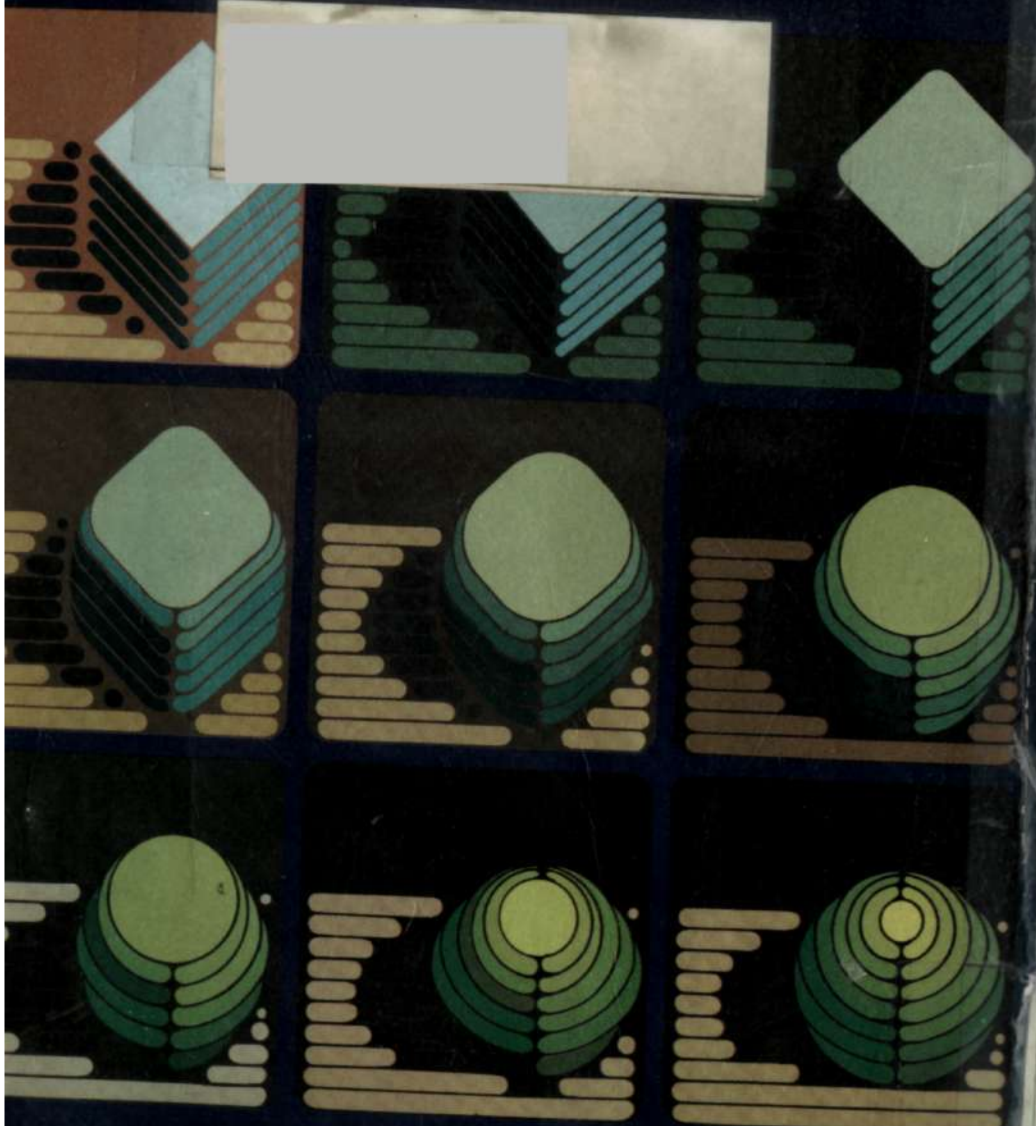
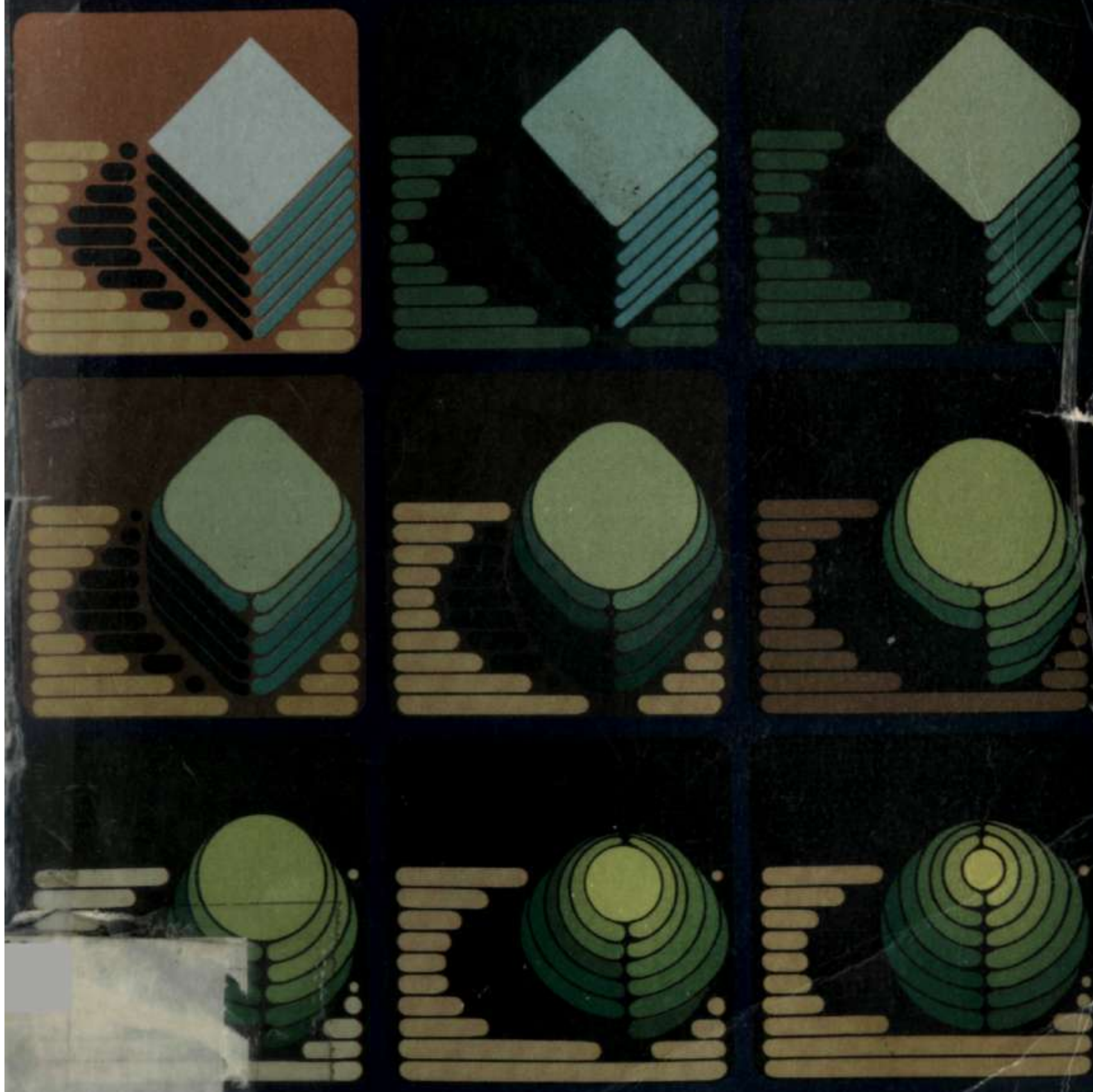
EDUSP
ATUAL EDITORA



ATUAL EDITORA
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESPAÇOS MÉTRICOS E INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA

HYGINO H. DOMINGUES



ATUAL EDITORA
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Espaços Métricos
e Introdução
à Topologia

HYGINO H. DOMINGUES
Professor da Universidade Estadual Paulista (UNESP)
– Campus de S. J. do Rio Preto –

Espaços Métricos e Introdução à Topologia

ATUAL EDITORA
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Capa: Sylvio Ulhoa Cintra
Composição e artes: PAIKA Realizações Gráficas Ltda.
Revisão: Maria Stella de Oliveira, Paula da Conceição Henriques Rocha, Eva Yuriko Nakada, Maria de Fátima Gallucci, Maria de Lourdes F. de Carvalho
Fotolitos: Ponto Reproduções Gráficas SCL
Impressão:
LIS Gráfica e Editora Ltda.

CIP — Brasil. Catalogação-na-Publicação
Câmara Brasileira do Livro, SP

Domingues, Higino Hugueros, 1934 —
D718e Espaços métricos e introdução à topologia/ Hygino H. Domingues. — — São Paulo: Atual, 1982.

Bibliografia.

1. Espaços métricos 2. Topologia I. Título.

17. CDD — 513.83
18. — 514
82 — 1326 18. — 514.3

Índice para catálogo sistemático:

1. Espaços métricos: Topologia: Matemática 513.83 (17.) 514.3 (18.)
2. Topologia: Matemática 513.83 (17.) 514 (18.)

ATUAL EDITORA LTDA.
Rua José Antonio Coelho, 785
Telefones: 571 7796 — 549 1720 — 549 0926
CEP 04011 — São Paulo — SP — Brasil

PREFÁCIO

A bibliografia matemática brasileira é, de um modo geral, bastante limitada no aspecto quantitativo. No que se refere à topologia, em particular, acreditamos que esse estado de coisas é relativamente mais acentuado, inclusive pelo fato de não se tratar de disciplina obrigatória em nenhum de nossos currículos mínimos. No entanto seu valor matemático intrínseco, suas ligações com outras partes da matemática, além de suas múltiplas aplicações, são indubitáveis, a justificar talvez até sua inclusão (pelo menos a nível introdutório de espaços métricos) nas licenciaturas em matemática.

O presente texto é fruto de nossa experiência como professor de topologia por vários anos na PUC-SP e na UNESP (Campus de S. J. do Rio Preto). Tal alusão visa a patentear o caráter didático do livro — na verdade uma iniciação ao assunto, nascida de notas de aulas, cuja preocupação maior é aproximar um pouco mais essa matéria do estudante de graduação em matemática, a partir de um enfoque clássico.

A ênfase do trabalho é para os espaços métricos. Nesse sentido o capítulo I, sobre conjuntos e números reais, é uma preparação de terreno: quanto a conjuntos o realce é para os conceitos de enumerável e não enumerável; no que se refere aos números reais o objetivo é, a partir de uma axiomatização disfarçada de côrpo ordenado completo, estudar um pouco a "topologia da reta", com vistas inclusive a generalizações que serão feitas posteriormente. Do capítulo II ao capítulo VII estudam-se os espaços métricos, nos seus aspectos mais básicos e elementares, o que se constitui no tronco principal deste trabalho. Por último o capítulo VIII é uma breve introdução à topologia geral, onde o grau de generalização e de abstração a que se procura chegar decorrem naturalmente dos capítulos precedentes.

Queremos ainda deixar registrados os nossos agradecimentos aos seguintes colegas: Profs. Santo Scuderi, Maria Cecília C. e Silva (PUC-SP) e Hermes A. Pedroso (IBILCE — Rio Preto), nossos parceiros em diversos cursos de topologia que ministramos — suas sugestões ou a observação de seu trabalho nos foram muito úteis; Prof. Peter Almay (PUC—SP) com que não raro trocamos idéias sobre tópicos desses cursos — o que só nos trouxe bastante proveito.

S. J. do Rio Preto, 1982

O autor

Dedicado

à minha mãe

e

à minha esposa.

ÍNDICE

CONJUNTOS — NÚMEROS REAIS

§ 1 — CONJUNTOS

1. Introdução

Por volta de 1870 o matemático Georg Cantor estudava o problema da representação das funções reais por meio de séries trigonométricas. Uma das questões a que se dedicava era a de estender a unicidade da representação a funções dotadas de "infinitos" pontos singulares. Foi assim, indiretamente portanto, que a atenção de Cantor se encaminou no sentido de diversas questões ligadas a conjuntos infinitos. E suas pesquisas e contribuições a respeito vieram a se constituir na base da teoria dos conjuntos como disciplina matemática independente.

Contudo já em 1632 Galileu chamava a atenção para o fato de que uma correspondência biunívoca pode ser estabelecida entre o conjunto dos números naturais e o dos quadrados perfeitos, não obstante estes últimos se tornarem cada vez mais raros à medida que se avança na seqüência dos números naturais. Muito embora tivesse percebido que o número de quadrados perfeitos não é menor que o de números naturais, Galileu não encontrou fundamento para considerá-los iguais. Afirmou inclusive (e erradamente como é sabido hoje) não ser possível a comparação entre "números infinitos" em termos de "menor", "igual" ou "maior".

Outro precursor da teoria dos conjuntos foi Bolzano. Segundo Carl B. Boyer [2] Bolzano já teria percebido, ao redor de 1840, que ". . . a infinidade dos números reais é diferente da infinidade dos inteiros, sendo não enumerável". Em sua obra póstuma surgida em 1850, "Paradoxien des Unendlichen" ("Paradoxos sobre o infinito"), Bolzano mostrou serem comuns correspondências biunívocas entre conjuntos e subconjuntos próprios desses conjuntos. Bolzano é considerado, dentre os seus contemporâneos, o matemático com idéias mais apropriadas a respeito dessas questões.

Em 1872 Dedekind em seu "Stetigkeit und irrationale zahlen" cuja tradução é "A continuidade e os números irracionais" apresentou a primeira definição correta de conjunto infinito: "Diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo; caso contrário S se diz infinito". Quer dizer, em linguagem matemática mais atual, S é infinito se existe $A \subset S$, $A \neq S$, e se existe uma função bijetora $f: A \to S$. Mas embora tenha atingido assim a característica fundamental dos conjuntos infinitos, Dedekind não chegou a perceber a existência de infinitos de espécies diferentes. A percepção deste fato, pedra-de-toque para o desenvolvimento da incipiente teoria dos conjuntos, foi o grande mérito inicial de Cantor.

2. Conceito de Conjunto

O conceito de *conjunto* certamente é o mais importante dos conceitos básicos da matemática moderna. Como sinônimos de conjunto, no sentido que explicitaremos a seguir, usaremos os termos "coleção" e "classe", indistintamente. Quando nos referimos a um conjunto estamos via-de-regra pensando em alguns objetos que, por um motivo ou outro, nos convém situar coletivamente. Não há restrições quanto a como devem ser esses objetos salvo que excluíremos a hipótese, que seria aliás bastante inusitada do ponto de vista intuitivo, de um conjunto fazer parte, como membro, dele próprio. Assim não ha nenhum incoveniente em se pensar num conjunto formado por um número real, uma bola de futebol e um automóvel.

Certos conjuntos, pela sua importância e pela freqüência com que se repetem, são indicados por notações especiais:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

De um modo geral os conjuntos são indicados por letras maiúsculas de nosso alfabeto ao passo que os objetos ou membros de um conjunto por letras minúsculas, também de nosso alfabeto.

Os objetos de um conjunto além de *membros* desse conjunto são chamados em geral de *elementos* do conjunto. Se B é um conjunto e x é um elemento de B indicaremos este fato por $x \in B$ o que será lido "x pertence a B". Se x não é um elemento de B então dizemos que "x não pertence a B" e simbolizamos isto por "$x \notin B$". Por simplificação de linguagem não raro encontraremos construções como "se $x \in A$" ou "para todo $x \in A$" cujo significado, aliás, é óbvio.

Dois conjuntos se dizem *iguais* se constam exatamente dos mesmos elementos, isto é, se todo elemento de um também é elemento do outro e vice-versa. Assim são iguais, por exemplo, o conjunto das vogais de nosso alfabeto e o conjunto das vogais do alfabeto da língua inglesa. O símbolo para indicar a igualdade de conjuntos é o usual, isto é, =. Se todo elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B dizemos que A *está contido* em B e escrevemos $A \subset B$. É claro que vale a equivalência*: $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. A relação assim introduzida e que se expressa pelo símbolo $\subset$ tem as seguintes propriedades: (i) para todo conjunto A, $A \subset A$ (*reflexiva*); (ii) se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ (*anti-simétrica*); (iii) se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (*transitiva*). Se $A \subset B$ dizemos que A é um *subconjunto* de B. Dizer que um conjunto B *contém* um conjunto A, o que se expressa por $B \supset A$, significa simplesmente que A é subconjunto de B, ou seja, $A \subset B$. Portanto: $B \supset A \Longleftrightarrow A \subset B$. O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto A é chamado *conjunto das partes* de A e é indicado por $\mathscr{P}(A)$. Se A é um subconjunto de B tal que $A \neq B$, então dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B e a notação com que se indica este tipo de inclusão é $A \subsetneqq B$.

Há duas maneiras usuais de se indicar um conjunto. Sempre que possível ou praticável podemos escrever seus elementos entre chaves como nos seguintes exemplos: $\{0, 1, 2\}$ é o conjunto dos três primeiros números naturais; $\{1, -1, i, -i\}$ é o conjunto das raízes quartas da unidade; $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais pares. Há casos em que tal processo não é prático ou não é possível. Para estes aceitamos como premissa o seguinte: se A é um conjunto tal que seus elementos gozam ou não de uma dada propriedade P, então existe um subconjunto $B \subset A$ que é formado exclusivamente pelos elementos que gozam da propriedade P. A notação usada neste caso é a seguinte:

$$B = \{x \in A \mid P\}$$

que pode ser lida assim: B é o conjunto dos elementos do conjunto A que gozam da propriedade P. Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

Aqui observamos que não seria possível descrever este conjunto, através dos seus elementos, seguindo a maneira anterior de indicar um conjunto. Vejamos alguns exemplos em que um conjunto pode ser descrito de um ou outro modo:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leqslant 2\} = \{1, 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

* O símbolo $\Longleftrightarrow$ será usado neste texto para relacionar duas sentenças matemáticas p e q com o seguinte sentido: $p \Longleftrightarrow q$ significa que p tem como conseqüência (acarreta) q e vice-versa. É óbvio então o significado, por exemplo, de $p \Longrightarrow q$.

Retornemos à premissa citada linhas acima e consideremos o caso em que nenhum elemento de um conjunto A possua uma dada propriedade P. Por exemplo: $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\}$. Em qualquer caso como este, o conjunto B, cuja existência estamos aceitando, chama-se *conjunto vazio* e é indicado pelo símbolo $\emptyset$.

Ainda nessa linha de idéias, se A é um conjunto não vazio e $a \in A$, então existe $B = \{x \in A | x = a\}$. Este conjunto B é um *conjunto unitário* que também é indicado por $B = \{a\}$.

3. União — Intersecção — Complementação

a) Sejam A e B subconjuntos de um dado conjunto U. A *união* de A com B é o subconjunto de U, indicado por $A \cup B$, assim determinado:

$$A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Devemos observar que o "ou" usado na propriedade que determina $A \cup B$ tem um sentido mais amplo do que aquele com que é usado na linguagem corrente. Nesta ele é em geral exclusivo, como por exemplo em "vou hoje à escola ou ao clube". No nosso caso não existe essa exclusividade: um elemento de $A \cup B$ pode estar simultaneamente em A ou em B. Exemplo: se $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \geqslant 0\}$ e $B = \{-2, -1, 0\}$, então $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} | x \geqslant -2\}$. Note-se que o elemento 0, que está em A e em B, também está em $A \cup B$.

A operação de formar uniões de subconjuntos de um dado conjunto U tem as seguintes propriedades:

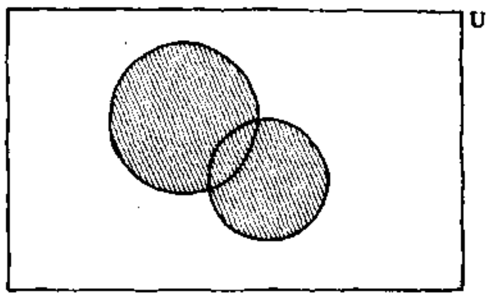
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ para quaisquer $A, B, C \subset U$ (*associativa*);
- $A \cup B = B \cup A$, para quaisquer $A, B \subset U$ (*comutativa*);
- $A \cup \emptyset = A$, para qualquer $A \subset U$ ($\emptyset$ é o *elemento neutro*);
- $A \cup U = U$, para qualquer $A \subset U$;
- $A \cup B = B \iff A \subset B$, para quaisquer $A, B \subset U$.

Vejamos como se justifica parte desta última: ($\Longrightarrow$) se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e como $A \cup B = B$ (hipótese) conclui-se que $x \in B$. Como todo elemento de A está em B, então $A \subset B$. ($\Longleftarrow$) Fica como exercício.

Nota: Podemos visualizar a união de dois conjuntos (como outras operações que serão introduzidas posteriormente) através dos chamados *diagramas de Euler-Venn*. Para tanto representamos o conjunto U por um retângulo e cada um dos subconjuntos A e B por círculos contidos no interior do retângulo. Quando se tratar de representar a união esta será hachurada como mostra a figura que segue.

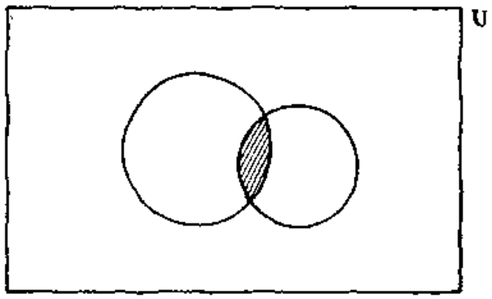
b) Dados dois subconjuntos A e B de um conjunto U, a *intersecção* de A com B, que indicaremos por $A \cap B$, é o seguinte subconjunto de U:

$$A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}$$



$A \cup B$

Vejamos um diagrama de Euler-Venn para representar a intersecção:



$A \cap B$

Para a operação de obter intersecções a partir de subconjuntos de U valem as seguintes propriedades:

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, para quaisquer $A, B, C \subset U$;
- $A \cap B = B \cap A$, para quaisquer $A, B \subset U$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, para qualquer $A \subset U$;
- $A \cap B = A \iff A \subset B$.

Nota: As operações *união* e *intersecção* estão relacionadas através das propriedades distributivas que passamos a enunciar:

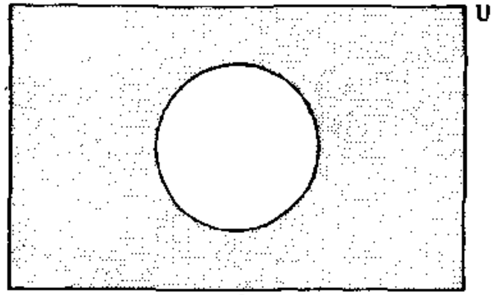
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

para quaisquer $A, B, C \subset U$.

c) Para cada subconjunto $A \subset U$, indica-se por $\complement_U A$ e chama-se *complementar* de A em relação a U, o seguinte subconjunto de U:

$$\complement_U A = \{x \in U | x \notin A\}$$

Quando estivermos lidando com um determinado conjunto U pré-fixado, a notação $\complement_U A$ será simplificada para A^c apenas. Por exemplo, se $U = \mathbb{Z}$ e $A = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$, então $A^c = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$.

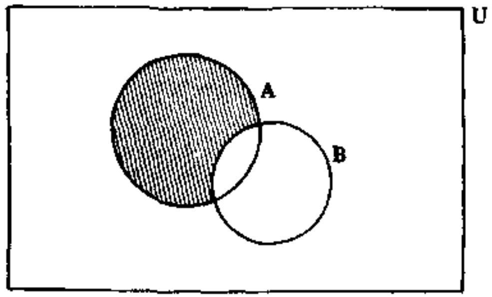


$A^c = \complement_U A$

Dados dois subconjuntos A e B de um dado conjunto U, a *diferença* entre A e B, que se denota por $A - B$, é definida por

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Evidentemente $A - B = A \cap B^c$ como se pode notar, inclusive, no diagrama a seguir:

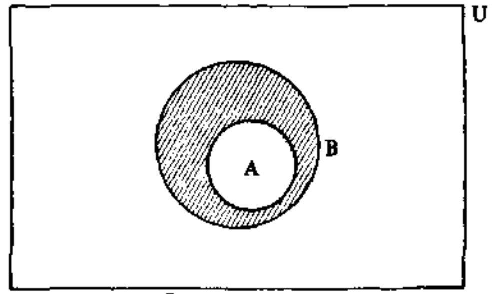


$A - B = A \cap B^c$

Vejamos algumas propriedades envolvendo complementares e diferenças (para subconjuntos de um dado conjunto U):

- $\emptyset^c = U$ e $U^c = \emptyset$
- $(A^c)^c = A$
- $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = U$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
- Se A e B são subconjuntos de U tais que $A \subset B$, então $\complement_B A = A^c \cap B$.

Vejamos uma ilustração deste fato através de um diagrama de Euler-Venn:



$\complement_B A = A^c \cap B$

4. Produtos Cartesianos de Conjuntos

Para cada par de conjuntos A e B admitiremos a existência do conjunto $A \times B$, chamado *produto cartesiano* de A por B, cujos elementos são os *pares ordenados* (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$. O conceito de par ordenado é tomado aqui como primitivo, admitindo-se que, para quaisquer $(a, b), (c, d) \in A \times B$,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Assim: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 5\}$, então $A \times B = \{(1, 0); (1, 5); (2, 0); (2, 5); (3, 0); (3, 5)\}$. Devemos notar que, em geral, não vale a igualdade $A \times B = B \times A$.

O produto de três conjuntos A, B e C se define como $A \times B \times C = (A \times B) \times C$ e o produto de n conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ $(n \geqslant 2)$ é definido de maneira análoga, por indução, do seguinte modo:

$$E_1 \times \ldots \times E_n = (E_1 \times \ldots \times E_{n-1}) \times E_n$$

Um elemento $x \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ será indicado simplesmente por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ subconjuntos quaisquer. Para cada índice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sejam A_i e B_i subconjuntos quaisquer de E_i. Vale então o seguinte:

- $A_1 \times \ldots \times A_n = \emptyset \iff$ Existe um índice i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de modo que $A_i = \emptyset$.
- Se $A_1 \times \ldots \times A_n \neq \emptyset$, então $A_1 \times \ldots \times A_n \subset B_1 \times \ldots \times B_n \iff A_1 \subset B_1, \ldots, A_n \subset B_n$.
- $(A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \ldots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$.

A verificação desta última propriedade, por exemplo, se faz do seguinte modo:

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \ldots \times B_n)$.

Então $x \in A_1 \times \ldots \times A_n$ e $x \in B_1 \times \ldots \times B_n$ o que significa que, para cada índice i, $1 \leqslant i \leqslant n$, valem as relações $x_i \in A_i$ e $x_i \in B_i$; donde $x_i \in A_i \cap B_i$ para todo índice i. Conseqüentemente $x \in (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$ e fica provado que $(A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \ldots \times B_n) \subset (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$.

A demonstração da inclusão contrária também não oferece nenhuma dificuldade.

5. Relações Binárias

Uma *relação binária* do conjunto A no conjunto B é qualquer subconjunto de $A \times B$, ou seja:

$$(R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B) \iff R \subset A \times B$$

Como só lidaremos com este tipo de relações, então será comum nos referirmos a elas simplesmente como *relações* objetivando maior brevidade de expressão.

Exemplo: Se $A = \{0, 1\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $A \times B = \{(0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 2); (1, 3); (1, 4)\}$ e, por exemplo, $R = \{(0, 3)\}$, $S = \emptyset$ e $T = \{(0, 2); (1, 2); (1, 3)\}$ são relações de A em B. Observe-se que o número de relações de A em B, neste caso, é 2^6. Em geral, se A tem m elementos e B tem n elementos, 2^{mn} é o número de relações de A em B.

Se R é uma relação de A em B e se $(x, y) \in R$ este fato é indicado comumente por xRy. Naturalmente xRy significa que $(x, y) \in R$.

Uma relação R de conjunto A, no próprio conjunto A, chama-se relação sobre A. Assim:

$$(R \text{ é relação sobre } A) \iff R \subset A \times A$$

6. Funções

a) Vamos indicar em geral por letras minúsculas, quase sempre f, g ou h, os membros da importante classe das relações de um conjunto A num conjunto B, chamadas *funções* (ou *aplicações*), assim definidas:

> "$f \subset A \times B$ é uma função de A em B se, para cada $x \in A$, existe um único $y \in B$ de maneira que xfy."

Para indicarmos que f é uma função de A em B a notação normalmente usada é $f: A \longrightarrow B$ e, neste caso, ao invés de xfy usa-se $y = f(x)$ para significar que $(x, y) \in f$. Se $y = f(x)$ (lê-se "y igual a f de x") dizemos que y é a *imagem* de x por f ou que a x *está associado* (ou *corresponde*) y.

Para toda função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto A é chamado *domínio* de f, ao passo que B é o seu *contradomínio*. O conjunto das imagens é chamado *imagem* de f e é indicado por $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Às vezes usa-se a notação simplificada $x \longmapsto f(x)$ para expressar uma aplicação f (com domínio e contra-domínio já prefixados) em que $f(x)$ é a imagem do elemento genérico x do domínio.

Exemplo 1: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, então $f = \{(1, 4); (2, 4); (3, 5)\}$ é função de A em B e $\mathrm{Im}(f) = B$.

Exemplo 2: A relação $f = \{(1, 3); (2, 5)\}$ é uma função de $A = \{1, 2\}$ em $B = \{3, 4, 5\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{3, 5\}$.

Exemplo 3: $f = \{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

Exemplo 4: Dados $E_1, E_2, \ldots, E_n$, para cada $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ a função $f: E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow E_i$ dada por $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$, para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$, chama-se *projeção i-ésima*. Notação usual: p_i.

Uma função $f: A \longrightarrow B$ se diz *injetora* se, para quaisquer $x, y \in A$,

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

ou equivalentemente

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

Nos exemplos acima apenas a segunda função é injetora.

Diz-se que uma aplicação $f: A \longrightarrow B$ é *sobrejetora* se $\mathrm{Im}(f) = B$, ou seja, se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ de maneira que $f(x) = y$.

A aplicação do Exemplo 1 acima é sobrejetora; as dos Exemplos 2 e 3 não são sobrejetoras. No caso do Exemplo 3 observemos que o contradomínio é $\mathbb{N}$ e que $\mathrm{Im}(f) = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

Uma função $f: A \longrightarrow B$ ao mesmo tempo injetora e sobrejetora chama-se *bijetora*.

Da própria definição de função decorre o conceito de *igualdade* de duas funções: dadas $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

b) Seja X um subconjunto de um conjunto A. A aplicação $j: X \longrightarrow A$, definida por $j(x) = x$, para todo $x \in X$, chama-se *inclusão* de X em A. No caso particular de $X = A$ esta aplicação chama-se *aplicação idêntica* de A e é indicada por id_A. Assim

$$id_A : A \longrightarrow A$$

e $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

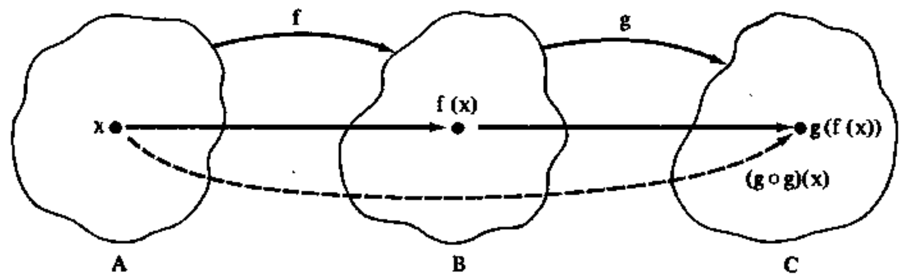
Seja $f: A \longrightarrow B$ uma aplicação qualquer. Para todo $X \subset A$ fica definida a *restrição* de f ao conjunto A que é a aplicação indicada por $f|X$ e assim definida:

$$f|X : X \longrightarrow B$$

e
$$(f|X)(x) = f(x),$$

para todo $x \in X$. Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $f = \{(1, 2); (2, 4)\}$ e $X = \{2\}$, então $f|X = \{(2, 4)\}$.

c) Dadas duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$, a *função composta* de f e g é a função, denotada por $g \circ f$, $g \circ f: A \longrightarrow C$, definida de maneira que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in A$.



Por exemplo, se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = x - 1$, então $g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função tal que $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para funções quaisquer $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ e $h: C \longrightarrow D$ é fácil provar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Se $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ são injetoras (sobrejetoras), então $g \circ f: A \longrightarrow C$ é também injetora (sobrejetora). Provemos apenas a segunda parte do que afirmamos. Então estamos supondo f e g sobrejetoras. Dado, pois, $z \in C$, existe $y \in B$ de modo que $g(y) = z$. E, ainda devido às hipóteses, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Donde $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Como conseqüência desses fatos resulta que se $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ são bijetoras o mesmo ocorre com $g \circ f$.

Dada uma função $f: A \longrightarrow B$, se existir $g: B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, então g é chamada *inversa* de f. A notação usual para a inversa de f é f^{-1}.

Proposição 1: Para que exista a inversa de uma função $f: A \longrightarrow B$ é necessário e suficiente que f seja bijetora.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos $x, y \in A$ e $f(x) = f(y)$. Daí $g(f(x)) = g(f(y))$, isto é, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ e como $g \circ f = id_A$, então $x = y$.

Provamos então que f é injetora. Por outro lado, dado $b \in B$, como $f \circ g = id_B$, então $(f \circ g)(b) = b$, o que é o mesmo que $f(g(b)) = b$. Mas $g(b) \in A$ e, portanto, dado $b \in B$, existe $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$, o que prova que f é sobrejetora.

($\Longleftarrow$) Como por hipótese f é bijetora a relação $g = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in f\}$ é uma função de B em A. De fato, dizer que f é bijetora significa que para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$ o que equivale a $(x, y) \in f$ e daí $(y, x) \in g$. Assim temos

$$f(x) = y \Longleftrightarrow g(y) = x$$

e portanto, para todo $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ o que mostra que $g \circ f = id_A$. Analogamente $f \circ g = id_B$. ∎

É fácil provar que se f é bijetora então f^{-1} também é bijetora e que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Devemos notar que a condição suficiente da proposição acima nos mostra como achar f^{-1}, uma vez dada a aplicação bijetora $f: A \longrightarrow B$. Em resumo

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

e
$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

caracterizam f^{-1}. Por exemplo

- Se $A = B = \{1, 2, 3\}$ e $f = \{(1, 2); (2, 3); (3, 1)\}$, então $f^{-1} = \{(2, 1); (3,2); (1, 3)\}$.
- Se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x + 1$, isto é, $f = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, então $f^{-1} = \{(x + 1, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Assim, $f^{-1}(x) = x - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) Consideremos uma função $f: A \longrightarrow B$. Dado um subconjunto $X \subset A$, chama-se *imagem direta* de X por f, e indica-se por $f(X)$, o seguinte subconjunto de B:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Por exemplo, se a função é $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e se $X = \{-a, a\}$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, então $f(X) = \{a^2\}$, ao passo que se $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leqslant x \leqslant a\}$, onde $a > 0$, então $f(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant a^2\}$.

Com relação ao conceito de imagem direta valem as seguintes propriedades, para toda função $f: A \longrightarrow B$:

- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $X \subset Y \subset A \Longrightarrow f(X) \subset f(Y)$
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, para quaisquer $X, Y \subset A$
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$, para quaisquer $X, Y \subset A$. Esta inclusão é fácil de provar observando que das inclusões $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$ decorre que $f(X \cap Y) \subset f(X)$ e $f(X \cap Y) \subset f(Y)$ e daí $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

• Se f é injetora, então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$. De fato, dado $z \in f(X) \cap \cap f(Y)$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $z = f(x) = f(y)$. Mas sendo f injetora, então $x = y \in X \cap Y$. Donde $z \in f(X \cap Y)$ e provamos assim que $f(X) \cap f(Y) \subset \subset f(X \cap Y)$. Como a inclusão contrária vale sempre, então fica provada a igualdade se f é injetora.

• Sejam $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos quaisquer e $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de $E_1, \ldots, E_n$, respectivamente. Então, para cada índice $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, tem-se

$$p_i(A_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n) = A_i$$

e) Consideremos $f: A \longrightarrow B$. Para qualquer $E \subset B$, a *imagem inversa* de E por f, indicada $f^{-1}(E)$, é o subconjunto

$$f^{-1}(E) = \{x \in A \mid f(x) \in E\}$$

Por exemplo, se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^2$ e se $E = \{x \in \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, então

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$$

Destaquemos as seguintes propriedades:

• $E \subset F \subset B \Longrightarrow f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$

• $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$, para quaisquer $E, F \subset B$

• $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$, para quaisquer $E, F \subset B$

• $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$, para todo $E \subset B$

• $f^{-1}(E - F) = f^{-1}(E) - f^{-1}(F)$, para quaisquer $E, F \subset B$

• Considerando $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$, então $(g \circ f)^{-1}(E) = = f^{-1}(g^{-1}(E))$, para todo $E \subset C$

• Consideremos as projeções $p_i: E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow E_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Para cada $A_i \subset E_i$ vale a seguinte igualdade:

$$p_i^{-1}(A_i) = E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n$$

Relacionando, ainda, imagem direta e imagem inversa temos os seguintes resultados, dada $f: A \longrightarrow B$:

• Para todo $X \subset A$, $X \subset f^{-1}(f(X))$ e, no caso de f ser injetora, então $X = f^{-1}(f(X))$.

De fato, se $x \in X$, então $f(x) \in f(X)$ e daí $x \in f^{-1}(f(X))$. Suponhamos agora f injetora e tomemos $x \in f^{-1}(f(X))$. Daí $f(x) \in f(X)$ e portanto existe $x_1 \in X$ tal que $f(x) = f(x_1)$ do que decorre, levando em conta a hipótese, que $x = x_1$ e portanto $x \in X$.

• Para todo $E \subset B$, $f(f^{-1}(E)) \subset E$ e, no caso de f ser sobrejetora, $f(f^{-1}(E)) = E$. Deixamos como exercício a verificação deste fato.

f) Consideremos uma função f que a cada elemento i de um conjunto I associa um subconjunto $f(i) \in \mathscr{P}(A)$ (conjunto das partes de A), ou seja, $f: I \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Para muitas destas funções o aspecto que mais importa é o conjunto-imagem. Quando este é o caso usa-se uma designação especial para estas funções: são elas chamadas *famílias de subconjuntos* de A; e usa-se também uma notação especial para indicá-las: ao invés de $f(i)$ para a imagem de um elemento $i \in I$, escolhe-se uma letra arbitrária maiúscula, por exemplo X, e indica-se essa imagem por X_i, isto é, $f(i) = X_i$, e a função f passa a ser então indicada por $(X_i)_{i \in I}$ ou apenas (X_i) quando não há possibilidade de confusão quanto ao conjunto I (*chamado conjunto dos índices*, em vez de domínio, neste caso).

Por exemplo

• Se o conjunto dos índices é $\{1, 2, \ldots, n\}$, então a família de subconjuntos resultante é uma *seqüência finita* ou *n-upla* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de subconjuntos de A.

• No caso de o conjunto de índices ser $N^* = \{1, 2, \ldots\}$ vamos ter uma seqüência $(X_1, X_2, \ldots)$ de subconjuntos de A.

• Se para cada $k \in \mathbb{R}$ fizermos $\{(x, y) \mid x = y + k\} = X_k$, então $(X_k)_{k \in \mathbb{R}}$ é uma família de subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cada conjunto é uma reta do $\mathbb{R}^2 = = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de A define-se a *união* $\bigcup\limits_{i \in I} X_i$ ou simplesmente $\cup X_i$, se não há dúvidas quanto ao conjunto de índices, assim:

$$\cup X_i = \{x \in A \mid \text{existe } i \in I \text{ e } x \in X_i\}$$

Assim um elemento de A está na união se, e somente se, está em algum dos conjuntos da família.

A *interseção* $\bigcap\limits_{i \in I} X_i$, ou apenas $\cap X_i$, com a mesma ressalva feita acima, é definida por:

$$\cap X_i = \{x \in A \mid x \in X_i, \text{ para qualquer } i \in I\}.$$

Logo um elemento x de A pertence a $\cap X_i$ se, e somente se, x pertence a todos os conjuntos X_i da família considerada.

Quando o conjunto de índices é $\{1, 2, \ldots, n\}$ então escreve-se $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ e $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ para indicar a interseção e a união da família $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. E quando $I = N^*$, então as notações respectivamente usadas são $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ e $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$.

Daremos agora um rol de propriedades envolvendo operações com famílias de subconjuntos de um dado conjunto.

• $\bigcup\limits_{i \in I}\left(\bigcup\limits_{j \in J} X_{i,j}\right) = \bigcup\limits_{(i,j) \in I \times J} X_{i,j}$

• $\left(\bigcup\limits_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup\limits_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup\limits_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cap Y_j)$

- $(\cup X_i)^c = \cap X_i^c$ e $(\cap X_i)^c = \cup X_i^c$

Agora, se temos uma função $f: A \longrightarrow B$ e se $(X_i)_{i \in I}$ e $(Y_j)_{j \in J}$ são famílias de subconjuntos, respectivamente de A e de B, então:

- $f(\cup X_i) = \cup f(X_i)$
- $f(\cap X_i) \subset \cap f(X_i)$, valendo a igualdade entre os dois membros quando f for injetora.
- $f^{-1}(\cup Y_i) = \cup f^{-1}(Y_i)$
- $f^{-1}(\cap Y_i) = \cap f^{-1}(Y_i)$

7. Conjuntos Enumeráveis

a) Sejam A e B conjuntos quaisquer. Se existe uma função bijetora $f: A \longrightarrow B$, então dizemos que o conjunto A é *equipotente* ao conjunto B. Observemos que:

- Como para todo conjunto A, a aplicação $id_A: A \longrightarrow A$ é bijetora, então todo conjunto é equipotente a si mesmo. Logo vale a propriedade *reflexiva* para esta relação entre conjuntos.
- Se A é equipotente a B, isto é, se existe $f: A \longrightarrow B$ bijetora, então, como $f^{-1}: B \longrightarrow A$ também é bijetora, B também é equipotente a A. Esta propriedade é a *simétrica*.
- Se A é equipotente a B e B é equipotente a C, então existem $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ bijetoras. Daí então $g \circ f: A \longrightarrow C$ também é bijetora e portanto A é equipotente a C. A propriedade que acabamos de verificar é a *transitiva*.

No caso de existir uma aplicação bijetora $f: A \longrightarrow B$ nos referiremos a A e B simplesmente como *conjuntos equipotentes*. Notação: $A \approx B$.

Por exemplo:

- Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ são equipotentes já que $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ dada por $f(n) = n - 1$ é bijetora.
- Os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ também são equipotentes. De fato, $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$, para todo $n \geqslant 0$, e $f(n) = (-2)n - 1$, para todo $n < 0$, é bijetora. Esta aplicação pode ser visualizada no seguinte quadro:

$$\begin{array}{lcl} 0 \longrightarrow 0 & \qquad & -1 \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow 2 & & -2 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 4 & & -3 \longrightarrow 5 \\ 3 \longrightarrow 6 & & -4 \longrightarrow 7 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

- O intervalo $]-1, +1[= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais são equipotentes. A função $f:]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ é bijetora.

De fato, sejam $x, y \in]-1, +1[$ tais que

$$\frac{x}{1 - |x|} = \frac{y}{1 - |y|}$$

Como os denominadores dessas frações são números maiores que zero então ou x e y são nulos (donde iguais), ou $x, y > 0$ e daí $|x| = x$, $|y| = y$ e portanto $\dfrac{x}{1 - x} = \dfrac{y}{1 - y}$ do que vai resultar $x = y$ ou, ainda, $x, y < 0$ caso em que, por raciocínio análogo ao anterior, se chega à igualdade $x = y$. Provamos pois que f é injetora.

Agora, dado $b \in \mathbb{R}$, sempre existirá x no intervalo $]-1, +1[$ tal que $\dfrac{x}{1 - |x|} = b$. De fato, se $b = 0$, então $x = 0$; se $b > 0$, então $x > 0$ e da igualdade $\dfrac{x}{1 - x} = b$ se tira $x = \dfrac{b}{1 + b}$ que obviamente pertence a $]-1, +1[$; o caso $b < 0$ é análogo. Donde f é também sobrejetora.

b) Um conjunto A se diz *finito* se $A = \emptyset$ ou, em caso contrário, se existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $A \approx \{1, 2, \ldots, n\}$. Se A não é um conjunto finito, então dizemos que A é *infinito*. Portanto dizer que A é infinito é o mesmo que dizer que A não é equipotente a nenhum dos subconjuntos $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^*$.

Decorrem diretamente da definição dada, os seguintes resultados:

- Se $A \subset U$ é finito e se $x \in U - A$, então $A \cup \{x\}$ também é finito;
- Se A é um conjunto infinito, então $A - \{x\}$ também é infinito, qualquer que seja $x \in A$.

c) Um conjunto A se diz *enumerável* se A é equipotente a algum subconjunto de $\mathbb{N}^*$.

É claro então que todo conjunto finito é enumerável. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros também é enumerável pois, como já vimos, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}^*$, donde $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}^*$.

Tudo o que faremos daqui para a frente, neste item (c), tem como principal objetivo mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais também é enumerável.

Dado um conjunto M, uma *partição* em M é uma família $(M_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de M tais que: (i) $M_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$; (ii) $\cup M_i = M$; (iii) para quaisquer M_i e M_j da família, vale uma, e uma só, das igualdades: $M_i = M_j$ ou $M_i \cap M_j = \emptyset$.

Vejamos um exemplo que nos vai ser útil daqui a pouco. Seja $f: M \longrightarrow A$ uma aplicação sobrejetora. Para cada $a \in A$ seja $M_a = \{x \in M \mid f(x) = a\}$. Mostremos que $(M_a)_{a \in A}$ é uma partição de M. (i) Como f é sobrejetora, para cada $a \in A$, existe $x \in M$ tal que $f(x) = a$; logo $M_a \neq \emptyset$, para todo $a \in A$. (ii) Dado $x \in M$, seja $a = f(x)$; então $x \in M_a$ e portanto $x \in \cup M_a$; isto prova que $M \subset \cup M_a$ e como, obviamente, vale a inclusão contrária, então se tem a igualdade exigida. (iii) Suponhamos $M_a \neq M_b$, por exemplo suponhamos que exista $x \in M_a$ tal que $x \notin M_b$, e admitamos a existência de um elemento $y \in M_a \cap M_b$. Temos então as seguintes igualdades: $f(x) = a$, $f(y) = a$, $f(y) = b$ e, ao mesmo tempo, a desigualdade $f(x) \neq b$ e portanto uma contradição.

Admitiremos axiomaticamente que, dada uma partição $(M_i)_{i \in I}$ de um conjunto M, existe um subconjunto $L \subset M$ que contém um, e um só elemento de cada conjunto M_i. Cada conjunto L nessas condições será chamado *conjunto-escolha* relativamente à partição dada. Por exemplo, se em $\mathbb{Z}$ consideramos a partição $(\{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}; \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}; \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\})$ então $L = \{0, 1, 2\}$, por exemplo, é um conjunto-escolha associado a essa partição.

Com esses pré-requisitos podemos mostrar alguns resultados básicos sobre enumerabilidade.

- "Um conjunto A é enumerável se, e somente se, existe $L \subset \mathbb{N}^*$ e existe $f: L \longrightarrow A$ sobrejetora".

É claro que se A é enumerável existem L e $f: L \longrightarrow A$ nas condições enunciadas. Reciprocamente, se f é sobrejetora seja $M \subset L$ um conjunto-escolha determinado pela partição $(L_a)_{a \in A}$, onde $L_a = \{x \in L \mid f(x) = a\}$ para todo $a \in A$. Obviamente $f|M: M \longrightarrow A$ é bijetora e como $M \subset L \subset \mathbb{N}^*$, então A é enumerável.

- "Se existe $f: A \longrightarrow B$ sobrejetora e se A é enumerável, então B também é enumerável".

Sendo A enumerável, existe $g: M \longrightarrow A$ bijetora, onde M é um subconjunto de $\mathbb{N}^*$. Então $f \circ g: M \longrightarrow B$ é sobrejetora pois se compõe de duas aplicações sobrejetoras. Devido ao resultado anterior podemos concluir então que B é enumerável.

- "Todo subconjunto de um conjunto enumerável A também é enumerável".

Seja $B \subset A$ não vazio e fixemos $b \in B$. A aplicação $f: A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = x$, $\forall x \in B$, e $f(x) = b$ para todo $x \in A - B$, é sobrejetora. O resultado anterior nos garante então que B é enumerável.

Em particular todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ é enumerável. Por exemplo é enumerável o conjunto $K = \{2^m \cdot 3^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

- "São enumeráveis os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$".

De fato, a aplicação $f: K \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(2^m \cdot 3^n) = (m, n)$ é sobrejetora. Sendo K enumerável, então $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ também é enumerável e o mesmo então ocorre com $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ por ser subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- "O conjunto $\mathbb{Q}_+^*$ dos números racionais maiores que zero é enumerável".

A aplicação $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}_+^*$ definida por $f(m, n) = \dfrac{m}{n}$ é sobrejetora; decorre então que $\mathbb{Q}_+^*$ também é enumerável.

- "Se $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são subconjuntos enumeráveis de um mesmo conjunto U, então $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ também é enumerável".

Para cada $A_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ existe um subconjunto $M_i \subset \mathbb{N}^*$ e existe uma bijeção $f_i: M_i \longrightarrow A_i$. Seja $M = \cup M_i$ e definamos $f: \mathbb{N}^* \times M \longrightarrow A$ por: $f(r, s) = f_r(s)$, se $s \in M_r$, e $f(r, s) = k$ (elemento fixo de A), se $s \notin M_r$. Dado $y \in A$, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $y \in A_r$ e, como f_r é sobrejetora, $y = f_r(s) = f(r, s)$, para um certo $s \in M_r$, o que mostra que f é sobrejetora. Mas como $\mathbb{N}^* \times M$ é enumerável (subconjunto de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$), então A também é enumerável.

Notemos que a mesma demonstração poderia ser feita, com ligeiras mudanças, para provar que se $A_1, \ldots, A_n$ são enumeráveis, então $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ também é enumerável.

- "O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável".

Com efeito, vale a partição $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-^*$ onde $\mathbb{Q}_-^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid -x \in \mathbb{Q}_+^*\}$. Ora, $\mathbb{Q}_+^* \approx \mathbb{Q}_-^*$ através da aplicação dada por $x \longmapsto -x$, e portanto $\mathbb{Q}_-^*$ é enumerável. Sendo $\mathbb{Q}$ a união de três conjuntos enumeráveis temos a conclusão desejada.

- "Se A é um conjunto infinito existe então um subconjunto $E \subset A$ enumerável e infinito".

Para justificar esta propriedade vamos usar sucessivamente o axioma da existência de um conjunto-escolha para cada partição de um dado conjunto. Assim, seja $x_1 \in A$ e consideremos os subconjuntos $\{x_1\}$ e $A - \{x_1\}$. A partição determinada em A por estes subconjuntos nos permite considerar o subconjunto $\{x_1, x_2\} \subset A$, onde $x_2 \in A - \{x_1\}$, ou seja, $x_2 \neq x_1$. Considerando agora a partição de A formada por $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ e $A - \{x_1, x_2\}$ podemos garantir que existe $x_3 \in A$ tal que $x_3 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_2$. Assim sucessivamente o subconjunto $E = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset A$, obtido segundo o raciocínio acima, é infinito e enumerável pois é equipotente a $\mathbb{N}^*$.

8. Relações de Equivalência

Seja R uma relação sobre um conjunto A ($\Longleftrightarrow R \subset A \times A$). Dizemos que R é uma *relação de equivalência sobre A* se são válidas as seguintes propriedades:

(i) xRx, para todo $x \in A$ (*reflexiva*);
(ii) $xRy \Longrightarrow yRx$ (*simétrica*);
(iii) xRy e $yRz \Longrightarrow xRz$ (*transitiva*).

