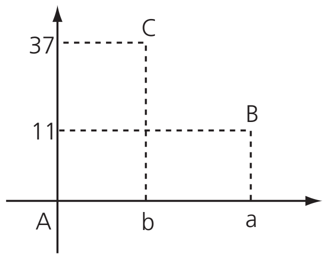
A) 2 + 4i
B) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 3)i$
C) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)i$
D) $(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 3)i$
E) $\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2)i$

08. **A** e **C** são dois pontos distintos na circunferência de centro **O** e raio $\sqrt{50}$ (como mostra a figura). Sabendo que $\Delta ABC = 90°$ (em B), $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 2$. O valor de $\left(\overline{OB}\right)^2$ é igual a:



A) 12
B) 13
C) 18
D) 24
E) 26

09. Calcule a · b sabendo que A(0, 0), B(a, 11), C(b, 37) são vértices de um triângulo equilátero como mostra a figura abaixo:



10. (ITA/2008) Sejam α, $\beta \in$ C tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a:

A) –2
B) 0
C) 1
D) 2
E) 2 · i

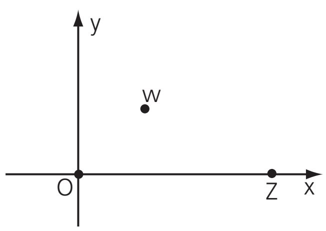
11. Considere o conjunto A = {z ∈ C; | z – 3 – 4i| = 3}. De todos os complexos pertencentes ao conjunto A no plano complexo, **w** é o complexo de argumento mínimo. Então a soma das coordenadas do afixo do complexos $i \cdot \overline{w} + 2 + 3i$ é igual a:

A) $\frac{178}{25}$
B) $\frac{317}{5}$
C) $\frac{249}{5}$
D) $\frac{178}{5}$
E) $\frac{249}{25}$

12. (ITA/2008) Sejam **r** e **s** duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja **P** um ponto no plano definido por **r** e **s** e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de **r**. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm² e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices **Q** e **R** estão, respectivamente, sobre as retas **r** e **s**, são iguais a:

A) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$
B) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$
C) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$
D) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$
E) 700 e $10\sqrt{21}$

13. (UFCG) Um estudante fascinado por números complexos fez um desafio para os seus colegas de turma. Ele enterrou uma calculadora no pátio da escola para que os seus colegas a encontrassem e deu a seguinte dica: "Quem entrar no pátio, verá imediatamente duas árvores distantes 40 m uma da outra, as quais chamarei de **O** e **Z** e também um poste que chamarei de **W**, os quais estão representados no plano complexo, conforme a figura abaixo:



Eu enterrei a calculadora em um ponto **P**, que pode ser encontrado da seguinte forma. O número complexo **W** deve ser multiplicado por - i encontrando-se um ponto **A**. O número complexo W – Z deve ser multiplicado por **i**, encontrando-se o ponto **B**. O ponto **P** é o ponto médio do segmento AB."
Com as informações acima podemos concluir que o ponto **P** é:

A) (15, –15)
B) (10, 0)
C) (0, –20)
D) (10, 20)
E) (20, –10)

14. (IME – Aman/2003) Considere o conjunto **A** definido por A = {z ∈ ℂ; | z – 5i | ≤ 3}, onde **C** representa o conjunto dos números complexos, |z – 5i| o módulo do número complexo z – 5i e $i = \sqrt{-1}$. Determine o elemento $\alpha \in$ A de menor argumento principal positivo.

15. (ITA/2000) Seja z_0 o número complexo 1 + i. Sendo **S** o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de **S** é igual a:

A) 4(1 – i)
B) 2(1 + i)
C) 2(i –1)
D) –2i
E) 2i

16. (IME) Determine os valores máximos e mínimos de |z – 4|, sabendo-se que |z + 3i| ≤ 1.

17. (IME/2014) Para o número complexo **z** que descreve o lugar geométrico representado pela desigualdade |z – 26i| ≤ 10, sejam α_1 e α_2 os valores máximo e mínimo de seu argumento. O valor de $|\alpha_1 - \alpha_2|$ é:

A) $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$
B) $2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$
C) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$
D) $2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$
E) $2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

18. (ITA/1982) Considere a família de curvas do plano complexo, definida por Re(1/z) = C, onde **z** é um complexo não nulo e **C** é uma constante real positiva. Para cada **C** temos uma:

A) circunferência com centro no eixo real e raio igual a **C**.
B) circunferência com centro no eixo real e raio igual a 1/C.
C) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a 1/ (2C).
D) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a 1 / (2C).
E) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a 1/C.

