# Sumário

## Capítulo 1 – Geometria analítica: ponto e reta

## Capítulo 3 – Geometria analítica: secções cônicas ........ 70

## Capítulo 4 – Números complexos ........ 100

## Capítulo 5 – Polinômios ........ 132

## Capítulo 6 – Estatística ... 166

## Capítulo 7 – Introdução aos limites ... 196

## Capítulo 8 – Introdução às derivadas ... 226

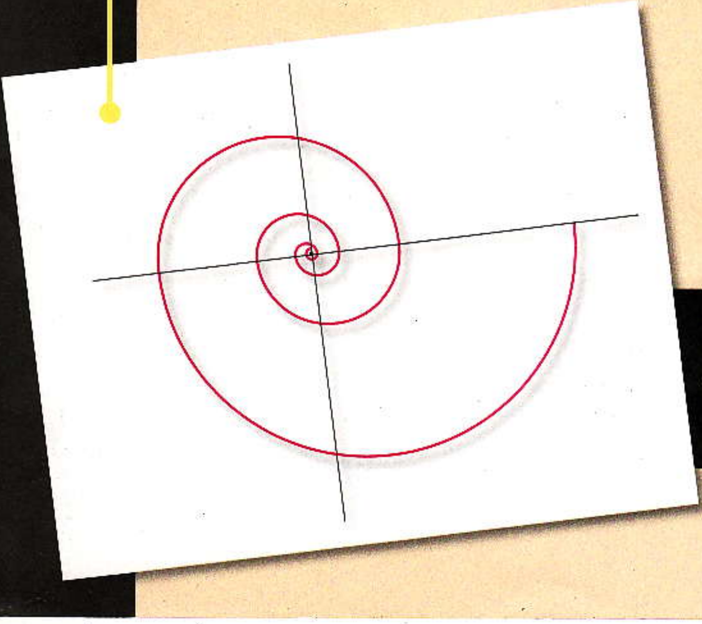
# Capítulo 1

# Geometria analítica: ponto e reta

*Você já tem bastante familiaridade com o "plano cartesiano", que dispõe pontos segundo dois eixos perpendiculares, onde cada ponto fica perfeitamente identificado por sua posição. Imagine que você queira indicar onde deve ser colocado um prego numa parede — basta dizer a que altura ele deve estar do chão e qual sua distância a uma parede lateral. Fazendo isso, você estará aplicando exatamente o princípio de representação dos pontos no plano cartesiano — a cada posição no plano fica associado um ponto.*

*Foi René Descartes (1596-1650), filósofo famoso por sua frase: "penso, logo existo", que, percebendo essa correspondência, estabeleceu relações entre curvas no plano e equações algébricas em duas variáveis. As propriedades geométricas das curvas foram, assim, "traduzidas" por meio de equações e os resultados da álgebra foram interpretados geometricamente. E nós ganhamos com isso, pois temos muitas vezes mais facilidade com a Álgebra ou com a Geometria graças a essa compreensão, e a passagem de uma representação (algébrica ou geométrica) à outra torna claros os conceitos matemáticos.*

*Descartes estava, acima de tudo, empenhado em descobrir uma fórmula que disciplinasse o raciocínio e unificasse o conhecimento. Sua obra mais famosa, o* Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências, *de 1637, contém três apêndices que ilustram o "método" com exemplos práticos. Um desses apêndices, chamado* A Geometria, *contém as idéias básicas da Geometria analítica*



Espiral equiangular *(ou logarítmica) é uma curva espiral que aparece freqüentemente na natureza. Foi primeiramente descrita por Descartes e posteriormente estudada por Jakob Bernoulli.*

*Extraído de http://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral, acesso em 9/7/2007.*

*(chamada anteriormente de Geometria cartesiana). Esse simples apêndice é considerado por alguns estudiosos o "maior avanço, em um só passo, no progresso das ciências exatas".*

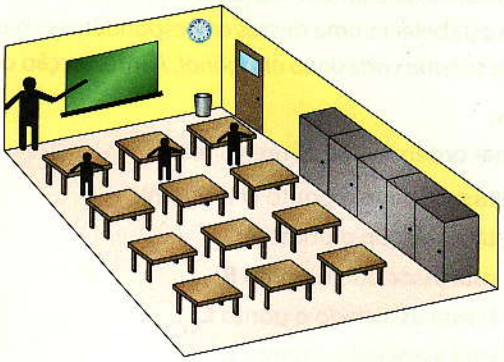
*Outro estudioso da Matemática que contribuiu para o desenvolvimento da Geometria analítica foi o francês Pierre Fermat (1601-1665). Sua contribuição nesse campo está num texto denominado* Introdução aos lugares planos e sólidos, *escrito por volta de 1636, porém só publicado 14 anos depois de sua morte. Assim como Descartes, Fermat associou equações a curvas e superfícies.*

*Embora seja comum a idéia de que a Geometria analítica é uma redução da Geometria à Álgebra, os escritos de Descartes mostram que sua preocupação era a construção geométrica e a possibilidade de encontrar um correspondente geométrico às operações algébricas. Já com relação a Fermat, o uso de coordenadas surge da aplicação da Álgebra da Renascença a problemas geométricos da Antiguidade. Isso mostra que os caminhos percorridos por eles foram independentes. O século XVII foi, assim, marcado por um grande avanço na Matemática ao ser esta desligada da simples aplicação às necessidades econômicas e tecnológicas.*

*Começaremos o estudo da Geometria analítica, neste capítulo, por seus elementos primitivos, o ponto e a reta, observando como o recurso de processos algébricos imprime uma precisão nas medidas e nos cálculos não encontrada na Geometria e como, por outro lado, a representação geométrica torna concretas as expressões algébricas, na maioria das vezes tão abstratas.*

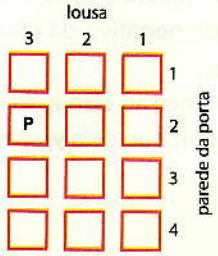
## Atividade

Vamos recordar a aplicação da representação de pontos no plano cartesiano. A ilustração abaixo mostra uma sala de aula.



a) Localize a mesa que está na terceira fileira, a partir da parede que contém a lousa, e na primeira fileira, a partir da parede que contém a porta, marcando-a com um **X**.

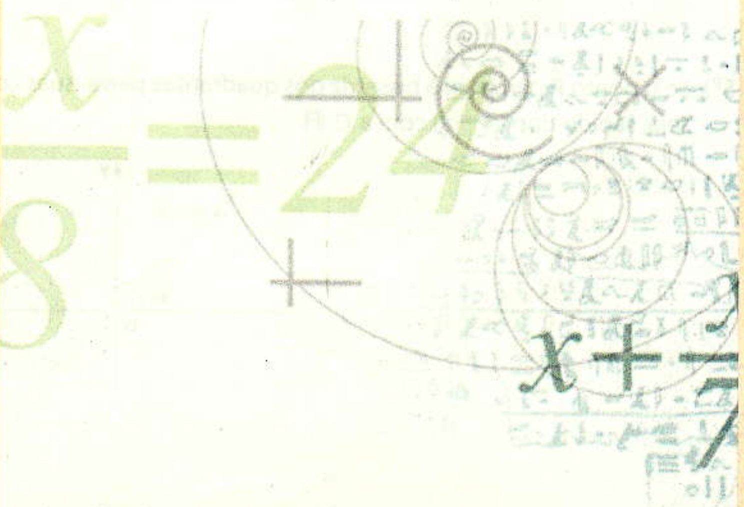
b) Representando as mesas num plano, de acordo com o esquema a seguir, Paulo marcou a sua com a letra **P**. Explique como está situada a mesa de Paulo (você pode tomar como exemplo a maneira descrita no item **a**).



desenho de Paulo

c) Se considerarmos dois eixos, um coincidindo com a parede da lousa e outro com a parede da porta, sendo sua intersecção a origem desse sistema de eixos, e representarmos a posição de cada mesa por meio de um par ordenado (m, n), no qual **m** é a distância da parede da porta à mesa e **n** a distância da parede da lousa à mesa, qual par corresponderá à posição da mesa de Paulo?

d) Marque, no esquema acima, a mesa de Rosa, representada por (1, 3) e a de Marta, representada por (2, 4).



## 1 Sistema cartesiano ortogonal

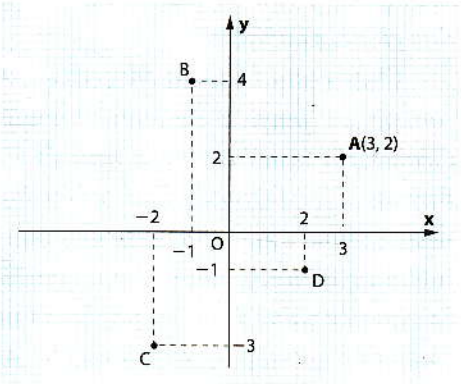
Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y) e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto do plano. A relação biunívoca não é única, depende do sistema de eixos ortogonais adotado.

Para estabelecer uma dessas correspondências biunívocas são usados dois eixos ortogonais (eixo **x** e eixo **y**) que formam o *sistema cartesiano ortogonal*. A intersecção dos eixos **x** e **y** é o ponto **O**, chamado de *origem* do sistema.

**Exemplo:**

Ao par ordenado de números reais:

- (0, 0) está associado o ponto **O** (origem);
- (3, 2) está associado o ponto **A**;
- (−1, 4) está associado o ponto **B**;
- (−2, −3) está associado o ponto **C**;
- (2, −1) está associado o ponto **D**.



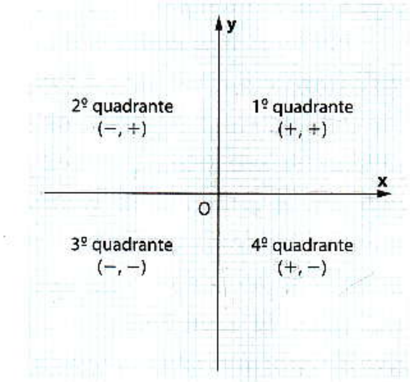
Considerando o ponto **A**(3, 2), dizemos que o número 3 é a coordenada **x** ou a abscissa do ponto **A** e o número 2 é a coordenada **y** ou a ordenada do ponto **A**.

**Observações:**

1ª) Os eixos **x** e **y** chamam-se *eixos coordenados* e dividem o plano em quatro regiões chamadas *quadrantes*, cuja identificação é feita conforme a figura. O sinal positivo ou negativo da abscissa e da ordenada varia de acordo com o quadrante.

2ª) Se o ponto **P** pertence ao eixo **x**, suas coordenadas são (a, 0), com a ∈ IR.

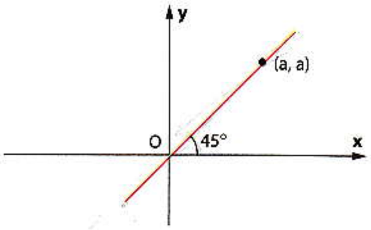
3ª) Se o ponto **P** pertence ao eixo **y**, suas coordenadas são (0, b), com b ∈ IR.



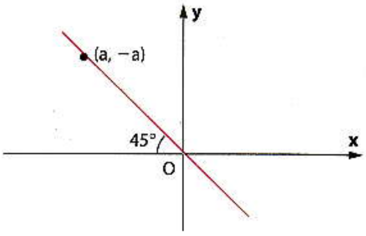
**Para refletir**

O ponto O(0, 0) pertence aos dois eixos.

4ª) Se o ponto **P** pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, suas coordenadas têm ordenada igual à abscissa, ou seja, são do tipo (a, a) com a ∈ IR.



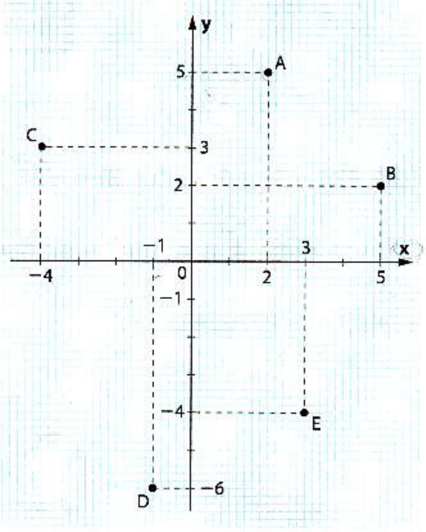
5ª) Se o ponto **P** pertence à bissetriz dos quadrantes pares, suas coordenadas têm abscissa e ordenada opostas, ou seja, são do tipo (a, −a) com a ∈ IR.



## Exercícios propostos

**1.** Observe a figura e determine os pontos, ou seja, dê suas coordenadas:

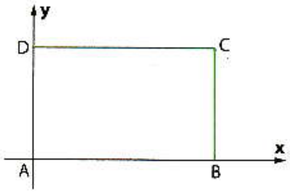
a) A
b) B
c) C
d) D
e) E



**2.** Marque num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais os pontos:

a) **A**(1, −2)
b) **D**(0, 3)
c) **Q**(3, −2)
d) **B**(−3, 3)
e) **P**(−1, −5)
f) **N**(0, −4)
g) **C**(4, 4)
h) **M**(−4, 0)
i) **R**(3, 0)

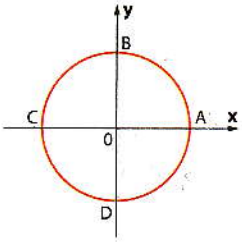
**3.** No retângulo da figura, $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{BC} = a$. Dê as coordenadas dos vértices do retângulo.



**4.** O valor de $\mathbf{k^2}$, sabendo que o ponto **P**(k − 1, 2k) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, é:

a) −1. [✓ b) 1.] c) $-\frac{1}{3}$. d) $\frac{1}{3}$. e) $\frac{1}{9}$.

**5.** O raio da circunferência da figura mede 2 unidades. Quais são as coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**?



**6.** Sabendo que **P**(a, b), com ab > 0, em que quadrante se encontra o ponto **P**?

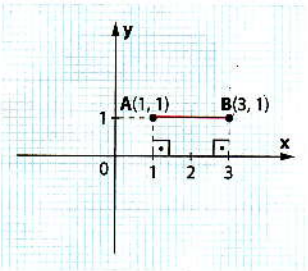
**7.** Sabendo que **P**(2m + 1, −3m − 4) pertence ao terceiro quadrante, determine os possíveis valores reais de **m**.

## 2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos, **A** e **B**, a distância entre eles, que será indicada por d(A, B), é a medida do segmento de extremidades **A** e **B**.

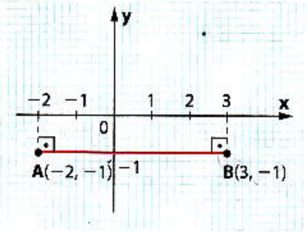
**Exemplos:**

1º)



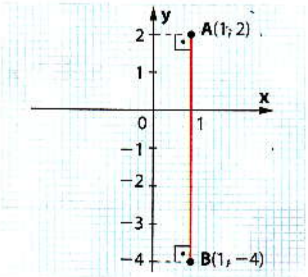
d(A, B) = 3 − 1 = 2

2º)



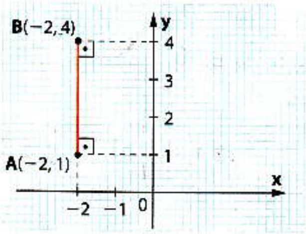
d(A, B) = 3 + 2 = 5

3º)



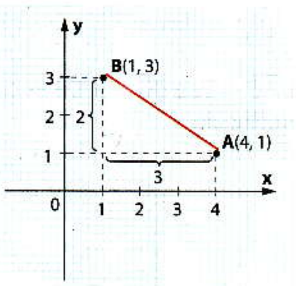
d(A, B) = 2 + 4 = 6

4º)



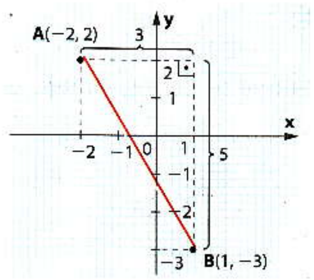
d(A, B) = 4 − 1 = 3

5º)



$$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{13}$$

6º)



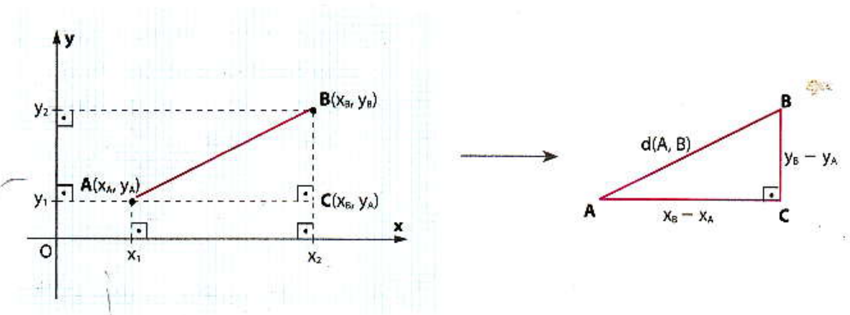
$$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 5^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{34}$$

**Para refletir**

No 5º e no 6º exemplo foi usada a *relação de Pitágoras*.

Podemos determinar uma expressão que indica a distância entre **A** e **B**, quaisquer que sejam **A**$(x_A, y_A)$ e **B**$(x_B, y_B)$.

O triângulo ABC é retângulo em **C**, logo podemos usar a relação de Pitágoras:



$$[d(A, B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Observação:** A expressão obtida para a distância entre dois pontos **A** e **B** independe da localização de **A** e **B**, ou seja, vale para **A** e **B** quaisquer. Vejamos no 2º, 4º e 6º exemplos analisados anteriormente:

2º) **A**(−2, −1) e **B**(3, −1) $\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [(-1) - (-1)]^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

4º) **A**(−2, 1) e **B**(−2, 4) $\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

6º) **A**(−2, 2) e **B**(1, −3) $\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + [(-3) - 2)]^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

Concluímos, então, que a distância entre dois pontos **A** e **B** quaisquer do plano, tal que **A**$(x_A, y_A)$ e **B**$(x_B, y_B)$, é:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Para refletir**

Verifique para os três outros exemplos.

## Exercícios resolvidos

**1.** Um ponto **P**(a, 2) é eqüidistante dos pontos **A**(3, 1) e **B**(2, 4). Calcule a abscissa do ponto **P**.

**Resolução:**

Como **P** é eqüidistante de **A** e **B**, devemos ter:

$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(2 - a)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + 1} = \sqrt{(2 - a)^2 + 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3 - a)^2 + 1 = (2 - a)^2 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - 6a + \cancel{a^2} + 1 = 4 - 4a + \cancel{a^2} + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6a + 4a = 4 + 4 - 9 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

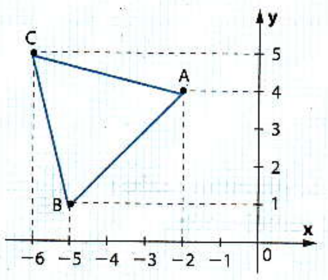
Verificando:

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} d(P, A) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{5} \\ d(P, B) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

Então, a abscissa do ponto **P** é 1.

**2.** Demonstre que o triângulo com vértices **A**(−2, 4), **B**(−5, 1) e **C**(−6, 5) é isósceles.

**Resolução:**



**Para refletir**

A figura apenas ilustra o exercício. Ela é dispensável na resolução.

Um triângulo é isósceles quando tem dois lados congruentes (medidas iguais). Vamos calcular, então, as medidas dos lados do triângulo ABC:

$d(A, B) = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (1 - 4)^2} =$

$= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$d(A, C) = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} =$

$= \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

$d(B, C) = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} =$

$= \sqrt{17}$

Como d(A, C) = d(B, C), o triângulo ABC é isósceles.

**3.** Considerando os vértices **A**(−1, −3), **B**(6, 1) e **C**(2, −5), verifique se o triângulo ABC é retângulo.

**Resolução:**

Para ser triângulo retângulo, o quadrado de um lado deve ser igual à soma dos quadrados dos outros dois. Vejamos:

$d(A, B) = \sqrt{(6 + 1)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{49 + 16} =$

$= \sqrt{65} \Rightarrow (\sqrt{65})^2 = 65$

$d(A, C) = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-5 + 3)^2} = \sqrt{9 + 4} =$

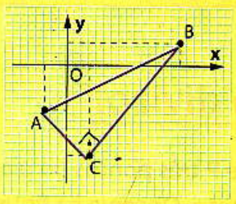
$= \sqrt{13} \Rightarrow (\sqrt{13})^2 = 13$

$d(B, C) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{16 + 36} =$

$= \sqrt{52} \Rightarrow (\sqrt{52})^2 = 52$

Como 65 = 13 + 52, podemos afirmar que o triângulo ABC é retângulo em **C**.

**Para refletir**



**4.** Considere um ponto **P**(x, y) tal que a sua distância ao ponto **A**(3, 2) é sempre duas vezes a sua distância ao ponto **B**(−4, 1). Nessas condições, encontre uma equação que seja satisfeita com as coordenadas do ponto **P**.

**Resolução:**

De acordo com o problema, devemos ter

$d(P, A) = 2d(P, B)$, ou seja, $[d(P, A)]^2 = 4[d(P, B)]^2$.

Assim:

$(3 - x)^2 + (2 - y)^2 = 4[(-4 - x)^2 + (1 - y)^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 =$

$= 4[16 + 8x + x^2 + 1 - 2y + y^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 =$

$= 64 + 32x + 4x^2 + 4 - 8y + 4y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x^2 - 3y^2 - 38x + 4y - 55 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 38x - 4y + 55 = 0$

**5.** A mediatriz de um segmento AB é a reta formada pelos pontos que eqüidistam de **A** e **B**. Encontre uma relação entre as coordenadas **x** e **y** do ponto **P**(x, y), sabendo que ele pertence à mediatriz do segmento AB, com **A**(3, 2) e **B**(−2, −4).

**Resolução:**

Se **P**(x, y) pertence à mediatriz de AB, então

$d(P, A) = d(P, B)$, ou seja, $[d(P, A)]^2 = [d(P, B)]^2$.

Assim:

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - (-2))^2 + (y - (-4))^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 =$

$= x^2 + 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x - 12y - 7 = 0 \Rightarrow 2x + 12y = -7$ é uma das maneiras de expressar a relação entre **x** e **y**.

## Exercícios propostos

**8.** Calcule a distância entre os pontos dados:

a) **A**(3, 7) e **B**(1, 4)
b) **E**(3, −1) e **F**(3, 5)
c) **H**(−2, −5) e **O**(0, 0)
d) **M**(0, −2) e **N** $(\sqrt{5}, -2)$
e) **P**(3, −3) e **Q**(−3, 3)
f) **C**(−4, 0) e **D**(0, 3)

**9.** A distância do ponto **A**(a, 1) ao ponto **B**(0, 2) é igual a 3. Calcule o valor da abscissa **a**.

**10.** Qual é a distância do ponto **A**(cos a, sen a) ao ponto **B**(sen a, −cos a)?

**11.** Um ponto **P** pertence ao eixo das abscissas e é eqüidistante dos pontos **A**(−1, 2) e **B**(1, 4). Quais são as coordenadas do ponto **P**?

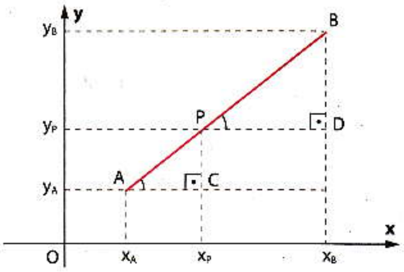
**12.** A abscissa de um ponto **P** é −6 e sua distância ao ponto **Q**(1, 3) é $\sqrt{74}$. Determine a ordenada do ponto.

**13.** Considere um ponto **P**(x, y) cuja distância ao ponto **A**(5, 3) é sempre duas vezes a distância de **P** ao ponto **B**(−4, −2). Nessas condições, escreva uma equação que deve ser satisfeita com as coordenadas do ponto **P**.

**14.** Demonstre que um triângulo com vértices **A**(0, 5), **B**(3, −2) e **C**(−3, −2) é isósceles e calcule o seu perímetro.

## 3 Ponto divisor

Sejam **A**, **B** e **P** três pontos do plano cartesiano, tais que **P** divide o segmento $\overline{AB}$ numa razão $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ denominada razão de seção. Observe na figura abaixo que os triângulos APC e PBD são semelhantes.

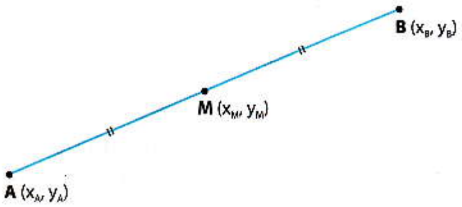


Então, temos:

$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x_A - x_P}{x_P - x_B} = \frac{y_A - y_P}{y_P - y_B}$$

### Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

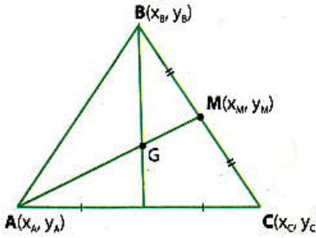
Dado um segmento de reta AB tal que **A**($x_A$, $y_A$) e **B**($x_B$, $y_B$), vamos determinar as coordenadas de **M**, o ponto médio de $\overline{AB}$.



O ponto médio é o ponto divisor que divide o segmento em duas partes iguais. Sendo **A** e **B** os pontos extremos do segmento $\overline{AB}$, com ponto médio **M**, teremos $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$. Portanto:

- $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{x_A - x_M}{x_M - x_B} \Rightarrow 1 = \frac{x_A - x_M}{x_M - x_B} \Rightarrow x_M - x_B = x_A - x_M \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$
- $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{y_A - y_M}{y_M - y_B} \Rightarrow 1 = \frac{y_A - y_M}{y_M - y_B} \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

### Coordenadas do baricentro de um triângulo



Dado um triângulo ABC de vértices **A**($x_A$, $y_A$), **B**($x_B$, $y_B$) e **C**($x_C$, $y_C$), vamos determinar as coordenadas de **G**, baricentro do triângulo ABC.

Seja **M** o ponto médio do lado BC. Então $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Seja **G** o baricentro do triângulo que divide a mediana AM em duas partes, em que uma é o dobro da outra. Nesse caso, $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = 2$.

Portanto:

- $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{x_A - x_G}{x_G - x_M} \Rightarrow 2 = \frac{x_A - x_G}{x_G - x_M} \Rightarrow 2x_G - 2x_M = x_A - x_G \Rightarrow 3x_G = x_A + 2x_M \Rightarrow 3x_G = x_A + 2\frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 3x_G = x_A + x_B + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

- $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{y_A - y_G}{y_G - y_M} \Rightarrow 2 = \frac{y_A - y_G}{y_G - y_M} \Rightarrow 2y_G - 2y_M = y_A - y_G \Rightarrow 3y_G = y_A + 2y_M \Rightarrow 3y_G = y_A + 2\frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 3y_G = y_A + y_B + y_C \Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

## Exercícios resolvidos

**6.** Determine **M**, ponto médio de $\overline{AB}$, nos seguintes casos:

a) **A**(3, −2) e **B**(−1, −6)

b) **A**(0, 7) e **B**(6, 0)

c) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e $B\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

**Resolução:**

Considerando **M**($x_M$, $y_M$), temos:

a) $x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_M = \frac{-2 + (-6)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

**M**(1, −4)

b) $x_M = \frac{0 + 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$y_M = \frac{7 + 0}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

$\mathbf{M}\left(3, \frac{7}{2}\right)$ ou $\mathbf{M}\left(3, 3\frac{1}{2}\right)$

c) $x_M = \frac{\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

$y_M = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbf{M}\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

**Para refletir**

A resposta do item b pode ser M(3; 3,5).

**7.** Uma das extremidades de um segmento é o ponto **A**(7, 13) e a outra é o ponto **B**(x, y). Sendo **M**(−3, 24) o ponto médio, determine as coordenadas da extremidade **B** do segmento.

**Resolução:**

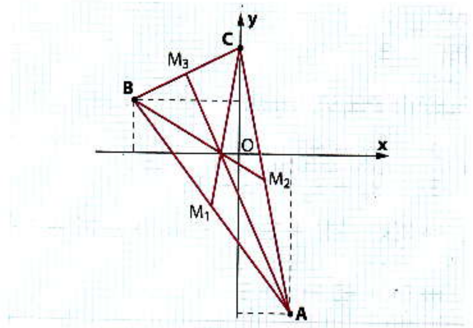
Como $\mathbf{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, então:

$-3 = \frac{7 + x}{2} \Rightarrow 7 + x = -6 \Rightarrow x = -13$

$24 = \frac{13 + y}{2} \Rightarrow 13 + y = 48 \Rightarrow y = 35$

Logo, **B**(−13, 35).

**8.** Calcule os comprimentos das medianas de um triângulo de vértices **A**(2, −6), **B**(−4, 2) e **C**(0, 4).



**Resolução:**

Observando a figura, temos:

$\mathbf{M_1}$ é o ponto médio do lado $\overline{AB}$;

$\mathbf{M_2}$ é o ponto médio do lado $\overline{AC}$;

$\mathbf{M_3}$ é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

Cálculo das coordenadas de $\mathbf{M_1}$:

$x = \frac{-4 + 2}{2} = -1$

$y = \frac{2 - 6}{2} = -2$

Cálculo das coordenadas de $\mathbf{M_2}$:

$x = \frac{0 + 2}{2} = 1$

$y = \frac{4 - 6}{2} = -1$

**Para refletir**

- A *mediana* de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto.
- Todo triângulo possui três medianas que se cruzam num ponto chamado *baricentro* do triângulo.

Cálculo das coordenadas de $\mathbf{M_3}$:

$$x = \frac{0 - 4}{2} = -2$$

$$y = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Vamos calcular, agora, os comprimentos das medianas:

Mediana $\overline{AM_3}$, sendo **A**(2, −6) e $\mathbf{M_3}$(−2, 3):

$$d(A, M_3) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 + 6)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}$$

Mediana $\overline{BM_2}$, sendo **B**(−4, 2) e $\mathbf{M_2}$(1, −1):

$$d(B, M_2) = \sqrt{(1 + 4)^2 + (-1 - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Mediana $\overline{CM_1}$, sendo **C**(0, 4) e $\mathbf{M_1}$(−1, −2):

$$d(C, M_1) = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-2 - 4)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

**9.** Dados os pontos **A**(5, 12) e **B**(15, −3), determine o ponto **P** do segmento AB tal que a razão entre as medidas de $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ seja igual a $\frac{2}{3}$.

**Resolução:**

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{2}{3}$$

Fazendo **P**(x, y), temos:

- $\frac{2}{3} = \frac{x_A - x_P}{x_P - x_B} = \frac{5 - x}{x - 15} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x - 15) = 3(5 - x) \Rightarrow 2x - 30 = 15 - 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9$

- $\frac{2}{3} = \frac{y_A - y_P}{y_P - y_B} = \frac{12 - x}{y - (-3)} \Rightarrow$

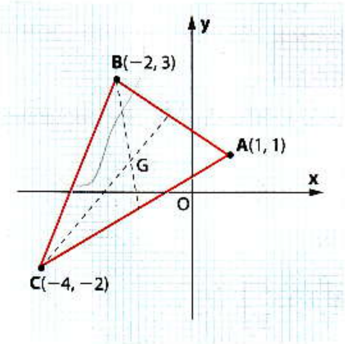
$\Rightarrow 2(4 + 3) = 3(12 - y) \Rightarrow 2y + 6 = 36 - 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6$

Logo, **P**(9, 6).