Exemplo 1: Se $A = \{1, 2, 3\}$, então $R = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2); (2, 1)\}$ é uma relação de equivalência sobre A; mas

$$S = \{(1, 1); (2, 2); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$T = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)\}$$
$$L = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2); (2, 3)\}$$

não são relações de equivalência sobre o mesmo conjunto A.

Exemplo 2: Se $A = \mathbb{Z}$, para cada $m > 1$ a relação de *congruência* definida por

$$\text{“}x \equiv y \pmod m \iff m \mid (y - x)\text{”}$$

é uma importante relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplo 3: Dado A (conjunto qualquer) a relação sobre $\mathcal{P}(A)$ definida por

$$X \approx Y \iff X \text{ é equipotente a } Y$$

é uma relação de equivalência como já mostramos no item anterior.

Se R é uma relação de equivalência sobre A e se $a \in A$, então a *classe de equivalência* de a (segundo R) é o subconjunto, cuja notação é $[a]$, assim definido

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

Isto é, $[a]$ é o subconjunto de A formado pelos elementos que são equivalentes ao elemento a (segundo a relação de equivalência R). Reportando-nos aos exemplos anteriores temos: no Exemplo 1 as classes de equivalência são $[1] = [2] = \{1, 2\}$ e $[3] = \{3\}$ e no Exemplo 2: $[0] = \{0, \pm m, \pm 2m, \ldots\}$, $[1] = \{1, m + 1, -m + 1, 2m + 1, -2m + 1, \ldots\}$, etc. Quanto ao Exemplo 3, supondo por exemplo $A = \{x, y\}$ e portanto $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$, temos $[\emptyset] = \{\emptyset\}$, $[x] = [y] = \{\{x\}, \{y\}\}$ e $[\{x, y\}] = \{\{x, y\}\}$.

Proposição 2: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então as classes de equivalência determinadas por R formam uma partição de A.

Demonstração:

a) Como vale aRa, para todo $a \in A$ (propriedade reflexiva), então $a \in [a]$ e portanto $[a] \neq \emptyset$ qualquer que seja $a \in A$.

b) Como todo $a \in A$ pertence a $[a]$, então $A \subset \cup[a]$ (reunião das classes de equivalência). É óbvio, por outro lado, que $\cup[a] \subset A$ uma vez que cada $[a]$ é um subconjunto de A. Logo vale a igualdade $A = \cup[a]$.

c) Suponhamos por absurdo $[a] \neq [b]$ e $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Então existe (por exemplo) $x \in [a]$ tal que $x \notin [b]$ e $y \in [a] \cap [b]$. Donde xRa, yRa, yRb e portanto (devido à simétrica e à transitiva) xRb, ou seja, $x \in [b]$. Absurdo. Donde $[a] = [b]$ ou $[a] \cap [b] = \emptyset$ para quaisquer classes $[a]$ e $[b]$. ∎

O conjunto das classes de equivalência determinadas sobre um conjunto A por uma relação de equivalência R é chamado *conjunto quociente* de A por R e é indicado usualmente por A/R. Assim

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

onde

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

para todo $a \in A$.

9. Relações de Ordem

Uma relação $\mathcal{O}$ sobre um conjunto A é chamada *relação de ordem* sobre A se as seguintes condições se verificam:

(i) $x \mathcal{O} x$, para todo $x \in A$ (*reflexividade*);
(ii) $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} x \implies x = y$ (*anti-simetria*);
(iii) $x \mathcal{O} y$ e $y \mathcal{O} z \implies x \mathcal{O} z$ (*transitividade*).

Exemplo 1: Em $\mathbb{R}$ a relação $\leqslant$ (menor que ou igual) é uma relação de ordem porque:

(i) $x \leqslant x$ é verdadeira, para todo $x \in \mathbb{R}$;
(ii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$ e
(iii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant z \implies x \leqslant z$.

Analogamente, em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ a relação “menor que ou igual”, definida da maneira usual em cada um desses conjuntos, é uma relação de ordem.

Exemplo 2: Para todo conjunto A, a relação $X \subset Y$ no conjunto das partes de A é também uma relação de ordem pois:

(i) $X \subset X$, para todo $X \subset A$;
(ii) $X \subset Y$ e $Y \subset X \implies X = Y$ e
(iii) $X \subset Y$ e $Y \subset Z \implies X \subset Z$, para quaisquer $X, Y, Z \subset A$.

Uma relação de ordem $\mathcal{O}$ sobre um conjunto A se diz *total* se, para quaisquer $x, y \in A$, é verdadeira uma das seguintes afirmações: $x \mathcal{O} y$ ou $y \mathcal{O} x$. Um conjunto A, dotado de uma relação de ordem total, é chamado *conjunto totalmente ordenado*; em contraposição, se se considera sobre A uma relação de ordem (não necessariamente total) então nos referimos a A como sendo um *conjunto parcialmente ordenado.*

Por exemplo o conjunto $\mathbb{R}$ em relação a “$\leqslant$” é totalmente ordenado pois, para $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Já o conjunto das partes de $A = \{1, 2\}$, por exemplo, não é totalmente ordenado em relação à inclusão, pois considerando $X = \{1\}$ e $Y = \{2\}$ não se tem nem $X \subset Y$ e nem $Y \subset X$.

§ 2 — NÚMEROS REAIS

1. Introdução

Uma construção axiomática formal e rigorosa dos números reais fez-se necessária no século passado ao longo de uma fase da matemática chamada, devido a F. Klein, de "aritmetização da análise". Nesta o que se levou a termo, em resumo, foi a fundamentação rigorosa do cálculo (até então grandemente apoiado na intuição geométrica), com base na idéia de número.

Na verdade vários foram os matemáticos do século XIX que contribuíram nesse sentido. Aliás, registremos de passagem que os números irracionais já eram conhecidos pelos gregos antes de Cristo. Aristóteles (384 a 322 a.C.) deixou registrada uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ atribuída aos pitagóricos. Naturalmente o conhecimento de que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis leva a um repensamento no conceito de razão. Mas já no livro V de Euclides, atribuída por muitos a Eudoxio (406 a 355 a.C.), encontra-se a formulação de tal conceito de maneira absolutamente correta.

Foi Dedekind, em sua obra já citada, o primeiro matemático a chegar a uma conceituação rigorosa e satisfatória de número real. E se bem que provavelmente tenha se inspirado nas idéias de Eudoxio, essa definição era puramente aritmética. Dedekind deixou de lado a idéia de que a continuidade repousava sobre uma suposta propriedade de ligação entre os pontos da reta para trabalhar, contrariamente, sobre a observação de que cada ponto de uma reta a divide em duas partes que podem ser caracterizadas aritmeticamente.

Um "corte" de Dedekind no conjunto dos racionais é, em síntese, determinado por um subconjunto C de $\mathbb{Q}$ que tem as seguintes propriedades:

(i) Se $x \in C$ e $y \in \mathbb{Q}$ é tal que $y < x$, então $y \in C$;

(ii) Para todo ponto $x \in C$, existe $z \in C$ tal que $z > x$. Deduz-se daí que C não possui máximo nem mínimo. Se $a \in \mathbb{Q}$ o conjunto $C(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$ determina um corte ao qual se chama *corte racional*. O subconjunto $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ ou } (x \geqslant 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$ também determina um corte em $\mathbb{Q}$. O conjunto dos números reais, nessa linha de idéias, nada mais é do que o conjunto dos cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$. Nessas condições pode-se mostrar que a correspondência $a \longmapsto C(a)$ de $\mathbb{Q}$ no conjunto de todos os cortes racionais é um isomorfismo o que nos permite considerar $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. Os números irracionais são determinados pelos cortes de Dedekind não racionais, como o segundo exemplo dado acima e que define o número $\sqrt{2}$.

O "corpo ordenado" $\mathbb{R}$ dos números reais tem papel fundamental na teoria dos espaços métricos, objeto principal deste trabalho. Contudo não faremos uma construção lógico-formal de $\mathbb{R}$ a partir do corpo $\mathbb{Q}$, seja pelos cortes de Dedekind ou por algum outro processo equivalente. Admitiremos conhecida a noção intuitiva de número real, citaremos as propriedades algébricas e de ordem básicas de

$\mathbb{R}$ e a partir delas, tomadas praticamente como axiomas, alguns resultados importantes e necessários posteriormente, embora nem sempre bem conhecidos pelos alunos, serão conseguidos.

2. O Corpo $\mathbb{R}$

Consideremos a adição $(x, y) \longmapsto x + y$ e a multiplicação $(x, y) \longmapsto xy$ em $\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades para essas operações:

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(ii) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(iv) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, indicado por $-x$, de maneira que $x + (-x) = 0$

(v) $x(yz) = (xy)z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(vi) $xy = yx$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(vii) $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(viii) Para cada $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, indicado por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$

(ix) $x(y + z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

O fato de a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ gozarem das propriedades acima permitem que nos refiramos a $\mathbb{R}$ como sendo um *corpo*, em relação a essas duas operações, conforme designação usada em Álgebra.

3. O Corpo Ordenado $\mathbb{R}$

Consideremos agora a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por "$x \leqslant y$" (ou, também, "$y \geqslant x$"). As propriedades básicas desta relação são as seguintes:

(i) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(ii) dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$

(iii) dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, então $x \leqslant z$

(iv) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se sempre uma das seguintes alternativas: $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$

(v) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$

(vi) dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $0 \leqslant x$ e $0 \leqslant y$, então $0 \leqslant xy$.

As quatro primeiras dessas propriedades caracterizam as chamadas relações de ordem totais. Quanto às duas últimas, expressam o fato de que a relação de ordem "$\leqslant$" considerada é *compatível* com a estrutura de corpo de $\mathbb{R}$. Assim, nos referiremos a $\mathbb{R}$ como sendo um *corpo ordenado* pelo fato de ser um corpo, conforme item anterior, e pelo fato de a relação "$\leqslant$" ser uma relação de ordem total sobre $\mathbb{R}$, compatível com a estrutura algébrica de $\mathbb{R}$.

É óbvio o significado da relação "$x < y$" a qual pode ser traduzida formalmente por "$x \leqslant y$ e $x \neq y$".

Para cada par de elementos a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ chama-se *intervalo aberto* de origem a e extremidade b e se indica por $]a, b[$. O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ chama-se *intervalo fechado* de origem a e extremidade b e se indica por $[a, b]$. Analogamente se definem: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (*intervalo semi-aberto* de origem a e extremidade b, aberto em b) e $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (*intervalo semi-aberto* de origem a e extremidade b, aberto em a). Também são chamados de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$$
$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Outras Propriedades do Corpo Ordenado $\mathbb{R}$

(A) Para qualquer par de números reais x, y vale uma e uma só das seguintes relações: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.

Justificação: Suponhamos $x \neq y$. Como devemos ter $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, em virtude de 3 – (iv), então $x < y$ ou $y < x$. Mas ambas essas hipóteses não se verificam simultaneamente, visto que isto teria como conseqüência $x = y$, devido a 3 – (ii). Logo, no caso de $x \neq y$, vamos ter $x < y$ (apenas) ou $y < x$ (apenas).

(B) $x \leqslant y$ e $y < z \Longrightarrow x < z$ e $x < y$ e $y \leqslant z \Longrightarrow x < z$

Justificação: Vejamos a primeira dessas implicações. Devido a 3 – (iii) devemos ter $x \leqslant z$. Ora, se $x = z$, teríamos $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ e daí $z = x = y$ o que é impossível.

(C) Se (x_i) e (y_i) são duas seqüências finitas de números reais de modo que $1 \leqslant i \leqslant n$ e $x_i \leqslant y_i$ para todo i, então $x_1 + \ldots + x_n \leqslant y_1 + \ldots + y_n$. Se, ademais, tivermos $x_r < y_r$, para pelo menos um índice r, então $x_1 + \ldots + x_n < < y_1 + \ldots + y_n$.

Justificação: Para $n = 1$ é evidente. Suponhamos, no primeiro caso, $x_1 + \ldots + + x_r \leqslant y_1 + \ldots + y_r$, onde $r \geqslant 1$. Daí, usando 3 – (v), vamos ter:

$$(x_1 + \ldots + x_r) + x_{r+1} \leqslant (y_1 + \ldots + y_r) + x_{r+1}$$

e, partindo do fato de que $x_{r+1} \leqslant y_{r+1}$,

$$(y_1 + \ldots + y_r) + x_{r+1} \leqslant (y_1 + \ldots + y_r) + y_{r+1}$$

Donde $x_1 + \ldots + x_r + x_{r+1} \leqslant y_1 + \ldots + y_r + y_{r+1}$. Deixemos como exercício o segundo caso.

(D) Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale o seguinte:

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x + z \leqslant y + z$$
$$x < y \Longleftrightarrow x + z < y + z$$

Justificação: Justifiquemos a segunda dessas equivalências. ($\Longrightarrow$) Já sabemos que $x + z \leqslant y + z$ (devido a 3 – (v)). Ora, se $x + z = y + z$, somando $(-z)$ a ambos os membros dessa igualdade resultaria $x = y$ o que é contrário à hipótese. Donde $x + z \neq y + z$ e então $x + z < y + z$. ($\Longleftarrow$) Por hipótese $x + z \leqslant y + z$. Daí decorre que $x \leqslant y$. Se $x = y$, então teríamos $x + z = y + z$ o que não vale por hipótese. Donde $x < y$.

(E) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ são equivalentes as afirmações: (a) $x \leqslant y$, (b) $0 \leqslant y - x$ e (c) $-y \leqslant -x$. (Obs.: O mesmo vale substituindo-se $\leqslant$ por $<$)*

Justificação:

(a) $\Longrightarrow$ (b)

$x \leqslant y \Longrightarrow x + (-x) \leqslant y + (-x) \Longrightarrow 0 \leqslant y - x$

(b) $\Longrightarrow$ (c)

$0 \leqslant y - x \Longrightarrow 0 + (-y) \leqslant y - x + (-y) \Longrightarrow -y \leqslant -x$

(c) $\Longrightarrow$ (a)

$-y \leqslant -x \Longrightarrow (-y) + (x + y) \leqslant (-x) + (x + y) \Longrightarrow x \leqslant y$

Indica-se por $\mathbb{R}_+$ e chama-se conjunto dos *números reais positivos* o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x\}$. Os elementos de $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\} = = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ são chamados *números reais estritamente positivos*. Os números reais negativos e estritamente negativos são definidos de maneira óbvia.

(F) Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ valem as implicações: (a) $x \leqslant y$ e $0 \leqslant z \Longrightarrow xz \leqslant yz$, (b) $x \leqslant y$ e $z \leqslant 0 \Longrightarrow yz \leqslant xz$. (Obs.: O mesmo vale substituindo-se $\leqslant$ por $<$)

Justificação: Mostremos que: $x < y$ e $z < 0 \Longrightarrow yz < xz$. Das hipóteses decorre que: $0 \leqslant y - x$ e $0 \leqslant -z$. Donde $0 \leqslant (y - x)(-z)$ e então $0 \leqslant xz - yz$. Portanto $yz \leqslant xz$. Se tivéssemos $yz = xz$, multiplicando esta igualdade por z^{-1} (lembrar que $z \neq 0$), obteríamos $y = x$ o que é contrário à hipótese. Assim: $yz < xz$.

(G) (Regras de sinais) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ valem as implicações:

(a) $0 < x$ e $0 < y \Longrightarrow 0 < xy$

(b) $0 \leqslant x$ e $y \leqslant 0 \Longrightarrow xy \leqslant 0$

(c) $x \leqslant 0$ e $y < 0 \Longrightarrow 0 < xy$

* Em $\mathbb{R}$ obviamente $y - x = y + (-x)$.

Justificação: Vejamos (c). Da hipótese tira-se que $0 < -x$ e $0 < -y$. Donde $0 < (-x)(-y)$. Se mostrarmos que $(-x)(-y) = xy$ estará concluída a justificativa. Observemos que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos: $a(-b) = a(-b) + ab - ab = a[(-b) + b] - ab = a \cdot 0 - ab \overset{*}{=} -ab$. Analogamente $(-a) \cdot b = -ab$. Daí, então: $(-x)(-y) = -(-x)y = -(-xy) = xy$.

(H) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes afirmações:

(a) $(0 < x \Longrightarrow 0 < x^{-1})$ e $(x < 0 \Longrightarrow x^{-1} < 0)$

(b) $(0 < x < 1 \Longrightarrow 1 < x^{-1})$ e $(1 < x \Longrightarrow 0 < x^{-1} < 1)$

(c) $0 < x < y \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1}$

(d) $x < y < 0 \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1} < 0$

Justificação: Verifiquemos (d). Devido à parte (a) desta propriedade temos que $x^{-1} < 0$ e $y^{-1} < 0$. Donde $0 < x^{-1}y^{-1}$ (prop. G). Desta última relação e da hipótese $x < y < 0$ vem, em conseqüência de (F), que

$$x^{-1}y^{-1}x < x^{-1}y^{-1}y < 0$$

ou seja,

$$y^{-1} < x^{-1} < 0$$

(I) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, então $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 0$ e $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Justificação: Para cada x_i tem-se: $0 \leqslant x_i$ ou $x_i \leqslant 0$. Em ambos os casos (F) nos assegura que $0 \leqslant x_i^2$. Daí então, decorre de (C) que $0 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Por outro lado é claro que se $x_1 = \ldots = x_n = 0$, então $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. Suponhamos finalmente que $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$ e que, para algum índice r, $x_r \neq 0$. Então $0 < x_r^2$ e $0 \leqslant x_i^2$, para todo $i \neq r$. Donde $0 < x_1^2 + \ldots + x_n^2$ o que é contrário à hipótese.

Valor Absoluto

Seja $a \in \mathbb{R}$. Indica-se por $|a|$ o *valor absoluto* de a cuja definição é a seguinte:

$$|a| = a \text{ se } 0 \leqslant a \text{ e } |a| = -a \text{ se } a < 0.$$

É imediato então que $|a| = |-a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Proposição 3: Sejam *a* e *b* elementos quaisquer de $\mathbb{R}$. Então:

(a) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$,

(b) $|ab| = |a||b|$,

(c) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$,

(d) $|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$.

* Prove, como exercício, a partir das propriedades já vistas, que $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração: (a) Suponhamos inicialmente que $a < 0$. Então $|a| = -a$ e $a = -|a|$. Mas neste caso $0 < -a$ e daí $a < -a = |a|$. Donde: $-|a| = a < -a = |a|$. O caso $0 \leqslant a$ fica como exercício. (b) Suponhamos $0 < a$ e $b < 0$. Então $0 < a$ e $0 < -b$ e daí $0 < -ab$ o que equivale a $|-ab| = -ab$. Assim: $|a| \cdot |b| = a(-b) = -ab = |-ab| = |ab|$. Ficam como exercício os demais casos. (c) Levando em conta que $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ e $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$ obtemos, usando a propriedade (C) da parte anterior, que $-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|)$. Se tivermos $a + b = |a + b|$ a condição é imediata. Se, caso contrário, $|a + b| = -(a + b)$, então $-(|a| + |b|) \leqslant -|a + b|$ e daí $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. (d) De $a = (a - b) + b$, vem que $|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$ e, portanto, que $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Por outro lado: $|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$. Das condições obtidas chegamos à tese: $|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$. ∎

4. O Corpo Ordenado e Completo $\mathbb{R}$

Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Dizemos que A é *limitado superiormente* se existe $L \in \mathbb{R}$ de maneira que $x \leqslant L$, para todo $x \in A$. Cada elemento L nessas condições chama-se *limite superior* de A. Agora, se existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\ell \leqslant x$, para qualquer $x \in A$, dizemos que A é *limitado inferiormente* e que cada elemento ℓ com essa propriedade é um *limite inferior* de A.

Um limite superior (respectivamente, inferior) de A que pertence a A chama-se *máximo* (respectivamente, *mínimo*) de A. É fácil provar que, caso exista máximo de A (ou mínimo) esse elemento é único.

Dado $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$, um elemento $S \in \mathbb{R}$ se diz *supremo* de A (indica-se $S = \sup(A)$) se:

(a) S é limite superior de A;

(b) Dado $S' \in \mathbb{R}$, se S' é um limite superior de A, então $S \leqslant S'$ (quer dizer, S é o mínimo do conjunto dos limites superiores de A).

De maneira paralela, define-se o *ínfimo* de A (notação: $\inf(A)$). Ou seja, um elemento $s \in \mathbb{R}$ chama-se *ínfimo* de A se:

(a') s é limite inferior de A;

(b') Dado $s' \in \mathbb{R}$, se s' é um limite inferior de A, então $s' \leqslant s$ (quer dizer, s é o máximo do conjunto dos limites inferiores de A).

Proposição 4: Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Um elemento $S \in \mathbb{R}$ é o supremo de A se, e somente se, S é um limite superior de A e, dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe $a \in A$ de maneira que $S - \varepsilon < a$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Temos de provar apenas a segunda afirmação. Ora, suponhamos que dado $\varepsilon > 0$ tivéssemos $x \leqslant S - \varepsilon$, para todo $x \in A$. Então $S - \varepsilon$ seria um limite superior de A e como $S - \varepsilon < S$ haveria uma contradição com a definição de supremo. Logo deve existir $a \in A$ de maneira que $S - \varepsilon < a$.

($\Longleftarrow$) Seja S' um limite superior de A e suponhamos $S' < S$. Sendo $\varepsilon = S - S'$ então $\varepsilon > 0$ e $S' = S - \varepsilon$. Por hipótese decorre então que existe $a \in A$ tal que $S' < a$ o que é absurdo uma vez que S' é um limite superior de A. ∎

Proposição 4': Seja $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$. Um elemento $s \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A se, e somente se, s é um limite inferior de A e, dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe $a \in A$ de modo tal que $a < s + \varepsilon$.

Demonstração: Análoga. ∎

O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é *completo* porque vale o seguinte resultado cuja demonstração depende da definição de número real e que, portanto, não será feita aqui.

Teorema do Sup: Dado $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se A é limitado superiormente, então existe o supremo de A em $\mathbb{R}$.

Proposição 5: As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Para todo subconjunto não vazio e limitado superiormente $A \subset \mathbb{R}$ existe supremo.

(ii) Para todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente $A \subset \mathbb{R}$ existe ínfimo.

Demonstração:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, um subconjunto limitado inferiormente. Consideremos o subconjunto não vazio $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Se ℓ é um limite inferior de A, então $\ell \leqslant x$, $\forall x \in A$, e portanto $-x \leqslant -\ell$, para todo $x \in A$, o que mostra que $-\ell$ é um limite superior de $(-A)$. Seja $S = \sup(-A)$ e mostremos que $s = -S$ é o ínfimo de A. Como $-x \leqslant S$, para todo elemento $-x \in (-A)$, então $s = -S \leqslant x$, $\forall x \in A$ o que mostra que $-S$ é um limite inferior de A. Por outro lado, se s' é um limite inferior de $(-A)$, então $-s'$ é um limite superior de A e daí $S \leqslant -s'$ do que se conclui que $s' \leqslant -S = s$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Demonstração análoga. ∎

Nota: Ao contrário do que acontece com $\mathbb{R}$ o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo. É o que mostraremos nesta nota.

(I) Não existe número racional $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ de maneira que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. De fato, suponhamos $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$ o que significa que p e q não têm fatores primos comuns. Mas como $p^2 = 2q^2$ resulta que p é par, e portanto, q deve ser ímpar. Supondo $p = 2t$ e $q = 2r + 1$ vamos ter:

$$4t^2 = 2(4r^2 + 4r + 1)$$

e daí

$$2t^2 = 4r^2 + 4r + 1$$

o que é absurdo já que o primeiro membro é par e o segundo ímpar.

(II) O conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ não admite supremo em $\mathbb{Q}$.

É claro que A é limitado superiormente. Mostremos que nenhum dos seus limites superiores está em A, ou seja, que A não tem máximo. Dado $x \in A$ vamos encontrar $t \in \mathbb{Q}$ tal que $x + t > x$ e $x + t \in A$ o que justificará nossa afirmação. Ora tomemos t de maneira que $0 < t < 1$ e $t < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$. Notando que $\frac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$ para todo $x \in A$, essa escolha é sempre possível. Daí vamos ter $x^2 + 2tx + t < 2$ e, como $t^2 < t$, então $x^2 + 2tx + t^2 = (x + t)^2 < 2$.

Suponhamos agora que existisse $S \in \mathbb{Q}$ tal que $S = \sup(A)$. Devido às considerações anteriores deveremos ter $S^2 > 2$. Tomemos então um número racional r de maneira que $0 < r < \frac{S^2 - 2}{2S}$ o que é sempre possível visto que $\frac{S^2 - 2}{2S}$ é um número racional maior que zero. Da última desigualdade decorre que $S^2 - 2rS > 2$. Logo $(S - r)^2 = S^2 - 2rS + r^2 > S^2 - 2rS > 2$. Suponhamos que $S \leqslant r$. Então teríamos $S < \frac{S^2 - 2}{2S}$ e portanto $S^2 + 2 < 0$ o que é absurdo. Donde $r < S$ e $S - r$ é estritamente positivo. Ora, para todo $x \in A$, temos $x^2 < 2$ e então $x^2 < 2 < (S - r)^2$. Como x e $S - r$ são maiores que zero obtemos $x < S - r$ o que vem mostrar que $S - r$ é um limite superior de A. A contradição com o fato de que S é o menor dos limites superiores de A mostra que efetivamente não existe supremo de A em $\mathbb{Q}$.

Algumas Propriedades do Corpo Ordenado e Completo $\mathbb{R}$

(A) O subconjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

Justificação: Suponhamos que fosse e seja $S = \sup(\mathbb{N})$. A Proposição 4 nos garante então que existe $n \in \mathbb{N}$ de maneira que $S - 1 < n$. Daí $S < n + 1$. Absurdo pois $n + 1 \in \mathbb{N}$ e $S = \sup(\mathbb{N})$.

(B) Para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe um número natural $n > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Justificação: Suponhamos que para todo número natural $n > 0$ tivéssemos $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}$. Então $n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contraria a propriedade (A) anterior.

(C) Se a é número real tal que $0 \leqslant a \leqslant \varepsilon$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, então $a = 0$.

Justificação: Suponhamos $a > 0$. Então tomando $\varepsilon = \frac{a}{2}$ vamos ter $a \leqslant \frac{a}{2}$ e daí $a \leqslant 0$. Como $0 \leqslant a$, por hipótese, então $a = 0$.

(D) (Teorema de Arquimedes) Dado $x > 0$ em $\mathbb{R}$, então para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $nx > y$.

Justificação: Suponhamos $nx \leqslant y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí $n \leqslant \frac{y}{x}$ para todos os números naturais n e o conjunto $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente. Este absurdo garante então o teorema de Arquimedes.

(E) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $a < b$, então existe um número racional r tal que $a < r < b$.

Justificação: Vamos supor inicialmente $a > 0$. Devido à (D) anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(b - a) > 1$, ou seja, $nb > na + 1$. Consideremos o conjunto $L = \{m \in \mathbb{N} \mid m > na\}$. Devido novamente à (D) o conjunto L não é vazio e como $L \subset \mathbb{N}$ existe o menor elemento (mínimo) de L.* Indicando por p esse mínimo temos $p > na$ e $p - 1 \leqslant na$. Assim:

$$nb > na + 1 \geqslant p > na$$

e daí $a < \frac{p}{n} < b$. O número $r = \frac{p}{n}$ é racional e satisfaz o exigido.

Se $a = 0$, então $0 < \frac{b}{2} < b$ e tomando $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{b}{2} < r < b$ estará concluída a demonstração neste caso.

Se $a < 0 < b$ recaímos diretamente em considerações anteriores. Se $a < 0 = b$ ou $a < b < 0$, tomando um número racional r tal que $|b| < r < |a|$, então $a < -r < b$.

(F) Existe um número real b tal que $b^2 = 2$.

Justificação: Como $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ é limitado superiormente existe $b = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Mostremos que $b^2 = 2$.

Não se pode ter $b^2 < 2$ pois neste caso teríamos $b \in A$ e b seria o máximo de A. Como já vimos porém na nota à pg. 26 não existe máximo de A.

Suponhamos $b^2 > 2$. Então $\frac{b^2 - 2}{2b} > 0$ e existe um número racional r tal que $0 < r < \frac{b^2 - 2}{2b}$. O mesmo raciocínio da nota citada nos levará às seguintes conclusões: $b - r > 0$, $(b - r)^2 > 2$ e, portanto, $x < b - r$, para todo $x \in A$. Logo $b - r$ é um limite superior de A e é menor que b. Logo também é impossível a hipótese $b^2 > 2$ e resta $b^2 = 2$.

* Princípio do menor número natural que admitimos conhecido.

(G) (Princípio dos Intervalos encaixantes) Sejam $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ... intervalos tais que $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ Então existe ao menos um ponto comum a todos esses intervalos.

Justificação: Da hipótese $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ decorre que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ e $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ Como

$$m \leqslant n \Longrightarrow a_m \leqslant a_n < b_n$$

e

$$n < m \Longrightarrow a_m < b_m \leqslant b_n$$

então $a_m < b_n$, para quaisquer índices m e n. Logo cada b_m é um limite superior de $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ e portanto existe em $\mathbb{R}$ o elemento $S = \sup(A)$. Assim para cada índice m vamos ter $a_m \leqslant S$, porque $S = \sup(A)$ e $S \leqslant b_m$, porque cada b_m é um limite superior de A. Donde $a_m \leqslant S \leqslant b_m$, para todo índice $m \geqslant 1$, o que prova nossa afirmação.

(H) O intervalo $I = [0, 1]$ não é enumerável.

Justificação: Vamos supor I enumerável: $I = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Consideremos I dividido em três subintervalos de mesma amplitude:

$$I = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

e seja I_1 o primeiro desses intervalos, na ordem que foram escritos, que não contém x_1. Façamos o mesmo tipo de subdivisão em I_1 e seja I_2 o primeiro dos subintervalos de I_1 (pelo mesmo critério anterior de ordenação) que não contém x_2. A repetição desse raciocínio dará origem a uma seqüência $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ de intervalos fechados: Devido a (G) existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \cap I_2 \cap \ldots$ e portanto $x \neq x_i$, para todo x_i. Mas isto é impossível, uma vez que $x \in I$. Donde I não é enumerável.

Nota: Da propriedade anterior decorre que $\mathbb{R}$ não é enumerável, pois se o fosse, então I também teria de ser, visto que $I \subset \mathbb{R}$. Por outro lado o conjunto dos irracionais, isto é, o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também não é enumerável, pois caso $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fosse enumerável, então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ teria também de ser já que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Obs.: Nas propriedades a seguir usaremos o seguinte fato. Dado $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$, existe um número natural $n > 0$ tal que $\frac{1}{2^n} < k$. Isto é conseqüência do fato de que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

(I) (Teorema de Heine-Borel) Se $\mathcal{F} = (]a_i, b_i[)_{i \in I}$ é uma família de intervalos abertos tais que $\cup\,]a_i, b_i[\, \supset [0, 1]$, então existem índices $i_1, \ldots, i_n \in I$ de modo que $]a_{i_1}, b_{i_1}[\cup \ldots \cup]a_{i_n}, b_{i_n}[\supset [0, 1]$.

Justificação: Façamos $[0, 1] = J$. Se, com as hipóteses feitas, a tese não se verificasse para J, então também não se verificaria para pelo menos um dos intervalos:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Seja pois, $J_1 = [c_1, d_1]$ um dos intervalos acima, com a propriedade de que uma reunião finita qualquer, de membros de $\mathscr{F}$ não contém J_1. Considerando agora

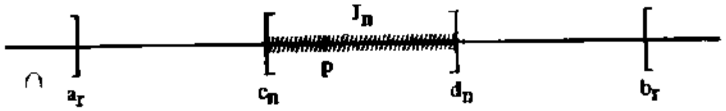
$$\left[c_1, \frac{c_1 + d_1}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{c_1 + d_1}{2}, d_1\right]$$

um destes intervalos pelo menos, que chamaremos de J_2, é tal que nenhuma união finita de membros de $\mathscr{F}$ contém J_2.

Assim sucessivamente vamos obter uma seqüência $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ de intervalos fechados todos com esta mesma propriedade: não estão contidos em nenhuma união de um número finito de membros de $\mathscr{F}$. Seja $p \in J \cap J_1 \cap J_2 \cap \ldots$ (existe, em virtude de (G)). Como $p \in J$, então existe um índice $r \in I$ tal que $p \in]a_r, b_r[$. Observemos que os intervalos $J, J_1, J_2, \ldots$ têm amplitude, respectivamente, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots$ Nestas condições (ver observação inicial) existe um número $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, de maneira que

$$\frac{1}{2^n} < p - a_r \quad e \quad \frac{1}{2^n} < b_r - p$$

(Naturalmente estamos supondo $J_0 = [0, 1]$ e $J_n = [c_n, d_n]$, $n \geqslant 0$).



Assim (ver figura) J_n está contido em $]a_r, b_r[$. Mas isto é uma contradição com o fato de que J_n não está contido em nenhuma união de um número finito de membros de $\mathscr{F}$.

Nota: Observemos que com o intervalo $]0, 1]$, por exemplo, não acontece o mesmo. De fato, temos que a família $\mathscr{F} = (]\frac{1}{n}, 2[)$, $n = 1, 2, \ldots$, é tal que a reunião de seus membros, todos intervalos abertos, contém $]0, 1]$. Mas se considerarmos uma subfamília finita

$$\mathscr{F}' = (]\frac{1}{n_1}, 2[, \ldots,]\frac{1}{n_r}, 2[)$$

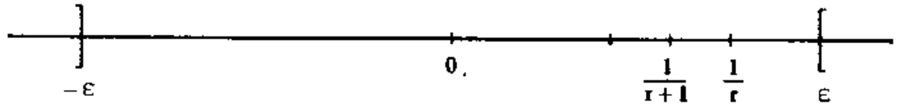
de $\mathscr{F}$, supondo $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_2} < \ldots < \frac{1}{n_r}$, então a reunião dos membros de $\mathscr{F}'$ será igual a $]\frac{1}{n_1}, 2[$ e portanto não contém $]0, 1]$.

(J) (Teorema de Bolzano-Weierstrass)

Daremos inicialmente a definição de *ponto de acumulação*. Seja $A \subset \mathbf{R}$. Um ponto $p \in \mathbf{R}$ se diz ponto de acumulação de A se para todo número real

$\varepsilon > 0$ a intersecção $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap A$ é infinita (quer dizer, $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap A$ é um conjunto infinito).

Exemplo: Se $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ o único ponto de acumulação de A é o número 0. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe um número natural $r > 0$ tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ (propriedade 4 – (B)). Donde todo número $\frac{1}{n}$, com $n \in \mathbf{N}$ e $n > r$, pertence a $]-\varepsilon, \varepsilon[$.



Outra noção envolvida na propriedade em pauta é a de *conjunto limitado*. Um conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se diz limitado se existe um intervalo $I = [a, b]$ de modo que $A \subset I$. Por exemplo, o conjunto $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$ é limitado porque $A \subset [0, 1]$. O conjunto $\mathbf{N}$ obviamente não é limitado.

Vejamos agora o teorema de Bolzano-Weierstrass: Seja $A \subset \mathbf{R}$ um subconjunto infinito e limitado. Então existe um ponto de acumulação de A em $\mathbf{R}$.

Justificação: Seja $I = [a, b]$ tal que $A \subset I$. Considerando os intervalos

$$\left[a, \frac{a + b}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{a + b}{2}, b\right] (*)$$

pelo menos um deles deve conter infinitos pontos de A uma vez que A é infinito. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um dos intervalos (*) que contém infinitos pontos de A. Considerando agora

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$$

vamos ter a mesma situação: um deles, que chamaremos de $I_2 = [a_2, b_2]$, deve conter infinitos pontos de A. Dessa forma vamos obter uma seqüência de intervalos encaixantes

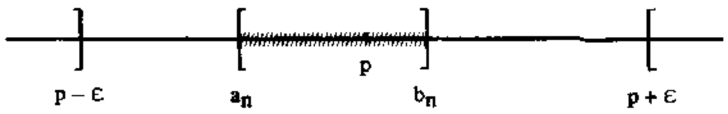
$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

de amplitudes, respectivamente

$$b - a, \frac{b - a}{2}, \frac{b - a}{2^2}, \ldots$$

Pelo princípio dos intervalos encaixantes existe um ponto $p \in \mathbf{R}$ comum a todos esses intervalos e mostraremos que p é ponto de acumulação de A. Dado $\varepsilon > 0$

consideremos o intervalo $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$. Considerando $n \in \mathbb{N}^*$



de maneira que $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, então o intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ está contido em $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$. Ora, se $I_n \cap A$ é infinito, então $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\cap A$ também terá que ser infinito.

EXERCÍCIOS

1. Verdadeiro ou Falso? Justifique:

   a) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > x\}$, então $A \neq \emptyset$

   b) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, então $A = B$

   c) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x > 0\}$ e $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, então $C \subset A \cap B$

2. Os três conjuntos a seguir são diferentes entre si: $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{0\}$. Justifique porquê.

3. Dado um conjunto A, chama-se *conjunto das partes* de A, e indica-se por $\mathscr{P}(A)$, o conjunto de todos os subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \{1\}$, então $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

   a) Ache o conjunto das partes de $A = \{1, 2\}$ e de $B = \{1, 2, 3\}$.

   b) Se um conjunto A tem n elementos mostre que $\mathscr{P}(A)$ tem 2^n elementos.

4. Sejam A, B e C subconjuntos arbitrários de um conjunto U. Prove que:

   a) $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

   b) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow B \subset A^c$

   c) $A \cup B = U$ e $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow B = A^c$

   d) $A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$

   e) $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$

   f) $(A \cup B) - B = A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

   g) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

   h) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

5. a) Dê um exemplo em que A, B e C são subconjuntos de um certo conjunto U, $A \cup B = A \cup C$, mas $B \neq C$.

   b) Exemplifique mostrando que pode ocorrer o seguinte: $B \neq C$ e $A \cap B = A \cap C$.

   c) Se A, B e C são subconjuntos de U tais que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$, prove que $B = C$.

6. Dados n conjuntos $E_1, \ldots, E_n$, sejam A_i e B_i subconjuntos quaisquer de E_i $(i = 1, \ldots, n)$. Prove:

$$(A_1 \times \ldots \times A_n) \cup (B_1 \times \ldots \times B_n) \subset (A_1 \cup B_1) \times \ldots \times (A_n \cup B_n)$$

7. Se $A \subset X$ e $B \subset Y$, mostre que:

$$(X \times Y) - (A \times B) = [(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)]$$

8. Esboce um gráfico cartesiano para cada uma das seguintes relações sobre $\mathbb{R}$:

   a) A relação R definida por $xRy \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [n, n+1]$ e $y \in [n, n+1]$.

   b) A relação R definida por $xRy \Longleftrightarrow |x - a| + |y - b| < c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes dadas e $c > 0$.

   c) A relação R definida por $xRy \Longleftrightarrow \max\{|x - a|, |y - b|\} < c$, onde, também, $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes dadas e $c > 0$.

   Obs.: *max $\{x, y\}$ indica o maior dos números x e y.*

9. Mostre que a correspondência

$$x \longmapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

   define uma função de $\mathbb{R}$ em $]-1, +1[$ e que esta função é bijetora.

10. Seja $A \neq \emptyset$ e consideremos $\theta : A^2 \longrightarrow A^2$ dada por $\theta(x, y) = (y, x)$. Sendo $d : A \longrightarrow A^2$ definida por $d(x) = (x, x)$, prove que $\theta \circ d = d$. **Obs.:** $A^2 = A \times A$.

11. Se A é um subconjunto de U, a *função característica* χ_A deste subconjunto é definida por $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Para subconjuntos quaisquer $A, B \subset U$, prove que:

    a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$, $\forall x \in U$

    b) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$, $\forall x \in U$

    c) $\chi_{A - B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$, $\forall x \in U$

12. Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ satisfazem $g \circ f = id_A$, mostre que f é injetora e g é sobrejetora.

13. Seja $X \subset A$ e $j : X \longrightarrow A$ a inclusão. Dado $f : A \longrightarrow B$, mostre que $f|X = f \circ j$.

14. Considere as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$. Mostre que se f e g são injetoras (respect., sobrejetoras), então $g \circ f$ é injetora (respect., sobrejetora).

15. Prove que uma função $f: A \longrightarrow B$ é bijetora se, e somente se, $f(X^c) = (f(X))^c$, para qualquer $X \subset A$.

16. Uma função $f: A \longrightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$, para qualquer $Y \subset B$, $Y \neq \emptyset$ Prove.

17. Seja $f: A \longrightarrow B$ injetora e considere $X \subset A$. Mostre que $f^{-1}(f(X)) = X$.

18. Se $f: A \longrightarrow B$ é sobrejetora, prove que $f(f^{-1}(Y)) = Y$, para todo $Y \subset B$.

19. Dada uma função $f: A \longrightarrow B$, se $X \subset A$ e $Y \subset B$, mostre que:

a) $f(A) - f(X) \subset f(A - X)$
b) $f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$
c) $f[X \cap f^{-1}(Y)] = f(X) \cap Y$

20. Se $f: A \longrightarrow B$ é uma função injetora e (X_i) é uma família de subconjuntos de A, mostre que

$$f(\cap X_i) = \cap f(X_i)$$

21. Dado $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, uma função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ se diz *crescente* se $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ e *estritamente crescente* se $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, $\forall x, y \in A$. Analogamente, se $x < y \Longrightarrow f(y) \leqslant f(x)$ f é chamada *decrescente* ao passo que se $x < y \Longrightarrow f(y) < f(x)$, então f recebe a designação de *estritamente decrescente*. Se f se enquadra num desses casos, dizemos que f é *monótona*.

a) Dada $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 1|$, ache $X, Y \subset \mathbb{R}$ tais que $X \cap Y = \emptyset$ e $X \cup Y = \mathbb{R}$ de maneira que $f|X$ é decrescente e $f|Y$ é crescente.
b) Mostre que se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente, então f é injetora.
c) Dê exemplos de funções crescentes (decrescente) não injetoras.

22. Se A e B são conjuntos enumeráveis, prove que $A \times B$ é enumerável. Generalize.

23. a) Se $P_n(x)$ indica o conjunto dos polinômios inteiros não nulos, de grau no máximo n, mostre que $P_n(x)$ é enumerável.
Sugestão: Use o exercício anterior.

b) Mostre que o conjunto $P(x)$ dos polinômios inteiros é enumerável.

Sugestão: Use (a) e use o fato de que uma união enumerável de enumeráveis é enumerável.

Mostre que são equipotentes os intervalos $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $]a, b[$ para quaisquer $a < b$ em $\mathbb{R}$.

25. Mostre que não é enumerável o conjunto $A = \{f \mid f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$.
Sugestão: Suponha $A = \{f_1, f_2, \ldots\}$ e construa $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de modo que $f(n) \neq f_n(n)$, $\forall n \geqslant 0$.

26. Mostre que são relações de equivalência e descreva o conjunto quociente:

a) Sobre $\mathbb{C}$ a relação S dada por

$$(x + yi)\,S\,(z + ti) \Longleftrightarrow x = z$$

b) Sobre $\mathbb{Q}$ a relação R definida por $xRy \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
c) Sobre o conjunto dos pontos de um plano cartesiano a relação $\sim$ dada por: $P \sim Q \Longleftrightarrow x_1y_1 = x_2y_2$, para quaisquer $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ no plano.

27. Mostre que a relação definida sobre $\mathbb{N}$ por "$x|y \Longleftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}$ tal que $y = xz$" é uma relação de ordem. É total?

28. Mostre que é uma relação de ordem total no conjunto $\mathbb{C}$:

$$R = \{(a + bi, c + di) \in \mathbb{C}^2 \mid a < c \text{ ou } (a = c \text{ e } b \leqslant d)\}$$

29. Prove que $\sqrt[3]{5}$ não é racional.

30. Se $a \in \mathbb{R}$ é racional e $b \in \mathbb{R}$ é irracional, mostre que $a + b$ é irracional.

31. Dê exemplo de dois irracionais cuja soma é racional.

32. Dado $a \in \mathbb{R}$, mostre que:

a) $0 < a \Longrightarrow 0 < a^n$
b) $a < 0 \Longrightarrow a^{2n} > 0$ e $a^{2n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

33. Se $a, b \in \mathbb{R}$, prove que: $a < b \Longrightarrow a^3 < b^3$.

34. Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, prove que $1 + na \leqslant (1 + a)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

35. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$.

36. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $|a - b| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, prove que $a = b$.

37. Dados a, b $\in \mathbb{R}$, se ambos são positivos, prove que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

38. Seja $A = \{x_i\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_i \geqslant 0$, $\forall$ i, e para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_r \in A$ de maneira que $x_r < \varepsilon$. Mostre que $\inf(A) = 0$.

39. Se $A \subset B \subset \mathbb{R}$, mostre que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ e $\inf(B) \leqslant \inf(A)$, caso existam.

40. Mostre que o conjunto C formado pelos racionais menores que ou iguais a zero e todos os $x \in \mathbb{Q}$ tais que $x \geqslant 0$ e $x^2 < 2$ é um corte em $\mathbb{Q}$.

41. Dados r, s $\in \mathbb{Q}$, com $r < s$, mostre que $\alpha = r + \frac{s-r}{\sqrt{2}}$ é irracional e que $r < \alpha < s$.

42. Mostre que uma coleção de intervalos abertos em $\mathbb{R}$, disjuntos entre si, é enumerável.

CAPÍTULO II

ESPAÇOS MÉTRICOS

§ 1 — INTRODUÇÃO

Tanto no Cálculo como na Geometria, para citar dois exemplos apenas, mesmo quando estudados de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de "distância entre dois pontos" ou conceitos derivados dessa noção, como o de "vizinhança de um ponto", por exemplo. Citemos, entre outras, as definições de ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem da noção de distância (ou da noção de vizinhança). Assim parece lógico, quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando a resolver problemas mais amplos, buscar antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de "espaço" em que intervêm tal noção.

Foi Cantor, por volta de 1870, quem deu os primeiros passos significativos nesse sentido. Estudando por essa época a representação de funções reais por meio de séries trigonométricas, Cantor procurou estender a unicidade da representação a funções dotadas de infinitos pontos singulares. Assim chegou à noção de conjunto derivado na qual está subjacente a idéia de ponto de acumulação. Tais pesquisas, inclusive, ensejavam-lhe, posteriormente, a criação da aritmética transfinita e da teoria dos conjuntos com o que se consagrou, apesar das incompreensões iniciais, como um dos grandes da Matemática em todos os tempos. Pouco depois, na década de 1880, alguns matemáticos italianos (Ascoli e Pincherle, por exemplo) fizeram uso das idéias de Cantor para o estudo de "espaços" não convencionais, espaços em que um ponto poderia ser uma curva ou uma função.

O passo seguinte, e decisivo, foi dado por Frechet em 1906 com sua tese de doutoramento. Neste trabalho, que marca o início do Cálculo Funcional, Frechet formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, vislumbrando a economia de trabalho e o grau de generalização que poderiam advir de um estudo conjunto dos mais diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisou várias maneiras de conseguir tal objetivo, sendo este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos. Este assunto foi posteriormente desenvolvido por Hausdorff (1914) e ganhou sua contextura praticamente atual com Urysohn em 1924.

§ 2 — MÉTRICAS

1. Definição de Espaço Métrico — Subespaços

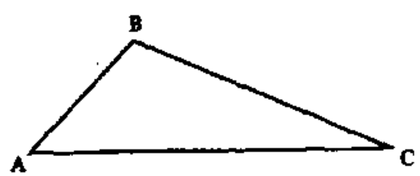
Definição 1: Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ seja $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da função d. Dizemos que d é *métrica* sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

$$(M_1)\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$
$$(M_2)\ d(x, y) = d(y, x)$$
$$(M_3)\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de *distância de x a y* e um par (M, d), onde d é uma métrica sobre M, é o que chamamos de *espaço métrico*. Em geral, ao nos referirmos a um espaço métrico cujo conjunto é M, diremos apenas "espaço métrico M" o que pressupõe que a métrica correspondente esteja já subentendida.

Cada elemento de um espaço métrico será sempre referido como *ponto* desse espaço, seja ele um ponto mesmo, ou um número, ou ainda uma função ou um vetor, situações essas que se verificam comumente.

Nota: A propriedade (M_3) é conhecida como *desigualdade triangular* e se inspira no fato de que na geometria elementar cada lado de um triângulo tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados.



Subespaços: Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $S \subset M$ $(S \neq \emptyset)$ se considerarmos a restrição $d_1 = d|S$, obviamente d_1 é uma métrica sobre S e assim obtemos, de maneira natural, o espaço métrico (S, d_1). Nessas condições dizemos que S é um *subespaço* do espaço métrico M e que a *métrica* d_1 foi induzida por d sobre M. Em geral indica-se a métrica do subespaço do mesmo modo que a métrica de M, isto é, faz-se $d_1 = d$.

Proposição 1: Se x, y e z são pontos genéricos de um espaço métrico (M, d), então $|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z)$.

Demonstração: Da desigualdade triangular (M_3) decorre que

$$d(x, y) - d(x, z) \leqslant d(z, y)\ (*)$$

Por outro lado podemos expressar a mesma desigualdade (M_3) por

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

do que se conclui que

$$d(x, z) - d(x, y) \leqslant d(y, z)\ (**)$$

De (*) e (**) obtém-se a tese:

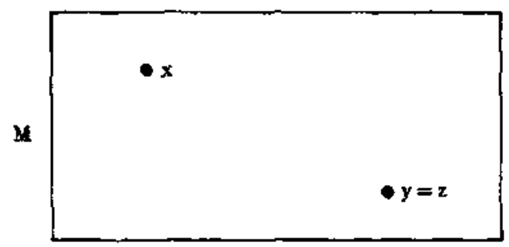
$$|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z). \ \blacksquare$$

2. Exemplos de Espaços Métricos

1. *Métrica discreta* ou *Métrica zero-um.* É o mais simples exemplo de métrica que se pode considerar. Dado $M \neq \emptyset$ define-se $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

$$d(x, x) = 0\ (\forall x \in M) \qquad e \qquad d(x, y) = 1$$

(sempre que $x \neq y$). É fácil provar que a função d, assim definida, é uma métrica. Por exemplo, ao se verificar o axioma (M_3) um dos casos é aquele em que



$x \neq y$ e $y = z$. Quando isto ocorre temos $d(x, y) = 1$, $d(x, z) = 1$ e $d(z, y) = 0$. Logo, neste caso, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

O espaço assim obtido é às vezes chamado *espaço discreto*.

2. *A reta usual.* Considerando-se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a função $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $d(x, y) = |x - y|$, é uma métrica sobre $\mathbb{R}$. A verificação de (M_1) e (M_2) é imediata. Quanto a (M_3) é também simples:

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

Salvo observação em contrário, ao nos referirmos à reta usual como espaço métrico, a métrica considerada é a que definimos aqui (também chamada *métrica usual* em $\mathbb{R}$).