19. (UFU – MG) Tome um número complexo z_1 com módulo 1 e a partir dele construa uma sequência ordenada de números complexos z_1, z_2, z_3, ..., na qual z_{k+1} é obtido girando z_k 105° no sentido anti-horário, para todo $k \geq 1$. O menor valor de n > 1 tal que a representação geométrica de z_n coincida com a de z_1 é igual a:

A) 23
B) 24
C) 25
D) 26
E) 27

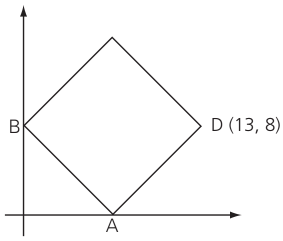
20. (ITA/1989) O valor da expressão $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$, sendo **z** um número complexo é:
A) 5, se $|z| \leq 1$.
B) 4, se $|z| = 1$.
C) 0, se $Im(z) = 0$.
D) 2, para todo **z**.
E) 3, se $Re(z) = 0$.

21. (ITA/1990) A igualdade $1 + |z| = |1 + z|$, onde $z \in C$, é satisfeita:
A) para todo $z \in C$ que $Re(z) = 0$ e $Im(z) < 0$.
B) para todo $z \in C$ que $Re(z) \geq 0$ e $Im(z) < 0$.
C) para todo $z \in C$ que $|z| = 1$.
D) para todo $z \in C$ que $Im(z) = 0$.
E) para todo $z \in C$ que $|z| < 1$.

22. Se $| z - 2 | = 1$, quais os valores máximo e mínimo que $| z + i |$ pode ter?

23. (IME/1989) Sejam **z** e **w** números complexos tais que $|z| = 1$ e $|w| \neq 1$. Calcule $\left|\dfrac{z - w}{1 - \overline{w}.z}\right|$

24. (México – Adaptada) Determine a área do quadrado abaixo sabendo que D = (13,8).



A) $\sqrt{89}$
B) $\sqrt{88}$
C) $\sqrt{87}$
D) $\sqrt{86}$
E) $\sqrt{85}$

25. (IME) Determine os pontos do plano complexo que satisfazem, simultaneamente, às equações:
$$\begin{cases} |z - 2| = |z + 4| \\ |z - 3| + |z + 3| = 10 \end{cases}$$

26. Sabendo que o valor da expressão $\sum_{k=0}^{33} \binom{99}{3k}$ pode ser escrito de forma $\dfrac{a^b + c}{d}$ em que **a**, **c** e **d** são números primos. Determine o valor de a + b + c + d.

27. Sabendo que o valor da expressão $\sum_{n=0}^{50} 2^{2n} \binom{100}{2n}$ pode ser escrito da forma $\dfrac{3^a + b}{c}$ onde **a**, **b** e **c** são números inteiros e positivos.
Então, o valor de a + b + c vale:
A) 99
B) 100
C) 101
D) 102
E) 103

28. Qual é o lugar geométrico formado por todos os pontos (x; y) que pertencem ao gráfico de $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6$?
A) Elipse
B) Hipérbole
C) Parábola
D) Circunferência
E) Reta

29. Seja S a soma de todas T(a, b) definida por $T(a,b) = \binom{6}{a} \cdot \binom{6}{b} \cdot \binom{6}{a+b}$, onde **a** e **b** são inteiros não negativos com $a + b \leq 6$. Então, a soma dos algarismos do resto da divisão de S por 1000 é igual a:
A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

30. Considere as seguintes afirmações:
I. O valor de $\log_2\left(\binom{2017}{0} + \binom{2017}{2} + \binom{2017}{4} + \ldots + \binom{2017}{2016}\right)$ é igual a 2016;
II. O ponto (–3, 2) é girado 90° no sentido horário em torno da origem obtendo um novo ponto B. Esse ponto B é refletido sobre a reta y = x obtendo um ponto C de coordenadas igual a (3, 2);
III. A equação polinomial do quarto grau $x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 4 = 0$ tem 4 raízes reais **a**, **b**, **c** e **d**. Então, o valor da soma $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$ vale $\dfrac{4}{7}$.

É(são) verdadeira(s):
A) Todas.
B) Apenas II.
C) Apenas I e II.
D) Apenas II e III.
E) Apenas I e III.

Gabarito

01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
D	D	E	E	B	D	B	E	315	B
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
C	B	C	–	E	–	D	D	B	B
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
D	–	–	A	–	–	D	A	E	C