**10.** Se os vértices de um triângulo são os pontos **A**(1, 1), **B**(−2, 3) e **C**(−4, −2), determine as coordenadas do baricentro desse triângulo.

**Resolução:**



**G**: baricentro (ponto de encontro das medianas)

Sabemos que $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ e

$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$. Assim:

$$x_G = \frac{1 + (-2) + (-4)}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$y_G = \frac{1 + 3 + (-2)}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo, as coordenadas do baricentro são $-\frac{5}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Ou seja, $\mathbf{G}\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

## Exercícios propostos

**15.** Determine o ponto médio do segmento de extremidades:

a) **A**(−1, 6) e **B**(−5, 4)
b) **A**(1, −7) e **B**(3, −5)
c) **A**(−1, 5) e **B**(5, −2)
d) **A**(−4, −2) e **B**(−2, −4)

**16.** Uma das extremidades de um segmento é o ponto **A**(−2, −2). Sabendo que **M**(3, −2) é o ponto médio desse segmento, calcule as coordenadas do ponto **B**(x, y), que é a outra extremidade do segmento.

**17.** Calcule os comprimentos das medianas do triângulo cujos vértices são os pontos **A**(0, 0), **B**(4, 2) e **C**(2, 4).

**18.** Num triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base são segmentos coincidentes. Calcule a medida da altura relativa à base BC de um triângulo isósceles de vértices **A**(5, 8), **B**(2, 2) e **C**(8, 2).

**19.** Num paralelogramo ABCD, **M**(1, −2) é o ponto de encontro das diagonais AC e BD. Sabe-se que **A**(2, 3) e **B**(6, 4) são dois vértices consecutivos. Uma vez que as diagonais se cortam mutuamente ao meio, determine as coordenadas dos vértices **C** e **D**.

**20.** Determine as coordenadas do ponto **P**(x, y) que divide o segmento **A**(2, 0) e **B**(17, 20) na razão $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{4}$.

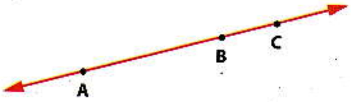
**21.** Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento de extremidades (3, 1) e (18, 7) em três partes iguais.

**22.** Determine o baricentro do triângulo de vértices (2, 3), (4, 5) e (6, 10).

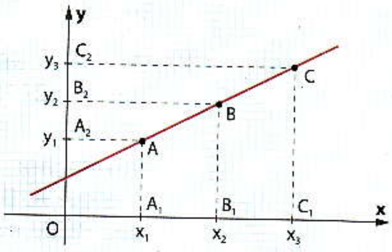
## 4 Condição de alinhamento de três pontos

Dizemos que três pontos distintos estão alinhados, ou que três pontos são *colineares*, quando existe uma reta que passa pelos três.

**A**, **B** e **C** são três pontos alinhados.



Vejamos o que ocorre quando três pontos **A**, **B** e **C** estão alinhados:



Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \text{Ⓘ}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \quad \text{Ⓘⅰ}$$

Comparando Ⓘ e Ⓘⅰ, temos:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0 \Rightarrow x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + \cancel{x_1y_1} - x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 - \cancel{x_1y_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$$

O primeiro termo da igualdade corresponde ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

**Para refletir**

Verifique que o primeiro termo da igualdade realmente corresponde ao determinante apresentado.

Daí, podemos dizer que:

Se três pontos **A**$(x_1, y_1)$, **B**$(x_2, y_2)$ e **C**$(x_3, y_3)$ estão alinhados, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coluna das ordenadas dos pontos.

coluna das abscissas dos pontos.

**Observação**: Fazendo o caminho inverso, podemos verificar também que:

Se $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, então **A**$(x_1, y_1)$, **B**$(x_2, y_2)$ e **C**$(x_3, y_3)$ são pontos colineares (recíproca da propriedade anterior).

## Exercícios resolvidos

**11.** Verifique se os pontos **A**(−3, 5), **B**(1, 1) e **C**(3, −1) estão alinhados.

**Resolução:**

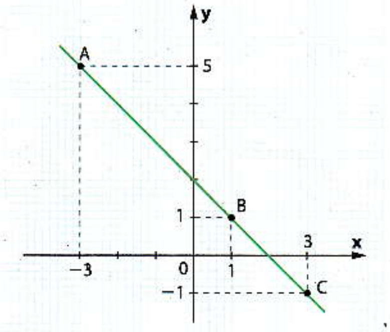
Usando as coordenadas, calculamos o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 1 - 3 - 5 - 3 =$$

$$= +15 - 15 = 0$$

Como D = 0, os pontos dados estão alinhados.

**Observação:**



A figura ilustra, geometricamente, que os pontos dados estão numa mesma reta, ou seja, estão alinhados, mas é o processo analítico que garante a propriedade.

**12.** Sabendo que os pontos **A**(a, −4), **B**(−1, −2) e **C**(2, 1) estão alinhados, calcule o valor de **a**.

**Resolução:**

Se os pontos estão alinhados, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} a & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo a equação, temos:

$$-2a - 8 - 1 + \cancel{4} - \cancel{4} - a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2a - a = 8 + 1 \Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

Logo, a = −3.

**13.** Determine o valor de **x** de modo que os pontos **A**(−3, 1), **B**(x, 2) e **C**(−3, −1) sejam os vértices de um mesmo triângulo.

**Resolução:**

Para que **A**, **B** e **C** sejam os vértices de um triângulo, eles não devem estar alinhados.

Então,

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -\cancel{6} - 3 - x + \cancel{6} - x - 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - x \neq 3 + 3 \Rightarrow 2x \neq -6 \Rightarrow x \neq -3$$

Logo, x ≠ −3.

## Exercícios propostos

**23.** Verifique se os pontos:

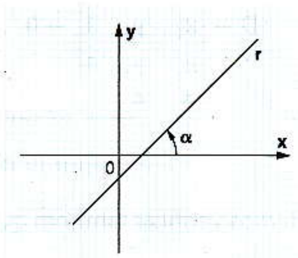
a) **A**(0, 2), **B**(−3, 1) e **C**(4, 5) estão alinhados;

b) **A**(−1, 3), **B**(2, 4) e **C**(−4, 10) podem ser os vértices de um mesmo triângulo.

**24.** Determine **x** de maneira que os pontos **A**(3, 5), **B**(1, 3) e **C**(x, 1) sejam os vértices de um triângulo.

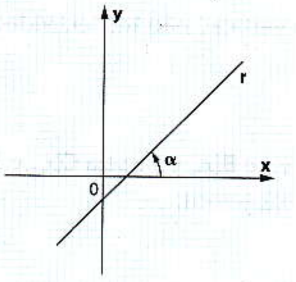
**25.** Considerando uma reta **r** que passa pelos pontos **A**(−1, −2) e **B**(4, 2) e intersecta o eixo **y** no ponto **P**, determine as coordenadas do ponto **P**.

# 5 Inclinação de uma reta

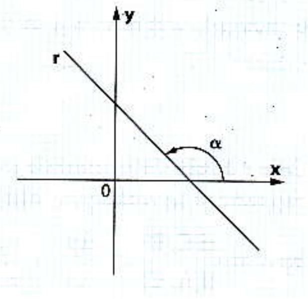


Seja α a medida do ângulo que a reta **r** forma com o eixo **x**. A medida α do ângulo é considerada do eixo **x** para a reta **r**, no sentido anti-horário, e denomina-se *inclinação* da reta **r**.

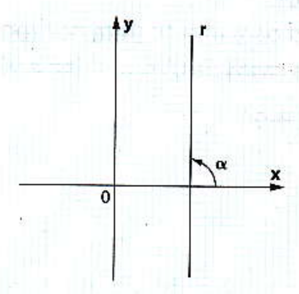
Quanto à inclinação de retas não-paralelas ao eixo **x**, podemos ter:



$0° < \alpha < 90°$

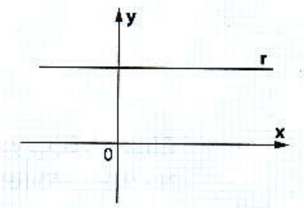


$90° < \alpha < 180°$



$\alpha = 90°$

Se a reta **r** é paralela ao eixo **x**, dizemos que sua inclinação é zero, ou seja, $\alpha = 0°$.



**Para refletir**

Entre as retas de inclinação zero, inclui-se o eixo x.

Então, podemos dizer que, para cada reta **r**, o ângulo $\alpha$ é único e tal que $0° \leq \alpha < 180°$.

## 6 Coeficiente angular de uma reta

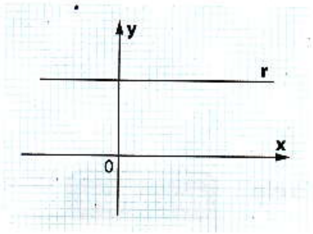
Consideremos uma reta **r** de inclinação $\alpha$ em relação ao eixo **x**.

O coeficiente angular ou a declividade dessa reta **r** é o número real **m** que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação $\alpha$, ou seja:

$$m = \text{tg}\,\alpha$$

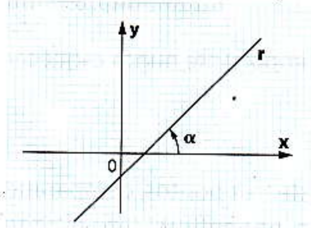
Vamos observar os vários casos, considerando $0° \leq \alpha < 180°$:

1º)



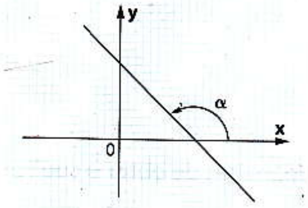
Para $\alpha = 0°$, temos
$m = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,0° = 0$.

2º)



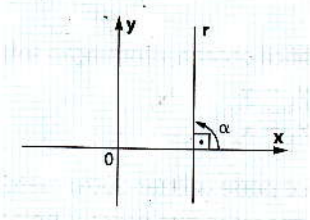
Para $0° < \alpha < 90°$,
temos $\text{tg}\,\alpha > 0 \Rightarrow m > 0$.

3º)



Para $90° < \alpha < 180°$,
temos $\text{tg}\,\alpha < 0 \Rightarrow m < 0$.

4º)

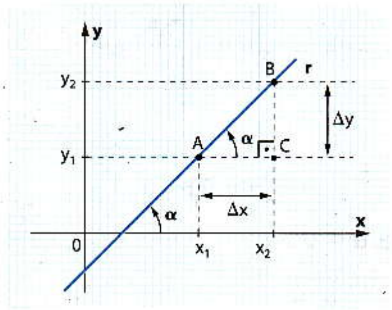


Para $\alpha = 90°$, a $\text{tg}\,\alpha$ não é definida. Dizemos então que, quando $\alpha = 90°$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem declividade.

Vejamos agora que é possível calcular o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos.

Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) a declividade é 0 e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há declividade, vamos analisar os casos de $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$:

1º) $0° < \alpha < 90°$



Seja **r** a reta determinada por **A**$(x_1, y_1)$ e **B**$(x_2, y_2)$ e seja **C**$(x_2, y_1)$.
No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

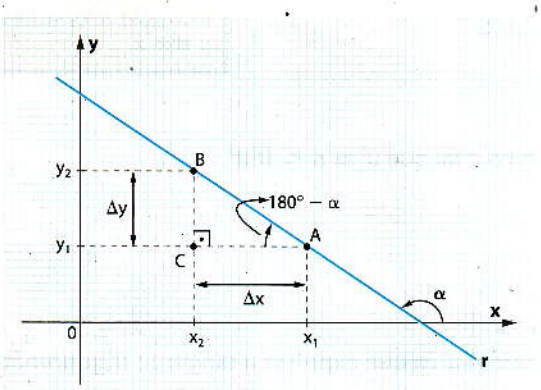
Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Para refletir**

Dois pontos distintos determinam uma única reta.

2º) $90° < \alpha < 180°$



**A**$(x_1, y_1)$, **B**$(x_2, y_2)$ e **C**$(x_2, y_1)$
No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Como $\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$, vem:

$$-\text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow m = \text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observe que $x_2 \neq x_1$, já que **r** não é paralela ao eixo **y**.

Podemos concluir que, se **A**$(x_1, y_1)$ e **B**$(x_2, y_2)$ são dois pontos distintos quaisquer na reta **r**, que não é paralela ao eixo **y** ($x_1 \neq x_2$), a declividade ou o coeficiente angular de **r**, que indicaremos por **m**, é dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Assim, temos duas maneiras de obter o coeficiente angular de uma reta, quando ele existir:

- conhecendo a inclinação $\alpha$ da reta, calculamos $m = \text{tg}\,\alpha$;
- conhecendo dois pontos **A**$(x_1, y_1)$ e **B**$(x_2, y_2)$ da reta, calculamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

**Para refletir**

Podemos usar $y_1 - y_2$ no numerador desde que, no denominador, usemos $x_1 - x_2$.

Na prática, é mais difícil obter a informação sobre a inclinação da reta, por isso é importante nunca esquecer que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

**Observação**: Agora você pode utilizar outro método para verificar o alinhamento de três pontos, comparando os coeficientes angulares das retas que passam pelos pontos dois a dois. Por exemplo, na verificação do alinhamento de três pontos **A**$(x_1, y_1)$, **B**$(x_2, y_2)$ e **C**$(x_3, y_3)$ podemos verificar se ocorre $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$. Fica a seu critério usar esse método ou continuar utilizando o determinante para verificar o alinhamento ou não de três pontos.

## Exercício resolvido

**14.** Calcule o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos **A**(2, 3) e **B**(4, 7).

**Resolução:**

$$m = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ou } m = \frac{3-7}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

**Para refletir**

O ângulo $\alpha$ é agudo ($0° < \alpha < 90°$), pois $m > 0$.
Confirme construindo a figura com A e B.

## Exercícios propostos

**26.** Determine o coeficiente angular (ou declividade) da reta que passa pelos pontos:

a) **A**(3, 2) e **B**(−3, −1)
b) **A**(2, −3) e **B**(−4, 3)
c) $\mathbf{P_1}$(3, 2) e $\mathbf{P_2}$(3, −2)
d) $\mathbf{P_1}$(−1, 4) e $\mathbf{P_2}$(3, 2)
e) **P**(5, 2) e **Q**(−2, −3)
f) **A**(200, 100) e **B**(300, 80)

**27.** Se $\alpha$ é a medida da inclinação de uma reta e **m** é a sua declividade (ou coeficiente angular), complete a tabela:

| $\alpha$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |

**Para refletir**

Use régua e transferidor para traçar a reta **r** que passa por (0, 5) e tem coeficiente angular $-\sqrt{3}$.

## 7 Equação da reta quando são conhecidos um ponto $A(x_0, y_0)$ e a declividade *m* da reta

Já vimos que dois pontos distintos determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos.

Da mesma forma, um ponto $\mathbf{A}(x_0, y_0)$ e a declividade **m** determinam uma reta **r**. Considerando **P**(x, y) um ponto genérico dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação, de variáveis **x** e **y**, a partir dos números $x_0$, $y_0$ e **m**, que será chamada *equação da reta r*.

## Exercícios resolvidos

**15.** Determine a equação da reta **r** que passa pelo ponto **A**(4, 2) e tem inclinação de 45°.

**Resolução:**

Vamos considerar um ponto **P**(x, y) que pertence à reta **r**.

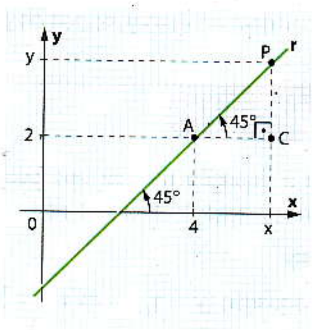
No triângulo APC ($\hat{\mathbf{C}}$ é reto), temos:

$$\text{tg } 45° = \frac{d(C, P)}{d(A, C)} \Rightarrow 1 = \frac{y-2}{x-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{y_0}{\underset{\downarrow}{y - 2}} = \underset{m}{\underset{\downarrow}{1}}(x - \underset{x_0}{\underset{\downarrow}{4}}) \Rightarrow y - 2 = x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 - x + 4 = 0 \Rightarrow -x + y + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - y - 2 = 0$$

Logo, a equação pedida é $x - y - 2 = 0$.

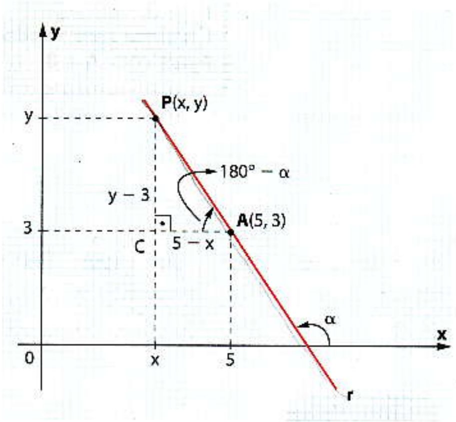


**Para refletir**

Os pares (x, y) que satisfazem essa igualdade (soluções da equação) representam os pontos da reta r: (0, −2), (5, 3), (10, 8), (−1, −3) e outros.

**16.** Determine a equação da reta **r** que passa pelo ponto **A**(5, 3) e tem coeficiente angular $m = -2$.

**Resolução:**



Se $m = -2$, então a inclinação de **r** é um ângulo obtuso, ou seja, $\text{tg}\ \alpha = -2$.

No triângulo ACP, retângulo em **C**, em que **P**(x, y) é um ponto genérico da reta, temos:

$$-2 = \frac{y - 3}{x - 5} \Rightarrow y - 3 = -2(x - 5) \Rightarrow$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

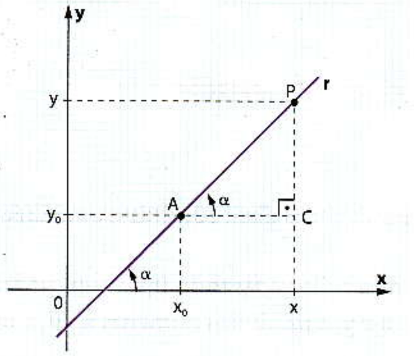
$\Rightarrow y - 3 = -2x + 10 \Rightarrow 2x - y - 3 - 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + y - 13 = 0$

Então, a equação da reta **r** é $2x + y - 13 = 0$.

**Para refletir**

O ponto (7, −2) pertence ou não à reta **r**?

Genericamente podemos obter a equação da reta que passa por um ponto **A**$(x_0, y_0)$ e tem um coeficiente angular **m**:



Considerando um ponto **P**(x, y) qualquer sobre a reta, temos:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

**Observações:**

1ª) A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe de **m** ser positivo ou negativo e da localização do ponto **A**.

2ª) Se a reta é paralela ao eixo **x**, temos $m = 0$ e a equação da reta será dada por $y = y_0$.

3ª) Se a reta é paralela ao eixo **y**, todos os pontos da reta têm a mesma abscissa e a equação será dada por $x = x_0$.

## Exercícios resolvidos

**17.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto **A**(−1, 4) e tem coeficiente angular 2.

**Resolução:**

Usando a equação $(y - y_0) = m(x - x_0)$, temos:

$y - 4 = 2(x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow y - 4 = 2x + 2 \Rightarrow -2x + y - 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - y + 6 = 0$

A equação procurada é $2x - y + 6 = 0$.

**18.** Determine a equação da reta que passa pelos pontos **A**(−1, −2) e **B**(5, 2).

**Resolução:**

Já sabemos como calcular o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos **A**(−1, −2) e **B**(5, 2):

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 + 2}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Usando o ponto **A**(−1, −2), temos:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3y + 6 = 2x + 2 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

*Outra resolução:*

Chamando de **P**(x, y) um ponto genérico da reta AB, podemos afirmar que **P**, **A** e **B** estão alinhados. Logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 5y - 2 + 10 + y - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 6y - 8 = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

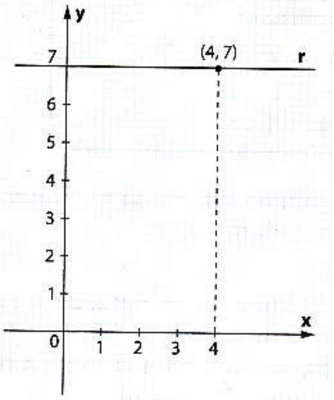
**19.** Determine a equação da reta nos seguintes casos:

a) **r** passa por (4, 7) e é paralela ao eixo **x**.

b) **r** passa por (4, 7) e é paralela ao eixo **y**.

**Resolução:**

a)



Os pontos de **r** têm ordenada 7, qualquer que seja a abscissa.

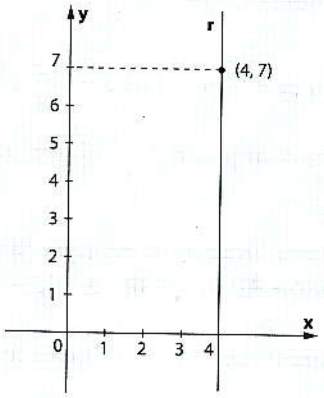
Logo, a equação de **r** é $y = 7$.

Podemos também justificar assim: se **r** é paralela ao eixo **x**, tem coeficiente angular $m = 0$.

Logo:

$$y - 7 = 0(x - 4) \Rightarrow y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$$

b)



Se **r** é paralela ao eixo **y**, seus pontos têm abscissa 4, qualquer que seja a ordenada.

Logo, a equação da reta **r** é $x = 4$.

## Exercícios propostos

**28.** Determine a equação da reta que satisfaz as seguintes condições:

a) A declividade é 4 e passa pelo ponto **A**(2, −3).

b) A inclinação é de 45° e passa pelo ponto **P**(4, 1).

c) Passa pelo ponto **M**(−2, −5) e tem coeficiente angular 0.

d) Passa pelos pontos **A**(3, 1) e **B**(−5, 4).

e) Passa pelo ponto **P**(−3, −4) e é paralela ao eixo **y**.

**29.** Verifique se o ponto **P**(2, 3) pertence à reta **r** que passa pelos pontos **A**(1, 1) e **B**(0, −3).

## 8 Forma reduzida da equação da reta

Vimos que a equação da reta que passa por um ponto **A**($x_0$, $y_0$) com declividade **m** é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Se escolhermos o ponto particular (0, n), isto é, o ponto em que a reta intersecta o eixo **y**, para o ponto ($x_0$, $y_0$), teremos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = mx + n$$

O número real **n**, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo **y**, é chamado *coeficiente linear da reta*.

$$y = \underset{\uparrow\ \text{coeficiente angular}}{m}x + \underset{\uparrow\ \text{coeficiente linear}}{n}$$

Essa forma é especialmente importante porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada **y** em função de **x**.

É conhecida como *forma reduzida* da equação da reta.

**Para refletir**

A equação reduzida de uma reta que passa pela origem é da forma $y = mx$.

## Exercícios resolvidos

**20.** Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta de equação $2x + 3y = 1$.

**Resolução:**

$$2x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Logo, o coeficiente angular é $m = -\frac{2}{3}$ e o coeficiente linear é $n = \frac{1}{3}$.

**21.** Determine a forma reduzida da equação da reta que passa pelos pontos **A**$(-1, 5)$ e **B**$(-3, -1)$.

**Resolução:**

Vamos, inicialmente, calcular o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{-3+1} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Usando o ponto **A**$(-1, 5)$, temos:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 3(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 5 = 3x + 3 \Rightarrow y = 3x + 8$

Logo, a equação procurada é $y = 3x + 8$.

*Outra resolução:*

A equação reduzida da reta é da forma $y = mx + n$.

Como ela passa por $(-1, 5)$, temos:

$5 = m(-1) + n$

Como ela também passa por $(-3, -1)$, vem:

$-1 = m(-3) + n$

Os valores de **m** e **n** serão calculados pela resolução do sistema:

$$\begin{cases} m - n = -5 \\ 3m - n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + \cancel{n} = 5 \\ 3m - \cancel{n} = 1 \end{cases}$$
$$2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

Substituindo $m = 3$ na primeira equação, temos:

$3 - n = -5 \Rightarrow -n = -8 \Rightarrow n = 8$

Logo, a equação correspondente é $y = 3x + 8$.

**Para refletir**

Faça o exercício resolvido 21 de uma terceira maneira, usando o determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**22.** Determine a equação reduzida da reta que corta os eixos nos pontos $(-5, 0)$ e $(0, 3)$.

**Resolução:**

A equação é da forma $y = mx + n$ e, como a reta corta o eixo **y** em $(0, 3)$, temos $n = 3$.

Ficamos, então, com $y = mx + 3$. Como a reta passa também pelo ponto $(-5, 0)$, vem:

$$0 = m(-5) + 3 \Rightarrow 5m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{5}$$

Logo, a equação procurada é $y = \frac{3}{5}x + 3$.

**23.** Determine a equação reduzida da reta **r** que passa pela origem e tem inclinação de 60°.

**Resolução:**

A equação reduzida de **r** é da forma $y = mx + n$.

Como **r** passa pela origem $(0, 0)$, temos $n = 0$.

Como a inclinação é de 60°, então:

$m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

Logo, a equação reduzida de **r** é $y = \sqrt{3}x$.

## Exercícios propostos

**30.** Dada a reta que tem a equação $3x + 4y = 7$, determine sua declividade.

**31.** Determine a equação da reta de coeficiente angular $m = -2$ e que intersecta o eixo **y** no ponto **A**$(0, -3)$.

**32.** Uma reta passa pelo ponto **P**$(-1, -5)$ e tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$. Escreva a equação da reta na forma reduzida.

**33.** Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelos pontos $\mathbf{P_1}(2, 7)$ e $\mathbf{P_2}(-1, -5)$.

**Para refletir**

Resolva o exercício 33 de três formas diferentes.

**34.** Escreva a equação:

a) da reta bissetriz dos quadrantes ímpares;

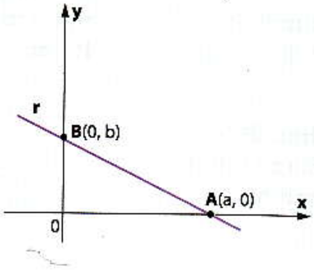
b) da reta bissetriz dos quadrantes pares;

c) do eixo **x**;

d) do eixo **y**.

## 9 Forma segmentária da equação da reta

Consideremos uma reta **r** que não passa por (0, 0), intersecta o eixo **x** no ponto **A**(a, 0) e intersecta o eixo **y** no ponto **B**(0, b).



Calculando o coeficiente angular, temos:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Usando a forma reduzida $y = mx + n$, em que $m = -\frac{b}{a}$ e $n = b$, vem:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab$$

Dividindo os dois membros por ab ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), temos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

**Para refletir**

Podemos chegar ao mesmo resultado considerando um ponto genérico P(x, y) e fazendo $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Esta é a *forma segmentária* da equação da reta que não passa por (0, 0) e intersecta os eixos nos pontos (a, 0) e (0, b).

**Exemplos:**

1º) A forma segmentária da equação da reta que corta os eixos em (5, 0) e (0, −2) é $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$.

2º) A reta cuja equação na forma segmentária é $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ corta os eixos em (5, 0) e (0, 2).

3º) Se $y = 2x - 5$ é a equação de uma reta na forma reduzida, podemos chegar à forma segmentária:

$$y = 2x - 5 \Rightarrow 2x - y = 5 \Rightarrow \frac{2x}{5} - \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-5} = 1$$

Essa reta corta os eixos em $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ e (0, −5).

**Exercício resolvido**

**24.** Escreva na forma segmentária a equação da reta que passa pelos pontos (3, −1) e (−2, −4).

**Resolução:**

Determinamos o coeficiente angular:

$$m = \frac{-4 + 1}{-2 - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

Usando o ponto (3, −1), temos:

$$y + 1 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

Agora vamos obter a equação na forma segmentária:

$$y + 1 = \frac{3}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y + 5 = 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 5y = 14 \Rightarrow \frac{3x}{14} - \frac{5y}{14} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{14}{3}} + \frac{y}{\frac{-14}{5}} = 1$$

*Outra resolução:*

Consideramos o ponto genérico **P**(x, y) e fazemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 2y - 12 - 2 - 3y + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 5y = 14 \Rightarrow \frac{x}{\frac{14}{3}} + \frac{y}{\frac{-14}{5}} = 1$$

## Exercícios propostos

**35.** Escreva na forma segmentária a equação da reta que satisfaz as seguintes condições:

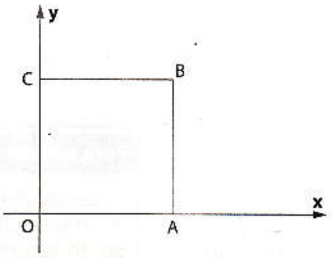
a) Passa pelos pontos **A**(3, 0) e **B**(0, 2);

b) Passa pelos pontos **A**(5, 0) e tem declividade 2;

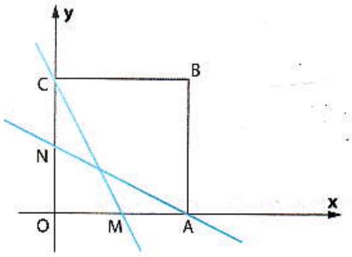
c) Passa pelos pontos $\mathbf{P}_1(4, -3)$ e $\mathbf{P}_2(-2, 6)$;

d) Sua equação reduzida é $y = -x + 5$.

**36.** Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e OABC é um quadrado de lado 3. Escreva a equação da reta-suporte da diagonal AC.



**37.** Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e OABC é um quadrado de lado 4. Sabendo que **M** é o ponto médio de $\overline{OA}$ e **N**, o ponto médio de $\overline{OC}$, escreva a equação da reta que passa por **C** e **M** e a equação da reta que passa por **A** e **N**.



## 10 Equação geral da reta

Toda reta do plano possui uma equação de forma:

$$ax + by + c = 0$$

na qual **a**, **b** e **c** são constantes e **a** e **b** não são simultaneamente nulos. Ela é denominada *equação geral da reta.*

**Exemplo:**

A reta:

- $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser escrita na forma geral por $3x + 4y - 4 = 0$.
- $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada na forma geral por $5x + 2y - 10 = 0$.
- $y = 5$, que é paralela ao eixo **x**, pode ser dada por $0x + 1y - 5 = 0$.
- $x = 2$, que é uma reta vertical, pode ser dada por $1x + 0y - 2 = 0$.
- $y - 3 = 5(x - 1)$ pode ser dada por $5x - 1y - 2 = 0$.

**Observações:**

1ª) Vimos que a equação da reta pode ser escrita de várias formas. Na resolução de exercícios devemos escolher a mais conveniente em relação aos dados e à proposta do problema.

Assim:

- na forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, identificamos a inclinação $\alpha$ da reta ($m = \text{tg}\ \alpha$) e um ponto da reta $(x_0, y_0)$;
- na forma reduzida $y = mx + n$, identificamos a inclinação $\alpha$ ($m = \text{tg}\ \alpha$), o ponto de intersecção da reta com o eixo **y** (0, n) e ainda o ponto (1, m + n);
- na forma segmentária $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, identificamos os pontos de intersecção da reta com os eixos: (a, 0) e (0, b);
- quando fazemos $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, identificamos sem fazer cálculos dois pontos da reta $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$;
- a forma geral $ax + by + c = 0$ pode ser obtida a partir de qualquer uma das anteriores.