3. *O espaço $\mathbb{R}^n$.* O conjunto $\mathbb{R}^n$ é formado por todas as n-uplas (seqüências finitas) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde cada $x_i \in \mathbb{R}$. Existem três métricas importantes sobre $\mathbb{R}^n$ e que, de uma certa forma, são equivalentes.*

Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pontos arbitrários do $\mathbb{R}^n$, são essas métricas definidas do seguinte modo:

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$
$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$
$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

A métrica D é chamada *euclidiana* e naturalmente se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no espaço usual. As métricas D_1 e D_2, apesar de não parecerem tão naturais, pelo menos num primeiro exame, do ponto de vista prático são visivelmente vantajosas. A verificação de que realmente se trata de métricas sobre o $\mathbb{R}^n$ só apresenta dificuldades no caso da métrica D com relação ao axioma (M_3). Para fazer a demonstração neste caso vamos estabelecer primeiro a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* no $\mathbb{R}^n$ cujo enunciado é o seguinte:

Se $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Vejamos. A desigualdade $2rs \leq r^2 + s^2$ é verdadeira para quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$ uma vez que $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$. Assim, se fizermos $p = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ e $q = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$, é verdadeira a relação

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{p} \cdot \frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2}$$

para qualquer $i\,(1 \leq i \leq n)$. Somando em relação ao índice i teremos

$$\frac{2}{p \cdot q} \sum |x_i y_i| \leq 1 + 1$$

* No parágrafo 5 veremos exatamente em que consiste essa equivalência.

e portanto

$$\sum |x_i y_i| \leq p \cdot q = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Agora podemos provar a desigualdade triangular no que se refere a D. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, \ldots, z_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$. Então:

$$[d(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \Sigma(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 =$$
$$= \Sigma(x_i - z_i)^2 + 2\,\Sigma(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \Sigma(z_i - y_i)^2 \overset{(*)}{\leq}$$
$$\overset{(*)}{\leq} \Sigma(x_i - z_i)^2 + 2\,[\Sigma(x_i - z_i)^2]^{1/2}[\Sigma(z_i - y_i)^2]^{1/2} + \Sigma(z_i - y_i)^2 =$$
$$= [\sqrt{\Sigma(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\Sigma(z_i - y_i)^2}]^2 = [d(x, z) + d(z, y)]^2$$

Donde: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Nota: As métricas D, D_1 e D_2 introduzidas acima no espaço $\mathbb{R}^n$, guardam entre si as seguintes relações:

$$D_2(x, y) \leq D(x, y) \leq D_1(x, y) \leq nD_2(x, y)$$

para quaisquer $x, y \leq \mathbb{R}^n$. De fato:

- $D_2(x, y) = |x_r - y_r|$ para um certo $r\,(1 \leq r \leq n)$. Daí
$$D_2(x, y) = |x_r - y_r| = \sqrt{(x_r - y_r)^2} \leq D(x, y)$$
- $D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \leq$
$$\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + \ldots + 2|x_{n-1} - y_{n-1}||x_n - y_n|} =$$
$$= |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = D_1(x, y).$$
- Supondo $|x_r - y_r| = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$, então
$$|x_1 - y_1| \leq |x_r - y_r|, \ldots, |x_n - y_n| \leq |x_r - y_r|$$

e daí

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leq n|x_r - y_r| = |nD_2(x, y)$$

4. *Espaços Vetoriais Normados.* *Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$* é um conjunto E sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna

$$(u, v) \longmapsto u + v \text{ (adição)}$$

e uma externa, de $\mathbb{R} \times E$ em E, $(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$ (multiplicação por escalares) para as quais se verificam as seguintes condições:

* Nesta passagem usa-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(i) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in E$

(ii) $u + v = v + u, \forall u, v \in E$

(iii) Existe $0 \in E$ de modo que $0 + u = u, \forall u \in E$

(iv) Para todo $u \in E$, existe $(-u) \in E$ de maneira que $u + (-u) = 0$

ou seja, E é um grupo abeliano em relação à adição e, ainda

(v) $(\alpha\beta) u = \alpha(\beta u), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$

(vi) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$

(vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in E$

(viii) $1 u = u, \forall u \in E$. (*)

Os elementos de um espaço vetorial são genericamente chamados de *vetores*.

Se definirmos sobre $\mathbb{R}^n$ a adição e a multiplicação por escalares do seguinte modo:

Para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

obtemos o exemplo mais importante de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. *Neste espaço* $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é o elemento neutro da adição e, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Uma *norma* sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $u \in \mathbb{R}$ um número real não negativo, indicado por $\|u\|$, e chamado *norma de u*, de maneira que:

(n_1) $\|u\| = 0 \iff u = 0$

(n_2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$

(n_3) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E$

Um espaço vetorial normado real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma. Se E é um espaço vetorial normado, então $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma métrica sobre E pois:

- $d(u, v) = \|u - v\| = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v$
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |-1| \, \|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u)$
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leqslant \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v)$

A métrica d assim obtida chama-se *métrica induzida pela norma* dada sobre E.

---

* A definição de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ ou sobre um corpo K qualquer é análoga.

Um exemplo importante de espaço vetorial normado é o $\mathbb{R}^n$ juntamente com a norma dada por

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Deixamos como exercício a verificação de que de fato (n_1), (n_2) e (n_3) são válidas neste exemplo, sugerindo entretanto o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz na demonstração de (n_3).

5. *Espaços com Produtos Internos.* Se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, um *produto interno* em E é uma aplicação que associa a cada $(u, v) \in E \times E$ um número real, indicado $\langle u, v \rangle$ e chamado "u escalar v", de modo que

(p_1) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in E$

(p_2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in E$

(p_3) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle, \forall u_1, u_2, v \in E$

(p_4) $\langle u, u \rangle > 0$ sempre que $u \neq 0$.

Um espaço E, dotado de um produto interno $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$, chama-se *espaço vetorial com produto interno.*

Se E é um espaço vetorial com produto interno, então, dados $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $u, v, u_1, v_1 \in E$:

$$\begin{aligned}\langle \alpha u + \beta v, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle &= \langle \alpha u, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle + \\ + \langle \beta v, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle &= \alpha \langle u, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle + \\ + \beta \langle v, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle &= \alpha \langle \gamma u_1 + \delta v_1, u \rangle + \\ + \beta \langle \gamma u_1 + \delta v_1, v \rangle &= \alpha\gamma \langle u, u_1 \rangle + \alpha\delta \langle u, v_1 \rangle + \\ &+ \beta\gamma \langle v, u_1 \rangle + \beta\delta \langle v, v_1 \rangle.\end{aligned}$$

Num espaço vetorial com produto interno define-se a norma de um vetor $u \in E$ do seguinte modo: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. A função assim obtida obviamente satisfaz (n_1) e (n_2). Quanto a (n_3) sua demonstração depende da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* num espaço com produto interno cujo enunciado é o seguinte: $|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\| \, \|v\|, \forall u, v \in E$. A demonstração desta desigualdade no caso em que $u = 0$ ou $v = 0$ é imediata. Se ambos estes vetores são não nulos, então, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \|u + \alpha v\|^2 = \langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \alpha^2$$

Assim temos um trinômio de segundo grau em α cujo valor é sempre não negativo, o que equivale a que

$$\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leqslant 0$$

Daí

$$\langle u, v \rangle^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2$$

e, então,

$$|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

Agora estamos em condições de provar (n_3). Dados u, v $\in$ E, temos:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

Donde: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Assim acabamos de verificar que todo espaço vetorial com produto interno é um espaço vetorial normado (a recíproca deste fato não vale) e, portanto, é também um espaço métrico. É só definir, como já vimos

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

para quaisquer u, v $\in$ E.

6. *Espaço de funções reais limitadas.* Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ uma função $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ se diz *limitada* se existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $|f(x)| < k$, para qualquer $x \in X$. Indiquemos por $\beta(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$. Para quaisquer f, g $\in \beta(X; \mathbb{R})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, se definirmos $f + g$, αf e $\|f\|$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\ \forall x \in X \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x),\ \forall x \in X \\ \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\}\end{aligned}$$

o conjunto $\beta(X; \mathbb{R})$ se torna um espaço vetorial normado. Dos detalhes envolvidos nessa afirmação só verificaremos aqueles que dizem respeito à norma.

Notemos de início que $\|f\|$ está bem definida visto que $\sup\{|f(x)| : x \in X\}$ existe pelo fato de que f é limitada. Além disso $\|f\| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \beta(X; \mathbb{R})$, o que é óbvio.

- $\|f\| = 0 \iff |f(x)| = 0,\ \forall x \in X \iff f(x) = 0,\ \forall x \in X \iff f = 0$.
- Fica como exercício a verificação de (n_2).
- Dadas f, g $\in \beta(X; \mathbb{R})$, então, para qualquer $x \in X$:

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\}$$

Como esta última soma é constante, é ela um limite superior do conjunto

$$\{|f(x) + g(x)| : x \in X\}$$

e então

$$\sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} \leqslant \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\}$$

ou seja

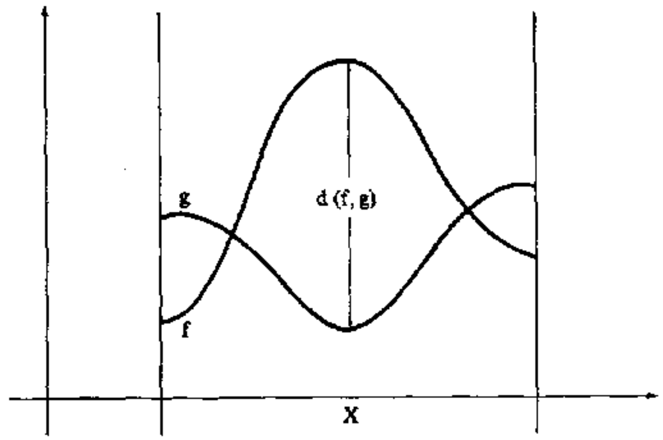
$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

Logo $\beta(X; \mathbb{R})$ é um espaço métrico. A métrica induzida pela norma em questão é dada por

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

para quaisquer f, g $\in \beta(X; \mathbb{R})$.

A distância entre duas funções, segundo essa métrica, pode ser visualizada na figura a seguir.



7. *Espaço de funções reais contínuas definidas num intervalo fechado.* Para um intervalo fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$ indiquemos por $\mathscr{C}[a, b]$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em [a, b]. Com relação à adição de funções e à multiplicação de uma função por um escalar (número real), definidas naturalmente como como no exemplo anterior, $\mathscr{C}[a, b]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. E a função

$$f \longmapsto \|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

é uma norma sobre esse espaço uma vez que $\|f\| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \mathscr{C}[a, b]$ e

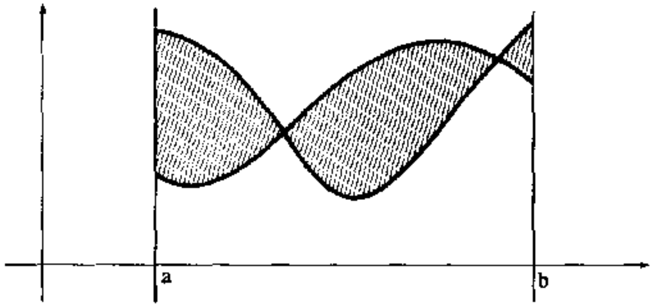
- $\|f\| = 0 \iff |f(x)| = 0,\ \forall x \in [a, b]$ (pois $|f(x)|$ define uma função contínua) $\iff f(x) = 0,\ \forall x \in [a, b] \iff f = 0$
- $\|\alpha f\| = \int_a^b |(\alpha f)(x)|\,dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|\,dx = |\alpha|\,\|f\|$
- $\|f + g\| = \int_a^b |(f + g)(x)|\,dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\| + \|g\|$

Assim $\mathscr{C}[a, b]$ é um espaço métrico sendo sua métrica definida da seguinte maneira:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

para quaisquer $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$.

A distância entre duas funções $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$ está ilustrada na figura abaixo: é a área da figura compreendida entre o gráfico de f e o de g.



8. *Um subespaço de* $\beta([a, b]; \mathbb{R})$. Já vimos (Exemplo 7) que o conjunto $\beta([a, b]; \mathbb{R})$ das funções $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitados é um espaço vetorial normado e, portanto, um espaço métrico.

Como porém $\mathscr{C}[a, b]$ (conjunto das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a, b]$) é um subconjunto de $\beta([a, b]; \mathbb{R})$ visto que toda função contínua $g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então $\mathscr{C}[a, b]$ também é um espaço métrico em relação à métrica definida por

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

para quaisquer $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$.

3. Produtos de Espaços Métricos

Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos arbitrários. Veremos agora que é possível tornar o conjunto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ em espaço métrico, através de métricas estreitamente ligadas às métricas $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pontos genéricos de $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ definamos as funções D, D_1 e $D_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

$$D(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \ldots + d_n(x_n, y_n)^2}$$
$$D_1(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \ldots + d_n(x_n, y_n)$$
$$D_2(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

As funções assim definidas são métricas sobre M embora a demonstração dos detalhes que caracterizam esse fato seja aqui omitida.

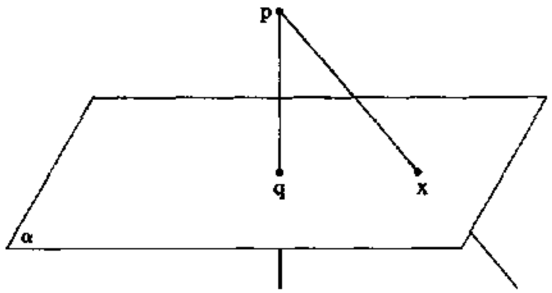
Notemos que quando $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = \mathbb{R}$ e $d_1 = \ldots = d_n = d =$ = métrica usual, então D, D_1 e D_2 coincidem respectivamente com as métricas D, D_1 e D_2 introduzidas no $\mathbb{R}^n$ (Exemplo 3 – item anterior).

Por outro lado, as seguintes relações se verificam

$$D_2(x, y) \leqslant D(x, y) \leqslant D_1(x, y) \leqslant n D_2(x, y)$$

§ 3 — DISTÂNCIA ENTRE PONTO E CONJUNTO — DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS — DIÂMETRO

Lembramos o seguinte fato tirado da geometria elementar: a distância de um ponto p a um plano α é a medida do segmento pq (ver figura abaixo) contido na perpendicular a α pelo ponto p.



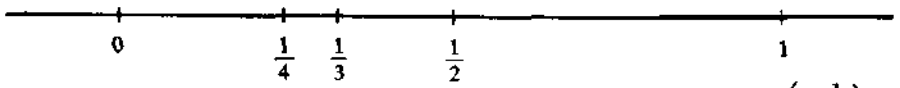
Esta definição de distância é normalmente precedida pelo seguinte teorema: "O segmento de perpendicular a um certo plano, por um ponto dado, tem medida menor (ou é menor) que qualquer segmento de oblíqua a esse plano, pelo ponto dado". Esta definição está englobada num contexto mais amplo que veremos a seguir.

Definição 2: Seja (M, d) um espaço métrico. Dados $p \in M$ e $A \subset M$ $(A \neq \emptyset)$, chama-se *distância* de p ao conjunto A, e indica-se por $d(p, A)$, o seguinte número real não negativo:

$$d(p, A) = \inf\{d(p, x) \mid x \in A\}$$

Notemos que a existência de $d(p, A)$ está assegurada pelo fato de que o conjunto dos $d(p, x)$, com $x \in A$, é limitado inferiormente pelo zero.

Exemplo: Consideremos sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. Se $p = 0$ e $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, então $d(p, A) = 0$



De fato, dado $\varepsilon > 0$, sempre existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Logo $d(0, A) = \inf\left\{d\left(0, \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r},\ r \in \mathbb{N}^*\right\} = 0$, isto é $d(0, A) = 0$.

Nota: O exemplo acima ilustra que é possível se ter $d(p, A) = 0$ e $p \notin A$. Mas é claro, por outro lado, que se $p \in A$, então $d(p, A) = 0$ pelo fato de que o número 0 neste caso pertence ao conjunto dos $d(p, x)$, $x \in A$.

Proposição 2: Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$ $(A \neq \emptyset)$ e $p, q \in M$, então $|d(p, A) - d(q, A)| \leqslant d(p, q)$.

Demonstração: Tomemos um ponto $x \in A$. Temos então: $d(p, A) \leqslant d(p, x) \leqslant d(p, q) + d(q, x)$. Daí $d(p, A) - d(p, q) \leqslant d(q, x)$. Ora, como esta desigualdade vale para todo $x \in A$, então a constante $d(p, A) - d(p, q)$ é um limite inferior do conjunto dos elementos do tipo $d(q, x)$, com $x \in A$. Donde

$$d(p, A) - d(p, q) \leqslant d(q, A)$$

Como esta desigualdade vale analogamente permutando-se p e q, então

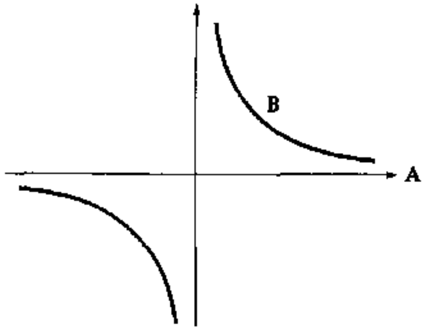
$$|d(p, A) - d(q, A)| \leqslant d(p, q) \blacksquare$$

Definição 3: Seja (M, d) um espaço métrico. Dados dois subconjuntos A e B do conjunto M, ambos não vazios, chama-se *distância* de A a B, e indica-se por $d(A, B)$, o número real não negativo definido da seguinte maneira:

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

O fato de que o conjunto das distâncias $d(x, y)$, com $x \in A$ e $y \in B$, é limitado inferiormente pelo número 0 garante a existência de $d(A, B)$ para quaisquer subconjuntos não vazios $A, B \in M$.

Exemplo: Consideremos o $\mathbb{R}^2$ dotado da métrica usual (euclidiana) e mostremos que a distância entre $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ é zero.



Para tanto é suficiente provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in A$ e existe $q \in B$ de maneira que $d(p, q) < \varepsilon$. Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n > 0$ de modo que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Daí, tomando $p = (n, 0)$ e $q = \left(n, \frac{1}{n}\right)$, teremos

$$d(p, q) = \sqrt{(n - n)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}$$

Nota: É claro que se $A \cap B \neq \emptyset$, então $d(A, B) = 0$ pois, neste caso, se $t \in A \cap B$, então $d(t, t) = 0$ é o mínimo do conjunto dos $d(x, y)$, com $x \in A$ e $y \in B$. Mas pode-se ter $d(A, B) = 0$ com $A \cap B = \emptyset$ como ocorreu no exemplo acima.

Definição 4: Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico M. Suponhamos que exista $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $d(x, y) < k$, para quaisquer $x, y \in A$. Nestas condições dizemos que A é um *conjunto limitado* e o supremo do conjunto $\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ chama-se *diâmetro* do conjunto A e é denotado por $d(A)$. Assim:

$$d(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Se o conjunto A não é limitado, por definição temos que $d(A) = \infty$.

Exemplo: Consideremos o $\mathbb{R}^2$ dotado da métrica euclidiana (usual) e verifiquemos que o diâmetro de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ é igual a 2.

Indiquemos por $p = (0, 0)$ a origem e tomemos dois pontos arbitrários $r, q \in A$. Então

$$d(q, r) \leqslant d(q, p) + d(p, r) < 1 + 1 = 2$$

o que garante que o número 2 é um limite superior do conjunto $\{d(q, r) \mid q, r \in A\}$. Mostremos que 2 é o menor desses limites superiores. Seja ℓ um limite superior e suponhamos que $\ell < 2$. Tomemos um número natural n tal que $\frac{\ell}{2 - \ell} < n$. Nessas condições $\left(\frac{n}{n+1}, 0\right)$ e $\left(-\frac{n}{n+1}, 0\right)$ são pontos de A cuja distância é

$$\sqrt{\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)^2 + 0^2} = \frac{2n}{n+1}$$

Como porém $\frac{\ell}{2 - \ell} < n$, então $\ell < 2n - \ell n$ e daí $\ell < \frac{2n}{1 + n}$, ou seja, existem dois pontos de A cuja distância é maior que ℓ. Absurdo, já que ℓ é um limite superior do conjunto dessas distâncias. Portanto $2 \leqslant \ell$, para todo limite superior ℓ desse conjunto e então $d(A) = 2$.

§ 4 — BOLAS ABERTAS

1. Definição de Bola Aberta

O conceito de bola aberta a ser introduzido a seguir desempenha um papel fundamental na teoria dos espaços métricos. Apenas para uma tomada de posição inicial do leitor adiantamos que esse papel é o mesmo dos intervalos do tipo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ no estudo da análise na reta. Em suma, elas têm uma atuação equivalente à dos "ε" e dos "δ" do cálculo ou da análise real.

Definição 5: Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d). Sendo $\varepsilon > 0$ um número real, a *bola de centro p e raio* ε, que indicaremos por $B(p, \varepsilon)$, é o seguinte subconjunto de M:

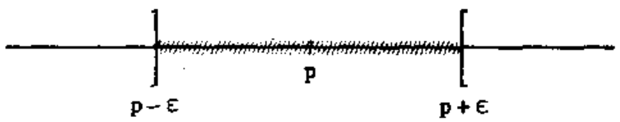
$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\}$$

Exemplos:

1. *Bolas num espaço cuja métrica é a "zero-um".* Seja (M, d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há 2 casos a considerar:

- $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Neste caso $B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\} = \{p\}$ porque o único ponto cuja distância a p é menor que 1 é o próprio p.
- $1 < \varepsilon$. Quando isto acontece, $B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\} = M$, porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a um, e portanto, menor que ε.

2. *Bolas na reta usual.* Na reta real a bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ε é o conjunto $B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\} =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$.



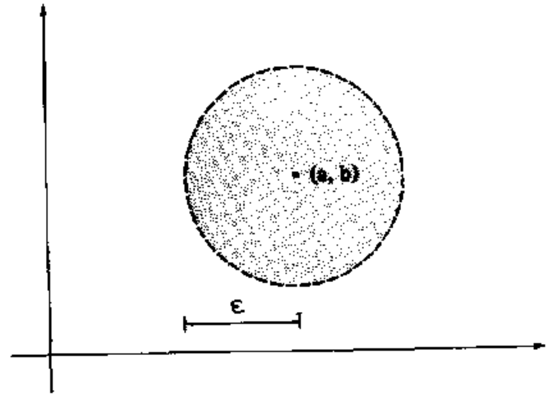
3. *Bolas no espaço* $\mathbb{R}^2$. Lembremos que no espaço $\mathbb{R}^2$ foram já definidas três métricas, a saber: para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$D_2(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|\}$$

Sendo $p = (a, b)$ um ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$, segundo a métrica D, é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid (X - a)^2 + (Y - b)^2 < \varepsilon^2\}$$

cujo gráfico é um disco aberto, conforme figura a seguir.



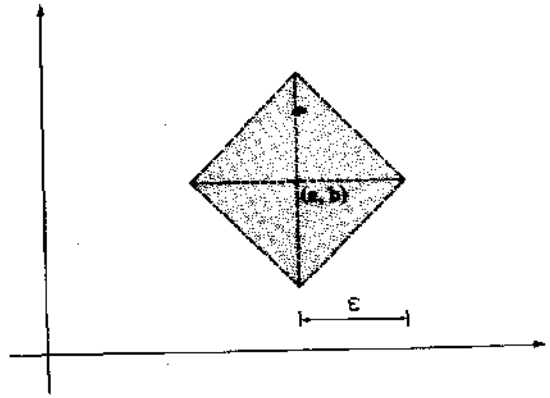
Quando a métrica for D_1, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid |X - a| + |Y - b| < \varepsilon\}$$

Ora, o gráfico da relação dada por

$$|X - a| + |Y - b| < \varepsilon$$

é um quadrado aberto (sem os lados) de diagonais paralelas aos eixos coordenados e de medida igual a 2ε, com centro em $p = (a, b)$.



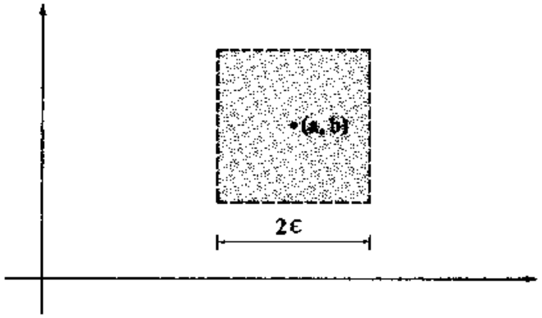
Por último, quando se tratar da métrica D_2, temos

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon\}$$

e o gráfico da relação

$$\max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon$$

que representa no plano a bola $B(p, \varepsilon)$ é o interior de um quadrado de centro $p = (a, b)$, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e têm medida igual a 2ε,

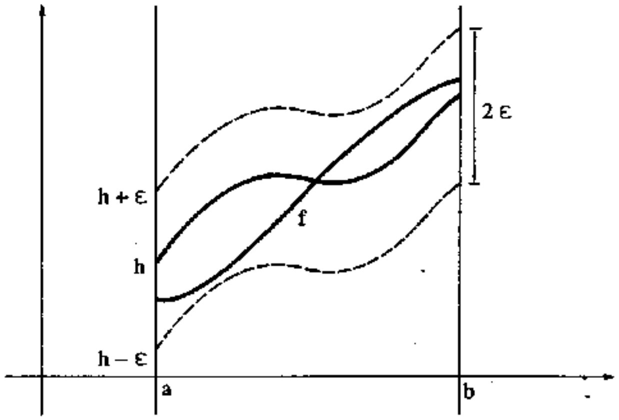


ou seja, $B(p, \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$.

4. *Bolas no espaço das funções $\mathscr{C}[a, b]$ com a métrica do supremo.* Já vimos que a função dada por

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

para quaisquer $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$, é uma métrica sobre este conjunto. Veremos agora que é possível visualizar uma bola aberta desse espaço através dos gráficos das funções que a ela pertencem. Uma bola $B(h, \varepsilon)$ é formada pelas funções cujos gráficos se situam na região do plano em que $a \leqslant x \leqslant b$, estritamente entre os gráficos de $h + \varepsilon$ e $h - \varepsilon$, conforme figura abaixo.



De fato, se $f \in B(h, \varepsilon)$, então $\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon$ e daí $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$, o que mostra que f tem seu gráfico na região citada. Por outro lado, se $f \in \mathscr{C}[a, b]$ é uma função cujo gráfico está localizado nessa região, temos

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon$$

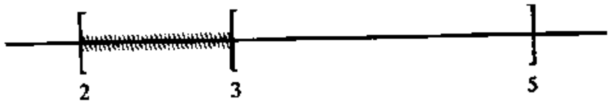
para todo $x \in [a, b]$, e da continuidade das funções consideradas decorre que

$$\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon$$

o que prova que $f \in B(h, \varepsilon)$.

5. *Bolas abertas num subespaço.* Seja (M, d) um espaço métrico. Consideremos um subespaço $N \subset M$. Dado então $p \in N$, o que é uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$, em relação a N? Por definição é o conjunto $B = \{x \in N \mid d(x, p) < \varepsilon\}$. Portanto $B = B(p, \varepsilon) \cap N$.

Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$ (métrica usual) e se $N = [2, 5]$, então a bola de centro 2 e raio $\varepsilon = 1$, em relação a N, é o intervalo $[2, 3[$.



Definição 6: Dado um espaço métrico (M, d), um ponto $p \in M$ se diz *ponto isolado* de M se existe $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(p, \varepsilon) = \{p\}$.

Exemplos:

1. Seja (M, d) um espaço cuja métrica é a "zero-um". Então todo ponto $p \in M$ é isolado porque, tomando $\varepsilon \in \mathbb{R}$ de maneira que $0 < \varepsilon \leqslant 1$, então $B(p, \varepsilon) = \{p\}$ conforme já vimos antes.

2. Pode ocorrer de todos os pontos de um espaço métrico serem isolados sem que a métrica seja a "zero-um". De fato, se em $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ considerarmos a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$ (ou seja considerarmos $\mathbb{N}$ subespaço de $\mathbb{R}$), para qualquer $p \in \mathbb{N}$ vamos ter

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - p| < \varepsilon\}$$

e portanto, se $0 < \varepsilon \leqslant 1$

$$B(p, \varepsilon) = \{p\}$$

3. Num espaço normado $E \neq \{0\}$ não existem pontos isolados. Mostremos primeiro que o vetor nulo 0 não é isolado. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Dado $u \in E$, $u \neq 0$, tomemos $\delta \in \mathbb{R}$ de maneira que $0 < \delta < \varepsilon$ e construamos o vetor

$$v = \frac{\delta}{\|u\|} u$$

Como

$$d(v, 0) = \|v - 0\| = \|v\| = \frac{\delta}{\|u\|} \|u\| = \delta < \varepsilon$$

então $v \in B(0, \varepsilon)$ e sendo $v \neq 0$ fica provado que 0 não é ponto isolado.

Agora, se tomarmos um ponto $w \neq 0$ e uma bola qualquer $B(w, \varepsilon)$, construindo o ponto $w + \frac{\delta}{\|u\|} u$, onde δ e u são tomados como no exemplo anterior, então esse ponto é distinto de w e pertence à bola $B(w, \varepsilon)$, posto que

$$d\left(w + \frac{\delta}{\|u\|} u, w\right) = \left\| \frac{\delta}{\|u\|} u \right\| = \delta < \varepsilon$$

2. Bolas Abertas e Produto Cartesiano de Espaços Métricos

Tivemos ocasião de ver no item anterior, quando tratamos de descrever as bolas abertas no espaço $\mathbb{R}^2$, em relação às três métricas consideradas sobre este conjunto, que quando a métrica usada é D_2, definida por

$$D_2(x, y) = \text{máx}\,\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, se $p = (a, b)$, então

$$B(p, \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$$

Quer dizer, $B(p, \varepsilon)$ é o produto cartesiano das bolas de centro a e raio ε e de centro b e raio ε, ambas em $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Em símbolos:

$$B(p, \varepsilon) = B(a, \varepsilon) \times B(b, \varepsilon)$$

Este resultado é bem mais geral, conforme mostraremos a seguir.

Proposição 3: Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos e consideremos sobre $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ a métrica D_2 definida por

$$D_2(x, y) = \text{máx}\,\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de M. Nessas condições, vale então a seguinte igualdade, para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$:

$$B(a, \varepsilon) = B(a_1, \varepsilon) \times \ldots \times B(a_n, \varepsilon)^*$$

Demonstração: Seja $p = (p_1, \ldots, p_n)$ um ponto arbitrário de M. Então:

$$p \in B(a, \varepsilon) \iff \max\{d_1(p_1, a_1), \ldots, d_n(p_n, a_n)\} < \varepsilon \iff$$
$$\iff d_i(p_i, a_i) < \varepsilon \; (i = 1, 2, \ldots, n) \iff$$
$$\iff p_i \in B(a_i, \varepsilon) \; (i = 1, 2, \ldots, n) \iff$$
$$\iff p \in B(a_1, \varepsilon) \times \ldots \times B(a_n, \varepsilon) \; \blacksquare$$

* Obviamente nesta igualdade $B(a, \varepsilon)$ é uma bola segundo a métrica d enquanto que cada $B(a_i, \varepsilon)$ é uma bola segundo d_i.

3. Propriedades Básicas das Bolas Abertas

As propriedades a seguir referem-se a bolas genéricas $B(p, \varepsilon)$ de um espaço métrico arbitrário (M, d).

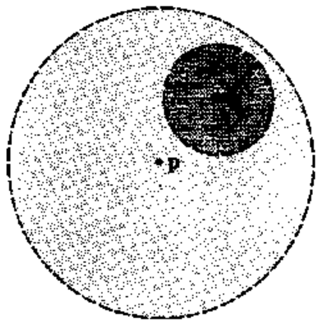
(P_1) Dadas $B(p, \varepsilon)$ e $B(p, \delta)$, se $\varepsilon \leqslant \delta$, então $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \delta)$.

Justificação: Se $x \in B(p, \varepsilon)$, então $d(x, p) < \varepsilon$. Como $\varepsilon \leqslant \delta$, concluímos que $d(x, p) < \delta$ e portanto que $x \in B(p, \delta)$.

(P_2) Dado $q \in B(p, \varepsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que

$$B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$$

Justificação: Tomemos $\delta = \varepsilon - d(p, q)$, conforme indica a intuição, e mostremos que efetivamente $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$. Seja $x \in B(q, \delta)$.



A desigualdade triangular nos garante que

$$d(x, p) \leqslant d(x, q) + d(q, p)$$

Como $d(x, q) < \delta = \varepsilon - d(p, q)$, então

$$d(x, p) < \varepsilon - d(p, q) + d(p, q) = \varepsilon$$

o que garante que $x \in B(p, \varepsilon)$.

(P_3) Sejam $B(p, \varepsilon)$ e $B(q, \delta)$ bolas não disjuntas. Se $t \in B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta)$, então existe $\lambda > 0$ tal que

$$B(t, \lambda) \subset B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta)$$

Justificação: Devido a (P_2) existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que

$$B(t, \lambda_1) \subset B(p, \varepsilon) \quad \text{e} \quad B(t, \lambda_2) \subset B(q, \delta)$$

Se $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, então $B(t, \lambda)$ está contida tanto em $B(t, \lambda_1)$ como em $B(t, \lambda_2)$ e portanto

$$B(t, \lambda) \subset B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta).$$

(P_4) Sejam p e q dois pontos, distintos entre si, de um espaço M. Se $d(p, q) = \varepsilon$, então $B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$.

Justificação: Suponhamos que exista $x \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Então $x \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e $x \in B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e portanto $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x, q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donde, considerando a desigualdade triangular:

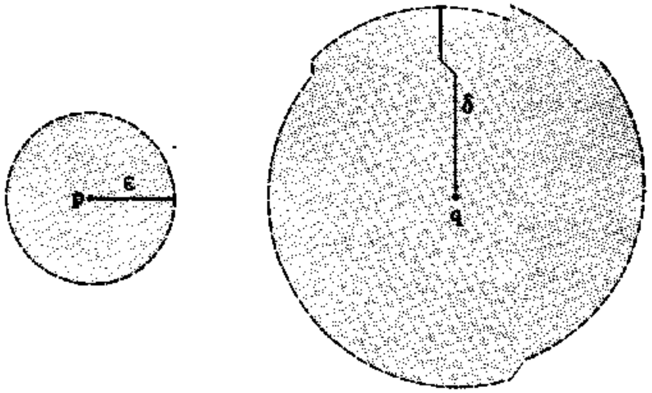
$$\varepsilon = d(p, q) \leqslant d(p, x) + d(x, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que é absurdo.

(P_5) Dadas as bolas $B(p, \varepsilon)$ e $B(q, \delta)$, se $\varepsilon + \delta \leqslant d(p, q)$, então

$$B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta) = \emptyset$$

Justificação:



Suponhamos o contrário, ou seja, que existe um ponto $x \in B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta)$. Então $d(x, p) < \varepsilon$ e $d(x, q) < \delta$ e portanto

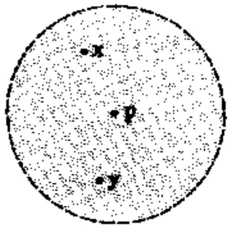
$$d(p, q) \leqslant d(p, x) + d(x, q) < \varepsilon + \delta \leqslant d(p, q)$$

o que é impossível.

(P_6) O diâmetro de uma bola $B(p, \varepsilon)$ é menor que ou igual a 2ε, isto é, $d(B(p, \varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

Justificação: Sejam x e y pontos arbitrários de $B(p, \varepsilon)$. Então

$$d(x, y) \leqslant d(x, p) + d(p, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$



Donde: $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in B(p, \varepsilon)\} \leqslant 2\varepsilon$, ou seja, $d(B(p, \varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

Notas:

1. A desigualdade $d(B(p, \varepsilon)) < 2\varepsilon$ pode efetivamente acontecer. De fato consideremos sobre $M \neq \emptyset$ a métrica zero-um. Dado então um ponto $p \in M$ e tomando um número real ε tal que $0 < \varepsilon \leqslant 1$, já sabemos que

$$B(p, \varepsilon) = \{p\}$$

cujo diâmetro é zero e, portanto, diferente de 2ε.

2. Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$ o diâmetro de uma bola $B(p, \varepsilon)$ é exatamente 2ε. Para provar tal afirmação suponhamos que $d(B(p, \varepsilon)) = \delta < 2\varepsilon$ e tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$ de maneira que $\delta < \lambda < 2\varepsilon$. Se u é um vetor não nulo de E, então

$$v = p + \frac{\lambda}{2\|u\|}u \qquad \text{e} \qquad w = p - \frac{\lambda}{2\|u\|}u$$

pertencem a $B(p, \varepsilon)$ porque $d(v, p) = \|v - p\| = \left\|\frac{\lambda}{2\|u\|}u\right\| = \frac{\lambda}{2} < \varepsilon$ e analogamente

$$d(w, p) = \frac{\lambda}{2} < \varepsilon$$

Mas $d(v, w) = \left\|\frac{\lambda u}{\|u\|}\right\| = \lambda > \delta$ e, portanto, v e w são pontos de $B(p, \varepsilon)$ cuja distância é maior que o diâmetro desta bola. Este absurdo garante então que $d(B(p, \varepsilon)) = 2\varepsilon$.

§ 5 — MÉTRICAS E NORMAS EQUIVALENTES

1. Métricas Equivalentes

Neste item consideraremos duas métricas d e d', não necessariamente iguais, sobre um mesmo conjunto M. Nessas condições, a fim de evitar confusões, indicaremos por $B_d(p, \varepsilon)$ uma bola de centro p e raio ε, segundo a métrica d e, obviamente, por $B_{d'}(p, \varepsilon)$ a bola de centro p e raio ε quando se tratar da métrica d'.

Definição 7: Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Diz-se que d e d' são *métricas equivalentes* se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p, \varepsilon)$, existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$ e, vice-versa, dada uma bola qualquer $B_{d'}(d, \varepsilon)$ existe $\lambda > 0$ de forma que $B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$. Se d e d' são métricas equivalentes, indicaremos este fato por $d \sim d'$.

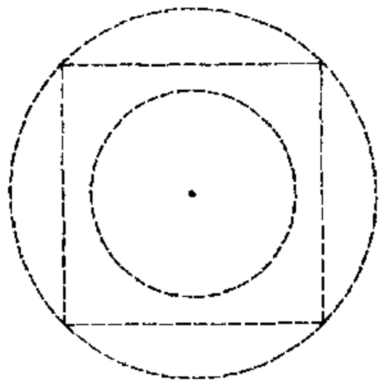
Exemplo: É bastante intuitivo que as métricas D e D_2, por exemplo, do espaço $\mathbb{R}^2$, definidas por

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

e

$$D_2(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ são equivalentes visto que todo disco aberto do plano contém um quadrado aberto, de mesmo centro, com os lados paralelos aos eixos e que todo quadrado nestas condições contém um disco aberto de mesmo centro, conforme pode ser visualizado na figura abaixo.



Nota: Da definição e da propriedade P_2 sobre bolas abertas resulta que se d e d' são métricas equivalentes sobre M então toda bola $B_d(p, \varepsilon)$ é uma reunião de bolas $B_{d'}(p_i, \varepsilon_i)$ e vice-versa. De fato, dado $q \in B_d(p, \varepsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_d(q, \delta) \subset B_d(p, \varepsilon)$. Como $d' \sim d$, então existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(q, \lambda) \subset B_d(q, \delta)$ e então $B_{d'}(q, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$. Isto prova que $B_d(p, \varepsilon)$ é união de bolas segundo d'. Analogamente se conclui o contrário.

Proposição 4: Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Se existem números reais $r, s > 0$ tais que

$$r\,d(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant s\,d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, então $d \sim d'$.

Demonstração: Seja p um ponto de M e consideremos a bola $B_d(p, \varepsilon)$. Mostremos que

$$B_{d'}(p, r\varepsilon) \subset B_d(p, \varepsilon)$$

De fato, dado $x \in B_{d'}(p, r\varepsilon)$, então $d'(x, p) < r\varepsilon$ e como $r\,d(x, p) \leqslant d'(x, p)$, obtemos que $r\,d(x, p) < r\varepsilon$. Donde $d(x, p) < \varepsilon$ e então $x \in B_d(p, \varepsilon)$.

Consideremos agora a bola $B_{d'}(p, \varepsilon)$ e provemos que $B_d\left(p, \frac{\varepsilon}{s}\right) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$. Dado $x \in B_d\left(p, \frac{\varepsilon}{s}\right)$, então $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{s}$ e daí $s \cdot d(x, p) < \varepsilon$. Porém $d'(x, p) \leqslant s\,d(x, p)$ e portanto $d'(x, p) < \varepsilon$ o que garante que $x \in B_{d'}(p, \varepsilon)$. ∎

Exemplo: As métricas D, D_1 e D_2 do $\mathbb{R}^n$ definidas respectivamente por

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes pois como já vimos valem as relações

$$D_2(x, y) \leqslant D(x, y) \leqslant D_1(x, y) \leqslant n D_2(x, y) \leqslant n D(x, y)$$

para x e y quaisquer em $\mathbb{R}^n$.

Nota: Não vale a recíproca da proposição 4. Ver Exercícios 29 e 30.

2. Normas Equivalentes

Teremos ocasião agora de considerar duas normas, não necessariamente iguais, sobre um mesmo espaço vetorial E. Para diferenciá-las usaremos a notação $\| \ \|$ para uma delas e $\| \ \|'$ para a outra. As métricas induzidas sobre E por essas normas serão indicadas respectivamente por d e d'.

Definição 8: Duas normas sobre o mesmo espaço vetorial E dizem-se *equivalentes* se, e somente se, as métricas induzidas por essas normas sobre E são equivalentes.

Se $\| \ \|$ e $\| \ \|'$ são as normas consideradas e d e d' as métricas induzidas, respectivamente, por essas normas, então a equivalência definida significa o seguinte: dada uma bola $B_d(p, \varepsilon)$, com $p \in E$, existe uma bola $B_{d'}(p, \lambda)$ de modo que

$$B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$$

e vice-versa.

Proposição 5: Duas normas $\| \ \|$ e $\| \ \|'$ sobre o mesmo espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ de maneira que

$$r\|u\| \leqslant \|u\|' \leqslant s\|u\|$$

para qualquer $u \in E$.

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Dados u, v $\in$ E, por hipótese temos

$$r\|u - v\| \leqslant \|u - v\|' \leqslant s\|u - v\|$$

ou seja

$$rd(u, v) \leqslant d'(u, v) \leqslant sd(u, v)$$

para quaisquer u, v $\in$ E. A proposição 4 nos garante então que $d \sim d'$ o que, por sua vez significa que as normas dadas, por definição, são equivalentes.

($\Longrightarrow$) Por hipótese as normas dadas são equivalentes. Logo, dada a bola $B_d(0, 1)$ existe uma bola $B_{d'}(0, \lambda)$ de modo que

$$B_{d'}(0, \lambda) \subset B_d(0, 1)$$

Tomando um número real r tal que $0 < r < \lambda$, o vetor $\frac{ru}{\|u\|'}$, para todo u $\in$ E, $u \neq 0$, pertence à bola $B_{d'}(0, \lambda)$ visto que

$$\left\|\frac{ru}{\|u\|'}\right\|' = \frac{r\|u\|'}{\|u\|'} = r < \lambda$$

logo esse vetor também pertence à bola $B_d(0, 1)$ o que tem como conseqüência

$$\left\|\frac{ru}{\|u\|'}\right\| < 1$$

ou seja

$$r\|u\| < \|u\|'$$

Por outro lado, dada a bola $B_{d'}(0, 1)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(0, \lambda) \subset$ $\subset B_{d'}(0, 1)$. Tomemos um número real s que verifique as desigualdades $0 <$ $< \frac{1}{s} < \lambda$. Então, para todo u $\in$ E, $u \neq 0$, o vetor $\frac{u}{s\|u\|}$ pertence a $B_d(0, \lambda)$ posto que

$$\left\|\frac{u}{s\|u\|}\right\| = \frac{\|u\|}{s\|u\|} = \frac{1}{s} < \lambda$$

Logo também pertence a $B_{d'}(0, 1)$, o que acarreta

$$\left\|\frac{u}{s\|u\|}\right\|' < 1$$

ou seja,

$$\|u\|' < s\|u\|$$

Assim temos

$$r\|u\| < \|u\|' < s\|u\|$$

para todo vetor $u \neq 0$. Se considerarmos também o vetor nulo de E teremos então exatamente a tese: existem r, s $\in \mathbb{R}_+^*$ de maneira que

$$r\|u\| \leqslant \|u\|' \leqslant s\|u\|$$

para qualquer u $\in$ E. ∎

Exemplo: Mostraremos agora que as normas dadas por

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

e

$$\|f\|' = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

definida sobre o conjunto $\mathscr{C}[0, 1]$ das funções contínuas reais definidas no intervalo [0, 1] não são equivalentes. Para tanto consideremos a bola $B_d\left(0; \frac{1}{2}\right)$ e mostremos que para qualquer número real $\lambda > 0$:

$$B_{d'}(0; \lambda) \not\subset B_d\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

De fato, consideremos um número real a, estritamente positivo, de maneira que $a < 2\lambda$ e $a < 1$. Nessas condições a função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

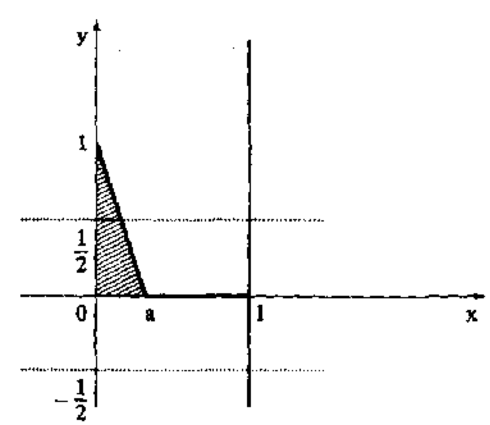
$$f(x) = -\frac{1}{a}x + 1, \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant a$$

e

$$f(x) = 0 \qquad , \text{para } a \leqslant x \leqslant 1$$

é tal que $f \in \mathscr{C}[0, 1]$.

Mostremos que $f \in B_{d'}(0, \lambda)$. Isto pode ser feito diretamente através do gráfico abaixo, lembrando que $d'(f, 0) = \|f\|' = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ é a área da figura compreendida entre o gráfico de f e o eixo $-x$, da reta $x = 0$ à reta $x = 1$.



Ora, esta área é dada pela do triângulo destacado da figura anterior e, portanto, é igual a $\frac{a}{2}$ que é menor que λ. Donde $d'(f, 0) = \frac{a}{2} < \lambda$ e, portanto, $f \in B_{d'}(0, \lambda)$.

Por outro lado é imediato notar que $f \notin B_d\left(0; \frac{1}{2}\right)$ visto que

$$d(f, 0) = \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\} = 1$$

§ 6 — SEQÜÊNCIAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

1. Seqüências — Limite de uma Seqüência

Seja (M, d) um espaço métrico. Toda aplicação $n \longrightarrow x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M, é chamada *seqüência* de elementos de M e a notação para se indicar uma tal seqüência é $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou, resumidamente, (x_n).

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma seqüência da seqüência propriamente dita. Dada a seqüência (x_n), cada imagem x_n é chamada *termo* da seqüência. Assim o conjunto dos termos dessa seqüência é $\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e a conceituação aqui envolvida é bem diferente da de seqüência. Por exemplo, $(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \ldots)$ é uma seqüência de elementos de $\mathbb{R}$ cujo conjunto dos termos é $\{1, 2\}$.

Dada uma seqüência (x_r) em M, se $\{r_1, r_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}^*$ e $r_1 < r_2 < \ldots$, então a aplicação dada por $r_i \longrightarrow x_{r_i}$ é indicada por $(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots)$ e recebe o nome de subseqüência de (x_r). Por exemplo, considerando a seqüência $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$ de elementos de $\mathbb{R}$, então $(1, 1, 1, \ldots)$ é uma subseqüência da seqüência dada pois, como é óbvio, temos

$$(1, 1, 1, \ldots) = (x_1, x_4, x_7, \ldots)$$

desde que façamos

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots).$$

A partir desse exemplo fica fácil, inclusive, chegar à conclusão de que toda subseqüência pode ser também encarada como uma seqüência como realmente o é.

Definição 9: Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é *limite* de uma seqüência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p, \varepsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B(p, \varepsilon)$$

Para indicar que p é limite de seqüência (x_n) usa-se a notação $\lim x_n = p$ ou, ainda, $x_n \longrightarrow p$. Dizemos, para exprimir este fato, que (x_n) é uma *seqüência convergente* ou que (x_n) *converge* para p.

Proposição 6: Uma seqüência (x_n) de elementos de M converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice r de maneira que

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$

Demonstração: É evidente pois: $x_n \in B(p, \varepsilon) \Longleftrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$. ∎

Nota: É claro, em vista da definição, que se $(x_1, x_2, \ldots)$ converge para p, então, para qualquer índice r, a subseqüência $(x_r, x_{r+1}, \ldots)$ também converge para p.

Exemplos e Contra-exemplos:

1. Seja num espaço métrico M uma ***seqüência estacionária***, isto é, uma seqüência (x_n) de pontos de M tal que $x_n = p$, a partir de um certo índice. Assim: $(x_n) = (x_1, \ldots, x_r, p, p, \ldots)$. Tais seqüências são convergentes para o termo que se repete, ou seja, $(x_1, \ldots, x_r, p, p, \ldots) \longrightarrow p$; uma vez que $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = p$, então, para todo $\varepsilon > 0$,

$$n \geqslant r + 1 \Longrightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon$$

Em particular as ***seqüências constantes*** $(p, p, \ldots)$ convergem para essa constante p.

2. Consideremos $\mathbb{R}$ dotado da métrica usual. A seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$, onde

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

converge para o ponto 1. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $r \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $\frac{1}{r+1} < \varepsilon$. Então, para todo $n \geqslant r$, temos

$$d(x_n, 1) = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{r+1} < \varepsilon$$

o que vem garantir nossa afirmação.

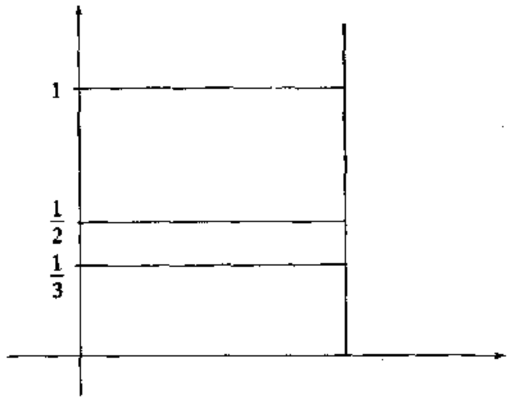
3. Consideremos o conjunto $\mathscr{C}[0, 1]$ das funções contínuas reais definidas no intervalo $[0, 1]$ e, nesse conjunto, a métrica

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

A seqüência $(f_1, f_2, \ldots)$, onde $f_n(x) = \frac{1}{n}$ para todo $x \in [0, 1]$, converge para a função constante nula, isto é, a função definida por

$$f(x) = 0, \ \forall x \in [0, 1]$$

conforme provaremos a seguir. Seja $\varepsilon > 0$.



Observemos que, para todo número natural $n > 0$, $d(f_n, f) = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$. Assim, considerando um índice r tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$, para todo $n \geqslant r$ temos

$$d(f_n, f) = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{r} < \varepsilon$$

4. Seja (M, d) um espaço métrico cuja métrica é a zero-um e mostremos que uma seqüência (x_n) em M converge se, e somente se, é estacionária. É claro que se (x_n) é estacionária então (x_n) converge. Suponhamos que $\lim x_n = p \in M$. Tomando $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant 1$, então existe um índice r tal que $x_r, x_{r+1}, \ldots \in B(p, \varepsilon) = \{p\}$. Donde $x_r = x_{r+1} = \ldots = p$.

5. Seja (M, d) um espaço métrico tal que M não é um conjunto unitário. *Então, se $p, q \in M$ e $p \neq q$, a seqüência $(p, q, p, q, \ldots)$ não é convergente* para nenhum ponto de M. Suponhamos que tal seqüência convergisse para $a \in M$. Então, sendo $\varepsilon = \frac{d(p, q)}{2}$, a bola $B(a, \varepsilon)$ deve conter todos os pontos da seqüência, a partir de um deles, e portanto deve conter p e q. Daí então

$$d(p, q) \leqslant d(p, a) + d(a, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q)$$

o que é absurdo.

