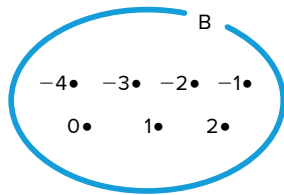


# Teoria elementar dos conjuntos

## Representações de conjuntos

$$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 3\}$$



## Número de subconjuntos

$n(S) = x \Rightarrow n(P(S)) = 2^x$ , no qual  $P(S)$  é o conjunto das partes de  $S$ .

## Relação de inclusão

Relação entre conjuntos:

$$\{-4, -2\} \subset \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \supset \{-4, -2\}$$

$$\{-5\} \not\subset \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\{-5\} \not\supset \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

## Relação de pertinência

Relação entre elementos e conjuntos:

$$-2 \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \quad -5 \notin \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

## Operações entre conjuntos

**União entre conjuntos:**  $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

**Interseção entre conjuntos:**  $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

**Diferença entre conjuntos:**  $A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

**Complementar entre dois conjuntos:** Se  $B \subset A$ ,  $C_A^B = A - B$

**Complementar de um conjunto em relação ao universo:**  $\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$

**Leis de De Morgan:**  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  e  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Exemplos:

		U = R		
		A = {1, 2, 3} B = {1/4, 1/2, 1, 2}	A = {-3, -2, -1} B = {1, 2, 3, 5}	A = {π, 2π, 3π, 4π, 5π} B = {2π, 4π}
A ∪ B				
	$A \cup B = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	$A \cup B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 5\}$	$A \cup B = \{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi\}$	
A ∩ B				
	$A \cap B = \{1, 2\}$	$A \cap B = \emptyset$	$A \cap B = \{2\pi, 4\pi\}$	
A - B				
	$A - B = \{3\}$	$A - B = \{-3, -2, -1\}$	$A - B = \{\pi, 3\pi, 5\pi\}$	

## Exercícios de sala

1. Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4, \emptyset\}$  e  $B = \{2, 3, 4, \{5\}\}$ , complete as sentenças abaixo com os sinais  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$ .
- $1 \text{ ___ } A$
  - $\{1\} \text{ ___ } A$
  - $\{1, 2, 3\} \text{ ___ } B$
  - $5 \text{ ___ } B$
  - $\emptyset \text{ ___ } B$
  - $\{2, 3\} \text{ ___ } A$
  - $\{5\} \text{ ___ } B$
2. Sendo  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  e  $C = \{2, 5, 6\}$  subconjuntos do universo  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , liste todos os elementos de cada conjunto a seguir.
- $A \cup B$
  - $A \cap B$
  - $A \cap B \cap C$
  - $A \cup (B \cap C)$
  - $A - B$
  - $B - C$
  - $\overline{A}$
  - $\overline{A \cap B}$
3. **PUC-Rio 2020** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Sabemos que  $A = \{2, 4\}$ ,  $A \cap B = \{4\}$  e  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Quantos elementos tem o conjunto  $B$ ?
- 2
  - 3
  - 4
  - 5
  - 6
4. **IFMT 2020** Sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos quaisquer, julgue as assertivas abaixo e assinale a alternativa **CORRETA**:
- $A \cap (A \cup B) = A$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Estão corretas:
- Apenas as assertivas I e II estão corretas.
  - Apenas as assertivas I e IV estão corretas.
  - Apenas as assertivas II e III estão corretas.
  - Apenas as assertivas III e IV estão corretas.
  - Todas as assertivas estão corretas.

5. **UEPG/PSS-PR 2020** Considerando que  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A \cap B = \{2, 3\}$  e  $B - A = \{5, 6\}$ , assinale o que for correto.

01  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

02  $A - B = \{1, 4\}$ .

04  $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ .

08  $A = \{2, 3, 5, 6\}$

Soma:

6. Em uma sala de aula:

- Todo aluno que gosta de Física também gosta de Matemática
- Existem alunos que gostam de Física e Química
- Há alunos que gostam apenas de Química

Assinale a alternativa correta sobre essa sala de aula:

- Há alunos que gostam apenas de Física.
- Não há aluno que goste de Matemática e também de Química.
- Há alunos que gostam das três disciplinas.
- Se um aluno gosta de Química ou Física, ele também gosta de Matemática.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 1

I. Leia as páginas de **5 a 10**.

II. Faça os exercícios de **1 a 6 e 8** da seção “Revisando”.

III. Faça os exercícios propostos **1, 3, 5, 7, 9** e de **11 a 13**.

## Número de elementos da união de conjuntos

Representamos o número de elementos de um conjunto  $X$  pela notação  $n(X)$ . Por exemplo, temos:

- $X = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(X) = 3$ ;
- $Y = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow n(Y) = 5$ ;
- $W = \{7\} \Rightarrow n(W) = 1$ ;
- $Z = \emptyset \Rightarrow n(Z) = 0$ .

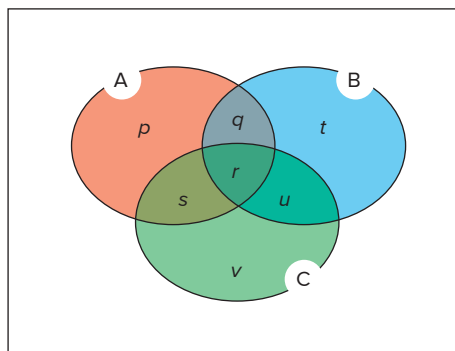
Podemos relacionar o número de elementos de dois conjuntos  $A$  e  $B$  e da interseção  $A \cap B$  com o número de elementos da união  $A \cup B$ :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Uma expressão análoga vale para três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Outra forma possível de determinar a quantidade de elementos da união e da interseção de conjuntos é por meio do diagrama de Euler-Venn.



### Exercícios de sala

1. **Unicamp-SP 2017** Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,
  - a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.
  - b) nenhuma pessoa leu os dois livros.
  - c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.
  - d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

**2. Enem 2020** Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são:

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Disponível em: <http://saude.hsw.uol.com.br>. Acesso em: 15 abr. 2012 (adaptado).

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente. Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a

- 30.
- 60.
- 70.
- 90.
- 100.

**3. Unifor-CE 2020** Uma pesquisa feita entre 95 crianças acerca de suas preferências por frutas é mostrada abaixo na tabela.

Frutas	Resposta das crianças
Maçã	60
Uva	45
Banana	55
Maçã e uva	15
Maçã e banana	30
Uva e banana	25
Maçã, uva e banana	5

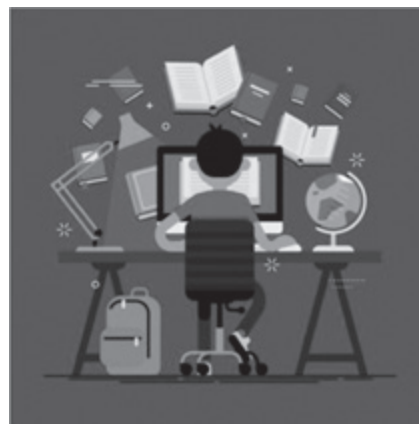
Baseado na tabela acima, podemos afirmar que o número de crianças que gostam somente de uma fruta é:

- 20
- 35
- 40
- 45
- 50

**4. Unifor-CE 2021** A situação da pandemia provocada pelo COVID-19, tendo como consequência necessária a medida de isolamento social, demandou às escolas, num primeiro momento, a suspensão das atividades presenciais. Nesse sentido, as redes escolares, privadas e públicas, depararam-se com inúmeros desafios sobre a viabilização do processo remoto de escolarização. Um dos principais desafios teve a ver com a aquisição de dispositivos (computador, smartphone, *tablets* etc.) e o acesso à internet de qualidade. Uma pesquisa realizada com 1000 alunos, quanto ao tipo de equipamento com que acessam a internet para assistir às aulas remotas, constatou que:

- 20% dos alunos utilizam somente computador portátil;
- 12% dos alunos utilizam somente *tablet*;
- 35% dos alunos utilizam somente celular;
- 28% dos alunos utilizam *tablet*;
- 40% dos alunos utilizam computador portátil;
- 58% dos alunos utilizam celular;
- 11% dos alunos utilizam somente computador portátil e celular.

Tomando por base os dados desta pesquisa e considerando que existem alunos que utilizam computador portátil, *tablet* e celular, e, além disso, sempre existem alunos que utilizam dois dos equipamentos, é correto afirmar que o número de alunos que acessam a internet para assistir as aulas remotas, utilizando mais de um equipamento, é



- 150.
- 170.
- 250.
- 270.
- 350.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 1

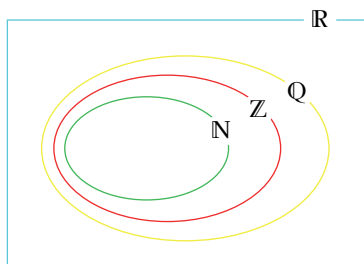
- Leia as páginas de **10 a 12**.
- Faça os exercícios **7 e 9** da seção “Revisando”.
- Faça os exercícios propostos **15**, de **17 a 19**, **21**, **25**, **26** e **29**.

# Conjuntos numéricos e intervalos

## Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos são:

- conjunto dos números naturais:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ;
- conjunto dos números inteiros:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
- conjunto dos números racionais:  $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$ ;
- conjunto dos números irracionais: complemento dos racionais em relação aos reais, e representado por  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{Q}'$  ou  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ;
- conjunto dos números reais:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ .



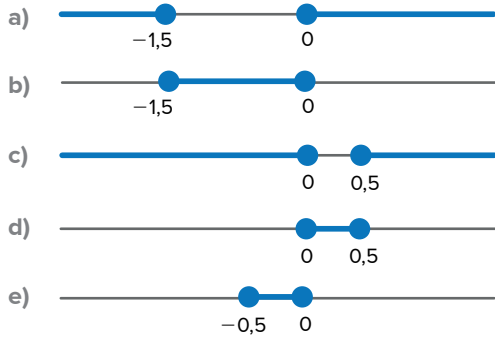
## Intervalos reais

Podemos representar intervalos reais utilizando a reta numérica, a notação de conjuntos ou a de colchetes.

Reta numérica	Notação de colchetes	Notação de conjunto
	$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
	$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
	$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

## Exercícios de sala

1. **Unesp 2018** Renata escolhe aleatoriamente um número real de  $-4$  a  $2$  e diferente de zero, denotando-o por  $x$ . Na reta real, o intervalo numérico que necessariamente contém o número  $\frac{2-x}{x}$  é:



2. **UEM-PR 2016** Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 5\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 8\} \text{ e}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 9\},$$

e assinale o que for CORRETO.

01  $(A \cup D) - (A \cap D) = [-3, 0]$

02  $(B \cap D) - D = ]0, 1]$

04  $(C \cup D) \cap B = ]0, 9]$

08  $(B \cap D) \subset C$

16  $\mathbb{R} - B = ]-\infty, 0[$

Soma:

3. **Cefet-MG 2020** Sejam  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  respectivamente, os conjuntos dos números inteiros e racionais, o número que **NÃO** pertence ao conjunto  $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$  é

a)  $3,14$

b)  $1,33333\dots$

c)  $-\frac{7}{5}$

d)  $-1$

4. **IFMT 2020** Dados os conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$B = \{x \in A \mid x \text{ é ímpar}\} \text{ e}$$

$$C = \{x \in A \mid 3 < x \leq 9\},$$

julgue as assertivas abaixo e assinale a alternativa correta:

I.  $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

II.  $B - C = \{1, 3\}$

III.  $B \cap C = \{5, 7, 9\}$

IV.  $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

V.  $C - B = \{4, 6, 8\}$

- a) Apenas as assertivas I e II estão incorretas.  
 b) Apenas as assertivas II e III estão corretas.  
 c) Apenas as assertivas III e IV estão incorretas.  
 d) Apenas as assertivas IV e V estão incorretas.  
 e) Apenas as assertivas II, III e V estão corretas.

## Guia de estudos

Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 1

I. Leia as páginas 12 e 13.

II. Faça os exercícios propostos de 30 a 36.

# Funções

## Produto cartesiano

Dados dois conjuntos A e B, definimos o **produto cartesiano**  $A \times B$  entre esses dois conjuntos por:

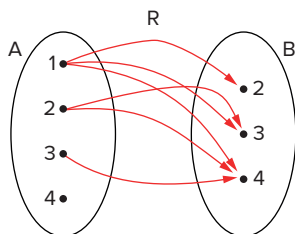
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

O número de elementos de um produto cartesiano é dado por  $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ .

## Relação de A em B

Uma **relação** R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano  $A \times B$ , isto é,  $R \subset A \times B$ .

Podemos representar uma relação utilizando um diagrama de flechas. Por exemplo, o diagrama abaixo representa a relação  $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  de  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  em  $B = \{2, 3, 4\}$ .

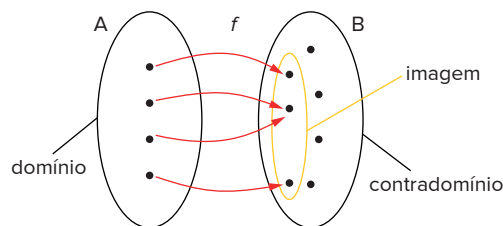


## Função de A em B

Uma **função**  $f$  de A em B, geralmente denotada por  $f: A \rightarrow B$ , é uma relação na qual cada elemento de A se associa a um, e somente um, elemento de B.

Em uma função  $f: A \rightarrow B$ :

- A notação  $f(x) = y$  indica que  $(x, y) \in f$ , isto é, a função  $f$  associa o elemento  $x$  de A ao elemento  $y$  de B;
- A é o conjunto de partida ou domínio de  $f$ , e é representado por  $D(f) = A$ ;
- B é o conjunto de chegada ou contradomínio de  $f$ , e é representado por  $CD(f) = B$ ;
- a imagem de  $f$ , representada por  $Im(f)$ , é o subconjunto do contradomínio no qual estão todos os valores de  $y$  que são correspondentes de algum valor de  $x$  do domínio.



## Exercícios de sala

1. Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$ , liste os elementos das relações:

- $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$
- $M = \{(x, y) \in B \times A \mid y < x\}$

2. **Fuvest-SP** Considere a função  $f(x) = 1 - \frac{4x}{(x+1)^2}$ , a

qual está definida para  $x \neq -1$ . Então, para todo  $x \neq 1$  e  $x \neq -1$ , o produto  $f(x)f(-x)$  é igual a

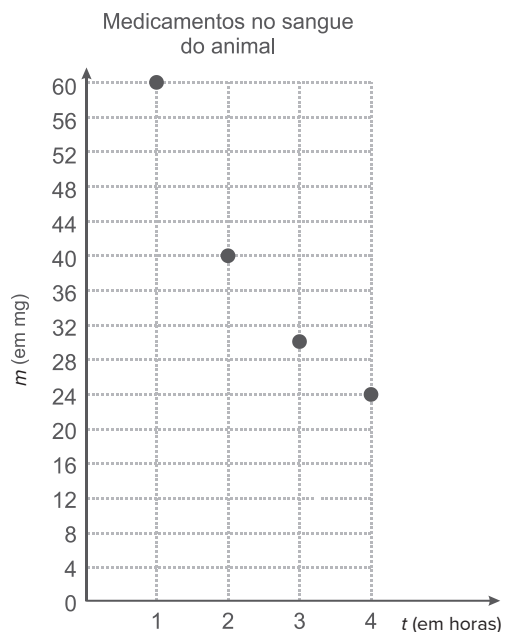
- 1
- 1
- $x + 1$
- $x^2 + 1$
- $(x - 1)^2$



3. **Unesp 2022** O preço da passagem de ônibus convencional de uma cidade do interior de São Paulo para a capital é de R\$ 108,00. Adriana vai estudar nessa cidade e deseja visitar seus pais em São Paulo durante alguns finais de semana. Além da opção de fazer a viagem de ônibus convencional, ela também cogita a possibilidade de fazer a viagem com seu carro, cujo consumo de combustível na estrada é de 14 km por litro de gasolina. Considerando R\$ 5,60 o preço do litro de gasolina e 20 centavos por quilômetro rodado o custo geral de manutenção do carro, os custos da viagem de ônibus e da viagem de carro são equivalentes. De acordo com esses dados, a distância considerada entre a cidade em que ela vai estudar e a capital é igual a

- a) 182 km.
- b) 180 km.
- c) 185 km.
- d) 178 km.
- e) 176 km.

4. **UEL-PR 2017** No plano cartesiano a seguir, cada um dos pontos representa a massa ( $m$ ) de um medicamento existente no sangue de um animal no instante ( $t$ ) em que foi feita cada medição depois do instante inicial,  $t = 0$ , da aplicação.



Considerando todos os instantes entre as medições apresentadas no plano cartesiano, responda aos itens a seguir.

- a) Sabendo que a relação que descreve a massa ( $m$ ) do medicamento, após  $t$  horas da aplicação, é dada por  $m(t) = \frac{C}{D + t}$ , em que  $C$  e  $D$  são constantes, determine  $C$  e  $D$  na relação dada. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.
- b) Após quanto tempo da administração, a massa desse medicamento será inferior a 60% da massa que foi medida depois de 2 horas da aplicação? Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.



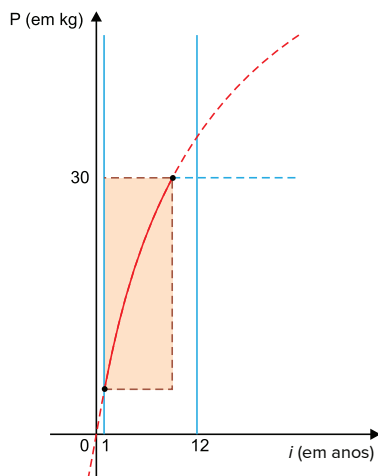
Utilize o texto a seguir para responder às questões 5 e 6.

As regras de Clark e Young são muito utilizadas para estabelecer a dosagem pediátrica de uma medicação a partir da dosagem padrão do adulto. Por exemplo, para a dosagem padrão do adulto de 1 grama de certa medicação, a dosagem pediátrica (DP) correspondente será dada de acordo com a seguinte tabela:

Nome da regra	Domínio de validade da regra	Dosagem pediátrica (em gramas)
Regra de Clark	Peso corporal $\leq 40$ kg	$DP = \frac{\text{peso da criança (kg)}}{70 \text{ kg}}$
Regra de Young	1 a 12 anos de idade	$DP = \frac{\text{idade da criança (anos)}}{\text{idade da criança} + 12}$

(www.toledo.pr.gov.br. Adaptado.)

Para o exemplo da tabela, o gráfico que indica valores iguais de DP nas duas fórmulas está representado pela linha vermelha a seguir, sendo  $P$  e  $i$ , respectivamente, o peso e a idade da criança:



5. FICSAE-SP 2020 A fórmula da função descrita no gráfico é dada por

a)  $P = \frac{12i}{70 - i}$

d)  $P = \frac{70(i + 12)}{i}$

b)  $P = \frac{35i}{i + 6}$

e)  $P = \frac{-i^2 + 27i}{5}$

c)  $P = \frac{70i}{i + 12}$

6. FICSAE-SP 2020 O domínio da função representada no gráfico é

a)  $1 \leq i \leq 9$

c)  $1 \leq i \leq \frac{18}{5}$

e)  $1 \leq i \leq \frac{19}{2}$

b)  $1 \leq i \leq 8$

d)  $1 \leq i \leq \frac{17}{2}$



## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 2

- I. Leia as páginas de 23 a 27.
- II. Faça os exercícios de 1 a 4 da seção “Revisando”.

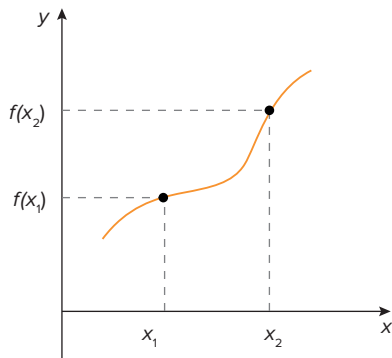
- III. Faça os exercícios propostos 1, 3, 5, 8, 10, 11, 13 e 17.