2ª) A mesma reta pode ter diversas representações na forma geral, ou seja, $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$, $-x - 2y + 1 = 0$ e infinitas equações equivalentes a essas. Por essa razão, é preferível escrever "obter *uma* equação geral da reta" a "obter *a* equação geral da reta", como no exercício resolvido 26 abaixo, por exemplo.

3ª) Dada uma equação geral de uma reta **r**: $ax + by + c = 0$, seu coeficiente angular pode ser obtido rapidamente usando $m_r = \frac{-a}{b}$.

4ª) A reta **r** tal que $ax + by + c = 0$ intersecta os eixos nos pontos $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ e $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

**Para refletir**

Justifique a 3ª e a 4ª observações.

## Exercícios resolvidos

**25.** Escreva nas formas reduzida, segmentária e geral a equação da reta que passa pelo ponto $(1, -6)$ e tem inclinação de 135°.

**Resolução:**

Pelos dados do problema é mais conveniente escrever inicialmente a equação na forma $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Como $\alpha = 135°$, então:

$m = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,135° = -1$

E, como a reta passa por $(1, -6)$, temos:

$y + 6 = -1(x - 1)$

Daí vem:

- forma reduzida:

  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1 - 6 \Rightarrow y = -x - 5$
- forma segmentária:

  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y = -5 \Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{-5} = 1$
- forma geral:

  $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y - 1 + 6 = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x + y + 5 = 0$

**Para refletir**

- Essa reta tem inclinação de 135°, passa pelo ponto $(1, -6)$ e corta eixos em $(-5, 0)$ e $(0, -5)$.
- O triângulo que ela determina com os eixos é um triângulo retângulo isósceles. Calcule a medida da hipotenusa.

**26.** Determine uma equação geral da reta que passa pelos pontos **A**(1, 4) e **B**(3, −3).

**Resolução:**

Vamos calcular a declividade da reta:

$$m = \frac{-3 - 4}{3 - 1} = \frac{-7}{2}$$

Considerando o ponto **A**(1, 4), temos:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{7}{2}(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 4 = -\frac{7}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow 2y - 8 = -7x + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 2y - 15 = 0$$

*Outra resolução:*

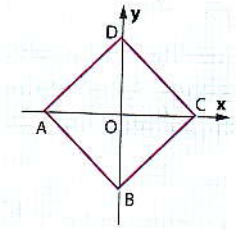
Consideramos um ponto **P**(x, y) qualquer da reta que passa pelos pontos **A** e **B**.

Como **A**, **B** e **P** estão alinhados, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 3 - 12 - y + 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 2y - 15 = 0$$

**27.** Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e ABCD é um quadrado de lado $3\sqrt{2}$. Escreva uma equação geral da reta determinada pelos pontos **A** e **D**.



**Resolução:**

Se a figura é um quadrado, temos OA = OD.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOD, temos:

$(AD)^2 = (AO)^2 + (OD)^2 \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = (OA)^2 + (OA)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(OA)^2 = 18 \Rightarrow (OA)^2 = 9 \Rightarrow OA = 3$

Sendo assim, no sistema de coordenadas ortogonais temos **A**(−3, 0), **B**(0, −3), **C**(3, 0), **D**(0, 3).

Uma equação geral da reta determinada pelos pontos **A** e **D** é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9 + 3y - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y + 9 = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

Logo, uma equação geral da reta é $x - y + 3 = 0$.

**28.** Determine os pontos de intersecção da reta de equação $3x - 2y - 12 = 0$ com os eixos **x** e **y**.

**Resolução:**

O ponto de intersecção com o eixo **x** tem ordenada 0. Logo, fazendo $y = 0$, temos:

$3x - 2 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4$

Então, a reta corta o eixo **x** no ponto (4, 0).

O ponto de intersecção com o eixo **y** tem abscissa 0. Logo, fazendo $x = 0$, temos:

$$3 \cdot 0 - 2y - 12 = 0 \Rightarrow -2y = 12 \Rightarrow y = -6$$

Então, ela corta o eixo **y** no ponto (0, −6).

*Outra resolução:*

Podemos passar a equação da forma geral para a segmentária:

$$3x - 2y - 12 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{12} - \frac{2y}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$$

Da equação segmentária obtemos os pontos procurados (4, 0) e (0, −6).

**29.** Se um triângulo tem como vértices os pontos **A**(1, 1), **B**(−2, −2) e **C**(−3, 4), determine a forma geral das equações das retas-suportes dos lados desse triângulo.

**Resolução:**

Equação geral da reta-suporte do lado AB:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 2 + 2 - y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

Equação geral da reta-suporte do lado AC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 4 + 3 - y - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

Equação geral da reta-suporte do lado BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 3y - 8 - 6 + 2y - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x - y - 14 = 0 \Rightarrow 6x + y + 14 = 0$$

## 11 Forma paramétrica da equação da reta

Vimos que a equação de uma reta pode aparecer nas formas geral, reduzida e segmentária.

Existe mais uma, conhecida como *forma paramétrica*. Nesse caso, as coordenadas **x** e **y** dos pontos da reta são dadas em função de uma terceira variável, **t**, por meio de expressões do 1º grau. A variável **t** é chamada de *parâmetro*.

**Exemplo:**

A reta **r** é definida na forma paramétrica por $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$.

Para $t = 5$, temos: $\begin{cases} x = 5 + 1 = 6 \\ y = 2 \cdot 5 = 10 \end{cases}$

Logo, (6, 10) é um ponto dessa reta. Mais que isso, qualquer ponto **P** da forma $(t + 1, 2t)$ será um ponto dessa reta **r**.

**Observação:** Para determinar uma equação geral de **r**, podemos obter **t** em uma das equações paramétricas e substituí-lo na outra:

$x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$

$y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$ (equação geral de **r**)

**Para refletir**

Substitua (6, 10) na equação geral de r.

**Exercício resolvido**

**30.** Dadas as equações de **r** na forma paramétrica $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \end{cases}$, determine:

a) a equação reduzida de **r**;

b) a intersecção de **r** com o eixo **x**.

**Resolução:**

a) Determinamos **t** na segunda equação:

$y = t + 2 \Rightarrow t = y - 2$

Substituindo na outra equação:

$x = 2t - 1 \Rightarrow x = 2(y - 2) - 1 \Rightarrow 2y - 4 - 1 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (equação reduzida de **r**)

b) Fazendo $y = 0$, temos:

$\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

Logo, **r** corta o eixo **x** em (−5, 0).

## Exercícios propostos

**38.** Em cada caso, escreva uma equação geral da reta definida pelos pontos **A** e **B**:

a) **A**(−1, 6) e **B**(2, −3)
b) **A**(−1, 8) e **B**(−5, −1)
c) **A**(5, 0) e **B**(−1, −4)
d) **A**(3, 3) e **B**(1, −5)

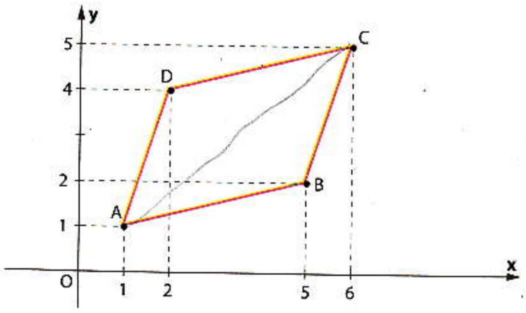
**39.** Se os pontos **A**(3, 5) e **B**(−3, 8) determinam uma reta, calcule o valor de **a** para que o ponto **C**(4, a) pertença a essa reta.

**40.** Se um triângulo tem como vértices os pontos **A**(2, 3), **B**(4, 1) e **C**(6, 7), determine uma equação geral da reta-suporte da mediana relativa ao lado BC.

**41.** Sabendo que os pontos **A**(2, 0), **B**(0, 4) e **C**(4, 2) são os vértices de um triângulo, determine uma equação geral das retas-suportes dos lados desse triângulo.

**42.** Sabendo que o ponto **P**(2, 1) pertence à reta de equação $3kx + (k - 3)y = 4$, determine o valor de **k** e escreva, a seguir, uma forma geral da equação dessa reta.

**43.** Na figura dada, ABCD é um paralelogramo. Determine uma equação geral das retas-suportes das suas diagonais AC e BD.

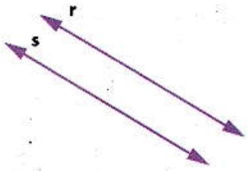


## 12 Posições relativas de duas retas no plano

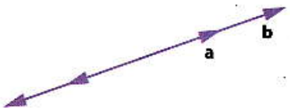
Duas retas **r** e **s** contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes. Veja:

$$\text{Paralelas} \begin{cases} \text{iguais (coincidentes), se } r \cap s = r \\ \text{distintas, se } r \cap s = \varnothing \end{cases}$$

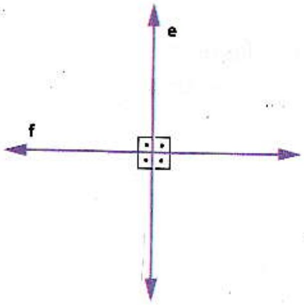
$$\text{Concorrentes} \begin{cases} \text{perpendiculares, se } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ determinam quatro ângulos retos} \\ \text{oblíquas, se } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ determinam dois ângulos agudos e dois obtusos} \end{cases}$$



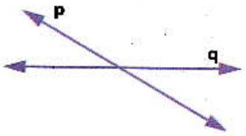
**r** e **s**: paralelas distintas
$r \parallel s$, com $r \cap s = \varnothing$



**a** e **b**: paralelas iguais ou
**a** e **b**: coincidentes
$a \parallel b$, com $a \cap b = a$ ou $a = b$



**e** e **f**: concorrentes perpendiculares
$e \perp f$



**p** e **q**: concorrentes oblíquas
$p \angle q$

Veremos a seguir como determinar as posições relativas de duas retas do mesmo plano a partir de suas equações.

### Paralelismo de duas retas

Se considerarmos, por exemplo, uma reta **r** de equação $2x - 3y + 5 = 0$ e uma reta **s** de equação $4x - 6y - 1 = 0$, qual será a posição da reta **r** em relação à reta **s**?

Note que a primeira equação equivale a $4x - 6y + 10 = 0$. Comparando com $4x - 6y - 1 = 0$ percebe-se que não existe um ponto (x, y) que pertença a **r** e **s** simultaneamente. Logo, **r** e **s** são retas paralelas distintas.

Vejamos agora como esse fato se caracteriza, analisando os coeficientes angulares das duas retas:

- Coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta **r**:

$$2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow -3y = -2x - 5 \Rightarrow 3y = 2x + 5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Então, $m_1 = \frac{2}{3}$ ①.

- Coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta **s**:

$$4x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow -6y = -4x + 1 \Rightarrow 6y = 4x - 1 \Rightarrow y = \frac{4}{6}x - \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$$

Então, $m_2 = \frac{2}{3}$ Ⓘⓘ.

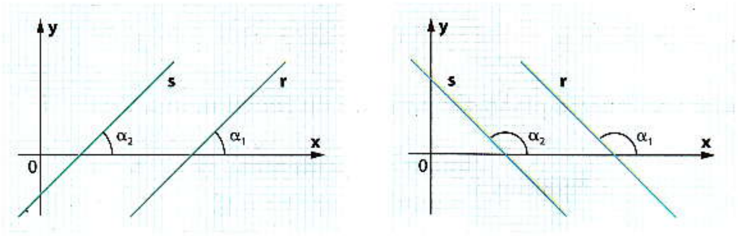
Comparando ① e Ⓘⓘ, podemos verificar que $m_1 = m_2$.

Sendo $\alpha_1$ a inclinação da reta **r** e $\alpha_2$ a inclinação da reta **s**, temos:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \ (\alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ estão entre } 0° \text{ e } 180°)$$

Se as inclinações são iguais, as retas são paralelas (r // s) e como $\frac{5}{3} \neq -\frac{1}{6}$ são distintas.

Veja as figuras, que mostram duas retas distintas e não verticais, que são paralelas:



$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r \mathbin{/\!/} s$$

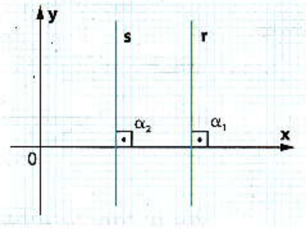
Duas retas não verticais **r** e **s** são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais ($m_1 = m_2$).

**Para refletir**

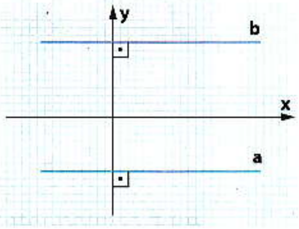
Se, além do mesmo coeficiente angular, elas têm também o mesmo coeficiente linear, as retas são coincidentes (paralelas iguais).

**Observações:**

1ª) Se as duas retas são paralelas ao mesmo eixo, elas são paralelas entre si. Nesse caso, não há necessidade de recorrer ao coeficiente **m**.



r // s



a // b

**Para refletir**

As retas de equações $x = 4$ e $y = 2$ são concorrentes e perpendiculares.

**Exemplos:**

1º) As retas de equações $x = 4$ e $x = -1$ são paralelas.

2º) As retas de equações $y = 2$ e $y = 7$ são paralelas.

2ª) Uma maneira prática de verificar o paralelismo de duas retas é comparar suas equações gerais.

Dadas duas retas, **r** e **s**, tal que **r**: $ax + by + c = 0$ e **s**: $a'x + b'x + c' = 0$, basta compararmos as razões seguintes:

$\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ e $\frac{c}{c'}$.

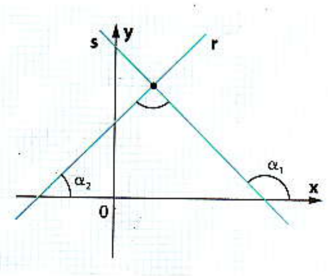
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, então temos duas retas paralelas coincidentes (r = s), ou seja, a mesma reta representada de duas formas diferentes.

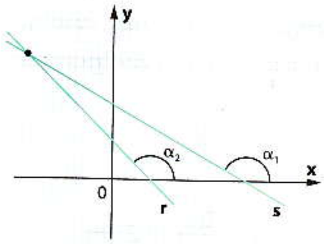
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, então temos duas retas paralelas distintas.
- Se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, então temos duas retas concorrentes.

3ª) Assim, podemos dizer que se duas retas **r**: $ax + by + c = 0$ e **s**: $a'x + b'y + c' = 0$ são tal que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, ou seja, $ab' = a'b$, então elas são paralelas e vice-versa.

É muito importante compreender que, se duas retas são ditas "paralelas iguais" ou "paralelas coincidentes", significa que elas são na realidade uma só reta, podendo ser representada de duas formas diferentes.

4ª) Duas retas do mesmo plano com coeficientes angulares diferentes não são paralelas; logo, são concorrentes.





Como $0° < \alpha_1, \alpha_2 < 180°$, temos: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha_1 \neq \text{tg}\,\alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow$ **r** e **s**: concorrentes.

## Exercícios resolvidos

**31.** Verifique a posição relativa das retas dadas por suas equações:

a) **r**: $3x - y + 2 = 0$

**s**: $\frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1$

b) **r**: $y = \frac{2}{3}x - 1$

**s**: $4x - 6y + 5 = 0$

c) **r**: $x = 8$

**s**: $y - 5 = 3(x - 4)$

**Resolução:**

a) Vamos determinar o coeficiente angular de **r** e **s**, usando a equação na forma reduzida:

**r**: $3x - y + 2 = 0 \Rightarrow -y = -3x - 2 \Rightarrow y = 3x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = 3$

**s**: $\frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1 \Rightarrow 5x + 2y = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = -5x + 20 \Rightarrow y = \frac{-5}{2}x + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_2 = -\frac{5}{2}$

Se $m_1 \neq m_2$, então **r** e **s** são concorrentes.

b) **r**: $y = \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3}$

**s**: $4x - 6y + 5 = 0 \Rightarrow 6y = 4x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{4}{6}x + \frac{5}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$

Se $m_1 = m_2$, então **r** e **s** são paralelas. Como $-1 \neq \frac{5}{6}$, elas são paralelas e distintas.

c) **r**: $x = 8$ (**r** é paralela ao eixo **y**)

**s**: $y - 5 = 3(x - 4) \Rightarrow m = 3$ (**s** não é paralela a nenhum dos eixos)

Logo, **r** e **s** são concorrentes.

**32.** Dadas as retas de equações $(k - 1)x + 3y - 1 = 0$ e $2kx - 2y + 5 = 0$, encontre os valores de **k** para os quais as retas são concorrentes.

**Resolução:**

Vamos determinar os coeficientes angulares:

$(k - 1)x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 3y = -(k - 1)x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-k + 1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{-k + 1}{3}$

$2kx - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = 2kx + 5 \Rightarrow y = kx + \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_2 = k$

Para que as retas sejam concorrentes devemos ter $m_1 \neq m_2$:

$m_1 \neq m_2 \Rightarrow \frac{-k + 1}{3} \neq k \Rightarrow 3k \neq -k + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k \neq 1 \Rightarrow k \neq \frac{1}{4}$

**Para refletir**

O que acontece quando $k = \frac{1}{4}$?

**33.** Determine uma equação geral da reta que passa pelo ponto **P**(2, −3) e é paralela à reta de equação $5x - 2y + 1 = 0$.

**Resolução:**

Vamos calcular o coeficiente angular **m** da reta cuja equação é dada:

$5x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow -2y = -5x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = 5x + 1 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$

De acordo com o problema, a reta procurada deve passar pelo ponto **P**(2, −3) e ter o mesmo coeficiente angular da reta dada, ou seja, $m = \frac{5}{2}$.

Daí, temos:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 3 = \frac{5}{2}x - \frac{10}{2} \Rightarrow 2y + 6 = 5x - 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x - 2y - 16 = 0$

Logo, a equação procurada pode ser $5x - 2y - 16 = 0$.

*Outra resolução:*

Queremos determinar uma reta paralela à reta $5x - 2y + 1 = 0$. Então, a reta procurada é da forma $5x - 2y + c = 0$.

Como **P**(2, −3) pertence a ela, temos:

$5(2) - 2(-3) + c = 0 \Rightarrow 10 + 6 + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -16$

Logo, a equação procurada é $5x - 2y - 16 = 0$.

**34.** As retas **r** e **s**, de equações $2x + (k - 2)y - 5 = 0$ e $4x + ky - 1 = 0$, respectivamente, são paralelas. Nessas condições, calcule o valor de **k**.

**Resolução:**

Pelos dados do problema, devemos ter $m_1 = m_2$.

Cálculo de $\mathbf{m_1}$ (coeficiente angular de **r**):

$2x + (k - 2)y - 5 = 0 \Rightarrow (k - 2)y = -2x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-2}{k - 2}x + \frac{5}{k - 2}$

$m_1 = \frac{-2}{k - 2}$, com $k \neq 2$

Cálculo de $\mathbf{m_2}$ (coeficiente angular de **s**):

$4x + ky - 1 = 0 \Rightarrow ky = -4x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{4}{k}x + \frac{1}{k} \Rightarrow m_2 = -\frac{4}{k}$, com $k \neq 0$

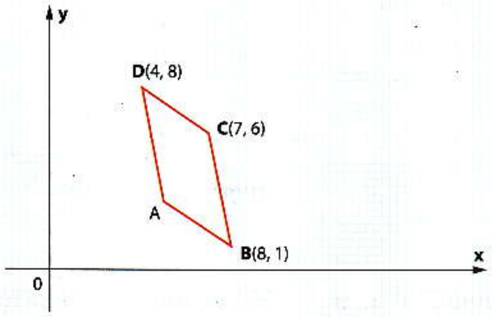
Como $m_1 = m_2$, temos:

$\frac{-2}{k - 2} = \frac{-4}{k} \Rightarrow -2k = -4k + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2k + 4k = 8 \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$

Como $4 \neq 2$ e $4 \neq 0$, então $k = 4$.

**35.** Na figura, ABCD é um paralelogramo. Determine a equação da reta-suporte do lado AB.



**Resolução:**

Sendo ABCD um paralelogramo, temos $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ e $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$. Então, nosso problema consiste em determinar a equação da reta que passa pelo ponto **B** e é paralela à reta-suporte do lado CD.

Equação da reta-suporte do lado CD:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 7 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x + 4y + 56 - 24 - 7y - 8x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2x - 3y + 32 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 32 = 0$

Cálculo do coeficiente angular dessa reta:

$2x + 3y - 32 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}$

$m = -\frac{2}{3}$

Equação da reta que passa por **B**(8, 1) e também tem coeficiente angular $m = -\frac{2}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \Rightarrow 3y - 3 = -2x + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 3y - 19 = 0$

Logo, a equação da reta procurada é $2x + 3y - 19 = 0$.

## Exercícios propostos

**44.** Qual é a posição da reta **r**, de equação $15x + 10y - 3 = 0$, em relação à reta **s**, de equação $9x + 6y - 1 = 0$?

**45.** Se as retas de equações $(a + 3)x + 4y - 5 = 0$ e $x + ay + 1 = 0$ são paralelas, calcule o valor de **a**.

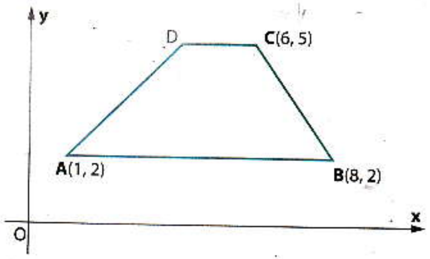
**46.** Em cada caso, determine a equação da reta que passa pelo ponto **P** e é paralela à reta da equação dada:

a) **P**$(1, 2)$ e $8x + 2y - 1 = 0$

b) **P**$(2, 5)$ e $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

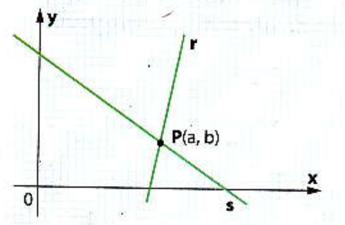
c) **P**$(2, -5)$ e $x = 2$

**47.** A figura mostra um trapézio ABCD. Determine a equação da reta-suporte da base menor do trapézio.



## Intersecção de duas retas

A figura abaixo mostra duas retas, **r** e **s**, que se intersectam no ponto **P**(a, b).



Como **P** pertence às duas retas, suas coordenadas devem satisfazer, simultaneamente, as equações dessas duas retas.

Logo, para determiná-las, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

**Observação:** Pela resolução de sistemas podemos verificar a posição relativa de duas retas de um mesmo plano. Assim, temos:

- sistema possível e determinado (um único ponto comum): retas concorrentes;
- sistema possível e indeterminado (infinitos pontos comuns): retas coincidentes;
- sistema impossível (nenhum ponto comum): retas paralelas distintas.

## Exercícios resolvidos

**36.** Determine as coordenadas do ponto **P** de intersecção das retas **r** e **s**, de equações $3x + 2y - 7 = 0$ e $x - 2y - 9 = 0$, respectivamente.

**Resolução:**

O nosso problema consiste em resolver o sistema formado pelas equações das duas retas:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ \underline{x - 2y - 9 = 0} \end{cases}$$

$$4x - 16 = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo na segunda equação, por exemplo, temos:

$$4 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow -2y = 5 \Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção são 4 e $-\frac{5}{2}$. Ou seja, **P**$\left(4, -\frac{5}{2}\right)$.

**37.** Se as equações das retas-suportes dos lados de um triângulo são $y = 2x - 1$, $y = 5x - 4$ e $x = 5$, calcule as coordenadas dos vértices do triângulo.

**Resolução:**

Os vértices do triângulo são pontos de intersecção das retas, tomadas duas a duas. Assim:

Ponto de intersecção das retas de equações $y = 2x - 1$ e $x = 5$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2x - 1 \Rightarrow y = 2(5) - 1 = 10 - 1 = 9 \end{cases}$$

Portanto, (5, 9).

Ponto de intersecção das retas de equações $y = 5x - 4$ e $x = 5$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5x - 4 \Rightarrow y = 5(5) - 4 = 25 - 4 = 21 \end{cases}$$

Portanto, (5, 21).

Ponto de intersecção das retas de equações $y = 2x - 1$ e $y = 5x - 4$:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$$

$$5x - 4 = 2x - 1 \Rightarrow 5x - 2x = 4 - 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

Portanto, (1, 1).

Logo, os vértices do triângulo são os pontos (5, 9), (5, 21) e (1, 1).

## Exercícios propostos

**48.** Determine o ponto de encontro das retas cujas equações são:

a) $x + 2y - 3 = 0$ e $x - 2y + 7 = 0$

b) $2x + y - 1 = 0$ e $3x + 2y - 4 = 0$

c) $2x + 3y - 8 = 0$ e $2x - 4y + 13 = 0$

d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{3}{2}x + 7$

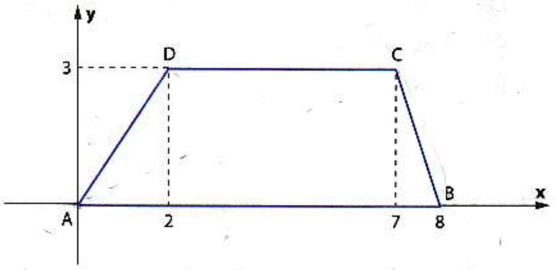
e) $y = x + 3$ e $\begin{cases} x = t - 4 \\ y = t - 1 \end{cases}$

**49.** Quais são as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que as equações das retas-suportes de seus lados são $x + 2y - 1 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$ e $y - 5 = 0$?

**50.** Demonstre que as retas de equações $2x + 3y - 1 = 0$, $3x + 4y - 1 = 0$ e $x + y = 0$ concorrem num mesmo ponto.

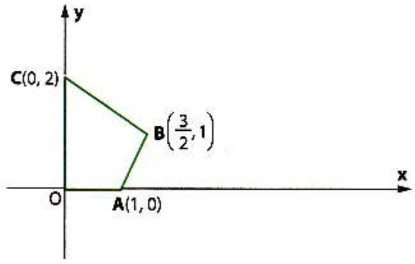
**51.** Os pontos **A**(1, 1), **B**(5, 2), **C**(6, 5) e **D**(2, 4) são os vértices de um paralelogramo. Vamos designar por **M**(a, b) o ponto de encontro das diagonais desse paralelogramo. Determine as coordenadas do ponto **M** e mostre que **M** é o ponto médio das diagonais.

**52.** A figura dada mostra um trapézio ABCD. Sendo **M** o ponto de encontro das diagonais do trapézio, determine as coordenadas do ponto **M**.

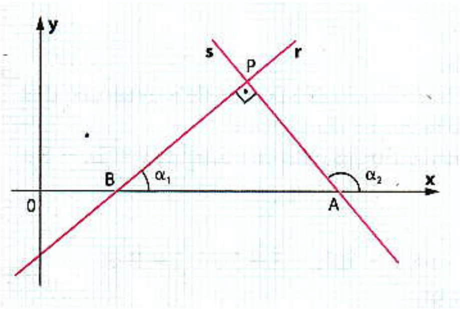


**53.** Qual é a equação da reta **r** que passa pelo ponto de encontro das retas $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ de equações $x - y + 2 = 0$ e $3x - y + 6 = 0$, respectivamente, e é paralela à reta **s**, cuja equação é $y = \frac{1}{2}x - 1$?

**54.** A figura dada mostra um quadrilátero OABC. Determine as coordenadas do ponto de encontro das diagonais.



## Perpendicularidade de duas retas



A figura mostra a reta **r**, de inclinação $\alpha_1$, e a reta **s**, de inclinação $\alpha_2$, tal que **r** e **s** são perpendiculares.

Pela Geometria plana, no triângulo APB temos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90° \Rightarrow \text{tg } \alpha_2 = \text{tg } (\alpha_1 + 90°) \Rightarrow \text{tg } \alpha_2 =$$

$$= \frac{\text{sen } (\alpha_1 + 90°)}{\cos (\alpha_1 + 90°)} = \frac{\cos \alpha_1}{-\text{sen } \alpha_1} = -\text{cotg } \alpha_1 = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_1}$$

Sabendo que $\text{tg } \alpha_2 = m_2$ e $\text{tg } \alpha_1 = m_1$, temos:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}, \text{ com } m_1, m_2 \neq 0$$

Então, se uma reta **s**, com coeficiente angular $\mathbf{m_2}$, é perpendicular a uma reta **r**, com coeficiente angular $\mathbf{m_1}$, temos:

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}} \quad (\text{com } m_1, m_2 \neq 0)$$

**Para refletir**

Justifique a passagem $\frac{\text{sen } (\alpha_1 + 90°)}{\cos (\alpha_1 + 90°)} = \frac{\cos \alpha_1}{-\text{sen } \alpha_1}$.

Reciprocamente, como a perpendicular a uma reta por um ponto é única, então uma reta que passa pelo ponto **P** da reta **r** e que tem coeficiente angular $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ coincide com a reta **s** e é perpendicular a **r**.

Podemos concluir, então, que dadas as retas **r** e **s**, de coeficientes angulares $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$, temos:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{ou} \quad r \perp s \Leftrightarrow m_1m_2 = -1$$

**Observação:** Uma maneira prática de verificar o perpendicularismo de duas retas **r** e **s**, dadas por suas equações gerais, tal que **r**: $ax + by + c = 0$ e **s**: $a'x + b'y + c' = 0$, é verificar se $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$. Se isso ocorrer, elas serão perpendiculares.

**Para refletir**

Verifique que $aa' + bb' = 0$, a partir de $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

## Exercícios resolvidos

**38.** Dadas as retas de equações $2x + 3y - 5 = 0$ e $3x - 2y + 9 = 0$, mostre que elas são perpendiculares.

**Resolução:**

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta de equação $2x + 3y - 5 = 0$:

$$2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$m_1 = -\frac{2}{3}$$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta de equação $3x - 2y + 9 = 0$:

$$3x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow -2y = -3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 3x + 9 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

Usando a condição de perpendicularismo:

$$m_1m_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

Logo, as retas são perpendiculares.

**39.** Dada a reta **r** com equação $3x - 2y + 4 = 0$ e o ponto **P**(1, −3), determine uma equação da reta **s** que passa pelo ponto **P** e é perpendicular à reta **r**.

**Resolução:**

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta **r**:

$$3x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow -2y = -3x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 3x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$m_1 = \frac{3}{2}$$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta **s**, sendo $s \perp r$:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

Equação da reta **s**:

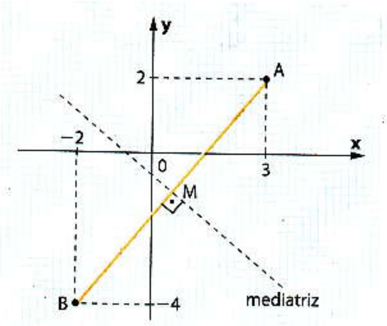
$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow 3y + 9 = -2x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 3y + 7 = 0$$

Logo, uma equação da reta procurada é $2x + 3y + 7 = 0$.

**40.** Determine a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos **A**(3, 2) e **B**(−2, −4).



**Resolução:**

Pela Geometria plana, sabemos que a mediatriz de um segmento é uma reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio. Na figura, **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta-suporte:

$$m_1 = \frac{-4 - 2}{-2 - 3} = \frac{6}{5}$$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da mediatriz:

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$$

Cálculo das coordenadas do ponto **M**:

$$x = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2 - 4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

**Para refletir**

A mediatriz de $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos P(x, y) tal que d(P, A) = d(P, B), isto é, dos pontos eqüidistantes de **A** e **B**. Faça o exercício resolvido 40 usando essa informação.