Proposição 7: Seja (x_n) uma seqüência convergente de um espaço métrico M. *Então é único o limite dessa seqüência.*

Demonstração: Suponhamos $\lim x_n = p$ e $\lim x_n = q$. Se $p \neq q$, então $\varepsilon = \frac{d(p, q)}{2}$ é maior que zero e portanto existem índices r, s de maneira que

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$
$$n \geqslant s \Longrightarrow d(x_n, q) < \varepsilon$$

Tomando $t = \text{máx}\{r, s\}$, então

$$n \geqslant t \Longrightarrow (d(x_n, p) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(x_n, q) < \varepsilon)$$

Daí então, para todo $n \geqslant t$:

$$d(p, q) \leqslant d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q)$$

o que é absurdo. ∎

Proposição 8: *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre um conjunto M. Então uma seqüência (x_n) de pontos de M converge no espaço (M, d) para um ponto $p \in M$ se, e somente se, essa seqüência converge em (M, d') para o mesmo ponto p.*

Demonstração: Por hipótese $x_n \longrightarrow p$ no espaço (M, d). Dado uma bola $B_{d'}(p, \varepsilon)$, como $d \sim d'$, existe $\lambda > 0$ de maneira que

$$B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$$

A hipótese assinalada no início da demonstração garante então que existe $r > 0$ tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B_d(p, \lambda)$$

e portanto

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B_{d'}(p, \varepsilon)$$

o que prova que $x_n \longrightarrow p$ em (M, d').

$(\Longleftarrow)$ A demonstração desta recíproca obviamente é análoga à que acabamos de fazer. ∎

Proposição 9: *Se uma seqüência (x_n) de pontos de um espaço M converge para $p \in M$, então toda subseqüência de (x_n) também converge para p.*

Demonstração: Seja $(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots)$ uma subseqüência da seqüência dada e consideremos $\varepsilon > 0$. Da hipótese de que $\lim x_n = p$ decorre que existe k tal que

$$n \geqslant k \Longrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$

Ora, como cada $r_i \in \mathbb{N}$ e $r_1 < r_2 < \ldots$, então existe $r_t > k$ e portanto, para todo $r_i \geqslant r_t$, vale a relação

$$d(x_{r_i}, p) < \varepsilon$$

com o que fica provado que $\lim x_{r_i} = p$. ∎

Nota: A recíproca da proposição acima obviamente não é válida. Em $\mathbb{R}$, por exemplo, a seqüência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ não é convergente enquanto que suas subseqüências $(1, 1, 1, \ldots)$ e $(2, 2, \ldots)$ são convergentes.

Definição 10: Uma seqüência (x_n) de pontos de um espaço métrico M se diz *limitada* se o conjunto $\{x_n | n = 1, 2, \ldots\}$ dos termos dessa seqüência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_s) < k$, para quaisquer termos x_r e x_s da seqüência dada.

Proposição 10: Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de pontos de um espaço M, convergente para $p \in M$. Dada a bola $B(p, 1)$, existe então um índice r tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B(p, 1)$$

Seja $k > \text{máx}\{d(x_i, p) \mid i = 1, \ldots, r-1\}$ e consideremos a bola $B(p, \varepsilon)$, onde $\varepsilon = \max\{1, k\}$. Então todos os pontos do conjunto $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ pertencem a essa bola e portanto, para quaisquer termos x_i e x_j da seqüência:

$$d(x_i, x_j) \leqslant d(x_i, p) + d(p, x_j) < 2\varepsilon$$

o que prova ser a seqüência (x_n) limitada. ■

Nota: Nem toda seqüência limitada é convergente. De fato, em $\mathbb{R}$ a seqüência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ é obviamente limitada mas não é convergente.

2. Seqüências num Espaço Produto

Sejam M e N espaços métricos arbitrários. No que veremos neste parágrafo, ou nas implicações posteriores, dele, estaremos considerando sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas habituais num produto cartesiano (ver § 2 – 3).

Uma seqüência de pontos de $M \times N$, sendo definida por

$$((x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots)$$

onde cada $x_i \in M$ e cada $y_i \in N$, determina a seqüência (x_n), de pontos de M, e a seqüência (y_n), de pontos de N. Estabeleceremos, a seguir, condição que dá a convergência de $((x_n, y_n))$ em termos da convergência das seqüências (x_n) e (y_n).

Proposição 11: Uma seqüência $((x_n, y_n))$ de pontos do produto $M \times N$ de dois espaços métricos M e N converge para $(p, q) \in M \times N$ se, e somente se, $x_n \longrightarrow p$ em M e $y_n \longrightarrow q$ em N.

Demonstração: Conforme proposição 3 é indiferente usar uma qualquer das métricas usuais. Faremos a demonstração usando a métrica D_1 (da soma) e, para tanto, indicaremos por d tanto a métrica de M como a de N.

$(\Longrightarrow)$ Seja $\varepsilon > 0$. Então existe um índice r tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow D_1(x_n, y_n); (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \varepsilon$$

Conseqüentemente, para todo $n \geqslant r$, temos

$$d(x_n, p) < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad d(y_n, q) < \varepsilon$$

o que nos garante que $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$.

$(\Longleftarrow)$ Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese existem índices r e s tais que

$$\left(n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(n \geqslant s \Longrightarrow d(y_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Considerando $t = \text{máx}\{r, s\}$, então

$$n \geqslant t \Longrightarrow D_1((x_n, y_n); (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donde $(x_n, y_n) \longrightarrow (p, q)$. ■

Nota: A generalização do que acabamos de ver, para n espaços métricos $(n \geqslant 2)$, é imediata: dados os espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, uma seqüência

$$((x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}); (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}); \ldots)$$

de pontos de $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ determina n seqüenciais, a saber,

$$(x_{11}, x_{21}, \ldots), (x_{12}, x_{22}, \ldots), \ldots, (x_{1n}, x_{2n}, \ldots)$$

respectivamente em $M_1, M_2, \ldots, M_n$, e se prova, de maneira análoga, que a seqüência dada em $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ converge para o ponto $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ desse espaço se, e somente se,

$$(x_{1i}, x_{2i}, \ldots) \longrightarrow p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Exemplo: No espaço $\mathbb{R}^2$ a seqüência

$$\left((1, 2); \left(\frac{1}{2}, 2\right); \left(\frac{1}{3}, 2\right); \ldots\right)$$

converge para $(0, 2)$ uma vez que $\lim \frac{1}{n} = 0$ e $(2, 2, 2, \ldots) \longrightarrow 2$.

Ainda no espaço $\mathbb{R}^2$ a seqüência

$$\left((1, 2); \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(\frac{1}{3}, 2\right); \left(\frac{1}{4}, 1\right); \ldots\right)$$

não converge em $\mathbb{R}^2$ posto que, embora $\lim \frac{1}{n} = 0$, a seqüência $(2, 1, 2, 1, \ldots)$, dos segundos termos, não converge em $\mathbb{R}$.

3. Seqüências em Espaços Vetoriais Normados

A – Seqüências em $\mathbb{R}$

No espaço $\mathbb{R}$ têm muito interesse as chamadas *seqüências monótonas* que compreendem os seguintes tipos:

Crescentes são as seqüências (x_n) tais que $x_r \leqslant x_{r+1}$, para qualquer índice r. Se $x_r < x_{r+1}$, para todo $r \geqslant 1$, então (x_n) se diz *estritamente crescente*.

Decrescentes são as seqüências (x_n) para as quais se tem $x_{r+1} \leqslant x_r$, para todo índice r. Quando $x_{r+1} < x_r$, para qualquer $r \geqslant 1$, então a seqüência se diz *estritamente decrescente*.

Exemplos: A seqüência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ é estritamente decrescente ao passo que $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$ é crescente. É claro que $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ não é monótona.

Proposição 12: Toda seqüência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo desse conjunto.

Demonstração: Suponhamos (x_n) uma seqüência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < \ldots < \ell$ e seja $p = \sup\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Provaremos que $\lim x_n = p$.

Dado $\varepsilon > 0$, não se pode ter $x_n \leqslant p - \varepsilon$ para todo índice n pois isto significaria a existência de um limite superior do conjunto $\{x_n\}$ menor do que p. Donde, para um certo índice r tem-se $p - \varepsilon < x_r \leqslant p$ e daí

$$p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon$$

para todo $n \geqslant r$, ou seja

$$n \geqslant r \Longrightarrow |x_n - p| < \varepsilon$$

Isto vem garantir nossa afirmação de que $\lim x_n = p$.

A demonstração no caso de uma seqüência crescente é análoga. ■

Nota: Do mesmo modo se prova que "Toda seqüência decrescente ou estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo desse conjunto".

Proposição 13: (Conservação do sinal) (a) Se (x_n) é uma seqüência em $\mathbb{R}$ e se $\lim x_n = p > 0$, então existem um índice r e uma constante $c > 0$ de maneira que $x_n > c$, para todo $n \geqslant r$. (b) Se $\lim x_n = p < 0$, então existe uma constante $c < 0$ e existe um índice r tal que $x_n < c$ para qualquer $n \geqslant r$.

Demonstração:

(a) Tomemos $\varepsilon = \frac{p}{2}$. Então existe um índice r tal que para $n \geqslant r$ se tem $|x_n - p| < \frac{p}{2}$, ou seja, $-\frac{p}{2} < x_n - p < \frac{p}{2}$. Donde (somando p): $\frac{p}{2} < x_n$, para qualquer $n \geqslant r$. Então basta tomar $c = \frac{p}{2}$.

(b) Neste caso a demonstração é semelhante: é só tomar $\varepsilon = \frac{|p|}{2}$ e veremos que $c = \frac{p}{2}$ verificará a condição proposta, a partir de um certo termo. ■

Nota: A proposição acima significa, em particular, que $x_n > 0$ para todo $n \geqslant r$ (no primeiro caso) e que $x_n < 0$, de um determinado termo em diante (no segundo caso).

B – Seqüências em Espaços Normados Quaisquer

Dado um espaço vetorial normado E chamaremos de origem de E, como é praxe, o ponto O do espaço, ou seja, o elemento neutro da adição de E (vetor nulo).

Proposição 14: Seja (x_n) uma seqüência de pontos de um espaço vetorial normado E que converge para $p \in E$. Então existe uma bola de centro na origem que contém todos os termos de seqüência.

Demonstração: Tomando $\varepsilon = 1$, existe um índice r tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) = \|x_n - p\| < 1$$

Como porém

$$\|x_n\| = \|x_n - p + p\| \leqslant \|x_n - p\| + \|p\|$$

então para todo $n \geqslant r$ tem-se

$$\|x_n\| < 1 + \|p\|$$

Seja $\lambda > \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{r-1}\|, 1 + \|p\|\}$. Então, para todo índice n:

$$d(x_n, 0) = \|x_n\| < \lambda$$

o que prova a proposição. ■

Definição 11: Seja $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ seqüências de um espaço vetorial normado E. Chama-se *soma* de f com g a seqüência $f + g = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$. Se $k = (\alpha_n)$ é uma seqüência de elementos de $\mathbb{R}$, então o *produto* kf é definido naturalmente do seguinte modo: $kf = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$.

Proposição 15: Sejam (x_n) e (y_n) seqüências de um espaço vetorial normado E. Se $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$, então $\lim(x_n + y_n) = p + q$.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Então, por hipótese, existem índices r e s tais que

$$n \geqslant r \Longrightarrow \|x_n - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n \geqslant s \Longrightarrow \|y_n - q\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considerando $t = \max\{r, s\}$ temos então:

$$n \geqslant t \Longrightarrow \|(x_n + y_n) - (p + q)\| \leqslant \|x_n - p\| + \|y_n - q\| < \varepsilon$$

e portanto $(x_n + y_n) \longrightarrow p + q$. ■

Corolário: Se (x_n) e (y_n) são seqüências em $\mathbb{R}$ tais que $x_n \leqslant y_n$, a partir de um determinado índice r, e se (x_n) e (y_n) são convergentes, então $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.

De fato, suponhamos $\lim x_n > \lim y_n$ e consideremos a seqüência $(x_n - y_n)$. É fácil mostrar que $\lim(-y_n) = -\lim y_n$ (verifique). Daí então $\lim(x_n - y_n) =$

$= \lim x_n - \lim y_n > 0$. Donde vamos ter $x_n - y_n > 0$ para todo índice n maior que um determinado índice s (prop. 13). Ora, se tomarmos $n > \text{máx}\{r, s\}$ teremos então a seguinte contradição: $x_n > y_n$ e $x_n \leqslant y_n$. Com isto fica provada a proposição. ■

Proposição 16: Seja (x_n) uma seqüência de pontos de um espaço vetorial E *que converge para um ponto* $p \in E$. *Se* (α_n) *é uma seqüência em* $\mathbb{R}$ *tal que* $\lim \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$, então $\lim \alpha_n x_n = \alpha p$.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. A convergência de (α_n) para α tem as seguintes conseqüências

(i) para qualquer $c > \|p\|$, existe um índice r de modo que

$$n \geqslant r \Longrightarrow |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2c}$$

(ii) existe $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$, tal que $|\alpha_n| < k$, para todo $n \geqslant 1$ (prop. 14).

Por outro lado, como $\lim x_n = p$, então existe $s \geqslant 1$ tal que

$$n \geqslant s \Longrightarrow \|x_n - p\| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Portanto, para todo $n \geqslant \text{máx}\{r, s\}$, temos

$$\|\alpha_n x_n - \alpha p\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n p + \alpha_n p - \alpha p\| \leqslant |\alpha_n| \|x_n - p\| +$$

$$+ |\alpha_n - \alpha| \|p\| < k \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2c} c = \varepsilon. \blacksquare$$

Exemplo: Seja a um número real tal que $0 < a < 1$. Mostremos que a seqüência $(a, a^2, a^3, \dots)$ converge para zero. Como $a > a^2 > a^3 > \dots > 0$ então a seqüência dada é estritamente decrescente e o conjunto dos seus termos limitado inferiormente pelo 0. Então tal seqüência converge em $\mathbb{R}$ e $\lim a^n = p = \inf\{a^n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Ora, como

$$(a, a^2, a^3, \dots) = (a, a, a, \dots) \cdot (1, a, a^2, \dots)$$

e as seqüências $(a, a^2, a^3, \dots)$ e $(1, a, a^2, \dots)$ têm mesmo limite (imediato), então a proposição anterior nos assegura que

$$p = ap \text{ e daí } p(1 - a) = 0$$

Como $a \neq 1$, então $p = 0$.

Podemos generalizar do seguinte modo tal resultado: se $a \in \mathbb{R}$ e $|a| < 1$, então $\lim |a|^n = 0$.

Lema: Seja (x_n) uma seqüência de pontos de um espaço vetorial normado E. Se (x_n) converge para p, então a seqüência $(\|x_n\|)$ converge para $\|p\|$.

Demonstração: Notemos inicialmente que, para todo índice n, $\|x_n\| = \|x_n - p + p\| \leqslant \|x_n - p\| + \|p\|$ e que, portanto

$$\|x_n\| - \|p\| \leqslant \|x_n - p\|$$

Analogamente se obtém que

$$\|p\| - \|x_n\| \leqslant \|x_n - p\|$$

Donde, então

$$|\|x_n\| - \|p\|| \leqslant \|x_n - p\|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, por hipótese existe $r > 0$ tal que $\|x_n - p\| < \varepsilon$, para todo $n \geqslant r$. Logo vamos ter também

$$|\|x_n\| - \|p\|| < \varepsilon$$

para qualquer índice maior que o mesmo r. ■

Proposição 17: Seja (α_n) uma seqüência de pontos de $\mathbb{R}$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha \neq 0$. Então a seqüência $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$ definida por $\beta_n = 0$, sempre que $\alpha_n = 0$, e $\beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$, para todo $\alpha_n \neq 0$, converge para $\dfrac{1}{\alpha}$.

Demonstração: A proposição 13 (conservação do sinal) nos diz que existe um índice r tal que $\alpha_n \neq 0$, para todo $n \geqslant r$. Como $\lim |\alpha_n| = |\alpha| > 0$, já que $\lim \alpha_n = \alpha \neq 0$, então existe uma constante $c > 0$ tal que $|\alpha_n| \geqslant c$ para todo índice maior que um certo s (isto ainda em virtude da proposição 13). Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe t de modo que:

$$n \geqslant t \Longrightarrow |\alpha_n - \alpha| < c|\alpha|\varepsilon$$

Portanto, para qualquer $n > \text{máx}\{r, s, t\}$, temos

$$\left|\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|\alpha - \alpha_n|}{|\alpha_n||\alpha|} < \frac{c|\alpha|\varepsilon}{c|\alpha|} = \varepsilon$$

Isto vem provar que, de fato, $\lim \beta_n = \dfrac{1}{\alpha}$. ■

EXERCÍCIOS

1. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que também são métricas sobre M as funções definidas do seguinte modo:

   a) $\alpha(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

   b) $\beta(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$

   c) $\gamma(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

2. Mostre que não são métricas as seguintes funções:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x, y) = |x_1 - y_1|$ para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

   b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $g(x, y) = (x - y)^2$

3. Se a métrica usual em $\mathbb{R}$ induz num subconjunto não vazio $X \subset R$ a métrica zero-um, prove que X tem 2 elementos no máximo.

4. Consideremos o conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ de 4 elementos e definamos $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ assim: $d(x, y) = d(x, z) = d(y, z) = 2$, $d(x, t) = d(y, t) = d(z, t) = 1$ e $d(r, r) = 0$, para todo $r \in X$. Verifique que d é uma métrica sobre X.

5. Mostre que não é uma métrica sobre $\mathscr{R}([0, 1]; \mathbb{R})$ a relação definida por

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$$

6. Seja $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação com as seguintes propriedades: (a) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (b) para quaisquer $x, y, z \in M$, $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$. Prove que d é uma métrica sobre M.

7. Seja G um grupo comutativo aditivo e suponhamos que exista $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que (a) $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$; (b) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in G$; (c) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in G$. (I) Dê um exemplo de um grupo G e uma função f que satisfaçam as condições acima. (II) Mostre que a aplicação dada por $d(x, y) = f(x - y)$ é uma métrica sobre G.

8. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente; definindo $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, mostre que d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

9. Seja $M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável, tal que $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$. Prove que $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$d(a_i, a_i) = 0, \ \forall i \in \mathbb{N}$$

$d(a_i, a_j) = \dfrac{1}{i+1} + \dfrac{1}{j+1}$, sempre que $i \neq j$, é uma métrica sobre M.

10. Prove que uma métrica sobre um espaço vetorial normado E provém de uma norma se, e somente se, para quaisquer $u, v, a \in E$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$: (a) $d(u + a, v + a) = d(u, v)$; (b) $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha|\, d(u, v)$.

11. Considere no conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ a métrica do Exercício 4. Se $A = \{x, y\}$ e $B = \{z, t\}$ ache: (a) $d(t, A)$; (b) $d(y, B)$; (c) $d(y, A)$; (d) $d(A, B)$; (e) $d(A)$; (f) $d(B)$.

12. Em $\mathbb{R}$ considere a métrica usual. Prove que valem as igualdades: (a) $d(p, \mathbb{Q}) = 0$, $\forall p \in \mathbb{R}$; (b) $d(\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$. Se a métrica considerada sobre $\mathbb{R}$ fosse a zero-um quanto valeriam $d(p, \mathbb{Q})$, com $p \in \mathbb{R}$, e $d(\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$?

13. Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico. Mostre que: $d(A) = 0 \Longleftrightarrow$ A é unitário.

14. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual. Justifique as seguintes desigualdades:

$$0 \leqslant d(a, \mathbb{Z}) \leqslant \frac{1}{2}, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

15. Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica definida por $\gamma(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ (ver Exercício 1). Mostre que em relação a essa métrica o diâmetro de $\mathbb{R}$ é igual a 1.

16. Qual o diâmetro de $\mathbb{R}$ em relação às seguintes métricas (a) usual; (b) $\alpha(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$; (c) $\beta(x, y) = \sqrt{|x - y|}$?

17. Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço métrico M. Mostre que $A \cup B$ também é limitado e que $d(A \cup B) \leqslant d(A, B) + d(A) + d(B)$.

18. Seja M um espaço métrico e considere sobre $M \times M$ uma qualquer das métricas usuais. Se p é um ponto de $M \times M$ tal que $p \notin \Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$, prove que $d(p, \Delta) > 0$.

19. Considere sobre $\mathbb{R}^n$ a métrica euclidiana. Sendo $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ e sendo $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, mostre que $d(p, A) = |a_n|$.

20. Considere sobre $X = \{x, y, z, t\}$ a métrica do Exercício 4. Ache: (a) $B(x, 3)$; (b) $B\left(y, \frac{1}{2}\right)$; (c) $B(x, 1)$; (d) $B\left(t, \frac{3}{2}\right)$.

21. Sobre o conjunto $A = \{0\} \cup [1, 2[$ considere a métrica usual induzida. Ache as seguintes bolas abertas (a) $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$; (b) $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$; (c) $B(0, 3)$; (d) $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$; (e) $B(1, 2)$.

22. Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica definida por $\alpha(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$. Ache as bolas abertas $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $B(0, 3)$. Faça o mesmo considerando a métrica $\beta(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

23. Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica definida por $\gamma(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$. Prove que: (a) se $\varepsilon \geqslant 1$, então $B(p, \varepsilon) = \mathbb{R}$; (b) se $\varepsilon < 1$, então $B(p, \varepsilon) = \left]p - \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, p + \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right[$

24. Considere sobre $\mathbb{R}^2$ as métricas $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $\forall x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma(x, y) = \dfrac{D_1(x, y)}{1 + D_1(x, y)}$. Mostre que $B_{D_1}((3, 1); 3) \neq B_\gamma((3, 1); 3)$.

25. Seja p um ponto de um espaço métrico M. Prove que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B\left(p, \dfrac{1}{n}\right) = \{p\}$.

26. Seja $B = B(p, \delta)$ uma bola aberta num espaço métrico M. Se A é um subconjunto não vazio de M cujo diâmetro é menor que ε e $A \cap B(p, \varepsilon) \neq \emptyset$, mostre que $A \subset B(p, 2\varepsilon)$.

27. Seja $F = B^c$, onde $B = B(p, \varepsilon)$ é uma bola aberta num espaço M. Prove que: se $d(x, F) = 0$, então $x \in F$.

28. Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $p \in M$ e $\varepsilon > 0$ a *bola fechada* de centro p e raio ε é definida por $B[p, \varepsilon] = \{x \in M \mid d(x, p) \leqslant \varepsilon\}$. Sendo $F = (B[p, \varepsilon])^c$, mostre que para todo $x \in F$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset F$.

29. Mostre que a métrica γ sobre $\mathbb{R}$ definida por $\gamma(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ é equivalente à métrica usual.
Sugestão: Levar em conta Exercício 23.

30. Sendo d a métrica usual em $\mathbb{R}$ mostre que não existem constantes $r, s > 0$ de maneira que

$$r\,d(x, y) \leqslant \gamma(x, y) \leqslant s\,d(x, y)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$. Obs.: γ é a métrica do exercício anterior.

31. Seja d uma métrica sobre M. Sendo α a métrica em M definida por $\alpha(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, mostre que: (a) para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B_d(p, \varepsilon) = B_\alpha(p, \varepsilon)$; (b) d e α são equivalentes.

32. Mostre que não são equivalentes a métrica zero-um e a usual em $\mathbb{R}$.

33. Sejam d_1 e d_2 métricas equivalentes sobre um conjunto M. Mostre que $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ define uma métrica sobre M e que esta é equivalente a d_1 e a d_2.

34. Se d_1 e d_2 são métricas equivalentes sobre M mostre que $d(x, y) = \max\{d_1(x, y); d_2(x, y)\}$ define uma métrica sobre M e que esta é equivalente a d_1 e d_2.

35. Mostre que uma progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots)$ em $\mathbb{R}$ converge se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots$

36. Seja $(x_1, x_2, \ldots)$ uma seqüência em M. Se $(x_2, x_4, x_6, \ldots) \longrightarrow p$ e $(x_1, x_3, x_5, \ldots) \longrightarrow p$, mostre que $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \longrightarrow p$.

37. Seja (x_n) uma seqüência em M. Se (x_{2n}), (x_{3n+1}) e (x_{2n+1}) são subseqüências convergentes em M, mostre que (x_n) também converge em M.

38. Seja M um espaço métrico. Se uma seqüência (x_n) de pontos de M converge em M, mostre que a seqüência real $(d(x_1, p); d(x_2, p); \ldots)$ converge para 0.

39. Se $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$ num espaço métrico M, mostre que em $\mathbb{R}$ vale a igualdade.

$$\lim d(x_n, y_n) = d(p, q)$$

40. Mostre que $d'(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$ define uma métrica sobre $]0, +\infty[$ e que esta métrica é equivalente à usual induzida sobre este intervalo.
Sugestão: Por absurdo: se d e d' não fossem equivalentes existiria $p \in]0, +\infty[$ e existiria $\varepsilon > 0$ de maneira que, por exemplo, $B_d\left(p, \dfrac{1}{n}\right) \not\subset B_{d'}(p, \varepsilon)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tirar daí uma seqüência (x_n) que converge para p, segundo d, mas que não converge para esse ponto segundo d'.

41. Um espaço métrico (M, d) cujos pontos são todos isolados chama-se *espaço discreto.* (a) Mostre que $A = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$ é discreto. (b) Mostre que a métrica de um espaço discreto é equivalente à zero-um.

42. Mostre que $u \longmapsto \|u\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $u \longmapsto \|u\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ e $u \longmapsto \|u\|_2 = \max.\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $\forall u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, são normas equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$ e que induzem, pela ordem, as métricas usuais D, D_1 e D_2 deste espaço.

A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

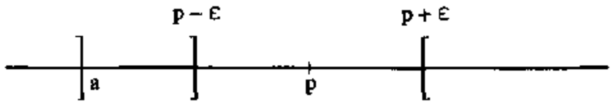
O presente capítulo objetiva, entre outras coisas, por em relêvo uma importante estrutura matemática subjacente aos espaços métricos, estrutura essa que repousa nas propriedades básicas dos chamados "conjuntos abertos" do espaço, cuja definição daremos logo a seguir. A proposição *1* deste capítulo coloca em destaque essas propriedades básicas. De um modo geral uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de um conjunto $E \neq \emptyset$ é uma *topologia* sobre E se: (i) $\emptyset$, $E \in \mathcal{T}$; (ii) $X, Y \in \mathcal{T} \Longrightarrow X \cap Y \in \mathcal{T}$; (iii) se (X_i) é uma família de membros de $\mathcal{T}$, então $\cup X_i \in \mathcal{T}$. O par $(E, \mathcal{T})$ é chamado *espaço topológico*. Uma introdução ao estudo dos espaços topológicos será feita no último capítulo deste trabalho.

Definição 1: Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz *aberto* se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset$
$\subset A$.

Nota: É imediato, a partir da definição, que se $A \neq \emptyset$ é um conjunto aberto, então A é uma união de bolas abertas. E, ademais, se A é uma união de bolas abertas, A é um conjunto aberto. De fato, suponhamos $A = \cup B_i$, onde cada B_i é uma bola aberta. Dado então $p \in A$, existe um índice s tal que $p \in B_s$. Ora, de acordo com a propriedade (P_2) das bolas abertas (Cap. II – § 4), existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset B_s$. Daí $B(p, \delta) \subset A$ e isto prova nossa afirmação.

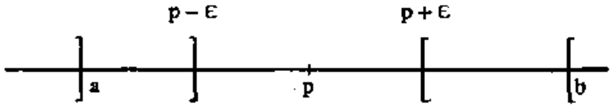
Exemplos:

1. Consideremos sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. Então $A =]a, +\infty[$ é aberto, para todo $a \in \mathbb{R}$, uma vez que dado $p \in A$, tomando $\varepsilon = \frac{p-a}{2}$, então $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset A$.



De maneira análoga se prova que são abertos neste espaço todos os intervalos do tipo $]a, b[$. De fato, se $p \in]a, b[$ tomando $\varepsilon < \min\{p - a, b - p\}$ $(\varepsilon > 0)$, então

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset]a, b[$$



Nesse mesmo espaço os conjuntos $[a, b[$ e $[a, +\infty[$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, não são abertos porque nenhuma bola aberta de centro a está contida nesses conjuntos. Também não são abertos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$: nenhum intervalo é formado só de números racionais ou só de números irracionais.

2. Toda bola aberta $B(p, \varepsilon)$ num espaço M é um conjunto aberto. Isto é garantido pela propriedade (P_2) das bolas abertas a qual nos diz que, para todo $q \in B(p, \varepsilon)$, existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$.

3. Se d é a métrica "zero-um" sobre um conjunto M, então todo $A \subset M$ é aberto. De fato, se $A = \emptyset$ é imediato. Se $A \neq \emptyset$, então $A = \bigcup_{p \in A} \{p\}$ e como cada $\{p\}$ é uma bola aberta (centro p e raio $\varepsilon \leq 1$), então A é aberto.

4. No espaço $\mathbb{R}^n$ o conjunto

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$$

é aberto em relação a qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2 de $\mathbb{R}^n$. Faremos a demonstração usando a métrica $d = D_2$ (do máximo): a conclusão para as outras métricas é uma decorrência da proposição 2 deste capítulo. Seja $p = (p_1, \ldots, p_n)$ um ponto de A e tomemos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ de maneira que

$$0 < \varepsilon < \min\{p_i\}.$$

Mostremos que $B(p, \varepsilon) \subset A$. Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(p, \varepsilon)$, então $d(x, p) = \max\{|x_1 - p_1|, \ldots, |x_n - p_n|\} < \varepsilon$ e daí $|x_i - p_i| < \varepsilon$, ou seja, $p_i - \varepsilon < x_i < p_i + \varepsilon$ $(1 \leq i \leq n)$. Mas como cada $p_i - \varepsilon > 0$, então cada $x_i > 0$ e portanto $x \in A$.

5. Seja M um espaço métrico e seja N um subespaço de M. Um subconjunto $A \subset N$ é aberto (em relação a N) se, e somente se, $A = G \cap N$, onde G é um subconjunto aberto de M. De fato: $(\Longleftarrow)$ dado $p \in G \cap N$, então $p \in G$ e daí existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset G$; donde $B(p, \varepsilon) \cap N \subset G \cap N$; mas $B(p, \varepsilon) \cap N$ é uma bola aberta em N e portanto $G \cap N$ é um subconjunto aberto do subespaço

N. $(\Longrightarrow)$ Se A é aberto (em N), então $A = \bigcup (B_i \cap N)$, onde cada B_i é uma bola aberta em M; daí $A = (\bigcup B_i) \cap N = G \cap N$, sendo $G = \bigcup B_i$ um subconjunto aberto do espaço M.

Proposição 1: Seja $\mathscr{A}$ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M, d). Então:

(i) $\emptyset, M \in \mathscr{A}$

(ii) $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$

(iii) Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \in \mathscr{A}$, então $\bigcup A_i \in \mathscr{A}$.

Demonstração:

(i) É claro que $\emptyset$ é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não poder contrariar a definição dada. Quanto a M, toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M, por definição.

(ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p, \varepsilon) \subset A$ e $B(p, \lambda) \subset B$. Supondo $\varepsilon \leq \lambda$ a propriedade (P_1) das bolas abertas nos garante que

$$B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda)$$

Donde $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$.

(iii) Seja $p \in \bigcup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \subset A_t$. Então $B(p, \varepsilon) \subset \bigcup A_i$. ■

Notas:

1. Levando em conta a introdução deste capítulo podemos dizer que $\mathscr{A}$ é uma topologia sobre M e que $(M, \mathscr{A})$ é um espaço topológico.

2. É claro que, por indução, pode-se provar que dados $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ $(n \geq 1)$, então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$.

3. A interseção de uma família infinita de conjuntos abertos pode, porém, não ser um conjunto aberto. De fato, na família (A_i), onde $A_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$, $i = 1, 2, \ldots$, cada A_i é aberto em $\mathbb{R}$ (métrica usual); no entanto

$$\bigcap A_i = \{0\}$$

não é aberto porque, obviamente, não existe nenhum intervalo em $\mathbb{R}$ formado apenas pelo ponto 0.

De uma maneira geral, num espaço métrico (M, d) qualquer, dado $p \in M$, se fizermos $B_n = B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, então $\bigcap B_n = \{p\}$. Assim, toda vez que p não é um ponto isolado do espaço, a família (B_n) acima definida é mais um exemplo de que nem sempre uma interseção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Proposição 2: Sejam d e d' métricas equivalentes sobre M. Se $\mathscr{A}$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d) e $\mathscr{A}'$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d'), então $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.

Demonstração: Seja $A \in \mathscr{A}$ e tomemos $p \in A$. Como $A \in \mathscr{A}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(p, \varepsilon) \subset A$. Da equivalência $d \sim d'$ decorre que existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$. Daí $B_{d'}(p, \lambda) \subset A$ o que mostra que $A \in \mathscr{A}'$. Assim provamos que $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. Como obviamente, de maneira análoga se mostra que $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$, então a demonstração está concluída. ■

Nota: A proposição acima significa que métricas equivalentes determinam a mesma estrutura topológica.

Exemplo: Sejam M e N espaços métricos e sobre $M \times N$ consideremos a métrica D_2. Assim

$$D_2(p, q) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

para quaisquer $p = (x_1, x_2)$ e $q = (y_1, y_2)$ de $M \times N$. Mostremos que se $G \subset M$ e $H \subset N$ são subconjuntos abertos, então $G \times H$ é aberto em $M \times N$. Se $p = (a, b) \in G \times H$, então $a \in G$ e $b \in H$ e, portanto, existem $\varepsilon, \lambda > 0$ de maneira que $B(a, \varepsilon) \subset G$ e $B(b, \lambda) \subset H$. Tomando $\delta = \min\{\varepsilon, \lambda\}$, então $B(a, \delta) \subset G$ e $B(b, \delta) \subset H$ e daí

$$B(a, \delta) \times B(b, \delta) \subset G \times H$$

Mas $B_{D_2}(p, \delta) = B(a, \delta) \times B(b, \delta)$ (ver Cap. II – § 4) e portanto

$$B_{D_2}(p, \delta) \subset G \times H$$

o que mostra que $G \times H$ é aberto segundo a métrica D_2. Conseqüentemente também o será segundo as métricas D e D_1.

É óbvia a generalização do que acabamos de ver para o caso de n espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, com $n \geqslant 2$.

Definição 2: Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado *ponto interior* ao conjunto A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado *interior* de A e é indicado por $\mathring{A}$. É claro que $\mathring{A} \subset A$.

Nota: Observemos que, se todos os pontos de A são interiores, isto é, se $A = \mathring{A}$, então A é aberto. De fato, dado $p \in A$ (logo $p \in \mathring{A}$), existe $\varepsilon > 0$ de modo que $B(p, \varepsilon) \subset A$. Como obviamente vale a recíproca deste fato, temos então que: A é aberto se, e somente se, $A = \mathring{A}$.

Exemplos:

1. Na reta real consideremos $A = [a, b[$ e $B = [a, +\infty[$. Em ambos os casos só o ponto a não é interior: um intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= B(a, \varepsilon)$ certamente não está contido nem em A e nem em B. Daí $\mathring{A} =]a, b[$ e $\mathring{B} =]a, +\infty[$. Ainda em $\mathbb{R}$ temos $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ e também $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$. De fato, um intervalo $I =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ sempre contém números irracionais e portanto $I \not\subset \mathbb{Q}$ e $I \not\subset \mathbb{Z}$.

2. Seja d a métrica "zero-um" sobre um conjunto M. Como todos os subconjuntos de M são abertos neste caso (ver Exemplo 3 à definição 1), então $\mathring{A} = A$, para todo $A \subset M$.

Definição 3: Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz *fechado* se, e somente se, F^c é aberto.

Nota: Devemos observar inicialmente que fechado não significa não aberto. Assim, dependendo do espaço M, podemos ter subconjuntos que não são nem abertos e nem fechados, como podemos ter subconjuntos que são ambas as coisas. Por exemplo, na reta real o conjunto $\mathbb{Q}$ não é aberto, como já vimos, e também não é fechado: de fato, como existem números racionais em qualquer intervalo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$, então, tomando $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o que mostra que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é aberto e que, portanto, $\mathbb{Q}$ não é fechado.

Exemplos:

1. Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo $[a, b]$, $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$.

De fato: $[a, b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ e cada um destes intervalos é aberto

$$[a, +\infty[^c =]-\infty, a[\text{ é aberto}$$
$$]-\infty, a]^c =]a, +\infty[\text{ é aberto}$$

2. Num espaço métrico (M, d), qualquer subconjunto finito $F = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset M$ é fechado. Seja $p \in F^c$ e tomemos $\varepsilon > 0$ de maneira que $\varepsilon < \min\{d(p, a_i) \mid a_i \in F\}$ e mostremos que $B(p, \varepsilon) \subset F^c$ ou, o que é equivalente, que $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Mas isto é simples: se algum a_i pertencesse à bola $B(p, \varepsilon)$, então $d(a_i, p) < \varepsilon$, o que é impossível, dada a escolha que fizemos de ε.

3. Considerando sobre um conjunto $M \neq \emptyset$ a métrica "zero-um", então todo $F \subset M$ é fechado. Isto é óbvio pois F^c é aberto pelo fato de todos os subconjuntos de M serem abertos neste caso (ver Exemplo 3 à definição 1).

4. Sejam M e N espaços métricos quaisquer. Dados então $F \subset M$ e $L \subset N$, se F e L são subconjuntos fechados, então $F \times L$ é fechado em $M \times N$ relativamente a qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2 sobre este espaço produto.

Inicialmente observemos que D, D_1 e D_2 determinam sobre $M \times N$ a mesma coleção de conjuntos fechados uma vez que a equivalência $D \sim D_1 \sim D_2$ implica que essas métricas determinam a mesma coleção de abertos sobre $M \times N$.

Como $(F \times L)^c = (F^c \times N) \cup (M \times L^c)$ e tanto $F^c \times N$ como $M \times L^c$ são abertos em $M \times N$ (para qualquer dessas métricas, obviamente), então $(F \times L)^c$ é aberto e portanto $F \times L$ é fechado.

5. Seja M um espaço métrico. Se $F \subset M$ é fechado e se $S \subset F$ é fechado em F, então S é fechado em M.

De fato, como S é fechado em F, então existe um subconjunto aberto G (em M) tal que $\complement_F S = G \cap F$. Como porém $S^c = \complement_F S \cup F^c$, então $S^c =$

$= (G \cap F) \cup F^c = G \cup F^c$ o que mostra que S^c é aberto em M e portanto S é fechado em M.

Proposição 3: Seja $\mathscr{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:

(i) $\emptyset, M \in \mathscr{F}$

(ii) $H, F \in \mathscr{F} \Longrightarrow H \cup F \in \mathscr{F}$

(iii) Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \in \mathscr{F}$.

Demonstração: Estas propriedades são iguais daquelas para abertos que constam da proposição 1.

(i) $\emptyset$ e M pertencem a $\mathscr{F}$ porque $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$ pertencem a $\mathscr{A}$ (coleção dos abertos de M).

(ii) Exercício.

(iii) Como cada F_i é fechado, então cada F_i^c é aberto e, portanto, $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. Conseqüentemente $\cap F_i$ é fechado. ■

Nota: Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ $(n \geqslant 1)$ são conjuntos fechados do espaço M, então $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ também é fechado em M. Mas uma união infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. De fato, em $\mathbb{R}$ cada subconjunto unitário é fechado, mas $I =]a, b[= \bigcup_{p \in I} \{p\}$ não é fechado.

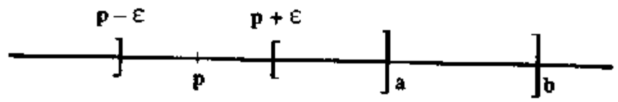
Definição 4: Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz *ponto aderente* ao conjunto A se, para todo $\varepsilon > 0$, vale a relação

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se *fêcho* de A e é indicado por $\overline{A}$. É imediato que $A \subset \overline{A}$.

Exemplos:

1. Na reta real, se $A =]a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b[$, então $\overline{A} = [a, b]$. De fato, os pontos a e b são aderentes a esses intervalos porque qualquer bola (ou seja, intervalo aberto) de centro num deles, certamente intercepta o conjunto A. Por outro lado, se $p < a$ ou $p > b$, então $p \notin \overline{A}$ porque, no primeiro caso, por exemplo, tomando $\varepsilon = \frac{a - p}{2}$, a bola $B(p, \varepsilon) =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ não intercepta A.



2. Ainda na reta real, temos a seguinte igualdade: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Isto é fácil de explicar: dado $p \in \mathbb{R}$, todo intervalo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ contém números racionais; daí

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

e portanto $p \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Proposição 4: Seja (M, d) um espaço métrico. Então, para todo $A \subset M$, vale a relação $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$ (isto é, o complementar do fecho de A é igual ao interior do complementar de A).

Demonstração: $p \in (\overline{A})^c \Longleftrightarrow p \notin \overline{A} \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon, \varepsilon > 0$: $B(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(p, \varepsilon) \subset A^c \Longleftrightarrow p \in \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$. ■

Corolário: $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.

Demonstração: Lembremos que $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $\mathring{A} = A$. Assim:

F é fechado $\Longleftrightarrow F^c$ é aberto $\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{F^c}} = F^c \Longleftrightarrow (\overline{F})^c = F^c \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \overline{F} = F$. ■

Proposição 5: Seja (M, d) um espaço métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, como

$$d(p, A) = \inf \{d(p, x) | x \in A\} = 0$$

existe então $a \in A$ de maneira que $0 \leqslant d(p, a) < \varepsilon$ (caso contrário teríamos $0 < \varepsilon \leqslant d(p, x)$, $\forall x \in A$, o que não é possível em face da hipótese de que $d(p, A) = 0$). Daí $a \in B(p, \varepsilon)$ e portanto $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ o que significa que $p \in \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos $d(p, A) = \varepsilon > 0$. Como por hipótese $B(p, \varepsilon) \cap \cap A \neq \emptyset$, então existe $a \in A$ tal que

$$d(a, p) < \varepsilon$$

Como porém

$$\varepsilon = d(p, A) \leqslant d(p, a) < \varepsilon$$

temos aí o absurdo que encerra a demonstração. ■

Proposição 6: Para todo subconjunto não vazio A de um espaço métrico M vale a igualdade $d(A) = d(\overline{A})$.

Demonstração: Como $A \subset \overline{A}$, então $d(A) \leqslant d(\overline{A})$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, para quaisquer $x, y \in \overline{A}$, existem $a, b \in A$ de modo que $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(y, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí

$$d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \varepsilon + d(A)$$

e portanto

$$d(\overline{A}) \leqslant \varepsilon + d(A)$$

ou seja

$$0 \leqslant d(\bar{A}) - d(A) \leqslant \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ dado a priori. Donde $d(\bar{A}) - d(A) = 0$ ou $d(A) = d(\bar{A})$ como queríamos provar. ■

Proposição 7: Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\bar{A}$, então existe uma seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de A tal que $\lim x_n = p$.

Demonstração: Como $p \in \bar{A}$, então cada uma das bolas abertas $B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, contém pontos de A. A seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$, onde $x_n \in A \cap B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \geqslant 1$, converge para p. De fato, toda bola $B(p, \varepsilon)$ contém $B\left(p, \frac{1}{r}\right)$ desde que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ e portanto, nestas condições, contém $x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots$. Como (x_n) é uma seqüência de pontos de A, então a proposição está provada. ■

Definição 5: Dado um espaço métrico (M, d), um subconjunto $A \subset M$ se diz *denso* em M se $\bar{A} = M$.

Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

A definição acima significa, em outros termos, que, para todo $p \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ de maneira que $d(a, p) < \varepsilon$. Intuitivamente, para cada ponto $p \in M$ existe, arbitrariamente "próximo" de p, um ponto $a \in A$.

Proposição 8: Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo aberto $G \neq \emptyset$ desse espaço.

Demonstração: É praticamente imediata. Dado $p \in G$, existe $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(p, \varepsilon) \subset G$. Como $\bar{A} = M$, então existe $a \in A$ tal que $d(p, a) < \varepsilon$, ou seja, vale a relação $a \in B(p, \varepsilon)$. Daí $a \in G$ e portanto $G \cap A \neq \emptyset$. ■

Definição 6: Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto $p \in M$ é *ponto de acumulação* de A se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, a interseção

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A$$

é um conjunto infinito. Quer dizer, toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A, distintos do ponto p.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado *conjunto derivado* de A e se indica por A'. É imediata a verificação de que: $A \subset B \subset M \Longrightarrow A' \subset B'$.

Exemplos:

1. No espaço $\mathbb{R}$ usual o único ponto de acumulação de $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ é o ponto 0. De fato, uma bola $B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[$ contém todos os elementos $\frac{1}{r} \in A$ tais que $\frac{1}{r} < \varepsilon \left(\Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < r\right)$. Por outro lado é óbvio que, para qualquer

outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ cuja interseção com A não é infinita (mais precisamente: vazia). Assim $A' = \{0\}$.

2. Se d é a métrica "zero-um" sobre M, então, para todo $A \subset M$, vale a igualdade $A' = \emptyset$. De fato, para qualquer $p \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) = \{p\}$ (é só tomar $0 < \varepsilon \leqslant 1$). Daí $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$ e $p \notin A'$.

3. Para qualquer espaço (M, d), se $A \subset M$ é finito, então $A' = \emptyset$. Fica como exercício a verificação desse fato.

Notas:

1. Para todo espaço M, se $A \subset M$ e $p \notin A'$ $(p \in M)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset$.

De fato, como $p \notin A'$, existe $\lambda > 0$ tal que, digamos, $(B(p, \lambda) - \{p\}) \cap A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (finito). Tomando

$$\varepsilon < \lambda, d(p, x_1), \ldots, d(p, x_n)$$

vamos ter então

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset.$$

2. Seja (x_n) uma seqüência tal que $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é infinito e possui um ponto de acumulação em M. Então existe uma subseqüência (x_{n_i}) de (x_n) que converge para este ponto.

De fato, se $p \in A'$, então cada interseção

$$C_n = \left(B\left(p, \frac{1}{n}\right) - \{p\}\right) \cap A \neq \emptyset \ (n = 1, 2, \ldots)$$

é infinita. Assim tomemos um, e um só, elemento

$$x_{n_i} \in C_i$$

de maneira que $n_j > n_i$ sempre que $i < j$. Mostremos que a subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ assim construída converge para p. Dado $\varepsilon > 0$ existe um número $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ e portanto

$$B(p, \varepsilon) \supset B\left(p, \frac{1}{r}\right) \supset B\left(p, \frac{1}{r+1}\right) \supset \ldots$$

Como por construção $x_{n_i} \in B\left(p, \frac{1}{i}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, então

$$x_{n_i} \in B(p, \varepsilon), \ \forall i \geqslant r$$

e portanto $\lim x_{n_i} = p$.

Proposição 9: Seja M um espaço métrico. Então $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Suponhamos que exista $p \in F'$ tal que $p \notin F$. Então

$p \in F^c$, que é aberto, e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset F^c$, isto é, $B(p, \varepsilon) \cap \cap F = \emptyset$. Mas como $p \in F'$ então $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito do que decorre que $B(p, \varepsilon) \cap F$ também é infinito e portanto não vazio. Este absurdo vem garantir a validade desta implicação.

($\Longleftarrow$) Seja $p \in F^c$. Como $F' \subset F$, então $F^c \subset (F')^c$ e daí $p \in (F')^c$. Donde existe $\varepsilon > 0$ de maneira que

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset$$

conforme nota anterior. Mas $p \notin F$ e daí vamos ter também a igualdade $B(p, \varepsilon) \cap \cap F = \emptyset$ que equivale a $B(p, \varepsilon) \subset F^c$ o que nos garante que todos os pontos de F^c são interiores, ou seja, que F^c é aberto. Donde F é fechado. ∎

EXERCÍCIOS

1. Mostre que o conjunto $G = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ é um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$.

2. Considere sobre $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. Mostre que a bola fechada $B[0, 1]$ (ver Exercício 28 – Cap. II) é um subconjunto aberto do espaço M.

3. Mostre que o conjunto $A = [0, 1]$ é aberto e fechado simultaneamente quando considerado como parte do espaço $M = [0, 1] \cup \{2\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. E como subconjunto de $N = [0, 2]$?

4. Mostre que todo aberto do $\mathbb{R}^2$ contém um ponto $p = (x_1, x_2)$ tal que $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Generalize para o $\mathbb{R}^n$.

5. Considere sobre $M = \mathscr{B}(X; R)$ a métrica dada por $d(f, g) = \sup\{|f(x) - - g(x)| : x \in X\}$. Mostre que não é aberto o seguinte subconjunto de M: $G_a = = \{f \in M \mid f(a) > 0\}$, onde a é um ponto fixo de X.

6. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *subespaço vetorial* de E é um subconjunto $S \subset E$ tal que: (i) $0 \in S$; (ii) $u, v \in S \Longrightarrow u + v \in S$; (iii) $u \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha u \in S$. Se S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ tal que $S \neq \neq \mathbb{R}^n$, mostre que S não é aberto.
Sugestão: Mostre que qualquer bola aberta de centro no ponto $0 \in S$ contém n vetores não nulos do tipo
$$(a_1, 0, \ldots, 0), (0, a_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, a_n)$$
e portanto não pode estar contida em S visto que $S \neq \mathbb{R}^n$.

7. Para cada um dos seguintes subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ ache $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$ e $\overline{\overset{\circ}{A}}$:
a) $A = \mathbb{Z}$
b) $A = \mathbb{Q} \cap]0, 1]$
c) $A = \{-1\} \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$
d) $A =]0, 1] \cup \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

8. Seja M um espaço métrico e considere subconjuntos $A, B \subset M$. Mostre que
a) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
b) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$
Dê um exemplo em que se tenha $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

9. Mostre que são fechados:
a) $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$;
b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ no espaço $\mathbb{R}^2$;
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0\}$, no $\mathbb{R}^2$.
Generalize este último resultado.
d) Uma bola fechada num espaço métrico qualquer (ver Exercício 28 – Cap. II).

10. Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico M. Mostre que:
a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo em que se tenha $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

11. Dado um espaço métrico M, se $A \subset M$ define-se a *fronteira* de A (indicada por $Fr(A)$), através da seguinte fórmula: $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c$.
a) Em $\mathbb{R}$ ache a fronteira de $A = [a, b[$, $B = \{a, b\}$, $C = [a, +\infty[$ e $C = \mathbb{Z}$.
b) Em $\mathbb{R}^2$ ache a fronteira de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$.

12. Mostre que, para qualquer espaço M e qualquer subconjunto $A \subset M$, vale $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$.

13. Para qualquer subconjunto A de um espaço M prove que
a) $Fr(A) \subset A \Longleftrightarrow A$ é fechado;
b) $Fr(A) \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow A$ é aberto;
c) $Fr(A) = \emptyset \Longleftrightarrow A$ é aberto e fechado.

14. Achar o conjunto derivado de
a) $\mathbb{Z}$ no espaço $\mathbb{R}$;
b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ em $\mathbb{R}$;
c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^2$;
d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^2$.

15. Para quaisquer subconjuntos de um espaço M mostre que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

16. Se A é um subconjunto finito de um espaço M, mostre que $A' = \emptyset$.

17. Mostre que vale a igualdade $\overline{A} = A \cup A'$, para qualquer subconjunto $A \subset M$.

18. Seja F um subconjunto fechado de um espaço M. Se $p \notin F$, mostre que $d(p, F) > 0$.

19. Seja F um subconjunto fechado de um espaço métrico M. Se $p \notin F$, mostre que existem abertos disjuntos G e H de maneira que $p \in G$ e $F \subset H$.