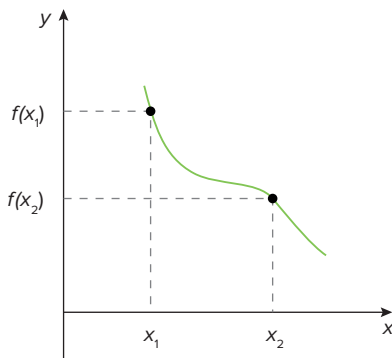
# Classificações das funções

## Crescente ou decrescente

- Função crescente:  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

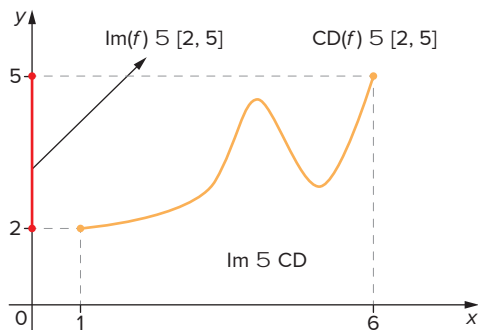


- Função decrescente:  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

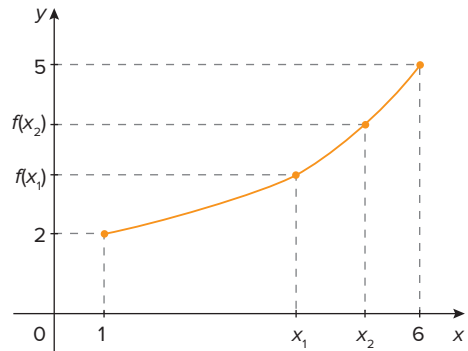


## Sobrejetora, injetora e bijetora

- Função sobrejetora:  $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$



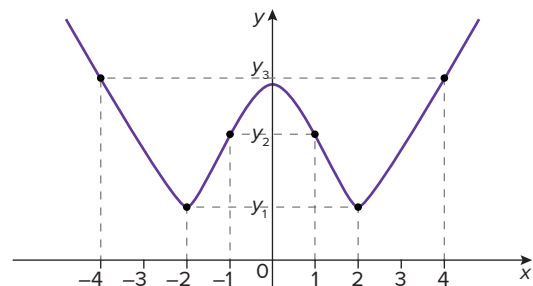
- Função injetora:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



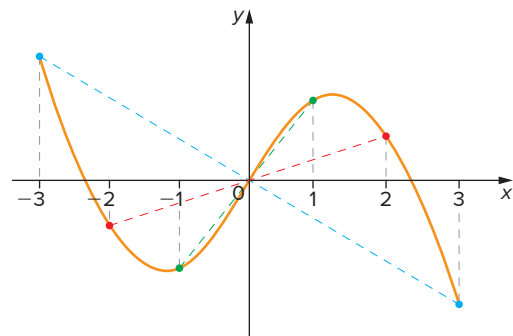
- Função bijetora: uma função é bijetora se for sobrejetora e injetora.

## Paridade

- Função par:  $f(-x) = f(x)$   
O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

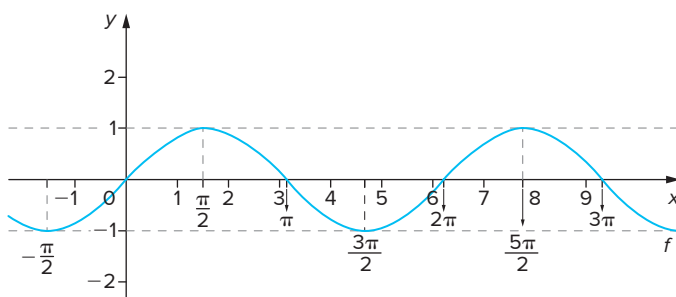


- Função ímpar:  $f(-x) = -f(x)$   
O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.



## Periodicidade

Uma função  $f$  é periódica de período  $p$  quando  $f(x) = f(x + p)$ .



O gráfico acima é da função seno, de lei  $f(x) = \text{sen } x$ , que é periódica de período  $p = 2\pi$ .

## Interpretação de gráficos

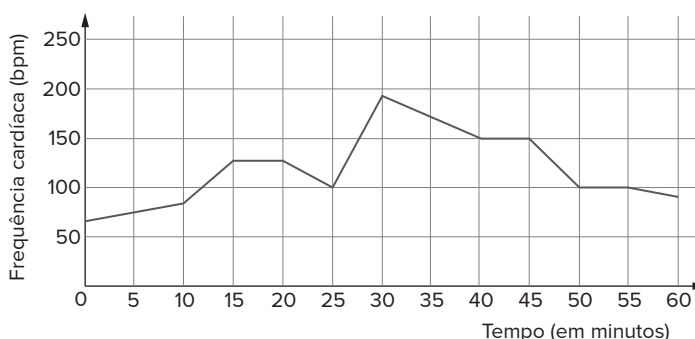
A partir do gráfico de uma função, podemos identificar diversos fatos a seu respeito, como em quais intervalos a função assume determinados valores, se ela é crescente ou decrescente, par ou ímpar, sobrejetora, injetora ou bijetora, entre outras informações.

### Exercícios de sala

- Unifor-CE 2021** A frequência cardíaca durante o exercício pode ajudar na perda de peso e na queima de gordura. Segundo especialistas do site Medical News Today, a frequência cardíaca máxima é de 220 batimentos por minuto (bpm). Para determinar o valor máximo adequado para um indivíduo, considerando a idade, basta fazer o seguinte cálculo: frequência cardíaca máxima – idade. De acordo com a Associação Americana do Coração (AHA, na sigla em inglês), durante o exercício, a frequência cardíaca deve ficar entre 50% e 85% do valor máximo, levando em consideração a idade.

Disponível em: [www.veja.abril.com.br](http://www.veja.abril.com.br). Acesso em: 13 nov. 2020. (Adaptado)

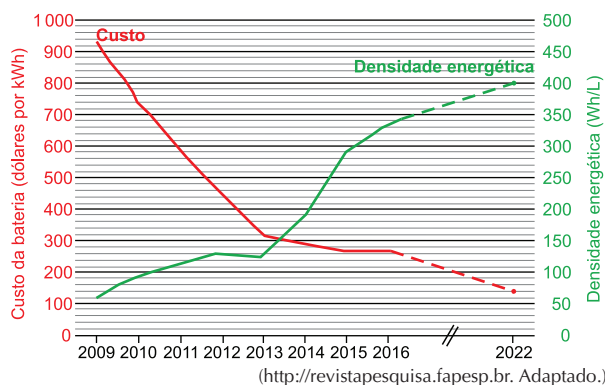
O gráfico a seguir mostra a taxa de batimentos cardíacos de uma pessoa de 20 anos durante a prática de exercícios físicos por uma hora em um determinado dia.



Em que momentos do treino dessa pessoa, a taxa de batimentos cardíacos estava em desacordo com o recomendado pelos especialistas?

- Nos primeiros 15 minutos e nos últimos 10 minutos.
- Nos primeiros 10 minutos e na metade do treino.
- Nos primeiros 12 minutos e nos últimos 5 minutos.
- Nos primeiros 12 minutos, na metade do treino e nos últimos 5 minutos.
- Em nenhum momento a taxa esteve fora do que os especialistas recomendam.

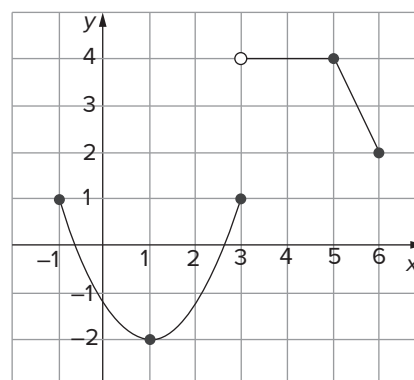
2. **FICSAE-SP 2019** O gráfico mostra a evolução e a projeção do custo (em dólares por kWh) e da densidade energética (em Wh por L) das baterias utilizadas em carros elétricos.



Com base no gráfico, no ano de 2009, uma bateria de 30 kWh custava em torno 28 000 dólares e tinha volume de 500 litros. Dado que 1 kWh é igual a 1 000 Wh, e de acordo com essa projeção, no ano de 2022, uma bateria de 30 kWh terá um custo e um volume iguais a

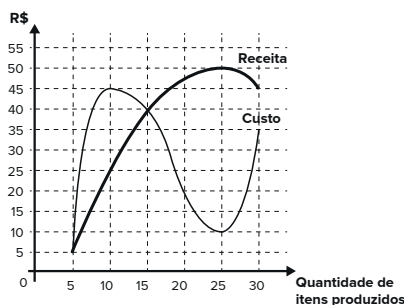
- 4 200 dólares e 75 litros.
- 4 200 dólares e 37,5 litros.
- 3 600 dólares e 75 litros.
- 2 100 dólares e 75 litros.
- 2 100 dólares e 37,5 litros.

3. Indique os intervalos em que a função representada abaixo é crescente, decrescente ou constante.



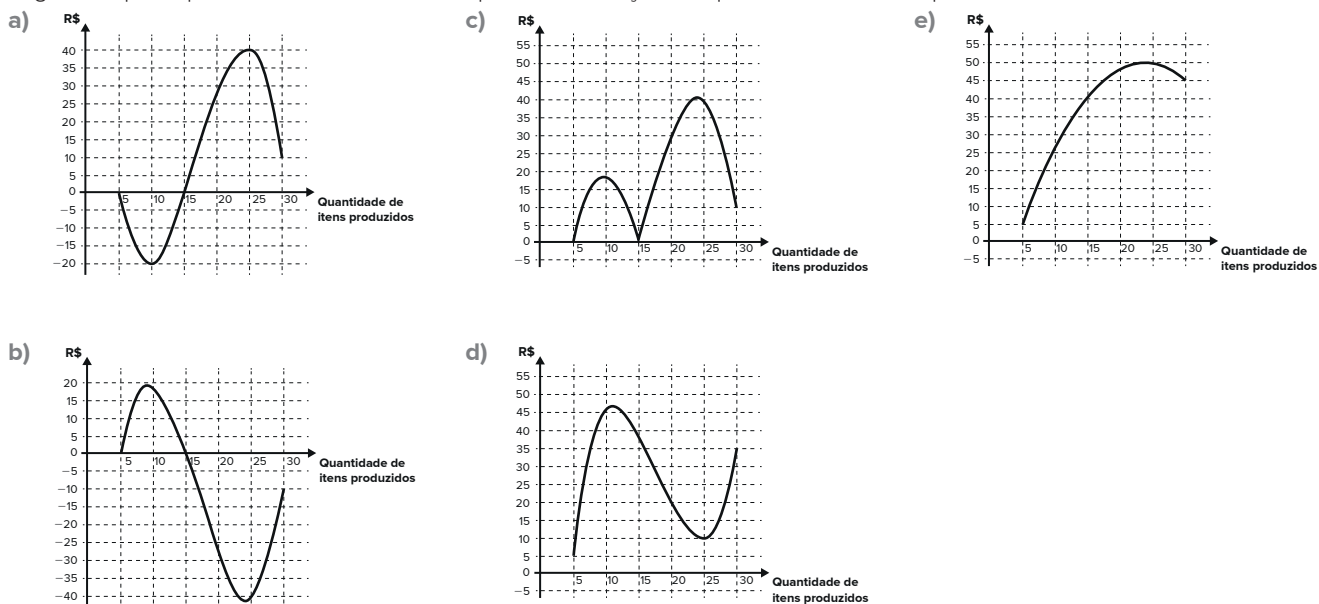
4. Verifique se cada função real abaixo pode ser classificada como função par ou função ímpar.
- $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$
  - $g(x) = \frac{|x|}{2x}$
  - $h(x) = 3x + 2$

5. **Enem PPL 2017** No primeiro ano do ensino médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B, de modo que os pares formados representem uma função  $f$  de A em B. Com base nessas informações, a classificação do tipo de função que está presente nessa relação é
- $f$  é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B.
  - $f$  é sobrejetora, pois cada par é formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B, sobrando um menino sem formar par.
  - $f$  é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B, para envolver a totalidade de alunos da turma.
  - $f$  é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A.
  - $f$  é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B, assim nenhum menino ficará sem par.
6. **Enem 2020** Um administrador resolve estudar o lucro de sua empresa, e para isso, traça o gráfico da receita e do custo de produção de seus itens, em real, em função da quantidade de itens produzidos.



O lucro é determinado pela diferença: Receita – Custo.

O gráfico que representa o lucro dessa empresa, em função da quantidade de itens produzidos é



## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 2

- Leia as páginas de **27 a 31**.
- Faça os exercícios de **5 a 10** da seção “Revisando”.
- Faça os exercícios propostos **18, 20, 25, 26, 30, 33, 34 e 36**.

## FRENTE 1

### AULAS 9 E 10

# Função do 1º grau

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é do 1º grau se sua lei de formação tiver a forma:

$$f(x) = ax + b, \text{ com } a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

## Coefficiente linear

O coeficiente  $b$  da função do 1º grau é chamado **coeficiente linear** dessa função. A interseção entre o gráfico de  $f$  e o eixo  $y$  é o ponto  $(0, b)$ .

## Coefficiente angular

O coeficiente  $a$  da função do 1º grau é chamado **coeficiente angular** dessa função. Ele indica a variação dos valores de  $y$  em relação aos valores de  $x$ :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por isso, temos:

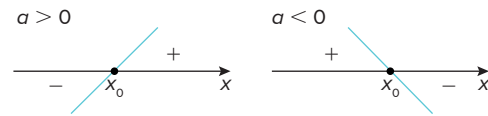
- $a > 0 \rightarrow$  função crescente
- $a < 0 \rightarrow$  função decrescente

## Raiz da função do 1º grau

A raiz da função do 1º grau de lei  $f(x) = ax + b$  é o valor de  $x$  para o qual  $f(x) = 0$ .

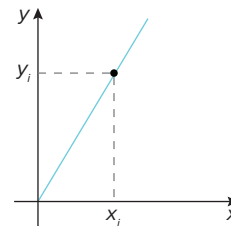
## Estudo do sinal

Sendo  $x_0$  raiz de uma função do 1º grau, temos:



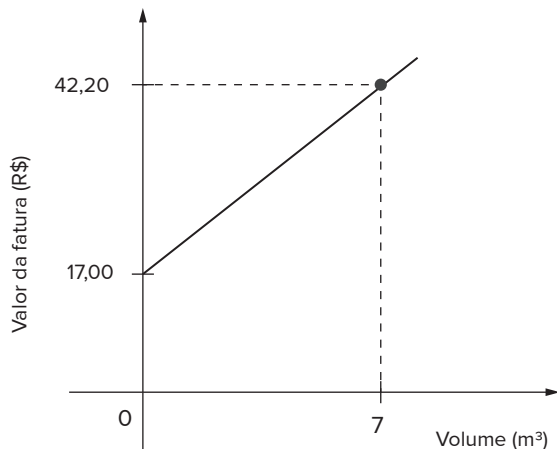
## Grandezas proporcionais

Se um conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  que relacionam duas grandezas é tal que a razão  $\frac{x}{y}$  é constante, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais. Nesse caso, a relação entre  $x$  e  $y$  é dada por uma função do 1º grau de lei  $y = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$ .



## Exercícios de sala

1. **Enem 2020** Uma fatura mensal de água é composta por uma taxa fixa, independentemente do gasto, mais uma parte relativa ao consumo de água, em metro cúbico. O gráfico relaciona o valor da fatura com o volume de água gasto em uma residência no mês de novembro, representando uma semirreta.



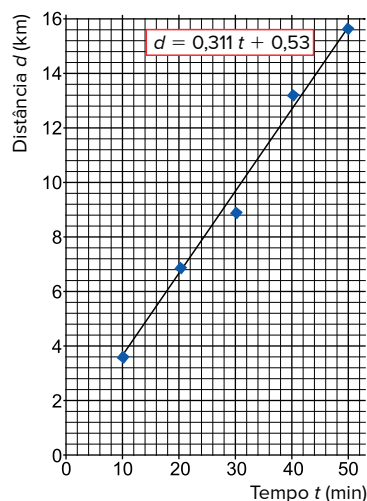
Observa-se que, nesse mês, houve um consumo de  $7 \text{ m}^3$  de água. Sabe-se que, em dezembro, o consumo de água nessa residência, em metro cúbico, dobrou em relação ao mês anterior.

O valor da fatura referente ao consumo no mês de dezembro nessa residência foi

- superior a R\$ 65,00 e inferior a R\$ 70,00.
- superior a R\$ 80,00 e inferior a R\$ 85,00.
- superior a R\$ 90,00 e inferior a R\$ 95,00.
- superior a R\$ 95,00.
- inferior a R\$ 55,00.

2. **Unesp 2022** Um aplicativo instalado no celular de um ciclista informa, de 10 em 10 minutos do passeio de bicicleta, o tempo acumulado  $t$  e a distância acumulada  $d$ , em minutos e quilômetros. A tabela e o gráfico mostram os dados informados pelo aplicativo ao término de um passeio de 50 minutos. Quando o método estatístico do aplicativo identifica que o conjunto de pares ordenados  $(t, d)$  se ajusta razoavelmente bem a uma reta, ele informa sua equação que, no caso do conjunto de dados da tabela, foi  $d = 0,311t + 0,53$ .

Tempo $t$ (min)	Distância $d$ (km)
10	3,7
20	7
30	9,1
40	13,5
50	16



Analisando o gráfico, a equação e os cinco pares ordenados  $(t, d)$  da tabela, observa-se que a equação de reta fornecida pelo aplicativo comete erros por superestimativa ou por subestimativa no cálculo de  $d$ , para cada um dos cinco valores de  $t$ . O menor erro por superestimativa de  $d$  cometido pela equação fornecida, em termos percentuais, foi de

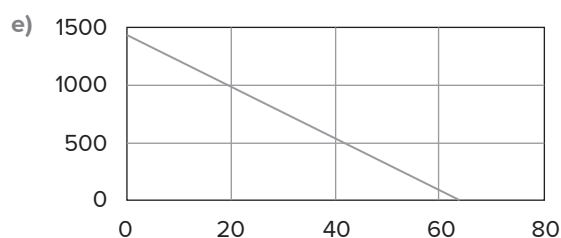
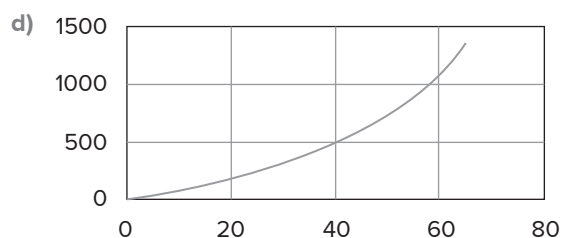
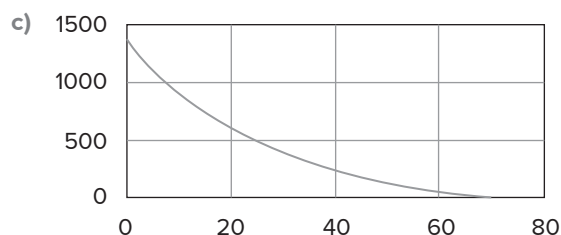
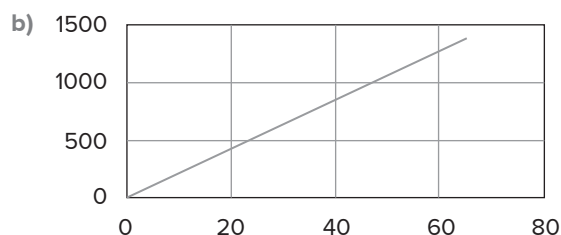
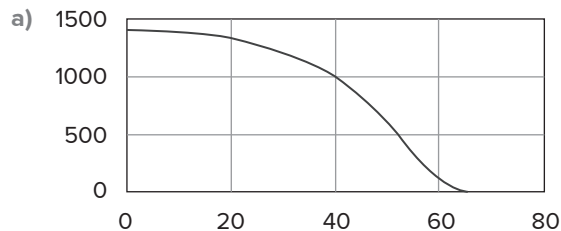
- a) 0,8%                      c) 0,4%                      e) 1,2%  
b) 1,6%                      d) 0,5%
3. **Enem 2020** Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R\$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R\$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro  $L$  que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu  $x$  sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Disponível em: [www.cnpso.embrapa.br](http://www.cnpso.embrapa.br). Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro  $L$  em função de  $x$  obtido por esse produtor nesse ano?

- a)  $L(x) = 50x - 1\,200$   
b)  $L(x) = 50x - 12\,000$   
c)  $L(x) = 50x + 12\,000$   
d)  $L(x) = 500x - 1\,200$   
e)  $L(x) = 1\,200x - 500$

4. **UFPR 2020** Para esvaziar um reservatório que contém 1 430 litros de água, é aberta uma torneira em sua base. Supondo que a vazão dessa torneira seja constante e igual a 22 litros por minuto, qual dos gráficos abaixo descreve a quantidade de água no reservatório (em litros), em função do tempo (em minutos), a partir do momento em que a torneira é aberta?





5. **UFJF/Pism-MG 2020** Um tanque é abastecido por uma torneira e o volume de água, em milhares de litros, em seu interior é dado por  $V_1(t) = 3t + 13$ , com  $t$  contado em horas a partir do instante  $t = 0$  em que a torneira é aberta.

No instante  $t_1$  em que o volume de água atinge a capacidade máxima do tanque, a torneira é automaticamente fechada e, imediatamente, um registro é aberto permitindo que a água acumulada nesse tanque abasteça caixas d'água menores. A partir do momento em que esse registro é aberto, o volume d'água no tanque passa a ser descrito pela função  $V_2(t) = -2t + 58$ , para  $t \geq t_1$ , até que o tanque esteja completamente vazio.

- Calcule a capacidade máxima do tanque.
- Em quanto tempo o tanque estará vazio depois de fechada a torneira e aberto o registro?