O problema, agora, fica reduzido a determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $\mathbf{M}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e que tem coeficiente angular $-\frac{5}{6}$:

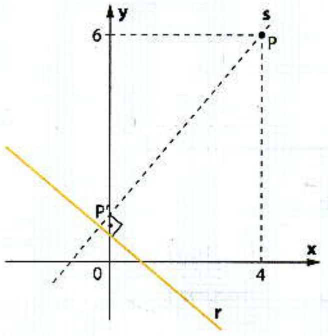
$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 1 = -\frac{5x}{6} + \frac{5}{12} \Rightarrow 12y + 12 = -10x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x + 12y + 7 = 0$$

Logo, uma equação da mediatriz do segmento é $10x + 12y + 7 = 0$.

**41.** Considerando o ponto **P**(4, 6) e a reta **r** de equação $x + y - 1 = 0$, determine as coordenadas da projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.



**Resolução:**
A figura mostra o ponto **P'**, projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**. **P'** é o ponto de encontro da reta **r** com a reta **s**, perpendicular a **r** pelo ponto **P**.
Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta **r**:

$x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1$

$m_1 = -1$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta **s**:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Equação da reta que passa por **P**(4, 6) e tem coeficiente angular 1:

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = 1(x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 6 = x - 4 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

Cálculo das coordenadas do ponto **P'** (intersecção de **s** com **r**):

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ \underline{x - y + 2 = 0} \end{cases}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto **P'** são $-\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, ou seja, $\mathbf{P}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

**Para refletir**

A projeção ortogonal P' de P sobre r é conhecida como pé da perpendicular a r que passa por P.

**42.** Para que valor do coeficiente **a** as retas de equações $3x + y - 15 = 0$ e $4x + ay + 1 = 0$ são perpendiculares entre si?

**Resolução:**
Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta de equação $3x + y - 15 = 0$:

$3x + y - 15 = 0 \Rightarrow y = -3x + 15$

$m_1 = -3$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta de equação $4x + ay + 1 = 0$:

$4x + ay + 1 = 0 \Rightarrow ay = -4x - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = -\frac{4x}{a} - \frac{1}{a},\ a \neq 0$$

$$m_2 = -\frac{4}{a},\ a \neq 0$$

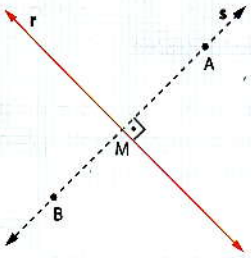
Pela condição de perpendicularismo, temos:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow -\frac{4}{a} = -\frac{1}{-3} \Rightarrow -\frac{4}{a} = +\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -12$

**43.** Determine as coordenadas do ponto **B**, simétrico do ponto **A**(4, 2) em relação à reta **r**, de equação $x + 3y + 10 = 0$.

**Resolução:**
A figura mostra o ponto **B** simétrico do ponto **A** em relação à reta **r**, ou seja:



**Para refletir**

A figura serve apenas para ajudar na resolução do problema, por isso não há necessidade dos eixos.

- a reta **s** passa por **A** e é perpendicular à reta **r**;
- **M** é o ponto de intersecção das retas **r** e **s**;
- **M** é o ponto médio do segmento AB.

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta **r**:

$x + 3y + 10 = 0 \Rightarrow 3y = -x - 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$$

$$m_1 = -\frac{1}{3}$$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta **s**:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$$

Equação da reta **s**:

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 2 = 3x - 12 \Rightarrow 3x - y - 10 = 0$

Cálculo das coordenadas do ponto **M**:

$$\begin{cases} x + 3y + 10 = 0 \\ 3x - y - 10 = 0 \quad \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \cancel{3y} + 10 = 0 \\ \underline{9x - \cancel{3y} - 30 = 0} \end{cases}$$

$$10x - 20 = 0 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

Substituindo $x = 2$ na segunda equação, vem:

$6 - y - 10 = 0 \Rightarrow y = -4$

Portanto, **M**$(2, -4)$.

Sendo **M** o ponto médio de $\overline{AB}$, vamos determinar **B**$(x, y)$:

$$2 = \frac{4 + x}{2} \Rightarrow 4 = 4 + x \Rightarrow x = 0$$

$$-4 = \frac{2 + y}{2} \Rightarrow -8 = 2 + y \Rightarrow y = -10$$

Logo, o simétrico do ponto **A** em relação à reta **r** é **B**$(0, -10)$.

## Exercícios propostos

**55.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P** e é perpendicular à reta **r** em cada um dos seguintes casos.

a) **P**$(-3, 2)$ e equação de **r**: $3x + 4y - 4 = 0$;

b) **P**$(2, 6)$ e equação de **r**: $2x - y + 3 = 0$;

c) **P**$(1, 4)$ e equação de **r**: $x - y - 1 = 0$;

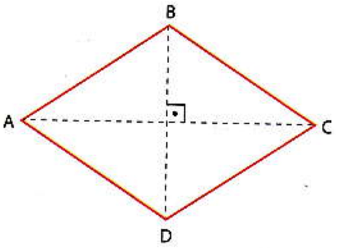
d) **P**$(3, 5)$ e equação de **r**: $y - 4 = 0$.

**56.** Qual deve ser o valor de **k** para que as retas **r** e **s**, de equações $kx + y + 5 = 0$ e $3x + (k + 1)y - 9 = 0$, respectivamente, sejam perpendiculares?

**57.** Dados a reta **r**, de equação $x - y + 1 = 0$, e o ponto **P**$(3, 2)$, quais são as coordenadas da projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**?

**58.** Determine as coordenadas do ponto **N**, simétrico ao ponto **M**$(2, 4)$ em relação à reta **r**, de equação $x - y - 6 = 0$.

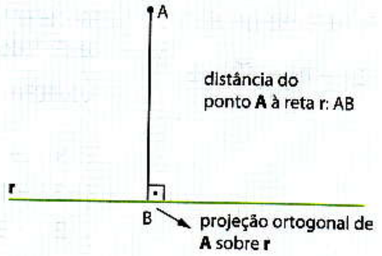
**59.** O quadrilátero da figura é um losango, e seus vértices são os pontos **A**$(a, b)$, **B**$(a + 4, b + 3)$, **C**$(a + 7, b + 7)$ e **D**$(a + 3, b + 4)$. Mostre que as retas que contêm as diagonais desse losango são perpendiculares.



**60.** Descubra sobre a reta $x - y + 1 = 0$ um ponto **P** eqüidistante dos pontos **A**$(3, 0)$ e **B**$(7, 2)$.

## 13 Distância de um ponto a uma reta

Devemos recordar, da Geometria plana, que a distância de um ponto **A** a uma reta **r** é a medida do segmento de extremidades em **A** e na sua projeção ortogonal sobre **r**.



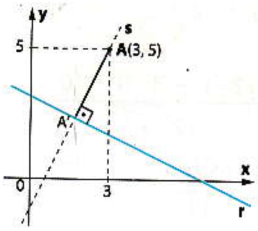
### Exercício resolvido

**44.** Determine a distância do ponto **A**$(3, 5)$ à reta **r**, de equação $x + 2y - 8 = 0$.

**Resolução:**

A figura mostra que a distância do ponto **A** à reta **r** é a distância entre os pontos **A** e **A'**, sendo que **A'** é a projeção ortogonal do ponto **A** sobre a reta **r**.

Coeficiente angular de **r**:



$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 8 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$

$m = -\frac{1}{2}$

Equação da reta **s**: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 5 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$ (equação geral da reta)

Coordenadas de **A'**: são aquelas do ponto de encontro de **r** e **s**:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \quad \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \cancel{2y} - 8 = 0 \\ 4x - \cancel{2y} - 2 = 0 \end{cases}$$

$5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ na segunda equação, temos:
$2(2) - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 3$

Portanto, **A'**(2, 3).

Cálculo da distância entre **A** e **A'**:

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Logo, a distância do ponto **A** à reta **r** é $\sqrt{5}$.

Se o processo usado no exercício resolvido 44 for aplicado para o caso genérico de um ponto **P**$(x_p, y_p)$ e uma reta **r** de equação $ax + by + c = 0$, chegaremos a uma fórmula para o cálculo da distância **d** de **P** a **r**:

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Para refletir**

Quando temos $d = 0$?

**Exemplo:**

Veja a distância do ponto **A**(3, 5) à reta **r** de equação $x + 2y - 8 = 0$, calculada no exercício resolvido 44:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 10 - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

## Exercícios resolvidos

**45.** Calcule a distância do ponto **A** à reta **r** nos casos:

a) **A**(−1, 5) e **r**: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

b) **A**(0, 0) e **r**: $y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 1)$

**Resolução:**

a) A equação de **r** deve ser colocada na forma geral:

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y = 12 \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

A distância de **A**(−1, 5) a **r** é:

$$d = \frac{|3(-1) + 4 \cdot 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{|-3 + 20 - 12|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

b) **r**: $y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 12 = -2x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 3y - 10 = 0$

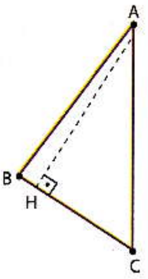
**A**(0, 0)

$$d(A, r) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

**46.** Um triângulo tem os vértices nos pontos **A**(1, 2), **B**(−3, −1) e **C**(2, −5).
Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado BC.

**Resolução:**



Pela figura, vemos que a medida da altura relativa ao lado BC é igual à distância entre o ponto **A** e a reta-suporte do lado BC.

Equação da reta-suporte do lado BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y + 15 + 2 + 3y + 5x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x + 5y + 17 = 0$

Cálculo da medida da altura:

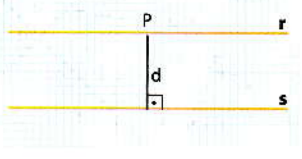
$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 17|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{|31|}{\sqrt{41}} = \frac{31}{\sqrt{41}} = \frac{31\sqrt{41}}{41}$$

Logo, a medida da altura é $\frac{31\sqrt{41}}{41}$.

**47.** São dadas as retas **r** e **s**, de equações $2x + 3y - 10 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$, respectivamente. Sabendo que essas retas são paralelas, calcule a distância entre elas.

**Resolução:**



Da Geometria plana, sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto **P** qualquer de uma delas a outra reta.

Cálculo das coordenadas de um ponto **P** qualquer da reta **r**:

$2x + 3y - 10 = 0$

Fazendo, arbitrariamente, $x = -1$, temos:

$2(-1) + 3y - 10 = 0 \Rightarrow -2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$

Portanto, **P**$(-1, 4)$.

Cálculo da distância de **P** à reta **s**:

**P**$(-1, 4)$ e **s**: $2x + 3y - 6 = 0$

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) + 3 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|4|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

Logo, a distância entre as retas é $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

**Para refletir**

É possível demonstrar que, se duas retas r: $ax + by + c_1 = 0$ e s: $ax + by + c_2 = 0$ são paralelas, então a distância entre elas é dada por: $d(r, s) = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.

Verifique no exercício resolvido 47.

## Exercícios propostos

**61.** Nos seguintes casos, calcule a distância do ponto **P** à reta **r**:

a) **P**$(0, 3)$ e $4x + 3y + 1 = 0$

b) **P**$(1, -5)$ e $3x - 4y - 2 = 0$

c) **P**$(3, -2)$ e $2x + y + 6 = 0$

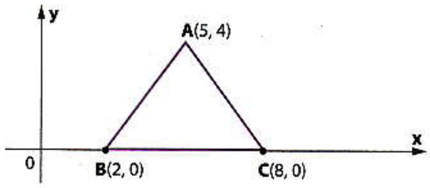
d) **P**$(6, 4)$ e $y - 2 = 0$

**62.** Sendo **A** o ponto de encontro da reta **r**, de equação $x + y - 4 = 0$, com o eixo **x**, determine a distância do ponto **A** à reta **s**, de equação $3x - 4y + 10 = 0$.

**63.** Sabendo que as retas de equações $4x - 3y + 9 = 0$ e $4x - 3y - 6 = 0$ são paralelas, determine a distância entre as duas retas.

**64.** Se a distância do ponto **P**$(0, p)$ à reta **r**, de equação $4x + 3y - 2 = 0$, é igual a 2 unidades, determine a coordenada **p**.

**65.** Calcule a área do triângulo ABC da figura.



**66.** Dado o ponto **P**$(3, 2)$, determine a distância de **P** até a reta **r**, nos seguintes casos:

a) **r**: $3x + 4y + 1 = 0$

b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

c) $y = 2x - 4$

d) $y = 6$

e) $x = -1$

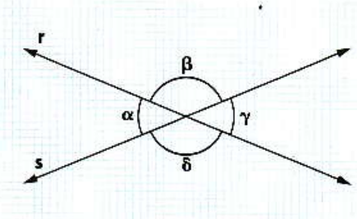
f) $y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$

**67.** Se a distância do ponto **P**$(k, 2)$ à reta **r**, de equação $3x + 4y - 40 = 0$, é igual a 4 unidades, qual é o valor da coordenada **k**?

## 14 Ângulo de duas retas concorrentes

Lembremos que duas retas concorrentes determinam quatro ângulos e que, conhecido um deles, determinamos os demais:

Observemos que:



- **r** e **s** são concorrentes e determinam os ângulos de medidas $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ e $\delta$
- $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
- $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$ (opostos pelo vértice)
- $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$

**Para refletir**

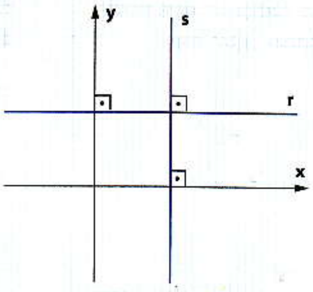
Se **r** e **s** são perpendiculares, os quatro ângulos são retos. Se **r** e **s** são oblíquas, dois ângulos são agudos e dois, obtusos.

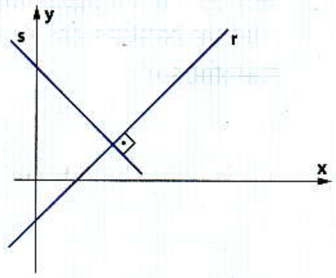
Veremos como determinar um dos ângulos formados por duas retas concorrentes, **r** e **s**, a partir de suas equações. Chamaremos esse ângulo de $\theta$.

## 1º caso

Uma reta, **r**, é paralela ao eixo **x** e a outra, **s**, é paralela ao eixo **y**; ou, então, uma tem coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ e a outra, $\mathbf{m_2}$, tal que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Em ambas as situações temos **r** e **s** perpendiculares. Logo, $\theta = 90°$.





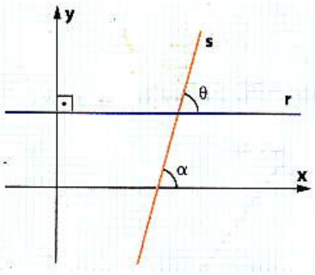
**Exemplos:**

1º) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{r}: y = 4 \\ \mathbf{s}: x = 3 \end{array}\right\} \theta = 90°$

2º) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{r}: y = 2x + 6 \\ \mathbf{s}: y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4) \end{array}\right\} m_1m_2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow r \perp s \Rightarrow \theta = 90°$

## 2º caso

Uma das retas, **r**, é paralela ao eixo **x** e a outra, **s**, tem coeficiente angular $m = \text{tg}\,\alpha$.



Nesse caso **r** é paralela ao eixo **x** e **s** é uma transversal. Então:

$$\theta = \alpha \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,\alpha = m$$

Considerando θ o ângulo agudo formado por **r** e **s**, podemos escrever:

$$\text{tg}\,\theta = |m|$$

**Para refletir**

θ e α são ângulos correspondentes.

**Exemplo:**

$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r}: y = 5 \\ \mathbf{s}: y - 2 = 3(x + 4) \end{array}\right\}$ **r** é paralela ao eixo **x** e **s** tem coeficiente angular m = 3.

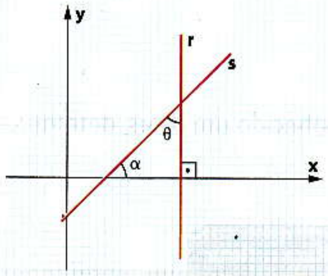
Logo, o ângulo agudo θ formado por **r** e **s** é tal que $\text{tg}\,\theta = 3$.

## 3º caso

Uma das retas, **r**, é paralela ao eixo **y** e a outra, **s**, tem coeficiente angular **m**.

**Para refletir**

Nesse caso $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 90°$; logo, tg α e cotg α existem e não são nulas.



Então:

$$\theta + \alpha = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \alpha \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(90° - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{m}$$

Considerando θ agudo, temos:

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{1}{m}\right|$$

**Exemplo:**

**r**: x = 4 (**r** paralela ao eixo **y**)

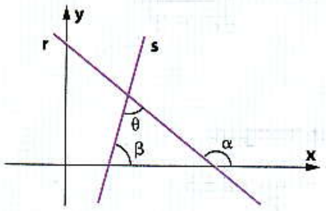
**s**: $2x + 6y - 1 = 0 \Rightarrow 6y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

O ângulo agudo θ, formado por **r** e **s**, é tal que:

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right| = 3$$

## 4º caso

As retas **r** e **s**, de coeficientes angulares $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$, não são paralelas aos eixos, são concorrentes, mas não são perpendiculares.



Então:

$$\theta + \beta = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha - \beta \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

Para θ agudo, temos:

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

**Exemplo:**

**r**: $y - 4 = 3(x - 5) \Rightarrow m_1 = 3$

**s**: $\frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{7} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{7} + \frac{y}{7} = 1 \Rightarrow 2x + y = 7 \Rightarrow y = -2x + 7 \Rightarrow m_2 = -2$

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + 3(-2)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

**Para refletir**

As retas **r** e **s** do exemplo formam dois ângulos de 45° e dois ângulos de 135°.

### Exercícios propostos

**68.** Dadas as equações de **r** e **s**, determine θ, um dos ângulos formados por elas:

a) **r**: $y = 7$
**s**: $2x - 3y + 5 = 0$

b) **r**: $y = 4x - 6$
**s**: $y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 5)$

c) **r**: $5x + y - 1 = 0$
**s**: $3x - y + 7 = 0$

d) **r**: $4x - 3 = 0$
**s**: $y = -9$

e) **r**: $y = -5x$
**s**: $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 2t \end{cases}$

f) **r**: $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$
**s**: $15x - 5y + 2 = 0$

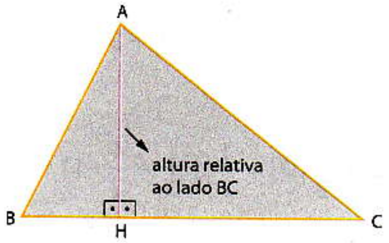
**69.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P**(2, 1) e forma um ângulo de 45° com a reta de equação $y = 5x + 3$.

## 15 Área de uma região triangular

Vejamos como determinar a área de uma região triangular ABC a partir dos pontos **A**, **B** e **C**.

Pela Geometria plana, sabemos que a área da região triangular da figura é dada por:

$$S = \frac{1}{2}(BC) \cdot (AH)$$

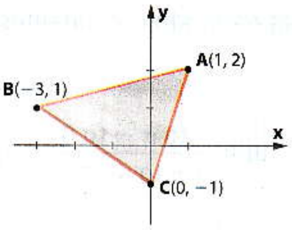


Em Geometria analítica, temos:

- d(B, C), que expressa a medida do lado BC;
- a distância de **A** à reta-suporte do lado BC, que expressa a medida da altura AH.

## Exercício resolvido

**48.** Se um triângulo ABC tem como vértices os pontos **A**(1, 2), **B**(−3, 1) e **C**(0, −1), calcule a área da região triangular.



**Resolução:**

Cálculo da medida do lado BC:

$$d(B, C) = \sqrt{(0 + 3)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Cálculo da distância entre o vértice **A** e a reta-suporte do lado BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3 + 3y + x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 3y + 3 = 0$$

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|11|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

Cálculo da área da região triangular:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{13}} \cdot \frac{11}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{11}{2} \text{ ou } 5{,}5$$

Logo, a área da região triangular é $\frac{11}{2}$ ou 5,5 unidades de área.

Considerando os pontos não-alinhados **A**($x_1$, $y_1$), **B**($x_2$, $y_2$) e **C**($x_3$, $y_3$) e seguindo a seqüência do exercício resolvido 48, chegamos a uma igualdade que facilita o cálculo da área da região triangular ABC.

Se os vértices de um triângulo são os pontos **A**($x_1$, $y_1$), **B**($x_2$, $y_2$) e **C**($x_3$, $y_3$), então a área dessa região triangular é dada por:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|D|}$$

em que $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

↑ coluna das ordenadas

↑ coluna das abscissas

**Para refletir**

O símbolo |D| indica módulo do determinante **D**.

Note que esse determinante é o mesmo que foi estudado no item 4 para verificar o alinhamento de três pontos. A conexão entre os dois assuntos está no fato de que, se três pontos que seriam os vértices de um triângulo estiverem alinhados, o triângulo se degenera num segmento de reta; nesse caso, é natural que sua área seja zero.

**Exemplo:**

Vejamos como fica o cálculo da área da região triangular ABC com **A**(1, 2), **B**(−3, 1) e **C**(0, −1), já feito no exercício resolvido 48:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 6 + 1 = 11$$

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|11| = \frac{1}{2} \cdot 11 = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Logo, a área da região triangular é $\frac{11}{2}$ ou 5,5 unidades de área.

## Exercício resolvido

**49.** Determine a área da região triangular ABC, dados **A**, **B** e **C**.

a) **A**(−1, 2), **B**(3, 1) e **C**(a, 0)

b) **A**(0, 0), **B**(0, 4) e **C**(−5, 0)

**Resolução:**

a) $$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 2 - 6 = -5$$

$$S = \frac{1}{2}|-5| = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

b) A localização de **A**, **B** e **C** permite concluir que o triângulo é retângulo em **A**, com catetos medindo 4 e 5. Logo:

$$S = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Confirmando:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

$$S = \frac{1}{2}|20| = \frac{20}{2} = 10$$

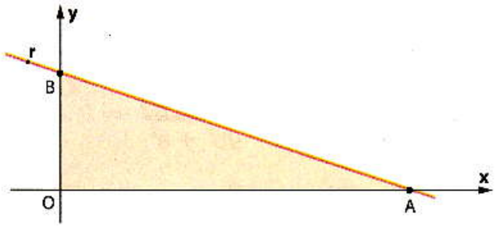
## Exercícios propostos

**70.** Determine a área da região triangular que tem como vértices os pontos **A**(4, 0), **B**(−1, 1) e **C**(−3, 3).

**71.** As retas-suportes dos lados de um triângulo têm como equações $x + 2y - 1 = 0$, $y - 5 = 0$ e $x - 2y - 7 = 0$. Calcule a área da região triangular.

**72.** Um triângulo tem como vértices os pontos **A**(5, 3), **B**(4, 2) e **C**(2, k). A área da região triangular ABC mede 8 unidades. Nessas condições, calcule o valor de **k**.

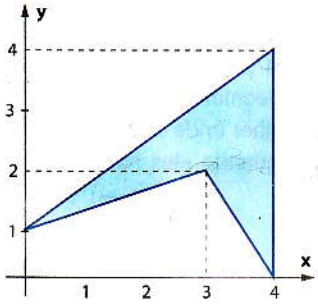
**73.** Na figura, a reta **r** tem equação $x + 2y - 4 = 0$. Determine a área da região triangular AOB.



**74.** Calcule a área do quadrilátero de vértices **A**(4, 0), **B**(6, 2), **C**(2, 4) e **D**(0, 2).

**75.** Determine a área do quadrilátero de vértices (0, 0), (5, 7), (8, 2), (3, −3).

**76.** A área da figura colorida no diagrama abaixo vale:



a) 4.
b) 3,5.
c) 3.
d) 5.
e) 4,5.

# 16 Aplicações à Geometria euclidiana

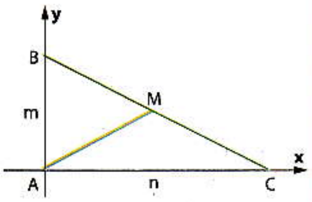
## Exercícios resolvidos

Escolha um sistema de eixos coordenados adequado e resolva, usando Geometria analítica, os seguintes problemas de Geometria euclidiana:

**50.** Seja ABC um triângulo retângulo de catetos AB = m, AC = n e hipotenusa BC. Mostre que o comprimento da mediana AM é igual à metade da hipotenusa.

**Resolução:**

O mais conveniente é colocar os dois catetos sobre os eixos coordenados; portanto, o vértice **A** deve coincidir com a origem:



Assim, **A**(0, 0), **B**(0, m) e **C**(n, 0) são as coordenadas dos vértices, e $\mathbf{M}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$. O comprimento da hipotenusa BC é $d(B, C) = \sqrt{m^2 + n^2}$ e o comprimento da mediana AM é:

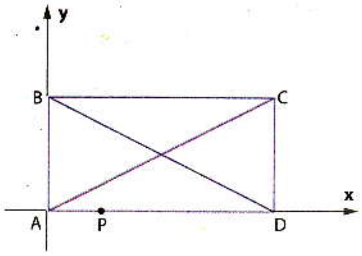
$$d(A, M) = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$$

Assim, $d(A, M) = \frac{1}{2}d(B, C)$, como queríamos mostrar.

**51.** Num retângulo qualquer, considere um ponto **P** pertencente a um dos lados do retângulo de lados **a** e **b**. Mostre que a soma das distâncias de **P** às diagonais desse retângulo é constante.

**Resolução:**
O mais conveniente é colocar dois lados do retângulo sobre os eixos coordenados, com um dos vértices coincidindo com a origem, e o ponto **P** em um dos lados que estão sobre os eixos. Esses procedimentos, que não são obrigatórios, apenas visam usar a Geometria analítica para simplificar a resolução de um problema de Geometria plana, dada a liberdade que temos em escolher onde colocar os sistemas de eixos coordenados quando eles não forem definidos previamente.



Supondo que os lados do retângulo tenham medidas **a** e **b**, então os vértices do retângulo são **A**(0, 0), **B**(0, b), **C**(a, b) e **D**(a, 0) e o ponto **P**(p, 0). Assim, vamos obter as equações das duas diagonais:

Diagonal AC:

$$m_1 = \frac{b - 0}{a - 0} = \frac{b}{a}$$

$$y - 0 = \frac{b}{a}(x - 0) \Rightarrow ay = bx \Rightarrow AC: bx - ay = 0$$

Diagonal BD:

$$m_1 = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0) \Rightarrow ay - ab = -bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD: bx + ay - ab = 0$$

A distância do ponto **P**(p, 0) à diagonal AC é dada por:

$$d_1 = \frac{|bp - a \cdot 0 + 0|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|bp|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

A distância do ponto **P**(p, 0) à diagonal BD é dada por:

$$d_2 = \frac{|bp + a \cdot 0 - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bp - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Como, de acordo com os dados iniciais, temos $0 \leqslant p \leqslant a$, então $bp < ab$ e assim:

$|bp - ab| = ab - bp$, portanto a soma $d_1 + d_2$ é:

$$d_1 + d_2 = \frac{|bp|}{\sqrt{b^2 + a^2}} + \frac{|bp - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} =$$

$$= \frac{bp + ab - bp}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$, que é constante, como queríamos mostrar.

## Exercícios propostos

**77.** Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:
a) é paralelo ao terceiro lado;
b) tem comprimento igual à metade do comprimento do terceiro lado.

**78.** Dada uma reta **r**: $2x + 3y - 1 = 0$, obtenha uma equação que represente o feixe de retas paralelas a **r**.

**79.** Dada uma reta **r**: $2x + 3y - 1 = 0$, obtenha uma equação que represente um feixe de retas perpendiculares a **r**.

**80.** Dados o ponto $\mathbf{P}(x_0, y_0)$ e a reta **r**: $ax + by + c = 0$, com $P \notin r$, obtenha a equação da reta **s**:
a) paralela a **r** e que passa por **P**;
b) perpendicular a **r** e que passa por **P**.

## Atividades adicionais

**1.** O ponto (a, −b) pertence ao interior do 2º quadrante. Os pontos (−a, b) e (−a, −b) pertencem, respectivamente, aos quadrantes:

a) 1º e 3º.
b) 4º e 1º.
c) 3º e 1º.
d) 4º e 3º.
e) 3º e 4º.

**2.** Determine o ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares eqüidistantes dos pontos (4, 8) e (6, 2).

**3.** Demonstre que os comprimentos das diagonais de um retângulo de lados **a** e **b** são iguais. (*Dica*: Estabeleça um sistema de eixos coordenados e trabalhe com os vértices do retângulo.)

**4.** Demonstre que os pontos **A**(6, −13), **B**(−2, 2), **C**(13, 10) e **D**(21, −5) são os vértices consecutivos de um quadrado. (*Sugestão*: Verifique que os lados são congruentes e que os ângulos são retos.)

**5.** Encontre uma equação que seja satisfeita com as coordenadas de qualquer ponto **P**(x, y) cuja distância ao ponto **A**(2, 3) é sempre igual a 3.

**6.** Considere um triângulo com lados que medem **a**, **b** e **c**, sendo **a** a medida do lado maior. Lembre-se de que:

- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo retângulo
- $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo acutângulo
- $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo obtusângulo

Dados **A**(4, −2), **B**(2, 3) e **C**(6, 6), verifique o tipo do triângulo ABC quanto aos lados (eqüilátero, isósceles ou escaleno) e quanto aos ângulos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo).

**7.** Considere os pontos que dividem o segmento AB em quatro partes iguais, sendo **A**(3, 2) e **B**(15, 10). Um desses pontos é:

a) (4, 3).
b) (5, 2).
c) (12, 8).
d) (−3, 5).
e) (−5, 6).

**8.** Até que ponto o segmento de extremidades **A**(4, −2) e **B**$\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ deve ser prolongado no sentido $\overrightarrow{AB}$ para que seu comprimento triplique?

a) (−6, 1)
b) (−5, 0)
c) (−4, 1)
d) (−3, 2)
e) (−2, 3)

**9.** O comprimento da mediana AM do triângulo ABC, cujos vértices são **A**(0, 0), **B**(3, 7) e **C**(5, −1), é:

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

**10.** O ponto **P**($x_0$, $y_0$) divide o segmento AB, com **A**(1, 5) e **B**(16, −5), na razão $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{7}$. O valor de $x_0 \cdot y_0$ é igual a:

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

**11.** O baricentro de um triângulo é **G**(5, 1) e dois de seus vértices são **A**(9, −3) e **B**(1, 2). O terceiro vértice desse triângulo é:

a) (4, 3).
b) (5, 4).
c) (6, 4).
d) (7, 5).
e) (8, 6).

**12.** Sejam **A**(1, 2), **B**(0, −1) e **C**$\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ vértices de um triângulo. Se **M**, **N** e **P** são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, o produto das coordenadas do baricentro do triângulo MNP é:

a) $\frac{3}{9}$.
b) $\frac{4}{9}$.
c) $\frac{6}{7}$.
d) $\frac{5}{7}$.
e) $\frac{1}{3}$.