20. Mostre que num espaço vetorial normado E a aderência de uma bola aberta $B(p, \varepsilon)$ é a bola fechada $B[p, \varepsilon]$.
Sugestão: Sendo $S(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid \|x - p\| = \varepsilon\}$ basta provar que $S(p, \varepsilon) \subset \overline{B(p, \varepsilon)}$. Qualquer $u \in S(p, \varepsilon)$ é limite da seqüência (x_n) dada por $x_n = p + \frac{n}{n+1}(u - p)$ cujos termos pertencem todos à bola $B(p, \varepsilon)$.

21. Sejam M e N espaços métricos. Considerando sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2, mostre que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ e $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$, para quaisquer $A \subset M$ e $B \subset N$.

CAPÍTULO IV

CONTINUIDADE

§ 1 — FUNÇÕES CONTÍNUAS

1. Conceito e Exemplos

Lembramos que uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Intuitivamente: estão "arbitrariamente" próximos de $f(p)$ os valores de f correspondentes a pontos "suficientemente" próximos de p.

A definição a seguir é motivada pelo que acabamos de lembrar

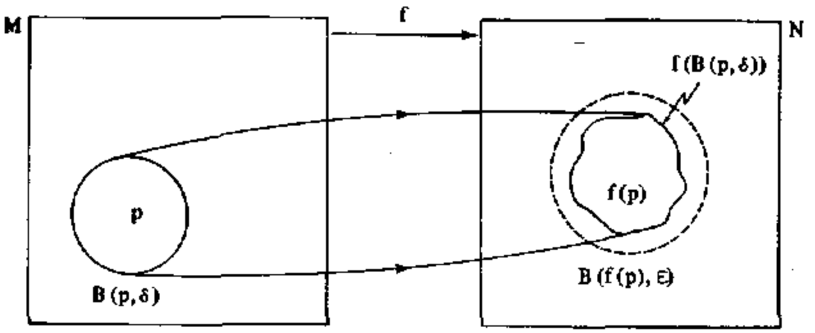
Definição 1: Sejam M e N espaços métricos (cujas métricas, por comodidade, indicaremos pelo mesmo símbolo d). Uma função $f: M \longrightarrow N$ se diz *contínua* no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Dizer que f é *contínua* significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 1: Uma função $f: M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \varepsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$$



Demonstração: ($\Longrightarrow$) Dada a bola $B(f(p), \varepsilon)$, considerando o seu raio ε, existe, por hipótese, $\delta > 0$ tal que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Considerando a bola $B(p, \delta)$ mostremos que sua imagem direta por f está contida em $B(f(p), \varepsilon)$. De fato, se $y \in f(B(p, \delta))$, então $y = f(x)$, com $x \in B(p, \delta)$. Daí $d(x, p) < \delta$ o que implica $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Assim $y = f(x) \in B(f(p), \varepsilon)$.

($\Longleftarrow$) Fica como exercício. ■

Proposição 2: Seja $f:(M, d) \longrightarrow (N, d')$ uma função contínua. Se d_1 e d'_1 são métricas sobre M e N respectivamente, tais que $d \sim d_1$ e $d' \sim d'_1$, então também é contínua a função $f:(M, d_1) \longrightarrow (N, d'_1)$.

Demonstração:

(i) Mostraremos primeiro que é contínua $f:(M, d) \longrightarrow (N, d'_1)$. Dado $p \in M$, consideremos uma bola $B = B_{d'_1}(f(p), \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Como $d' \sim d'_1$, existe uma bola $B_1 = B_{d'}(f(p), \lambda) \subset B$. Por hipótese então podemos achar $\delta > 0$ tal que, sendo $B_2 = B_d(p, \delta)$, vale a inclusão $f(B_2) \subset B_1$. Donde $f(B_2) \subset B$ o que prova nossa afirmação.

(ii) Deixamos como exercício a demonstração de que $f:(M, d_1) \longrightarrow (N, d')$ é contínua.

De (i) e (ii) decorre a tese. ■

Nota: Não se deve perder de vista que obviamente podemos ter, em particular, $d = d_1$ ou $d' = d'_1$.

Exemplos:

(i) Uma *imersão isométrica* é qualquer aplicação $f:M \longrightarrow N$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$.

Toda imersão isométrica é contínua porque, para qualquer $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ temos:

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \varepsilon$$

qualquer que seja $p \in M$.

Observemos que uma imersão isométrica é injetora pois

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Em particular são contínuas as *isometrias* que são as imersões isométricas sobrejetoras.

Vejamos algumas imersões isométricas (logo funções contínuas) importantes:

• As *inclusões* $j:X \longrightarrow M$, definidas por $j(x) = x$, $\forall x \in X$, sendo X um subespaço de M, pois para quaisquer $x, y \in X$

$$d(j(x), j(y)) = d(x, y)$$

Em particular a aplicação idêntica $id_M:M \longrightarrow M$ é contínua por ser uma imersão isométrica (na verdade uma isometria).

• Num produto cartesiano $M \times N$ de dois espaços métricos consideremos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2). Para cada $a \in M$ é uma imersão isométrica a aplicação $j_a:N \longrightarrow M \times N$ dada por $j_a(y) = (a, y)$. De fato, para quaisquer $y_1, y_2 \in N$: $D(j_a(y_1); j_a(y_2)) = D((a, y_1); (a, y_2)) = \sqrt{d(a, a)^2 + d(y_1, y_2)^2} = d(y_1, y_2)$.

Analogamente, para cada $b \in N$, $j_b:M \longrightarrow M \times N$ definida por $j_b(x) = (x, b)$ é também uma imersão isométrica.

• As *translações* num espaço vetorial normado E, definidas para cada $a \in E$ do seguinte modo: $T_a(x) = x + a$, $\forall x \in E$. De fato, para quaisquer $x, y \in E$:

$$d(T_a(x), T_a(y)) = \| T_a(x) - T_a(y) \| = \| x + a - (y + a) \| = \| x - y \| = d(x, y)$$

Observemos que uma translação é sempre sobrejetora pois, dado $z \in E$, considerando $x = z - a$ temos

$$T_a(x) = x + a = z - a + a = z$$

Logo as translações são isometrias.

(ii) As *contrações fracas* são aplicações $f:M \longrightarrow N$ tais que

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. Toda contração fraca é uma aplicação contínua pois, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, então

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leqslant d(x, p) < \delta = \varepsilon \text{ para todo } p \in M.$$

Daremos exemplos a seguir de algumas contrações fracas importantes:

• Se $M_1, \ldots, M_n$ são espaços métricos, considerando sobre $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), as *projeções* $p_i:M \longrightarrow M_i$ são contrações fracas pois, para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em M temos:

$$d(p_i(x), p_i(y)) = d(x_i, y_i) \leqslant \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \ldots + d(x_n, y_n)^2} = D(x, y).$$

• Se E é um espaço vetorial normado a adição $s: E \times E \longrightarrow E$ definida por $s(x, y) = x + y$ é uma contração fraca, posto que

$$\begin{aligned} d(s(x_1, y_1), s(x_2, y_2)) &= d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\| = \\ &= \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| = \\ &= d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = D_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

• Toda métrica $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ pois para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \in M \times M$:

$$\begin{aligned} |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| &= |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_1) + d(x_2, y_1) - d(x_2, y_2)| \leqslant \\ &\leqslant |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_1)| + |d(x_2, y_1) - d(x_2, y_2)| \leqslant \\ &\leqslant d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = D_1((x_1, y_1); (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

• Se E é um espaço vetorial normado, toda norma $x \longrightarrow \|x\|$ é uma contração fraca pois, para quaisquer $x, y \in E$:

$$|\|x\| - \|y\|| = |d(x, 0) - d(y, 0)| \leqslant d(x, y).$$

• As aplicações constantes $f: M \longrightarrow N$, $f(x) = k$, para todo $x \in M$, pois $d(f(x), f(y)) = d(k, k) = 0 \leqslant d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$.

(iii) As *aplicações lipschitzianas* são aplicações $f: M \longrightarrow N$ para as quais existe uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que

$$d(f(x), f(y)) \leqslant c\,d(x, y), \ \forall\, x, y \in M.$$

Toda aplicação lipschitziana é contínua pois, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, então $d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leqslant c\,d(x, p) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ para qualquer $p \in M$.

Vejamos um exemplo importante:

• Dado um espaço vetorial normado E, cada escalar $\alpha \neq 0$ determina uma *homotetia* $h_\alpha: E \longrightarrow E$ definida por $h_\alpha(x) = \alpha x$, $\forall\, x \in E$. Tomemos $c > 0$ de maneira que $c \geqslant |\alpha|$. Temos então, para quaisquer $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} d(h_\alpha(x), h_\alpha(y)) &= d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \\ &= |\alpha|\,\|x - y\| \leqslant c\,\|x - y\| = c\,d(x, y) \end{aligned}$$

e portanto h é lipschitziana (logo contínua).

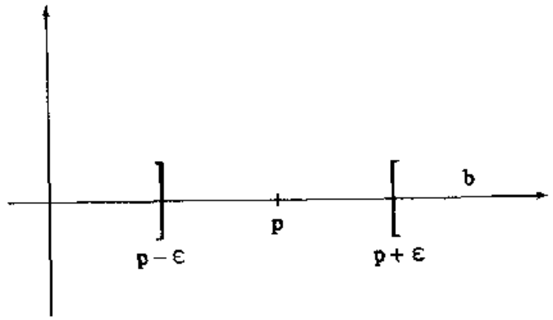
Uma aplicação $f: M \longrightarrow N$ se diz *localmente lipschitziana* se, para cada ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p, \lambda)$ de maneira que a restrição de f a essa bola é lipschitziana. Mostremos que uma aplicação localmente lipschitziana é contínua. De fato, se $p \in M$, existe uma bola $B = B(p, \lambda)$ e existe uma constante $c > 0$ de modo que $d(f(x), f(y)) \leqslant c\,d(x, y)$, $\forall\, x, y \in B$. Assim, dada uma bola $B(f(p), \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomemos $\delta > 0$ de maneira que $\delta < \lambda$ e

$\delta < \frac{\varepsilon}{c}$. Isto posto teremos: $d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(x, p) < \lambda \Longrightarrow x \in \in B(p, \lambda) \Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leqslant c\,d(x, p) \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < c\delta \Longrightarrow \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

Veremos a seguir alguns exemplos importantes de aplicações localmente lipschitzianas:

• $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \geqslant 1$ é um número natural dado.

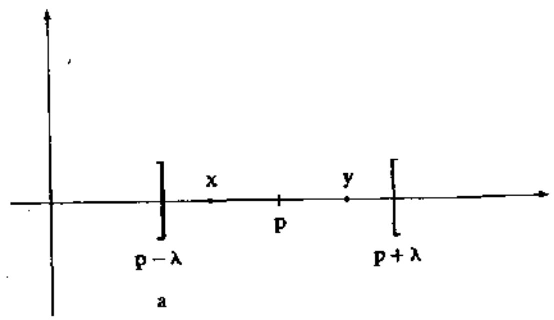
Dada uma bola $B = B(p, \lambda)$, seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < b$, para qualquer $x \in B$. Devido ao teorema de valor médio, se $x, y \in B$, $x \neq y$, existe $t \in \mathbb{R}$, situado entre x e y, de maneira que $f(x) - f(y) = f'(t)(x - y) = n t^{n-1}(x - y)$. Daí



$$|f(x) - f(y)| = n|t|^{n-1}|x - y| \leqslant n b^{n-1}|x - y|, \ \forall\, x, y \in B.$$

• $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Tomemos inicialmente $p > 0$ e consideremos uma bola $B = B(p, \lambda) \subset \subset \mathbb{R}^*_+$. Supondo $p - \lambda = a > 0$ teremos:



$$\forall x, y \in B, |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - x|}{|x||y|} < \frac{1}{a^2}\ |y - x|$$

o que mostra que f, restrita a B, é lipschitziana.*

• A *multiplicação por escalares* $m: \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ num espaço vetorial normado E é localmente lipschitziana. Provaremos esta afirmação usando sobre $\mathbb{R} \times E$ a métrica D_1 da soma.

Dado uma bola $B = B(p, \lambda)$, onde p é um ponto arbitrário de $\mathbb{R} \times E$, existe uma bola de centro na origem $0 = (0, 0)$ e raio conveniente δ, de maneira que $B \subset B(0, \delta)$. (De fato, basta tomar $\delta = d(0, p) + \lambda$.)

Assim, dados dois pontos arbitrários (α, u) e (β, v) da bola B, como estes pontos estão na bola $B(0, \delta)$, valem as relações:

$$|\alpha| + \|u\| < \delta \qquad \text{e} \qquad |\beta| + \|v\| < \delta$$

e daí

$$\|u\| < \delta \qquad \text{e} \qquad |\beta| < \delta$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(m(\alpha, u); m(\beta, v)) &= d(\alpha u, \beta v) = \|\alpha u - \beta v\| = \|\alpha u - \beta u + \beta u - \beta v\| = \\ &= \|(\alpha - \beta)u + \beta(u - v)\| \leqslant \\ &\leqslant |\alpha - \beta|\|u\| + |\beta|\|u - v\| < \delta|\alpha - \beta| + \delta\|u - v\| = \\ &= \delta(|\alpha - \beta| + \|u - v\|) = \delta D_1((\alpha, u); (\beta, v)) \end{aligned}$$

o que mostra que m é lipschitziana em cada bola aberta de $\mathbb{R} \times E$.

Proposição 3: Uma função $f: M \longrightarrow N$ é contínua num ponto $p \in M$ se, e somente se, o fato de uma seqüência (x_n) de pontos de M convergir para p acarretar que $(f(x_n))$ converge para $f(p)$. Ou seja: se, e somente se, $x_n \longrightarrow p$ acarreta $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja $B = B(f(p), \varepsilon)$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Da continuidade de f vem que existe $\delta > 0$ de tal maneira que:

$$f(B(p, \delta)) \subset B$$

Mas como $x_n \longrightarrow p$, existe um índice r tal que, para todo índice $n \geqslant r$, se tem $x_n \in B(p, \delta)$. Daí segue que $f(x_n) \in f(B(p, \delta))$ e portanto que $f(x_n) \in B$ para qualquer índice $n \geqslant r$ o que prova então que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.

($\Longleftarrow$) Se f não fosse contínua em p, existiria $\varepsilon > 0$ tal que:

$$f(B(p, \delta)) \not\subset B(f(p), \varepsilon), \ \forall \delta > 0$$

Assim, em particular

$$f(B(p, 1)) \not\subset B(f(p), \varepsilon)$$

* Para $p < 0$ a demonstração é análoga.

$$f\left(B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) \not\subset B(f(p), \varepsilon)$$

$$f\left(B\left(p, \frac{1}{3}\right)\right) \not\subset B(f(p), \varepsilon), \ldots$$

e portanto, para cada $n \geqslant 1$ existe $x_n \in M$ tal que $x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ e $f(x_n) \notin$ $\notin B(f(p), \varepsilon)$. Donde a seqüência $(x_1, x_2, \ldots) \longrightarrow p$ ao passo que $(f(x_1), f(x_2), \ldots) \not\longrightarrow f(p)$, o que contradiz a hipótese. ■

Nota: A proposição acima é particularmente interessante, em muitos casos, para justificar a não continuidade de uma função num dado ponto. Por exemplo a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é contínua num ponto qualquer $p \in \mathbb{Q}$. De fato, a seqüência $\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}, p + \frac{\sqrt{2}}{3}, p + \frac{\sqrt{2}}{4}, \ldots\right)$ é uma seqüência de números irracionais que converge para p. No entanto a seqüência de imagens $\left(f\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\left(p + \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \ldots\right) = (0, 0, \ldots) \longrightarrow 0$ e não para $f(p) = 1$. Por um raciocínio parecido pode-se mostrar que f não é contínua em nenhum ponto $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Proposição 4: Dada a função $f: M \longrightarrow N$ as seguintes afirmações são equivalentes:

a) f é contínua

b) Para todo $q \in N$ e todo $\lambda > 0$, $f^{-1}(B(q, \lambda))$ é um subconjunto aberto de M

c) Para todo aberto G de espaço N, $f^{-1}(G)$ é um aberto de M

d) Para todo fechado F do espaço N, $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M.

Demonstração:

a) $\Longrightarrow$ b) Dado $p \in f^{-1}(B(q, \lambda))$, então $f(p) \in B(q, \lambda)$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(f(p), \varepsilon) \subset B(q, \lambda)$. Mas sendo f contínua existe então $\delta > 0$ tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$. Como porém $B(p, \delta) \subset$ $\subset f^{-1}(f(B(p, \delta)))$, então $B(p, \delta) \subset f^{-1}(B(f(p), \varepsilon)) \subset f^{-1}(B(q, \lambda))$. Assim todo ponto $p \in f^{-1}(B(q, \lambda))$ é ponto interior e portanto $f^{-1}(B(q, \lambda))$ é aberto.

b) $\Longrightarrow$ c) Se G é aberto em N, então $G = \cup B_i$, onde (B_i) é a família das bolas abertas contidas em G. Daí $f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$ e, como cada $f^{-1}(B_i)$ é aberto, o mesmo ocorre com $f^{-1}(G)$.

c) $\Longrightarrow$ d) Sendo F fechado em N, então $G = F^c$ é aberto. Daí $f^{-1}(F^c) =$ $= (f^{-1}(F))^c$ é aberto em M por hipótese. Donde seu complementar $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado em M.

d) $\Longrightarrow$ a) Seja p um ponto arbitrário de M. Para um $\varepsilon > 0$ qualquer seja $B = B(f(p), \varepsilon)$. Então B^c é um fechado em N que não contém $f(p)$ e portanto $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ é um fechado de M que não contém p. Logo $f^{-1}(B)$ é aberto e $p \in f^{-1}(B)$. Tomando então $\delta > 0$ de maneira que $B_1 = B(p, \delta) \subset$ $\subset f^{-1}(B)$ teremos que:

$$f(B_1) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$$

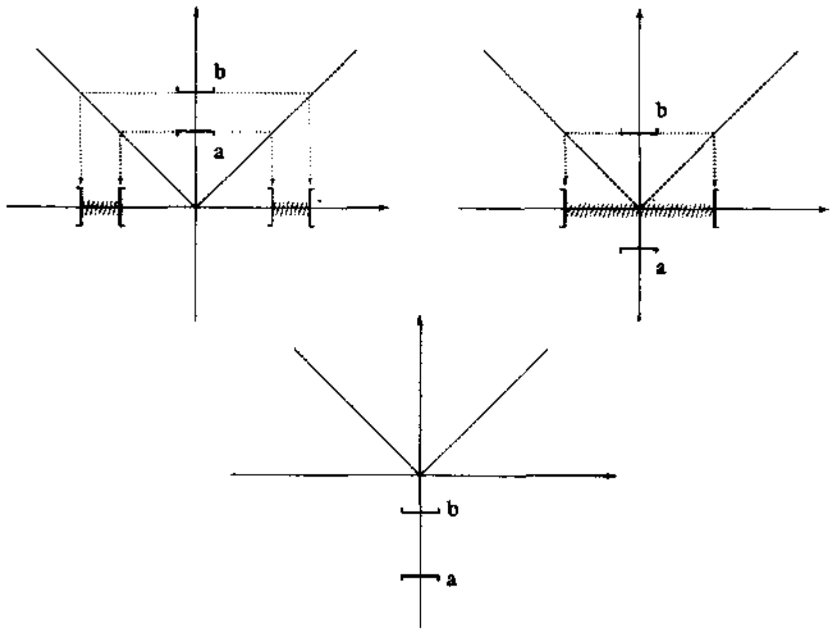
e portanto f é contínua em todo ponto $p \in M$. ■

Corolário: Sejam M e N espaços métricos. Se F e L são subconjuntos fechados de M tais que $M = F \cup L$ e se $f: M \longrightarrow N$ é tal que $g = f|F$ e $h = f|L$ são contínuas, então f também é contínua.

Demonstração: Seja P um subconjunto fechado do espaço N. Observemos primeiro que $f^{-1}(P) = g^{-1}(P) \cup h^{-1}(P)$. Mas $g^{-1}(P)$ é fechado em F (devido à proposição) e como F é fechado em M, então $g^{-1}(P)$ é fechado em M (ver Exemplo 5 à definição 3 – Cap. III). Analogamente $h^{-1}(P)$ é fechado em M. Donde $f^{-1}(P)$ é fechado neste espaço e portanto f é contínua. ■

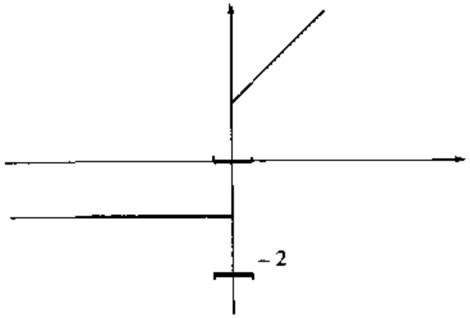
Exemplos:

1. A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua. Uma demonstração deste fato, usando a proposição anterior é a seguinte: há três casos possíveis, quanto a uma bola aberta $B(p, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, conforme figura abaixo; nos três casos a imagem inversa de $B(p, \varepsilon)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$



$f^{-1}(]a, b[) =]-b, -a[\cup]a, b[$ $\quad f^{-1}(]a, b[) =]-b, b[$ $\quad f^{-1}(]a, b[) = \emptyset$

2. A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$, para todo $x \leqslant 0$, e $f(x) = x + 1$, para $x > 0$, não é contínua. Isto pode ser verificado facilmente pela proposição anterior.



Considerando a bola $B =]-2, 0[$, temos $f^{-1}(B) =]-\infty, 0]$ que não é um conjunto aberto. Logo está caracterizada a não continuidade de f.

3. Seja $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O conjunto $A = \{x \in M | f(x) > 0\}$ é aberto porque $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$.

4. Dadas as funções contínuas $f, g: M \longrightarrow \mathbb{R}$, conjunto $A = \{x \in M | f(x) \neq g(x)\}$ é aberto posto que, sendo $h: M \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $h(x) = d(f(x), g(x))$, obviamente $A = \{x \in M | h(x) > 0\}$. Conseqüentemente é fechado o conjunto $\{x \in M | f(x) = g(x)\} = A^c$.

5. Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ espaços métricos. Então um produto $A_1 \times \ldots \times A_n$, onde cada $A_i \subset M_i$ é um conjunto aberto $(i = 1, \ldots, n)$, é aberto no espaço produto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ (para uma qualquer das métricas usuais em M). De fato, em relação a essas métricas, são contínuas as projeções $p_i: M \longrightarrow M_i$. Donde cada $p_i^{-1}(A_i)$ é aberto em M e, como $A_1 \times \ldots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap P_n^{-1}(A_n)$ (interseção finita de abertos), então $A_1 \times \ldots \times A_n$ é aberto.

6. Se $f: M \longrightarrow N$ é contínua, então $f_1: M \longrightarrow f(M)$ dada por $f_1(x) = f(x)$, para todo $x \in M$, é também contínua. Se U é um aberto de $f(M)$, então $U = G \cap f(M)$ onde G é um subconjunto aberto de N. Daí

$$f_1^{-1}(U) = f^{-1}(G \cap f(M)) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(G) \cap M = f^{-1}(G)$$

e com $f^{-1}(G)$ é aberto, por ser f contínua, então $f_1^{-1}(U)$ é aberto e daí f_1 é contínua.

2. Proposições sobre Continuidade

Proposição 5: Sejam $f: M \longrightarrow N$ e $g: N \longrightarrow P$ funções contínuas nos pontos $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente. Então $g \circ f: M \longrightarrow P$ é contínua no ponto p.

Demonstração: Dada uma bola $B_2 = B((g \circ f)(p), \varepsilon) = B(g(f(p)), \varepsilon)$, a continuidade de g garante que existe uma bola $B_1 = B(f(p), \lambda)$ tal que $g(B_1) \subset B_2$.

Considerando agora a bola B_1, como f é contínua em p, existe $B = B(p, \delta)$ de maneira que $f(B) \subset B_1$. Desta inclusão decorre que $g(f(B)) = (g \circ f)(B) \subset g(B_1)$ e portanto $(g \circ f)(B) \subset B_2$. ■

Corolário 1: Se $f: M \longrightarrow N$ e $g: N \longrightarrow P$ são funções contínuas, então $g \circ f: M \longrightarrow$ é também contínua.

Corolário 2: A restrição de uma função contínua $f: M \longrightarrow N$ a um subespaço $X \subset M$ é também contínua.

Demonstração: Sendo $j: X \longrightarrow M$ a inclusão é claro que $f \circ j = f|X$ pois

$$(f \circ j)(x) = f(j(x)) = f(x) = (f|X)(x)$$

para todo $x \in X$. Como f e j são contínuas então $f|X$ também é contínua. ■

Proposição 6: Se $f: M \longrightarrow N$ é contínua, então $f: X \longrightarrow f(X)$ também é contínua, para todo $X \subset M$.

Deixamos a demonstração como exercício.

Sejam $M_1, \ldots, M_n$ e M espaços métricos. Uma aplicação $f: M \longrightarrow M_1 \times \ldots \times M_n$ é definida por n aplicações $f_1: M \longrightarrow M_1, \ldots, f_n: M \longrightarrow M_n$ que se denominam *coordenadas* de f, de maneira que $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, para todo $x \in M$. A proposição a seguir caracteriza a continuidade de uma função f assim definida, em termos da continuidade das f_i.

Proposição 7: Para que $f: M \longrightarrow M_1 \times \ldots \times M_n$ definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $\forall x \in M$, seja contínua num ponto $p \in M$ é necessário e suficiente que cada uma das funções $f_1, \ldots, f_n$ seja contínua no ponto p.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Como $(p_i \circ f)(x) = p_i(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = f_i(x)$, para qualquer $x \in M$, então $p_i \circ f = f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e como ainda f e cada projeção p_i são contínuas, então f_i também é contínua.

($\Longleftarrow$) Usaremos sobre $M_1 \times \ldots \times M_n$ a métrica D_1 da soma. Seja $p \in M$. Dado $\varepsilon > 0$ existe para cada índice i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ um número $\delta_i > 0$ tal que:

$$d(x, p) < \delta_i \Longrightarrow d(f_i(x), f_i(p)) < \frac{\varepsilon}{n}$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, temos então que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f_i(x), f_i(p)) < \frac{\varepsilon}{n} \; (i = 1, 2, \ldots, n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d(f_1(x), f_1(p)) + \ldots + d(f_n(x), f_n(p)) < \varepsilon$$

ou seja:

$$D_1(f(x), f(p)) < \varepsilon \; ■$$

Corolário: Se $f_1: M_1 \longrightarrow N_1, \ldots, f_n: M_n \longrightarrow N_n$ são funções contínuas, então:

$$f: M_1 \times \ldots \times M_n \longrightarrow N_1 \times \ldots \times N_n$$

definida por:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$$

também é contínua.

Demonstração: Indicando por $p_i: M_1 \times \ldots \times M_n \longrightarrow M_i$ a projeção i-ésima $(i = 1, 2, \ldots, n)$, temos que:

$$(f_i \circ p_i)(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_i)$$

e portanto, fazendo $(x_1, \ldots, x_n) = x$:

$$f(x) = ((f_1 \circ p_1)(x), \ldots, (f_n \circ p_n)(x))$$

o que mostra que as funções $f_i \circ p_i$ são as coordenadas de f. Sendo estas coordenadas contínuas, já que cada p_i e cada f_i são contínuas, então f é também contínua. ■

3. Operações com Funções Contínuas

(a) Seja E um espaço vetorial normado qualquer. Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ arbitrários, a *soma* de duas funções $f: X \longrightarrow E$ e $g: X \longrightarrow E$ é a função, indicada por $f + g$, assim definida:

$$f + g: X \longrightarrow E \quad \text{e} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \; \forall x \in X$$

Suponhamos M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e duas funções $f: M \longrightarrow E$ e $g: M \longrightarrow E$. Vale então a seguinte propriedade:

(I) Se f e g são contínuas, então $f + g$ também é contínua.

De fato, consideremos as funções $h: M \longrightarrow E \times E$, dada por $h(x) = (f(x), g(x))$, e $s: E \times E \longrightarrow E$, dada por $s(x, y) = x + y$ (adição). Como obviamente $s \circ h = f + g$, então

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{h} & E \times E & \xrightarrow{s} & E \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

a continuidade de $f + g$ decorre da continuidade de h (proposição 7) e da continuidade de s (que é uma contração fraca como já vimos).

(b) Suponhamos $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções quaisquer, sendo M um espaço métrico (poderia ser, para efeito desta definição, um conjunto qualquer).

O *produto* das funções f e g é a função, denotada por $f \cdot g$, cuja definição é a seguinte:

$$f \cdot g: M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \; \forall x \in M.$$

É claro que $f \cdot g = g \cdot f$.

Temos então a seguinte propriedade:

(II) Se $f:M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:M \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então $f \cdot g$ também é contínua.

É só considerar o esquema:

$$\begin{array}{c} M \xrightarrow{h} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \longmapsto f(x)g(x) \end{array}$$

onde $h(x) = (f(x), g(x))$ e $m(x, y) = x \cdot y$. Como $f \cdot g = m \circ h$, h é contínua (proposição 7) e m é contínua (Exemplo (iii) – item 1), então $f \cdot g$ também é contínua.

(c) Seja M um espaço métrico. Dadas $f:M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:M \longrightarrow \mathbb{R}$, se $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in M$, o *quociente* de f e g é a função, indicada por $\frac{f}{g}$, e assim definida: $\frac{f}{g}:M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para qualquer $x \in M$. Para a função quociente assim definida vale a seguinte propriedade:

(III) Se $f:M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:M \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in M$, então $\frac{f}{g}$ também é contínua.

Consideremos o esquema abaixo, cuja composta é exatamente $\frac{f}{g}$:

$$\begin{array}{c} M \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \longmapsto \left(f(x), \frac{1}{g(x)}\right) \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

É fácil perceber a continuidade de cada uma das três funções componentes que aí figuram. (Quando à função $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deve-se levar em conta, para concluir sua continuidade, que $t \longmapsto \frac{1}{t}$, de $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, é contínua e ainda o corolário da proposição 7.) Disso tudo decorre a continuidade do quociente.

4. Continuidade das Transformações Lineares

Sejam E e F espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K. A classe mais importante dentre as aplicações de E em F é a das aplicações ou transformações lineares. Uma *transformação linear* $T:E \longrightarrow F$ é definida através das seguintes condições:

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ (Daqui segue: $T(0) = 0$)

para quaisquer $u, v \in E$ e para todo $\alpha \in K$. A importância desse tipo de aplicações está no fato de que a estrutura algébrica de espaço vetorial é preservada por elas.

É claro que, com a definição natural de *diferença* de dois vetores de um espaço vetorial, ou seja, $u - v = u + (-v)$, valem as seguintes propriedades:

$$T(-u) = -T(u) \qquad \text{e} \qquad T(u - v) = T(u) - T(v)$$

para u e v quaisquer em E.

Exemplo: Toda homotetia $h_\alpha:E \longrightarrow E$, onde E é um espaço vetorial qualquer e α um escalar dado, é linear pois:

$$h_\alpha(u + v) = \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v = h_\alpha(u) + h_\alpha(v)$$
$$h_\alpha(\lambda u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda h_\alpha(u)$$

A seguir veremos como pode ser caracterizada a continuidade das transformações lineares.

Proposição 8: Se E e F são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$ e se $T:E \longrightarrow F$ é uma transformação linear, então são equivalentes as afirmações:

(a) T é contínua

(b) T é contínua na origem

(c) Existe um número real $k > 0$ tal que $\|T(u)\| \leqslant k\|u\|$, para qualquer $u \in E$

(d) T é lipschitziana

Demonstração: (a) $\Longrightarrow$ (b) Imediata.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Como T é contínua na origem e como $T(0) = 0$, tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ de maneira que:

$$\|u\| < \delta \Longrightarrow \|T(u)\| < 1$$

Tomemos $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $\frac{1}{\delta} < k$. Assim, dado um vetor u qualquer, não nulo, de E, o vetor $\frac{u}{k\|u\|} = \frac{1}{k\|u\|}u$ tem norma igual a $\frac{1}{k}$, portanto menor que δ, e daí:

$$\left\|T\left(\frac{u}{k\|u\|}\right)\right\| < 1$$

Da linearidade de T e da propriedade (n_2) das normas decorre então que:

$$\frac{1}{k\|u\|}\|T(u)\| < 1$$

Donde:

$$\|T(u)\| \leqslant k\|u\|$$

para qualquer vetor $u \neq 0$ de E. Se $u = 0$ temos a igualdade $\|T(0)\| = k\|0\|$. Portanto a tese: $\|T(u)\| \leqslant k\|u\|$, para qualquer $u \in E$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) A constante de Lipschitz de T é o próprio k: dados $u, v \in E$,

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| \leqslant k\,\|u - v\|.$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) Toda aplicação lipschitziana é contínua. ∎

Corolário: Se E é um espaço vetorial normado qualquer, então toda transformação linear $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ é contínua.

Demonstração: Naturalmente a afirmação refere-se a qualquer das métricas usuais sobre $\mathbb{R}^n$ e para a demonstração escolheremos a métrica D_1 (da soma). Façamos $(1, 0, \ldots, 0) = e_1$, $(0, 1, 0, \ldots, 0) = e_2, \ldots, (0, \ldots, 0, 1) = e_n$. Seja $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$. Daí então

$$\|T(u)\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_iT(e_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|T(e_i)\|$$

Seja $k = \max\{\|T(e_1)\|, \ldots, \|T(e_n)\|\}$. Levando em conta que $\|u\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, temos então

$$\|T(u)\| \leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| = k\,\|u\|$$

A proposição 6 nos garante então a continuidade. ∎

§ 2 — FUNÇÕES UNIFORMEMENTE CONTÍNUAS

1. Conceito

Seja $f: M \longrightarrow N$ uma função contínua num ponto $p \in M$. Como sabemos, dado então $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ para todo $x \in B(p, \delta)$. Este δ depende, em geral, não só de ε como também do ponto p. Há casos porém em que ε depende apenas de δ, ou seja, pode-se usar o mesmo δ em todos os pontos de M, no seguinte sentido:

Definição 2: Se M e N são espaços métricos, uma função $f: M \longrightarrow N$ se diz *uniformemente contínua* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Intuitivamente isso significa que estão "*arbitrariamente próximos*" entre si dois valores de f correspondentes a dois pontos de M "suficientemente próximos" entre si.

É claro, ademais, que toda função uniformemente contínua é também contínua. A recíproca disto não vale como veremos.

2. Exemplos

1. As *aplicações lipschitzianas* $f: M \longrightarrow N$ são uniformemente contínuas. De fato, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de f, então $d(f(x), f(y)) \leqslant c\,d(x, y)$, $\forall\, x, y \in M$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ a definição se verifica, como é óbvio. Em particular as *contrações fracas* são todas uniformemente contínuas.

2. Uma aplicação $f: M \longrightarrow N$ é chamada *contração* se existe um número real k, $0 \leqslant k < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\,d(x, y)$, $\forall\, x, y \in M$.

Se $k = 0$, f é constante e portanto é uma contração fraca. Se $k > 0$, então f é lipschitziana. Então as contrações são sempre funções uniformemente contínuas.

3. A função $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \frac{1}{t}$, não é uniformemente contínua, embora em cada ponto $p \in \mathbb{R}^*$ existe uma bola $B(p, \varepsilon)$ tal que a restrição de f a essa bola é uniformemente contínua. Quanto à segunda dessas afirmações é suficiente acompanhar o exemplo contido no § 1 – 1, em que se provou a continuidade de f. Mostremos apenas que f não é uniformemente contínua.

Seja $\varepsilon = 1$. Para qualquer $\delta > 0$ existem números naturais não nulos, n e $n + 1$ de maneira que $\frac{1}{n(n+1)} < \delta$. Façamos $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{n+1}$. Então $|x - y| = \frac{1}{n(n+1)}$ e, no entanto,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right) - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon$$

4. A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, também não é uniformemente contínua, embora sua restrição a cada intervalo (bola aberta) $]a, b[$ seja lipschitziana. Provemos a primeira dessas afirmações.

Seja $\varepsilon = 1$. Para qualquer $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}^*$ de modo que $\frac{1}{n} < \delta$. Façamos $x = n$ e $y = n + \frac{1}{n}$. Então $|y - x| = \frac{1}{n}$ e, no entanto,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\ n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2\ \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon$$

5. A função $f: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua mas não é lipschitziana.

Para mostrar que f não é lipschitziana deve-se provar que para qualquer $c > 0$, existem $x, y \in [0, +\infty[$, $x \neq y$, de maneira que:

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > c$$

Ora, é só tomar, por exemplo, $x = \frac{1}{16c^2}$ e $y = \frac{1}{4c^2}$.

Quanto à continuidade uniforme de f partimos do fato que:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|},\ \forall\ x, y \in [0, +\infty[.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, tomando-se $\delta = \varepsilon^2$, se $|x - y| < \delta = \varepsilon^2$, teremos:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

6. A função $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ é mais um exemplo, ao lado dos Exemplos 3 e 4, de função contínua que não é uniformemente contínua. A continuidade de f decorre da continuidade dos fatores no esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t} & \longmapsto & \cos\frac{1}{t} \end{array}$$

Seja $\varepsilon = 1$. Para qualquer $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $\frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \delta$. Tomemos $x = \frac{1}{2n\pi}$ e $y = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Então:

$$|x - y| = \frac{2n + 1 - 2n}{2n(2n + 1)\pi} = \frac{1}{2n(2n + 1)\pi}$$

e

$$|f(x) - f(y)| = |\cos(2n\pi) - \cos(2n + 1)\pi| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon$$

3. Proposições

Não demonstraremos a maioria das proposições abaixo sobre funções uniformemente contínuas, pelo fato de que suas demonstrações quase nada diferem das correspondentes para funções contínuas.

Proposição 9: Sejam d e d_1 métricas sobre M para as quais existem números reais $r, s > 0$ de maneira que:

$$r\,d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq s\,d(x, y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Então $f:(M, d) \longrightarrow (N, d')$ é uniformemente contínua se, e somente se, $f:(M, d_1) \longrightarrow (N, d')$ é uniformemente contínua.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\lambda > 0$ de modo que:

$$d(x, y) < \lambda \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Tomemos $\delta = r\lambda$ e suponhamos $d_1(x, y) < \delta$. Então $r\,d(x, y) \leq d_1(x, y) < \delta = r\lambda$ e portanto $d(x, y) < \lambda$. Donde $d'(f(x), f(y)) < \delta$.

($\Longleftarrow$) (Exercício). ∎

Proposição 10: Sejam d' e d'_1 métricas sobre N tais que, para certas constantes $r, s \in \mathbb{R}^*$, valem as relações:

$$r\,d'(x, y) \leq d'_1(x, y) \leq s\,d'(x, y)$$

para quaisquer x, y N. Então $f:(M, d) \longrightarrow (N, d')$ é uniformemente contínua se, e somente se, $f:(M, d) \longrightarrow (N, d'_1)$ é uniformemente contínua.

Nota: As duas proposições acima nos garantem, em particular, que quando o domínio ou o contradomínio de uma função f for um produto cartesiano de espaços métricos, é indiferente usar uma qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2 nesse produto, a fim de verificar a continuidade uniforme de f. Quer dizer, se f for uniformemente contínua em relação a uma dessas métricas, também o será em relação às outras e vice-versa.

Proposição 11: Se $f: M \longrightarrow N$ e $g: N \longrightarrow P$ são uniformemente contínuas, então $g \circ f: M \longrightarrow P$ também é uniformemente contínua.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\lambda > 0$ de modo que:

$$\forall\ y_1, y_2 \in N,\ d(y_1, y_2) < \lambda \Longrightarrow d(g(y_1), g(y_2)) < \varepsilon.$$

Sendo f também uniformemente contínua, então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x_1, x_2 \in M$, $d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \lambda$. Daí então

$$d(g(f(x_1)), g(f(x_2))) = d((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) < \varepsilon\ ∎$$

Corolário: A restrição de uma função uniformemente contínua $f: M \longrightarrow N$ a um subespaço $X \subset M$ é também uniformemente contínua.

Proposição 12: Uma função $f: M \longrightarrow N_1 \times \ldots \times N_r$ definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x))$, $\forall\ x \in M$, é uniformemente contínua se, e somente se, cada função $f_i: M \longrightarrow N_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ é uniformemente contínua.

Corolário: Se $f_1: M_1 \longrightarrow N_1, \ldots, f_r: M_r \longrightarrow N_r$ são uniformemente contínuas, então:

$$f: M_1 \times \ldots \times M_r \longrightarrow N_1 \times \ldots \times N_r$$

definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_r(x_n))$ é uniformemente contínua.

Aplicação: Como aplicação das proposições acima provaremos que a multiplicação

$$m: \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$

sobre um espaço vetorial normado E, definida por $m(\alpha, u) = \alpha u$, não é uniformemente contínua. Seja $v \in E$ um *vetor unitário*, isto é, $\|v\| = 1$. Indiquemos por f e g, respectivamente, as aplicações

$$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times E \text{ dada por } f(t) = \left(\frac{1}{t}, v\right)$$

e

$$g: E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g(u) = \|u\|$$

Se m fosse uniformemente contínua, então no esquema

$$\mathbb{R}^* \xrightarrow{f} \mathbb{R} \times E \xrightarrow{m} E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

todas as funções seriam uniformemente contínuas. Mas

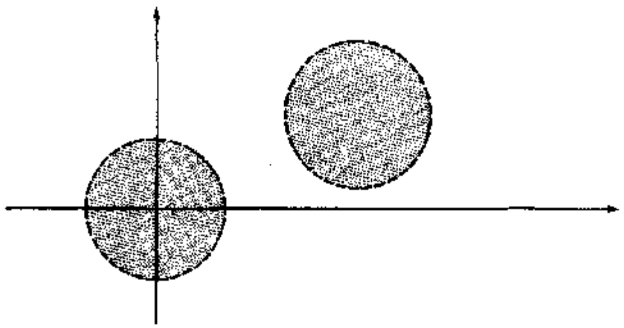
$$(g \circ m \circ f)(t) = (g \circ m)\left(\frac{1}{t}, v\right) = g\left(\frac{1}{t} v\right) = \left\|\frac{1}{t} v\right\| = \left|\frac{1}{t}\right|$$

Então a função $t \longmapsto \left|\frac{1}{t}\right|$ de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ seria uniformemente contínua, o que não é possível (justifique).

§ 3 — ESPAÇOS HOMEOMORFOS

1. Homeomorfismos

Consideremos num espaço vetorial normado E um ponto $p \in E$ e uma bola $B(p, \varepsilon)$. Imaginemos, para facilitar o entendimento, que esse espaço seja o $\mathbb{R}^2$. A aplicação $f: B(p, \varepsilon) \longrightarrow E$ definida por $f(u) = \frac{1}{\varepsilon}(u - p)$ é contínua pois



se compõe da translação $u \longmapsto u - p$ e da homotetia $v \longmapsto \frac{1}{\varepsilon} v$ e é injetora obviamente. Como, para qualquer $u \in B(p, \varepsilon)$,

$$\|f(u)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|u - p\| < \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon = 1$$

então podemos concluir que $\operatorname{Im}(f) = B(0, 1)$. Assim $f: B(p, \varepsilon) \longrightarrow B(0, 1)$, dada por $f(u) = \frac{1}{\varepsilon}(u - p)$ é bijetora e contínua. Sua inversa f^{-1} é definida por:

$$f^{-1}(u) = \varepsilon u + p$$

e portanto também é contínua.

A função $f: B(p, \varepsilon) \longrightarrow B(0, 1)$ definida acima é um exemplo do que definiremos daqui a pouco como homeomorfismo, isto é, uma função bijetora, contínua cuja inversa também é contínua.

Definição 3: Se M e N são espaços métricos uma função $f: M \longrightarrow N$ é chamada *homeomorfismo* se, e somente se

(a) f é bijetora

(b) f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Neste caso os espaços M e N se dizem *homeomorfos*.

Notas:

1. É comum usar-se a mesma designação para todos os espaços de uma mesma classe de espaços homeomorfos. Isto naturalmente significa que o aspecto puramente métrico foi abstraído e que o enfoque é aquele chamado "topológico". (A estrutura topológica de um espaço métrico é determinada pela coleção dos abertos desse espaço.)

Por exemplo:

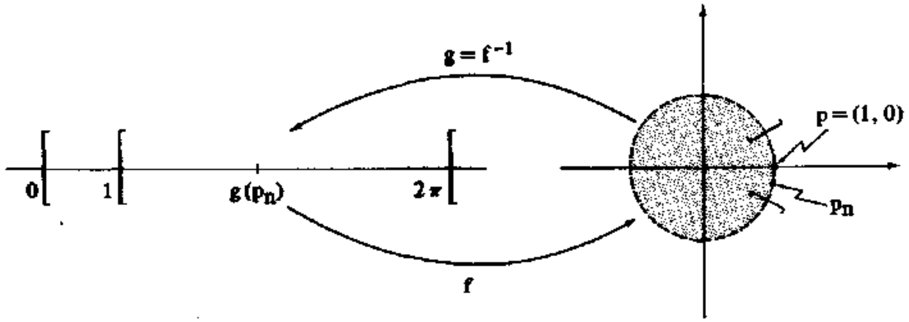
Todo espaço homeomorfo ao intervalo [0, 1] chama-se *arco*.

Todo espaço homeomorfo ao *círculo unitário* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ do plano euclidiano chama-se *curva fechada simples* ou *curva de Jordan*.

2. O fato de $f: M \longrightarrow N$ ser contínua e bijetora não assegura que $f^{-1}: M \longrightarrow N$ seja também contínua.

Exemplo clássico desse fato é o da aplicação $f: [0, 2\pi[\longrightarrow S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ que é contínua, pois suas componentes o são, é bijetora mas sua inversa $g = f^{-1}$ não é contínua no ponto $p = (1, 0)$ conforme provaremos.

Consideremos a bola de centro $g(p) = 0$ e raio igual a 1. Esta bola em $[0, 2\pi[$ é o intervalo $[0, 1[$. Consideremos uma bola de centro $p = (1, 0)$ e raio



$\delta > 0$ (arbitrário) em S^1. Esta bola nada mais é do que um arco aberto em S^1, de centro p. Tomando $n \in \mathbb{N}$ de maneira que o ponto

$$p_n = \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right)$$

pertença a essa bola, o que é perfeitamente possível (justifique), então:

$$g(p_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$$

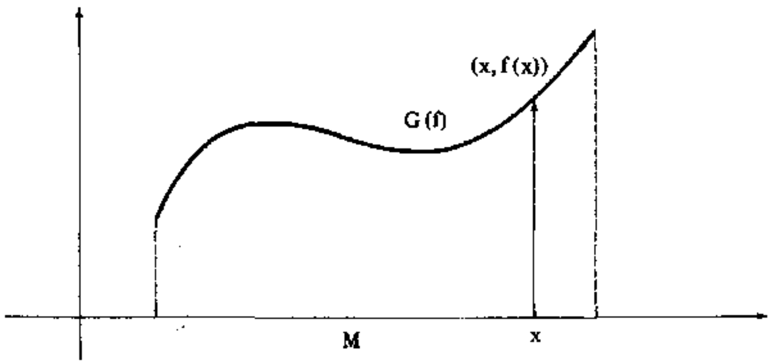
e como $2\pi - \frac{1}{n} > 1$, segue-se que $g(p_n)$ não pertence à bola $[0, 1[$.

3. Se $f: M \longrightarrow N$ e $g: N \longrightarrow P$ são homeomorfismos, então $g \circ f: M \longrightarrow P$ também é um homeomorfismo. Isto decorre diretamente de propriedades anteriormente vistas a respeito de composição de funções bijetoras e de funções contínuas.

Exemplos de espaços homeomorfos:

Nos exemplos a seguir nos limitaremos, praticamente, a exibir os homeomorfismos, sem levar a efeito as verificações que seriam demasiado longas e trabalhosas.

1. Seja $f: M \longrightarrow N$ uma função contínua. O gráfico $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ de f é homeomorfo naturalmente ao domínio M dessa função. A função

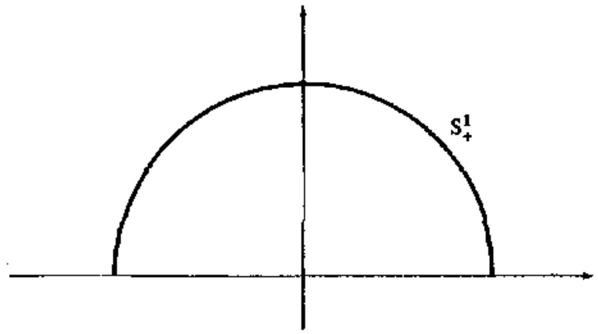


$F: M \longrightarrow G(f)$, dada por $F(x) = (x, f(x))$ é (i) contínua pois suas componentes $x \longmapsto x$ e $x \longmapsto f(x)$ são contínuas, (ii) bijetora porque $(x, f(x)) = (x', f(x')) \Longrightarrow x = x'$ e, dado $(x, f(x)) \in G(f)$, então $x \in M$ e $F(x) = (x, f(x))$. Além disso a inversa de F também é contínua pois F^{-1} simplesmente é a restrição da primeira projeção ao gráfico $G(f)$.

Vejamos alguns casos particulares desse homeomorfismo.

(a) Lembremos a notação usual $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e a designação de círculo unitário dada a S^1.

Nesse contexto, o hemisfério norte $S^1_+ = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}$ é homeomorfo à bola aberta $B(0, 1) =]-1, +1[$ uma vez que esse hemisfério é o gráfico de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in]-1, +1[$.



De maneira geral o hemisfério norte $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}$ é homeomorfo à bola $B(0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

(b) A reta $\mathbb{R}$ é homeomorfa à parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ uma vez que esta parábola é o gráfico da função $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

2. Seja $p = (0, 0, 1)$ o *polo norte* da esfera S^2. Então $S^2 - \{p\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ posto que a *projeção estereográfica* $\pi: S^2 - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right)$$

é um homeomorfismo. Vejamos porque π é contínua. As funções

$$(x, y, z) \longmapsto x$$
$$(x, y, z) \longmapsto 1$$
$$(x, y, z) \longmapsto z$$

são certamente contínuas (a primeira e a última porque são projeções e a segunda porque é constante). Logo também é contínua a função

$$(x, y, z) \longmapsto 1 - z$$

diferença entre duas funções contínuas. Como z é sempre diferente de 1, então $1 - z \neq 0$ e portanto a função quociente

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{x}{1 - z}$$

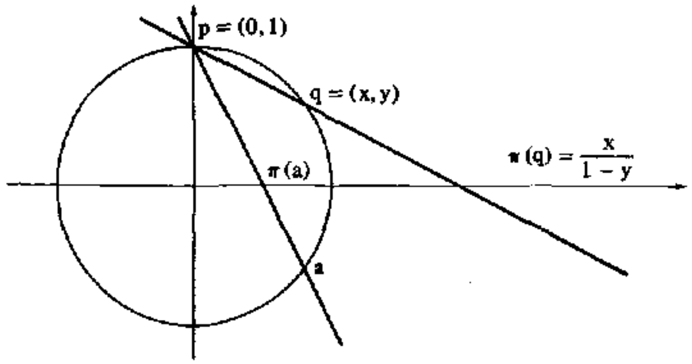
também é contínua. Da mesma forma a função

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{y}{1 - z}$$

definida também em $S^2 - \{p\}$, é contínua. Logo as componentes ou coordenadas de π são ambas funções contínuas o que garante nossa afirmação.

De um modo geral são homeomorfos os espaços $S^n - \{p\}$ e $\mathbb{R}^n$, onde $p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ indica o polo norte da esfera unitária n − dimensional.

A figura abaixo é uma ilustração desse homeomorfismo no caso n = 1 e nela deve ser observado que, para cada $q \in S^1 - \{(0, 1)\}$, $\pi(x)$ é o ponto em que a reta que passa por $p = (0, 1)$ e q intercepta o eixo x.