6. **Enem 2020** No Brasil, o tempo necessário para um estudante realizar sua formação até a diplomação em um curso superior, considerando os 9 anos de ensino fundamental, os 3 anos do ensino médio e os 4 anos de graduação (tempo médio), é de 16 anos. No entanto, a realidade dos brasileiros mostra que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos é ainda muito pequeno, conforme apresentado na tabela.

**Tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos**

Ano da pesquisa	1995	1999	2003	2007
Tempo de estudo (em ano)	5,2	5,8	6,4	7,0

Disponível em: [www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br). Acesso em: 19 dez. 2012 (adaptado).

Considere que o incremento no tempo de estudo, a cada período, para essas pessoas, se mantenha constante até o ano 2050, e que se pretenda chegar ao patamar de 70% do tempo necessário à obtenção do curso superior dado anteriormente.

O ano em que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos atingirá o percentual pretendido será

- 2018.
- 2023.
- 2031.
- 2035.
- 2043.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 3

- Leia as páginas de **45 a 49**.
- Faça os exercícios **2, 5, 7 e 10** da seção "Revisando".
- Faça os exercícios propostos **2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16 e 18**.

# Função inversa e função composta

## Função inversa

A função inversa é aquela que “desfaz o que outra fez”: se  $f(a) = b$ , então a função inversa  $f^{-1}$  é tal que  $f^{-1}(b) = a$ .

Temos as seguintes propriedades:

- Se o par  $(a, b)$  pertence a  $f$ , então o par  $(b, a)$  pertence a  $f^{-1}$ .
- Para existir a função inversa  $f^{-1}$ , a função  $f$  deve ser bijetora.
- Os gráficos de  $f$  e de  $f^{-1}$  são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- $D(f) = \text{Im}(f^{-1})$  e  $D(f^{-1}) = \text{Im}(f)$ .

## Função composta

A função composta de  $g$  com  $f$  é a função  $g \circ f$  tal que  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

Temos as seguintes propriedades:

- Para existir a função  $g \circ f$ , a imagem de  $f$  deve estar contida no domínio de  $g$ .
- Se for possível calcular as compostas  $h \circ f$  e  $f \circ g$ , então vale a propriedade associativa no cálculo da composta:
 
$$h \circ f \circ g(x) = h \circ f(g(x)) = h(f \circ g(x))$$
- $f \circ f^{-1}(x) = x$
- Se  $f$  e  $g$  forem bijetoras, então  $(f \circ g(x))^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ .

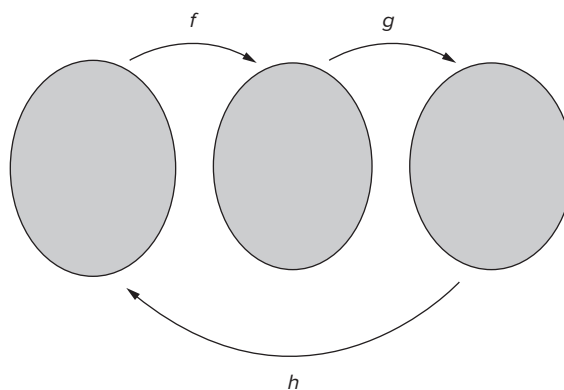
### Exercícios de sala

1. Dada a função  $f$  de lei  $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ , calcule:
- $D(f)$
  - $f^{-1}(x)$
  - $\text{Im}(f)$

2. **UFSJ-MG 2012** Sendo a função  $f(x) = ax + b$  tal que  $f(f(x)) = 9x + 8$ , é CORRETO afirmar que, sendo  $a > 0$ :

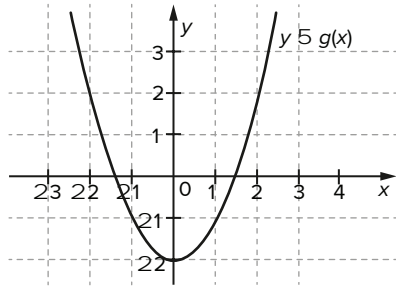
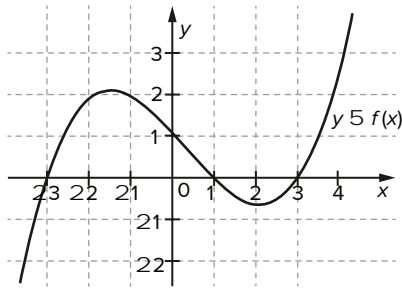
- $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 2$
- $f(0) = 8$
- $f(x) = 3x + 4$
- $f^{-1}(x) = \frac{(x-2)}{3}$

3. **ESPM-SP 2018** Se  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 3 - x$ , a função  $h(x)$  representada no diagrama abaixo é:



- $h(x) = \frac{2-x}{2}$
- $h(x) = \frac{2-x}{x}$
- $h(x) = \frac{x}{2-x}$
- $h(x) = \frac{x}{x-2}$
- $h(x) = \frac{x-2}{2x}$

4. **Unicamp-SP 2022** As figuras abaixo ilustram, respectivamente, os gráficos das funções  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ .



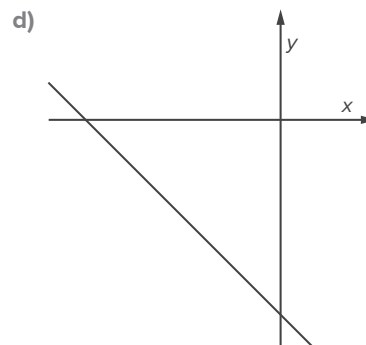
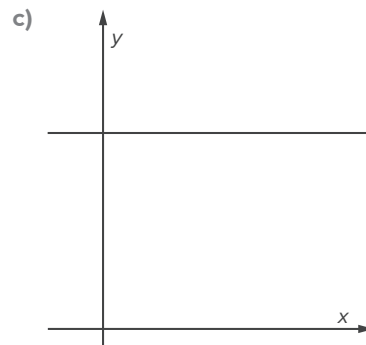
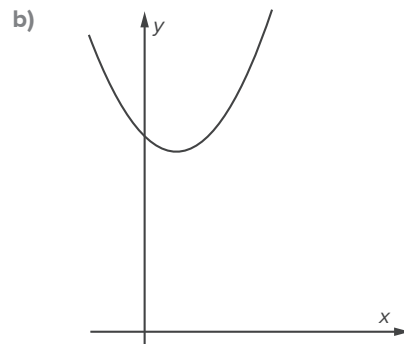
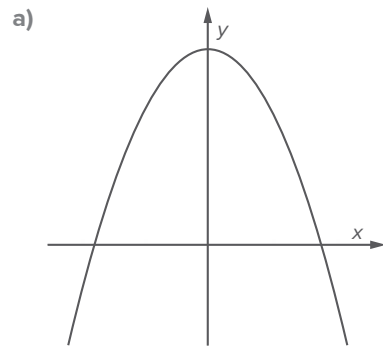
Então,  $f(g(-1)) - g(f(1))$  vale:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

5. **Famema-SP 2019** Os gráficos das funções  $f(x) = 2^{x+k}$  e  $g(x) = ax^2 + bx$ , com  $k, a$  e  $b$  números inteiros, se intersectam no ponto  $(1, 1)$ . Sabendo que  $g(2) = 0$ , o valor de  $g(f(3))$  é

- a) -3.
- b) 16.
- c) -8.
- d) 8.
- e) -16.

6. **FICSAE-SP 2017** A função  $f$  tem lei de formação  $f(x) = 3 - x$  e a função  $g$  tem lei de formação  $g(x) = 3x^2$ . Um esboço do gráfico da função  $f(g(x))$  é dado por



## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 4

- I. Leia as páginas de **59** a **62**.
- II. Faça os exercícios **2** e de **4** a **6** da seção "Revisando".

- III. Faça os exercícios propostos **2, 3**, de **5** a **7, 9, 11, 12** e **14**.

# Função do 2º grau

## Equação do 2º grau

As equações completas do 2º grau têm a forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Pela fórmula resolvente, também conhecida no Brasil como “fórmula de Bhaskara”, as duas raízes dessa equação são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

em que o discriminante  $\Delta$  é dado por  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

## Discussão de uma equação do 2º grau

- Se  $\Delta > 0$ , a equação tem duas raízes reais e distintas.
- Se  $\Delta = 0$ , a equação tem duas raízes reais e iguais.
- Se  $\Delta < 0$ , não há raízes reais.

## Soma e produto das raízes da equação

Sendo  $x_1$  e  $x_2$  as duas raízes reais de uma equação do 2º grau, podemos expressar a soma e o produto dessas duas raízes em função dos coeficientes da equação:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## Função do 2º grau

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é do 2º grau se sua lei de formação for da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

No plano cartesiano, os gráficos das funções desse tipo são representados por parábolas com eixos de simetria verticais, e a orientação da concavidade do gráfico depende do sinal do coeficiente  $a$ :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

O vértice  $(x_v, y_v)$  do gráfico de uma função do 2º grau é o ponto do gráfico de menor ordenada (se  $a > 0$ ) ou de maior ordenada (se  $a < 0$ ). Suas coordenadas são  $x_v = -\frac{b}{2a}$  e  $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ .

## Imagem da função do 2º grau

- se  $a > 0$ ,  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$
- se  $a < 0$ ,  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$

## Forma fatorada

- $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , para  $x_1$  e  $x_2$  raízes da função;
- $f(x) = y_V + a(x - x_V)^2$ , para  $x_V$  e  $y_V$  coordenadas do vértice do gráfico da função.

### Exercícios de sala

1. **Unicamp-SP 2021** A soma dos valores de  $x$  que resolvem a equação

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{x}{4} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

é igual a

- a)  $\frac{14}{3}$ .                      b)  $\frac{16}{3}$ .                      c)  $\frac{18}{3}$ .                      d)  $\frac{20}{3}$ .

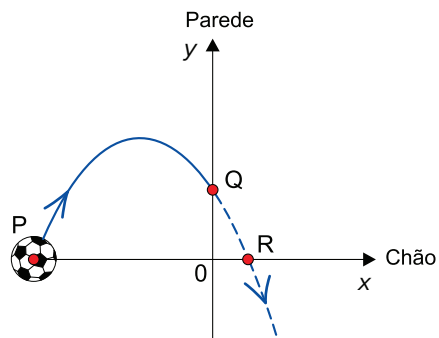
2. **FMABC-SP 2021** Considere as funções  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  e  $g(x) = -3x + 1$ . Se  $\alpha$  é o maior número real que é solução de  $f(g(\alpha)) = g(f(\alpha))$ , então

- a)  $2 < \alpha < 5$ .              b)  $-4 < \alpha < -1$ .              c)  $-10 < \alpha < -7$ .              d)  $-1 < \alpha < 2$ .              e)  $-7 < \alpha < -4$ .

3. **Fuvest-SP 2021** Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas por  $f(x) = c + x^2$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ , e  $g(x) = x$ , seus gráficos se intersectam quando, e somente quando,

- a)  $c \leq \frac{1}{4}$ .                      b)  $c \geq \frac{1}{4}$ .                      c)  $c \leq \frac{1}{2}$ .                      d)  $c \geq \frac{1}{2}$ .                      e)  $c \leq 1$ .

4. **Famema-SP 2021** A figura representa, no plano cartesiano, a trajetória de uma bola que foi chutada a partir do ponto  $P(-5, 0)$ , localizado no chão, e seguiu em trajetória parabólica até bater na parede, no ponto  $Q(0, 2)$ . Se não houvesse parede, a bola seguiria sua trajetória até o ponto  $R(1, 0)$ , no chão.



Admitindo-se que a trajetória descrita pela bola é modelada pela função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , então  $a + b + c$  é igual a

- 0.
- 1.
- 0,5.
- 1,5.
- 0,5.

5. **FCMSCSP 2022** O programa de sócio torcedor de uma agremiação esportiva cobra mensalidade de R\$ 50,00 dos sócios. Atualmente, o programa conta com 600 sócios e a agremiação estima que a cada R\$ 5,00 de aumento na mensalidade irá perder 8 sócios. Considerando apenas aumentos mensais de R\$ 5,00, o maior faturamento mensal que esse programa de sócio torcedor pode gerar para a agremiação é de:

- R\$ 72 240,00
- R\$ 78 250,00
- R\$ 80 420,00
- R\$ 82 280,00
- R\$ 86 420,00

6. **FGV-SP 2020** O número de turistas  $x$  que comparecem diariamente para um passeio de barco relaciona-se com o preço  $p$  em reais cobrado por pessoa através da relação  $p = 300 - 2x$ .

Se o barco tiver 100 lugares, qual a receita máxima que pode ser obtida por dia?

- R\$ 10 000,00
- R\$ 11 500,00
- R\$ 10 750,00
- R\$ 11 000,00
- R\$ 11 250,00

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 5

- Leia as páginas de **71 a 77**.
- Faça os exercícios de **1 a 6** da seção "Revisando".

- Faça os exercícios propostos **1, 3, 4, 6, 9, 11, 15, 20 e 24**.

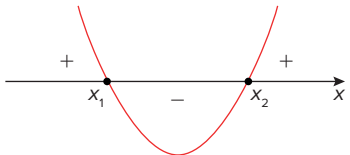
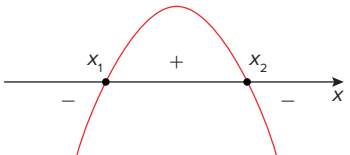
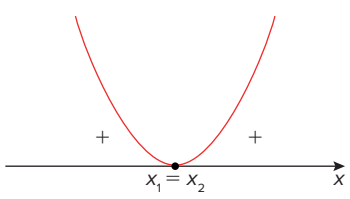
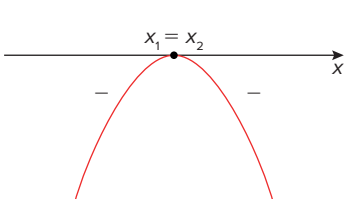
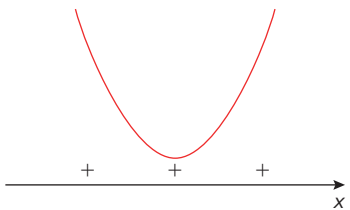
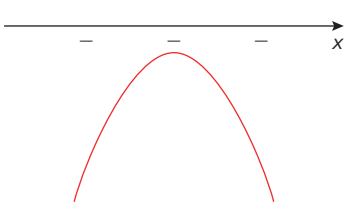
# Inequações

## Inequação do 1º grau

- Para  $a > 0$ , temos que  $ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$ .
- Para  $a < 0$ , temos que  $ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$ .

## Inequação do 2º grau

A resolução de inequações do 2º grau é feita pelo estudo do sinal de  $y = ax^2 + bx + c$ , que está representado no quadro abaixo.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

## Inequações produto e quociente

$$\bullet A \cdot B > 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0 \text{ e } B > 0 \\ \text{ou} \\ A < 0 \text{ e } B < 0 \end{cases}$$

$$\bullet A \cdot B < 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0 \text{ e } B < 0 \\ \text{ou} \\ A < 0 \text{ e } B > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{A}{B} > 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0 \text{ e } B > 0 \\ \text{ou} \\ A < 0 \text{ e } B < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{A}{B} < 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0 \text{ e } B < 0 \\ \text{ou} \\ A < 0 \text{ e } B > 0 \end{cases}$$

## Exercícios de sala

1. **FICSAE-SP 2021** Para que uma medicação faça efeito, sua concentração no sangue precisa exceder certo valor, que é chamado de nível mínimo terapêutico. Admita que a concentração  $c$  de uma medicação no sangue, em mg/L,  $t$  horas após sua ingestão oral, seja dada pela função  $c = \frac{20t}{t^2 + 4}$ . Se o nível mínimo terapêutico dessa medicação é de 4 mg/L, o exato intervalo real de tempo previsto pela função para que esse nível seja excedido é dado por:

- a)  $1 < t < 4$   
b)  $\frac{\sqrt{15}}{3} < t < \sqrt{15}$   
c)  $1 < t < \frac{7}{2}$   
d)  $\frac{3}{2} < t < \frac{7}{2}$   
e)  $\frac{3}{2} < t < 4$

2. **PUC-Rio 2021** Quantas soluções inteiras tem a desigualdade  $x^2 - 30x + 220 < 0$ ?

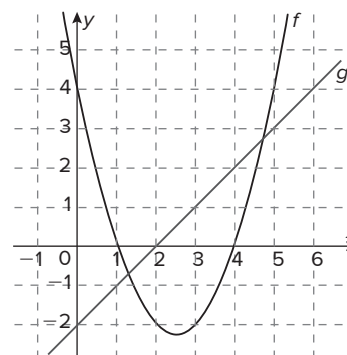
- a) 0  
b) 1  
c) 2  
d) 5

3. **PUC-Rio 2019** Para quantos valores inteiros de  $x$  vale a inequação abaixo?

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} \leq 0$$

- a) 0  
b) 1  
c) 2  
d) 2019  
e) Infinitos

4. **UFJF/Pism-MG 2020** No plano cartesiano a seguir estão representados os gráficos das funções  $f$  e  $g$  definidas para todo número real.



O intervalo real para os valores de  $x$  que satisfazem  $f(x) \cdot g(x) > 0$  é:

- a)  $x < 1$  ou  $2 < x < 4$   
b)  $x < 2$  ou  $x > 4$   
c)  $x < 1$  ou  $x > 4$   
d)  $1 < x < 2$  ou  $x > 4$   
e)  $x < -2$  ou  $1 < x < 4$

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 5

- I. Leia as páginas de **77** a **80**.  
II. Faça os exercícios de **7** a **10** da seção “Revisando”.

- III. Faça os exercícios propostos de **25** a **27**.



## FRENTE 1

### AULA 16

# Equações exponenciais

Equações exponenciais são equações em que a incógnita aparece no expoente de pelo menos uma de suas potências e nas quais as bases são números reais positivos diferentes de 1. Por exemplo,  $3^x = 9$  e  $4^x + 25^x = 7$ .

Na resolução de equações exponenciais, se pudermos obter uma equação equivalente à equação original que apresente uma igualdade entre potências de mesma base, podemos igualar os expoentes:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

As relações a seguir podem facilitar a resolução de equações exponenciais. Em todas elas, as bases  $a$  e  $b$  são números reais positivos e diferentes de 1, e os expoentes  $m$  e  $n$  são números reais não nulos.

$$\bullet a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\bullet (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\bullet \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\bullet a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\bullet \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\bullet (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\bullet a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

## Exercícios de sala

1. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a)  $9 \cdot 27^x = 81$

b)  $\frac{1}{4} \cdot 2^x = 0,125$

c)  $5^x = \sqrt[3]{625}$

d)  $2^x \cdot 5^x = 3^x$

e)  $3^x + 3^{x+2} = 30$

f)  $4^x - 7 \cdot 2^x = 8$

2. **ESPM-SP** Se  $(4^x)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$ , o valor de  $x^x$  é:

a) 27

b) 4

c)  $\frac{1}{4}$

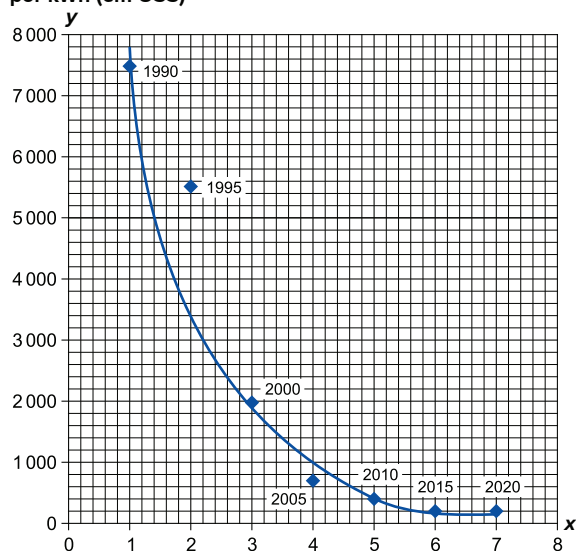
d) 1

e)  $-\frac{1}{27}$

3. **Unesp 2022** A expansão global da internet tem sido possível em virtude do barateamento dos eletrônicos portáteis e das baterias de alta capacidade que os alimentam. O gráfico indica a vertiginosa queda no preço médio das baterias de íons de lítio desde sua introdução, nos anos 90, até 2020.

O modelo exponencial  $y = 15\,649 \cdot e^{-0,687x}$ , com valores de  $x$  e  $y$  indicados nos eixos do gráfico, prevê razoavelmente bem a relação entre essas variáveis.

**Preço das baterias de íons de lítio, por kWh (em US\$)**



(Micah S. Ziegler e Jessica E. Trancik "Re-examining rates of lithium-ion battery technology improvement and cost decline". <https://pubs.rsc.org>. Adaptado.)

Adotando nos cálculos  $e^{5,053} = 156,49$  e  $e^{0,443} = 1,56$ , o modelo exponencial utilizado prevê que, em 2025, o preço por kWh das baterias de íons de lítio será de, aproximadamente,

- US\$ 82.
- US\$ 64.
- US\$ 98.
- US\$ 56.
- US\$ 48.

4. **PUC-Rio 2015** Seja  $f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + 8$ .

- Calcule  $f(0)$ .
- Encontre todos os valores reais de  $x$  para os quais  $f(x) = 168$ .