**13.** Uma reta **r** passa pelos pontos **A**(2, 0) e **B**(0, 4). Uma outra reta **s** passa pelos pontos **C**(−4, 0) e **D**(0, 2). O ponto de intersecção das duas retas é **P**(a, b). Nessas condições, calcule as coordenadas **a** e **b** do ponto **P**.

**14.** Mostre que, para todos os valores reais de **a** e **b**, os pontos **A**(2 + 4a, 3 − 5a), **B**(2, 3) e **C**(2 + 4b, 3 − 5b) estão alinhados.

**15.** Dados **A**(1, 5) e **B**(3, −1), determine o ponto no qual a reta AB intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

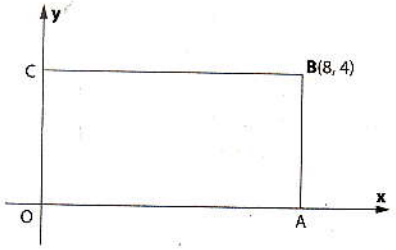
**16.** Sabendo que **P**(a, b), **A**(0, 3) e **B**(1, 0) são colineares e **P**, **C**(1, 2) e **D**(0, 1) também são colineares, determine as coordenadas de **P**.

**17.** Considere os pontos **A**(6, 2), **B**(−2, 12) e **C**(4, 6) e o triângulo ABC. Determine o coeficiente angular da reta que contém a mediana obtida a partir do vértice **A**.

**18.** Determine a equação da reta que satisfaz as seguintes condições:

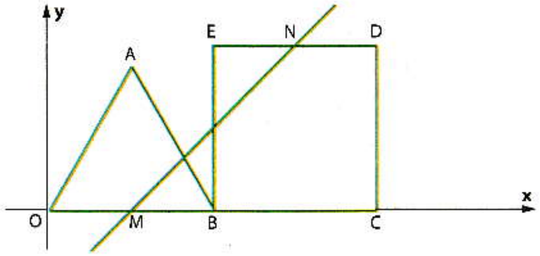
a) Tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$ e passa pelo ponto **A**(2, −3).
b) Passa pelo ponto **P**(1, −7) e é paralela ao eixo **x**.
c) Passa pelos pontos **A**(1, 1) e **B**(−2, −2).
d) A inclinação é de 150° e passa pela origem.

**19.** Na figura dada, o ponto **O** é a origem do sistema de coordenadas ortogonais e OABC é um retângulo. Nessas condições, escreva a equação da reta-suporte da diagonal AC.



**20.** Se a reta cuja equação geral é $5x - y - 5 = 0$ passa pelo ponto **A**$(k, k + 3)$, calcule as coordenadas do ponto **A**.

**21.** Na figura dada, o ponto **O** é origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, OAB é um triângulo eqüilátero de lado 8 e BCDE é um quadrado de lado 8. Se **M** é ponto médio de OB e **N** é ponto médio de DE, determine uma equação geral da reta que passa por **M** e **N**.



**22.** Passe a equação da reta de uma das formas conhecidas para outra:

a) $\frac{x}{3} + \frac{4}{2} = 1$, para a forma reduzida;

b) $y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4)$, para a forma geral;

c) $3x + 9y - 36 = 0$, para a forma segmentária;

d) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t + 2 \end{cases}$, para a forma geral.

**23.** As coordenadas dos pontos de um segmento de reta **r** são dadas por $x = \frac{2t + 1}{3}$ e $y = t + 2$, onde $0 \leq t \leq 7$. Determine a maior distância possível entre dois pontos dessa reta.

**24.** Dê a posição da reta **r**, de equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$, em relação à reta **s**, de equação definida por $\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = t + 5 \end{cases}$.

**25.** Em cada caso, determine a equação da reta que passa pelo ponto **P** e é paralela à reta da equação dada:

a) **P**$(4, -4)$ e $x + y - 5 = 0$

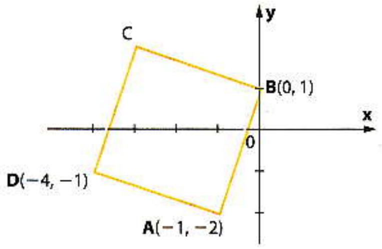
b) **P**$(-1, 3)$ e $2x - 5y + 7 = 0$

c) **P**$(-4, 2)$ e $y - 2 = 0$

**26.** Consideremos a reta **r**, de equação $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. Determine a equação de uma reta **s** que é paralela à reta **r** e passa pelo ponto **A**$(3, 10)$.

**27.** Se uma reta **r** passa pelo ponto **A**$(-1, 2)$ e é paralela a uma reta **s**, determinada pelos pontos **B**$(2, 3)$ e **C**$(-1, -4)$, escreva a equação da reta **r**.

**28.** Na figura, ABCD é um quadrado. Determine a equação da reta-suporte do lado BC.



**29.** Se um triângulo tem como vértices os pontos **A**$(2, 1)$, **B**$(-2, -4)$ e **C**$(0, 2)$, determine a equação da reta-suporte da altura relativa ao lado AB do triângulo.

**30.** Encontre a equação da reta simétrica à reta $2x + 3y - 8 = 0$ em relação à reta $x + 2y - 2 = 0$.

**31.** Se um triângulo tem como vértices os pontos **A**$(2, 4)$, **B**$(-6, 2)$ e **C**$(0, -2)$, qual é a área do triângulo ABC?

(*Sugestão*: $S = \frac{\text{medida de um lado} \cdot \text{medida da altura relativa}}{2}$)

**32.** Lembrando que bissetriz de um ângulo é a reta formada por todos os pontos que eqüidistam dos lados do ângulo, encontre as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $2x + 3y - 1 = 0$ e $3x + 2y + 1 = 0$.

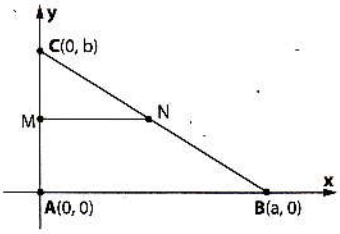
**33.** Encontre a medida em graus do ângulo agudo formado pelas retas $y - x = 1$ e $y + (2 - \sqrt{3})x = 10$.

**34.** Sabendo que os vértices de um triângulo são os pontos **A**$(m, m)$, **B**$(m, -m)$ e **C**$(0, 0)$, determine a área da região triangular ABC em função de **m**.

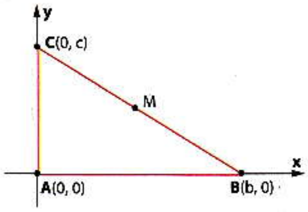
**35.** Obtenha a altura relativa ao lado AC do triângulo ABC, sabendo que **A**$(1, 2)$, **B**$(2, 4)$, e **C**$(5, 3)$.

**36.** Encontre a área do triângulo em que as equações das retas-suportes dos lados são $2x + y - 6 = 0$, $x + y - 8 = 0$ e $x - y = 4$.

**37.** Na figura, **M** é o ponto médio do lado AC e **N** é o ponto médio do lado BC. Demonstre, analiticamente, que o comprimento do segmento MN é igual à metade do comprimento do lado AB.

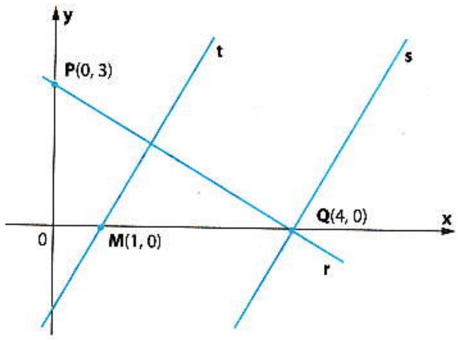


**38.** A figura mostra um triângulo retângulo ABC no qual **M** é o ponto médio da hipotenusa. Prove que o comprimento da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade do comprimento dessa hipotenusa.



## Questões de vestibular

**1.** (FEI-SP) A reta **s** é perpendicular à reta **r** e a reta **t** é paralela à reta **s**. Determine a equação da reta **s** e a equação da reta **t**.



**2.** (PUC-SP) Determine a distância do ponto **O**(1, 1) à reta **t**, cuja equação é $x + y - 3 = 0$.

**3.** (Fuvest-SP) Seja **r** a reta que passa pelo ponto **P**(3, 2) e é perpendicular à reta **s**, de equação $y = -x + 1$. Qual é a distância do ponto **A**(3, 0) à reta **r**?

**4.** (Fuvest-SP) Calcule a distância entre a reta $\mathbf{r_1}$, de equação $3y = 4x - 2$, e a reta $\mathbf{r_2}$, de equação $3y = 4x + 8$, sabendo que $r_1 \mathbin{/\!/} r_2$.

**5.** (Vunesp) Seja **r** uma reta que passa pelo ponto (0, −2). Por dois pontos do eixo das abscissas, distantes entre si uma unidade, traçam-se perpendiculares a esse eixo. Se estas perpendiculares intersectam **r** em dois pontos do primeiro quadrante cuja distância é $\sqrt{10}$ unidades, estabeleça a equação de **r**.

**6.** (Ufscar-SP) Considere a reta **r**:
$(a + 1)^2x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0$.

a) Mostre que essa reta passa por um ponto cujas coordenadas não dependem do parâmetro **a**.

b) Determine **a** de modo que **r** seja perpendicular à reta **s**: $x - 1 = 0$

**7.** (UFC-CE) A quantidade de pares ordenados (x, y) tais que $1 \leq x < y \leq 7$, sendo **x** e **y** números inteiros, é:

a) 15.
b) 21.
c) 30.
d) 42.

**8.** (Unifor-CE) Se em determinado ponto do plano cartesiano a abscissa é menor que a ordenada, então o quadrante onde ele **não** pode estar é:

a) primeiro.
b) segundo.
c) terceiro.
d) quarto.
e) primeiro ou terceiro.

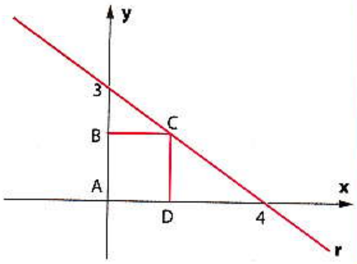
**9.** (UFC-CE) Sejam **P**(2, 3) e **Q**(−4, 5) dois pontos do plano. Se o segmento PQ é prolongado de seu próprio comprimento até o ponto **M**, que se encontra à esquerda de **Q**, então o ponto **M** é:

a) (−10, 7).
b) $\left(-\frac{21}{2}, 7\right)$.
c) $\left(-10, \frac{15}{2}\right)$.
d) $\left(-\frac{21}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

**10.** (Uece) Se (2, 5) é o ponto médio do segmento de extremos (5, y) e (x, 7), então o valor de x + y é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

**11.** (Uece) Na figura a reta **r** passa pelos pontos (4, 0) e (0, 3) e ABCD é um quadrado cujo vértice **C** está sobre **r**.

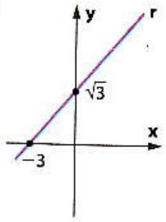


O perímetro desse quadrado, em unidades de comprimento, é:

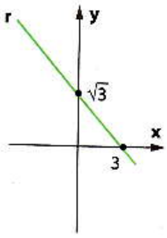
a) 6,4 u.
b) 6,8 u.
c) $\frac{48}{7}$ u.
d) 7 u.

**12.** (Unifor-CE) Uma reta **r** corta um dos eixos cartesianos no ponto $(0, \sqrt{3})$ e tem declividade de 30°. O gráfico de **r** pode ser:

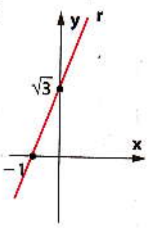
a)



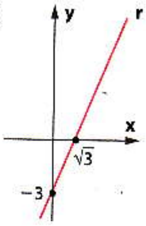
b)



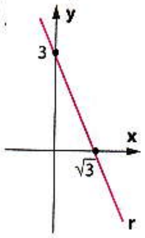
c)



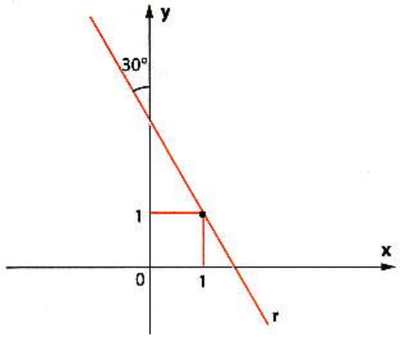
d)



e)



**13.** (Unifor-CE) Considere a reta **r**, representada na figura abaixo.



Sua equação é:

a) $\sqrt{3}x + y = 1 + \sqrt{3}$.

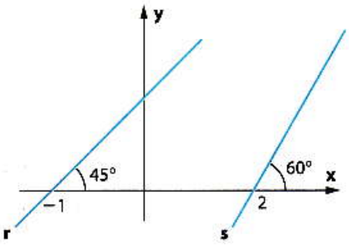
b) $\sqrt{3}x - y = 1 - \sqrt{3}$.

c) $\sqrt{3}x + y = -1 - \sqrt{3}$.

d) $\sqrt{3}x - y = -1 + \sqrt{3}$.

e) $\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$.

**14.** (Unifor-CE) Sejam as retas **r** e **s** representadas na figura abaixo.



A abscissa do ponto de intersecção de **r** e **s** é:

a) $\dfrac{-3\sqrt{3} - 5}{2}$.

b) $\dfrac{3\sqrt{3} + 7}{2}$.

c) $\dfrac{3\sqrt{3} - 7}{2}$.

d) $\dfrac{3\sqrt{3} + 5}{2}$.

e) $\dfrac{3\sqrt{3} - 5}{2}$.

**15.** (Uece) Uma reta passa pelo ponto (1, 2) e intercepta os semi-eixos positivos formando um triângulo retângulo. Se a área desse triângulo é 4 unidades de área, então o coeficiente angular da reta é:

a) −4. b) −3. c) −2. d) −1.

**16.** (Unifor-CE) A medida, em radianos, do ângulo agudo formado pelas retas de equações $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ e $x - 1 = 0$ é:

a) $\dfrac{\pi}{10}$.

b) $\dfrac{\pi}{9}$.

c) $\dfrac{\pi}{8}$.

d) $\dfrac{\pi}{6}$.

e) $\dfrac{\pi}{5}$.

**17.** (Uece) A reta que passa pelo ponto (2, 1) e forma um ângulo de 45° com a reta $2x + 3y + 4 = 0$ é dada pela equação:

a) $2x - y - 3 = 0$.

b) $x - 3y + 1 = 0$.

c) $3x - y - 5 = 0$.

d) $x - 5y + 3 = 0$.

**18.** (UFC-CE) Determine a área do paralelogramo de vértices (3, 0), (15, 12), (13, 14) e (1, 2).

**19.** (Unifesp) Um ponto do plano cartesiano é representado pelas coordenadas $(x + 3y, -x - y)$ e também por $(4 + y, 2x + y)$, em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Nessas condições, $x^y$ é igual a:

a) −8.

b) −6.

c) 1.

d) 8.

e) 9.

**20.** (UFBA) Um dos vértices de um quadrado ABCD é **A**(−2, −1). Uma circunferência inscrita no quadrado tem centro (1, 3). A medida da diagonal do quadrado é:

a) $5\sqrt{2}$.

b) 5.

c) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

d) $\sqrt{10}$.

e) 10.

**21.** (Ibmec-SP) Para que os pontos do plano cartesiano de coordenadas (1, 1), (a, 2) e (2, b) estejam sobre uma mesma reta é necessário e suficiente que:

a) $ab = a - b$.

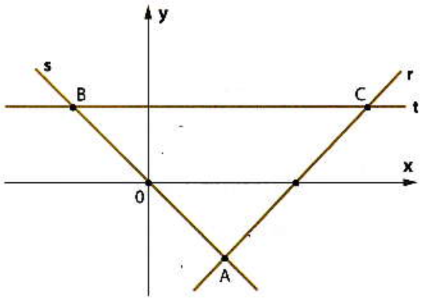
b) $ab = a + b$.

c) $ab = b - a$.

d) $ab = a^2 - b^2$.

e) $ab = a^2 + b^2$.

**22.** (Unifor-CE) Sejam $x - y = 4$, $x + y = 0$ e $y = 2$ as equações das retas **r**, **s** e **t** representadas num sistema de eixos cartesianos ortogonais, como mostra o gráfico abaixo.



Se as retas dadas interceptam-se, duas a duas, nos pontos **A**, **B** e **C**, a área do triângulo ABC, em unidades de superfície, é:

a) 6.

b) 8.

c) 12.

d) 14.

e) 16.

**23.** (Unifap) Dadas as equações das retas: **r**: $y = x - 1$ e **s**: $4y = 2x - 3$:

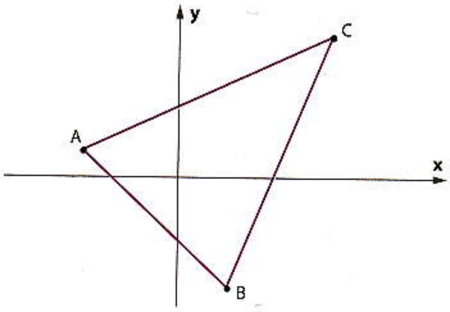
a) encontre a reta **t** perpendicular a **s** passando pelo ponto $\left(\dfrac{7}{2}, 1\right)$.

b) calcule a área da figura delimitada pelas retas **r**, **t** e o eixo **x**.

**24.** (UFPB) Em uma lâmina triangular homogênea, com vértices nos pontos **A**(a, b), **B**(c, d) e **C**(e, f), o seu centro de massa é, por definição, o ponto $\mathbf{M}\left(\frac{a+c+e}{3}, \frac{b+d+f}{3}\right)$. Se os vértices dessa lâmina estão nos pontos **A**(0, 0), **B**(12, 0) e **C**(0, 9), a distância, em unidades de comprimento, do seu centro de massa **M** à reta que passa pelos pontos **B** e **C**, será:

a) $\frac{4}{5}$.
c) $\frac{3}{5}$.
e) 12.
b) $\frac{12}{15}$.
d) 5.
f) 4.

**25.** (Vunesp) Dados dois pontos, **A** e **B**, com coordenadas cartesianas (−2, 1) e (1, −2), respectivamente, conforme a figura:



a) Calcule a distância entre **A** e **B**.
b) Sabendo-se que as coordenadas cartesianas do baricentro do triângulo ABC são $(x_G, y_G) = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ calcule as coordenadas $(x_C, y_C)$ do vértice **C** do triângulo.

**26.** (Ufscar-SP) Os pontos **A**(3, 6), **B**(1, 3) e **C**$(x_C, y_C)$ são vértices do triângulo ABC, sendo **M**$(x_M, y_M)$ e **N**(4, 5) pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente.
a) Calcule a distância entre os pontos **M** e **N**.
b) Determine a equação geral da reta suporte do lado BC do triângulo ABC.

**27.** (UFMG) Sejam **A** e **B** dois pontos da reta de equação $y = 2x + 2$, que distam duas unidades da origem. Nesse caso, a soma das abscissas de **A** e **B** é:

a) $\frac{5}{8}$.
b) $-\frac{8}{5}$.
c) $-\frac{5}{8}$.
d) $\frac{8}{5}$.

**28.** (FGV-SP) A reta $x + 3y - 3 = 0$ divide o plano determinado pelo sistema cartesiano de eixos em dois semiplanos opostos. Cada um dos pontos (−2, 2) e (5, b) está situado em um desses dois semiplanos. Um possível valor de **b** é:

a) $\frac{1}{4}$.
c) $\frac{3}{4}$.
e) $-\frac{1}{2}$.
b) $-\frac{1}{4}$.
d) $-\frac{3}{4}$.

**29.** (UEM-PR) Considere **A**(−1, 0), **B**(1, 2) e **C** o ponto de interseção entre as retas **s**: $x + 3y + 1 = 0$ e **r**: $3x + y - 5 = 0$. Nessas condições, assinale o que for correto.
01) As coordenadas de **C** são (2, −1).
02) A reta MN, onde **M** e **N** são, respectivamente, os pontos médios de BC e AC, não é paralela ao lado AB.
04) O baricentro do triângulo ABC é $\mathbf{G}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
08) A equação da reta **t**, paralela a AC e que passa pelo baricentro **G** do triângulo ABC, é **t**: $x + 3y - \frac{5}{3} = 0$.
16) A área do triângulo AGC, onde **G** é o baricentro do triângulo ABC, é $\frac{4}{3}$ u. a.
32) A área do triângulo ABC é o triplo da área do triângulo AGC, onde **G** é o baricentro do triângulo ABC.

**30.** (UFS-SE) O ângulo agudo formado pelas retas de equações $x - y + 2 = 0$ e $5x + y + 20 = 0$ tem sua medida, em graus, compreendida entre:
a) 0° e 30°.
b) 30° e 45°.
c) 45° e 60°.
d) 60° e 75°.
e) 75° e 90°.

**31.** (FGV-SP)
a) No plano cartesiano, para que valores de **m** as retas de equações (**r**) $mx + 2y + 4 = 0$ e (**s**) $mx - 4y + 5 = 0$ são perpendiculares?
b) Qual a distância entre as retas (**t**) $3x + 4y = 0$ e (**v**) $3x + 4y + 5 = 0$?

**32.** (UFPR) Suponha que duas partículas **P** e **Q** se movem no plano cartesiano, de modo que em cada instante **t** a partícula **P** está no ponto $(2t, 3 - t)$ e a partícula **Q** está no ponto $(4t, 3t - 2)$. Com base nessas informações, avalie as seguintes afirmativas:
I) As partículas colidem uma com a outra no instante $t = \frac{5}{4}$.
II) Ambas as partículas passam pelo ponto (4, 1).
III) No instante $t = 1$, a distância entre as partículas é $\sqrt{5}$.

Assinale a alternativa correta.
a) Somente a afirmativa II é verdadeira.
b) Somente a afirmativa III é verdadeira.
c) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

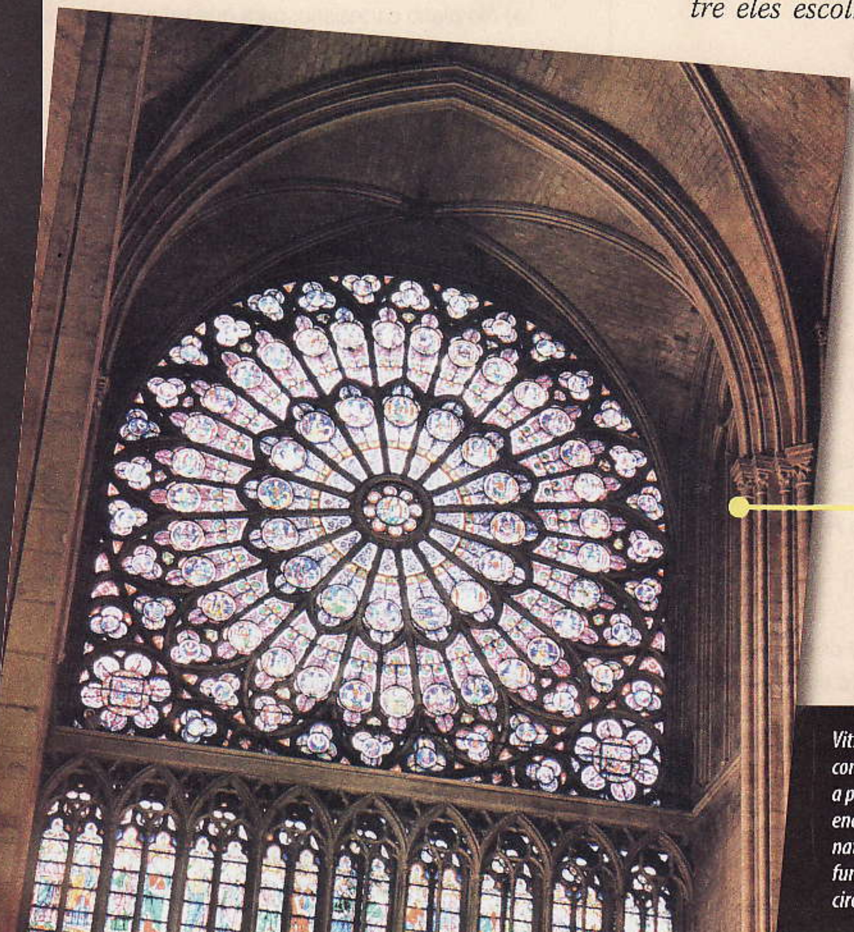
**33.** (Ufscar-SP) Considere a reta **r**:
$(a + 1)^2x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0$.
a) Mostre que essa reta passa por um ponto cujas coordenadas não dependem do parâmetro **a**.
b) Determine **a** de modo que **r** seja perpendicular à reta **s**: $x - 1 = 0$.

# 2 Capítulo

# Geometria analítica: a circunferência

*A imagem de um ponto circundado por infinitos outros, todos à mesma distância dele, é o que chamamos de* circunferência. *Ela está presente em nossa vida em quase tudo e a todo momento. Já nos referimos a essa forma na abertura do capítulo 11 do volume 2, quando introduzimos o estudo dos corpos redondos, ressaltando seus aspectos práticos. Poderíamos ilustrá-la aqui com uma infinidade de exemplos, mas dentre eles escolhemos um que acima de tudo mostra seu caráter estético, tão amplamente explorado na Arquitetura.*

*O contorno do vitral parece corresponder a uma circunferência, e seu preenchimento, completando o círculo, de uma beleza indiscutível, nos mostra sua propriedade fundamental, que é a eqüidistância de seus pontos ao centro.*



ALAMY/OTHER IMAGES

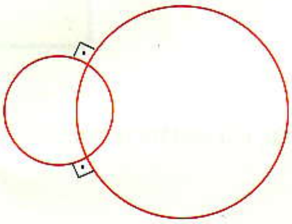
*Vitral da Catedral de Notre Dame, em Paris, construído em 1250, como um recurso para a passagem da luz, pois a catedral, por sua enorme altura, não tinha iluminação natural. Para a sua construção foi fundamental o conhecimento da circunferência e de suas propriedades.*

*No cotidiano as propriedades da circunferência são aplicadas sem que necessariamente se tenha consciência delas. Por exemplo, na construção de um poço, uma estaca é fincada no terreno e um barbante é amarrado em sua base, contendo na outra extremidade um estilete; ao girá-lo, uma circunferência é desenhada no solo, delineando a futura 'boca' do poço. Assim, a largura do poço corresponderá ao dobro do comprimento do barbante — o diâmetro da circunferência.*

*Colocada num sistema de eixos perpendiculares que formam o plano cartesiano, a circunferência é vista como uma figura geométrica e como tal pode ser representada algebricamente. Assim como fizemos no capítulo anterior com o ponto e a reta, determinaremos agora essa representação para a circunferência, estendendo nosso estudo às suas posições relativas aos pontos e às retas do plano cartesiano, e destacando a importante aplicação deste método na resolução de problemas já resolvidos geometricamente em Desenho geométrico.*

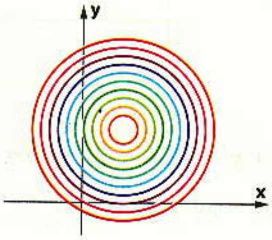
## Atividades

**1.** Circunferências ortogonais são curvas que se cortam segundo ângulos retos. Pelo teorema de Pitágoras, duas circunferências de raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, cujos centros distam **d** um do outro, são ortogonais se $r_1^2 + r_2^2 = d^2$.



De acordo com o texto podemos concluir que existe um triângulo retângulo associado a cada par de circunferências ortogonais. Transfira o desenho acima para o seu caderno e comprove que essas circunferências satisfazem à definição de ortogonais, determinando, por construção, o triângulo retângulo a elas associado.

**2.** Circunferências concêntricas são aquelas que possuem o mesmo centro e raios diferentes:



Considerando que as medidas dos raios dessas circunferências vão de 1 u a 10 u (da maior para a menor) uniformemente e identificando-as por sua cor, determine:

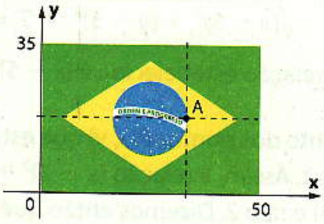
a) as coordenadas do centro de todas elas;
b) a medida do raio de todas elas;
c) a qual circunferência pertence a origem do sistema de coordenadas;
d) as coordenadas do ponto de maior abscissa da maior circunferência;
e) a distância do centro à origem.

**3.** Na abertura do capítulo 12 do volume 1 desta coleção vimos, na atividade 2, que existe um padrão para a construção da bandeira brasileira: *"Para o cálculo das dimensões, toma-se por base a largura desejada, dividindo esta em 14 partes iguais. Cada uma das partes será considerada uma medida ou módulo. O comprimento da bandeira será de 20 módulos".*

Os dados completos das dimensões da bandeira você pode encontrar no *site* do INMETRO: www.inmetro.gov.br.

Com base nessa informação e observando o gráfico abaixo, determine:

a) as coordenadas dos quatro vértices do losango que aparece na figura da bandeira;
b) as coordenadas do centro do círculo que sustenta a faixa "Ordem e Progresso";
c) uma estimativa de medida do raio desse círculo, considerando a simetria da bandeira;
d) as coordenadas do ponto **A** indicado no gráfico, de acordo com a medida do raio estimada.



## 1 Introdução

Em Geometria analítica, a Álgebra e a Geometria se integram. Assim, problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos, e relações algébricas são interpretadas geometricamente.

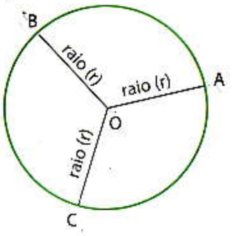
Podemos lembrar do capítulo anterior, por exemplo, que:

- a equação $3x + 2y - 5 = 0$ representa uma reta;
- um ponto do plano pode ser representado pelo par $(4, -3)$;
- o ponto $(4, 3)$ pertence à reta representada por $y = -2x + 11$;
- a reta que corta os eixos em $(5, 0)$ e $(0, 3)$ tem equação $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

Neste capítulo, a figura estudada será a circunferência. Da mesma maneira como fizemos com a reta, vamos associar cada circunferência a uma equação e, a partir daí, estudar as suas propriedades geométricas.

## 2 Definição

Sabemos, pela Geometria plana, que *circunferência* é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo.



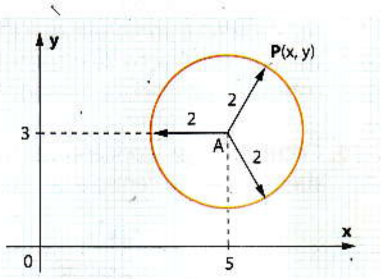
**Para refletir**

Às vezes refere-se ao raio como sendo o segmento de reta e às vezes a sua medida.

O ponto fixo chama-se *centro* da circunferência (na figura, o ponto **O**), e a distância constante é denominada *raio* da circunferência (na figura, OA = OB = OC = r).

## 3 Equação da circunferência

Considerando determinada situação em que a distância entre os pontos **P**(x, y) e **A**(5, 3) é igual a 2, qual será a relação que se pode estabelecer entre **x** e **y**?



Pela fórmula da distância, temos:

$$d(P, A) = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 3)^2}$$

Como $d(P, A) = 2$, vem:

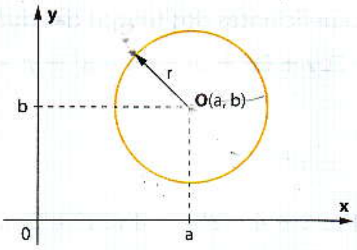
$$\sqrt{(x - 5)^2 + (y - 3)^2} = 2 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$$

Logo, a relação estabelecida é $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ ou $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$.