3. Se E é um espaço vetorial normado, então toda bola aberta $B(p, \varepsilon)$ é homeomorfa ao espaço E. Já vimos na introdução deste assunto que $B(p, \varepsilon)$ é homeomorfa a $B(0, 1)$ e portanto é suficiente provar que são homeomorfos a bola $B(0, 1)$ e o espaço E. Vamos nos basear no fato de que a função

$$x \longmapsto \frac{x}{1 + |x|} \qquad (1)$$

de $\mathbb{R}$ em $]-1, +1[$ *é bijetora, o que já foi visto no capítulo sobre conjuntos,* e é contínua pois é o quociente das funções contínuas $x \longmapsto x$ e $x \longmapsto 1 + |x|$ a segunda delas não nula para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Além disso a inversa da função (1) é:

$$x \longmapsto \frac{x}{1 - |x|}$$

também contínua.

Assim é só definir $f: E \longrightarrow B(0, 1)$ por:

$$f(u) = \frac{u}{1 + \|u\|}, \text{ para todo } u \in E$$

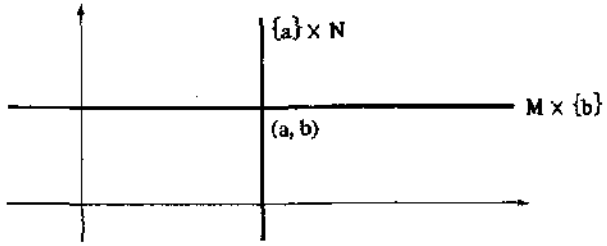
É claro que f está bem definida posto que $\|f(u)\| = \left\| \frac{u}{1 + \|u\|} \right\| = \left\| \frac{u}{1 + \|u\|} \right\| <$ < 1, para todo $u \in E$. É contínua, o que se prova de maneira análoga ao que

acabamos de fazer no caso $E = \mathbb{R}$; considerando $g: B(0, 1) \longrightarrow E$ dada por: $g(u) = \frac{u}{1 - \|u\|}$, para todo $u \in B(0, 1)$, como $\|u\| \neq 1$, então g é contínua. Pode-se verificar ainda que $g \circ f$ e $f \circ g$ são as aplicações idênticas de E e $B(0, 1)$, respectivamente, o que, juntamente com as conclusões anteriores, nos mostra que f é efetivamente um homeomorfismo.

Nota: Em particular decorre da proposição anterior que o espaço usual de dimensão três é homeomorfo a uma esfera qualquer, sem sua superfície esférica, isto é, sem sua "casca".

4. Dados os espaços M e N, então os subespaços $\{a\} \times N$ e $M \times \{b\}$ de $M \times N$, homeomorfos respectivamente a N e a M, qualquer que seja o par $(a, b) \in$ $\in M \times N$.

É claro que em $M \times N$ vamos considerar uma qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2. Veirifquemos o homeomorfismo $M \approx M \times \{b\}$. A aplicação

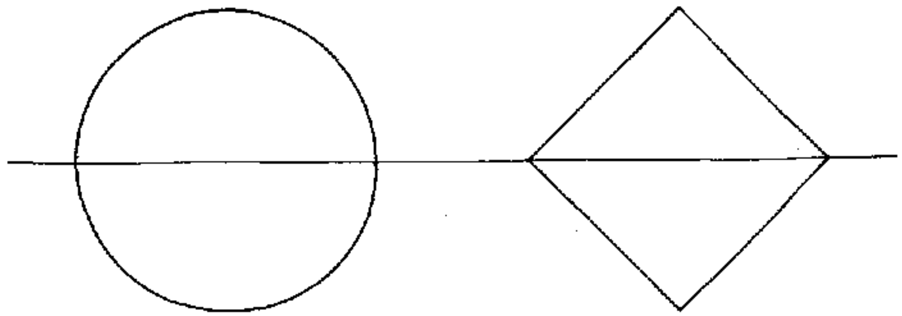


$f: M \longrightarrow M \times \{b\}$ dada por $f(x) = (x, b)$, para todo $x \in M$, é obviamente bijetora. É contínua porque tomando uma bola aberta em $M \times \{b\}$, ou seja, um conjunto

$$(B(x, \varepsilon) \times B(b, \varepsilon)) \cap (M \times \{b\}) = B(x, \varepsilon) \times \{b\}$$

então $f^{-1}(B(x, \varepsilon) \times \{b\}) = B(x, \varepsilon)$. Deixamos como exercício a verificação de que $f^{-1}: M \times \{b\} \longrightarrow M$ é contínua.

5. O círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| = 1\}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ são homeomorfos.

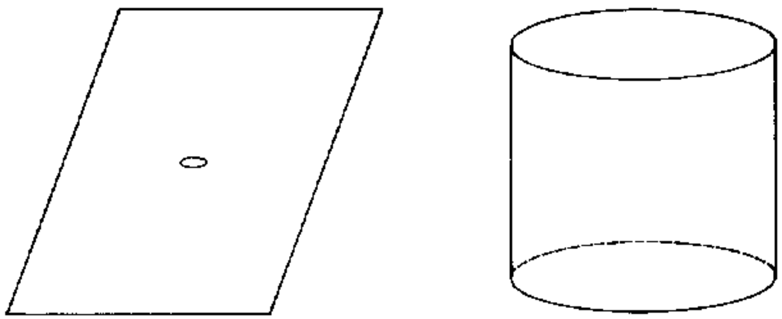


Deixemos ao leitor a verificação de que $f: Q \longrightarrow S^1$, definida por:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

é um homeomorfismo.

6. O plano perfurado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$ e o cilindro circular reto $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ são também homeomorfos. Também



nos limitaremos a exibir um homeomorfismo relacionando esses dois espaços, a aplicação $f: Y \longrightarrow X$ dada por:

$$f(x, y, z) = (xe^z, ye^z)$$

para qualquer $(x, y, z) \in Y$.

Proposição 13: Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Para que d e d' sejam equivalentes é necessário e suficiente que a aplicação $i: (M, d) \longrightarrow (M, d')$, definida por $i(x) = x$, $\forall x \in M$, seja um homeomorfismo.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja $p \in M$. Dada uma bola $B_{d'}(i(p), \varepsilon)$, por hipótese existe uma bola $B_d(p, \delta) = B_d(i(p), \delta) \subset B_{d'}(i(p), \varepsilon)$. Mas $B_d(p, \delta) = i(B_d(p, \delta))$ o que implica

$$i(B_d(p, \delta)) \subset B_{d'}(i(p), \varepsilon)$$

e portanto i é contínua em p. De maneira análoga se prova que a inversa de i é contínua.

($\Longleftarrow$) Dado uma bola $B_{d'}(p, \varepsilon) = B_{d'}(i(p), \varepsilon)$, como i é contínua em p existe uma bola $B_d(p, \delta)$ de maneira que:

$$i(B_d(p, \delta)) = B_d(p, \delta) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$$

Usando o fato de que a inversa de i é contínua se prova, de maneira análoga, que dada uma bola $B_d(p, \varepsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$B_{d'}(p, \delta) \subset B_d(p, \varepsilon) \blacksquare$$

Exemplo: Sejam (M, d) e (N, d_1) espaços métricos e $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Então a aplicação $d': M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d'(x, y) = d_1(f(x), f(y))$, para quaisquer $x, y \in M$, é equivalente à métrica d. A demonstração de que d' é uma métrica é rotineira e a deixamos como exercício. Quanto à equivalência afirmada, seja $g: (M, d') \longrightarrow (N, d_1)$ dada por $g(x) = f(x)$, $\forall x \in M$, isto é, g é a própria aplicação f, a menos das métricas em consideração. Como, para $x, y \in M$ arbitrários, $d'(x, y) = d_1(f(x), f(y)) = d_1(g(x), g(y))$, então g conserva distâncias e portanto é contínua. Como g obviamente é sobrejetora, então g é um homeomorfismo. Por outro lado, a partir da igualdade evidente $g \circ i = f$

$$\begin{tikzcd} (M, d) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & (M, d') \arrow[dl, "g"] \\ & (N, d_1) & \end{tikzcd}$$

obtemos que

$$i = g^{-1} \circ f$$

e

$$i^{-1} = f^{-1} \circ g$$

e sendo f e g homeomorfismos, então tanto i como sua inversa são contínuas e daí então $d \sim d'$.

Em particular, se $E = \mathbb{R}$ podemos concluir que a função d' definida por $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$ é uma métrica sobre $\mathbb{R}$ equivalente à usual. É claro que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ usada nesse caso é o homeomorfismo dado por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Homeomorfismos Uniformes

Definição 4: Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f: M \longrightarrow N$ é chamada *homeomorfismo uniforme* se f é bijetora, é uniformemente contínua e sua inversa f^{-1} também é uniformemente contínua.

Nota: Na definição acima a exigência explícita de que f^{-1} também seja uniformemente contínua não é supérflua como pode ser visto no exemplo a seguir. A função $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é bijetora, uniformemente contínua mas sua inversa, definida por $x \longmapsto x^2$, não é uniformemente contínua conforme já vimos anteriormente.

Exemplo: Toda isometria $f: M \longrightarrow N$ é um homeomorfismo uniforme posto que bijetora, lipschitziana (daí uniformemente contínua) e ainda porque a inversa de uma isometria é também uma isometria. Em particular toda translação num espaço vetorial normado é um homeomorfismo uniforme.

Definição 5: Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Dizemos que d e d' são *uniformemente equivalentes* se a aplicação idêntica $i:(M, d) \longrightarrow (M, d')$ é um homeomorfismo uniforme.

Exemplos e Contra-exemplo:

1. Se existem números reais r, s > 0 de maneira que $r\,d(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant s\,d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$, então d e d' são uniformemente equivalentes. De fato, as relações $d(x, y) \leqslant \frac{1}{r} d'(x, y)$ e $d'(x, y) \leqslant s\,d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$, provam respectivamente que as identidades $(M, d') \longrightarrow (M, d)$ e $(M, d) \longrightarrow (M, d')$ são lipschitzianas e portanto uniformemente contínuas.

2. Seja d uma métrica sobre M. Então a métrica d' sobre M, definida por $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ é uniformemente equivalente a d. De fato, como $d'(x, y) \leqslant d(x, y)$, $\forall x, y \in M$, então a identidade $(M, d) \longrightarrow (M, d')$ é uniformemente contínua. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, então tomando-se $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$, se $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} < \delta$, temos que $d'(x, y) = d(x, y)$ e daí $d(x, y) < \delta$ o que implica que $d(x, y) < \varepsilon$ e nos leva à conclusão de que também é uniformemente contínua a identidade $(M, d') \longrightarrow (M, d)$.

3. A métrica usual em $\mathbb{R}$, dada por $d(x, y) = |x - y|$ não é uniformemente equivalente à métrica d' sobre $\mathbb{R}$ dada por $d'(x, y) = \min\{1, |x^3 - y^3|\}$. Mostremos que a identidade $i:(\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d')$ não é uniformemente contínua. De fato, tomemos $\varepsilon = 1$. Para qualquer $\delta > 0$ existe um número real $x > 1$ tal que $\frac{1}{x} < \delta$. Fazendo $y = x + \frac{1}{x}$, então

$$|y^3 - x^3| = \left|x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - x^3\right| = \left|3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right| > 1$$

do que resulta $d'(x, y) = 1$ e, não obstante, $d(x, y) = \left|x - x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \delta$.

Proposição 14: Seja $f:M \longrightarrow N$ uma função uniformemente contínua. A aplicação f não perde esta propriedade quando se substitui a métrica de M ou a métrica de N por outra que seja uniformemente equivalente à métrica substituída.

Demonstração: Sejam d e d_1, respectivamente, as métricas de M e N e suponhamos d' uniformemente equivalente a d. Dado $\varepsilon > 0$, existe por hipótese $\lambda > 0$ de maneira que

$$d(x, y) < \lambda \Longrightarrow d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Como, ainda, a identidade $(M, d') \xrightarrow{i} (M, d)$ é uniformemente contínua, devido à equivalência uniforme das métricas d e d', então existe $\delta > 0$, em função de λ, de forma que

$$d'(x, y) < \delta \Longrightarrow d(x, y) < \lambda$$

Donde então

$$d'(x, y) < \delta \Longrightarrow d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

o que garante a continuidade uniforme de

$$f:(M, d') \longrightarrow (N, d_1)$$

Deixamos como exercício a demonstração no caso de se substituir d_1 por d_1' uniformemente equivalente a d_1. ∎

EXERCÍCIOS

1. Sejam M e N espaços métricos e seja $f:M \longrightarrow N$. Se $p \in M$ e para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < 1$ existe $\delta > 0$ de maneira que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

mostre que f é contínua em p.

2. Seja $M = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ com a métrica usual induzida. Mostre que a função $f:M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ é contínua em todo ponto $\frac{1}{n} \in M$ mas não é contínua no ponto 0.

3. Uma função $f:M \longrightarrow N$ satisfaz a *condição de Holder* de ordem k (constante estritamente positiva) se existe $c > 0$ de maneira que $d(f(x), f(y)) \leqslant c\,[d(x, y)]^k$, $\forall x, y \in M$. Mostre que nessas condições f é contínua.

4. Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = n + 1$, se $n \in \mathbb{N}$, e $f(x) = x$ para todo $x \notin \mathbb{N}$. Mostre que f é contínua nos pontos de $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ mas não é contínua em $\mathbb{N}$.

5. Mostre que não é contínua no ponto (0, 0) a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$.
Sugestão: Mostre que a restrição de f à reta $y = x$ não é contínua no ponto 0 e observe a proposição 5.

6. Mostre que $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ não é contínua no ponto (0, 0), mas que a restrição de f ao eixo das ordenadas é contínua.
Sugestão: Para a primeira parte considere a restrição de f à parábola $y^2 = x$.

7. Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e façamos

$$A = \{p \in \mathbb{R}^2 | f(p) < 0\} \qquad e \qquad B = \{p \in \mathbb{R}^2 | f(p) \leqslant 0\}$$

Mostre que $\bar{A} \subset B$ e $A \subset \overset{\circ}{B}$.

8. Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ se $xy = 0$ e $f(x, y) = 1$ se $xy \neq 0$. Mostre que f é contínua em todo ponto (x, y) com $xy \neq 0$ mas não é contínua nos demais, exceto $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

9. Sejam M e N espaços métricos, $Y \subset N$ um subespaço e $j: Y \longrightarrow N$ a inclusão. Mostre que: uma aplicação $f: M \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $j \circ f: M \longrightarrow N$ é contínua.

10. Sejam M e N espaços métricos e $f, g: M \longrightarrow N$ funções contínuas. Se $f(a) \neq g(a)$, para algum $a \in M$, mostre que existe uma bola $B = B(a, \varepsilon)$ tal que $f(x) \neq g(y)$, para quaisquer $x, y \in B$.

11. Sejam $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{Q}$. Prove que $f = g$.
Sugestão: Use exercício anterior.

12. Seja M um espaço cuja métrica é a zero-um. Mostre que toda função $f: M \longrightarrow N$, qualquer que seja o espaço métrico N, é contínua.

13. Sejam I e J intervalos em $\mathbb{R}$. Se $f: I \longrightarrow J$ é sobrejetora e estritamente crescente (isto é: $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$), mostre que f é contínua.

14. Mostre que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ não é contínua no ponto 0 mas é contínua nos demais pontos.
Sugestão: Para a primeira parte considere a seqüência $\left(\frac{2}{n\pi}\right) \longrightarrow 0$.

15. Seja $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Se $c = \sup\{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$, mostre que $f(c) = 0$.

16. Use a proposição 3 para provar que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se x racional e $f(x) = 0$ se x irracional só é contínua no ponto 0.

17. Seja M um espaço métrico e seja $\chi_A: M \longrightarrow \mathbb{R}$ a função característica de um subconjunto $A \subset M$, isto é, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Mostre que χ_A é contínua em $p \in M$ se, e somente se, $p \notin \operatorname{Fr}(A)$.

18. Mostre que $f: M \longrightarrow N$ é contínua se, e somente se, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset M$.

19. Use a proposição 3 para provar que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se x irracional e $f(x) = 1 - x$ se x racional não é contínua nos pontos $p \neq \frac{1}{2}$. Essa função é contínua no ponto $\frac{1}{2}$?

20. Mostre que toda função $f: M \longrightarrow N$ que satisfaz a condição de Holder é uniformemente contínua.

21. Se M é um espaço métrico e $A \neq \emptyset$ é uma parte de M, mostre que $x \longmapsto d(x, A)$ é uniformemente contínua.

22. Sobre $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ considere a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$. Mostre que $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ não é uniformemente contínua.

23. Mostre que $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é contínua mas não é uniformemente contínua.

24. Mostre que $f: M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua se, e somente se, $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ implica $d(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$, para quaisquer seqüências (x_n) e (y_n) de M.

25. Mostre que $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $m(x, y) = xy$ não é uniformemente contínua.
Sugestão: Considere a restrição de m à reta $y = x$ e leve em conta o corolário da proposição 11.

26. Mostre que a projeção ortogonal define um homeomorfismo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ do $\mathbb{R}^3$ no plano $z = 0$.

27. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2 - B$, sendo $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

28. Mostre que não são homeomorfos os intervalos $]0, 1[$, $[0, 1[$ e $[0, 1]$.
Sugestão: Mostre primeiro que se J é um intervalo, uma aplicação injetora e contínua $J \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona.

29. Estabeleça um homeomorfismo entre o primeiro quadrante $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geqslant 0\}$ e $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$.

30. Um espaço métrico M se diz *homogêneo* se para quaisquer $a, b \in M$ existe um homeomorfismo $f: M \longrightarrow M$ tal que $f(a) = b$.

a) Se M e N são homeomorfos mostre que M é homogêneo se, e somente se, N é homogêneo.

b) Mostre que um espaço vetorial normado E é homogêneo.
c) Mostre que uma bola aberta num espaço vetorial normado é homogêneo.
d) Mostre que um espaço cuja métrica é a zero-um é homogêneo.

31. Sejam $f: M \longrightarrow N$ e $g: N \longrightarrow P$ funções contínuas. Mostre que se $g \circ f$ é homeomorfismo e g injetora (ou f sobrejetora), então f e g são homeomorfismos.

32. Seja $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Para qualquer parte $A \subset M$ mostre que:

a) $p \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow f(p) \in \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$
b) $p \in \overline{A} \Longleftrightarrow f(p) \in \overline{f(A)}$
c) $p \in A' \Longleftrightarrow f(p) \in (f(A))'$

33. Seja $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Se $x \in M$ e $f(x) = y$, mostre que $M - \{x\}$ e $N - \{y\}$ são homeomorfos.

CONJUNTOS COMPACTOS

§ 1 — COMPACIDADE

Definição 1: Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é *compacto* se, para toda seqüência (x_n) de pontos de K, existe uma subseqüência (x_{n_i}) que converge para um ponto $p \in K$. Um espaço métrico (M, d) se diz *compacto* se o conjunto M é compacto.

Exemplos:

1. Todo conjunto finito.

Se K é finito e $(x_1, x_2, \ldots)$ é uma seqüência de pontos de K, então existe um termo x_r tal que $(x_r, x_r, \ldots)$ é uma subseqüência da seqüência dada. Como $(x_r, x_r, \ldots) \longrightarrow x_r$, então fica provada nossa afirmação.

2. Na reta real todo intervalo [a, b].

De fato, seja $(x_1, x_2, \ldots)$ uma seqüência de pontos de [a, b] e consideremos a seqüência $(s_1, s_2, \ldots)$, onde

$$s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

Obviamente tem-se:

$$a \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant b$$

e portanto, se $s = \sup\{s_n\}$, então $s = \lim s_n$.

Assim, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe um índice n_1 tal que $|s_n - s| < \frac{1}{2}$, para todo $n \geqslant n_1$. Considerando algum índice $m > n_1$, como $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$, existe um índice $i_1 \geq m$ de modo que $|x_{i_1} - s_m| < \frac{1}{2}$. Daí então

$$|x_{i_1} - s| \leq |x_{i_1} - s_m| + |s_m - s| < 1$$

Analogamente, para $\epsilon = \frac{1}{4}$ existe um índice n_2 tal que $|s_n - s| < \frac{1}{4}$, para todo $n \geq n_2$. Tomando um índice m tal que $m > n_2$ e $m > i_1$, sendo $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$, existe um índice $i_2 \geq m$ (logo $i_2 > n_2$ e $i_2 > i_1$) de maneira que $|x_{i_2} - s_m| < \frac{1}{4}$. Donde então

$$|x_{i_2} - s| \leq |x_{i_2} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dessa forma obtemos uma seqüência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots)$, que é subseqüência de $(x_1, x_2, \ldots)$ e tal que

$$|x_{i_r} - s| < \frac{1}{2^{r-1}} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

Como $\lim \frac{1}{2^{r-1}} = 0$, então $\lim (x_{i_r} - s) = 0$ e portanto

$$\lim x_{i_r} = s.$$

Proposição 1: Seja M um espaço métrico. Se F e K são subconjuntos de M tais que F é fechado, K é compacto e $F \subset K$, então F também é compacto.

Demonstração: Se $(x_1, x_2, \ldots)$ é uma seqüência de pontos de F, é também uma seqüência de pontos de K e, como K é compacto, existe uma subseqüência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots)$ de (x_i) tal que $\lim x_{i_r} = p \in K$. Para esta subseqüência são duas as possibilidades:

(i) $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ é finito

Neste caso existem subseqüências de (x_{i_r}) que são constantes e, devendo cada uma delas convergir para p, então seus termos são todos iguais a p e portanto $p \in F$.

(ii) A é infinito

Como $p = \lim x_{i_r}$, então para cada $\epsilon > 0$ a bola aberta $B = B(p, \epsilon)$ contém infinitos termos de (x_{i_r}) e portanto é infinita a intersecção $(B - \{p\}) \cap A$. Donde $p \in A'$ e daí $p \in F'$, uma vez que $A \subset F$. Como porém $F' \subset F$ (pois F é fechado), então, $p \in F$. ■

Proposição 2: Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é fechado.

Demonstração: Basta provar que $\overline{K} \subset K$. Se $p \in \overline{K}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, vale a desigualdade

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset$$

Assim, tomando em cada uma dessas intersecções, um e apenas um elemento, obtemos uma seqüência de pontos de K que converge para p (ver proposição 7, Cap. III). Donde todas as subseqüências dessa seqüência convergem para p. Como porém K é compacto uma ao menos delas converge para um ponto de K. Logo $p \in K$. ■

Proposição 3: Sejam M e N espaços métricos e seja $f: M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K)$ também é compacto.

Demonstração: Seja $(y_1, y_2, \ldots)$ uma seqüência de pontos de $f(K)$. Assim sendo existe, para cada índice i, um elemento $x_i \in K$ tal que $f(x_i) = y_i$. Como (x_i) é uma seqüência de pontos de K, que é compacto, existe uma subseqüência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots)$ dessa seqüência tal que $\lim x_{i_r} = p \in K$. Sendo f contínua, então $\lim f(x_{i_r}) = f(p)$ e portanto a subseqüência $(f(x_{i_r}))$ de (y_i) converge para $f(p) \in f(K)$. ■

Proposição 4: Sejam M e N espaços métricos e consideremos sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas equivalentes D, D_1 ou D_2. Se K e L são subconjuntos de M e N, respectivamente, então $K \times L$ é compacto se, e somente se, K e L são compactos.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Sendo $K \times L$ compacto, como as projeções $p_1: M \times N \longrightarrow M$ e $p_2: M \times N \longrightarrow N$ são contínuas, então $p_1(K \times L) = K$ e $p_2(K \times L) = L$ também são compactos.

($\Longleftarrow$) Seja $(z_n) \doteq ((x_n, y_n))$ uma seqüência de pontos de $K \times L$. Então (x_n) é uma seqüência de pontos de K e, como K é compacto, existe uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ de (x_n) tal que $(x_{n_i}) \longrightarrow p \in K$. Considerando a subseqüência (y_{n_i}) da seqüência (y_n), sendo L compacto existe uma subseqüência $(y_{n_{i_k}})$ tal que $\lim y_{n_{i_k}} = q \in L$. Assim $(x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}})$ é obviamente uma subseqüência de (z_n) e

$$\lim (x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}}) = (p, q) \in K \times L. ■$$

Corolário: Se $K_1, K_2, \ldots, K_n$ são respectivamente subconjuntos compactos dos espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ e se em $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ consideramos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), então $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ é compacto se, e somente se, $K_1, K_2, \ldots, K_n$ são compactos.

Definição 2: Um subconjunto A de um espaço métrico M se diz *totalmente limitado* se, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \ldots, x_n \in A$ de maneira que:

$$A \subset B(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon)$$

É claro que um subconjunto totalmente limitado é limitado.

Proposição 5: *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é totalmente limitado.*

Demonstração: Suponhamos K compacto e não totalmente limitado. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$K \not\subset B(x_1, \varepsilon),\ \forall x_1 \in K$$
$$K \not\subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon),\ \forall x_2 \in K - B(x_1, \varepsilon)$$
$$K \not\subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup B(x_3, \varepsilon),\ \forall x_3 \in K - (\cup B(x_i, \varepsilon)) \quad (i = 1, 2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Formemos agora a seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ de maneira que $x_1 \in K$, $x_2 \in K - B(x_1, \varepsilon), \ldots$ o que nos é possibilitado pelas considerações anteriores. Como seus termos estão em K, que é compacto, (x_n) admite uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots) \longrightarrow p \in K$. Como os termos de (x_{n_j}) são distintos entre si, a bola aberta $B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ contém infinitos desses termos. Assim, tomando

$$x_r, x_s \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

de maneira que $x_r \neq x_s$ e $r < s$, temos:

$$d(x_r, x_s) \leqslant d(x_r, p) + d(p, x_s) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isto mostra que $x_s \in B(x_r, \varepsilon)$ o que é absurdo. ∎

Corolário: Todo subconjunto compacto de um espaço métrico M é limitado.

Nota: Não vale a recíproca do corolário acima. De fato, consideremos num conjunto infinito M a métrica zero-um. Obviamente M é limitado de $d(M) = 1$. Mas se considerarmos uma seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ em M tal que $x_i \neq x_j$, sempre que $i \neq j$, nenhuma subseqüência de (x_n) converge pois, como já vimos, as seqüências convergentes neste caso são as estacionárias. Logo M não é compacto embora seja limitado.

§ 2 — COMPACTOS NO $\mathbb{R}^n$

Vimos no parágrafo anterior que todo subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado (proposição 2) e limitado (corolário da proposição 5). Mas, devido à nota acima, num espaço métrico um conjunto pode ser fechado e limitado sem ser compacto. No caso porém dos espaços $\mathbb{R}^n$ compacto é o mesmo que fechado e limitado como veremos.

Proposição 6: Um subconjunto A do espaço $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Vale para todos os espaços métricos.

$(\Longleftarrow)$ Sendo A limitado existe $a > 0$ tal que:

$$A \subset [-a, a] \times \ldots \times [-a, a] \quad \text{(n cópias)}$$

Como cada $[-a, a]$ é compacto em $\mathbb{R}$, então o produto

$$[-a, a] \times \ldots \times [-a, a]$$

é compacto em $\mathbb{R}^n$. Assim A é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ que está contido num compacto deste espaço. Donde, levando em conta a proposição 1, A também é compacto. ∎

§ 3 — CONTINUIDADE E COMPACIDADE

Proposição 7: Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Para toda função contínua $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ existem então $a, b \in A$ de maneira que

$$f(a) = \inf f(A) \qquad \text{e} \qquad f(b) = \sup f(A)$$

Demonstração: Sendo A compacto, então $f(A)$ também o é já que f é contínua. Daí, como $f(A)$ é subconjunto de $\mathbb{R}$, $f(A)$ é fechado e limitado. Deste último fato decorre que existem

$$u = \inf f(A) \qquad \text{e} \qquad v = \sup f(A)$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem $y_1, y_2 \in f(A)$ de maneira que:

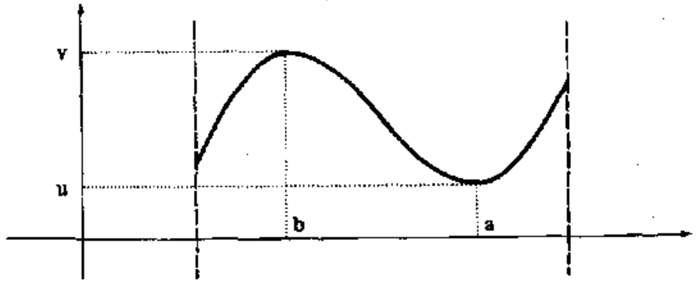
$$u \leqslant y_1 < u + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad v - \varepsilon < y_2 \leqslant v$$

o que acarreta

$$]u - \varepsilon, u + \varepsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$
e
$$]v - \varepsilon, v + \varepsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$

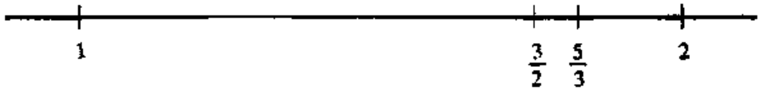
e portanto que $u, v \in \overline{f(A)}$. Como porém $f(A) = \overline{f(A)}$, pois $f(A)$ é fechado, então $u, v \in f(A)$ e portanto existem $a, b \in A$ tais que:

$$f(a) = u = \inf f(A) \qquad \text{e} \qquad f(b) = v = \sup f(A) \ \blacksquare$$



Nota: A proposição acima nos garante que uma função contínua real, definida num compacto, assume os seus valores máximo e mínimo.

Mas não nos garante que necessariamente devamos ter $f(A) = [u, v]$ como poderia sugerir a figura anterior. De fato, o conjunto $A = \left\{2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots\right\}$ é compacto pois é limitado (contido em $[-2, 2]$) e fechado (contém seu único ponto de acumulação, o número 2).



Considerando, no entanto, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$, então $u = f(1) = 2$ e $v = f(2) = 4$ mas, evidentemente,

$$f(A) \neq [2, 4]$$

($f(A)$ nem sequer é um intervalo).

§ 4 — COMPACIDADE E CONTINUIDADE UNIFORME

Proposição 8: Toda aplicação contínua de um espaço métrico compacto num espaço métrico N qualquer é uniformemente contínua.

Demonstração: Se f não fosse uniformemente contínua, para algum $\varepsilon_0 > 0$ e para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$, haveria elementos $x_k, y_k \in M$ de maneira que

$$d(x_k, y_k) < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad d(f(x_k), f(y_k)) \geqslant \varepsilon_0.$$

Da compacidade de M segue que existe uma subseqüência (x_{k_j}) de (x_k) tal que $x_{k_j} \longrightarrow p \in M$. Mostremos que $y_{k_j} \longrightarrow p$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$d(x_{k_j}, p) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ a partir de um índice } k_{j_1}$$

e

$$\frac{1}{k_j} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ a partir de um índice } k_{j_2}$$

Se k_{j_0} é o maior desses dois índices, então, $\forall k_j \geqslant k_{j_0}: d(y_{k_j}, p) \leqslant d(y_{k_j}, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, p) < \frac{1}{k_j} + d(x_{k_j}, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Como f é contínua, então

$$\lim f(x_{k_j}) = f(p) = \lim f(y_{k_j})$$

e daí, para uma infinidade de índices k_j:

$$d(f(x_{k_j}), f(y_{k_j})) \leqslant d(f(x_{k_j}), f(p)) + d(f(p), f(y_{k_j})) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

o que é absurdo. ■

§ 5 — DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS COMPACTOS

Neste parágrafo mostraremos que a distância entre dois subconjuntos compactos de um dado espaço métrico pode ser expressa pela distância entre dois pontos, um de cada desses subconjuntos.

Proposição 9: Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico (M, d). Se $A \subset M$, então existe $p \in K$ tal que $d(p, A) = d(K, A)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon = d(K, A)$. Como

$$d(K, A) = \inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \in A\}$$

então existem, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in K$ e $y_n \in A$ de maneira que $\varepsilon \leqslant d(x_n, y_n) < \varepsilon + \frac{1}{n}$. Consideremos a seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ e seja $B = \{x_n \mid n \geqslant 1\}$. Há duas alternativas apenas:

(i) B é finito

Neste caso existe $p \in K$ tal que $x_n = p$ para infinitos índices e pode-se provar que $d(K, A) = d(p, A)$. De fato, suponhamos $d(p, A) = \varepsilon + \delta$, com $\delta > 0$, e tomemos um número natural $r > 0$ tal que $x_r = p$ e $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$. Daí $\varepsilon + \delta = d(p, A) = d(x_r, A) \leqslant d(x_r, y_r) < \varepsilon + \frac{1}{r} < \varepsilon + \frac{\delta}{2}$ o que é absurdo.

(ii) B é infinito

Da compacidade de K vem que existe uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = p \in K$. Mostraremos que $d(K, A) = d(p, A)$. Suponhamos $d(p, A) = \varepsilon + \delta$, com $\delta > 0$. De $x_{n_k} \longrightarrow p$ decorre que $B\left(p, \frac{\delta}{2}\right)$ contém infinitos termos da seqüência (x_n) e portanto existe $x_r \in B\left(p, \frac{\delta}{2}\right)$ de maneira que $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$. Daí

$$d(p, x_r) + d(x_r, y_r) < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{r} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} = \varepsilon + \delta = d(p, A) \leqslant d(p, y_r)$$

Esta contradição com a desigualdade triangular vem encerrar a demonstração. ■

Corolário I: Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico (M, d) e seja $A \subset M$ um subconjunto fechado tal que $K \cap A \neq \emptyset$. Então $d(K, A) > 0$.

Demonstração: Suponhamos $d(K, A) = 0$. Então existe um ponto $p \in K$ tal que $d(p, A) = 0$, o que significa que $p \in \bar{A}$. Como $p \in K$ e $\bar{A} = A$, então $p \in K \cap A$, o que é absurdo. ■

Corolário II: Se K e L são subconjuntos compactos de um espaço métrico M, então existem $p \in K$ e $q \in L$ tais que $d(K, L) = d(p, q)$.

Demonstração: A proposição 9 nos diz que $d(K, L) = d(p, L)$ para um certo $p \in K$. A mesma proposição garante ainda que existe $q \in L$ tal que

$$d(p, L) = d(\{p\}, L) = d(\{p\}, q) = d(p, q)$$

Donde $d(K, L) = d(p, q)$. ■

§ 6 — ABERTOS E COMPACIDADE

Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M. Um *recobrimento aberto* de A é uma família $\mathscr{F} = (G_i)$ de subconjuntos abertos de M tal que $\cup G_i \supset A$. Caso exista uma subfamília $\mathscr{F}' = (G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_n})$ de $\mathscr{F}$ tal que $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset A$, então dizemos que $\mathscr{F}'$ é um *subrecobrimento finito* de A.

Se para todo recobrimento aberto de A existe um subrecobrimento finito de A dizemos que para este subconjunto vale a *propriedade (ou a condição) de Heine-Borel*. Nosso objetivo neste parágrafo é mostrar que num espaço métrico a condição de Heine-Borel equivale à compacidade.

Observemos ainda que o intervalo $[0, 1]$ é um exemplo de conjunto que satisfaz a condição de Heine-Borel (ver Cap. I – Propriedade I, § 2 – 4).

Dizer que para um espaço métrico (M, d) vale a condição de Heine-Borel significa dizer que para o conjunto M vale tal condição.

Proposição 10: Todo espaço métrico que satisfaz a condição de Heine-Borel é compacto.

Demonstração: Seja M um espaço métrico que satisfaz a condição de Heine-Borel e consideremos uma seqüência (x_n) de pontos de M. Há dois casos a considerar:

(i) $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é finito

Quando isto acontece há pelo menos um elemento $x_r \in A$ de modo que $(x_r, x_r, \ldots)$ é uma subseqüência de (x_n); como esta subseqüência converge, fica provada a proposição neste caso.

(ii) A é infinito

Mostraremos primeiro que neste caso $A' \neq \emptyset$. De fato, se $A' = \emptyset$, devido à fórmula $\bar{A} = A \cup A'$ teríamos que $A = \bar{A}$ o que equivale a A ser fechado.

Considerando então um recobrimento aberto $\mathscr{F} = (G_i)$ de A, então $\mathscr{F}_1 = (G_i \cup A^c)$ é um recobrimento aberto de M (pois A^c é aberto) e, portanto, existem índices $i_1, \ldots, i_n$ de modo que

$$(G_{i_1} \cup A^c) \cup \ldots \cup (G_{i_n} \cup A^c) \supset M = A \cup A^c$$

Donde $G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset A$ e portanto a suposição de que $A' = \emptyset$ nos leva à conclusão de que A também deve satisfazer a condição de Heine-Borel.

Mas como $p \notin A'$, para qualquer $p \in M$, então existe um aberto H_p de modo que $(H_p - \{p\}) \cap A = \emptyset$ ou, o que é equivalente, $H_p \cap A = \emptyset$ ou $H_p \cap A = \{p\}$, para cada um dos elementos de M. Sendo porém $(H_p)_{p \in M}$ um recobrimento aberto de M, e portanto de A, existem então $p_1, p_2, \ldots, p_n \in M$ de modo que

$$A \subset H_{p_1} \cup H_{p_2} \cup \ldots \cup H_{p_n}$$

Mas a inclusão acima é um absurdo já que A é infinito ao passo que cada H_{p_i} contém no máximo um elemento de A.

Assim somos levados à conclusão de que $A' \neq \emptyset$. Tomando então $q \in A'$, como A é infinito, existe uma subseqüência de (x_n) que converge para q (ver Cap. III – nota 2 à definição 6). ■

Para provarmos a recíproca da proposição anterior tomaremos como lema o seguinte resultado.

Lema: Seja M um espaço métrico compacto. Se $\mathscr{F} = (G_i)$ é um recobrimento aberto de M, existe então um número real $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in M$ e para um conveniente G_r de $\mathscr{F}$, vale a inclusão $B(x, \varepsilon) \subset G_r$.

Demonstração: Supondo falsa essa afirmação, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in M$ de modo que $B(x, \varepsilon) \not\subset G_i$, para qualquer índice i. Assim existiria uma seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de M de modo que

$$B(x_1, 1) \not\subset G_i, \ \forall G_i$$

$$B\left(x_2, \frac{1}{2}\right) \not\subset G_i, \ \forall G_i$$

$$B\left(x_3, \frac{1}{3}\right) \not\subset G_i, \ \forall G_i$$

$$\vdots$$

Vejamos as duas possibilidades que podem ocorrer com o conjunto dos termos da seqüência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ obtida acima:

(i) $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é finito

Quando isto ocorre é porque existe $p \in M$ tal que $x_n = p$ para infinitos índices. Como $p \in M$, então $p \in G_r$ para um certo r, e como G_r é aberto existe $\delta > 0$ tal que

$$p \in B(p, \delta) \subset G_r$$

Tomando então $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = p$ e $\frac{1}{n} < \delta$, teremos o seguinte absurdo:

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \subset B(p, \delta) \subset G_r.$$

(ii) A é infinito

Neste caso, se $p \in M$ é um ponto de M para o qual converge uma subseqüência de (x_n), então $p \in A'$.

Analogamente ao caso anterior existe G_r em $\mathscr{F}$ e existe $\delta > 0$ de modo que

$$p \in B(p, \delta) \subset G_r$$

Existindo infinitos pontos de A em $B\left(p, \frac{\delta}{2}\right)$ podemos tomar $x_n \in A$ tal que

$$x_n \in B\left(p, \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$$

e assim teremos

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset B(p, \delta).$$

De fato, se $a \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$, então $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ e daí

$$d(a, p) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, p) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

o que vem garantir que $a \in B(p, \delta)$. Como porém $B(p, \delta) \subset G_r$, obtemos a seguinte contradição:

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset G_r. \blacksquare$$

Nota: Um número $\varepsilon > 0$ conforme a proposição acima é chamado *número de Lebesgue* do recobrimento $\mathscr{F}$

Proposição 11: Todo espaço métrico compacto satisfaz a condição de Heine-Borel.

Demonstração: Seja $\mathscr{F} = (G_i)$ um recobrimento de um espaço métrico compacto M e indiquemos por ε um número de Lebesgue de $\mathscr{F}$. Devido à proposição 5 existem elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ de modo que

$$B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon) \supset M$$

Por outro lado a proposição anterior garante que existem em $\mathscr{F}$ conjuntos $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_n}$ tais que

$$G_{i_1} \supset B(x_1, \varepsilon), \ldots, G_{i_n} \supset B(x_n, \varepsilon)$$

Donde

$$G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset M. \blacksquare$$

EXERCÍCIOS

1. As seguintes afirmações são verdadeiras quando em $\mathbb{R}$ a métrica considerada é a usual. Justifique-as.
   a) $\mathbb{Q}$ não é compacto
   b) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$ é compacto
   c) $B = \{2\} \cup [3, 4]$ é compacto
   d) $\mathbb{Z}$ não é compcato
   e) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ não é compacto
   f) $\mathbb{R}$ não é compacto.

2. Seja M um espaço métrico cuja métrica é a zero-um. Mostre que M é compacto se, e somente se, M é finito.

3. Num espaço métrico M seja (x_n) uma seqüência que converge para $p \in M$. Mostre que $A = \{p\} \cup \{x_1, x_2, \ldots\}$ é compacto.

4. Seja E um espaço vetorial normado. Se $A \subset E$ é um subconjunto compacto e se $p \in E$, mostre que

$$A_p = \{x + p \mid x \in A\}$$

   também é compacto.

5. Sejam M e N espaços métricos e $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação bijetora e aberta. Mostre que:
   a) Se (y_n) é uma seqüência convergente em N, então (x_n), onde $x_n = f^{-1}(y_n)$, converge em M.
   b) Se B é compacto em N, então $A = f^{-1}(B)$ é compacto em M.

6. Seja $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua. Se M é compacto, prove que $f(M)$ é fechado.

7. Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico tais que A é compacto e B é fechado. Mostre que $A \cap B$ é compacto.

8. As seguintes afirmações a respeito do $\mathbb{R}^n$ são verdadeiras. Justifique-as:

a) $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$ é compacto.

b) $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ é compacto.

c) Uma bola aberta $B(p, \varepsilon)$, $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, não é um conjunto compacto.

9. Se A e B são subconjuntos compactos de um espaço M, mostre que $A \cap B$ e $A \cup B$ também são compactos.

10. Mostre que não existe nenhuma aplicação sobrejetora e contínua de $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ em $\mathbb{R}$.

11. Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Mostre que $\overline{A}$ também é compacto.
Sugestão: Para toda seqüência (x_n) em $\overline{A}$ existe uma seqüência (y_n) em A de modo que $d(x_n, y_n) < \frac{\lambda}{n}$, para qualquer $\lambda > 0$ tomado "a priori". Se (y_{n_i}) converge para um ponto de A, mostre que (x_{n_i}) converge em $\overline{A}$.

12. Se A é um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico M, mostre que $\overline{A}$ também é totalmente limitado.

13. Exiba um recobrimento aberto de $A =]0, +\infty[$ que não admite nenhum subrecobrimento finito. Conclusão?

14. Dê um recobrimento aberto de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ que não admite nenhum subrecobrimento finito. Conclusão?

15. Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Se d_1 é uma métrica sobre M tal que $d_1(x, y) \leqslant k\,d(x, y)$, $\forall\, x, y \in M$, onde $k > 0$ é uma constante dada, mostre que (M, d_1) também é compacto.
Sugestão: Mostre que todo aberto de (M, d_1) é um aberto de (M, d).

16. Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$ é compacto, mostre que todo subconjunto infinito $B \subset A$ tem um ponto de acumulação em A.
Sugestão: Suponha $B \subset A$ infinito, de maneira que $B' \cap A = \emptyset$. Daí, $\forall\, x \in A$, existe $B_x = B(x, \varepsilon_x)$ tal que $B_x \cap B = \emptyset$ ou $B_x \cap B = \{x\}$. Use o fato de que $(B_x)_{x \in A}$ é um recobrimento aberto de A que é compacto.

17. Prove que são equivalentes as seguintes afirmações para um espaço métrico M: (a) M satisfaz a condição de Heine-Borel ($\Longleftrightarrow$ M é compacto); (b) para toda família (F_i) de subconjuntos fechados de M tais que $\cap F_i = \emptyset$, existe uma subfamília finita $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})$ para a qual $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} = \emptyset$.
Nota: A propriedade (b) acima, que também caracteriza a compacidade nos espaços métricos, é conhecida como *propriedade da intersecção finita*.

18. Seja M um espaço métrico. Se $K \subset M$ $(K \neq \emptyset)$ é compacto, mostre que existe uma função contínua $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $K = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$.
Sugestão: Considere a função $x \longrightarrow d(x, K)$.

19. Prove que se $d(A, B) = 0$ para dois subconjuntos A e B de um espaço métrico M e se $f: M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua, então $d(f(A), f(B)) = 0$.

20. Seja M um espaço métrico compacto. Mostre que existe uma seqüência $y_1, y_2, \ldots$ de pontos de M tal que o conjunto $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ é denso em M.
Sugestão: Sendo compacto, M é totalmente limitado. Assim existem $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, \ldots$ em M de maneira que:

$$B(x_{11}, 1) \cup \ldots \cup B(x_{1n_1}, 1) \supset M$$

$$B\left(x_{21}, \frac{1}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(x_{2n_2}, \frac{1}{2}\right) \supset M$$

$$\ldots$$

Considere a seqüência dos x_{ij} assim obtidos.

CONJUNTOS CONEXOS

§ 1 — CONEXIDADE

Definição 1: Um espaço métrico (M, d) se diz *desconexo* quando existem dois conjuntos abertos G e H, ambos não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Neste caso dizemos que o par de abertos G e H forma uma desconexão de M e indicamos tal fato por $M = G|H$. Um espaço *conexo* é um espaço que não é desconexo. Portanto, dizer que M é conexo significa dizer que não existe nenhuma desconexão de M. Um subconjunto $A \subset M$ se diz *conexo* quando o subespaço (A, d), onde d é a métrica induzida sobre A pela métrica de M, é conexo.

Nota: Na definição acima de espaço desconexo é claro que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$ implica $G = H^c$ e $H = G^c$ e portanto G e H são também conjuntos fechados.

Exemplos:

1. Seja M um conjunto com mais do que um elemento e consideremos sobre M a métrica "zero-um". Mostremos então que (M, d) é desconexo. De fato, para todo $a \in M$ são abertos e não vazios os subconjuntos $G = \{a\}$ e $H = G^c = M - \{a\}$ e obviamente $M = G|H$.

2. O subconjunto $\{0, 1\}$ de $\mathbb{R}$ é desconexo. Tomemos $U = \{0\}$ e $V = \{1\}$. É claro que U e V são disjuntos, são ambos não vazios e sua união é o conjunto

dado. Como

$$U = \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cap \{0, 1\} \qquad e \qquad V = \left]\frac{1}{2}, 2\right[\cap \{0, 1\}$$

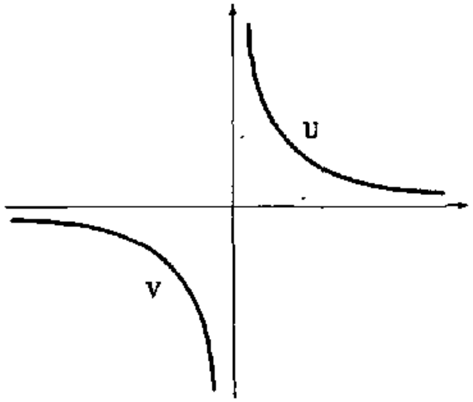
então U e V são ambos abertos em $\{0, 1\}$, o que completa a justificativa.

3. Todo subconjunto unitário de um espaço métrico M é conexo.

4. No $\mathbb{R}^2$ o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$ é desconexo. De fato, sendo $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$ e $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y < 0\}$, então os subconjuntos

$$U = \mathbb{R}^2 \cap G \qquad e \qquad V = \mathbb{R}^2 \cap H$$

formam uma desconexão de A.



Mostremos agora que o espaço $\{0, 1\}$ do exemplo 2 acima não só é desconexo, como vimos, mas também representa, de um certo modo, todos os espaços desconexos.

Proposição 1: Um espaço M é desconexo se, e somente se, existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0, 1\}$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Por hipótese existem abertos G e H do espaço de maneira que $M = G|H$. Consideremos $f: M \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por $f(x) = 0$, $\forall x \in G$, e $f(x) = 1$ sempre que $x \in H$. É claro que f é sobrejetora uma vez que $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$. E f é contínua porque, considerando os abertos de $\{0, 1\}$ que são $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$ (por quê?), todos têm como imagem inversa por f um aberto de M posto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = G$, $f^{-1}(\{1\}) = H$ e $f^{-1}(\{0, 1\}) = M$.

($\Longleftarrow$) Por hipótese existe uma sobrejeção contínua $f: M \longrightarrow \{0, 1\}$. Assim, são abertos não vazios $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$. Como, ainda, $G \cap H = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $G \cup H = f^{-1}(\{0, 1\}) = M$, então $M = G|H$. ■

Corolário: Um espaço M é conexo se, e somente se, as únicas funções contínuas de M em $\{0, 1\}$ são as constantes.

Proposição 2: Seja $f: M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo, então $f(M)$ é um subconjunto conexo de N.

Demonstração: Suponhamos $f(M)$ desconexo. Existe então $g: f(M) \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Sendo então

$$f_1: M \longrightarrow f(M)$$

definida por $f_1(x) = f(x)$, $\forall x \in M$, f_1 é obviamente sobrejetora e é contínua pelo fato de que f é contínua. Portanto a função $g \circ f_1: M \longrightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é absurdo pois M é conexo. ■

Proposição 3: Se A e B são subconjuntos conexos de um espaço M e $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cup B$ também é conexo.

Demonstração: Se $A \cup B$ fosse desconexo existiria uma função $f: A \cup B \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Seja $p \in A \cap B$ e vamos supor $f(p) = 0$. Então existe $q \in A \cup B$ de maneira que $f(q) = 1$. Supondo por exemplo que $q \in A$, então a função $f|A: A \longrightarrow \{0, 1\}$ é contínua (restrição de uma função contínua) e sobrejetora ($(f|A)(p) = 0$ e $(f|A)(q) = 1$). Mas isto é absurdo, visto que A é conexo. ■

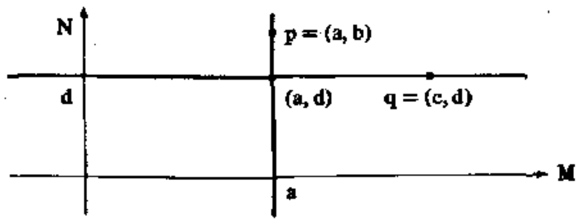
Proposição 4: Seja M um espaço métrico tal que, para quaisquer $p, q \in M$, existe um subconjunto conexo $A \subset M$, de modo que $p, q \in A$. Então M é conexo.

Demonstração: Suponhamos que existisse $f: M \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Considerando então $p, q \in M$ de modo que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$, seja $A \subset M$ um subconjunto conexo tal que $p, q \in A \subset M$ (existe por hipótese). Logo a função $f|A: A \longrightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é contrário à hipótese. ■

Proposição 5: Dados dois espaços métricos M e N, então $M \times N$ é conexo se, e somente se, M e N são conexos.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Como as projeções p_1 e p_2 são contínuas e $p_1(M \times N) = M$ e $p_2(M \times N) = N$, então o fato de $M \times N$ ser conexo acarreta a conexidade de M e N.