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 6

- Leia as páginas de **91 a 93**.
- Faça os exercícios **1 e 2** da seção "Revisando".
- Faça os exercícios propostos de **1 a 9**.

# Função e inequação exponencial

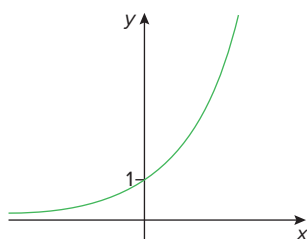
## Função exponencial

As funções exponenciais são funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , tais que:

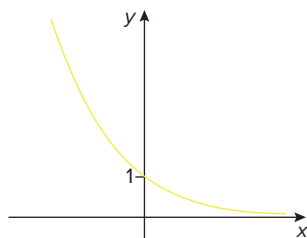
$$f(x) = a^x, \text{ com } a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Funções exponenciais têm as seguintes propriedades:

- São injetoras, sobrejetoras e, portanto, são bijetoras.
- Se  $a > 1$ , são crescentes.



- Se  $0 < a < 1$ , são decrescentes.



## Translação e reflexão de gráficos

Certas modificações na lei de formação de funções se refletem na translação ou reflexão do gráfico da nova função, o que pode ser útil na construção de gráficos:

- Translação vertical: Se  $g(x) = f(x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , o gráfico de  $g$  tem o mesmo formato do gráfico de  $f$ , mas transladado para cima, se  $k > 0$ , ou para baixo, se  $k < 0$ .
- Translação horizontal: Se  $g(x) = f(x + k)$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , o gráfico de  $g$  tem o mesmo formato do gráfico de  $f$ , mas transladado para a esquerda, se  $k > 0$ , ou para a direita, se  $k < 0$ .
- Reflexão em relação ao eixo  $x$ : Se  $g(x) = -f(x)$ , o gráfico de  $g$  é obtido pela reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das abscissas.
- Reflexão em relação ao eixo  $y$ : Se  $g(x) = f(-x)$ , o gráfico de  $g$  é obtido pela reflexão do gráfico de  $f$  em relação ao eixo das ordenadas.

## Inequação exponencial

A classificação do crescimento da função exponencial  $f(x) = a^x$  é útil na resolução de inequações exponenciais:

- se  $a > 1$ , a função é crescente, e vale que:
 
$$a^x > a^y \Rightarrow x > y$$
- se  $0 < a < 1$ , a função é decrescente, e vale que:
 
$$a^x > a^y \Rightarrow x < y$$

## Exercícios de sala

1. **Unicamp-SP 2020** Tendo em vista que  $a$  e  $b$  são números reais positivos,  $a \neq b$ , considere a função  $f(x) = a \cdot b^x$ , definida para todo número real  $x$ . Logo,  $f(2)$  é igual a

- $\sqrt{f(1) \cdot f(3)}$ .
- $\frac{f(3)}{f(0)}$ .
- $f(0) \cdot f(1)$ .
- $f(0)^3$ .

2. **PUC-RS 2021** Em novembro de 2019, foi diagnosticado, na China, o primeiro caso de infecção conhecida por COVID-19. No Brasil, os primeiros casos surgiram no final da segunda quinzena de fevereiro de 2020. No dia 23/03/2020, foram diagnosticados, no Brasil, 1960 casos. Supondo que a evolução prevista para o número de pessoas infectadas pelo novo coronavírus é dada por  $P = 1960 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$ , em que  $t$  é o número de dias corridos, a partir do dia 23/03/2020, e  $P$  o total de pessoas infectadas, quantos dias são previstos para que o número de pessoas infectadas seja 15 680?

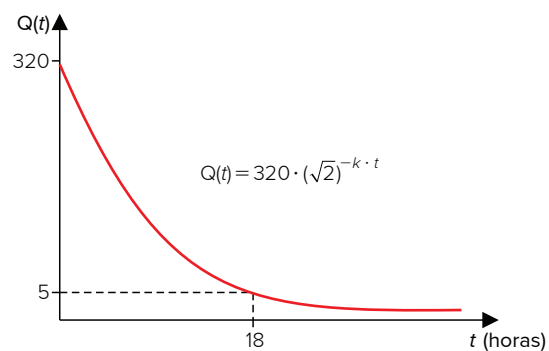
- 25
- 20
- 15
- 5

3. **Enem PPL 2020** Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade  $x$  dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora. A quantidade inicial de bactérias era de
- a) 370.
  - b) 740.
  - c) 1480.
  - d) 11840.
  - e) 23680.

4. **FICSAE-SP 2019** Determinar a massa dos animais é extremamente importante para a administração de medicamentos. Há circunstâncias em que é possível estimar a massa de alguns animais sem o uso de balanças. Por exemplo, é possível determinar a massa aproximada ( $m$ ) de um potro, em kg, em função de seu perímetro torácico ( $s$ ), em cm, por meio da fórmula
- $$m = \frac{s - 25}{0,7}.$$

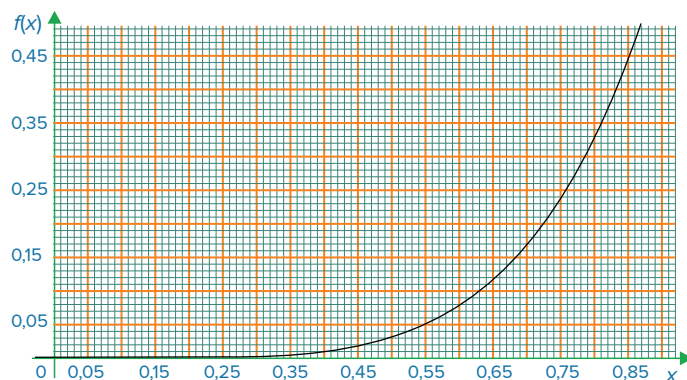
Para tratamentos anti-inflamatórios com Meloxicam, a dosagem indicada para equinos é de 0,6 mg desse princípio ativo por kg de massa corporal. Esse medicamento é comercializado em frascos de 100 mL contendo 2 g de Meloxicam.

- a) Considere um potro, de perímetro torácico igual a 1,16 m, que será tratado com esse anti-inflamatório. Determine a massa aproximada desse potro, em kg, segundo a fórmula, e a dosagem de Meloxicam, em mL, a ser administrada ao animal.
- b) Em um outro potro, a quantidade  $Q(t)$ , em mg, de Meloxicam presente no organismo do animal,  $t$  horas após a aplicação, é descrita pelo gráfico e modelada pela função:



Determine o valor da constante  $k$  e a quantidade de Meloxicam, em mg, presente no organismo desse animal 24 horas após a aplicação.

5. **FICSAE-SP 2020** Considere o gráfico da função  $f(x) = x^5$  para os cálculos desta questão.



A cafeína é eliminada da corrente sanguínea de um adulto a uma taxa de, aproximadamente, 15% por hora. Cinco horas após o consumo de um café expresso, que contém 200 mg de cafeína, um adulto ainda terá em sua corrente sanguínea a quantidade aproximada de cafeína de

- a) 100 mg.
- b) 45 mg.
- c) 88 mg.
- d) 95 mg.
- e) 68 mg.

6. **Unifor-CE** Em um dia num campus universitário, quando há  $A$  alunos presentes, 20% desses alunos souberam de uma notícia sobre um escândalo político local. Após  $t$  horas  $f(t)$  alunos já sabiam do escândalo, onde  $f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}$ ,  $k$  e  $B$  são constantes positivas. Se 50% dos alunos sabiam do escândalo após 1 hora, quanto tempo levou para que 80% dos alunos soubessem desse escândalo?

- a) 2 horas
- b) 3 horas
- c) 4 horas
- d) 5 horas
- e) 6 horas

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 6

- I. Leia as páginas de **93 a 96**.
- II. Faça os exercícios de **3 a 10** da seção "Revisando".
- III. Faça os exercícios propostos de **10 a 13**, de **15 a 17, 25 e 27**.

## FRENTE 2

### AULAS 1 E 2

# Conjuntos numéricos

## Números naturais

O conjunto dos números naturais é formado por todos os números que podem ser escritos usando apenas os algarismos do sistema decimal, sem que seja necessário usar a vírgula ou outros sinais matemáticos. Trata-se de um conjunto numérico fechado em relação às operações de adição, multiplicação e potenciação.

A interpretação de um número natural pode ser:

Cardinal:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$   
ou  
Ordinal:  $\{1^{\text{o}}, 2^{\text{o}}, 3^{\text{o}}, 4^{\text{o}}, 5^{\text{o}}, 6^{\text{o}}, 7^{\text{o}}, 8^{\text{o}}, 9^{\text{o}}, 10^{\text{o}}, \dots\}$

Entre os principais subconjuntos dos números naturais, destacam-se os conjuntos dos:

- números primos:  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$
- números fatoriais:  $\{1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots\}$
- quadrados perfeitos:  $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots\}$

## Números inteiros

O conjunto dos números inteiros é formado por todos os números naturais e seus respectivos opostos. Trata-se de um conjunto numérico fechado em relação às operações de adição, subtração e multiplicação.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots\}$$

Os números inteiros também admitem interpretação analítica. Seus principais subconjuntos são:

- inteiros não nulos:  $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, \dots\}$
- inteiros negativos:  $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, \dots\}$
- inteiros positivos:  $\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10, \dots\}$

Há muitos outros importantes subconjuntos de  $\mathbb{Z}$ , como o dos números pares, dos números ímpares, dos que são múltiplos ou divisores de determinado número, dos quadrados ou cubos perfeitos etc.

## Números racionais

Trata-se de um conjunto numérico fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão – com exceção da divisão por zero.

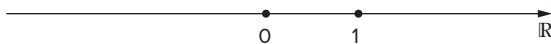
Os números racionais podem ser representados na forma de frações de dois números inteiros, desde que o denominador da fração seja diferente de zero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d}, n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Tais frações permitem representar números inteiros como  $-\frac{12}{4} = -3$ , números decimais como  $\frac{5}{4} = 1,25$  ou dízimas periódicas como  $\frac{4}{12} = 0,33333\dots$

## Números reais

O conjunto dos números reais é o resultado da união entre o conjunto dos números racionais e o dos números irracionais. Como existem números irracionais impossíveis de serem escritos com os símbolos criados para as representações numéricas, eles passam a serem representados em uma reta denominada “eixo real”. Assim, uma vez escolhidos quais pontos representarão os números 0 e 1, cada ponto da reta ficará geometricamente associado a um único número real.



Veja algumas aproximações de alguns dos principais números irracionais:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{2} \cong 1,41 & \log 2 \cong 0,30 & \pi \cong 3,14 \\ \sqrt{3} \cong 1,73 & \log 3 \cong 0,48 & e \cong 2,718 \end{array}$$

### Exercícios de sala

1. **IFSC 2018** Resolva a expressão numérica

$$\left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{2}{5} : \frac{3}{10}$$

Assinale a alternativa **CORRETA**.

Qual o resultado da expressão, em sua forma irredutível (mais simplificada possível)?

- a)  $\frac{5}{3}$
- b)  $\frac{10}{6}$
- c)  $\frac{260}{123}$
- d)  $\frac{90}{54}$
- e)  $\frac{12}{25}$

2. **PUC-Rio 2021** Assinale a opção correta:

- a)  $\frac{2}{5} < \frac{12}{29} < \frac{5}{12}$
- b)  $\frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{12}{29}$
- c)  $\frac{12}{29} < \frac{2}{5} < \frac{5}{12}$
- d)  $\frac{12}{19} < \frac{5}{12} < \frac{2}{5}$

3. **UFGRS 2019** O valor numérico da expressão

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{1000} + 1\right) \text{ é}$$

- a)  $\frac{1001}{4}$ .
- b)  $\frac{1001}{3}$ .
- c) 500.
- d) 501.
- e)  $\frac{1001}{2}$ .

4. **IFSul-RS 2020** Desde as mais primitivas organizações sociais, os seres humanos têm a necessidade de registrar acontecimentos, fatos e quantidades. Por essa razão, foram criados símbolos para representar palavras, situações e números. Daí, surgem os conjuntos numéricos, com o objetivo de agrupar números em função das suas características e propriedades. Considerando números inteiros quaisquer  $a$  e  $b$  e um número inteiro não nulo  $c$ , é correto afirmar que o re-

sultante da expressão  $\frac{a-b}{c}$  é um número:

- a) Natural.
- b) Inteiro positivo.
- c) Inteiro negativo.
- d) Racional.

5. **Enem 2020** Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações:

$$\frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3} \text{ e } \frac{5}{9}.$$

A ordem que esse aluno apresentou foi:

- a)  $\frac{1}{4}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$
- b)  $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$
- c)  $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$
- d)  $\frac{5}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$
- e)  $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{9}$

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 1

I. Leia as páginas de 108 a 112 e de 119 a 133.

II. Faça os exercícios de 1 a 3 da seção “Revisando”.

III. Faça os exercícios propostos 1, 2 e de 8 a 11.



## Potenciação

## Potência de expoente natural

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

## Consequência da definição

$$a^1 = a \quad a^0 = 1, \text{ para } a \neq 0$$

## Potência de expoente inteiro negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ com } a \text{ real não nulo}$$

## Potência de expoente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \text{ real positivo}$$

## Propriedades das potências

As propriedades a seguir são válidas para todas as potências de bases não negativas. Nas que apresentam frações, também é necessário que os denominadores sejam diferentes de zero.

$$\text{I. } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{II. } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$\text{III. } (a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^n \cdot a^m = (a^n)^m$$

$$\text{IV. } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\text{V. } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

**Cuidado:**  $(a + b)^n \neq a^n + b^n$ , exceto quando  $n = 1$ .

As potências de bases negativas ficam definidas, no universo dos números reais, apenas quando seus expoentes são números inteiros e de acordo com a regra a seguir:

- Bases negativas elevadas a expoentes  **pares**  produzem resultados  **positivos** .
- Bases negativas elevadas a expoentes  **ímpares**  produzem resultados  **negativos** .

## Atenção:

No universo dos números reais, as potências de base negativa e expoente par são positivas. Por isso, outro cuidado deve ser tomado em relação às equações do tipo  $x^n = a$ , quando  $n$  é  **par**  e diferente de zero: se  $a$  for positivo, teremos  $x = \pm \sqrt[n]{a}$ , mas se  $a$  for negativo, a equação  $x^n = a$  não possui solução real.

$$\bullet \quad x^2 = 9 \Rightarrow S = \{-3, 3\} \quad \bullet \quad x^2 = -9 \Rightarrow S = \emptyset$$

Já nos casos em que  $n$  é  **ímpar** , temos  $x^n = a$  implica  $x = \sqrt[n]{a}$ , não importando qual seja o sinal de  $a$ .

$$\bullet \quad x^3 = 8 \Rightarrow S = \{2\}$$

$$\bullet \quad x^3 = -8 \Rightarrow S = \{-2\}$$

## Operações inversas

A potenciação não é comutativa como a adição ou a multiplicação. Por isso, são necessárias duas operações distintas para invertê-la: uma para isolar a base – a  **radiciação**  – e outra para isolar o expoente – o  **logaritmo** .

$$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 5 - 3 = 2 \Rightarrow S = \{2\}$$

$$x^3 = 729 \Rightarrow x = \sqrt[3]{729} = 9 \Rightarrow S = \{9\}$$

$$3 \cdot x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow S = \{4\}$$

$$3^x = 729 \Rightarrow x = \log_3 729 = 6 \Rightarrow S = \{6\}$$

## Exercícios de sala

1. A medida de um segmento de reta é dada, em quilômetros, pelo quociente  $\frac{2 + 3 \cdot 4^5}{2^6 \cdot 5^6}$ . Sendo assim, a medida desse mesmo segmento, em metros, pode ser expressa por:
  - a) 0,3074
  - b) 3,074
  - c) 37,04
  - d) 370,4
  - e) 3074

**2. Fuvest-SP 2016** De 1869 até hoje, ocorreram as seguintes mudanças de moeda no Brasil: (1) em 1942, foi criado o cruzeiro, cada cruzeiro valendo mil réis; (2) em 1967, foi criado o cruzeiro novo, cada cruzeiro novo valendo mil cruzeiros; em 1970, o cruzeiro novo voltou a se chamar apenas cruzeiro; (3) em 1986, foi criado o cruzado, cada cruzado valendo mil cruzeiros; (4) em 1989, foi criado o cruzado novo, cada um valendo mil cruzados; em 1990, o cruzado novo passou a se chamar novamente cruzeiro; (5) em 1993, foi criado o cruzeiro real, cada um valendo mil cruzeiros; (6) em 1994, foi criado o real, cada um valendo 2 750 cruzeiros reais.

Quando morreu, em 1869, Brás Cubas possuía 300 contos. Se esse valor tivesse ficado até hoje em uma conta bancária, sem receber juros e sem pagar taxas, e se, a cada mudança de moeda, o depósito tivesse sido normalmente convertido para a nova moeda, o saldo hipotético dessa conta seria, aproximadamente, de um décimo de

► **Dados:** Um conto equivalia a um milhão de réis. Um bilhão é igual a  $10^9$  e um trilhão é igual a  $10^{12}$ .

- a) real.
- b) milésimo de real.
- c) milionésimo de real.
- d) bilionésimo de real.
- e) trilionésimo de real.

**3. IFSC 2020** Sabendo que  $x = 20^{100}$  e  $y = 400^{50}$  pode-se afirmar que

- a)  $x$  é igual a  $y$
- b)  $x$  é a metade de  $y$
- c)  $x$  é o dobro de  $y$
- d)  $x$  é igual ao quadrado de  $y$
- e)  $x$  é igual ao quádruplo de  $y$

**4. IFCE 2019** Simplificando a expressão

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{2^{\frac{1}{6}}}, \text{ obtemos o número}$$

- a) 4
- b)  $\sqrt{2}$
- c) 2
- d)  $\sqrt[3]{2}$
- e) 1

**5. ESPM-RJ 2020** A expressão para  $x > 0$ , é equivalente a:

$$\frac{x \cdot \sqrt{x^{-1}} \cdot \sqrt{x^{-1}} \cdot \sqrt{x^{-1}}}{\sqrt{x}}$$

- a)  $\sqrt[6]{x^{-5}}$
- b)  $\sqrt[8]{x^{-3}}$
- c)  $\sqrt[8]{x}$
- d)  $\sqrt[6]{x^5}$
- e)  $\sqrt[4]{x^{-3}}$

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 1

- I. Leia as páginas **117, 118, 121, 128, 133 e 134**.
- II. Faça o exercício **4** da seção “Revisando”.

- III. Faça os exercícios propostos de **17 a 20, 22 e 23**.

## Teorema fundamental da Aritmética

Todo número natural maior que 1 pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira (desconsiderando as permutações dos fatores do produto) e não há dois números naturais distintos com a mesma decomposição.

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \dots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \dots$$

Na sentença,  $(p_1, p_2, p_3, \dots)$  é a sequência crescente dos números primos positivos  $(2, 3, 5, \dots)$ , e a sequência dos expoentes  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$  é formada apenas por números naturais.

Exemplos:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot \dots$$

$$280 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot \dots$$

### mmc e mdc

Para obter o mínimo múltiplo comum (mmc) entre dois ou mais números inteiros, basta formar a sequência  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$  usando os **maiores** expoentes obtidos na decomposição dos números envolvidos.

$$\text{mmc}(180, 280) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2\,520$$

E, para obter o máximo divisor comum (mdc) entre dois ou mais números inteiros, basta formar a sequência  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$

usando os **menores** expoentes obtidos na decomposição dos números envolvidos.

$$\text{mmc}(180, 280) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 20$$

Além disso, vale a seguinte propriedade:

$$\text{mmc}(A, B) \cdot \text{mdc}(A, B) = |A| \cdot |B|$$

### Número de divisores

Sendo N um número inteiro, N diferente de zero, então:

- O número de divisores inteiros de N é:

$$2(1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) \cdot \dots$$

- O número de divisores positivos de N é:

$$(1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) \cdot \dots$$

Por exemplo, o número 600 possui 48 divisores inteiros: 24 positivos e 24 negativos.

$$600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \cdot (3+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) \cdot (0+1) \cdot (0+1) \cdot \dots = 48$$

### Exercícios de sala

- Uespi** Qual o expoente da maior potência de 3 que divide  $270^{30}$ ?

- |       |        |
|-------|--------|
| a) 70 | d) 100 |
| b) 80 | e) 110 |
| c) 90 |        |

- IFBA 2018** O Supermercado “Preço Baixo” deseja fazer uma doação ao Orfanato “Me Adote” e dispõe, para esta ação, 528 kg de açúcar, 240 kg de feijão e 2 016 kg de arroz. Serão montados *kits* contendo, cada um, as mesmas quantidades de açúcar, de feijão e de arroz. Quantos quilos de açúcar deve haver em cada um dos *kits*, se forem arrumados de forma a contemplar um número máximo para cada item?