O conjunto dos pontos **P**(x, y) que estão situados a uma distância 2 do ponto **A**(5, 3) é a circunferência de centro **A**(5, 3) e raio 2. Assim, a relação $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ é satisfeita por todos os pontos **P**(x, y) da circunferência de centro **A**(5, 3) e raio 2. Dizemos então que $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ é a equação dessa circunferência.

Agora, genericamente, considerando **O**(a, b) o centro, **r** o raio e **P**(x, y) um ponto da circunferência, temos:

$$d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Daí podemos escrever que uma circunferência de centro **O**(a, b) e raio **r** tem equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

**Observação**: No caso particular de o centro da circunferência estar na origem, ou seja, a = b = 0, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$.

## Equação normal da circunferência

Ao desenvolver a equação da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ obtemos o que se chama de equação *normal* ou *geral* da circunferência:

$> 0$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

É muito comum na prática que as circunferências sejam representadas por sua equação geral, como, por exemplo, a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. À primeira vista, essa equação não nos permite identificar nem o centro nem o raio da circunferência em questão. Precisamos, portanto, aprender a obter o raio e o centro de uma circunferência a partir de sua equação geral. Temos dois métodos que podem ser utilizados:

### 1º) Método de completar os quadrados

Nesse método, o objetivo é obter os quadrados perfeitos $(x - a)^2$ e $(y - b)^2$ a partir das informações apresentadas na equação geral. Vejamos como ele funciona com a equação normal $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$:

- agrupam-se na equação normal os termos em **x** e os termos em **y**, isolando no outro membro o termo independente. É interessante deixar um espaço depois dos termos em **x** e dos termos em **y**, e dois espaços no outro termo:

$$x^2 - 2x + \underline{\quad\quad} + y^2 + 4y + \underline{\quad\quad} = 4 + \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad}$$

- somam-se a ambos os termos da equação valores convenientes, de modo que os termos em **x** e os termos em **y** se transformem, cada qual, em um quadrado perfeito. Na prática, usamos os espaços vagos para escrever esses números. O número que completa o quadrado perfeito em **x** é o quadrado da metade do coeficiente de **x**, se o coeficiente de $\mathbf{x^2}$ for 1. Assim, como o coeficiente de **x** é −2, metade de −2 é −1 e o quadrado de −1 é 1, somamos 1 em ambos os membros:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + \underline{\quad\quad} = 4 + 1 + \underline{\quad\quad}$$

Da mesma forma, o número que completa o quadrado perfeito em **y** é o quadrado da metade do coeficiente de **y**, se o coeficiente de $y^2$ for 1. Assim, como o coeficiente de **y** é 4, metade de 4 é 2 e o quadrado de 2 é 4, somamos 4 em ambos os membros:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 + 1 + 4$$

Assim, temos os seguintes quadrados perfeitos:

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x - 1)^2} + \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y + 2)^2} = \underbrace{4 + 1 + 4}_{3^2}$$

Portanto, a equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ representa uma circunferência de centro (1, −2) e raio 3.

**Observação:** Se os coeficientes de $\mathbf{x^2}$ e $\mathbf{y^2}$ não forem 1, basta dividir toda a equação normal por um número conveniente de forma a torná-los 1.

**2º) Método da comparação**

Nesse método, devemos comparar os coeficientes dos termos das duas equações, a equação dada e a teórica:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4$$

Desta forma:

$-2a = -2 \Rightarrow a = 1$

$-2b = 4 \Rightarrow b = -2$

$a^2 + b^2 - r^2 = -4 \Rightarrow 1^2 + (-2)^2 - r^2 = -4 \Rightarrow 1 + 4 - r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$ (não existe raio negativo)

Então, o centro da circunferência é $(1, -2)$ e o raio é 3.

O método de completar quadrados é o melhor dos dois, pois não envolve memorização da forma teórica da equação normal e oferece a possibilidade de trabalhar da mesma forma com outras equações (não só a da circunferência). Mas fica a seu critério a escolha do método para resolver os exercícios.

## Condições de existência

Consideremos a equação genérica $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Para que ela represente uma circunferência é necessário que sejam atendidas três condições:

- *1ª condição*: $A = B \neq 0$, ou seja, o coeficiente de $\mathbf{x^2}$ tem de ser igual ao coeficiente de $\mathbf{y^2}$.
- *2ª condição*: $C = 0$, ou seja, não pode existir o produto xy.
- *3ª condição*: $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, ou seja, garantimos que o raio é raiz de um número positivo e portanto um número real.

### Exercícios resolvidos

**1.** Determine a equação de uma circunferência com centro no ponto $\mathbf{O}(-3, 1)$ e raio 3.

**Resolução:**

Pelo problema, temos $a = -3$, $b = 1$ e $r = 3$.
Usando a equação, vem:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

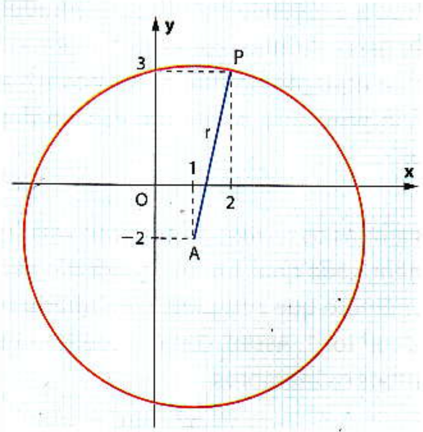
Logo, a equação é $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ou $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$.

**Para refletir**

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ é a equação da circunferência na forma reduzida e $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ é a equação na forma geral.

**2.** Determine a equação da circunferência com centro no ponto $\mathbf{A}(1, -2)$ e que passa pelo ponto $\mathbf{P}(2, 3)$.

**Resolução:**



Pela figura, $r = d(P, A)$. Então:

$d(P, A) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{1 + 25} =$
$= \sqrt{26} \Rightarrow r = \sqrt{26}$

Pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{26})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 26 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$

Logo, a equação é $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 26$ ou $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$.

Generalizando: Em uma circunferência de centro **C**(a, b) e raio **r** seus pontos satisfazem a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Reciprocamente, uma equação de variáveis **x** e **y** escrita nessa forma representa uma circunferência de centro **C**(a, b) e raio $r > 0$.

**3.** Verifique se a equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ representa uma circunferência.

**Resolução:**

Usando o processo conhecido como "completamento de quadrados" e lembrando que $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$, temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + \_\_\_\_ + y^2 - 8y + \_\_\_\_ =$

$= -19 + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4} + \underbrace{y^2 - 8y + 16} = \underbrace{-19 + 4 + 16} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1^2$

Logo, a equação inicial representa uma circunferência de centro **C**(2, 4) e raio 1.

*Outra resolução*:

Em $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ temos $A = B = 1$, $C = 0$, $D = -4$, $E = -8$ e $F = 19$.

Assim, atendemos às três condições de existência:

1ª) $A = B \neq 0$, pois $A = B = 1$

2ª) $C = 0$

3ª) $D^2 + E^2 - 4AF > 0$,
pois $(-4)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 19 = 4$

Logo, a equação inicial representa uma circunferência.

**4.** A equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ representa uma circunferência? Em caso afirmativo, dê as coordenadas do centro e o raio.

**Resolução:**

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 1 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -4$

Como $(x + 1)^2$ é sempre positivo ou nulo, bem como $(y - 1)^2$, a soma $(x + 1)^2 + (y - 1)^2$ nunca é negativa; então, não há ponto que satisfaça a relação $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -4$.

Logo, a equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ não representa uma circunferência.

Devemos sempre lembrar que:

> Uma equação nas variáveis **x** e **y** representa uma circunferência se, e somente se, pode ser escrita na forma:
>
> $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
>
> com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

*Outra resolução*:

Em $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ temos $A = B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = -2$ e $F = 6$.

A 3ª condição não é atendida, pois $(2)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -16$. Logo, a equação não representa uma circunferência.

**5.** Obtenha o raio e o centro da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

**Resolução:**

*Método de completar quadrados*

$x^2 + 6x + \_\_\_\_ + y^2 - 4y + \_\_\_\_ =$

$= 12 + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x + 3)^2} + \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y - 2)^2} = \underbrace{12 + 9 + 4}_{5^2}$$

Portanto, a equação $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ representa uma circunferência de centro (−3, 2) e raio 5.

*Método da comparação*

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) =$

$= x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ [circunferência de centro (a, b) e raio **r**]

$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$

$-2b = -4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 + b^2 - r^2 = -12 \Rightarrow (-3)^2 + 2^2 - r^2 = -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 + 4 - r^2 = -12 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ (não existe raio negativo)

Então, o centro da circunferência é (−3, 2) e o raio é 5.

## Exercícios propostos

**1.** Dê as coordenadas do centro e o raio das circunferências representadas pelas equações:

a) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$

b) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

c) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

d) $x^2 + y^2 = 10$

**2.** Determine uma equação da circunferência que tem:

a) centro em **C**(2, 5) e raio 3

b) centro em **M**(−1, −4) e raio $\sqrt{2}$

c) centro em **Q**(0, −2) e raio 4

d) centro em **D**(4, 0) e raio 5

**3.** Obtenha o raio e o centro das circunferências a seguir. (Para resolver este exercício, use o método de completar quadrados e o da comparação.)

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

**4.** As seguintes equações representam circunferências; determine as coordenadas do centro e o raio em cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0$

**5.** Verifique quais das equações abaixo representam circunferência:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + xy + 4x + 6y - 3 = 0$
c) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 - 12x - 15y - 6 = 0$
e) $4x^2 - 4y^2 = 0$

**6.** Verifique entre os pontos **A**(0, 3), **B**(7, 2) e **C**(−1, 3) quais pertencem à circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

**7.** O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento AB, sendo **A**(2, −5) e **B**(−2, −3). Se o raio dessa circunferência é $\sqrt{2}$, determine a sua equação.

**8.** Os pontos **A**(4, −2) e **B**(2, 0) são as extremidades do diâmetro de uma circunferência de centro **C**(a, b) e raio **r**. Determine uma equação dessa circunferência.

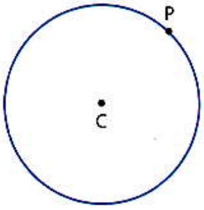
**9.** Uma circunferência de centro no ponto **Q**(2, 0) passa pelo ponto de encontro das retas **r** e **s** de equações $x - y - 2 = 0$ e $x + y - 6 = 0$, respectivamente. Qual é a equação dessa circunferência?

**10.** Quais são os valores que **k** pode assumir para que a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13k = 0$ represente uma circunferência?

## 4 Posições relativas de um ponto e uma circunferência

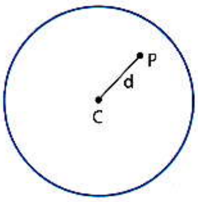
Quando temos um ponto **P**$(x_1, y_1)$ e uma circunferência $\lambda$, de centro **C**(a, b) e raio **r**, as possíveis posições relativas de **P** e $\lambda$ são:

1ª) O ponto pertence à circunferência:



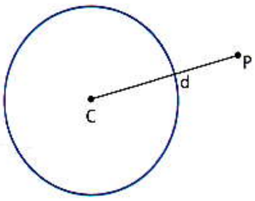
Nesse caso, as coordenadas do ponto devem satisfazer a equação da circunferência, e a distância entre **P** e **C** é igual a **r**.

2ª) O ponto é interno à circunferência:



Nesse caso, a distância do ponto ao centro é menor que o raio.

3ª) O ponto é externo à circunferência:



Nesse caso, a distância do ponto ao centro é maior que o raio.

Considerando que a equação da circunferência (reduzida ou geral) é obtida a partir da condição d(P, C) = r, podemos escrever:

- $d(P, C) = r \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow P \in \lambda$
- $d(P, C) < r \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 < 0 \Leftrightarrow$ **P** é interno a $\lambda$
- $d(P, C) > r \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 > 0 \Leftrightarrow$ **P** é externo a $\lambda$

### Exercícios resolvidos

**6.** Dê a posição do ponto **P** relativa à circunferência $\lambda$:

a) **P**(3, 2) e $\lambda$: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
b) **P**(5, −1) e $\lambda$: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
c) **P**(4, 3) e $\lambda$: $x^2 + y^2 = 36$
d) **P**(−2, −3) e $\lambda$: $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = (\sqrt{5})^2$

**Resolução:**

a) **P**(3, 2) e $\lambda: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

Substituindo:

$3^2 + 2^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 + 4 - 18 + 5 =$
$= 18 - 18 = 0$

Então, $P \in \lambda$.

b) **P**(5, −1) e $\lambda: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$

Substituindo:

$5^2 + (-1)^2 - 6 \cdot 5 - 2(-1) + 8 =$
$= 25 + 1 - 30 + 2 + 8 = 36 - 30 = 6 > 0$

Então **P** é externo a λ.

c) **P**(4, 3) e $\lambda: x^2 + y^2 = 36$

Substituindo:

$4^2 + 3^2 - 36 = 16 + 9 - 36 = -11 < 0$

Então **P** é interno a λ.

d) **P**(−2, −3) e $\lambda: (x + 1)^2 + (y + 4)^2 = (\sqrt{5})^2$

Substituindo:

$(-2 + 1)^2 + (-3 + 4)^2 - (\sqrt{5})^2 = 1 + 1 - 5 =$
$= -3 < 0$

Então **P** é interno a λ.

**7.** Determine uma equação da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices **A**(1, 2), **B**(0, 3) e **C**(−7, −4).

**Resolução:**

A equação da circunferência é λ:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

- **A**(1, 2) $\in \lambda: (1 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2$ ①
- **B**(0, 3) $\in \lambda: (0 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2$ ②
- **C**(−7, −4) $\in \lambda: (-7 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2$ ③

Igualando ① e ②, temos:

$1 - 2a + a^2 + 4 - 4b + b^2 = a^2 + 9 - 6b + b^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2a + 2b = 4 \Rightarrow -a + b = 2$

Igualando ② e ③, temos:

$a^2 + 9 - 6b + b^2 = 49 + 14a + a^2 + 16 + 8b + b^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -14a - 14b = 56 \Rightarrow a + b = -4$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = -4 \end{cases}$ encontramos $a = -3$ e $b = -1$.

Assim, $\lambda: (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = r^2$.

Para encontrar o valor de **r** usamos, por exemplo, a equação ①:

$(1 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 + 3)^2 + (2 + 1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25$

Portanto, a equação procurada é

$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

*Outra resolução:*

Da Geometria plana, lembramos que o centro da circunferência circunscrita a um triângulo é o circuncentro, ou seja, é o encontro das mediatrizes do triângulo. Então, vamos obter a equação de duas mediatrizes e o ponto de intersecção delas. O centro da circunferência será esse ponto e o raio será a distância do centro a um dos três vértices.

Mediatriz do lado AB:

$$m_1 = \frac{3 - 2}{0 - 1} = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Ponto médio de AB: $\mathbf{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Então, a reta que passa por **M** com coeficiente angular $m_2 = 1$ é:

$$y - \frac{5}{2} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2y - 5 = 2x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

Mediatriz do lado BC:

$$m_3 = \frac{-4 - 3}{-7 - 0} = 1$$

$$m_4 = -\frac{1}{m_3} = -\frac{1}{1} = -1$$

Ponto médio de BC: $\mathbf{N}\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Então, a reta que passa por **N** com coeficiente angular $m_4 = -1$ é:

$$y + \frac{1}{2} = -1\left(x + \frac{7}{2}\right) \Rightarrow 2y + 1 = -2x - 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2y + 8 = 0 \Rightarrow x + y + 4 = 0$$

Centro **O** da circunferência:

A intersecção das duas mediatrizes (que são retas concorrentes) é obtida pela resolução do sistema $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$. Resolvendo esse sistema, encontramos $x = -3$ e $y = -1$. Logo, **O**(−3, −1).

Raio da circunferência:

Distância do centro ao vértice **B** (poderia ser qualquer um dos três vértices):

$$d(O, B) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Portanto, raio = 5.

Então, a equação procurada é $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

## Exercícios propostos

**11.** Dados o ponto **P** e a circunferência λ, determine a posição de **P** em relação a λ.

a) **P**(−1, 2) e $\lambda: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$

b) **P**(2, 2) e $\lambda: x^2 + y^2 - 10x + 8y - 1 = 0$

c) **P**(3, 1) e $\lambda: x^2 + y^2 - 8x - 5 = 0$

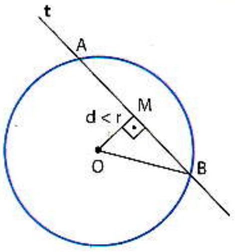
**12.** Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, qual é a posição do ponto **P**(3, −4) em relação a essa circunferência?

**13.** Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos **P**(0, 0), **Q**(3, 3) e **R**(0, 8).

## 5 Posições relativas de uma reta e uma circunferência

Consideremos as três possíveis posições de uma reta em relação a uma circunferência:

1ª) A reta **t** é secante à circunferência:



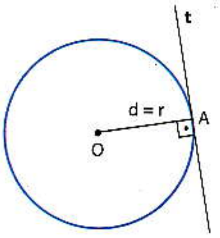
Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta é menor que o raio. A reta e a circunferência têm dois pontos comuns.

**Para refletir**

Propriedades de reta e da circunferência secantes:

- $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
- **M** é ponto médio de $\overline{AB}$ $(AB = 2AM)$
- Teorema de Pitágoras: $(OM)^2 + (BM)^2 = (BO)^2$

2ª) A reta **t** é tangente à circunferência:

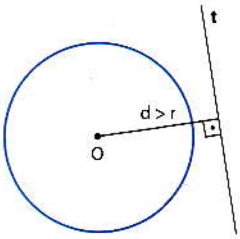


Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta é igual ao raio. A reta e a circunferência têm um único ponto comum.

**Para refletir**

Note que $t \perp \overleftrightarrow{OA}$.

3ª) A reta **t** é exterior à circunferência:



Nesse caso, a distância do centro da circunferência à reta é maior que o raio. A reta e a circunferência não têm ponto comum.

Vejamos, a partir das equações, como identificar qual desses casos se verifica.

### Exercícios resolvidos

**8.** São dadas a reta **r**, de equação $2x + y - 1 = 0$, e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Qual é a posição da reta **r** em relação à circunferência?

**Resolução:**

Vamos calcular, inicialmente, as coordenadas do centro e o raio da circunferência:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

Então, **C**$(-3, 4)$ e $r = 5$.

Agora vamos determinar a distância do centro à reta:

$$d = \frac{|2(-3) + 1(4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \simeq 1{,}3$$

Comparando **d** e **r**, temos $d < r$ $(1{,}3 < 5)$.

Logo, a reta **r** é secante à circunferência.

*Outra resolução:*

Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases}$$

Substituindo **y** na segunda equação, temos:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (1 - 2x)^2 + 6x - 8(1 - 2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 4x + 4x^2 + 6x - 8 + 16x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 + 18x - 7 = 0$

O cálculo de $\Delta$ será suficiente para determinar quantos pontos comuns têm a reta e a circunferência e daí a posição relativa. Então:

$\Delta = 18^2 + 140 = 324 + 140 = 464 > 0$

O valor de $\Delta > 0$ indica a existência de dois valores reais e distintos de **x** e, conseqüentemente, dois pontos comuns à reta e à circunferência.

Logo, a reta é secante à circunferência.

**Observação**: A resolução completa do sistema permite descobrir quais são os dois pontos comuns à reta e à circunferência.

**9.** Qual o comprimento da corda determinada pela reta **s**: $3y - 4x + 1 = 0$ na circunferência $x^2 + y^2 = 25$?

**Resolução:**

Os pontos comuns à reta e à circunferência são as extremidades **A** e **B** da corda AB procurada. Assim, vamos resolver o sistema e obter os pontos **A** e **B** da corda AB.

**Para refletir**

Para $\Delta = 0$, há um só ponto comum (reta tangente à circunferência).
Para $\Delta < 0$, não há ponto comum (reta exterior à circunferência).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3y - 4x + 1 = 0 \rightarrow y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Substituindo **y** na 1ª equação, temos:

$$x^2 + \left(\frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{16x^2}{9} - \frac{8x}{9} + \frac{1}{9} = 25 \Rightarrow \frac{25x^2}{9} - \frac{8x}{9} - \frac{224}{9} = 0 \Rightarrow 25x^2 - 8x - 224 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-224) = 22\,464$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{22\,464}}{2 \cdot 25} = \frac{8 \pm 24\sqrt{39}}{50} \Rightarrow x_1 = \frac{4 + 12\sqrt{39}}{25} \text{ e } x_2 = \frac{4 - 12\sqrt{39}}{25}$$

Para $x_1 = \dfrac{4 + 12\sqrt{39}}{25}$, temos:

$$y_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{4 + 12\sqrt{39}}{25}\right) - \frac{1}{3} = \frac{-3 + 16\sqrt{39}}{25}$$

Então, $\mathbf{A}\left(\dfrac{4 + 12\sqrt{39}}{25}, \dfrac{-3 + 16\sqrt{39}}{25}\right)$.

Para $x_2 = \dfrac{4 - 12\sqrt{39}}{25}$, temos:

$$y_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{4 - 12\sqrt{39}}{25}\right) - \frac{1}{3} = \frac{-3 - 16\sqrt{39}}{25}$$

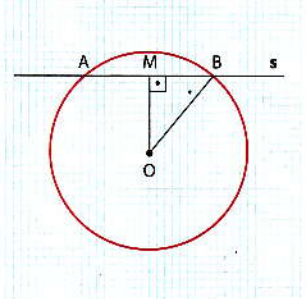
Então, $\mathbf{B}\left(\dfrac{4 - 12\sqrt{39}}{25}, \dfrac{-3 - 16\sqrt{39}}{25}\right)$.

Finalmente, obtemos a distância $\mathbf{d_{AB}}$ entre os pontos **A** e **B**:

$$d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{4 + 12\sqrt{39}}{25} - \frac{4 - 12\sqrt{39}}{25}\right)^2 + \left(\frac{-3 + 16\sqrt{39}}{25} - \frac{-3 - 16\sqrt{39}}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24\sqrt{39}}{25}\right)^2 + \left(\frac{32\sqrt{39}}{25}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1600 \cdot 39}{625}} = \frac{40\sqrt{39}}{25} = \frac{8\sqrt{39}}{5}$$

*Outra resolução:*



O ponto **O** tem coordenadas (0, 0). O segmento OB mede 5 (raio). OM é a distância de **O** a **s**. Então:

$$OM = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$$

Logo:

$(MB)^2 + (MO)^2 = (OB)^2 \Rightarrow$

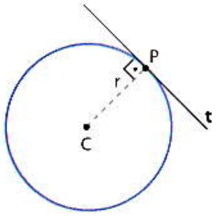
$\Rightarrow (MB)^2 + \frac{1}{25} = 25 \Rightarrow MB = \frac{4\sqrt{39}}{5}$

Assim:

$AB = 2MB = \frac{8\sqrt{39}}{5}$

**10.** O ponto **P**(5, 2) pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0$. Determine a equação da reta **t** tangente a essa circunferência em **P**.

**Resolução:**



Lembre-se de que, se uma reta **t** tangencia uma circunferência de centro **C** e raio **r** em **P**, então **t** é perpendicular à reta suporte de $\overleftrightarrow{CP}$.

Calculando as coordenadas do centro **C** e o raio **r**, temos:

$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 27 + 1 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 37$

Então, **C**(−1, 3) e $r = \sqrt{37}$.

Vamos determinar o coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta que passa pelos pontos **C**(−1, 3) e **P**(5, 2):

$$m_1 = \frac{2 - 3}{5 + 1} = -\frac{1}{6}$$

Vamos determinar o coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta **t** perpendicular à reta que passa pelos pontos **C** e **P**:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 6$$

Calculamos agora a equação da reta **t** que passa pelo ponto **P**(5, 2) e tem declividade 6:

$y - 2 = 6(x - 5) \Rightarrow y - 2 = 6x - 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - y - 28 = 0$

Logo, a equação pedida é $6x - y - 28 = 0$.

*Outra resolução:*

Obtemos o centro **C**(−1, 3) como na *primeira resolução*.

Determinamos a equação reduzida da reta CP e dela tiramos o coeficiente angular ($\mathbf{m_1}$):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 2 - 15 + y - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y = -x + 17 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{17}{6} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{6}$$

A reta **t** procurada passa por **P**(5, 2) e é perpendicular à reta CP. Logo, seu coeficiente angular é 6, pois $\left(-\frac{1}{6}\right)6 = -1$.

Então, a equação de **t** é $y - 2 = 6(x - 5)$ ou $6x - y - 28 = 0$.

**11.** A reta de equação $x - y + k = 0$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$. Calcule o valor de **k**.

**Resolução:**

Se a reta é tangente à circunferência, a distância do centro até a reta é igual ao raio.

Centro e raio da circunferência:

$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$

Então, **C**(0, 0) e r = 3.

Distância do centro (0, 0) à reta $1x - 1y + k = 0$:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

Cálculo de **k**, sabendo que d = r:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow |k| = 3\sqrt{2} \Rightarrow k = \pm 3\sqrt{2}$$

**Para refletir**

Se há dois valores para **k**, existem duas retas, $x - y + 3\sqrt{2} = 0$ e $x - y - 3\sqrt{2} = 0$, que satisfazem à condição imposta.

*Outra resolução:*

Se a reta é tangente à circunferência, então o sistema formado pelas duas equações tem uma única solução:

$$\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow x = y - k \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Substituindo **x** na segunda equação, temos:

$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow (y - k)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 2ky + k^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 - 2ky + k^2 - 9 = 0$

Para que a solução seja única devemos ter $\Delta = 0$:

$\Delta = 4k^2 - 8(k^2 - 9) = 0 \Rightarrow 4k^2 - 8k^2 + 72 = 0 \Rightarrow$

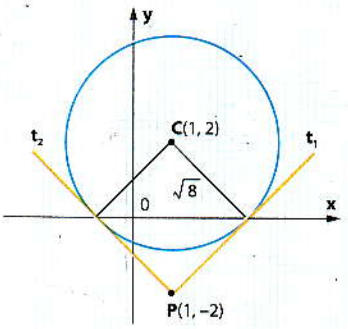
$\Rightarrow -4k^2 + 72 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{72}{4} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

**12.** O ponto **P**(1, −2) é externo à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Determine as equações das retas tangentes à circunferência e que passam por **P**.

**Resolução:**

Pela equação dada, temos **C**(1, 2) e $r = \sqrt{8}$.



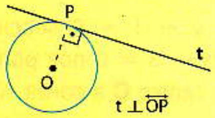
Considerando o coeficiente angular **m** das retas $t_1$ e $t_2$, podemos escrever a equação geral dessas retas, lembrando que passam por **P**(1, −2).

$y + 2 = m(x - 1) \Rightarrow y + 2 = mx - m \Rightarrow$

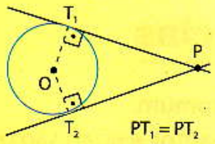
$\Rightarrow mx - y - 2 - m = 0$

**Para refletir**

- Se P pertence à circunferência, existe uma só reta que passa por P e é tangente à circunferência.



- Se P é externo, há duas tangentes.



- Se P é interno, não existe tangente.

Como a distância entre o centro **C**(1, 2) e a reta de equação mx − y − 2 − m = 0 deve ser igual ao raio **r**, temos:

$$\frac{|m(1) - 1(2) - 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|m - 2 - 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|-4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{m^2 + 1} = 8 \Rightarrow 8m^2 + 8 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8m^2 - 8 = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m' = 1 \text{ e } m'' = -1$$

Vamos calcular, agora, as equações das retas $t_1$ e $t_2$, substituindo o valor de **m** na equação geral mx − y − 2 − m = 0.

Para m′ = 1, temos:

$(1)x - y - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0$

Para m″ = −1, vem:

$(-1)x - y - 2 - (-1) = 0 \Rightarrow -x - y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y + 1 = 0$

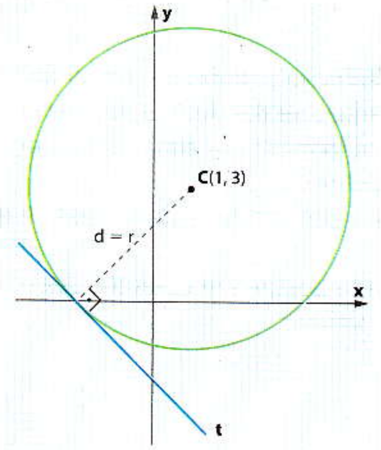
Logo, as equações das retas tangentes $t_1$ e $t_2$ são x − y − 3 = 0 e x + y + 1 = 0.

**Para refletir**

Se houver duas retas tangentes e se chegar a um único valor para **m**, significa que uma das retas é vertical.

**13.** Determine a equação da circunferência com centro no ponto **C**(1, 3) e que é tangente à reta **t** de equação x + y + 2 = 0.

**Resolução:**



Pela figura, observamos que o raio da circunferência pedida é igual à distância entre o centro **C** e a reta **t**. Então:

$$r = \frac{|1(1) + 1(3) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 3 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|6|}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

A equação da circunferência pedida, sabendo que $a = 1$, $b = 3$ e $r = 3\sqrt{2}$, é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$

## Exercícios propostos

**14.** Dadas uma reta **r** e uma circunferência λ, verifique a posição relativa de **r** e λ. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos:

a) **r**: $2x - y + 1 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$

b) **r**: $y = x$ e λ: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

c) **r**: $x = t - 4$ e $y = 2 - t$ e
λ: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$

**15.** Determine as coordenadas dos pontos em que a reta **r**, de equação $y = -x + 5$, intersecta a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$.

**16.** A reta **r**, de equação $x + y - 3 = 0$, e a circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ são secantes nos pontos **A** e **B**. Determine a área do triângulo cujos vértices são o centro da circunferência e os pontos **A** e **B**.

**17.** Consideremos a reta **r**, de equação $x + y - 3 = 0$, e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Qual é a posição da reta **r** em relação à circunferência?

**18.** Sabendo que a reta $y = mx$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$, calcule os valores de **m**.

**19.** O ponto **A**(2, 3) pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Determine a equação da reta tangente à circunferência no ponto **A**.

**20.** Pelo ponto **P**(0, 3), exterior à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, passam as retas $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$, que são tangentes à circunferência dada. Determine as equações das retas $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$.

**21.** A circunferência com centro **C**(1, 1) é tangente à reta **t** de equação $x + y - 10 = 0$. Determine a equação da circunferência.

**22.** Qual é a equação da circunferência de centro no ponto **C**(4, −4) e que é tangente aos dois eixos de coordenadas?

**23.** Determine a equação de uma circunferência tangente ao eixo **y** e à reta de equação $x = 4$, e que tem o centro no eixo **x**.

**24.** A reta $x + y - 1 = 0$ secciona a circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ nos pontos **A** e **B**. Calcule a distância do centro **C** à corda AB.

## 6 Posições relativas de duas circunferências

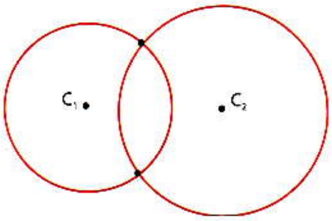
Duas circunferências distintas podem ter dois, um ou nenhum ponto comum.