($\Longleftarrow$) Sejam $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ pontos arbitrários do espaço $M \times N$. Como $\{a\} \times N$ é conexo pois homeomorfo a N (a aplicação definida por $y \longrightarrow$



$\longrightarrow (a, y)$ é um homeomorfismo de N no subespaço $\{a\} \times N$), $M \times \{d\}$ também conexo e vale a relação $(\{a\} \times N) \cap (M \times \{d\}) \neq \emptyset$ então $(\{a\} \times N) \cup (M \times \{d\})$ é conexo. Assim, para quaisquer p, $q \in M \times N$, existe um subconjunto conexo de $M \times N$ que contém esses pontos. A proposição anterior nos garante então que $M \times N$ é conexo. ■

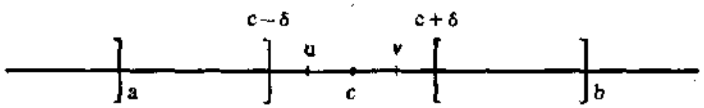
Corolário: Um produto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ de espaços métricos é conexo se, e somente se, cada M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é conexo.

§ 2 — CONEXOS EM $\mathbb{R}$ — CONEXIDADE DO $\mathbb{R}^n$

Veremos a seguir que no espaço métrico $\mathbb{R}$ conexo é o mesmo que intervalo ou unitário.

Proposição 6: Se a métrica considerada sobre $\mathbb{R}$ é a usual, então são conexos todos os intervalos do tipo $[a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Demonstração: Faremos a demonstração para um intervalo $]a, b] = J$. Se J fosse desconexo existiria $f : J \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Podemos supor $f(b) = 1$ pois, caso contrário, tomando $g(x) = 1 - f(x)$ (também contínua e sobrejetora) teríamos $g(b) = 1$. Seja $c = \sup \{x \in J \mid f(x) = 0\}$. Como f é contínua em c, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ de modo que $|x - c| < \delta$ $(a < x \leqslant b)$ acarreta $|f(x) - f(c)| < 1$. Disto então resulta que $f(x) = f(c)$, para todo $x \in J$ tal que $c - \delta < x < c + \delta$.



Ora, sendo $c = \sup \{x \in J \mid f(x) = 0\}$, existe $u \in J$ de modo que $c - \delta < u \leqslant c$ e $f(u) = 0$, do que resulta então que $f(c) = 0$. Por outro lado, tomando $v \in J$ de maneira que se tenha $c < v < c + \delta$, então $f(v) = 1$ e daí $f(c) = 1$ o que é absurdo. ■

Corolário 1: São conexos em $\mathbb{R}$ todos os intervalos do tipo $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$.

Demonstração: De fato, tomando $c \in]a, b[$, então:

$$]a, b[=]a, c] \cup [c, b[.$$

Como $]a, c]$ e $[c, b[$ são conexos e têm um ponto em comum, então sua união também é um subconjunto conexo. Fica como exercício a demonstração dos demais casos. ■

Corolário 2: Os espaços $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ são conexos.

Demonstração: Ora, como $\mathbb{R}$ é homeomorfo a qualquer bola aberta $]-a, a[$ e como estas são conexas, então $\mathbb{R}$ é conexo. O corolário da proposição 5 nos garante então a conexidade de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. ■

Proposição 7: Para que um subconjunto não vazio e não unitário $J \subset R$ seja conexo é necessário e suficiente que J seja um intervalo.

Demonstração: A proposição acima e seus corolários garantem que todos os intervalos em $\mathbb{R}$ (inclusive $\mathbb{R}$) são conexos. Reciprocamente seja $J \subset \mathbb{R}$, $J \neq \emptyset$, um subconjunto conexo e não unitário e admitamos que J não seja um intervalo. Então existem a, x, $y \in \mathbb{R}$ de modo que $x < a < y$, x, $y \in J$ e, ainda, $a \notin J$. Considerando então $G = J \cap]-\infty, a[$ e, simultaneamente, $H = J \cap]a, +\infty[$ temos:

- G e H são abertos em J
- $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$, pois $x \in G$ e $y \in H$
- $G \cap H = J \cap]-\infty, a[\cap]a, +\infty[= \emptyset$
- $G \cup H = J \cap (]-\infty, a[\cup]a, +\infty[) = J$

Logo J é desconexo o que contraria nossa hipótese. Portanto J é um intervalo de $\mathbb{R}$. ■

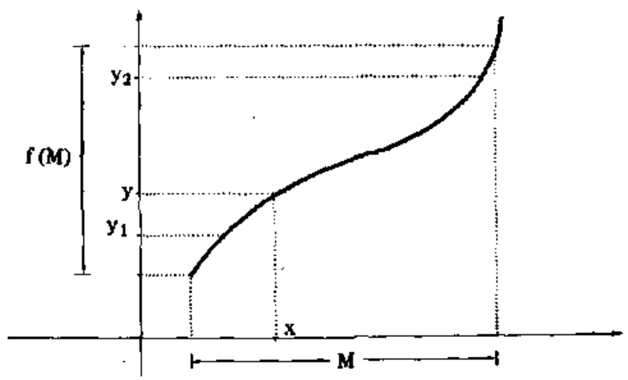
§ 3 — APLICAÇÕES

1. Teorema do Valor Intermediário

Seja M um espaço conexo e seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $y_1, y_2 \in f(M)$ e $y_1 < y < y_2$, então existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$.

Justificação: Como f é contínua, então $f(M) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Daí $f(M)$ é um intervalo e portanto $y \in f(M)$. Donde existe $x \in M$ de maneira que $y = f(x)$.

Nota: O resultado acima garante que se uma função real, definida e contínua num conexo, toma dois valores em $\mathbb{R}$, então essa função assume todos os valores compreendidos entre esses dois. A figura abaixo ilustra esse fato para o caso de uma função real definida num intervalo de $\mathbb{R}$.



2. Teorema do Ponto fixo de Brower

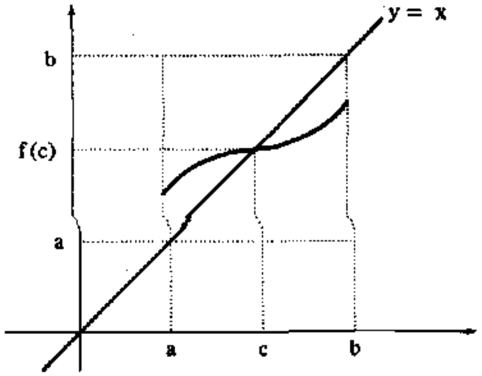
Caso Particular: Dada uma função contínua

$$f:[a, b] \longrightarrow [a, b]$$

existe $c \in [a, b]$ de maneira que $f(c) = c$.

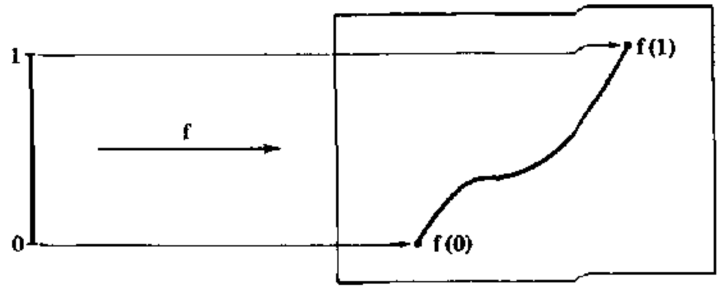
Justificação: Vamos supor $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$ e considerar $g:[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$. É claro que g é contínua (diferença de duas funções contínuas) e ademais $g(a) = a - f(a) < 0$ e $g(b) = b - f(b) > 0$. Devido ao teorema do valor intermediário existe $c \in [a, b]$ de maneira que $g(c) = c - f(c) = 0$ uma vez que $g(a) < 0 < g(b)$. Donde $f(c) = 0$ como queríamos provar.

Nota: Geometricamente o significado do teorema do ponto fixo é que a reta $y = x$ intercepta o gráfico de $y = f(x)$ em pelo menos um ponto.



§ 4 — CONEXIDADE POR CAMINHOS

Um *caminho* num espaço métrico M é uma aplicação contínua $f:I \longrightarrow M$, onde $I = [0, 1]$. Os pontos $f(0)$ e $f(1)$ são chamados *ponto inicial* e *ponto final*, respectivamente, do caminho.



Num dado espaço M a relação $x \sim y$, sobre os pontos de M, definida por $x \sim y \iff \exists$ um caminho $f:I \longrightarrow M$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$ é uma relação de equivalência. De fato:

- $x \sim x$, para todo $x \in M$, pois $f:I \longrightarrow M$ dada por $f(t) = x$, $\forall t \in I$, é contínua.
- Se $x \sim y$, então existe um caminho f de ponto inicial x e ponto final y. Considerando $g:I \longrightarrow I$ dada por $g(t) = 1 - t$, então $f \circ g:I \longrightarrow M$ é contínua e $(f \circ g)(0) = f(1) = y$ e $(f \circ g)(1) = f(0) = x$.
- Se $x \sim y$ e $y \sim z$ existem então caminhos f e g em M de maneira que $f(0) = x$, $f(1) = y$, $g(0) = y$ e $g(1) = z$. Consideremos $h:[0, 1] \longrightarrow M$ definida por:

$$h(t) = f(2t) \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$$

e

$$h(t) = g(2t - 1) \text{ para } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1.$$

Como $f(2t)$ coincide com $g(2t - 1)$ no ponto $t = \frac{1}{2}$, então h está bem definida. Além disso h é contínua (ver corolário da proposição 4 — Cap. IV). Como $h(0) = f(0) = x$ e $h(1) = g(1) = z$, então h é um caminho de ponto inicial x e ponto final z.

As classes de equivalência segundo a relação $\sim$ são chamadas *componentes-caminho.*

Definição 2: Um espaço métrico M se diz *conexo por caminhos* se, para para quaisquer $a, b \in M$, existir um caminho f em M de maneira que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Em outras palavras, para quaisquer $a, b \in M$, vale a relação $a \sim b$. Ou ainda, equivalentemente, existe uma, e uma só, classe de equivalência segundo a relação $\sim$ acima definida.

Proposição 8: Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Demonstração: Seja M conexo por caminhos e admitamos que M é desconexo. Então existe $g:M \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Sejam $a, b \in M$ pontos tais que $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$. Por hipótese existe um caminho $f:I \longrightarrow M$ de modo que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Assim a aplicação

$$g \circ f:I \longrightarrow \{0, 1\}$$

é contínua e sobrejetora uma vez que $(g \circ f)(0) = g(a) = 0$ e $(g \circ f)(1) = g(b) = 1$. Absurdo pois I é conexo. ∎

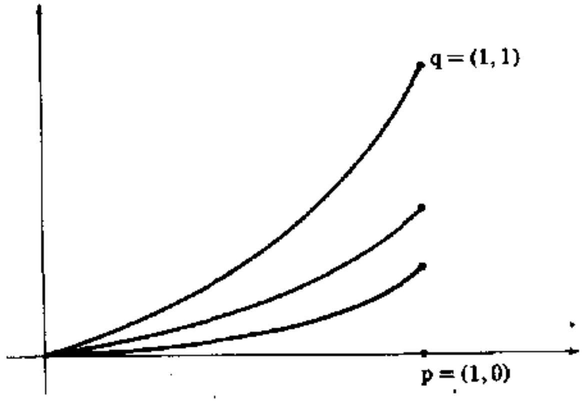
Nota: Não vale a recíproca da proposição acima. Um exemplo intuitivo desse fato é o seguinte (embora sua demonstração — que não faremos — nem por isso seja simples):

No $\mathbb{R}^2$ o conjunto A formado pelo ponto $p = (1, 0)$ e por todos os pontos da família:

$$A_n = \left\{\left(x, \frac{x^n}{n-1}\right) \middle| 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}$$

$$n = 2, 3, \ldots$$

é conexo mas não é conexo por caminhos: não existe nenhum caminho de ponto inicial p e final $q = (1, 1)$.



Exemplos:

1. Seja E um espaço vetorial normado. Dados $u, v \in E$ o *segmento de reta* de extremos u e v, que se indica por $[u, v]$, é o seguinte subconjunto de E:

$$[u, v] = \{(1-t)u + tv \mid t \in I\}$$

onde $I = [0, 1]$. Um subconjunto $L \subset E$ se diz *convexo* quando, para quaisquer $u, v \in L$, vale a inclusão $[u, v] \subset L$.

Todo subconjunto convexo é conexo por caminhos (logo é conexo) porque, dados quaisquer $u, v \in L$, a função $f: I \longrightarrow L$ dada por $f(t) = (1-t)u + tv$ é uma função contínua tal que $f(0) = u$ e $f(1) = v$.

São exemplos de conjuntos convexos:

- O próprio espaço normado E.
- Uma bola aberta $B(p, \varepsilon) \subset E$.

De fato, dados $u, v \in B(p, \varepsilon)$

$$\|(1-t)u + tv - p\| = \|(1-t)(u-p) + t(v-p)\| \leqslant$$

$$\leqslant |1-t| \|u-p\| + |t| \|v-p\| < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon$$

o que garante a relação $[u, v] \subset B(p, \varepsilon)$.

- Toda bola fechada (exercício).

2. A esfera $S^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1\}$ é conexa por caminhos.

Para $u, v \in S^n$ há dois casos a considerar:

(i) $u \neq -v$. Quando isto ocorre vale a desigualdade $(1-t)u + tv \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $|1-t| \|u\| = |t| \|v\|$ e como $\|u\| = \|v\| = 1$, então $1 - t = t$ e daí $t = \frac{1}{2}$ e disto resultaria $u = -v$, contra a hipótese. Considerando então $f: I \longrightarrow S^n$ dada por:

$$f(t) = \frac{(1-t)u + tv}{\|(1-t)u + tv\|}$$

fica definido um caminho tal que $f(0) = u$ e $f(1) = v$.

(ii) $u = -v$. Neste caso toma-se um ponto $w \in S^n - \{u, v\}$ do que obviamente resulta $w \neq -u$ e $w \neq -v$. Devido a (i) temos então $w \sim u$ e $w \sim v$ e, portanto, $u \sim v$. Logo existe um caminho de ponto inicial u e ponto final v.

§ 5 — COMPONENTES CONEXAS

Nosso objetivo agora é mostrar a existência de importante partição em todo espaço métrico M: ou este é conexo ou é formado de partes conexas, disjuntas entre si.

Inicialmente observemos que se (A_i) é uma família de subconjuntos conexos de um espaço M e se $\cap A_i \neq \emptyset$, então $A = \cup A_i$ é também conexo. De fato, se existisse uma sobrejeção contínua $f: A \longrightarrow \{0, 1\}$, escolhendo $a, b \in A$ de maneira que $f(a) = 1$ e $f(b) = 0$ e supondo, por exemplo, que $a \in A_r$ e $b \in A_s$, então a restrição de f a $A_r \cup A_s$ seria contínua e sobrejetora o que não é possível pois $A_r \cup A_s$ é conexo em virtude da proposição 3.

Ora, dado $p \in M$, a coleção dos subconjuntos conexos de M que contêm p não é vazia pois $\{p\}$ é conexo. Seja então $C(p)$ a reunião dos conjuntos dessa coleção. Conforme já observamos $C(p)$ é conexo (reunião de uma família de conexos que contêm o ponto p) e é, obviamente, o maior subconjunto conexo de M que contém p.

Por outro lado, se $C(p) \neq C(q)$, então $C(p) \cap C(q) = \emptyset$. De fato, se existisse $x \in C(p) \cap C(q)$, então a união $C(p) \cup C(q)$ também seria conexa e, dada a definição de $C(p)$, deveríamos ter $C(p) \cup C(q) = C(p)$, ou seja, $C(q) \subset C(p)$. Analogamente se chegaria a que $C(p) \subset C(q)$ e portanto valeria a igualdade $C(p) = C(q)$.

Portanto, efetivamente a coleção dos subconjuntos $C(p)$, com p percorrendo M, forma uma partição de M. Cada $C(p)$ é chamada *componente conexa* de M.

Mostraremos agora que cada componente conexa é um subconjunto fechado e, para tanto, precisaremos do seguinte lema:

Lema: Se A é um subconjunto conexo de um espaço métrico M, então $\overline{A}$ também é conexo.

Demonstração: Suponhamos $f: \overline{A} \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora e tomemos $a, b \in \overline{A}$ de modo que $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$. O fato de $a, b \in \overline{A}$ implica que existem seqüências (a_n) e (b_n) de pontos de A tais que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Daí $\lim f(a_n) = f(a) = 0$ e $\lim f(b_n) = f(b) = 1$. Como porém $(f(a_n))$ e $(f(b_n))$ são seqüências em $\{0, 1\}$ cuja métrica é a "zero-um" (induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}$), então estas duas seqüências são estacionárias. Assim devemos ter $(f(a_n)) = (\ldots, 0, 0, 0, \ldots)$ e $(f(b_n)) = (\ldots, 1, 1, 1, \ldots)$ e portanto existem pontos de A cuja imagem, através de $f|A$ é 0, como existem outros de imagem 1. Mas como A é conexo isto é absurdo. ∎

Assim, como cada C (p) é conexo, então cada $\overline{C(p)}$ é conexo. Levando em conta porém que $C(p) \subset \overline{C(p)}$ e C (p) é o maior conexo que contém p, temos então $C(p) = \overline{C(p)}$ o que mostra que C (p) é fechado. Assim, reunindo os resultados anteriores, provamos a

Proposição 9: As componentes conexas de um espaço métrico M são subconjuntos não vazios, conexos, maximais quanto à conexidade*, fechados, e a coleção dessas componentes constituem uma partição do espaço M.

Exemplos:

1. Se um espaço é conexo, obviamente só há uma componente conexa que é o próprio espaço.

2. As componentes conexas do espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais são subconjuntos unitários de $\mathbb{Q}$. De fato, se $A \subset \mathbb{Q}$ é um subconjunto não vazio e não unitário, tomando-se $p, q \in A$ de modo que $p < q$, seja α um número irracional entre p e q: $p < \alpha < q$. Sem maiores dificuldades pode-se mostrar então que $G =]-\infty, \alpha[\cap A$ e $H =]\alpha, +\infty[\cap A$ formam uma desconexão de A. Como, por outro lado, todo subconjunto unitário de um espaço M é conexo, então a coleção dos subconjuntos unitários de $\mathbb{Q}$ é a coleção das componentes conexas deste espaço.

EXERCÍCIOS

1. Sobre $E = [0, 1] \cup [2, 3]$ considere a métrica usual de $\mathbb{R}$ induzida. Mostre que E é desconexo.

* Isto significa que uma componente conexa não está contida, propriamente, em nenhum dos subconjuntos conexos do espaço considerado.

2. Sobre $\mathbb{R}$ considere a métrica usual. Mostre que $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ é um conjunto desconexo.

3. Seja $f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$ uma função contínua e estritamente crescente tal que $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Mostre que f é um homeomorfismo.

4. Mostre que uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ é contínua se, e somente se, f é constante.

5. Mostre que um espaço métrico M é conexo se, e somente se, todo subconjunto não vazio $A \subsetneq M$ tem $Fr(A) \neq \emptyset$.

6. Mostre que o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo. *Sugestão:* Mostre que $f: C \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = ((x, y), z)$ é um homeomorfismo e leve em conta que S^1 e $\mathbb{R}$ são conexos.

7. Mostre que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é conexo. *Sugestão:* $f:]0, +\infty[\times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ definida por $f(t, x) = tx$ é um homeomorfismo cujo inverso é dado por $f^{-1}(y) = \left(\|y\|, \frac{y}{\|y\|}\right)$.

8. Em $\mathbb{R}^2$, sendo $p = (0, 1)$, mostre que $S^1 - \{p\}$ é conexo. *Sugestão:* Projeção estereográfica.

9. Se u e v são pontos distintos de S^1, mostre que $S^1 - \{u, v\}$ é desconexo.

10. Mostre que S^1 não é homeomorfo a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$. *Sugestão:* Suponha $f: S^1 \longrightarrow A \subset \mathbb{R}$ um homeomorfismo e conclua que A é um intervalo fechado. Se y é um ponto interior ao conjunto A e $f(x) = y$, considere $f: S^1 - \{x\} \longrightarrow A - \{y\}$.

11. Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico M. Se A é conexo, B é aberto e fechado e $A \cap B \neq \emptyset$, prove que $A \subset B$. *Sugestão:* $A \not\subset B \Longrightarrow A = A \cap B \mid A \cap B^c$.

12. Seja M um espaço métrico. Se um subconjunto conexo X intercepta $Y \subset M$ e também seu complementar Y^c, mostre que X intercepta Fr (Y). (Este resultado é, às vezes, conhecido como *teorema da alfândega*.)

Sugestão: Suponha que X não intercepte $Fr(Y) = \overline{Y} - \overset{\circ}{Y}$. Mostre a seguir que $X \cap Y = X \cap \overset{\circ}{Y}$ e $X \cap Y^c = X \cap \overset{\circ}{Y^c}$.

13. Sejam A e B partes conexas de um espaço métrico M tais que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Mostre que $A \cup B$ é conexo.

14. Se A e B são duas partes não vazias de um espaço métrico M tais que $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$, mostre que $A \cup B$ é desconexo.

15. Seja M um espaço métrico tal que para quaisquer subconjuntos não vazios $A, B \subset M$, vale a relação:

$$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \neq \emptyset.$$

Mostre que M é conexo.

16. Seja A um subconjunto conexo de um espaço métrico M. Se X é um subconjunto de M tal que $A \subset X \subset \bar{A}$, mostre que X também é conexo.

17. Seja M um espaço conexo. Se A e B são subconjuntos conexos de M tais que $\mathrm{Fr}(A) \subset B$, prove que $A \cup B$ é conexo se $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

18. Seja $A \neq \emptyset$ uma parte do espaço métrico. Se o subespaço A é conexo por caminhos dizemos que A é um *subconjunto conexo por caminhos*.
Se A e B são subconjuntos conexos por caminhos de um espaço M tais que $A \cap B \neq \emptyset$, mostre que $A \cup B$ é conexo por caminhos.

19. Mostre que um espaço cuja métrica é a zero-um é conexo por caminhos se, e somente se, é formado de um ponto apenas.

20. Seja $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se M é conexo por caminhos, prove que N também é conexo por caminhos.

21. Prove que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é conexo por caminhos.

22. Determine as componentes conexas do espaço $M = \{0\} \cup [1, 2]$ cuja métrica é a induzida pela usual de $\mathbb{R}$.

23. Considerando sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ a métrica induzida pela usual, ache as suas componentes conexas.

24. Se um subconjunto não vazio de M é conexo, aberto e fechado, simultaneamente, prove que esse subconjunto é uma componente.

25. Se o número de componentes de um espaço métrico é finito, mostre que cada componente é um conjunto aberto e fechado simultaneamente.

CAPÍTULO VII

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

§ 1 — SEQÜÊNCIAS DE CAUCHY

Vejamos uma propriedade importante das seqüências convergentes. Se (x_n) é uma seqüência convergente de um espaço métrico M e se $\lim x_n = p$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice r tal que:

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como porém

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, p) + d(p, x_n)$$

então

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Assim obtivemos uma condição sobre os termos da seqüência na qual não intervém o limite p dessa seqüência. Intuitivamente essa condição significa que as distâncias entre os termos da seqüência se tornam arbitrariamente pequenos, para índices convenientemente grandes.

Definição 1: Seja (M, d) um espaço métrico. Uma seqüência (x_n) de pontos de M é chamada *seqüência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice r tal que:

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Nossas observações iniciais nos permitem enunciar a seguinte proposição:

Proposição 1: Toda seqüência convergente de um espaço métrico é uma seqüência de Cauchy.

Nota: A recíproca da proposição 1 não é válida. Ou seja, uma seqüência de Cauchy de um espaço M pode não convergir em M, conforme exemplo a seguir.

Seja (x_n) a seqüência de pontos de $\mathbb{Q}$ definida por recorrência do seguinte modo:

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \ \forall\, n \geqslant 1.$$

Como $x_n - \dfrac{2}{x_n} \neq 0$, uma vez que cada x_n é racional, e como

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 + 2$$

então $x_n^2 > 2$, para todo $n \geqslant 1$. Daí

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) < \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right) = x_n$$

para qualquer $n \geqslant 1$. Então

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots > 1$$

e, devido à proposição 12, Cap. 2, podemos concluir que a seqüência (x_n) converge para um ponto real $p > 0$ e que, portanto, (x_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Como $(x_2, x_3, \ldots)$ também converge para p, a fórmula (*), "passada ao limite", nos dá a igualdade

$$p = \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{p}\right)$$

do que decorre $p^2 = 2$ e portanto $p \notin \mathbb{Q}$, ou seja, (x_n) não converge em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço vetorial normado E. Então existe uma bola aberta de centro no vetor nulo que contém todos os termos da seqüência.

Demonstração: Tomando $\varepsilon = 1$ existe um índice r tal que:

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| < 1$$

Em particular $\|x_m - x_r\| < 1$, para todo $m \geqslant r$. Mas

$$\|x_m\| = \|x_m - x_r + x_r\| \leqslant \|x_m - x_r\| + \|x_r\|$$

e portanto, para todo $m \geqslant r$

$$\|x_m\| < 1 + \|x_r\|$$

Seja $\lambda > \text{máx}\,\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{r-1}\|, 1 + \|x_r\|\}$. Então, para todo índice n

$$d(x_n, 0) = \|x_n\| < \lambda$$

o que prova que $x_n \in B(0, \lambda)$, $\forall\, n \geqslant 1$. ■

Nota: Obviamente não vale a recíproca dessa proposição. A seqüência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ de pontos de $\mathbb{R}$ não é seqüência de Cauchy porque, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, para qualquer índice r, sempre existem índices $m, n \geqslant r$ tais que $d(x_m, x_n) = 1 > \varepsilon$. No entanto todos os termos dessa seqüência estão contidos numa bola de centro na origem: por exemplo o intervalo $]-3, 3[$.

Proposição 3: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço métrico M. Se existe uma subseqüência de (x_n) que converge para $p \in M$, então $\lim x_n = p$.

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ uma subseqüência conforme o enunciado. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice n_k tal que:

$$n_i \geqslant n_k \Longrightarrow d(x_{n_i}, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por outro lado, sendo (x_n) seqüência de Cauchy, existe um índice s tal que:

$$m, n \geqslant s \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sendo $t = \text{máx}\,\{n_k, s\}$, considerando um índice $n_j > t$ (sempre existe), temos então que

$$n \geqslant t \Longrightarrow d(x_n, p) \leqslant d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \varepsilon$$

o que garante a convergência de (x_n) para o ponto p. ■

Corolário: Se uma seqüência de pontos de um espaço métrico contém duas subseqüências que convergem para pontos diferentes desse espaço, então a seqüência não é de Cauchy.

Proposição 4: A imagem de uma seqüência de Cauchy por uma aplicação uniformemente contínua é também uma seqüência de Cauchy.

Demonstração: Suponhamos $f: M \longrightarrow N$ uniformemente contínua e seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em M. Dado $\varepsilon > 0$, existe então $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Por outro lado, relativamente ao número $\delta > 0$, existe um índice r tal que:

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \delta.$$

Conseqüentemente

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow d(f(x_m), (x_n)) < \varepsilon$$

e $(f(x_n))$ é uma seqüência de Cauchy em N. ■

Corolário: Se d e d' são métricas uniformemente equivalentes sobre **M**, então as seqüências de Cauchy de (M, d) e de (M, d') são as mesmas.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em (M, d). Como $i:(M, d) \longrightarrow (M, d')$, onde i indica a aplicação idêntica de M, é uniformemente contínua, então $(i(x_n)) = (x_n)$ é uma seqüência de Cauchy em (M, d'). Analogamente se mostra que toda seqüência de Cauchy em (M, d') também é seqüência de Cauchy em (M, d). ∎

Nota: A recíproca da proposição 4 não é válida conforme mostraremos a seguir. A função $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua como já vimos. Mas transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy. De fato, se (x_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$, então existe $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo índice n (proposição 2). Mas a restrição de f a $]-k, k[$ é lipschitziana (Cap. IV – § 1 – 1) e portanto é uniformemente contínua nesse intervalo. Donde $(f(x_n))$ é seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Proposição 5: Se M e N são espaços métricos, para que uma seqüência $((x_n, y_n))$ de pontos de $M \times N$ seja uma seqüência de Cauchy neste espaço é necessário e suficiente que (x_n) e (y_n) sejam seqüências de Cauchy em M e N, respectivamente.

Demonstração: Naturalmente o enunciado se refere a qualquer das métricas usuais em $M \times N$ indistintas no que tange à convergência.

($\Longrightarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. Existe então $\delta > 0$ de maneira que:

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow D_1((x_m, y_m); (x_n, y_n)) = d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \varepsilon.$$

Daí então:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad d(y_m, y_n) < \varepsilon$$

para quaisquer $m, n \geqslant r$ e portanto (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy.

($\Longleftarrow$) Para todo $\varepsilon > 0$ existem por hipótese r e s tais que:

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}\ (\forall\, m, n \geqslant r) \qquad \text{e} \qquad d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}\ (\forall\, m, n \geqslant s).$$

Considerando $t = \text{máx}\{r, s\}$ temos então que:

$$m, n \geqslant t \Longrightarrow D_1((x_m, y_m); (x_n, y_n)) < \varepsilon. \ ∎$$

A generalização do resultado acima para um produto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ $(n \geqslant 1)$ de espaços métricos é imediata.

§ 2 — ESPAÇOS COMPLETOS

Vimos no parágrafo anterior que existem seqüências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem neste espaço. É o caso da seqüência (x_n) definida por:

$$x_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)(n \geqslant 1)$$

que converge para $\sqrt{2}$ que não é um número racional, embora todos os termos de (x_n) sejam racionais.

Veremos a seguir que no espaço $\mathbb{R}$ não acontecem fatos como esse.

Proposição 6: Toda seqüência de Cauchy (x_n) em $\mathbb{R}$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Devido à proposição 2 existe $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, $\forall\, n \geqslant 1$, o que nos permite concluir a existência, para cada índice $m \geqslant 1$, de

$$y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$$

Assim é claro que

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots \leqslant k$$

e portanto (y_n) converge para $p = \sup\{y_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ que é um ponto de $\mathbb{R}$. Mostremos que $\lim x_n = p$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe uma índice r tal que:

$$n \geqslant r \Longrightarrow |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e, como (x_n) é de Cauchy, existe um índice s de maneira que:

$$m, n \geqslant s \Longrightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Seja $t > \text{máx}\{r, s\}$. Levando em conta que

$$y_t = \inf\{x_t, x_{t+1}, \ldots\}$$

existe $j \geqslant t$ para o qual se tem $y_t \leqslant x_j < y_t + \frac{\varepsilon}{3}$ e portanto

$$|x_j - y_t| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Assim, para todo $n > t$ temos:

$$|x_m - p| \leqslant |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| < \varepsilon$$

e portanto

$$\lim x_n = p. \ ∎$$

Definição 2: Um espaço métrico M é chamado *completo* se toda seqüência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.

Assim podemos dizer, já usando a linguagem da definição acima, que o espaço $\mathbb{Q}$ não é completo ao passo que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Proposição 7: Sejam M e N espaços métricos. Então o espaço $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.

Demonstração: É claro que a métrica a ser considerada sobre $M \times N$ é uma qualquer das usuais que, como já vimos (corolário da proposição 4), determinam neste espaço as mesmas seqüências de Cauchy, uma vez que são uniformemente equivalentes.

($\Longrightarrow$) Se (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M, então, para cada $y \in N$, $((x_1, y); (x_2, y); \ldots)$ é uma seqüência de Cauchy no espaço $M \times N$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice r tal que:

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow D_1((x_m, y); (x_n, y)) = d(x_m, x_n) + d(y, y) = d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Portanto $((x_n, y))$ converge para um ponto (x, y) de $M \times N$ e daí (x_n) converge para $x \in M$ (ver proposição 11 – Cap. II). De maneira análoga se prova que N é completo.

($\Longleftarrow$) Se $((x_n, y_n))$ é uma seqüência de Cauchy no espaço $M \times N$, então (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em M e N, respectivamente, e sendo completos estes espaços, existem $p \in M$ e $q \in N$ de maneira que $\lim x_n = p$ e $q = \lim y_n$. Portanto, ainda pela proposição acima citada

$$\lim (x_n, y_n) = (p, q). \blacksquare$$

A generalização desta proposição para um produto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é óbvia. Em particular temos o importante corolário:

Corolário: O espaço $\mathbb{R}^n$ é completo.

Proposição 8: Todo espaço métrico compacto é completo.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço métrico compacto M. Da compacidade de M resulta que existe uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ que converge para um ponto $p \in M$. Mas se uma subseqüência de uma seqüência de Cauchy converge, então a seqüência converge para o mesmo ponto (proposição 3). Logo $x_n \longrightarrow p$ e portanto M é completo. $\blacksquare$

Notas:

1. Obviamente não vale de um modo geral a recíproca da proposição acima. O espaço $\mathbb{R}$ (métrica usual) é completo conforme já vimos (proposição 6) mas não é compacto pois, recordando, seqüências de números reais como $(2, 4, 6, \ldots)$ não admitem subseqüências que convirjam em $\mathbb{R}$.

2. Um espaço pode ser conexo e não ser completo. É o caso, por exemplo, do intervalo $]0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Como já vimos no capítulo anterior em $\mathbb{R}$, conexos são os intervalos, e apenas estes (além dos unitários). Como porém a seqüência

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$

de pontos de $]0, 1]$ é de Cauchy mas não converge neste espaço, então efetivamente $]0, 1]$ não é completo.

Também pode ocorrer de um espaço ser completo sem ser conexo: basta considerar um espaço M com pelo menos dois pontos cuja métrica seja a zero-um. Nessas condições para todo a M vale, como já vimos, a relação $M = \{a\} | M - \{a\}$ e no entanto M é completo (ver exercícios 2 e 15).

§ 3 — COMPLETAMENTO DE UM ESPAÇO MÉTRICO

O espaço $\mathbb{Q}$ não é completo como já provamos. A construção de $\mathbb{R}$, à partir de $\mathbb{Q}$, representa o que se chama um "completamento" de $\mathbb{Q}$. Intuitivamente isso pode ser interpretado do seguinte modo: $\mathbb{R}$ é a "ampliação" de $\mathbb{Q}$ obtida acrescentando-se a este corpo os limites de seqüências de Cauchy racionais que a ele não pertencem. E vale ainda a relação: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Veremos a seguir que, dado um espaço métrico, é sempre possível "completá-lo" nos moldes do exemplo acima.

Definição 3: Um *completamento* de um espaço métrico (M, d) é um par $((\hat{M}, D); f)$, onde $(\hat{M}, D)$ é um espaço métrico completo, $f: M \longrightarrow \hat{M}$ é uma imersão isométrica e $f(M)$ é denso em $\hat{M}$ (isto é, $\overline{f(M)} = \hat{M}$).

Lema: Seja (M, d) um espaço métrico. Se existe um subconjunto não vazio $A \subset M$ tal que $\overline{A} = M$ e toda seqüência de Cauchy de pontos de A converge em M, então M é completo.

Demonstração: Se (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M, para todo $\varepsilon > 0$ existe um índice r tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ para quaisquer $m, n \geqslant r$. O fato de A ser denso em M garante por outro lado que, para cada índice $i \geqslant 1$, existe $y_i \in A$ de maneira que $d(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$. Assim, se s é um índice maior que r e maior que $\frac{3}{\varepsilon}$, para $m, n \geqslant s$ vale então:

$$d(y_m, y_n) \leqslant d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

o que mostra que (y_n) é uma seqüência de Cauchy em A. Como as seqüências de Cauchy em A convergem em M, existe $p \in M$ tal que $\lim y_n = p$. Mostremos que (x_n) também converge para p o que concluirá a demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim y_n = p$, existe t tal que:

$$n \geqslant t \Longrightarrow d(y_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Daí, para todo $n > \text{máx}\left\{t, \frac{2}{\varepsilon}\right\}$, vamos ter:

$$d(x_n, p) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, p) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 1: Todo espaço métrico (M, d) admite um completamento.

Demonstração: Como é longa nós a faremos por partes para melhor podermos nos situar durante o seu desenvolvimento.

(a) *Construção do Espaço* $\widehat{M}$

No conjunto S das seqüências de Cauchy em M define-se a relação:

$$(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0$$

A relação $\sim$ é de equivalência. Verifiquemos apenas a validade da propriedade transitiva. Se $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$, então $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, z_n) = 0$. Como porém

$$0 \leqslant d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

para todo $n \geqslant 1$, então:

$$0 \leqslant \lim d(x_n, z_n) \leqslant \lim [d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)] = 0$$

e portanto $\lim d(x_n, z_n) = 0$ o que significa $(x_n) \sim (z_n)$.

Seja $\widehat{M} = S/\sim$ e, para cada $\alpha, \beta \in M$, definamos

$$D(\alpha, \beta) = \lim d(x_n, y_n) \text{ (ver exercício 20)}$$

onde (x_n) e (y_n) pertencem, respectivamente, às classes α e β. Sem dificuldades maiores prova-se que D é uma métrica sobre $\widehat{M}$. Mostremos apenas que D está bem definida.

Se $(x'_n) \sim (x_n)$ e $(y'_n) \sim (y_n)$, então

$$d(x'_n, y'_n) \leqslant d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$$

e daí decorre:

$$\lim d(x'_n, y'_n) \leqslant \lim d(x_n, y_n)$$

Analogamente se obtém que:

$$\lim d(x_n, y_n) \leqslant \lim d(x'_n, y'_n)$$

Donde:
$$\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n).$$

(b) *Construção da Isometria f.*

Para cada seqüência $(x_n) \in S$, se $x_n = a$, para todo índice n, indicaremos por $\alpha(a)$ a classe de equivalência a que pertence (x_n). A aplicação $f: M \longrightarrow M$ definida através da fórmula $f(a) = \alpha(a)$, para todo $a \in M$, é uma imersão isométrica pois, para quaisquer $a, b \in M$:

$$D(f(a), f(b)) = D(\alpha(a), \alpha(b)) = \lim(d(a, b)) = d(a, b).$$

(c) $f(M)$ *é denso em* $\widehat{M}$.

Dado $\alpha \in \widehat{M}$ seja $(x_n) \in \alpha$. Tomando $\varepsilon > 0$ existe então r tal que, para quaisquer $m, n \geqslant r$, $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para $a = x_{r+1}$ teremos:

$$D(\alpha, \alpha(a)) = \lim(d(x_1, x_{r+1}); \ldots; d(x_r, x_{r+1}); \ldots) =$$

$$= \lim(d(x_r, x_{r+1}); d(x_{r+1}, x_{r+1}); d(x_{r+2}, x_{r+1}); \ldots) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e portanto $\alpha(a) = f(a) \in B_D(\alpha, \varepsilon)$

(d) $\widehat{M}$ *é completo.*

Seja $(\beta_n) = (\alpha(a_n))$ uma seqüência de Cauchy em $f(M)$. Como

$$D(\beta_m, \beta_n) = d(a_m, a_n)$$

então (a_n) é uma seqüência de Cauchy em M. Sendo λ a classe de equivalência a que pertence (a_n), provemos que $\lambda = \lim \beta_n$.

Dado $\varepsilon > 0$, o fato de (a_n) ser de Cauchy garante que existe um índice r tal que:

$$m, n \geqslant r \Longrightarrow d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, para todo $n \geqslant r$ temos:

$$D(\beta_n, \lambda) = \lim(d(a_n, a_1); d(a_n, a_2); \ldots; d(a_n, a_r); \ldots) =$$

$$= \lim(d(a_n, a_r); d(a_n, a_{r+1}); \ldots) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e portanto $\lim \beta_n = \lambda$. Que $\widehat{M}$ é completo é decorrência então do lema anterior. $\blacksquare$

§ 4 — PONTO FIXO

No § 3 do Cap. VI vimos que toda função contínua $f: [a, b] \longrightarrow [a, b]$ admite um ponto fixo, isto é, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Tal resultado é um caso particular do Teorema do ponto fixo de Brower cujo enunciado é o seguinte: "Toda função contínua cujo domínio e o contradomínio são iguais à bola unitária fechada

$$S = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leqslant 1\}$$

tem um ponto fixo, isto é, um ponto $p \in S$ tal que $f(p) = p$."

Além desse, há outros teoremas sobre pontos fixos, como o *teorema do ponto fixo de Banach* que estudaremos neste parágrafo e que se baseia na seguinte idéia de caráter iterativo:

Seja M um espaço métrico e seja $f: M \longrightarrow M$ uma função contínua. Tomemos $x_0 \in M$ e calculemos a seqüência definida por:

$$f(x_n) = x_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Com certas hipóteses pode ocorrer que a seqüência $(x_0, x_1, \dots)$ convirja para um ponto $p \in M$. Mostremos que, nestas condições, teremos então $f(p) = p$. De fato

$$p = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(p)$$

onde a penúltima passagem é devida à continuidade de f.

O enunciado do teorema a seguir contém hipóteses que nos permitem chegar conclusão acima.

Teorema 2: *Seja M um espaço métrico completo e seja $f: M \longrightarrow M$ uma contração. Então f admite um único ponto fixo, ponto esse que pode ser obtido como limite da seqüência $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots)$, para qualquer ponto $x_0 \in M$.*

Demonstração: Façamos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... Pelo que vimos há pouco, se a seqüência $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ converge para p, então $f(p) = p$. Por outro lado f não pode ter mais do que um ponto fixo porque, como f é uma contração, existe uma constante real c tal que $0 \leqslant c < 1$ e $d(f(x), f(y)) \leqslant c\,d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Assim, se tivéssemos também $f(q) = q$, para algum $q \in M$, então

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leqslant c\,d(p, q)$$

e daí

$$(1 - c)\,d(p, q) \leqslant 0$$

Como $1 - c > 0$, então $d(p, q) = 0$ e $p = q$.

Falta pois provar que (x_n) converge em M ou, o que é o mesmo no caso, que (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M. Como

$$d(x_{s+1}, x_s) = d(f(x_s), f(x_{s-1})) \leqslant c\,d(x_s, x_{s-1})$$

para todo $s \geqslant 1$, então se obtém por indução que:

$$d(x_{s+1}, x_s) \leqslant c^s d(x_1, x_0)$$

Assim, para todo $t > s + 1$ temos:

$$\begin{aligned} d(x_t, x_{s+1}) &\leqslant d(x_t, x_{t-1}) + d(x_{t-1}, x_{t-2}) + \dots + d(x_{s+2}, x_{s+1}) \leqslant \\ &\leqslant c^{t-1} d(x_1, x_0) + \dots + c^{s+1} d(x_1, x_0) = \\ &= d(x_1, x_0)\, c^{s+1} (c^{t-s-2} + \dots + c + 1) = \\ &= d(x_1, x_0)\, c^{s+1} \frac{1 - c^{t-s-1}}{1 - c} \leqslant \frac{d(x_1, x_0)}{1 - c} c^{s+1} = k c^{s+1} \end{aligned}$$

onde $k = \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - c}$. Como o limite da seqüência (kc^n) é zero, para todo $\varepsilon > 0$ existe um índice r tal que:

$$s + 1 \geqslant r \Longrightarrow kc^{s+1} < \varepsilon$$

Assim, se fizermos $s + 1 = n$, para qualquer $j > 0$ teremos:

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_{n+j}, x_n) < \varepsilon$$

o que vem provar que (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M. ■

EXERCÍCIOS

1. Verifique se as seqüências (x_n) definidas abaixo são seqüências de Cauchy:

   a) $x_n = \dfrac{1}{1 + n}$ em $\mathbb{Q}$

   b) $x_n = \dfrac{1}{n}$ em $]0, 1]$

   c) $x_n = \dfrac{n - 1}{n + 1}$ em $\mathbb{R}$

   d) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ em $\mathbb{R}$

   e) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ em $\mathbb{Q}$

   f) $x_n = \dfrac{1}{n}$ em $\mathbb{R}$ com a métrica zero-um.

   Obs.: De (a) a (e) a métrica considerada é a usual.

2. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço cuja métrica é a zero-um. Mostre que (x_n) é estacionária.

3. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ cujo conjunto dos termos é infinito. Mostre que $A' = \{x_n\}'$ é unitário.

4. Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em E e se $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $(x_n + y_n)$ e (αx_n) também são seqüências de Cauchy em E.

5. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em $\mathbb{R}$, mostre que $(x_n y_n)$ é também uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

6. Seja $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo uniforme. Mostre que: uma seqüência (x_n) de pontos de M é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N.
Sugestão: Proposição 4.

7. Use a função $f:]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ e a seqüência $\left(\frac{1}{n}\right)$ em $]0, 1]$ para mostrar que uma função contínua não transforma necessariamente seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

8. Se (x_n) é uma seqüência de pontos de um espaço M e $\lim x_n = p \in M$, mostre que $(x_1, p, x_2, p, \ldots)$ é uma seqüência de Cauchy em M.

9. Se $f: M \longrightarrow N$ é uma função que transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy, mostre que f é contínua.
Sugestão: Para todo $p \in M$, se $x_n \longrightarrow p$, considere a seqüência $(x_1, p, x_2, p, \ldots)$. Use então o exercício anterior a fim de concluir que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.

10. Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Se $X \subset M$ é infinito, mostre que existe uma seqüência de Cauchy (x_n) em X tal que $x_i \neq x_j$, sempre que $i \neq j$.
Sugestão: Exercício 16, Cap. V.

11. Mostre que não são completos os seguintes subespaços de $\mathbb{R}$:

a) $]0, 1]$

b) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

c) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

12. O subespaço $\mathbb{Z}$ da reta real é completo? Justifique.

13. Seja M um espaço completo. Se $f: M \longrightarrow N$ é contínua e $(x_1, x_2, \ldots)$ é uma seqüência de Cauchy em M, mostre que $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ é seqüência de Cauchy em N.

14. Se (M, d) é um espaço métrico tal que M é finito, mostre que esse espaço é completo.

15. Se M é um espaço cuja métrica é a zero-um, mostre que M é completo.
Sugestão: Exercício 2.

16. Dê um exemplo de duas métricas d e d' equivalentes sobre um conjunto M de maneira que (M, d) é completo mas (M, d') não é completo.
Sugestão: Exercício 41 – Cap. II.

17. Se $f: M \longrightarrow N$ é uma isometria e M é completo, prove que N é completo.

18. Dê um exemplo de um espaço métrico completo M e de uma função contínua e sobrejetora $f: M \longrightarrow N$ de maneira que N não é completo.
Sugestão: Considere sobre $\mathbb{Q}$ as métricas zero-um e usual.

19. Se X e Y são subespaços completos de um espaço M, mostre que $X \cup Y$ é completo.

20. Sejam (x_n) e (y_n) seqüências de Cauchy num espaço M. Mostre que (d_n), onde $d_n = d(x_n, y_n)$, é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}_+$ que, portanto, converge para um ponto de $\mathbb{R}_+$.

21. Seja M um espaço métrico tal que toda bola fechada de M é um conjunto compacto. Prove que M é completo.
Sugestão: Mostre primeiro que o conjunto dos termos de uma seqüência de Cauchy é limitado e, portanto, está contido numa bola fechada.

22. Seja E o conjunto das seqüências reais cujos termos são todos nulos, salvo um número finito deles no máximo. Para $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em E definamos

$$d(x, y) = \sup\{|x_k - y_k| : k \geqslant 1\}$$

a) Mostre que d é uma métrica sobre E;
b) Mostre que (z_n), onde $z_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right)$, é uma seqüência de Cauchy em E;
c) Prove que (E, d) não é completo.

23. Seja M um espaço métrico completo. Se X é um subespaço de M, mostre que: X é completo $\Longleftrightarrow$ X é fechado.

24. Mostre que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \frac{x}{3}$ é uma contração; a seguir construa as seqüências definidas por $f^n(0)$ e $f^n(1)$ e ache os seus limites.

25. Seja M um espaço métrico completo e suponhamos que $f: M \longrightarrow M$ é uma contração relativamente à constante k $(0 \leqslant k < 1)$. Dado qualquer $p \in M$, se $\varepsilon > 0$ e vale a relação $\varepsilon \geqslant \frac{d(p, f(p))}{1 - k}$, mostre que o ponto fixo de f pertence à bola $B[p, \varepsilon]$.

ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

§ 1 — INTRODUÇÃO

Nosso objetivo agora é a generalização de alguns dos conceitos mais importantes introduzidos nos capítulos anteriores, como os de conjunto aberto, conjunto fechado e função contínua, entre outros. Para tanto substituiremos a noção de métrica, sobre a qual se apóia toda construção da teoria dos espaços métricos, pelo conceito de "topologia" que, em muitos sentidos, é mais amplo. A generalização assim obtida não é, contudo, total. Certos problemas como o da "continuidade uniforme" e das "seqüências de Cauchy" não são suscetíveis de estudo no contexto que daí advirá. Para lidar com a continuidade uniforme, por exemplo, independentemente de falar em distância, seria preciso desenvolver a teoria dos "espaços uniformes", ou algo equivalente, o que foge aos intentos deste trabalho.

A topologia compreende dois ramos principais: topologia geral ou conjuntista (da qual se ocupa este capítulo) e topologia algébrica ou combinatória. À topologia geral usa como grande instrumento a teoria dos conjuntos, enquanto que a topologia combinatória usa a álgebra, especialmente a teoria dos grupos. Não obstante o termo topologia ter sido usado pela primeira vez por Listing, em 1847, no título de seu livro "Vorstudien zur Topologie", de conteúdo ligado ao segundo ramo acima, e não obstante problemas de natureza topológica já terem sido abordados por Euler e Gauss, anteriormente, foi só em 1895, quando Poincaré publicou seu artigo "Analysis situs" no J. École Polytechnique, que a topologia combinatória ganha rumos próprios, e em 1906 que o mesmo acontece com a topologia geral em função dos trabalhos de Frechet e Riesz.

Os axiomas que compõem a definição de topologia que damos a seguir foram pela primeira vez assim apresentados, em termos de "conjuntos abertos", por Alexandroff e Hopf em 1935 e consagrados, a partir de 1940, pelos trabalhos do grupo Bourbaki.

§ 2 — TOPOLOGIAS

Seja E um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de E é chamada *topologia* sobre E se:

(I) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$

(II) Se $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$ $(n \geqslant 1)$, então $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathcal{T}$.

(III) Se (G_i) é uma família qualquer de conjuntos de $\mathcal{T}$, então $\cup G_i \in \mathcal{T}$.

Nessas condições dizemos que o par $(E, \mathcal{T})$ é um *espaço topológico*; os membros da classe $\mathcal{T}$ são chamados *conjuntos abertos* do espaço e cada elemento de E é designado por *ponto*. Quando não houver confusão possível diremos apenas "espaço E" ou nos referiremos ao "espaço E" para indicar o espaço topológico em consideração. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Seja (M, d) um espaço métrico. A coleção dos conjuntos abertos desse espaço satisfaz os axiomas da definição de espaço topológico pois, como já vimos (proposição 1 – Cap. III).

- $\emptyset$ e M são abertos.
- Se G e H são abertos, $G \cap H$ é aberto.
- Se (G_i) é uma família de conjuntos abertos de (M, d), então $\cup G_i$ também é um conjunto aberto desse espaço.

Essa topologia é chamada *topologia induzida* pela métrica d sobre M.

Um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ se diz *metrizável* se existe uma métrica d sobre E tal que a coleção dos abertos de (E, d) coincide com $\mathcal{T}$.

Exemplo 2: Dado $E \neq \emptyset$, a coleção $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ é obviamente uma topologia sobre E. Essa topologia é chamada *topologia discreta* sobre E. Note-se que $(E, \mathcal{P}(E))$ é metrizável: a coleção dos abertos de (E, d), onde d é a métrica zero-um, é exatamente $\mathcal{P}(E)$.

Exemplo 3: Para todo $E \neq \emptyset$, a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$ é uma topologia a que chamaremos *topologia caótica* sobre E.

Exemplo 4: Se $E = \{a, b, c, d\}$, a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ satisfaz os axiomas (I), (II) e (III) o que é imediato.

Exemplo 5: Seja E um conjunto infinito. Deixamos como exercício a verificação de que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subset E \mid G^c \text{ é finito}\}$. Esta é chamada *topologia cofinita* sobre E.