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| a) 20 | c) 31 | e) 44 |
| b) 11 | d) 42 |       |

3. **CMRJ 2019** Maria e Paula são amigas de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntas em torno do Estádio do Maracanã. Um dia, empolgadas com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que cada uma levava para dar uma volta completa em torno do estádio. Constataram que Maria dava uma volta completa em 6 minutos e 40 segundos, enquanto Paula demorava 8 minutos para fazer o mesmo percurso, ambas com velocidades constantes.



www.brasil.gov.br, julho/2018.

Paula, então, questionou o seguinte: “Se sairmos juntas de um mesmo local, no mesmo momento, mas em sentidos contrários, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, no mesmo ponto de partida?”. A resposta correta para a pergunta de Paula está presente na alternativa

- a) 48 minutos
- b) 40 minutos
- c) 32 minutos
- d) 26 minutos e 40 segundos
- e) 33 minutos e 20 segundos

4. **Uerj 2021** De acordo com o teorema fundamental da Aritmética, todo número natural maior do que 1 é primo ou é um produto de números primos. Observe os exemplos:

$$1964 = 2^2 \times 491$$

$$1994 = 2 \times 997$$

O maior número primo obtido na fatoração de 1716 é:

- a) 17
- b) 13
- c) 11
- d) 7

5. **UFRGS 2019** Considere as afirmações sobre números inteiros.

- I. Todo número primo é ímpar.
  - II. Se  $a$  é um número múltiplo de 3, então  $2a$  é múltiplo de 6.
  - III. Se  $a$  é um número par, então  $a^2$  é um número par.
- Quais estão corretas?
- a) Apenas I.
  - b) Apenas II.
  - c) Apenas III.
  - d) Apenas II e III.
  - e) I, II e III.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 1

- I. Leia as páginas de **134 a 137**.
- II. Faça os exercícios de **5 a 8** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos **3**, de **27 a 29**, **32** e de **38 a 41**.

# Números e algoritmos

## Divisão euclidiana

$$N \begin{array}{l} \overline{)d} \\ r \end{array} \quad q \Leftrightarrow \begin{cases} N = d \cdot q + r \\ 0 \leq r < |d| \end{cases}$$

Se  $r = 0$ , então, pode-se afirmar que:

- **N** é múltiplo de **d**
- **N** é divisível por **d**
- **d** é divisor de **N**

## Cifras numéricas

Os problemas relativos aos algoritmos que formam um número podem ser algebricamente modelados, separando esses algoritmos e transformando seus valores relativos em valores absolutos. Exemplo:

$$2347 = 2000 + 300 + 40 + 7$$

Um recurso mnemônico bastante útil para cifrar um número natural  $N$ , de até quatro algoritmos, consiste em usar as letras **m**, **c**, **d** e **u** para designar, respectivamente, os algoritmos dos milhares, das centenas, das dezenas e das unidades do número  $N$ .

$$N = 1000m + 100c + 10d + u$$

## Exercícios de sala

- Enem 2020** Usando um computador construído com peças avulsas, o japonês Shigeru Kondo calculou o valor da constante matemática  $\pi$  com precisão de 5 trilhões de dígitos. Com isso, foi quebrado o recorde anterior, de dois trilhões de dígitos, estabelecido pelo francês Fabrice Bellard. A quantidade de zeros que segue o algoritmo 5 na representação do número de dígitos de  $\pi$  calculado pelo japonês é
  - 3.
  - 6.
  - 9.
  - 12.
  - 15.
- Enem 2020** Um hotel de 3 andares está sendo construído. Cada andar terá 100 quartos. Os quartos serão numerados de 100 a 399 e cada um terá seu número afixado à porta. Cada número será composto por peças individuais, cada uma simbolizando um único algoritmo. Qual a quantidade mínima de peças, simbolizando o algoritmo 2, necessárias para identificar o número de todos os quartos?
  - 160
  - 157
  - 130
  - 120
  - 60

3. **Uerj 2015** Na tabela abaixo, estão indicadas três possibilidades de arrumar  $n$  cadernos em pacotes:

Nº de pacotes	Nº de cadernos por pacote	Nº de cadernos que sobram
X	12	11
Y	20	19
Z	18	17

Se  $n$  é menor do que 1200, a soma dos algarismos do maior valor de  $n$  é:

- a) 12
- b) 17
- c) 21
- d) 26

4. **PUC-PR 2018** A doutora Cristiane não quer revelar o dia de seu aniversário, mas seus amigos Jorge e Evandro insistem. Então Cristiane propôs o seguinte problema:

$$ABC + ABC + ABC = BBB.$$

$A \times 15$  é igual ao dia de meu aniversário  
e  $B + 5$  é o meu mês.

Com base nessas informações, conclui-se que Cristiane faz aniversário em:

- a) 15 de setembro.
- b) 15 de novembro.
- c) 30 de outubro.
- d) 30 de novembro.
- e) 30 de agosto.

5. **UPE/SSA 2021** Se o número natural  $N = 2a35b$ , no qual  $a$  e  $b$  são os algarismos das unidades de milhar e das unidades simples, respectivamente, é divisível por 6, quantos são os pares de algarismos  $(a, b)$ ?

- a) 12
- b) 14
- c) 15
- d) 16
- e) 17

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 1

- I. Leia as páginas de **112 a 116** e de **137 a 139**.
- II. Faça os exercícios **9** e **10** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos **36, 37, 43, 45, 49** e **54**.

## FRENTE 2

### AULAS 9 E 10

# Produtos notáveis

## Propriedade distributiva da multiplicação

- $A(B + C) \equiv AB + AC$
- $(A + B)C \equiv AC + BC$
- $(A + B)(X + Y) \equiv AX + AY + BX + BY$

## Produtos notáveis do 2º grau

- $(A + B)^2 \equiv A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 \equiv A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B) \equiv A^2 - B^2$
- $(A + B + C)^2 \equiv A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

## Produtos notáveis do 3º grau

- $(A + B)^3 \equiv A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 \equiv A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $(A - B)(A^2 + AB + B^2) \equiv A^3 - B^3$
- $(A + B)(A^2 - AB + B^2) \equiv A^3 + B^3$

## Identidades dedutíveis dos produtos notáveis

- A soma dos quadrados é igual ao quadrado da soma menos o dobro do produto.

$$A^2 + B^2 \equiv (A + B)^2 - 2AB$$

- A soma dos cubos é igual ao cubo da soma menos o triplo do produto vezes a soma.

$$A^3 + B^3 \equiv (A + B)^3 - 3AB(A + B)$$

Veja alguns exemplos da aplicação dos produtos notáveis à racionalização de denominadores:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

$$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

## Exercícios de sala

1. **UEPB 2014** Dado  $x - \frac{1}{x} = 13$ , o valor de  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  é igual a:

a) 171

b) 169

c) 167

d) 130

e)  $\frac{168}{13}$

2. **Uece 2016** Se  $x$  é um número real tal que  $x + \frac{1}{x} = 3$ , então, o valor de  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  é:
- a) 9      b) 18      c) 27      d) 36

3. Assinale a alternativa que apresenta o número diferente dos demais.

- a)  $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$       c)  $\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$       e)  $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$   
 b)  $\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$       d)  $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}$

4. **FGV-SP 2020** Em relação à expressão algébrica  $\left(\frac{x^2 - x^3}{x^4}\right)^{-2}$ , sua condição de existência no universo dos números reais e sua simplificação máxima são, respectivamente,

- a)  $x \neq 0; x^4 - x^2$   
 b)  $x \neq 0$  e  $x \neq 1; \frac{x^4}{1-x^2}$   
 c)  $x \neq -1$  e  $x \neq 1; \frac{x^4}{1-x^2}$   
 d)  $x \neq 0$  e  $x \neq 1; \frac{x^4}{x^2 - 2x + 1}$   
 e)  $x \neq -1$  e  $x \neq 1; \frac{x^4}{x^2 - 2x + 1}$

5. **UCPel-RS 2017** Sendo  $m + n = -2$  e  $\frac{a}{b} = 2$ , pode-se

afirmar que a expressão  $\frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^m \cdot \left(a - \frac{1}{b}\right)^n}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^m \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right)^n}$  é igual a

- a)  $\frac{1}{2}$       c) 0      e) 2  
 b)  $\frac{1}{4}$       d) 4

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 2

- I. Leia as páginas de **162 a 166**.  
 II. Faça os exercícios de **1 a 3** da seção “Revisando”.  
 III. Faça os exercícios propostos **4, 5, 10, 14** e de **20 a 22**.



## FRENTE 2

### AULAS 11 E 12

# Fatoração

## Principais casos de fatoração

- **Fator comum:**

$$AB + AC \equiv A(B + C)$$

- **Diferença de quadrados:**

$$A^2 - B^2 \equiv (A + B)(A - B)$$

- **Trinômio quadrado perfeito:**

$$A^2 + 2AB + B^2 \equiv (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \equiv (A - B)^2$$

- **Soma e diferença de cubos:**

$$A^3 + B^3 \equiv (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 \equiv (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

## Técnicas de agrupamento

$$\underbrace{AX + AY}_{\text{fator comum A}} + \underbrace{BX + BY}_{\text{fator comum B}} \equiv \underbrace{A(X + Y) + B(X + Y)}_{\text{fator comum (X+Y)}} \equiv (X + Y)(A + B)$$

$$\underbrace{A^2 + 2AB + B^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} - C^2 \equiv \underbrace{(A + B)^2 - C^2}_{\text{diferença de quadrados}} \equiv (A + B + C)(A + B - C)$$

## Trinômio do 2º grau

$$X^2 - sX + p \equiv (X - A)(X - B) \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = s \\ A \cdot B = p \end{cases}$$

Observe que, se  $s^2 = 4p$ , então  $X^2 - sX + p$  é um trinômio quadrado perfeito.

## Exercícios de sala

1. **IFRSul-RS** Simplificando-se a expressão  $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$ , obtém-se:

a)  $6x$

b)  $-6x$

c)  $\frac{x - 3}{x + 3}$

d)  $\frac{x + 3}{x - 3}$

2. **ESPM-RJ 2020** O valor da expressão numérica

$$2 \cdot 10^{-5} + \frac{99\,998^2}{99\,999^2 - 1} \text{ é igual a:}$$

- a) 0
- b) 2
- c) 1
- d)  $\frac{1}{2}$
- e)  $\frac{1}{4}$

3. **UTFPR 2018** Dados  $A = x + y$ ,  $B = x - y$  e  $C = x \cdot y$ , para  $x \neq y$ ,  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Simplificando a expressão algébrica  $\frac{A^2 - B^2}{C}$ , obtém-se:

- a) 0.
- b)  $\frac{2y}{x}$ .
- c) 4.
- d)  $-\frac{2x}{y}$ .
- e)  $\frac{4}{xy}$ .

4. **Cefet-RJ 2019** Seja F a forma fatorada irredutível equivalente à expressão algébrica a seguir:

$$\frac{x^2 \cdot (x - 1) + (x - 2)^2 - (x - 2) \cdot (x - 1) - 1}{x^2 - 1}$$

- a) Escreva F.
- b) Calcule o valor numérico de F quando  $x = 2$ .

5. Dados  $X = 2022$  e  $Y = 2021$ , calcule o valor de Z, sabendo que:

$$Z = 8 \cdot \frac{2X^2 + 4XY + 2Y^2}{\frac{X^4}{2} - X^2Y^2 + \frac{Y^4}{2}}$$

- a) 32
- b) 16
- c) 8
- d) 4
- e) 2

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 2

- I. Leia as páginas de **167 a 169**.
- II. Faça os exercícios de **4 a 6** da seção "Revisando".
- III. Faça os exercícios propostos **1, 6, 12, 15, 17, 19 e 23**.

## FRENTE 2

### AULAS 13 E 14

# Problemas do 1º e do 2º grau

Nestas aulas, praticaremos a tradução algébrica, que consiste na interpretação de um enunciado literal para a obtenção de uma equação do 1º ou do 2º grau que modele corretamente o problema.

Raramente essas equações são obtidas nos seus formatos mais simples. Cabe ao aluno dominar as técnicas algébricas que permitem reescrevê-las nos seus formatos ideais.

O domínio dessas técnicas só pode ser alcançado com a prática!

Uma vez feita a tradução algébrica, as incógnitas das equações obtidas deverão estar diretamente associadas ao problema. Recomenda-se um uso mínimo de incógnitas, por exemplo: se um problema menciona três números inteiros consecutivos, não os represente por  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mas por  $x$ ,  $(x + 1)$  e  $(x + 2)$ .

Recomenda-se também a escolha de incógnitas mnemônicas, por exemplo: quando um problema trata do número de homens e do número de mulheres de um grupo de pessoas, não os represente por  $x$  e  $y$ , mas, sim, por  **$h$**  e  **$m$** , diminuindo o risco de confundir-los.

Durante toda a resolução de um determinado problema, esteja atento à natureza numérica das incógnitas, por exemplo: o número de filhos de certo casal é necessariamente um número natural; a medida do lado de um polígono só pode ser representada por um número real positivo etc.

Dessa maneira, podemos eliminar respostas absurdas ou até adiantarmos um determinado resultado.

## Exercícios de sala

- 1. Enem 2020** Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R\$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R\$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

- a) 2 385,00                      d) 3 950,00  
b) 2 650,00                      e) 5 300,00  
c) 3 300,00

- 2. Enem 2021** Em um estudo realizado pelo IBGE em quatro estados e no Distrito Federal, com mais de 5 mil pessoas com 10 anos ou mais, observou-se que a leitura ocupa, em média, apenas seis minutos do dia de cada pessoa. Na faixa de idade de 10 a 24 anos, a média diária é de três minutos. No entanto, no grupo de idades entre 24 e 60 anos, o tempo médio diário dedicado à leitura é de 5 minutos. Entre os mais velhos, com 60 anos ou mais, a média é de 12 minutos. A quantidade de pessoas entrevistadas de cada faixa de idade seguiu a distribuição percentual descrita no quadro.

Faixa etária	Percentual de entrevistados
De 10 a 24 anos	$x$
Entre 24 e 60 anos	$y$
A partir de 60 anos	$x$

Disponível em: [www.oglobo.globo.com](http://www.oglobo.globo.com).  
Acesso em: 16 ago. 2013 (adaptado)

Os valores de  $x$  e  $y$  do quadro são, respectivamente, iguais a

- a) 10 e 80.  
b) 10 e 90.  
c) 20 e 60.  
d) 20 e 80.  
e) 25 e 50.

3. **Unicamp-SP 2020** Em uma família, cada filha tem o mesmo número de irmãs e irmãos, e cada filho tem um número de irmãs igual ao dobro do número de irmãos. O número total de filhos e filhas dessa família é igual a
- a) 11.
  - b) 9.
  - c) 7.
  - d) 5.

4. **Fuvest-SP** Em uma festa com  $n$  pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número  $n$  de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a:
- a) 100
  - b) 105
  - c) 115
  - d) 130
  - e) 135

5. **Famema-SP 2020** Um grupo de  $N$  amigos decidiu comprar um presente para uma de suas professoras. O preço do presente é R\$ 396,00 e será dividido em partes iguais entre eles. No dia de comprar o presente, um dos amigos desistiu de participar da compra, o que resultou em um aumento de R\$ 3,00 na parte de cada um dos amigos que restou no grupo. O número  $N$  de amigos no grupo original era igual a
- a) 11.
  - b) 18.
  - c) 12.
  - d) 9.
  - e) 6.

## Guia de estudos


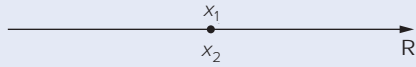

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 2

- I. Leia as páginas de **169** a **175**.
- II. Faça os exercícios de **7** a **10** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos **24, 28, 35, 36, 43, 45** e **46**.

# Razões e proporções

## Comparação de números

Princípio da tricotomia – ao comparar dois números reais  $x_1$  e  $x_2$ , só há três situações a se considerar:

$x_1$ é menor que $x_2$	$x_1 < x_2$	
$x_1$ é igual a $x_2$	$x_1 = x_2$	
$x_1$ é maior que $x_2$	$x_1 > x_2$	

### Comparação por subtração

- $x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$
- $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \neq 0$

### Comparação por quociente

- $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1$ , sendo  $x_1$  e  $x_2$  números não nulos.
- $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} \neq 1$

## Razões

### Razão simples

Razão simples é o quociente entre duas grandezas de mesma espécie.

### Razão composta

Razão composta é o quociente entre duas grandezas de espécies diferentes.

## Proporção

Proporção é a igualdade entre duas razões obtidas por quociente.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

### Propriedades

- $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$
- Para simplificar uma proporção, divide-se ambos os termos antecedentes ou ambos os termos consequentes por um mesmo número real não nulo.
- $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$
- $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + y_1}{y_1} = \frac{x_2 + y_2}{y_2}$
- $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1 + x_1} = \frac{x_2}{y_2 + x_2}$

## Exercícios de sala

1. **Enem 2016** De forma geral, os pneus radiais trazem em sua lateral uma marcação do tipo  $abc/deRfg$ , como 185/65R15. Essa marcação identifica as medidas do pneu da seguinte forma:

- $abc$  é a medida da largura do pneu, em milímetro;
- $de$  é igual ao produto de 100 pela razão entre a medida da altura (em milímetro) e a medida da largura do pneu (em milímetro);
- R significa radial;
- $fg$  é a medida do diâmetro interno do pneu, em polegada.

A figura ilustra as variáveis relacionadas com esses dados.



O proprietário de um veículo precisa trocar os pneus de seu carro e, ao chegar a uma loja, é informado por um vendedor que há somente pneus com os seguintes códigos: 175/65R15, 175/75R15, 175/80R15, 185/60R15 e 205/55R15. Analisando, juntamente com o vendedor, as opções de pneus disponíveis, concluem que o pneu mais adequado para seu veículo é o que tem a menor altura.

Desta forma, o proprietário do veículo deverá comprar o pneu com a marcação:

- 205/55R15
- 175/65R15
- 175/75R15
- 175/80R15
- 185/60R15

2. **Enem 2018** Numa atividade de treinamento realizada no Exército de um determinado país, três equipes – Alpha, Beta e Gama – foram designadas a percorrer diferentes caminhos, todos com os mesmos pontos de partida e de chegada.

- A equipe Alpha realizou seu percurso em 90 minutos com uma velocidade média de 6,0 km/h.
- A equipe Beta também percorreu sua trajetória em 90 minutos, mas sua velocidade média foi de 5,0 km/h.
- Com uma velocidade média de 6,5 km/h, a equipe Gama concluiu seu caminho em 60 minutos.

Com base nesses dados, foram comparadas as distâncias  $d_{Beta}$ ,  $d_{Alpha}$  e  $d_{Gama}$  percorridas pelas três equipes.

A ordem das distâncias percorridas pelas equipes Alpha, Beta e Gama é

- $d_{Gama} < d_{Beta} < d_{Alpha}$
- $d_{Alpha} = d_{Beta} < d_{Gama}$
- $d_{Gama} < d_{Beta} = d_{Alpha}$
- $d_{Beta} < d_{Alpha} < d_{Gama}$
- $d_{Gama} < d_{Alpha} < d_{Beta}$

3. **Enem** Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil  $\text{km}^2$  de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: <www.wwf.org.br>.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por  $\text{km}^2$ , é de:

- a) 250
  - b) 25
  - c) 2,5
  - d) 0,25
  - e) 0,025
4. **Enem 2020** É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou  $4 \text{ m}^3$  de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4 000 embalagens de mesma capacidade. Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?
- a) 0,1
  - b) 1,0
  - c) 10,0
  - d) 100,0
  - e) 1 000,0

5. **IFCE 2019** Os números reais  $m$  e  $n$  são tais que a razão entre  $m + n$  e  $3m - 2n$ , nessa ordem, vale  $\frac{1}{4}$ . A razão entre os números  $m + 2n$  e  $2m + n$ , nessa ordem, vale

- a)  $\frac{3}{7}$ .
- b)  $\frac{8}{13}$ .
- c)  $\frac{2}{3}$ .
- d)  $\frac{4}{11}$ .
- e)  $\frac{6}{5}$ .

6. **Uerr 2019** A razão entre dois ângulos suplementares é igual a  $\frac{3}{5}$ . Assinale a alternativa que corresponde ao complemento do menor ângulo.

- a)  $77,5^\circ$
- b)  $76,0^\circ$
- c)  $67,5^\circ$
- d)  $12,5^\circ$
- e)  $22,5^\circ$

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 3

- I. Leia as páginas de **194** a **203**.
- II. Faça os exercícios de **1** a **4** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos de **1** a **4**, **13** e **15**.