A partir das equações das duas circunferências podemos descobrir quantos e quais são os pontos comuns resolvendo o sistema formado por elas. Além disso, podemos identificar a posição relativa usando os dois raios e a distância entre os centros.

Considere uma circunferência de centro $\mathbf{C_1}$ e raio $\mathbf{r_1}$ e outra de centro $\mathbf{C_2}$ e raio $\mathbf{r_2}$. A distância entre os centros será $d(C_1, C_2)$.

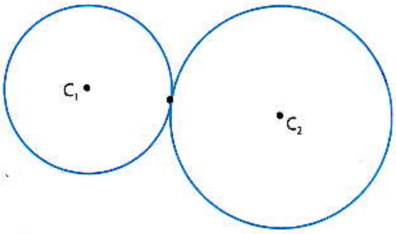
Veja as possíveis posições relativas das duas circunferências:

1ª) Dois pontos comuns:



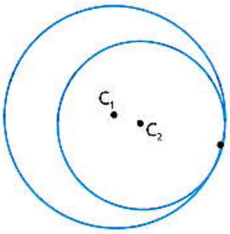
secantes
$|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

2ª) Um ponto comum:



tangentes exteriormente
$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

ou

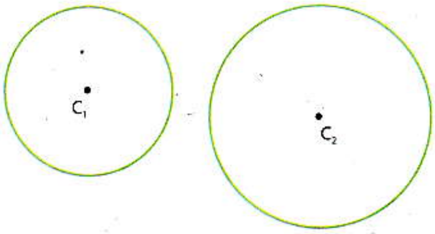


tangentes interiormente
$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$

**Para refletir**

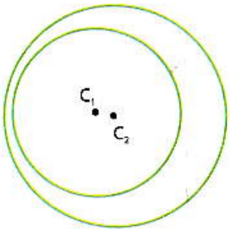
Nesses dois casos, os dois centros e o ponto de tangência são colineares.

3ª) Nenhum ponto comum:



circunferências externas
$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$

ou



uma circunferência interna à outra
$d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$

**Para refletir**

No caso particular de as duas circunferências serem concêntricas, então $C_1 \equiv C_2$, $d(C_1, C_2) = 0$.

## Exercícios resolvidos

**14.** Verifique a posição relativa das duas circunferências dadas. Se forem secantes ou tangentes, determine os pontos comuns:

a) $x^2 + y^2 = 30$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0$ e

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0$

c) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$

d) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ e
$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

**Resolução:**

a) Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, temos:

$$x^2 + y^2 = 30$$
$$(x - 3)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 30 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$$

Substituindo **x** na primeira equação, vem:

$$x^2 + y^2 = 30 \Rightarrow 25 + y^2 = 30 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$$

Logo, as duas circunferências são secantes e seus pontos comuns são $(5, \sqrt{5})$ e $(5, -\sqrt{5})$.

b) Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0 \quad \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 20x - \cancel{2y} + 100 = 0 \\ -\cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2x + \cancel{2y} + 98 = 0 \end{cases}$$
$$-18x + 198 = 0 \Rightarrow 18x = 198 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{198}{18} \Rightarrow x = 11$$

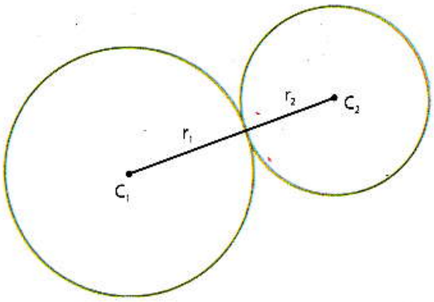
Substituindo **x** na primeira equação, vem:

$$x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11^2 + y^2 - 20 \cdot 11 - 2y + 100 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - 2y + 121 - 220 + 100 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$
$$\Delta = 0$$

$$y = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

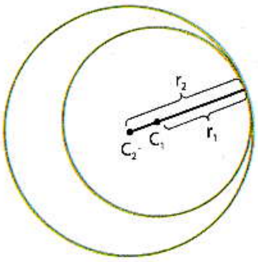
(11, 1) é o único ponto comum às duas circunferências, portanto elas são tangentes.

Como já vimos, as circunferências tangentes podem ser externas ou internas. Podemos determinar a sua posição relativa por meio da distância entre os centros das circunferências e por meio de seus raios (lembrando que os centros das circunferências e o ponto de tangência estão sempre alinhados).



circunferências tangentes externamente
$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

ou



circunferências tangentes internamente
$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$

Considerando a primeira equação, temos:

$$x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= -100 + 100 + 1 \Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$$

Então, $\mathbf{C_1}(10, 1)$ e $r_1 = 1$.

Agora, pela segunda, vem:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 98 + 1 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1) = 100 = 10^2$$

Então, $\mathbf{C_2}(1, 1)$ e $r_2 = 10$.

Calculamos, então, a distância entre os centros $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$:

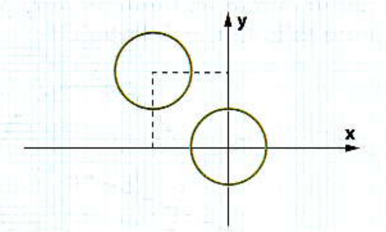
$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(10 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Como os raios medem $r_1 = 1$ e $r_2 = 10$ e $9 = |1 - 10|$, temos $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$.

Logo, as circunferências são tangentes internamente e o ponto comum é (11, 1).

c) Na circunferência $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$, temos $\mathbf{C}(-2, 2)$ e $r = 1$.

Na circunferência $x^2 + y^2 = 1$, temos **C**(0, 0) e r = 1. Esboçando o gráfico, podemos ver que as circunferências não têm ponto comum e são externas:



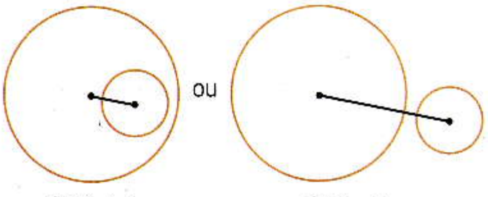
Agora, vamos resolver analiticamente.
Pelo sistema, temos:

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{\cancel{1}} + 4x - 4y + 4 + 4 - \cancel{1} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x - 4y = -8 \Rightarrow x - y = -2 \Rightarrow x = y - 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Substituindo **x** na segunda equação:

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (y - 2)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 4y + 3 = 0$
$\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$

Se $\Delta < 0$, não existe solução para o sistema, então as circunferências não têm ponto comum. Vejamos qual das duas situações se verifica:



$d < r_1 + r_2$ $d > r_1 + r_2$

Calculando a distância entre os centros $\mathbf{C_1}(-2, 2)$ e $\mathbf{C_2}(0, 0)$, vem:

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8}$

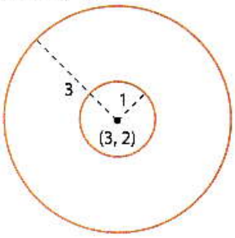
Como os raios medem $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$ e $\sqrt{8} > 1 + 1$, temos $d > r_1 + r_2$.

Logo, as circunferências são externas.

d) A circunferência $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ tem **C**(3, 2) e r = 3.

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -12 + 9 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Então, a circunferência $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ tem **C**(3, 2) e r = 1.



**Para refletir**

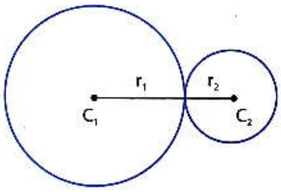
Resolva este item usando sistema.

Como as duas circunferências têm o mesmo centro (concêntricas) e raios diferentes, podemos afirmar que elas não têm ponto comum e uma é interna à outra.

**15.** Determine a equação da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.

**Resolução:**

Nesse caso, a distância entre os centros é igual à soma dos raios:



$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

Inicialmente, calculamos o centro ($\mathbf{C_1}$) e o raio ($\mathbf{r_1}$) da circunferência dada:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 16 + 4 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$

Então, $\mathbf{C_1}(2, -4)$ e $r_1 = 6$.

Agora, calculamos a distância entre os centros $\mathbf{C_1}(2, -4)$ e $\mathbf{C_2}(8, 4)$:

$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

Como $d = r_1 + r_2$, podemos calcular o raio $\mathbf{r_2}$:

$d = r_1 + r_2 \Rightarrow 10 = 6 + r_2 \Rightarrow r_2 = 4$

A equação procurada é a da circunferência de raio 4 e centro (8, 4):

$(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$ ou
$x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$

## Exercícios propostos

**25.** Dadas as circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$, descubra suas posições relativas e seus pontos comuns (se houver):

a) $\lambda_1$: $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$
$\lambda_2$: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$

b) $\lambda_1$: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
$\lambda_2$: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

**26.** A equação da circunferência de raio 4 e concêntrica com a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$ é:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.
b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$.
d) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 4 = 0$.

**27.** Sejam $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ duas circunferências tangentes externamente, tais que $\mathbf{S_1}$ tem como equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ e $\mathbf{S_2}$ tem centro no ponto **C**(5, −1). Calcule o raio da circunferência $\mathbf{S_2}$.

**28.** $\lambda_1$ e $\lambda>_2$ são duas circunferências concêntricas, com $\lambda_1$ interna à $\lambda_2$. Sabendo que a equação de $\lambda_1$ é $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ e que a área do anel circular formado por $\lambda_1$ e $\lambda_2$ é igual a $24\pi$, determine a equação de $\lambda_2$ na forma geral.

## 7 Aplicações

### Exercício resolvido

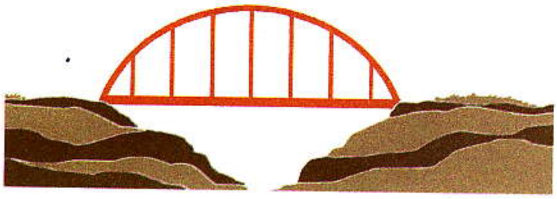
**16.** Um engenheiro precisa construir uma ponte em forma de arco de circunferência, semelhante a que aparece na foto abaixo. O vão livre sobre o rio a ser vencido pela ponte é de 24 m, e a pilastra central, segundo o arquiteto, deverá ter 4 m de altura. O engenheiro, usando seus conhecimentos de Geometria plana, já calculou que o raio do arco de circunferência projetado pelo arquiteto é de 20 m. Agora ele precisa calcular o tamanho das outras quatro pilastras menores (duas à esquerda e duas à direita da pilastra central). Segundo o projeto, todas as pilastras estão a 4 m uma da outra.

*Realidade*


ALAMY/OTHER IMAGES

Ponte em Hamburgo, Alemanha.

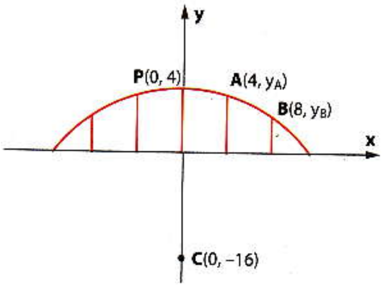
*Modelo matemático*



Com base nas informações do problema, escolha um sistema de eixos coordenados conveniente e obtenha a altura dessas quatro pilastras menores.

**Resolução:**

Escolhendo um sistema de eixos cartesianos que coloque a pilastra central no eixo **y** e o vão da ponte no eixo **x**, temos que o centro da circunferência será **C**(0, −16) pois o raio tem 20 m e a pilastra maior tem 4 m. Para obter o tamanho das pilastras pedidas, precisamos apenas das ordenadas dos pontos **A** e **B**, cujas abscissas são respectivamente 4 e 8. Neste exercício, a escolha do sistema de eixos cartesianos adequado é muito importante para facilitar a resolução.



A equação da circunferência é, então, $x^2 + (y + 16)^2 = 400$. Para obtermos a ordenada $\mathbf{y_A}$ do ponto **A**, basta substituir a abscissa $x_A = 4$ na equação da circunferência:

$$4^2 + (y_A + 16)^2 = 400 \Rightarrow (y_A + 16)^2 = 384 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A + 16 = \sqrt{384} \simeq 19{,}60 \Rightarrow y_A \simeq 3{,}60 \text{ m}$$

Da mesma forma, para obtermos a ordenada $\mathbf{y_B}$ do ponto **B**, basta substituir a abscissa $x_B = 8$ na equação da circunferência:

$$8^2 + (y_B + 16)^2 = 400 \Rightarrow (y_B + 16)^2 = 336 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B + 16 = \sqrt{336} \simeq 18{,}33 \Rightarrow y_B \simeq 2{,}33 \text{ m}$$

Por causa da simetria da ponte, as duas pilastras do lado esquerdo terão o mesmo tamanho de suas correspondentes no lado direito. Assim, as pilastras são tais que duas têm, aproximadamente, 2,33 m e duas têm 3,60 m, e a central, como já sabíamos, tem 4 m.

### Exercícios propostos

Escolha um sistema de eixos coordenados adequado e resolva, usando Geometria analítica, os seguintes problemas de Geometria plana:

**29.** Obtenha o raio da circunferência inscrita num triângulo retângulo cujos catetos meçam 3 cm e 4 cm.

(Dica: Coloque o vértice do ângulo reto do triângulo retângulo na origem.)

**30.** Uma circunferência **L** está inscrita em um triângulo eqüilátero de lado $2\sqrt{3}$. Mostre que, para todo ponto de **L**, a soma dos quadrados de suas distâncias aos três vértices do triângulo é constante.

**32.** (UFG-GO) Considere duas circunferências no plano cartesiano descritas pelas equações $x^2 + y^2 = 10$ e $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$. Determine o ponto **P**$(x_0, y_0)$ para que as duas circunferências sejam tangentes externas no ponto **A**(3, 1).

**33.** (UFPR) No sistema cartesiano ortogonal Oxy, considere a circunferência $\gamma$ de centro **C**(4, 3) e raio $r = 5$.

a) Encontre a equação cartesiana da circunferência $\gamma$.

b) Encontre as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência $\gamma$ com o eixo Oy.

c) Seja **P** o ponto de intersecção da circunferência $\gamma$ com o eixo Oy, de ordenada positiva. Encontre a equação da reta que tangencia a circunferência nesse ponto **P**.

**34.** (UFMG) Sejam $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ circunferências de, respectivamente, centros $\mathbf{O_1}$ e $\mathbf{O_2}$ e raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$. A equação de $\mathbf{C_1}$ é $x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0$ e a equação de $\mathbf{C_2}$ é $x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0$. Sejam **A** e **B** os pontos de intersecção de $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$. Considerando essas informações:

a) determine as coordenadas de $\mathbf{O_1}$ e $\mathbf{O_2}$ e os raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$;

b) determine as coordenadas de **A** e **B**;

c) calcule a área do quadrilátero $AO_1BO_2$.

**35.** (Unicamp-SP) As equações $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ representam duas circunferências cujos centros estão sobre o eixo das abscissas.

a) Encontre, se existirem, os pontos de intersecção daquelas circunferências.

b) Encontre o valor de $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, de modo que duas retas que passam pelo ponto $(a, 0)$ sejam tangentes às duas circunferências.

**36.** (UFC-CE) Determine o valor da constante **a** de modo que o sistema de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ 3x + 4y + z = a \end{cases}$ tenha solução real única.

**37.** (Unifesp) Em um plano cartesiano, seja **T** o triângulo que delimita a região definida pela inequações
$y \leqslant 2$, $x \geqslant 0$ e $x - y \leqslant 2$.

a) Obtenha as equações de todas as retas que são eqüidistantes dos três vértices do triângulo **T**.

b) Obtenha a equação da circunferência circunscrita ao triângulo **T**, destacando o centro e o raio.

**38.** (UEL-PR) Considere a reta **r** de equação $y - 2x - 2 = 0$. Com relação à representação geométrica da reta **r** no plano cartesiano, pode-se afirmar:

I) A área do triângulo formado pela reta **r** e pelos eixos coordenados tem o valor de 1 unidade quadrada.

II) A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$ contém todo o triângulo formado pela reta **r** e pelos eixos coordenados.

III) A circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ tangencia a reta **r**.

IV) A reta **r** é perpendicular à reta $2y + x + 10 = 0$.

A alternativa que contém todas as afirmativas corretas é:

a) I e II.
b) I e III.
c) I e IV.
d) II e III.
e) II, III e IV.

**39.** (UFC-CE) Seja $\gamma$ uma circunferência de raio 2 cm, AB um diâmetro de $\gamma$ e **r** e **s** retas tangentes a $\gamma$, respectivamente por **A** e **B**. Os pontos **P** e **Q** estão respectivamente situados sobre **r** e **s** e são tais que PQ também tangencia $\gamma$. Se AP = 1 cm, pode-se afirmar corretamente que BQ mede:

a) 3 cm.
b) 4 cm.
c) 4,5 cm.
d) 8 cm.
e) 8,5 cm.

**40.** (UFPR) No plano cartesiano, considere os pontos **A** (0, 1), **B**(2, 3), **C**(3, 5) e a reta **r** definida pela equação $3x + 4y = 12$. Sabendo que a reta **r** divide o plano cartesiano em duas regiões, chamadas semiplanos, considere as afirmativas a seguir:

1) Os pontos **A** e **B** estão no mesmo semiplano determinado pela reta **r**.

2) A reta determinada por **A** e **C** é perpendicular à reta **r**.

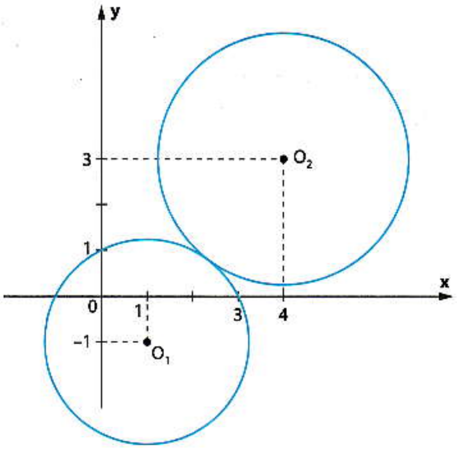
3) A circunferência que passa pelos pontos **A**, **B** e **C** intersecta a reta **r** em dois pontos distintos.

4) Os pontos do semiplano que contém o ponto **C** satisfazem a desigualdade $3x + 4y \leqslant 12$.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.

**20.** (Uece) A equação de uma das circunferências tangentes do gráfico abaixo é $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$.



A equação da outra circunferência é:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 10\sqrt{5} = 5$.

b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 10\sqrt{5} = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 50 = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + \sqrt{5} = 50$.

**21.** (UFC-CE) $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ são circunferências concêntricas. O raio de $\mathbf{C_2}$ mede 5 e a equação de $\mathbf{C_1}$ é $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$. A equação de $\mathbf{C_2}$ é:

a) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 6y + 16 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 6y = 0$.

d) $x^2 + y^2 + 6y = 0$.

**22.** (Fuvest-SP) Um quadrado está inscrito numa circunferência de centro (1, 2). Um dos vértices do quadrado é o ponto (−3, −1). Determine os outros três vértices do quadrado.

**23.** (ITA-SP) Uma circunferência passa pelos pontos **A**(0, 2), **B**(0, 8) e **C**(8, 8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são:

a) (0, 5) e 6.

b) (5, 4) e 5.

c) (4, 8) e 5,5.

d) (4, 5) e 5.

e) (4, 6) e 5.

**24.** (FGV-SP) No plano cartesiano, a circunferência que passa pelo ponto **P**(1, 3) e é concêntrica com a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ tem a seguinte equação:

a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 40 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$.

d) $x^2 + y^2 + 3x + 4y - 25 = 0$.

e) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 19 = 0$.

**25.** (Uniube-MG) Considere a circunferência descrita pela equação $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Pode-se afirmar que o comprimento da corda que a reta de equação $6x - 8y = 0$ determina nessa circunferência é igual a:

a) 1 unidade de comprimento.

b) 0,8 unidade de comprimento.

c) 1,2 unidade de comprimento.

d) 2 unidades de comprimento.

**26.** (Unifor-CE) Considere os pontos médios de todas as cordas de comprimento 12 da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 10x - 16y - 11 = 0$. A reunião desses pontos determina a circunferência de equação:

a) $x^2 + y^2 + 10x + 16y + 25 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 25 = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 10x - 16y + 25 = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 25 = 0$.

e) $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$.

**27.** (FGV-SP) As coordenadas do ponto da circunferência $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$ que fica mais afastado da origem **O**(0, 0) são:

a) (8, 6).

b) (4, 3).

c) (0, 25).

d) (13, 12).

e) (12, 9).

**28.** (Ufal) Dadas a circunferência $\lambda$: $x^2 + y^2 = 125$ e a reta **r**: $x - 2y + 3$, determine as equações das retas paralelas a **r** e que são tangentes a $\lambda$.

**29.** (UFPB) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):

01) O ponto **P**(−1, 1) é interior à circunferência.

02) O ponto **P**(−2, 2) é exterior à circunferência.

04) O ponto **P**$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ está sobre a circunferência.

08) A reta de equação $y = x$ intercepta a circunferência em dois pontos.

16) A reta de equação $y = -x + 2$ intercepta a circunferência em um único ponto.

Escreva a soma dos valores atribuídos à(s) proposição(ões) verdadeira(s).

**30.** (Vunesp) Considere a circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e o ponto **P**(0, −3).

a) Encontre uma equação da reta que passe por **P** e tangencie a circunferência num ponto **Q** de abscissa positiva.

b) Determine as coordenadas do ponto **Q**.

**31.** (UFSC) Considere a circunferência
**C**: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$ e a reta **r**: $4x + 3y - 10 = 0$.
Encontre a soma dos números associados à(s) proposição(ões) correta(s).

01) $r \cap C = \varnothing$.

02) O centro de **C** é o ponto (3, 4).

04) A circunferência **C** intercepta o eixo das abscissas em 2 (dois) pontos e o das ordenadas em 1 (um) ponto.

08) A distância da reta **r** ao centro de **C** é menor do que 4.

16) A função **y** dada pela equação da reta **r** é decrescente.

## Questões de vestibular

**1.** (PUC-SP) O ponto **P**(3, b) pertence à circunferência de centro no ponto **C**(0, 3) e raio 5. Calcule o valor da coordenada **b**.

**2.** (FEI-SP) Determine uma equação da circunferência com centro no ponto **C**(2, 1) e que passa pelo ponto **A**(1, 1).

**3.** (FEI-SP) Qual é o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1$?

**4.** (FGV-SP) Determine uma equação da reta que passa pelo centro da circunferência de equação
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ e é paralela à reta **r**, de equação $2x + 3y = 0$.

**5.** (Vunesp) Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que contêm as diagonais desse quadrado.

**6.** (UFBA) Determine o comprimento da corda determinada pela intersecção da reta **r**, de equação
$x + y - 1 = 0$, com a circunferência de equação
$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$.

**7.** (Vunesp) Seja $\overline{AB}$ o diâmetro da circunferência
$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ contido na reta perpendicular a $y = x + 7$. Calcule as coordenadas de **A** e **B**.

**8.** (UFRGS) A reta **r** de equação $x = 3$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0$. Nessas condições, calcule o valor de **k**.

**9.** (Faap-SP) Unindo os pontos de intersecção da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$ com os eixos de coordenadas, obteremos um quadrilátero. Calcule a área desse quadrilátero.

**10.** (Fuvest-SP) A reta **r**, de equação $x - y = 2$, intersecta a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ nos pontos **A** e **B**. Nessas condições, determine a equação da mediatriz da corda AB e mostre que a mediatriz contém o centro **C** da circunferência.

**11.** (UFU-MG) A circunferência de equação
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$ possui duas retas tangentes, $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$, que são paralelas à reta **s** de equação $3x + 4y - 1 = 0$. Determine as equações das retas $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$.

**12.** (EEM-SP) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, determine as equações das retas que lhe são tangentes e que passam pelo ponto **P**(2, 0), exterior à circunferência.

**13.** (FEI-SP) Determine a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ e que passa pelo ponto **A**(1, 1).

**14.** (PUC-SP) Dados os pontos **A**(−1, 2), **B**(0, 3) e **C**(m, −1):
a) determine o número real **m**, não-nulo, de modo que a circunferência de centro **C** e raio $2\sqrt{2}$ seja tangente à reta determinada pelos pontos **A** e **B**;
b) qual é a equação da mediatriz do segmento AB?

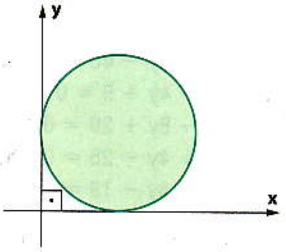
**15.** (Fuvest-SP) a) As extremidades do diâmetro de uma circunferência são (−3, 1) e (5, −5). Determine a equação da circunferência.
b) Determine a equação da circunferência que passa pelo ponto $(9, \sqrt{3})$ e que é tangente às retas $y = 0$ e $y = \sqrt{3}x$.

**16.** (Unicamp-SP) Em um sistema de coordenadas ortogonais no plano são dados o ponto (5, −6) e a circunferência $x^2 + y^2 = 25$. A partir do ponto (5, −6), traçam-se duas tangentes a ela. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o comprimento da corda que une os pontos de tangência.

**17.** (Fuvest-SP) Sejam **A**(0, 0), **B**(0, 5) e **C**(4, 3) pontos do plano cartesiano.
a) Determine o coeficiente angular da reta BC.
b) Determine a equação da mediatriz do segmento BC. O ponto **A** pertence a essa mediatriz?
c) Considere a circunferência que passa por **A**, **B** e **C**. Determine a equação da reta tangente a essa circunferência no ponto **A**.

**18.** (UFSC) Determine o raio da circunferência $\mathbf{C_1}$, cujo centro é o ponto de intersecção da reta **r** de equação $x - y - 1 = 0$ com a reta **s** de equação $2x - y + 1 = 0$, sabendo que $\mathbf{C_1}$ é tangente exteriormente à circunferência $\mathbf{C_2}$ de equação $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$.

**19.** (UFRGS) Um círculo tangencia dois eixos perpendiculares entre si, como indicado na figura a seguir.



Um ponto **P** do círculo dista 9 de um dos eixos e 2 do outro. Nessas condições, a soma dos possíveis valores para o raio do círculo é:
a) 19. b) 20. c) 21. d) 22. e) 23.

## Atividades adicionais

**1.** Dê as coordenadas do centro e o raio das circunferências representadas pelas equações:

a) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 5$
b) $x^2 + (y - 4)^2 = 1$

**2.** As seguintes equações representam circunferências; determine as coordenadas do centro e o raio em cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4y = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

**3.** Verifique quais das equações abaixo representam circunferência:

a) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = -5$
b) $x^2 + x + y^2 - y = 6$
c) $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 0$

**4.** Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, dê as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

**5.** Determine uma equação da circunferência que passa pelos pontos **A**(5, 0), **B**(4, 3) e **C**(−4, −3). (*Sugestão*: Chame o centro de **O**(a, b) e use o fato de que d(A, O) = d(B, O) = d(C, O) = r.)

**Para refletir**

Dados três pontos, qual a condição para que exista uma circunferência que passe pelos três?

**6.** Quais os valores de **m**, **n** e **p** para que a equação $3x^2 + my^2 - nxy + 6x + 8y + p = 0$ represente uma circunferência?

**7.** O maior valor inteiro de **k**, para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ represente uma circunferência, é:

a) 13.
b) 12.
c) 11.
d) 10.

**8.** Dadas as circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$, descubra suas posições relativas e seus pontos comuns (se houver):

a) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
$\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0$
b) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 16$
$\lambda_2: x^2 + y^2 + 4y = 0$

**9.** Determinando-se o centro e o raio das circunferências $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, pode-se garantir que:

a) elas não têm ponto em comum.
b) elas são secantes.
c) elas são tangentes exteriormente.
d) elas são tangentes interiormente.

**10.** As circunferências de equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ são:

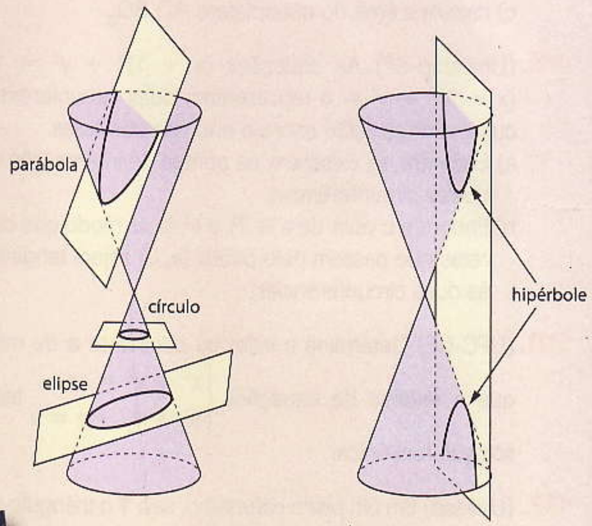
a) secantes.
b) tangentes internas.
c) tangentes externas.
d) exteriores, sem ponto comum.
e) interiores, sem ponto comum.

**11.** Sabendo que o ponto **M**(1, −3) não pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, determine se o ponto **M** é interno ou externo à circunferência.

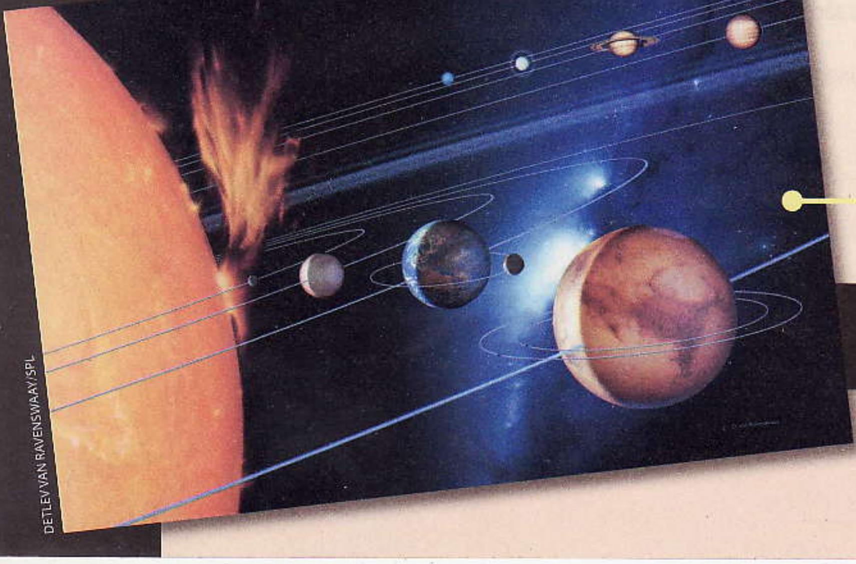
# 3 Capítulo

# Geometria analítica: secções cônicas

*O período de cerca de 300 a 200 a.C. foi denominado "Idade Áurea" da Matemática grega por se destacarem nessa época três grandes nomes: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Embora os dois primeiros tenham sido mais comentados, Apolônio, mais novo que eles, teve grande destaque, principalmente no desenvolvimento dos conceitos das secções cônicas, acrescentando aos estudos já existentes o fato de essas curvas poderem ser obtidas a partir de um único sólido, o cone duplo (os estudos anteriores consideravam-nas secções obtidas em tipos bem diferentes de cone), reto ou oblíquo. As secções planas eram cortes do cone segundo um plano, e o tipo de curva dependia da inclinação desse plano, como mostram a figuras abaixo.*



(Extraído de http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html. Acesso em 12/5/2007)


DETLEV VAN RAVENSWAAY/SPL

Sistema solar. (Os elementos da foto não estão representados numa mesma escala.)