Exemplo 6: Também propomos como exercício a verificação de que, se E é um conjunto infinito, a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subset E \mid G^c \text{ é enumerável}\}$ é uma topologia a que chamamos topologia *coenumerável*.

Exemplo 7: A coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$. Quanto aos axiomas (I) e (II) a verificação é imediata; no que se refere ao axioma (III) o caso que exige mais atenção é aquele em que uma família (G_i) de abertos é tal que cada $G_i =]a_i, +\infty[$, para um certo $a_i \in \mathbb{R}$. Duas são as possibilidades então: se o conjunto $\{a_i\}$ não é limitado inferiormente, então $\cup G_i = \cup\,]a_i, +\infty[= \mathbb{R}$; se $\{a_i\}$ é limitado inferiormente e $a = \inf \{a_i\}$, então $\cup G_i = \cup\,]a_i, +\infty[=]a, +\infty[$ (verifique). Por exemplo:

$$]0, +\infty[\cup]-1, +\infty[\cup]-2, +\infty[\cup \ldots = \mathbb{R}$$

ao passo que

$$\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\cup \ldots =]0, +\infty[$$

Exemplo 8: Também é uma topologia sobre $\mathbb{R}$ a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 9: Dado $E \neq \emptyset$, tomando $p \in E$ (fixo), a coleção $\mathcal{T} = \{E\} \cup \{G \subset E \mid p \notin G\}$.

Exemplo 10: Se p é um ponto fixo de um conjunto E, a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subset E \mid p \in G\}$.

Exemplo 11: (*Topologia das uniões*) Seja $\mathcal{B}$ uma classe de subconjuntos de um conjunto $E \neq \emptyset$ para o qual se verifica o seguinte: (a) $\emptyset, E \in \mathcal{B}$; (b) se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Nessas condições a coleção de todas as reuniões possíveis de membros de $\mathcal{B}$ é uma topologia sobre E. De fato, se $\mathcal{T}$ é essa coleção temos:

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$ pois $\emptyset, E \in \mathcal{B}$
- Sejam $G, H \in \mathcal{T}$. Então $G = \cup B_i$ e $H = \cup B'_j$, onde (B_i) e (B'_j) são famílias de conjuntos da classe $\mathcal{B}$. Daí

$$G \cap H = (\cup B_i) \cap (\cup B'_j) = \bigcup_{i,j} (B_i \cap B'_j)$$

e, como cada $B_i \cap B'_j \in \mathcal{B}$, então $G \cap H \in \mathcal{T}$.

- Exercício.

Exemplo 12: (*Topologia produto*) Sejam $(E_1, \mathcal{T}_1)$ e $(E_2, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos. A coleção $\mathcal{B} = \{G \times H \mid G \in \mathcal{T}_1, M \in \mathcal{T}_2\}$ satisfaz as condições (a) e (b) do exemplo anterior. Vejamos (b): dados $B_1 = G_1 \times H_1$ e $B_2 = G_2 \times H_2$

em $\mathscr{B}$, então $B_1 \cap B_2 = (G_1 \times H_1) \cap (G_2 \times H_2) = (G_1 \cap G_2) \times (H_1 \cap H_2)$ que pertence a $\mathscr{B}$ pois $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{C}_1$ e $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{C}_2$. Logo a coleção das uniões de todos os conjuntos de $\mathscr{B}$ é uma topologia sobre $E = E_1 \times E_2$ à qual chamamos *topologia produto*. O espaço $(E, \mathcal{C})$ é chamado *espaço produto* dos espaços dados.

Exemplo 13: (*Subespaços*) Seja $(E, \mathcal{C})$ um espaço topológico. Dado $X \subset E$, $X \neq \emptyset$, a coleção $\mathcal{C}_X = \{G \cap X | G \in \mathcal{C}\}$ é uma topologia sobre X (verifique) à qual chamamos *topologia induzida* por $\mathcal{C}$ sobre X. O par $(X, \mathcal{C}_X)$ é um *subespaço* de $(E, \mathcal{C})$.

Dado um espaço topológico $(E, \mathcal{C})$, o *interior* de um subconjunto $A \subset E$, que se indica por $\overset{\circ}{A}$, é a união de todos os abertos contidos em A. Assim, podemos afirmar que, dado um ponto p do espaço, $p \in \overset{\circ}{A}$ se e somente se existe $G \in \mathcal{C}$ de maneira que $p \in G \subset A$. Mais ainda: $A = \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{C}$.

Exemplo: Já sabemos que o interior de um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é $]a, b[$, quando a topologia sobre $\mathbb{R}$ é a induzida pela métrica usual (chamada *topologia usual* em $\mathbb{R}$).

Qual o interior de $[a, b]$ quando a topologia de $\mathbb{R}$ é a cofinita? Como os abertos não vazios são, neste caso, o próprio $\mathbb{R}$ e os conjuntos do tipo $\mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_n\}$, onde $n \geqslant 1$ e $a_i \in \mathbb{R}$, e nenhum destes está contido em $[a, b]$, então $\overset{\circ}{\overline{[a, b]}} = \emptyset$.

E qual o interior de $[a, b]$ se a topologia considerada sobre $\mathbb{R}$ é $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}\} \cup \{G \subset \mathbb{R} | 0 \notin G\}$ (exemplo 9)? Há duas hipóteses a considerar:

1ª) $0 \in [a, b]$ caso em que $[a, b] - \{0\}$ é o maior aberto contido em $[a, b]$ e portanto $\overset{\circ}{\overline{[a, b]}} = [a, b] - \{0\}$.

2ª) $0 \notin [a, b]$ o que significa que $[a, b]$ é aberto e então $\overset{\circ}{\overline{[a, b]}} = [a, b]$.

Seja $(E, \mathcal{C})$ um espaço métrico. Dizemos que $F \subset E$ é um *conjunto fechado* se F^c é aberto, isto é, $F^c \in \mathcal{C}$. É claro pois que os fechados do espaço são os complementares dos abertos.

Por exemplo, se em $\mathbb{R}$ a topologia considerada for $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[| a \in \mathbb{R}\}$, então a coleção dos fechados desse espaço é $\mathscr{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a] | a \in \mathbb{R}\}$.

Para a coleção $\mathscr{F}$ dos fechados de um espaço E valem as seguintes propriedades: (i) $\emptyset, E \in \mathscr{F}$; (ii) $F_1, F_2 \in \mathscr{F} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$; (iii) dada uma família (F_i) tal que $F_i \in \mathscr{F}$, $\forall_i$, então $\cap F_i \in \mathscr{F}$. A demonstração desse fato é análoga à que foi feita nos espaços métricos (proposição 3 – Cap. III).

Dado um espaço topológico $(E, \mathcal{C})$, o *fêcho* de um subconjunto $A \subset E$, que se indica por $\overline{A}$, é a interseção de todos os fechados que contêm A. Logo $\overline{A}$ é o "menor" conjunto fechado que contém A e ainda: $A = \overline{A} \Longleftrightarrow$ A fechado (verifique).

Exemplo: Quando a topologia considerada sobre $\mathbb{R}$ é a usual, se $A =]a, b]$. Então $\overline{A} = [a, b]$, como já vimos.

Agora, se a topologia tomada sobre $\mathbb{R}$ for $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[| x \in \mathbb{R}\}$ a coleção dos fechados do espaço é $\mathscr{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[x, +\infty[| x \in \mathbb{R}\}$ e portanto $\overline{A} = [a, +\infty[$ que é o "menor" fechado que contém A.

Proposição 1: Seja A um subconjunto de um espaço topológico $(E, \mathcal{C})$. Dado $p \in E$, então: $p \in \overline{A}$ se, e somente se, $G \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto G que contém p.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que exista um aberto H tal que $p \in H$ e $H \cap A = \emptyset$. Daí H^c é um fechado que contém A e não contém p, o que é absurdo.

($\Longleftarrow$) Se $p \notin \overline{A}$, então existe um fechado $F \supset A$ tal que $p \notin F$. Daí F^c é um aberto que contém p cuja interseção com A é vazia o que contraria a hipótese. ∎

Dado um espaço topológico $(E, \mathcal{C})$, se $A \subset E$ e $p \in E$, dizemos que p é *ponto de acumulação* de A se:

$$(G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

para todo aberto G que contém p. O conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se *conjunto derivado* de A e se indica por A'.

Levando em conta a definição dada e a proposição 1 acima podemos enunciar a proposição abaixo cuja demonstração propomos como exercício (ver proposição 9 – Cap. III):

Proposição 2: Um subconjunto A de um espaço topológico E é fechado se, e somente se, $A' \subset A$.

Exemplo: Seja $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \subset \mathbb{R}$. Já sabemos que, se a topologia considerada sobre $\mathbb{R}$ for a usual, então $A' = \{0\}$.

Mas se em $\mathbb{R}$ a topologia considerada fosse a cofinita teríamos, como veremos, um resultado bem diferente. Se $p \in \mathbb{R}$ e $G = \mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um aberto que contém p, então $G - \{p\} = \mathbb{R} - \{p, x_1, \ldots, x_n\}$ contém todos os pontos de $\mathbb{R}$, menos um número finito. Como A é infinito, então $(G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ e assim todo ponto $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A. Donde $A' = \mathbb{R}$.

Seja $(E, \mathcal{C})$ um espaço topológico. Dizemos que uma seqüência (x_n) de pontos de E *converge* para $p \in E$ se, para todo aberto G que contém p, existe um índice r de maneira que:

$$x_n \in G, \ \forall\, n \geqslant r$$

O ponto p chama-se *limite* da seqüência. O fato de p ser limite da seqüência é indicado indistintamente por $x_n \longrightarrow p$ ou $\lim x_n = p$.

Exemplo: Ao contrário do que ocorre nos espaços métricos, uma seqüência de um espaço topológico pode convergir para mais do que um ponto.

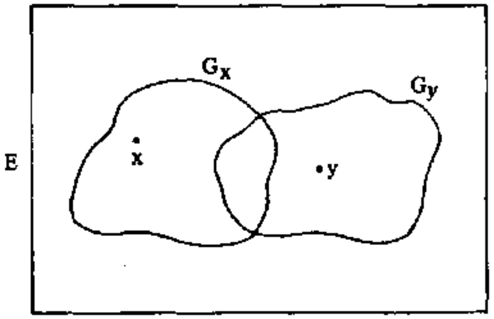
Consideremos o espaço $(E, \mathcal{T})$, onde $E = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$. A seqüência $(a, a, a, \ldots)$ além de convergir em E para a (o que é óbvio), converge também para b. De fato, procurando os abertos que contém b vamos encontrar apenas o conjunto E. Mas E contém todos os termos de seqüência, já a partir do primeiro, e isto garante nossa afirmação.

§ 3 — AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

A definição de espaço topológico dada no parágrafo anterior, tanto abrange situações muito importantes (por exemplo, os espaços métricos) como situações absolutamente triviais (ver exemplo 4, entre outros). Para poder focalizar os casos mais importantes, outros axiomas devem ser acrescentados à definição, como os axiomas de separação que veremos a seguir. Foi Hausdorff, em 1914, quem introduziu o chamado axioma T_2, o mais importante do grupo de separação.

Dizemos que um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ é um *espaço T_1* se satisfaz o seguinte axioma, chamado *axioma T_1*:

"Dados quaisquer $x, y \in E$, $x \neq y$, então existem abertos G_x e G_y que contêm x e y, respectivamente, de maneira que $x \notin G_y$ e $y \notin G_x$."



Exemplo: Seja $\mathcal{T}$ a topologia cofinita sobre um conjunto $E \neq \emptyset$. Dados $x, y \in E$, $x \neq y$, então $G_x = E - \{y\}$ e $G_y = E - \{x\}$ são abertos (pois $G_x^c = \{y\}$ e $G_y^c = \{x\}$ são finitos) que verificam o axioma T_1.

Proposição 3: Um espaço topológico E é T_1 se, e somente se, $\{p\}$ é fechado, para qualquer $p \in E$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Dado $p \in E$, mostremos que $\{p\}^c$ é aberto, o que equivale à tese. Ora, dado $x \in \{p\}^c$, isto é, $x \neq p$, existe então um aberto G_x tal

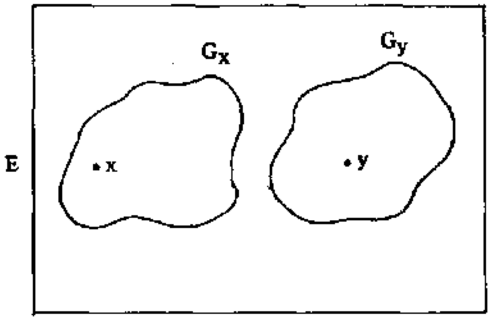
que $x \in G_x$ e $p \notin G_x$, isto é, $x \in G_x \subset \{p\}^c$. Daí $\{p\}^c = \bigcup_{x \neq p} G_x$ e portanto $\{p\}^c$ é aberto.

($\Longleftarrow$) Exercício. (Proceda como no exemplo acima). ∎

Corolário: Num espaço T_1 todo conjunto finito é fechado.

Um espaço topológico $(F, \mathcal{T})$ é chamado *espaço T_2* ou *espaço de Housdorff* se o seguinte axioma, chamado axioma T_2, se verifica:

"Dados quaisquer $x, y \in E$, $x \neq y$, então existem abertos disjuntos G_x e G_y de maneira que $x \in G_x$ e $y \in G_y$".



É claro que todo espaço T_2 é também T_1.

Exemplo: Todo espaço métrico é T_2. De fato, como já vimos (§ 4 – Cap. II) dados os pontos x e y $(x \neq y)$ num espaço métrico M, se $d(x, y) = \varepsilon$, $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$. E, como uma bola aberta é um conjunto aberto (exemplo 2 à definição 1 – Cap. III), então M é T_2.

Proposição 4: Se $(x_1, x_2, \ldots)$ é uma seqüência convergente num espaço topológico E no qual vale o axioma T_2, então é único o limite dessa seqüência.

Demonstração: Suponhamos $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$, com $p \neq q$. Tomemos abertos G_p e G_q disjuntos de modo que $p \in G_p$ e $q \in G_q$. Daí existem índices r e s de maneira que $x_n \in G_p$, $\forall n \geqslant r$, e $x_n \in G_q$, $\forall n \geqslant s$. Tomando $t = \text{máx}\{r, s\}$, então $x_n \in G_p \cap G_q$, $\forall n \geqslant t$ o que é absurdo pois $G_p \cap G_q = \emptyset$. ∎

Contra-exemplo: Seja em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subset \mathbb{R} \mid G^c$ é enumerável$\}$.

Este espaço não é T_2. De fato, sejam $G = \mathbb{R} - A$ e $H = \mathbb{R} - B$, onde A e B são enumeráveis, dois abertos do espaço. Então $G \cap H = R - (A \cup B) \neq \emptyset$ já que $A \cup B$ é enumerável.

Agora consideremos uma seqüência convergente $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow p$ em $\mathbb{R}$. Sendo $A = \{x_i \mid x_i \neq p\}$, então A^c é aberto porque seu complementar é A que é enumerável. Como $p \in A^c$ e $x_n \longrightarrow p$, existe r tal que x_r, x_{r+1},

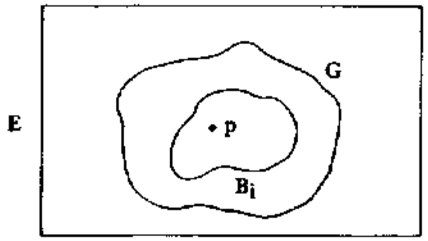
$\ldots \in A^c$, isto é, $x_r = x_{r+1} = \ldots = p$. Então a seqüência dada é estacionária. Logo as seqüências convergentes nesse espaço são as estacionárias. É claro que $(x_1, \ldots, p, p, \ldots)$ não pode convergir para $q \neq p$ pois $\mathbb{R} - \{p\}$ é um aberto que contém q e não contém os termos da seqüência, a partir de um deles.

Proposição 5: Seja E um espaço T_2. Se $p \in E$ é um ponto de acumulação de $A \subset E$, então $(G - \{p\}) \cap A$ é infinito, para qualquer aberto G que contém p.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $(G - \{p\}) \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (finito não vazio). Como cada $x_i \neq p$, existem G_i, H_i abertos disjuntos $(i = 1, \ldots, n)$ de maneira que $p \in G_i$, $x_i \in H_i$ e $G_i \cap H_i = \emptyset$. Então $S = G \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n$ é um aberto que contém p e tal que $(S - \{p\}) \cap A = \emptyset$, o que é absurdo. ■

§ 4 — BASES LOCAIS

Seja $(E, \mathcal{Z})$ um espaço topológico. Se $p \in E$, uma coleção $\mathscr{B}_p = \{B_i\}$ de conjuntos abertos de E se diz *base local* em p se: (i) $p \in B_i$, $\forall B_i \in \mathscr{B}_p$; (ii) para todo aberto $G \in \mathcal{Z}$ que contém p, existe um aberto $B_i \in \mathscr{B}_p$ tal que $p \in B_i \subset G$.



Exemplos:

1. A coleção de todos os abertos de um espaço E que contém um ponto $p \in E$ é obviamente uma base local em p.

2. Se a topologia de E é a discreta, para todo $p \in E$, $\mathscr{B}_p = \{\{p\}\}$ é uma base local. De fato, $\{p\}$ é aberto neste caso e se G é um aberto que contém p, é claro que $p \in \{p\} \subset G$.

3. Num espaço métrico (M, d) a coleção $\mathscr{B}_p = \left\{ B\left(p, \frac{1}{n}\right) \middle| \, n = 1, 2, \ldots \right\}$ é uma base local em p, para todo $p \in M$ (verifique).

Proposição 6: Seja $\mathscr{B}_p = \{B_i\}$ uma base local num ponto p de um espaço E. Para que p seja ponto de acumulação de $A \subset E$ é necessário e suficiente que $(B_i - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$, para todo $B_i \in \mathscr{B}_p$.

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Seja G um aberto que contém p. Então existe $B_r \in \mathscr{B}_p$ tal que $p \in B_r \subset G$. Como $(B_r - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$, então $(G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$. Assim $p \in A'$.

($\Longrightarrow$) Imediata. ■

Proposição 7: Seja $\mathscr{B}_p = \{B_i\}$ uma base local num ponto p de um espaço topológico E. Para que uma seqüência (x_n) de pontos de E convirja para p é necessário e suficiente que, para todo $B_i \in \mathscr{B}_p$, exista um índice r_i de modo que $x_n \in B_i$, $\forall n \geqslant r_i$.

Demonstração: Fica como exercício. ■

Dizemos que um espaço topológico E satisfaz o *primeiro axioma de enumerabilidade* se, para cada $p \in E$, existe uma base local em p enumerável $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$.

Exemplo: Num espaço métrico vale o primeiro axioma de enumerabilidade o que decorre do exemplo 3 acima.

Se $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ é uma base local e enumerável em p, então a seqüência $B_1, B_1 \cap B_2, B_1 \cap B_2 \cap B_3, \ldots$ é também uma base local enumerável em p, com a vantagem de ser decrescente, isto é

$$B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset \ldots$$

Assim, se um espaço satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, para cada um dos seus pontos existe uma *base local, enumerável* e *decrescente*.

Proposição 8: Seja $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ uma base local, enumerável e decrescente num ponto p de um espaço E. Se $A \subset E$ e $p \in \overline{A}$, então existe uma seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de A tal que $x_n \longrightarrow p$.

Demonstração: Como $p \in \overline{A}$, então $B_i \cap A \neq \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Logo existem $x_1, x_2, \ldots \in E$ de modo que

$$x_1 \in B_1 \cap A, \; x_2 \in B_2 \cap A, \ldots$$

Como $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \ni p$ e $x_i \in B_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, então $x_n \longrightarrow p$ (prove). ■

§ 5 — BASES

Dizemos que uma coleção de conjuntos abertos de um espaço topológico $(E, \mathcal{Z})$ é *base* desse espaço se todo aberto de E pode ser obtido como reunião de conjuntos da coleção $\mathscr{B}$, isto é, se para todo $G \in \mathcal{Z}$ existe uma subcoleção $\mathscr{B}'$ de de maneira que

$$G = \bigcup_{B \in \mathscr{B}'} B$$

Ou ainda, equivalentemente: para qualquer $G \in \mathcal{T}$, se $p \in G$, existe então $B \in \mathcal{B}$ de modo que $p \in B \subset G$.

Note-se que a subcoleção $\mathcal{B}$ pode ser vazia caso em que se obtém $\bigcup_{B \in \emptyset} B = \emptyset$.

Exemplos:

1. Seja $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$, onde $E = \{a, b, c\}$. Obviamente $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre E e $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ é uma base de $(E, \mathcal{T})$ pois todo conjunto de $\mathcal{T}$, inclusive o $\emptyset$ (devido à última observação), pode ser representado como reunião de membros de $\mathcal{B}$.

2. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço cuja topologia é a discreta. Então $\mathcal{B} = \{\{a\} \mid a \in E\}$ é uma base de E pois $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, para todo $a \in A$.

3. Consideremos a topologia das uniões de uma coleção de subconjuntos de um conjunto $E \neq \emptyset$ (ver exemplo 11 de topologia, § 2). Então, pela própria construção dessa topologia, $\mathcal{B}$ é uma base do espaço assim obtido. Em particular, dados dois espaços $(E_1, \mathcal{T}_1)$ e $(E_2, \mathcal{T}_2)$, a coleção

$$\mathcal{B} = \{G \times H \mid G \in \mathcal{T}_1 \text{ e } H \in \mathcal{T}_2\}$$

é uma base da topologia produto sobre $E_1 \times E_2$.

4. A coleção das bolas abertas de um espaço métrico é uma base da topologia resultante dessa metrica já que todo aberto não vazio é uma união dessas bolas.

Dizemos que um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ satisfaz o *segundo axioma de enumerabilidade* se existe uma base enumerável desse espaço.

Se $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de um espaço E, então $\mathcal{B}_p = \{B \in \mathcal{B} \mid p \in B\}$ é uma base local enumerável em p, para todo $p \in E$. Logo o segundo axioma de enumerabilidade implica o primeiro.

Exemplo: $\mathbb{R}$ com a topologia usual satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. De fato, $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base neste caso pois, dado um aberto G, se $p \in G$ existe $\varepsilon > 0$ de modo que $p \in\ ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\ \subset G$. Tomando números racionais a e b de maneira que $p - \varepsilon < a < p < b < p + \varepsilon$, então $]a, b[\ \in \mathcal{B}$ e $]a, b[\ \subset G$.

Por outro lado considerando $K = \{(a, b) \in \mathbb{Q}^2 \mid a < b\}$, como $K \subset \mathbb{Q}^2$, então K é enumerável. Sendo sobrejetora a aplicação

$$(a, b) \longmapsto\ ]a, b[$$

de K em $\mathcal{B}$, podemos concluir que $\mathcal{B}$ também é enumerável.

Proposição 9: O produto de dois espaços topológicos que satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade também satisfaz este axioma.

Demonstração: Sejam $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ bases enumeráveis de dois espaços topológicos E e F. Mostremos que $\mathcal{D} = \{B_i \times C_j \mid B_i \in \mathcal{B} \text{ e } C_j \in \mathcal{C}\}$ é uma base enumerável de $E \times F$. Que é enumerável é evidente. Seja A um aberto de $E \times F$. Dado $p \in A$ existem abertos G e H em E e F, respectivamente, de modo

que $p \in G \times H \subset A$. Supondo $p = (x, y)$ então $x \in G$ e $y \in H$ e daí existem $B_r \in \mathcal{B}$ e $C_s \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B_r \subset G$ e $y \in C_s \subset H$. Portanto $p \in B_r \times C_s \subset$ $\subset G \times H \subset A$ o que vem provar que $\mathcal{D}$ é base de $E \times F$. ■

Corolário: O espaço $\mathbb{R}^n$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

§ 6 — ESPAÇOS SEPARÁVEIS

Um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ se diz *separável* se existe $A \subset E$, A enumerável, de maneira que $\overline{A} = E$.

Exemplo: $\mathbb{R}$ com a topologia usual é separável uma vez que $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. E como $\overline{\mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{Q}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ também é enumerável.

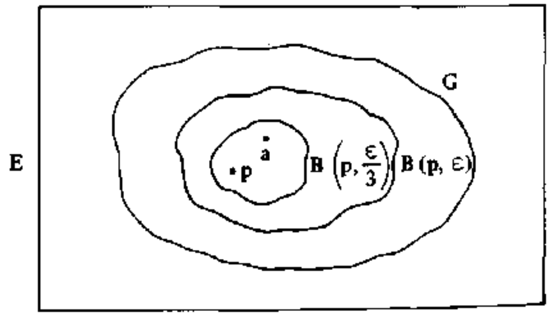
O segundo axioma de enumerabilidade verificado num espaço E acarreta que este espaço é separável. Com efeito, se $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ é uma base enumerável do espaço, tomando um e um só x_i em cada B_i, então $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é enumerável (óbvio) e é denso em E, isto é, $\overline{A} = E$ (verifique).

Proposição 10: Todo espaço métrico separável satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Demonstração: Seja M um espaço métrico separável. Então existe $A \subset M$, A enumerável, de modo que $\overline{A} = M$. Mostremos que $\mathcal{B} = \{B(a, \delta) \mid a \in A, \delta \in \mathbb{Q}\}$ é uma base de M. Como evidentemente é enumerável, a proposição estará provada.

Seja G um aberto não vazio e tomemos $p \in G$. Existe então $\varepsilon > 0$ de modo que $p \in B(p, \varepsilon) \subset G$. Sendo A denso em E, na bola $B\left(p, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ existem pontos de A. Se a é um desses pontos, então $d(a, p) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tomemos um número racional δ de maneira que $\frac{\varepsilon}{3} < \delta < \frac{2\varepsilon}{3}$ e mostremos que

$$p \in B(a, \delta) \subset B(p, \varepsilon) \subset G$$



Como $d(p, a) < \frac{\varepsilon}{3} < \delta$, então $p \in B(a, \delta)$. Por outro lado, se $x \in B(a, \delta)$, então $d(a, x) < \delta$ e daí

$$d(x, p) \leqslant d(x, a) + d(a, p) < \delta + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

o que garante que $x \in B(p, \varepsilon)$. ■

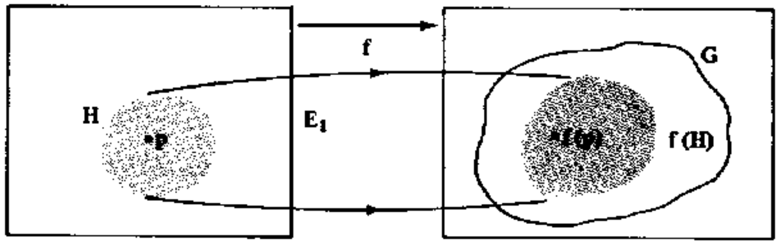
§ 7 — FUNÇÕES CONTÍNUAS

O problema da continuidade é a questão central da topologia geral. Considerando os espaços topológicos como sistemas matemáticos, isto é, conjuntos dotados da estrutura dada por uma topologia, é fundamental o trabalho no sentido de agrupar espaços "equivalentes". E são considerados equivalentes espaços relacionados por uma correspondência biunívoca e bicontínua, ou seja, contínua tanto a correspondência como a sua inversa.

A propósito lembremos a seguinte colocação de F. Klein em seu Erlanger Programm (1872): "a topologia é o estudo das propriedades de um espaço que se conservam através de transformações biunívocas e bicontínuas". Tais propriedades recebem a denominação de *propriedades topológicas*.

Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos arbitrários. Uma função $f: E_1 \longrightarrow E_2$ se diz *contínua num ponto* $p \in E_1$ se, dado um aberto G qualquer de E_2, $f(p) \in G$, existe um aberto H se E_1 de modo que

$$p \in H \qquad \text{e} \qquad f(H) \subset G$$



Se f é contínua em todos os pontos de E_1, então f se diz, simplesmente, *contínua*.

Exemplos:

1. Se a topologia de E_1 é a discreta, então $f: E_1 \longrightarrow E_2$ é contínua, não importa qual seja a topologia de E_2. De fato, se $p \in E_1$ e $G \in f(p)$ (G aberto), tomando $H = \{p\}$ que é aberto em E_1, então $f(H) \subset G$.

2. Se a topologia de E_2 é a caótica ($\mathcal{T} = \{\emptyset, E_2\}$), então $f: E_1 \longrightarrow E_2$ é contínua, também não importa qual a topologia considerada em E_1. De fato,

se $p \in E_1$, o único aberto em E_2 que contém $f(p)$ é o próprio E_2 e, tomando $H = E_1$, então $p \in H$ e $f(H) \subset E_2$.

3. Seja em $E = \{a, b, c\}$ a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. A função $f: E \longrightarrow E$, dada por $f(a) = b$, $f(b) = c$ e $f(c) = a$ é contínua nos pontos a e b, mas não é contínua em c. Vejamos.

Os abertos que contêm $f(a) = b$ são E, $\{b\}$ e $\{a, b\}$. Tomando o aberto $H = \{a\}$, então $f(H) = \{b\}$ que está contido nos três abertos que contêm b. De modo semelhante se mostra que f é contínua em b.

Mas f não é contínua em c pois tomando o aberto $G = \{a\}$, que contém $f(c) = a$, então o único aberto que contém c, ou seja, o conjunto E, é tal que

$$E = f(E) \not\subset G = \{a\}.$$

Sendo $(E_1, \mathcal{T}_1)$ e $(E_2, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos quaisquer, uma função $f: E_1 \longrightarrow E_2$ se diz *seqüencialmente contínua num ponto* $p \in E_1$ se, para qualquer seqüência $(x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de E_1, que converge para p, a seqüência das imagens $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ converge para $f(p)$. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* se f é seqüencialmente contínua em cada ponto de E_1.

Já vimos (proposição 3 – Cap. IV) que num espaço métrico a continuidade de uma função num ponto equivale à continuidade seqüencial nesse ponto. De um modo geral a continuidade acarreta a continuidade seqüencial (verifique baseando-se na proposição citada), mas não vale a recíproca como mostraremos.

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, x)$, considerando sobre $\mathbb{R}$ a topologia coenumerável (exemplo 6 – § 2) e em $\mathbb{R}^2$ a topologia usual. Uma seqüência convergente em $\mathbb{R}$ neste caso é do tipo $(x_1, x_2, \ldots, p, p, \ldots)$ (ver contra exemplo à proposição 4). A seqüência das imagens é $((x_1, x_1), (x_2, x_2), \ldots, (p, p), (p, p), \ldots) \longrightarrow (p, p) = f(p)$. Mas f não é contínua em p pois tomando uma bola qualquer $B = B(f(p), \varepsilon)$, se $H = \mathbb{R} - \{a_1, a_2, \ldots\}$ é um aberto que contém p, a imagem $f(H)$ é formada por todos os pontos da reta $y = x$, exceto (a_1, a_1); (a_2, a_2); ..., e portanto $f(H) \not\subset G$.

Proposição 11: Seja $f: E_1 \longrightarrow E_2$ uma função seqüencialmente contínua num ponto $p \in E_1$. Se existe uma base local e enumerável em p, então f é contínua em p.

Demonstração: Seja $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ uma base local e enumerável em p, que podemos supor decrescente. Se f não fosse contínua em p, existiria um aberto G do espaço E_2 tal que

$$f(p) \in G \qquad \text{e} \qquad f(B_i) \not\subset G, \; (i = 1, 2, \ldots)$$

Daí então podemos concluir que

$$\exists\, x_1 \in B_1 \text{ tal que } f(x_1) \notin G$$
$$\exists\, x_2 \in B_2 \text{ tal que } f(x_2) \notin G$$
$$\vdots$$

Assim obtivemos as seqüências $(x_1, x_2, \ldots) \longrightarrow p$ (por quê?) e $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ que não converge para $f(p)$ pois G é um aberto que contém este ponto mas não contém nenhum dos termos da seqüência $(f(x_n))$. Absurdo. ■

Corolário: Se E_1 é um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então toda função seqüencialmente contínua $f: E_1 \longrightarrow E_2$ é também contínua.

Na proposição 4, Cap. IV, vimos como a continuidade de uma função $f: M \longrightarrow N$, onde M e N são espaços métricos, pode ser caracterizada por abertos e fechados. Uma generalização pura e simples dessa proposição vale para espaços topológicos e seu enunciado é o seguinte:

Proposição 12: Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos e indiquemos por $\mathscr{B}$ uma base do espaço E_2. Para uma função $f: E_1 \longrightarrow E_2$ são equivalentes as seguintes condições:

a) f é contínua.

b) A imagem inversa $f^{-1}(B)$ de qualquer $B \in \mathscr{B}$ é um conjunto aberto em E_1.

c) A imagem inversa $f^{-1}(G)$ de qualquer aberto G do espaço E_2 é um conjunto aberto em E_1.

d) A imagem inversa $f^{-1}(L)$ de qualquer fechado L do espaço E_2 é um conjunto fechado de E_1.

Não faremos a demonstração dessa proposição, dada a sua semelhança com a citada proposição 4 do Cap. IV. Lembremos, a propósito, que a coleção das bolas abertas de um espaço métrico é uma base da topologia induzida pela métrica do espaço.

Exemplo: Indiquemos por $\mathcal{Z}_u$ a topologia usual em $\mathbb{R}$ e por $\mathcal{Z}_c$ a cofinita. A função $id_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_c)$ é contínua pois, dado um aberto $G = (\mathbb{R} - \{u_1, \ldots, u_n\}) \in \mathcal{Z}_c$, então $(id_{\mathbb{R}})^{-1}(G) = G$. Mas $G \in \mathcal{Z}_u$ pois, supondo $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, então $G =]-\infty, u_1[\cup]u_1, u_2[\cup \ldots \cup]u_{n-1}, u_n[\cup]u_n, +\infty[$, isto é, G é uma união de intervalos abertos. Por outro lado, $id_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_c) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_u)$ não é contínua pois tomando por exemplo $A =]0, 1[\in \mathcal{Z}_u$, então $(id_{\mathbb{R}})^{-1}(A) = A \notin \mathcal{Z}_c$.

Consideremos uma aplicação $f: X \longrightarrow Y$. Se uma certa topologia é considerada sobre Y, então a coleção $\theta = \{f^{-1}(G) | G \in \mathcal{Z}\}$ é uma topologia sobre X. Façamos a verificação apenas do axioma III da definição de topologia. Se $(f^{-1}(G_i))$ é uma família de membros de θ, então cada $G_i \in \mathcal{Z}$ e $\cup f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\cup G_i)$. Como $\cup G_i \in \mathcal{Z}$, então $\cup f^{-1}(G_i) \in \theta$. A topologia θ é chamada *topologia induzida* por f sobre X. A própria construção de θ nos garante, levando em conta a proposição anterior, que $f: (X, \theta) \longrightarrow (Y, \mathcal{Z})$ é contínua. Mais ainda: se θ' é um topologia sobre X e $f: (X, \theta') \longrightarrow (Y, \mathcal{Z})$ é contínua, então $\theta \subset \theta'$ (diz-se que θ é *menos fina* que θ'). De fato dado $f^{-1}(G) \in \theta$, então $G \in \mathcal{Z}$ e como $f: (X, \theta') \longrightarrow (Y, \mathcal{Z})$ é contínua, então $f^{-1}(G) \in \theta'$.

Seja agora $f: X \longrightarrow Y$ e suponhamos que uma topologia $\mathcal{Z}$ é considerada

sobre X. Então a coleção $\rho = \{G \subset Y | f^{-1}(G) \in \mathcal{Z}\}$ é uma topologia sobre Y e, ainda, $f: (X, \mathcal{Z}) \longrightarrow (Y, \rho)$ é contínua (verifique). Deixamos proposto também mostrar que se $f: (X, \mathcal{Z}) \longrightarrow (Y, \rho')$ é contínua, então $\rho' \subset \rho$. Ou seja: qualquer topologia sobre Y para a qual f é contínua é menos fina que ρ. A topologia assim construída recebe o nome de *topologia coinduzida* por f sobre Y.

Se E_1 e E_2 são espaços topológicos, uma função $f: E_1 \longrightarrow E_2$ é chamada de *homeomorfismo* se (i) f é bijetora, (ii) f é contínua; (iii) f^{-1} também é contínua.

Como já vimos nos espaços métricos (Cap. IV – § 3 – 1) a condição (iii) acima é independente das demais. Outro exemplo disso é o seguinte: se $\mathcal{Z}_u$ é a topologia usual em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{Z}_d$ é a discreta, a função $f = id_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_u)$ é contínua e bijetora mas sua inversa $f^{-1}: (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{Z}_d)$ não é contínua porque se $p \in \mathbb{R}$, então $\{p\} \in \mathcal{Z}_d$ mas $f^{-1}(\{p\}) = \{p\} \notin \mathcal{Z}_u$.

Se existe um homeomorfismo $f: E_1 \longrightarrow E_2$ os espaços E_1 e E_2 se dizem *homeomorfos*. Uma propriedade que, quando válida para um certo espaço topológico, também vale para todos os espaços que lhe são homeomorfos, chama-se *propriedade topológica*.

Por exemplo: o axioma T_2 (como o T_1) é uma propriedade topológica pois se um espaço E é T_2 e F é homeomorfo a E, então F também é T_2. De fato: seja $f: E \longrightarrow F$ um homeomorfismo. Dados $r, s \in F$, $r \neq s$, existem $x, y \in E$, $x \neq y$, de maneira que $f(x) = r$ e $f(y) = s$. Como E é T_2, existem abertos disjuntos G_x e G_y tais que $x \in G_x$ e $y \in G_y$. Então $f(G_x)$ e $f(G_y)$ são abertos disjuntos com $r \in f(G_x)$ e $s \in f(G_y)$.

§ 8 — COMPACTOS

Como num espaço topológico não se pode contar de um modo geral com as noções métricas, as definições devem girar em torno de abertos. A definição de compacidade segundo Heine-Borel atende a esse requisito. Tal definição foi introduzida em 1924 por Alexandroff e Urysohn para traduzir o que eles chamavam "bicompacidade". O prefixo "bi" caiu, a partir de 1940, devido aos Bourbaki. Estes contudo exigiam na sua definição que o espaço fosse também T_2, o que contudo não se consagrou.

Um subconjunto A de um espaço topológico E se diz *compacto* se, para toda família (G_i) de abertos tal que $\cup G_i \supset A$, existe uma subfamília finita $(G_{i_1}, \ldots, G_{i_n})$ de maneira que $G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset A$. A família (G_i) e a subfamília $(G_{i_1}, \ldots, G_{i_n})$, nessas condições, são chamadas, respectivamente, *recobrimento aberto* e *subrecobrimento aberto* de A. O espaço se diz compacto se o conjunto E é compacto.

Exemplo: Seja $\mathcal{T}$ a topologia cofinita sobre um conjunto infinito E. Se (G_i) é um recobrimento aberto de E, tomemos um membro $G_0 = E - \{a_1, \ldots, a_n\}$ dessa família. Como $a_1, \ldots, a_n \in E$, existem $G_1, \ldots, G_n$ nesse recobrimento, de modo que $a_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Logo $E \subset G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_n$ e portanto $(E, \mathcal{T})$ é compacto.

Um subconjunto A de um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ se diz *seqüencialmente compacto* se toda seqüência de pontos de A admite uma subseqüência que converge para um ponto de A.

Exemplo: Sobre $\mathbb{R}$ consideremos a topologia $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{G \subset \mathbb{R} \mid 0 \notin G\}$. Toda seqüência (x_n) em $\mathbb{R}$ converge para 0 nesse espaço pois o único aberto que contém 0 é o $\mathbb{R}$ e $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant 1$. Logo $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é seqüencialmente compacto.

Embora a definição acima seja, nos espaços métricos, equivalente à condição de Heine-Borel, como já vimos, para espaços topológicos em geral compacidade e compacidade seqüencial são coisas independentes entre si. Para exemplos veja Thron W. I. – Topological Structures – 1966 – pg. 126.

A compacidade é uma propriedade topológica. De fato, seja $f: E \longrightarrow F$ um homeomorfismo e suponhamos E compacto. Se (G_i) é um recobrimento aberto de F, então $(f^{-1}(G_i))$ é um recobrimento aberto de E. Logo existem $i_1, \ldots, i_n$ tais que

$$f^{-1}(G_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{i_n}) \supset E$$

Como $f(f^{-1}(B)) = B$, $\forall B \subset F$, pois f é bijetora, então

$$G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset f(E) = F$$

Proposição 13: Se E é um espaço compacto e $A \subset E$ é fechado, então A é compacto.

Demonstração: Seja (G_i) um recobrimento aberto de A. Então $(G_i \cup A^c)$ é um recobrimento aberto de E que é compacto. Assim, se $(G_{i_1} \cup A^c) \cup \ldots \cup (G_{i_n} \cup A^c) \supset E = A \cup A^c$, então $G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset A$. ■

Proposição 14: Seja E um espaço T_2. Se $A \subset E$ é compacto, então A é fechado.

Demonstração: Seja $p \in A^c$. Para cada $x \in A$ existem abertos disjuntos G_x e H_x tais que $x \in G_x$ e $p \in H_x$. Como $(G_x)_{x \in A}$ é um recobrimento aberto de A, se $G = G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n} \supset A$, então $H = H_{x_1} \cap \ldots \cap H_{x_n}$ é um aberto que contém p e $H \subset A^c$ (prove). Logo A^c é aberto e portanto A é fechado. ■

Não faremos aqui a demonstração da

Proposição 15: Sejam E e F espaços topológicos. Considerando sobre $E \times F$ a topologia produto, então $E \times F$ é compacto se, e somente se, E e F são compactos.

§ 9 — CONEXOS

Como a definição de conexidade vista no capítulo VI se apóia em conjuntos abertos unicamente pode ela ser reproduzida para espaços topológicos sem mudanças.

Uma *desconexão* de um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ é um par de abertos G, H, ambos não vazios, tais que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = E$. Isto é, G e H formam uma partição não trivial de E. Quando existe uma desconexão de um espaço E este se diz *desconexo*. Um espaço que não é desconexo recebe o nome de *espaço conexo*.

Exemplos:

1. O espaço $\mathbb{R}$ dotado da topologia cofinita é conexo porque considerando os abertos $G = \mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_p\}$ e $H = \mathbb{R} - \{b_1, \ldots, b_q\}$, então $G \cap H = \mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q\} \neq \emptyset$.

2. Se E tem pelo menos dois elementos e considerarmos a topologia discreta sobre E, então o espaço obtido é desconexo. De fato, para todo $a \in E$, $G = \{a\}$ e $H = E - \{a\}$ formam uma desconexão de E.

Os resultados principais sobre conexidade, ao nível deste texto, são os mesmos já vistos no Cap. VI. Assim as proposições 1 (e corolário), 2, 3, 4 e 5 (e corolário) vistas nesse capítulo, valem, e suas demonstrações são análogas, quando se substitui a expressão "espaço(s) métrico(s)" por "espaço(s) topológico(s)".

Toda a teoria do § 5 – Cap. VI também pode ser reproduzida para os espaços topológicos com essa mudança apenas.

EXERCÍCIOS

(§ 2)

1. Verifique se são topologias

a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ sobre $E = \{a, b, c, d, e\}$.

b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\} \cup \{]0, 1 - \frac{1}{n}[\mid n = 2, 3, 4, \ldots\}$ sobre $E =]0, 1[$.

c) $\mathcal{T} = \{G \subset [-1, 1] \mid 0 \in G \text{ ou }]-1, 1[\subset G\}$ sobre $E = [-1, 1]$.

2. Considere a seguinte coleção de subconjuntos de $\mathbb{R}$: $\mathscr{B} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \cup \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Mostre que satisfaz as condições do exemplo 11 (§ 2) e portanto a família de todas as uniões de membros de $\mathscr{B}$ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$.
b) Mostre que todo intervalo $]a, b[$ pertence a essa topologia.

3. Sobre $\mathbb{R}$ considere as seguintes topologias: usual, cofinita e $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$. Para cada um dos espaços assim obtidos ache interior, fêcho e conjunto derivado de: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $A =]1, 2] \cap \mathbb{Q}$, $C = \{0\} \cup \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ e $D =]-\infty, 0[$.

4. Se A é um subconjunto de um espaço topológico E, mostre que $\overline{A} = = A \cup A'$.

5. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e considere sobre $X \subset E$ $(X \neq \emptyset)$ a topologia induzida $\mathcal{T}_X$. Dado $A \subset X$, mostre que se A é um aberto em E, então A é aberto em X.

6. Se $(X, \mathcal{T}_X)$ é um subespaço de $(E, \mathcal{T})$ e $L \subset X$, mostre que L é fechado em X se, e somente se, $L = F \cap X$, onde F é fechado em E.

7. Seja $(X, \mathcal{T}_X)$ um subespaço de $(E, \mathcal{T})$. Dado $A \subset X$, indiquemos por $(\overline{A})_X$ e $(\overset{\circ}{A})_X$ o fêcho e o interior, respectivamente, de A em relação ao subespaço. Assim sendo, prove que:

a) $(\overline{A})_X = \overline{A} \cap X$
b) $\overset{\circ}{A} = (\overset{\circ}{A})_X \cap \overset{\circ}{X}$

8. a) Verifique que a coleção $\beta = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots\}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ satisfaz as condições do exemplo 11 (§ 2).

b) Sendo $\mathcal{T}$ a topologia das uniões de β, ache $\overset{\circ}{A}$ e $\overline{A}$ quando $A = = \{10, 11, 12, \ldots, 100\}$.
c) Ainda nesse caso, se $A \subset \mathbb{N}$ é não vazio mostre que $A' \neq \emptyset$.

9. Mostre que todo subconjunto infinito de E, cuja topologia é a cofinita, é denso em E, isto é, seu fêcho é E.

10. Sobre $E = \{a, b, c, d\}$ construa a topologia das uniões de $\mathscr{B} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ e, em relação a essa topologia, ache os pontos para os quais converge $(a, d, a, d, \ldots)$.

(§ 3)

1. Seja E um espaço T_1 (respect. T_2). Mostre que todo subespaço de E também é T_1 (respect. T_2). *Obs.:* Uma propriedade de um espaço que vale para todos os seus subespaços chama-se *propriedade hereditária.*

2. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico tal que E é finito. Mostre que são equivalentes as afirmações

a) E é T_1
b) E é T_2
c) $\mathcal{T}$ é a topologia discreta.

3. Se A é um subconjunto finito de um espaço T_1, mostre que $A' = \emptyset$.

4. Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia das uniões de $\mathscr{B} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}\}$ é T_2.

5. Prove que o produto de dois espaços T_1 (respect. T_2), também é T_1 (respect. T_2).

6. Seja $\mathcal{T}$ a topologia coenumerável sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é T_2 e portanto não é metrizável.

(§ 4)

1. Sobre $E = \{a, b, c, d\}$ considere a topologia das uniões de $\mathscr{B} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Ache, para cada ponto de E, uma base local com o menor número possível de abertos.

2. Mostre que o primeiro axioma de enumerabilidade é uma propriedade hereditária.

3. Mostre que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade:

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$
b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ onde $\mathcal{T}$ é a topologia das uniões de $\mathscr{B} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}\}$

4. Se $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ é uma base enumerável e decrescente num ponto p, mostre que $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots\}$ também é uma base local enumerável e decrescente em p, para toda subseqüência $i_1, i_2, \ldots$ de $1, 2, 3, \ldots$

5. Seja p um ponto de um espaço E. Se E é T_1 e $\mathscr{B}_p$ é uma base local em p, mostre que existe $B \in \mathscr{B}_p$ de maneira que $q \notin B$, onde $q \in E$, $q \neq p$.

(§ 5)

1. Sobre $E = \{a, b, c, d, e\}$, considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Ache uma base de E constituída de 3 (três) conjuntos abertos apenas.

2. Mostre que o segundo axioma de enumerabilidade é uma propriedade hereditária.

3. Sobre $E \neq \emptyset$ considere a topologia discreta. Mostre que o espaço assim obtido satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se, e somente se, E é enumerável.

4. Sobre $\mathbb{R}$ considere a topologia das uniões de $\mathscr{B} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[a, b[\,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Mostre que o espaço $\mathbb{R}$ assim obtido não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

5. Mostre que o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\}$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

(§ 6)

1. Seja E um espaço cuja topologia é a discreta. Mostre que E é separável se, e somente se, E é enumerável.

2. Mostre que é separável o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\}$.

3. Prove que o produto de dois espaços separáveis é separável.

4. Mostre que não é hereditária a condição de um espaço ser separável.

(§ 7)

1. Considere os seguintes espaços topológicos: $E = \{a, b, c, d, e\}$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ e $F = \{x, y, z\}$ com a topologia $W = \{\emptyset, F, \{x\}, \{z\}, \{x, z\}\}$. Estude a continuidade de $f: E \longrightarrow F$, dada por $f(a) = f(b) = x$, $f(c) = f(d) = y$ e $f(e) = z$, em cada ponto de E.

2. Considere o espaço $(E, \mathcal{T})$, onde $E = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c, d\}\}$. Mostre que $f: E \longrightarrow E$ dada por $f(b) = f(c) = f(d) = a$ e $f(a) = d$ é contínua.

3. Em $E = \{a, b, c, d, e\}$ considere as topologias $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ e $\theta = \{\emptyset, E, \{a, b, c\}, \{d\}, \{a, b, c, d\}, \{e, d\}\}$. Mostre que a função $f: (E, \theta) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ definida por $f(a) = f(b) = f(c) = a$, $f(e) = b$ e $f(d) = c$ é contínua. É seqüencialmente contínua? Justifique.

4. Sejam $\mathcal{T}_u$ e $\mathcal{T}_d$ as topologias usual e discreta, respectivamente, sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua, mas que $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ não é contínua.

5. Mostre que são propriedades topológicas os axiomas T_1, T_2, primeiro e segundo de enumerabilidade e a condição "separável".

6. Seja E um espaço T_2. Se $f: E \longrightarrow E$ é contínua, prove que $L = \{x \in E \,|\, f(x) = x\}$ é fechado em E.

7. Seja $f: (X, \theta) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$, onde θ é a topologia induzida por f sobre X e suponhamos Y um espaço T_2. Mostre que: (X, θ) é $T_2 \Longleftrightarrow$ f é injetora.

(§ 8)

1. Mostre que é compacto o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{G \subset \mathbb{R} \,|\, 0 \notin G\}$.

2. Mostre que não são compactos:

a) O espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\}$.

b) O espaço $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é a topologia das uniões de $\mathscr{B} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \ldots\}$.

3. Sobre $\mathbb{R}$ considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Mostre que são compactos $A = [2, 6]$ e $B =]3, 5[\cup]7, 8]$.
b) Mostre que $A \cap B$ não é compacto.

4. Considere sobre $\mathbb{Z}^*$ a topologia das uniões de $\mathcal{B} = \{\emptyset, \mathbb{Z}^*\} \cup \{\{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \ldots\}$. Mostre que o espaço assim obtido não é seqüencialmente compacto.

5. Mostre que um subconjunto fechado de um espaço seqüencialmente compacto é seqüencialmente compacto.

(§ 9)

1. Sejam $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ topologias sobre E. Mostre que se $(E, \mathcal{T}_1)$ é desconexo, então $(E, \mathcal{T}_2)$ também é desconexo.

2. Mostre, por um exemplo, que a conexidade não é uma propriedade hereditária.

3. Se $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ são topologias sobre E e $(E, \mathcal{T}_2)$ é conexo, mostre que $(E, \mathcal{T}_1)$ também é conexo.

4. Um espaço E se diz *totalmente desconexo* se, para todo $x \in E$, a componente conexa $C(x) = \{x\}$. Mostre que

a) O espaço $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela usual de $\mathbb{R}$ é totalmente desconexo.
b) Todo espaço totalmente desconexo é T_2.

5. Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$ é conexo.

ÍNDICE ALFABÉTICO

E

F

H

I

L

M

N

P

Q

R

S

T

U

V