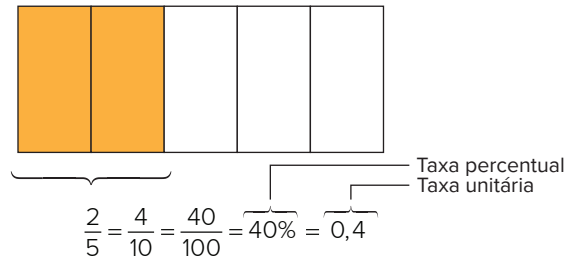
## FRENTE 2

### AULAS 17 E 18

# Porcentagem

## Porcentagens e taxas

- Porcentagem é fração e fração é a parte sobre o todo. Exemplo:



- O símbolo “%” indica que o denominador dessa fração é 100.

$$X\% = \frac{X}{100}$$

- Todo número real pode ser expresso em forma percentual. Basta multiplicá-lo por 100.

$$N = (100 \cdot N)\%$$

- Dos enunciados, faz-se a seguinte tradução:

$$t\% \text{ de } P = \frac{t \cdot P}{100}$$

## Lucro e prejuízo

- Se o preço de venda  $V$  é superior ao preço de custo  $C$ , então o lucro nominal, ou monetário,  $L$  é dado por:

$$L = V - C$$

- Se o preço de venda  $V$  é inferior ao preço de custo  $C$ , então o prejuízo nominal  $P$  é dado por:

$$P = C - V$$

## Taxas de lucro

- A taxa de lucro sobre o custo é dada pela razão  $\frac{L}{C}$ .
- A taxa de lucro sobre a venda é dada pela razão  $\frac{L}{V}$ .

## Fator de correção:

- Para aumentos de  $t\%$ , temos  $F = 1 + \frac{t}{100}$ .
- Para reduções de  $t\%$ , temos  $F = 1 - \frac{t}{100}$ .

Exemplos:

Aumento de 30%

$F > 1$

$$\begin{array}{l} \text{Valor inicial} \longrightarrow 100\% \\ \text{Aumento} \longrightarrow 30\% + \\ \hline 130\% \Rightarrow F = 1,3 \end{array}$$

Redução de 30%

$0 < F < 1$

$$\begin{array}{l} \text{Valor inicial} \longrightarrow 100\% \\ \text{Desconto} \longrightarrow 30\% - \\ \hline 70\% \Rightarrow F = 0,7 \end{array}$$

O valor resultante de um único aumento ou redução percentual de taxa  $t$ , aplicado a um valor inicial  $P$ , chama-se montante acumulado. Esse montante  $M$  é dado por:

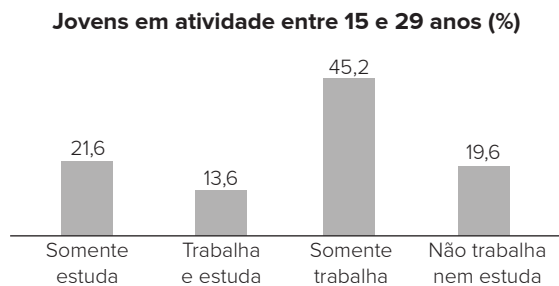
$$M = F \cdot P$$



## Exercícios de sala

1. **Unifor-CE 2020** Ao se comparar, por meio de porcentagem, dois cursos, A e B, que preparam alunos para o exame do Enem, obtivemos que o curso A aprovou 96 dos seus 640 alunos e o curso B aprovou 72 de seus 450 alunos. Sendo assim, podemos afirmar que o percentual de aprovação de A é:
- 22% superior ao do curso B.
  - igual ao do curso B.
  - 4% inferior ao do curso B.
  - 1% inferior ao do curso B.
  - 1% superior ao do curso B.

2. **Enem 2020** A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) é uma pesquisa feita anualmente pelo IBGE, exceto nos anos em que há Censo. Em um ano, foram entrevistados 363 mil jovens para fazer um levantamento sobre suas atividades profissionais e/ou acadêmicas. Os resultados da pesquisa estão indicados no gráfico.



Disponível em: <http://noticias.uol.com.br>. Acesso em: 20 ago. 2014.

De acordo com as informações dadas, o número de jovens entrevistados que trabalha é

- 114 708.
- 164 076.
- 213 444.
- 284 592.
- 291 582.

3. **Cefet-MG 2020** Uma loja vende seus produtos nas seguintes condições: com 5% de desconto sobre o preço anunciado para pagamento à vista, em dinheiro, ou com 2% de acréscimo sobre o preço anunciado, no cartão de crédito. Um produto que custa à vista R\$ 456,00 no dinheiro, no cartão de crédito sairá, em reais, por
- 489,00
  - 489,60.
  - 490,00.
  - 491,20.

4. **Enem 2019** Para construir uma piscina, cuja área total da superfície interna é igual a  $40 \text{ m}^2$ , uma construtora apresentou o seguinte orçamento:

- R\$ 10 000,00 pela elaboração do projeto;
- R\$ 40 000,00 pelos custos fixos;
- R\$ 2 500,00 por metro quadrado para construção da área interna da piscina.

Após a apresentação do orçamento, essa empresa decidiu reduzir o valor de elaboração do projeto em 50%, mas recalculou o valor do metro quadrado para a construção da área interna da piscina, concluindo haver a necessidade de aumentá-lo em 25%. Além disso, a construtora pretende dar um desconto nos custos fixos, de maneira que o novo valor do orçamento seja reduzido em 10% em relação ao total inicial.

O percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos é de

- 23,3%
- 25,0%
- 50,0%
- 87,5%
- 100,0%

5. **Famerp-SP 2022** Segundo dados do Instituto Trata Brasil, 83,3% dos brasileiros contam com água encanada, mas apenas 51,9% têm acesso a tratamento de esgoto. De acordo com estimativas do IBGE, em 2021 a população brasileira atingiu a marca de 213,3 milhões de pessoas. Considerando-se que todos os brasileiros que têm acesso a tratamento de esgoto também têm acesso à água encanada, o número aproximado de brasileiros que, em 2021, têm acesso à água encanada, mas não têm acesso ao tratamento de esgoto, é de:
- a) 110 milhões
  - b) 85 milhões
  - c) 92 milhões
  - d) 102 milhões
  - e) 67 milhões

6. **Unesp 2019** Em um dia de aula, faltaram 3 alunas e 2 alunos porque os cinco estavam gripados. Dos alunos e alunas que foram à aula, 2 meninos e 1 menina também estavam gripados. Dentre os meninos presentes à aula, a porcentagem dos que estavam gripados era 8% e, dentre as meninas, a porcentagem das que estavam gripadas era 5%. Nos dias em que a turma está completa, a porcentagem de meninos nessa turma é de
- a) 52%.
  - b) 50%.
  - c) 54%.
  - d) 56%.
  - e) 46%.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 3

- I. Leia as páginas de **203** a **210**.
- II. Faça os exercícios **6**, **8** e **9** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos **19**, **22**, **30**, **33**, de **34** a **36** e **38**.

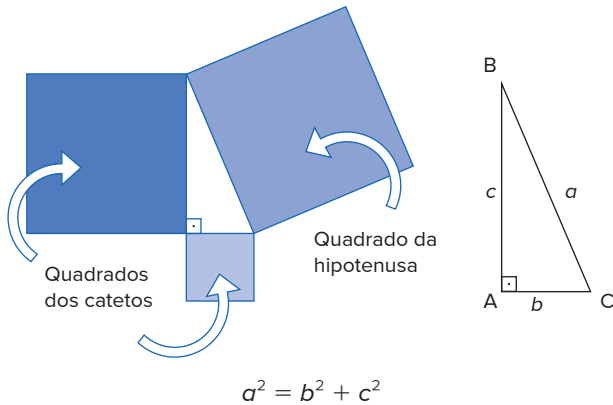
## FRENTE 3

### AULAS 1 E 2

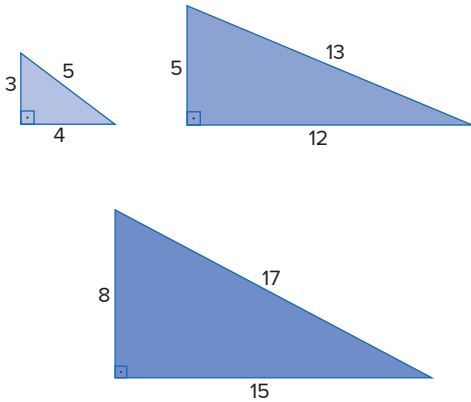
# Recordando a trigonometria do triângulo retângulo

## Teorema de Pitágoras

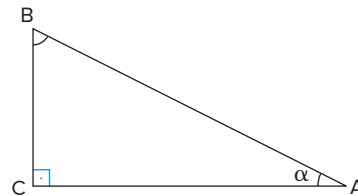
Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa equivale à soma dos quadrados dos catetos.



## Exemplos de triângulos pitagóricos



## Razões trigonométricas no triângulo retângulo



Considerando um ângulo agudo  $\alpha$ , temos as seguintes relações:

$$\text{seno: } \text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno: } \text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente: } \text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

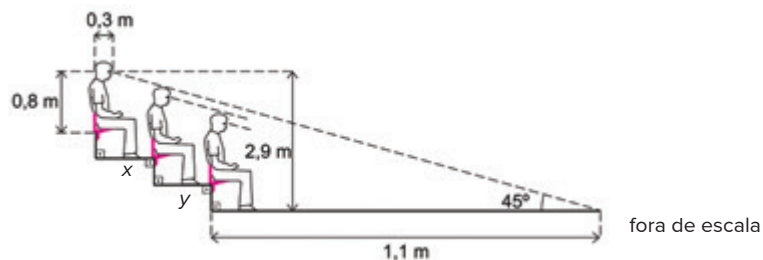
## Tabela de ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Aproximações:  $\sqrt{2} \cong 1,4$  e  $\sqrt{3} \cong 1,7$

## Exercícios de sala

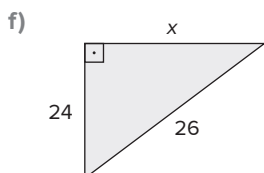
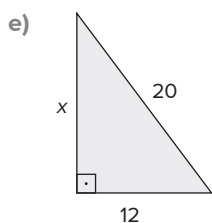
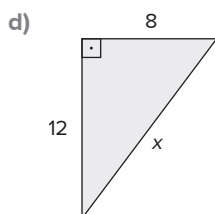
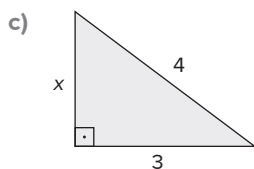
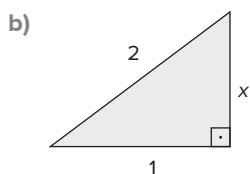
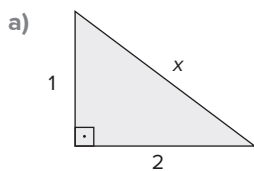
1. **Famema-SP 2021** A figura representa uma arquibancada com degraus de mesma altura ( $x$  metros) e mesma extensão ( $y$  metros).



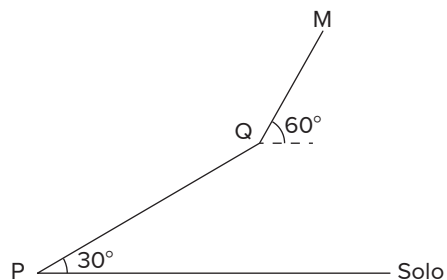
O valor de  $x + y$  será igual a

- a) 1,85 m.                      c) 1,90 m.                      e) 1,95 m.  
 b) 1,80 m.                      d) 1,75 m.

2. Determine o valor de  $x$  em cada figura.



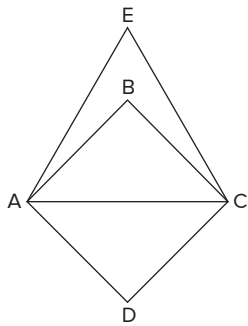
3. **FCMSCSP 2020** Partindo do ponto P, no solo, Renato sobe um aclave retilíneo com inclinação constante de  $30^\circ$  até atingir a altitude de 900 metros em relação ao solo, no ponto Q. A partir desse ponto, o aclave, ainda retilíneo, passa a ter inclinação constante de  $60^\circ$  até o ponto M, onde localiza-se um mirante com altitude de 1 260 metros em relação ao solo.



Sabendo que Renato subiu o trecho  $\overline{PQ}$  com velocidade constante de 2 metros por segundo e o trecho  $\overline{QM}$  com velocidade constante de  $\sqrt{3}$  metro por segundo, seu tempo total de caminhada de P até M foi igual a

- a) 20 min.
- b) 19 min.
- c) 15 min.
- d) 18 min.
- e) 21 min.

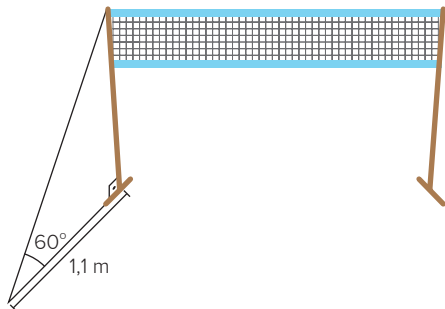
4. A figura a seguir apresenta um quadrado ABCD de lado 10 cm e um triângulo equilátero ACE.



Usando as aproximações  $\sqrt{2} \cong 1,4$  e  $\sqrt{3} \cong 1,7$ , a melhor estimativa para a distância entre os pontos B e E na figura é de:

- 1 cm.
- 2 cm.
- 3 cm.
- 4 cm.
- 5 cm.

5. **FCMSCSP 2022** Para o cálculo da altura do mastro de fixação de um *kit* de rede de vôlei, Jair usou um triângulo retângulo, com medidas indicadas na figura.



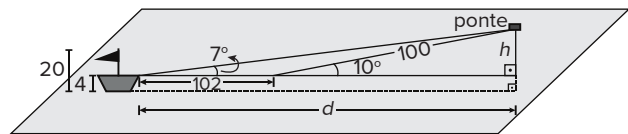
Dados:

	30°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

Considerando  $\sqrt{3} = 1,73$ , a altura do mastro de fixação desse *kit* é, aproximadamente,

- 0,78 m.
- 0,95 m.
- 1,55 m.
- 1,57 m.
- 1,90 m.

6. **UFG-GO 2014** Um navio, que possui 20 m de altura sobre a água, passa por um canal e, em certo momento, o capitão da embarcação avista uma ponte plana sobre o canal, a qual ele desconhece as dimensões e tem de decidir se o navio pode passar sob a ponte. Para isso, ele inicia uma série de cálculos e medições. A primeira constatação que ele faz é a de que, a uma certa distância,  $d$ , da projeção da base da ponte, a inclinação do segmento que une a parte retilínea inferior da ponte e o ponto mais avançado do navio, que está a 4 m de altura sobre a água, é de  $7^\circ$ . Percorridos 102 m em linha reta em direção à ponte, ele volta a medir a inclinação, obtendo um ângulo de  $10^\circ$ , e verifica que a distância entre a parte retilínea inferior da ponte e o ponto mais avançado do navio é de 100 m, como ilustra a figura a seguir.



Diante do exposto, admitindo que a superfície do rio é plana, determine a altura da ponte e conclua se esta é suficiente para que o navio passe sob ela.

► **Dados:**  $\text{tg } 7^\circ \cong 0,12$  e  $\text{cos } 10^\circ \cong 0,98$ .

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 1

- Leia as páginas de 231 a 244.
- Faça os exercícios 1, 3, 4, de 6 a 10 e 12 da seção "Revisando".
- Faça os exercícios propostos 2, 4, 9, 10, 13, 17, 19 e 20.

# Introdução à Geometria Euclidiana: postulados e ângulos

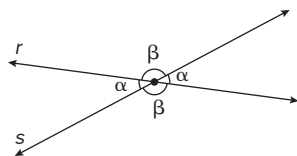
## Postulados de Euclides

De acordo com os postulados da Geometria Euclidiana, é permitido:

1. Traçar um segmento de reta unindo dois pontos.
2. Prolongar um segmento de reta mantendo sempre sua direção.
3. Traçar uma circunferência conhecendo-se o seu centro e a medida de seu raio.
4. Traçar uma reta que seja perpendicular a uma reta dada por um ponto qualquer.
5. Traçar uma reta que seja paralela a uma reta dada por um ponto fora dessa reta.

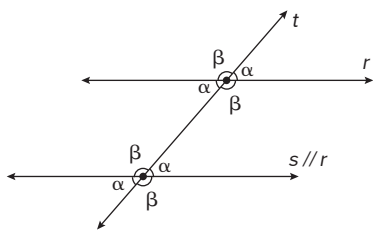
## Ângulos

- Duas retas concorrentes



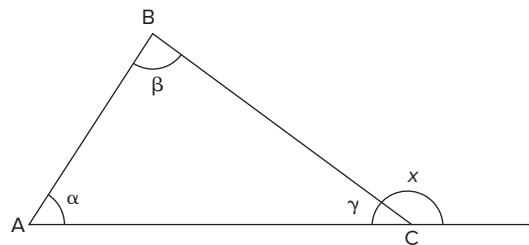
Ângulos suplementares:  $\alpha + \beta = 180^\circ$

- Duas retas paralelas e uma transversal



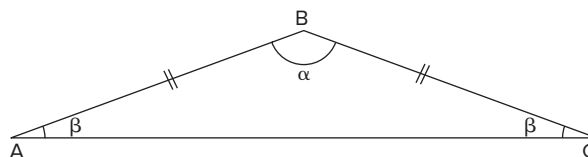
Ângulos suplementares:  $\alpha + \beta = 180^\circ$

- Ângulos internos e externos de um triângulo



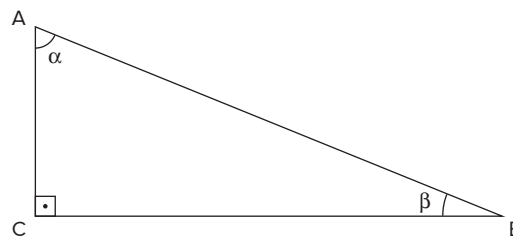
Soma dos ângulos internos:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$   
 Medida do ângulo externo:  $x = \alpha + \beta$

- Triângulo isósceles



Soma dos ângulos internos:  $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

- Triângulo retângulo



Ângulos complementares:  $\alpha + \beta = 90^\circ$

## Exercícios de sala

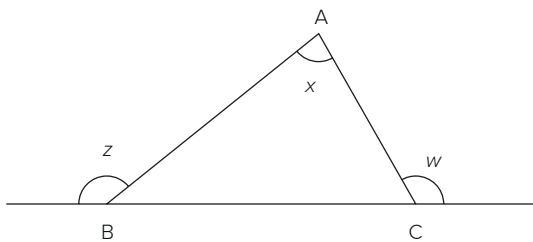
1. Dividindo-se um ângulo reto em 25 partes iguais, obtemos a medida de 3 graus e quantos minutos?
  - a) 60
  - b) 45
  - c) 36
  - d) 30
  - e) 15

2. **Unig-RJ 2021** Considere um triângulo qualquer, cujos ângulos medem, em graus, respectivamente,  $6x + 30^\circ$ ,  $3x - 10^\circ$  e  $2x - 5^\circ$ . Lógico é que, para validade dessas expressões como medidas de ângulos de um triângulo, é necessário calcular o valor de  $x$ , o que permitirá identificar o tipo do triângulo imaginado.

Nessas condições, tem-se

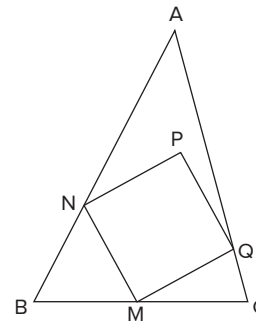
- 01)  $x = 15^\circ$  e o triângulo é obtusângulo.  
 02)  $x = 18^\circ$  e o triângulo é retângulo.  
 03)  $x = 20^\circ$  e o triângulo é acutângulo.  
 04)  $x = 22^\circ$  e o triângulo é obtusângulo.  
 05)  $x = 25^\circ$  e o triângulo é isósceles.

3. **EEAR-SP 2020** No triângulo ABC da figura,  $x$  é a medida de um ângulo interno e  $z$  e  $w$  são medidas de ângulos externos. Se  $z + w = 220^\circ$  e  $z - 20^\circ = w$ , então  $x$  é



- a) complemento de  $120^\circ$   
 b) complemento de  $60^\circ$   
 c) suplemento de  $140^\circ$   
 d) suplemento de  $50^\circ$

4. O ponto médio  $M$  da base  $\overline{BC}$  do triângulo ABC é vértice do quadrado MNPQ, cujo perímetro é igual ao dobro da medida BC. Os vértices  $N$  e  $Q$  desse quadrado pertencem aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo ABC, como mostra a figura.



Determine a medida, em graus, do ângulo interno de vértice A do triângulo ABC.

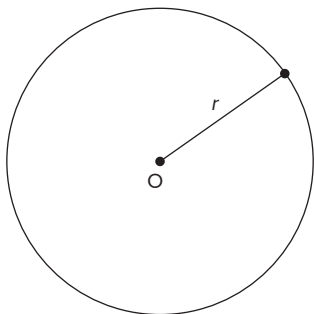
## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 2

- I. Leia as páginas de **257 a 265** e de **268 a 274**.  
 II. Faça os exercícios **3, 6, 7 e 9** da seção “Revisando”.  
 III. Faça os exercícios propostos de **7 a 17 e 20**.

# Circunferências e congruência de triângulos

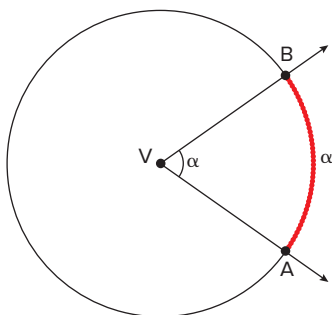
## Círculo e circunferência



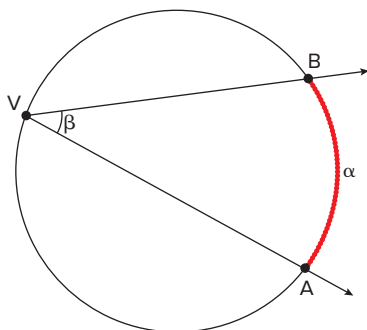
Comprimento da circunferência:  $C = 2\pi r$   
 Área do círculo:  $A = \pi r^2$

## Ângulos e circunferências

### Ângulo central

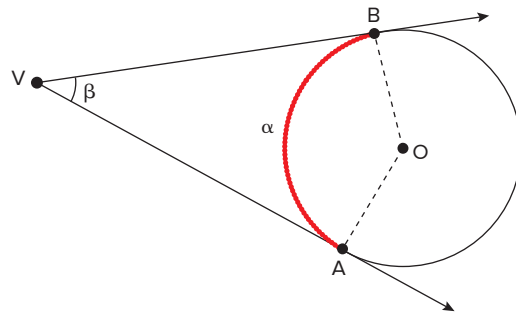


### Ângulo inscrito



$$\beta = \frac{\alpha}{2} \text{ ou } \alpha = 2\beta$$

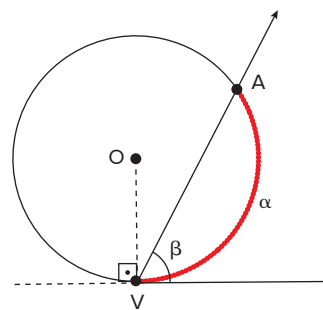
### Ângulo circunscrito



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$VA = VB$$

### Ângulo semi-inscrito



$$\beta = \frac{\alpha}{2} \text{ ou } \alpha = 2\beta$$

## Crítérios de comparação entre figuras geométricas

- Figuras **congruentes** têm a mesma forma e o mesmo tamanho.
- Figuras **semelhantes** têm a mesma forma, mas podem apresentar tamanhos diferentes.
- Figuras **equivalentes** têm o mesmo tamanho, mas podem apresentar formatos diferentes.

## Principais casos de congruência de triângulos

- LAL
- LLL
- ALA
- LAA<sub>o</sub>

## Transformações isométricas no plano

- Translação
- Rotação
- Reflexão

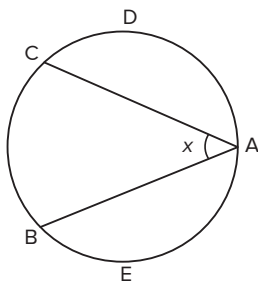


## Exercícios de sala

1. **UEA-AM 2013** Caminhando 100 metros pelo contorno de uma praça circular, uma pessoa descreve um arco de  $144^\circ$ . Desse modo, é correto afirmar que a medida, em metros, do raio da circunferência da praça é:

- a)  $125\pi$
- b)  $\frac{175}{\pi}$
- c)  $\frac{125}{\pi}$
- d)  $\frac{250}{\pi}$
- e)  $250\pi$

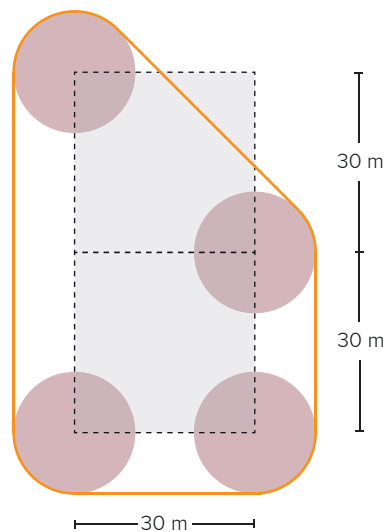
2. **Cefet-MG 2017** A figura a seguir mostra uma circunferência, em que os arcos  $\widehat{ADC}$  e  $\widehat{AEB}$  são congruentes e medem  $160^\circ$  cada um.



A medida, em graus, do ângulo  $x$ , é

- a)  $10^\circ$ .
- b)  $20^\circ$ .
- c)  $30^\circ$ .
- d)  $40^\circ$ .

3. **Fuvest-SP 2022** Quatro tanques cilíndricos são vistos de cima (em planta baixa) conforme a figura. Todos têm 10 m de raio e seus centros se posicionam em vértices dos dois quadrados tracejados adjacentes, ambos com 30 m de lado. Uma fita de isolamento, esticada e paralela ao solo, envolve os 4 tanques, dando uma volta completa (linha em laranja na figura).



O comprimento da fita, em metros, é:

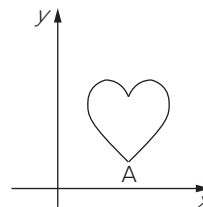
- a)  $20\pi + 30(3 + \sqrt{2})$
- b)  $20\pi + 30(4 + \sqrt{2})$
- c)  $25\pi + 15(4 + \sqrt{2})$
- d)  $25\pi + 30(4 + \sqrt{2})$
- e)  $25\pi + 30(4 + 2\sqrt{2})$

4. **UEM-PR 2016** Com base em conhecimentos de Geometria Plana, assinale o que for correto.

- 01 Quaisquer dois triângulos que possuem a mesma área são congruentes.
- 02 Quaisquer dois triângulos congruentes possuem a mesma área.
- 04 Quaisquer dois triângulos semelhantes são congruentes.
- 08 Quaisquer dois triângulos congruentes são semelhantes.
- 16 Se os triângulos ABC e DEF são tais que o comprimento de  $\overline{AB}$  é igual ao comprimento de  $\overline{DE}$ , o comprimento de  $\overline{BC}$  é igual ao comprimento de  $\overline{EF}$  e o ângulo interno  $\hat{A}BC$  é congruente ao ângulo interno  $\hat{D}EF$ , então os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{DF}$  possuem o mesmo comprimento.

Soma:

5. **Enem PPL 2018** Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o “giro” de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:



- 1ª Reflexão no eixo x;
- 2ª Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;
- 3ª Reflexão no eixo y;
- 4ª Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;
- 5ª Reflexão no eixo x.

Disponível em: [www.pucsp.br](http://www.pucsp.br). Acesso em: 2 ago. 2012.

Qual a posição final da figura?

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

## Guia de estudos

Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 2

- I. Leia as páginas de 265 a 267 e de 274 a 276.
- II. Faça os exercícios 1 e 8 da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos de 1 a 3, 5, 22, 23, 26 e de 28 a 33.

## FRENTE 3

### AULAS 7 E 8

# Polígonos

## Polígonos convexos

Seja  $n$  o número de lados do polígono, temos:

$$\text{Soma dos ângulos internos: } S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\text{Soma dos ângulos externos: } S_e = 360^\circ$$

$$\text{Número de diagonais: } d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

## Polígonos regulares

$$\text{Medida do ângulo interno: } \alpha_i = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

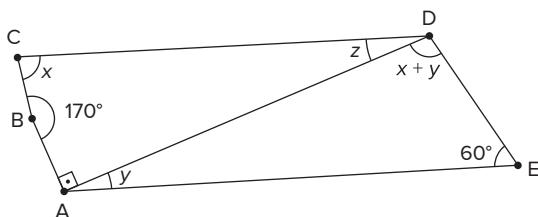
$$\text{Medida do ângulo externo: } \alpha_e = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{Medida do ângulo central: } \theta = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{Número de diagonais que passam pelo centro: } \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

## Exercícios de sala

1. **Famerp-SP 2016** A figura indica alguns dos ângulos de um quadrilátero ABCD e de um triângulo ADE, sendo que  $\overline{AE}$  é paralelo a  $\overline{CD}$ .



Nessa situação, a medida do ângulo  $\widehat{CDA}$ , indicada por  $z$ , é igual a:

- a)  $25^\circ$
- b)  $20^\circ$
- c)  $30^\circ$
- d)  $10^\circ$
- e)  $15^\circ$

2. **UPE/SSA 2020** Um polígono regular está inscrito em um círculo. Numerando os vértices desse polígono, percebe-se que o segmento que une os vértices 7 e 23 é um diâmetro desse círculo. Quantos lados tem esse polígono?

- a) 28
- b) 30
- c) 32
- d) 34
- e) 36

3. **Uece 2022** Situadas em um plano, três circunferências, cujas medidas do raio de cada uma delas é 3 cm, tangenciam-se mutuamente externamente. Assim, pode-se afirmar corretamente que a medida, em  $\text{cm}^2$ , da área do triângulo cujos vértices são os centros das circunferências é igual a:
- $7\sqrt{3}$ .
  - $6\sqrt{3}$ .
  - $9\sqrt{3}$ .
  - $8\sqrt{3}$ .

4. Sendo ABCDEFGH um octógono regular, a medida, em graus, do menor ângulo do triângulo ADF, deve ser:
- $15^\circ$
  - $30^\circ$
  - $40^\circ$
  - $45^\circ$
  - $50^\circ$

5. Sabendo que as mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de  $12^\circ$ , determine:
- as medidas dos seus ângulos internos.
  - o número de lados do polígono.
  - o número de diagonais do polígono.
  - o número de diagonais que não passam pelo centro do polígono.

6. **UEL-PR 2017 (Adapt.)** Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a “Estrela de David” (Figura 1).



Figura 1

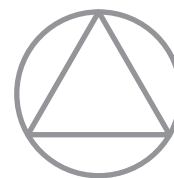


Figura 2

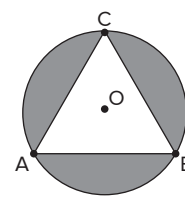


Figura 3

A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero (ABC), inscrito nessa circunferência. Considerando que o raio da circunferência é de  $\sqrt{48}$  cm, determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 2

- Leia as páginas de **276** a **279**.
- Faça os exercícios **2**, **4**, **5** e **10** da seção “Revisando”.
- Faça os exercícios propostos **24**, **25** e de **34** a **41**.

# Teorema de Tales e as proporções geométricas

## Razão de divisão de segmento

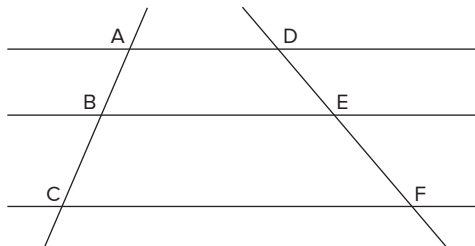


O ponto  $S_I$  divide internamente o segmento  $\overline{AB}$ , de A para B, na razão  $k = \frac{AS_I}{S_I B}$ .

O ponto  $S_E$  divide externamente o segmento  $\overline{AB}$ , de A para B, na razão  $k = \frac{S_E A}{S_E B}$ , com  $k \neq 1$ .

## Teorema de Tales

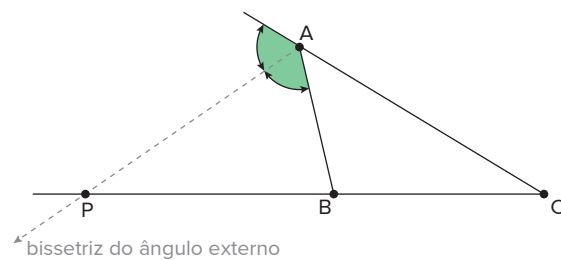
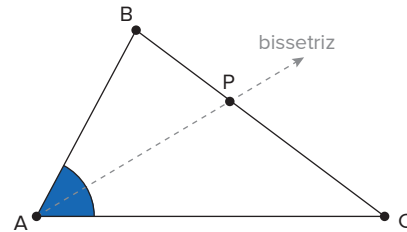
Se um feixe de retas paralelas é intersectado por duas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre cada transversal têm medidas proporcionais.



$$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

## Teorema das bissetrizes de um triângulo

As bissetrizes dos ângulos de um triângulo dividem interna ou externamente os lados opostos aos ângulos de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.



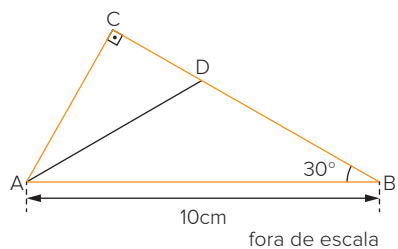
Em ambos os casos, tem-se:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$$

## Exercícios de sala

- Se os pontos A, B e P estão sobre a mesma reta,  $AB = 10$  cm e  $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$ , qual é a distância, em milímetros, do ponto P ao ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ ?

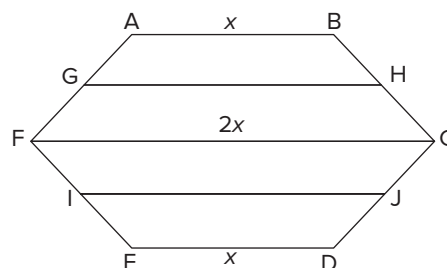
2. **Famema-SP 2019** A figura mostra o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa  $AB = 10$  cm, com o ângulo  $\hat{A}BC = 30^\circ$  e o ponto D sobre o lado  $\overline{BC}$ .



Sabendo que  $\overline{AD}$  é bissetriz do ângulo  $\hat{B}AC$ , o valor da razão  $\frac{BD}{DC}$  é:

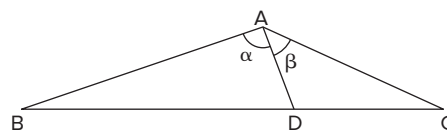
- a) 2.
- b) 1.
- c)  $\frac{1}{2}$ .
- d) 3.
- e)  $\frac{1}{3}$ .

3. **EEAR-SP 2020** No hexágono ABCDEF, G, H, I e J são, respectivamente, os pontos médios de  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{CD}$ . Se  $\overline{AB} \parallel \overline{FC} \parallel \overline{DE}$ , então  $GH + IJ$  é igual a



- a)  $2x$
- b)  $3x$
- c)  $4x$
- d)  $5x$

4. No triângulo ABC, o segmento  $\overline{AD}$  divide o ângulo interno de vértice A em dois outros ângulos de medidas  $\alpha = 130^\circ$  e  $\beta = 25^\circ$ . Sabendo que  $\overline{BD}$  mede 10 cm e que  $\overline{AB}$  mede o triplo de  $\overline{AD}$ , determine a medida do segmento  $\overline{CD}$ .



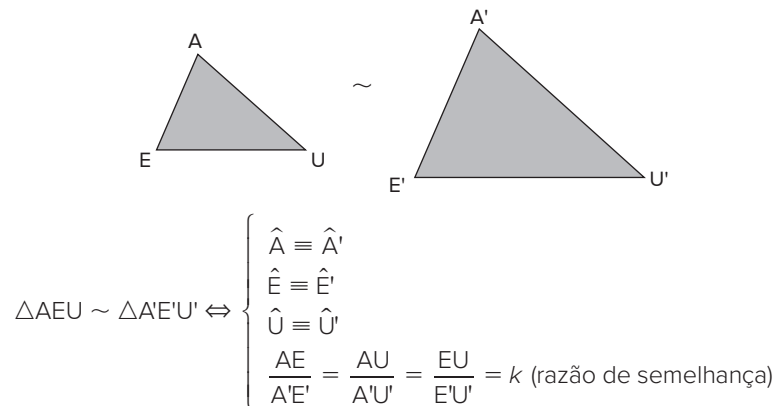
## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 3

- I. Leia as páginas de **301 a 306, 310 e 311**.
- II. Faça os exercícios **1, 6 e 11** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos de **1 a 8 e 27**.

# Semelhança de triângulos

Se dois triângulos são semelhantes, então os ângulos correspondentes têm mesma medida, e os lados correspondentes têm comprimentos proporcionais.

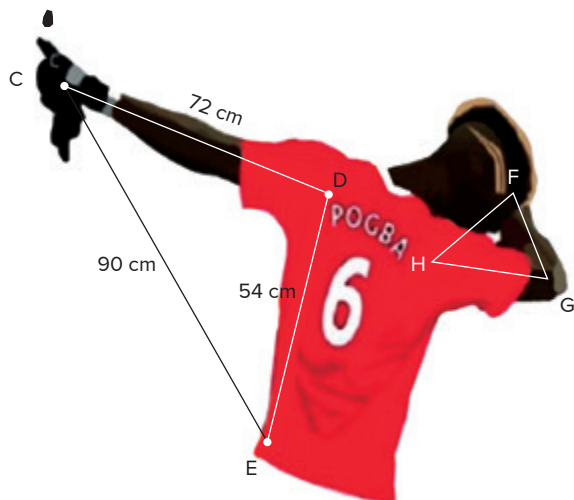


## Propriedade da razão de semelhança

Se  $k$  é a razão da semelhança entre duas figuras geométricas, então a razão de semelhança entre suas áreas é  $k^2$ , e, no caso de serem figuras geométricas espaciais, a razão de semelhança entre seus volumes é  $k^3$ .

### Exercícios de sala

1. **CMRJ 2020** Um professor de matemática francês aproveitou a comemoração dos gols de Paul Pogba, através de um gesto chamado “dab”, para criar para seus alunos um problema relacionado com o Teorema de Pitágoras. A proposta era encontrar uma solução que ajudasse o jogador francês a realizar de forma perfeita o “dab”.



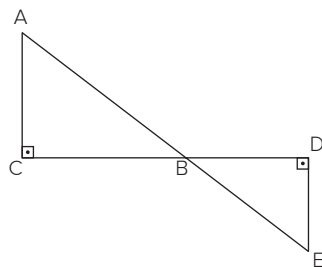
Observe a figura. O triângulo CDE, formado pelo braço esticado de Pogba (segmento  $\overline{CD}$ ), não é semelhante ao triângulo FGH, formado pelo outro braço flexionado, cujas extremidades são H e F. Admitindo-se que o triângulo CDE não pode ser alterado em suas medidas, quais deveriam ser as medidas em centímetros do triângulo FGH para que os dois triângulos se tornassem semelhantes?

- a) 30, 24 e 18 cm
- b) 35, 28 e 21 cm
- c) 40, 32 e 28 cm
- d) 45, 36 e 27 cm
- e) 48, 24 e 20 cm

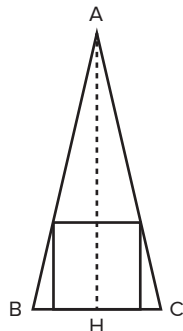
Disponível em: <https://maisfutebol.iol.pt/incrivel/internacional/celebracao-de-pogba-da-origem-a-problema-matematico>. Acesso em 06/08/2019. Texto adaptado.

2. **UFPR 2022** Na figura abaixo, considere os segmentos de reta  $\overline{AE}$  e  $\overline{CD}$ , e os triângulos retângulos  $ABC$  e  $BDE$ . Suponha que o comprimento de  $\overline{AB}$  é igual a  $x$ , e que o comprimento de  $\overline{AC}$  é igual a  $y$ . Considerando que os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  têm o mesmo comprimento, qual das alternativas abaixo corresponde ao valor do comprimento do segmento  $\overline{DE}$ ?

- a)  $\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$   
 b)  $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$   
 c)  $y\sqrt{(x^2 - y^2)}$   
 d)  $\frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$   
 e)  $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2}$



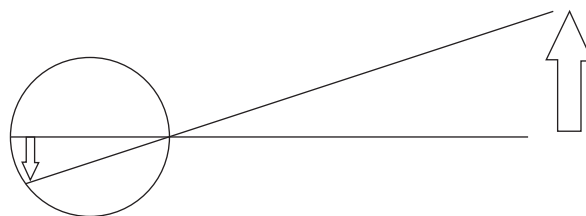
3. **UPF-RS 2019 (Adapt.)** Na figura a seguir, estão representados o triângulo isósceles  $ABC$  e um quadrado inscrito nesse triângulo. O segmento  $\overline{AH}$  é a altura do triângulo em relação à base  $BC$ . Sabe-se que o segmento  $\overline{AH}$  mede 10 cm e o segmento  $\overline{BC}$  mede 4 cm. Então, a medida do lado do quadrado, em centímetros, é



- a)  $\frac{8}{3}$     b)  $\frac{9}{2}$     c) 3    d)  $\frac{5}{2}$     e)  $\frac{20}{7}$

4. Situado no lado  $\overline{AB}$  de um triângulo  $ABC$  está o ponto  $D$ , em uma posição tal que os ângulos  $\hat{A}CD$  e  $\hat{D}BC$  tenham a mesma medida. Sabe-se que  $BD = 5$  cm e  $AC = 6$  cm. Esboce uma figura que represente corretamente essa situação e determine o comprimento do segmento  $\overline{AD}$ .

5. **UnP-RN 2021** A formação da imagem no olho humano ocorre, de forma simplificada, como descrito na figura abaixo. A luz entra no olho, passando pela córnea, e é projetada de forma invertida na retina, a membrana que envolve a parte interna posterior do olho.



Suponha um olho de diâmetro igual a 25 mm a uma distância de 10 m de um objeto cuja altura seja igual a 50 cm. A imagem formada na retina terá altura igual a

- a) 1,25 mm.  
 b) 0,125 m.  
 c) 1,25 cm.  
 d) 0,00125 cm.  
 e) 0,00125 mm.

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 3

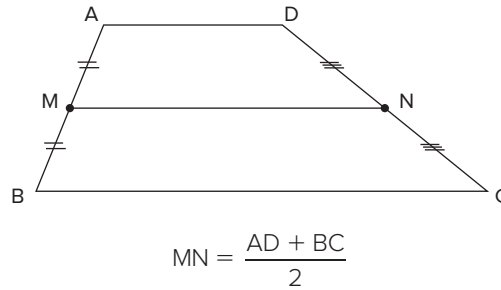
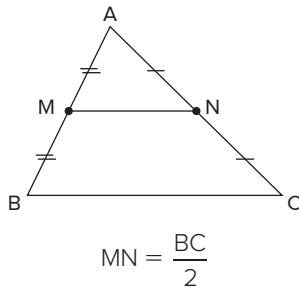
- I. Leia as páginas de **306 a 309**.  
 II. Faça os exercícios **4 e 5** da seção “Revisando”.  
 III. Faça os exercícios propostos de **10 a 19, 21, 25, 26 e 29**.



# Teoremas decorrentes da semelhança de triângulos

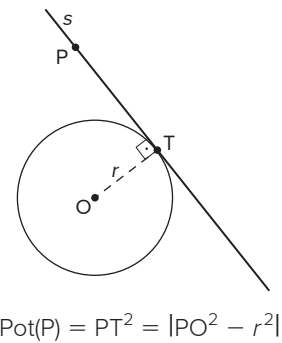
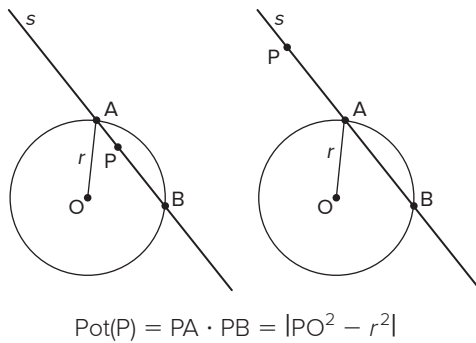
## Teoremas das bases médias

Cada base média de um triângulo é paralela a algum lado do triângulo e tem a metade do comprimento desse lado. A base média de um trapézio é paralela às bases do trapézio e tem comprimento igual à média aritmética dessas bases.

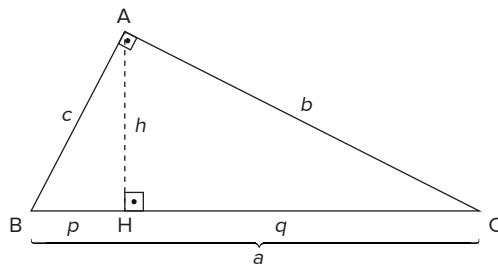


## Teorema da potência de um ponto em relação a uma circunferência

A potência de um ponto em relação a uma circunferência é constante e igual à diferença absoluta dos quadrados da distância do ponto ao centro da circunferência e do raio da circunferência.



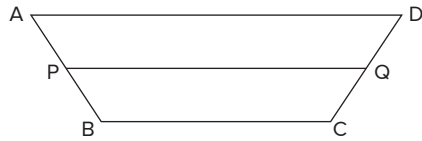
## Relações métricas nos triângulos retângulos



O produto da altura pela hipotenusa equivale ao produto dos catetos.	$a \cdot h = b \cdot c$
O quadrado da altura relativa à hipotenusa equivale ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.	$h^2 = p \cdot q$
O quadrado de um cateto equivale ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.	$b^2 = a \cdot q$ $c^2 = a \cdot p$
O quadrado da hipotenusa equivale à soma dos quadrados dos catetos (teorema de Pitágoras).	$a^2 = b^2 + c^2$

## Exercícios de sala

1. Na figura a seguir, ABCD é um trapézio isósceles, em que P e Q são os pontos médios dos lados não paralelos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

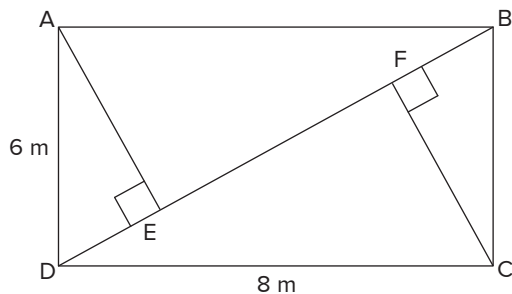


Sabe-se, ainda, que  $AD = 120$  mm,  $PQ = 8$  cm e  $QC = 0,2$  dm.

Determine as medidas, em centímetros, dos segmentos:

- $\overline{AB}$
- $\overline{BC}$

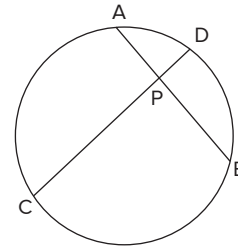
2. **UFSM-RS 2020** Considere a figura a seguir onde os vértices ABCD formam um retângulo.



$\overline{AE}$  e  $\overline{FC}$  são perpendiculares ao segmento  $\overline{DB}$ . Então o segmento  $\overline{AE}$ , em m, mede

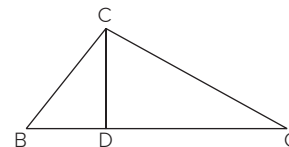
- 10.
- 8.
- 6.
- 4,8.
- 4.

3. Considere a circunferência a seguir, cortada pelas cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , que se cruzam em P.



Dado que  $AP = 2x - 1$ ,  $BP = x$ ,  $CP = 3x$  e  $DP = x - 2$ , determine a potência do ponto P em relação à circunferência.

4. **Unitins-TO 2022** As figuras como triângulo, circunferências e outras estão presentes na nossa vida diária. O triângulo BAC é retângulo em A, e o triângulo ADC é retângulo em D; e as medidas de  $BC = 13$  u e  $AC = 12$  u. Com base nisso, julgue as proposições.



- O segmento  $BD = \frac{25}{13}$ .
- O segmento  $CD = \frac{144}{13}$ .
- O segmento  $AB = 25$ .
- A área do triângulo BDA é  $\frac{1500}{169}$ .

A alternativa que apresenta a validação correta é:

- Somente I e II são verdadeiras.
- Somente I, II e III são verdadeiras.
- Somente I, II e IV são verdadeiras.
- Somente II e III são verdadeiras.
- I, II, III e IV.

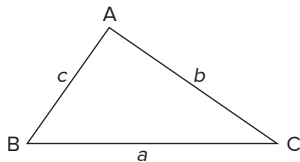
## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 3

- Leia as páginas de **311 a 317**.
- Faça os exercícios de **7 a 10** da seção "Revisando".
- Faça os exercícios propostos **20**, de **30 a 35** e de **37 a 40**.

# Trigonometria nos triângulos não retângulos

## Desigualdade triangular



$$\begin{aligned} |a - b| &< c < a + b \\ |a - c| &< b < a + c \\ |b - c| &< a < b + c \end{aligned}$$

## Ângulos suplementares

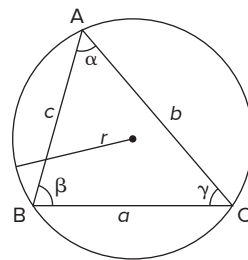
$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\beta) = \text{sen}(\alpha) \\ \text{cos}(\beta) = -\text{cos}(\alpha) \end{cases}$$

## Ângulos notáveis

	sen	cos
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

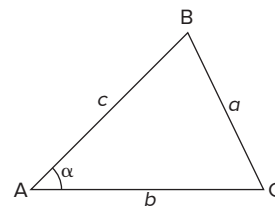
	sen	cos
90°	1	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Teorema dos senos



$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} = 2r$$

## Teorema dos cossenos

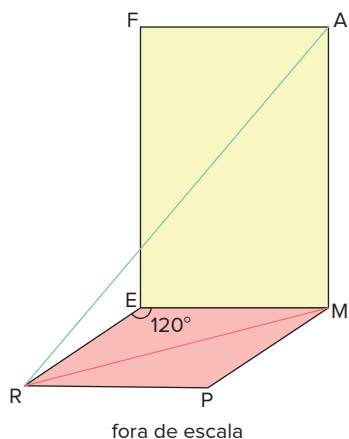


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

## Exercícios de sala

- Dispondo de 15 barras de aço de mesmo comprimento, um serralheiro deverá montar um adorno em forma de triângulo isósceles com a base maior que os outros dois lados para o portão da casa de um cliente. A montagem desse adorno será feita soldando as extremidades das barras, uma à outra, sem que seja necessário cortar ou entortar alguma delas. Como cada barra possui 0,8 m de comprimento, o maior lado que esse triângulo deverá medir é algo em torno de:
  - 7,2 m.
  - 7,0 m.
  - 6,4 m.
  - 5,6 m.
  - 5,2 m.

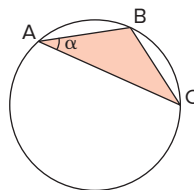
2. **Famerp-SP 2020** A figura indica o retângulo FAME e o losango MERP desenhados, respectivamente, em uma parede e no chão a ela perpendicular. O ângulo MÊR mede  $120^\circ$ ,  $ME = 2$  m e a área do retângulo FAME é igual a  $12$  m<sup>2</sup>.



Na situação descrita, a medida de  $\overline{RA}$  é

- a)  $3\sqrt{3}$  m
- b)  $4\sqrt{3}$  m
- c)  $5\sqrt{2}$  m
- d)  $3\sqrt{2}$  m
- e)  $4\sqrt{2}$  m

3. **FCMSCSP 2020** Pode-se demonstrar o seguinte teorema: em um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência, o seno de um dos seus ângulos é igual ao quociente entre o lado oposto ao ângulo e o diâmetro da circunferência.

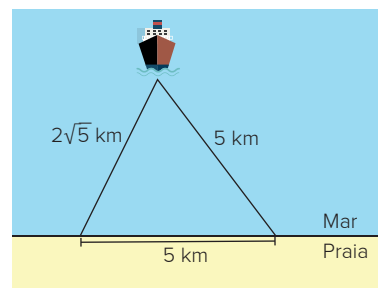


$$\text{sen } \alpha = \frac{BC}{2r}, \text{ sendo } r \text{ o raio da circunferência}$$

Adotando  $\pi = 3,14$  no cálculo final, se  $\alpha = 30^\circ$  e  $BC = 10$  cm, a área do círculo que circunscreve o triângulo ABC é igual a

- a)  $58$  cm<sup>2</sup>.
- b)  $62,8$  cm<sup>2</sup>.
- c)  $104,7$  cm<sup>2</sup>.
- d)  $157$  cm<sup>2</sup>.
- e)  $314$  cm<sup>2</sup>.

4. **FICSAE-SP 2021** O radar de uma embarcação indica que a região segura de navegação até a praia é delimitada pelo triângulo cujas medidas dos lados estão descritas na figura.



Desprezando-se os efeitos da curvatura da Terra, a menor distância entre a embarcação e a linha reta da praia, em quilômetros, é igual a:

- a)  $\frac{7}{2}$ .
- b)  $\sqrt{15}$ .
- c)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .
- d)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .
- e)  $4$ .

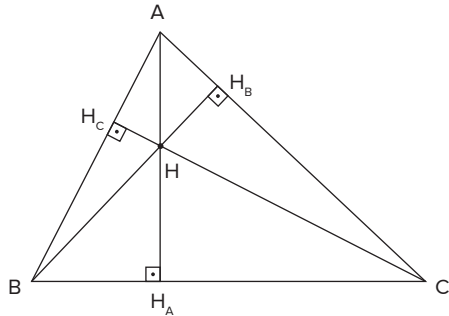
## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 4

- I. Leia as páginas de **337** a **347**.
- II. Faça os exercícios **1, 3, 4, 6, 8** e **10** da seção “Revisando”.
- III. Faça os exercícios propostos **1, 2, 4, 5, 10, 14, 16, 18** e **20**.

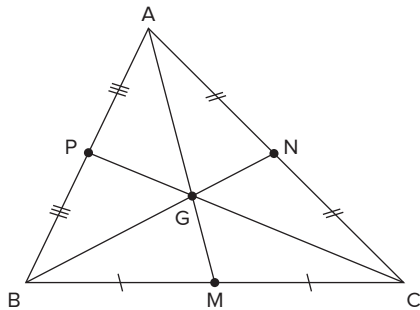
# Centros notáveis de um triângulo

## Ortocentro do triângulo



O ortocentro **H** de um triângulo ABC é o ponto de interseção das três alturas do triângulo.

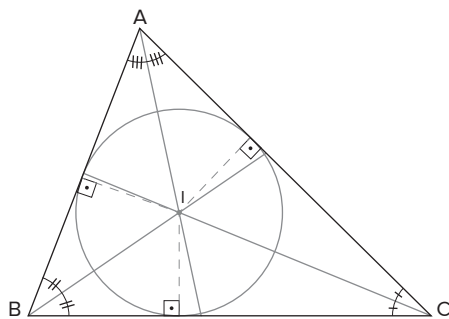
## Baricentro do triângulo



O baricentro **G** de um triângulo ABC:

- é o ponto de interseção das três medianas do triângulo;
- divide cada mediana na razão de 2 para 1;
- determina triângulos de mesma área no interior do triângulo ABC.

## Incentro do triângulo

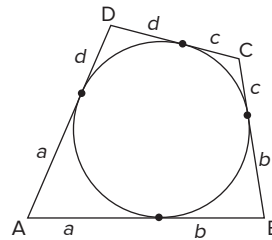


O incentro **I** de um triângulo ABC:

- equidista dos três lados do triângulo;
- é o ponto de interseção das três bissetrizes internas do triângulo;
- é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

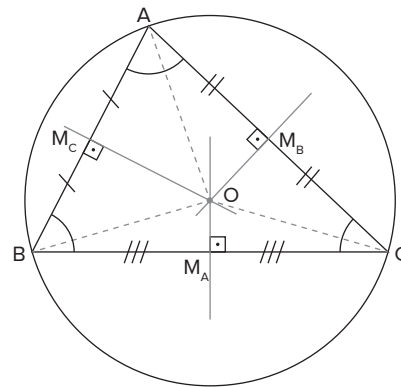
## Teorema do quadrilátero circunscritível

A soma dos comprimentos de dois lados opostos em um quadrilátero circunscritível é constante.



$$AB + CD = AD + BC$$

## Circuncentro do triângulo



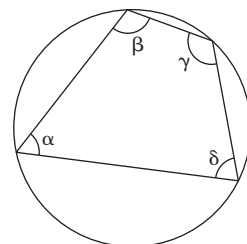
O circuncentro **O** de um triângulo ABC:

- equidista dos três vértices do triângulo;
- é o ponto de interseção das mediatrizes dos três lados do triângulo;
- é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

No caso do triângulo retângulo, o circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa.

## Teorema do quadrilátero inscritível

A soma dos ângulos internos opostos de um quadrilátero inscritível é constante e igual a  $180^\circ$ .

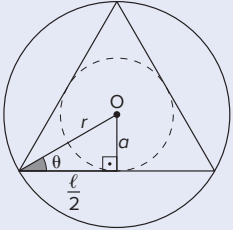
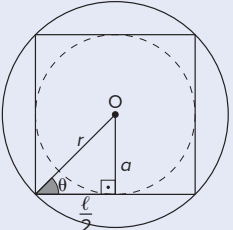
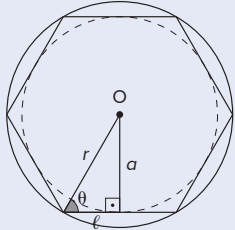


$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

## Relações métricas nos polígonos regulares

Sendo  $r$  a medida do raio da circunferência circunscrita a um polígono regular de lado  $\ell$  e apótema  $a$ , tem-se:

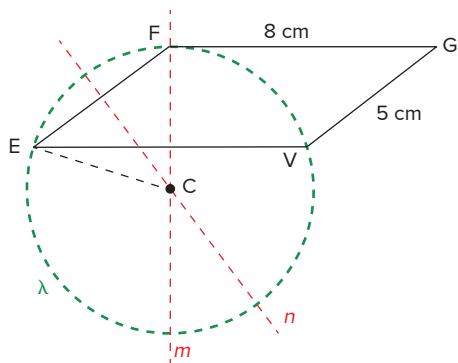
$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

Triângulos equiláteros	Quadrados	Hexágonos regulares
		
$\theta = 30^\circ$ Altura: $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ Apótema: $a = \frac{h}{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ Raio: $r = \frac{2h}{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$	$\theta = 45^\circ$ Altura: $h = \ell$ Apótema: $a = \frac{\ell}{2}$ Raio: $r = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ Diagonal: $d = \ell\sqrt{2}$	$\theta = 60^\circ$ Altura: $h = \ell\sqrt{3}$ Apótema: $a = \frac{h}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ Raio: $r = \ell$ Diagonal: $d = 2\ell$

### Exercícios de sala

- Em um triângulo ABC, as mediatrizes dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  interceptam-se em um ponto P. Sendo D, E e F os respectivos pontos médios dos lados do triângulo ABC, é correto afirmar que o ponto P é:
  - baricentro do triângulo ABC.
  - circuncentro do triângulo DEF.
  - ortocentro do triângulo DEF.
  - incentro do triângulo DEF.
  - ortocentro do triângulo ABC.
- Dado um triângulo retângulo ABC de hipotenusa  $\overline{BC}$ , determine o comprimento do segmento  $\overline{MP}$  sabendo que:
  - P é o baricentro do triângulo;
  - M é o ponto médio da hipotenusa do triângulo;
  - AB = 18 cm;
  - AC = 24 cm.
  - 4 cm.
  - 5 cm.
  - 6 cm.
  - 7 cm.
  - 8 cm.

3. **FGV-SP 2021** Os lados do paralelogramo FGVE medem 5 e 8 centímetros. As mediatrizes de  $\overline{VE}$  e  $\overline{EF}$ , indicadas por  $m$  e  $n$ , intersectam-se no ponto C, que é centro da circunferência  $\lambda$ , de raio  $CE = CF$ , como mostra a figura.



Sabendo que a mediatriz  $m$  passa pelo vértice F, a área do triângulo FEC é igual a

- a)  $\frac{25}{6}$  cm<sup>2</sup>  
 b)  $\frac{9}{6}$  cm<sup>2</sup>  
 c)  $\frac{20}{3}$  cm<sup>2</sup>  
 d)  $\frac{15}{2}$  cm<sup>2</sup>  
 e)  $\frac{25}{3}$  cm<sup>2</sup>

4. **Uece 2022** Um quadrado cuja medida do lado é 3 cm está inscrito em uma circunferência cuja medida do raio é R cm e circunscrito a uma circunferência cuja medida do raio é r cm. Nestas condições, a relação  $\frac{r}{R}$  é igual a:

- a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$   
 d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

## Guia de estudos

### Matemática • Livro 1 • Frente 3 • Capítulo 5

- I. Leia as páginas de **359** a **371**.  
 II. Faça os exercícios **1, 3** e **4** da seção “Revisando”.  
 III. Faça os exercícios propostos **1, 3, 4**, de **6** a **8, 10** e **11**.





## Aulas 11 e 12

1. D
2. C
3. C
4. a)  $F = x - 1$   
b)  $F(2) = 1$
5. A

## Aulas 13 e 14

1. B
2. C
3. C
4. D
5. C

## Aulas 15 e 16

1. E
2. A
3. B
4. E
5. D
6. E

## Aulas 17 e 18

1. D
2. C
3. B
4. D
5. E
6. C

## Frente 3

### Aulas 1 e 2

1. D
2. a)  $x = \sqrt{5}$   
b)  $x = \sqrt{3}$   
c)  $x = \sqrt{7}$   
d)  $x = 4\sqrt{13}$

- e)  $x = 16$
- f)  $x = 10$
3. B
4. E
5. E
6. 28 m de altura/suficiente.

### Aulas 3 e 4

1. C
2. 01
3. C
4.  $\hat{A} = 45^\circ$

### Aulas 5 e 6

1. C
2. B
3. B
4. Soma:  $02 + 08 + 16 = 26$
5. C

### Aulas 7 e 8

1. B
2. C
3. C
4. D
5. a)  $168^\circ$   
b) 30  
c) 405  
d) 390
6. 12 cm

### Aulas 9 e 10

1. 1º caso: 12,5 mm  
2º caso: 200 mm
2. A
3. B
4.  $CD = 5$  cm

## Aulas 11 e 12

1. D
2. D
3. E
4.  $AD = 4$  cm
5. A

## Aulas 13 e 14

1. a)  $AB = 4$  cm  
b)  $BC = 4$  cm
2. D
3. 45
4. A

## Aulas 15 e 16

1. D
2. B
3. E
4. E

## Aulas 17 e 18

1. C
2. B
3. E
4. A