*Das obras de Apolônio que não se perderam, a mais importante não* As Cônicas, *que aperfeiçoou e superou os estudos anteriores sobre o assunto e introduziu as denominações elipse, parábola e hipérbole.*

*Especialmente a Astronomia encontrou, nas secções cônicas, grande aplicação. Copérnico, Kepler, Halley e Newton, por exemplo, fizeram uso de suas configurações para explicar fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas ou a trajetória descrita por um projétil.*

*Ao serem inseridas na Geometria analítica, definidas como lugares geométricos (conjuntos de pontos que verificam uma certa propriedade), as secções cônicas ganharam uma expressão algébrica, ampliando ainda mais sua importância e sua aplicabilidade.*

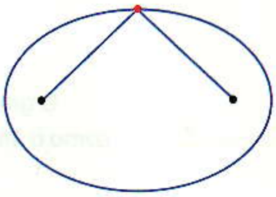
*Neste capítulo vamos partir das definições desses lugares geométricos para as equações algébricas que as representam, estudar suas propriedades e identificar seus elementos. Faremos uma introdução ao assunto considerando apenas as cônicas que apresentam eixos paralelos aos eixos coordenados, sendo sua complementação estudada mais tarde, em cursos superiores.*

## Atividades

**1.** A elipse pode ser encontrada a partir de uma experiência até divertida. Muitas vezes ela é trabalhada no ensino fundamental:

- Fixam-se dois pregos numa tábua de madeira a uma distância qualquer (porém maior do que zero!) um do outro.
- Um barbante, de comprimento maior do que a distância escolhida para os pregos, é amarrado por suas extremidades nesses dois pregos.
- Com um lápis, esticamos o barbante ao máximo e, fincando sua ponta na madeira descrevemos uma linha, dando uma volta inteira.
- Assim ficará delineada a elipse na madeira.

Observe a figura a seguir e identifique nela os elementos utilizados para a construção da elipse sugerida acima, isto é, que elementos corresponderiam aos pregos, à linha e ao barbante.



Esta figura foi extraída do *site* http://pt.wikipedia.org/wiki/Elipse. Acessando-o, você poderá vê-la em movimento.

a) Denomine **A** e **B** os pontos que correspondem aos pregos. Unindo-os e prolongando esse segmento até encontrar o contorno da elipse determinamos dois pontos. Chame-os de **R** e **P**. Represente com **M** o ponto da elipse, indicado em vermelho na figura. Supondo que o barbante meça 10 cm e a distância entre os pregos seja de 8 cm, calcule as medidas de AP, BP e RP, e a soma AM + MB.

b) O que acontecerá com a elipse se aproximarmos mais e mais os pregos um do outro?

**2.** Foi Kepler quem deduziu que as órbitas dos planetas eram elípticas e não circulares, como acreditavam os astrônomos anteriores, influenciados por Copérnico. Diz-se também que essa descoberta deu "pistas" para a teoria da gravitação de Newton. Observando a órbita elíptica a seguir, encontre nela os elementos da elipsse que você construiu.

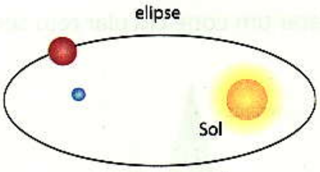
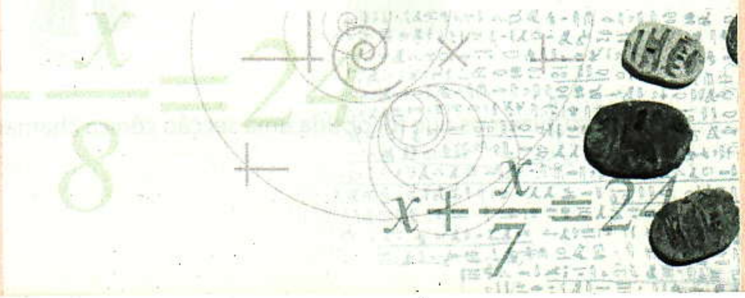
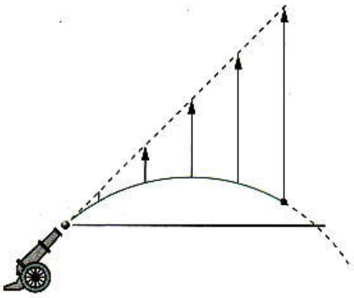


*Figura extraída de http://www.geocities.com/Paris/Lights/5862/mecanicaf.html. Acesso em 16/5/2007.*



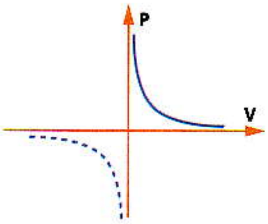
## 1 Introdução

Considere as seguintes situações:



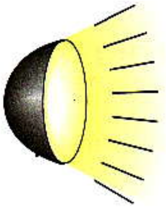
A trajetória de um projétil, em queda livre, é um arco de *parábola*.

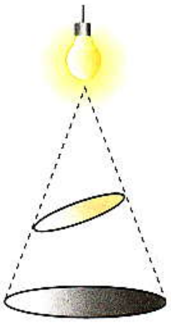
Os planetas giram em torno do Sol numa trajetória cuja forma é uma *elipse*.

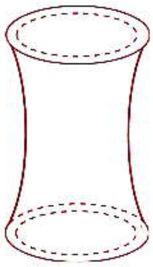


O gráfico que relaciona pressão e volume de um gás a temperatura constante, como o da figura, é uma *hipérbole*.

Veja mais algumas situações em que aparecem a parábola, a elipse e a hipérbole:



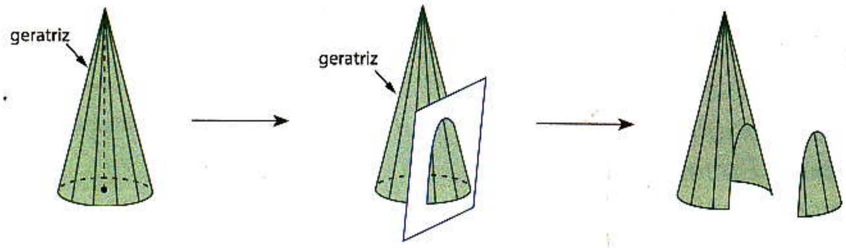




## 2 Parábola

### Origem

Vamos considerar um cone circular reto seccionado por um plano paralelo à geratriz, como mostram os desenhos seguintes:

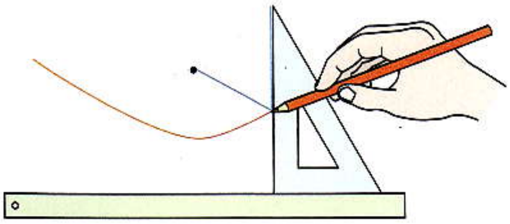


Nesse caso, dizemos que foi obtida uma secção cônica chamada *parábola*.

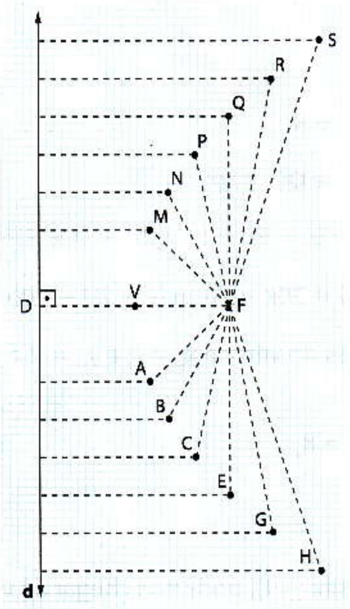
## Definição e elementos

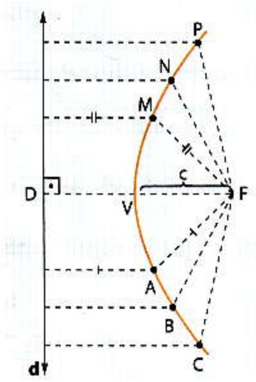
Inicialmente consideremos, no plano do papel, uma reta **d** e um ponto **F** que não pertence a ela.

Vamos marcar, agora, uma série de pontos que estão a uma mesma distância do ponto fixado **F** e da reta **d**. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de uma régua, um esquadro, lápis, alfinete e barbante.



Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:





A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de **F** e **d**.

Na figura devemos destacar:

- o ponto **F**, foco da parábola;
- a reta **d**, diretriz da parábola;
- o ponto **V**, vértice da parábola (ponto médio de $\overline{FD}$, distância de **F** até **d**);
- a reta que passa por **F**, perpendicular à diretriz **d**, que se chama eixo de simetria da parábola;
- a medida de $\overline{FD}$, parâmetro (**p**) da parábola.

**Para refletir**

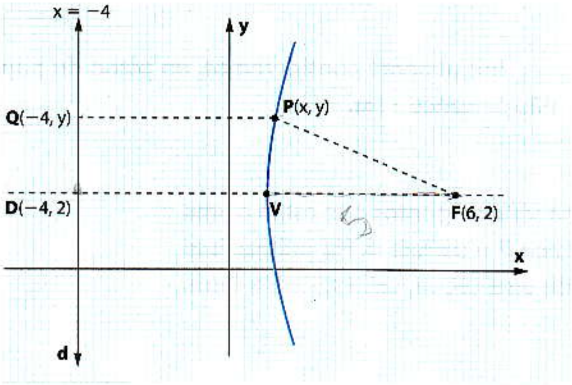
- $VF = \frac{FD}{2} = \frac{p}{2} = c$
- Todo ponto da parábola tem essa propriedade e todo ponto do plano que possui essa propriedade pertence à parábola.

Assim, definimos que parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa **d**, chamada *diretriz*, e de um ponto fixo **F**, não pertencente à diretriz, chamado *foco*.

## Equação da parábola

A partir do foco (**F**) e da diretriz (**d**), podemos chegar à equação da parábola formada por todos os pontos **P**(x, y) do plano tal que d(P, F) = d(P, d).

Vamos determinar a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação $x = -4$ e como foco o ponto **F**(6, 2):



Nesse caso, o vértice é o ponto médio do segmento FD, no qual **F**(6, 2) e **D**(−4, 2):

$$\mathbf{V}\left(\frac{6-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{V}(1, 2)$$

Pela distância de **V** até **F** encontramos o valor de **c**:

$$c = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = 5$$

Os pontos **P**(x, y) da parábola são tal que d(P, F) = d(P, Q), em que **Q**(−4, y):

$$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = (x+4)^2 - (x-6)^2 = \cancel{x^2} + 8x + 16 - \cancel{x^2} + 12x - 36 = 20x - 20 \Rightarrow (y-2)^2 = 20(x-1)$$

Observemos que na equação obtida aparecem as coordenadas do vértice $x_V = 1$ e $y_V = 2$ e também o valor $c = 5$:

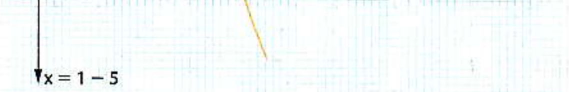
$$(y - \underset{\substack{\downarrow \\ y_V}}{2})^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ 4 \cdot 5 \\ \downarrow \\ c}}{20}\,(x - \underset{\substack{\downarrow \\ x_V}}{1})$$

Reciprocamente, a partir da equação da parábola, $(y-2)^2 = 20(x-1)$, podemos chegar ao vértice e ao valor de **c** (distância de **V** a **F** ou de **V** à diretriz **d**) e, daí, ao foco e à diretriz:

$$(y-2)^2 = 20(x-1) = 4 \cdot 5(x-1)$$

em que **V**(1, 2) e $c = 5$.

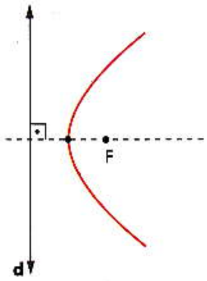
Esboçando o gráfico, vem:



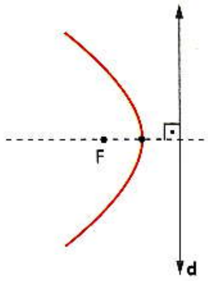
Logo, **F**(6, 2) e diretriz $x = -4$.

Generalizando, podemos dizer que a partir do foco e da diretriz é possível determinar o vértice **V**$(x_V, y_V)$ e o valor de **c** e, daí, a equação da parábola e a posição correspondente. Veja os casos possíveis:

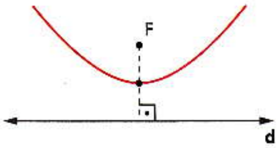
$(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V)$



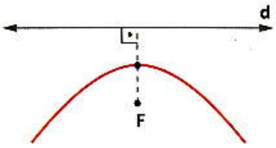
$(y - y_V)^2 = -4c(x - x_V)$



$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V)$



$(x - x_V)^2 = -4c(y - y_V)$



**Para refletir**

Quando estudamos a parábola como gráfico de uma função quadrática, não havia possibilidade de o eixo de simetria ser horizontal. Por quê?

Devemos lembrar que vale a recíproca: a partir da equação da parábola podemos chegar ao vértice e ao valor de **c** e, daí, ao foco e à diretriz.

**Observação**: No volume 1 desta coleção, estudamos as funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$, cujos gráficos foram chamados de parábolas. Na verdade aquelas parábolas e as estudadas neste capítulo são as mesmas, pois quando usamos a técnica de completar quadrados podemos transformar qualquer equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, vista no volume 1, em uma do tipo $(x - x_V)^2 = \pm 4c(y - y_V)$, como temos trabalhado neste volume.

**Para refletir**

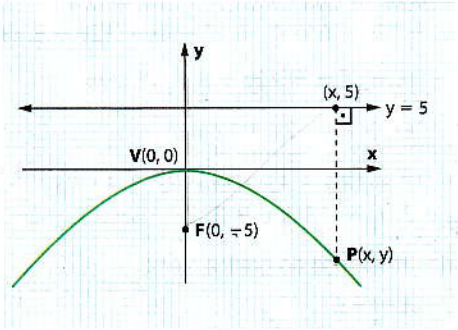
Cuidado, o c de $y = ax^2 + bx + c$ não é o mesmo c de $y - y_V = \pm 4c(x - x_V)^2$.

## Exercícios resolvidos

**1.** Determine a equação da parábola de foco **F**(0, −5) e diretriz y = 5.

**Resolução:**

*1ª maneira:*



Usando a propriedade de todo ponto **P**(x, y) da parábola, temos:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 5)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 5)^2}$$

A distância de **P** à reta y = 5 é igual à distância de **P** até (x, 5), que é igual a $\sqrt{(x - x)^2 + (y - 5)^2}$.

Como as distâncias são iguais, temos:

$x^2 + (y + 5)^2 = 0^2 + (y - 5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} + 10y + \cancel{25} = \cancel{y^2} - 10y + \cancel{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = -20y$

*2ª maneira:*

**F**(0, −5) está no eixo **y**, y = 5 é paralela ao eixo **x** e **V**(0, 0). A distância de **F** a **V** é:

$c = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

Usando diretamente a fórmula, temos:

$(x - x_V)^2 = -4c(y - y_V) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 0)^2 = -4 \cdot 5(y - 0) \Rightarrow x^2 = -20y$

Logo, a equação é $x^2 = -20y$.

**2.** Determine o foco e a diretriz da parábola de equação $y^2 = 5x$.

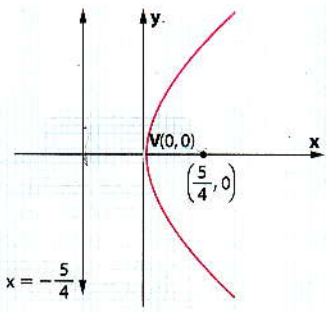
**Resolução:**

Podemos escrever $y^2 = 5x$ como

$(y - 0)^2 = 4 \cdot \frac{5}{4}(x - 0)$.

A distância do vértice (0, 0) ao foco é $c = \frac{5}{4}$.

Logo, $\mathbf{F}\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ e a diretriz é $x = -\frac{5}{4}$.

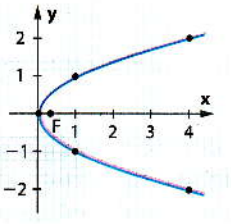


**3.** Esboce os gráficos das parábolas de equação:
a) $y^2 = x$; b) $y^2 = 4x$; c) $y^2 = 8x$.

**Resolução:**

a) $y^2 = x = 4 \cdot \frac{1}{4}x$

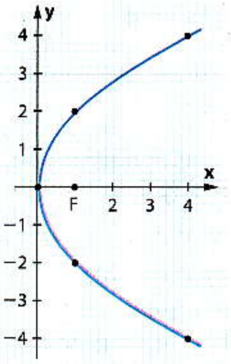
| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1 | −1 |
| 4 | 2 |
| 4 | −2 |



$\mathbf{F}\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

b) $y^2 = 4x = 4 \cdot 1x$

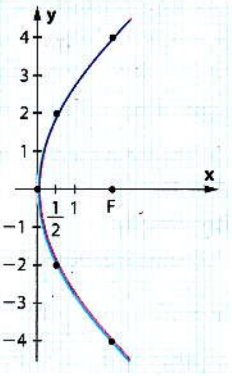
| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 1 | −2 |
| 4 | 4 |
| 4 | −4 |



$\mathbf{F}(1, 0)$

c) $y^2 = 8x = 4 \cdot 2x$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | −2 |
| 2 | 4 |
| 2 | −4 |



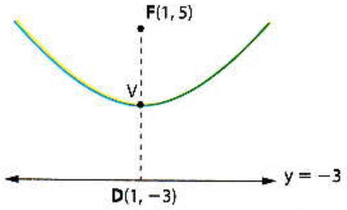
$\mathbf{F}(2, 0)$

**Observação**: O valor do coeficiente **c** indica a distância do foco ao vértice e, conseqüentemente, a concavidade da parábola. Veja como exemplos as parábolas do exercício resolvido 3: em $y^2 = 8x$ ($c = 4$), a concavidade é maior que em $y^2 = 4x$ ($c = 1$), pois $4 > 1$.

**4.** Determine a equação e as coordenadas do vértice da parábola que tem foco no ponto $\mathbf{F}(1, 5)$ e a reta diretriz de equação $y = -3$.

**Resolução:**

Os dados do problema permitem fazer um esboço do gráfico e, assim, identificar o tipo da equação:



$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V)$

O vértice é o ponto médio de $\overline{FD}$. Então:

$$\mathbf{V}\left(\frac{1+1}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{V}(1, 1)$$

Pela distância de **V** a **F** encontramos o valor de **c**:

$$c = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

Podemos escrever agora a equação procurada:

$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V) \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \cdot 4(y-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2 = 16(y-1)$

Logo, a equação é $(x-1)^2 = 16(y-1)$ e $\mathbf{V}(1, 1)$.

**5.** Se uma parábola tem como equação $x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$, determine as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco, a equação da reta diretriz da parábola e a equação do eixo de simetria.

**Resolução:**

Completando os quadrados perfeitos, temos:

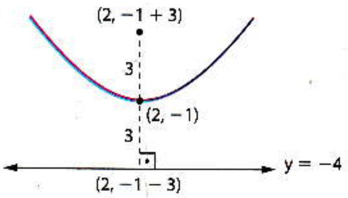
$x^2 - 4x - 12y - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12y + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + \dots 4 \dots = 12y + 8 + \dots 4 \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x^2 - 4x + 4} = \underline{12y + 12} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 12(y+1) \Rightarrow (x-2)^2 = 4 \cdot 3(y+1)$ em que $x_V = 2$, $y_V = -1$ e $c = 3$

Fazendo um esboço do gráfico, vem:



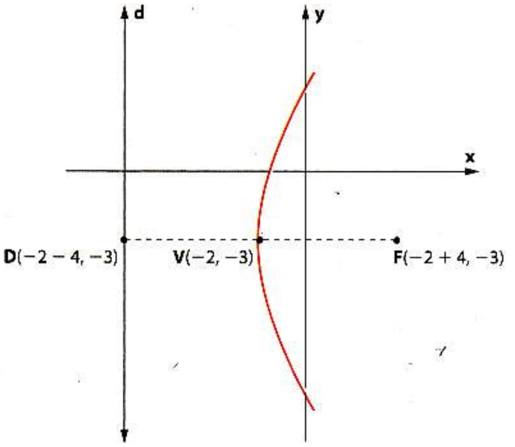
Logo, $\mathbf{V}(2, -1)$, $\mathbf{F}(2, 2)$, a diretriz é $y = -4$ e o eixo de simetria é $x = 2$.

**6.** Determine a equação, o foco **F** e a diretriz **d** da parábola com vértice **V**$(-2, -3)$, sabendo que o foco está no quarto quadrante, **d** é paralela ao eixo **y** e o parâmetro, **p**, é 8.

**Resolução:**

$p = 8$ indica que $c = 4$, pois $c = \frac{p}{2}$.

As informações do problema levam a um esboço do gráfico:



A posição da parábola indica que a equação é da forma $(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V)$.

Daí, vem:

**V**$(-2, -3)$

$c = 4$

**F**$(-2 + 4, -3) \Rightarrow$ **F**$(2, -3)$

**D**$(-2 - 4, -3) \Rightarrow$ **D**$(-6, -3)$

diretriz $x = -6$

Substituindo as informações na fórmula, temos:

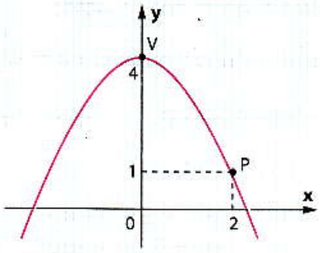
$(y - y_V)^2 = 4c(x - x_V) \Rightarrow (y + 2)^2 = 4 \cdot 4(x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = 16(x + 3)$

Logo, a parábola tem equação $(y + 2)^2 = 16(x + 3)$, **F**$(2, -3)$ e diretriz $x = -6$.

**7.** Determine a equação da parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo **x**, vértice no ponto **V**$(0, 4)$ e que passa pelo ponto **P**$(2, 1)$.

**Resolução:**



$(x - x_V)^2 = -4c(y - y_V)$

Substituindo $x_V = 0$ e $y_V = 4$ na equação, temos:

$(x - 0)^2 = -4c(y - 4) \Rightarrow x^2 = -4c(y - 4)$

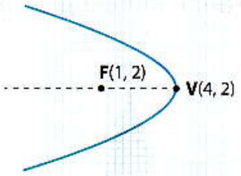
Como a parábola passa por **P**$(2, 1)$, vem:

$2^2 = -4c(1 - 4) \Rightarrow 12c = 4 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

Logo, a equação da parábola é $x^2 = -\frac{4}{3}(y - 4)$.

**8.** Verifique se os pontos **A**$(3, 8)$, **B**$(1, -4)$, **C**$(4, 2)$ e **D**$(-8, -10)$ pertencem ou não à parábola **P** de vértice **V**$(4, 2)$ e foco **F**$(1, 2)$.

**Resolução:**



A posição da parábola indica que a equação é da forma $(y - y_V)^2 = -4c(x - x_V)$.

Pela distância de **V** até **F** encontramos o valor de **c**:

$c = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 2)^2} = 3$

Sabendo que $c = 3$, $x_V = 4$ e $y_V = 2$, a equação da parábola é:

$(y - y_V)^2 = -4c(x - x_V) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y - 2)^2 = -4 \cdot 3(x - 4) \Rightarrow (y - 2)^2 = -12(x - 4)$

A partir da equação, podemos verificar a posição de cada um dos pontos em relação à parábola **P**:

**A**$(3, 8) \Rightarrow (8 - 2)^2 \neq -12(3 - 4) \Rightarrow A \notin P$

**B**$(1, -4) \Rightarrow (-4 - 2)^2 = -12(1 - 4) \Rightarrow B \in P$

**C**$(4, 2) \in P$, pois é o vértice da parábola

**D**$(-8, -10) \Rightarrow (-10 - 2)^2 = -12(-8 - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow D \in P$

## Exercícios propostos

1. Determine a equação da parábola de foco **F** e diretriz **d** nos seguintes casos:
   - a) **F**$(9, 0)$ e **d**: $x = -9$
   - b) **F**$(0, -6)$ e **d**: $y = 6$
   - c) **F**$(0, 7)$ e **d**: $y = -7$
   - d) **F**$(-5, 0)$ e **d**: $x = 5$

2. Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola, a partir das equações:
   - a) $y^2 = 28x$
   - b) $x^2 = -4y$
   - c) $x^2 = 10y$
   - d) $y^2 = -16x$

3. Dadas duas parábolas, de equações $x^2 = -12y$ e $x^2 = -2y$, qual delas tem concavidade maior? Esboce os gráficos para comprovar sua resposta.

4. Determine a equação da parábola que tem:
   - a) foco no ponto **F**$(3, 0)$ e diretriz de equação $x = -3$;
   - b) diretriz de equação $y = 3$ e vértice **V**$(0, 0)$;
   - c) foco no ponto **F**$(1, 2)$ e diretriz de equação $x = -2$;
   - d) diretriz de equação $x = 2$ e vértice **V**$(-1, -3)$.

**5.** Determine as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz das parábolas que têm por equação:

(*Sugestão:* Lembre-se, por exemplo, de que $2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)$)

a) $x^2 = 4y$ c) $x = -\frac{1}{8}y^2$ e) $x^2 = y$

b) $y^2 = 2x$ d) $y^2 = -4x$

**6.** Encontre as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco, a equação da reta diretriz e a equação do eixo de simetria das parábolas de equações:

a) $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0$

b) $x^2 - 2x - y + 4 = 0$

**7.** A parábola de equação $x^2 - 6x + y + 8 = 0$ intersecta o eixo **x** nos pontos **A** e **B**. Sendo **V** o vértice da parábola, determine a área do triângulo VAB.

**8.** Determine a equação das parábolas:

a) de vértice **V**(−1, 4), eixo paralelo ao eixo **y** e que passa pelo ponto **A**(3, 0);

b) de vértice **V**(4, 2) e foco **F**(4, 5).

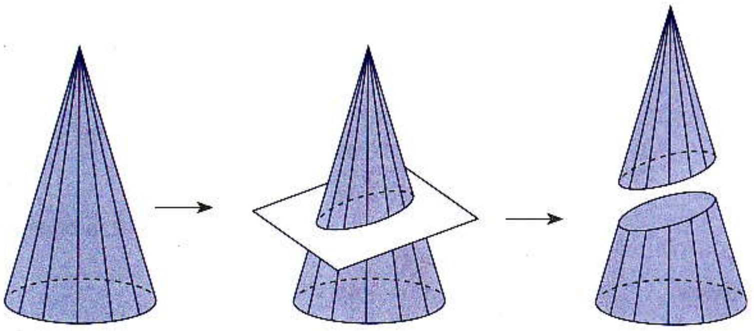
**9.** Uma parábola tem foco no ponto **F**(3, 1) e sua diretriz é a reta de equação $x = -1$. Determine a equação da parábola e os pontos em que a reta de equação $x - y = 0$ intersecta a parábola.

# 3 Elipse

## Origem

Vamos considerar um cone circular reto.

Utilizando um plano inclinado em relação ao eixo e que intersecte todas as geratrizes do cone, faremos um corte como mostram os desenhos seguintes:



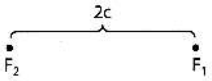
**Para refletir**

Se o plano for paralelo ao plano da base, obtemos uma circunferência, que também é uma secção cônica.

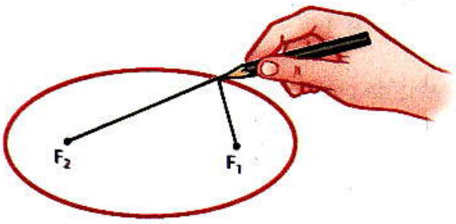
Nesse caso, a secção cônica obtida é chamada *elipse*.

## Definição e elementos

Consideremos, inicialmente, no plano do papel, dois pontos fixos $F_1$ e $F_2$ tal que a distância entre eles seja 2c.

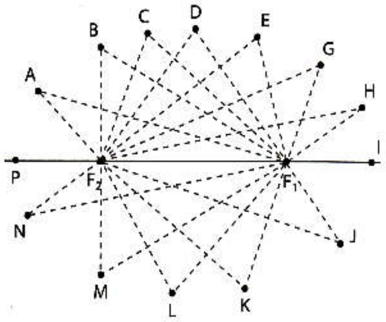


Imagine que vamos marcar uma série de pontos tal que a soma de suas distâncias aos pontos fixos $F_1$ e $F_2$ seja sempre constante e maior do que 2c. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de um lápis, dois alfinetes e barbante.

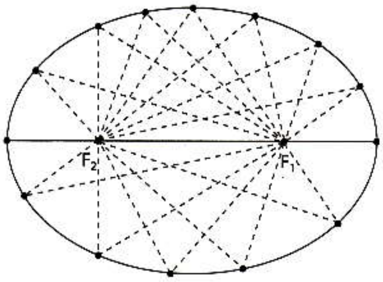


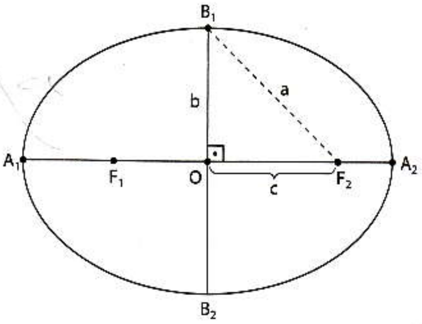
Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:

$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = CF_1 + CF_2 = ... = JF_1 + JF_2 = ... = LF_1 + LF_2 = ... = 2a$ (constante), sendo $2a > 2c$



A elipse é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.





Assim, definimos que elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, seja constante, igual a 2a e maior que a distância entre os focos ($2a > 2c$).

Na figura, temos:

- $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ são focos da elipse e a distância entre eles é a distância focal (2c);
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e sua medida é a soma que consta da definição (2a);
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse cuja medida é 2b;
- **O** é o centro da elipse (intersecção dos eixos da elipse e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$);
- o número $e = \frac{c}{a}$ chama-se *excentricidade* da elipse ($0 < e < 1$).

**Observações:**

1ª) $\overline{B_1F_2} \cong \overline{OA_2}$, pois ambos têm medida **a**.

2ª) No $\triangle B_1OF_2$ podemos notar que $b^2 + c^2 = a^2$. Essa relação é fundamental na determinação dos elementos da elipse.

**Para refletir**

A excentricidade indica quanto a elipse se aproxima de um segmento ou de uma circunferência, conforme seu valor se aproxima de 1 ou de 0, respectivamente.

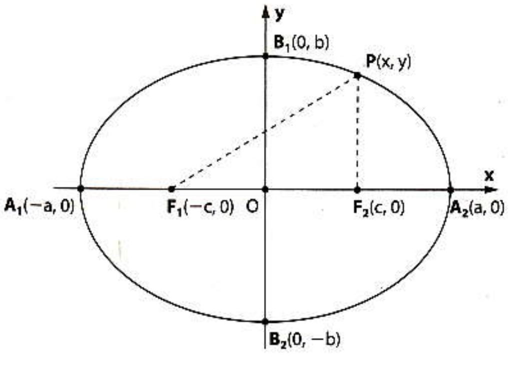
## Equação da elipse

Vamos inicialmente considerar a elipse com as extremidades do eixo maior nos pontos $\mathbf{A_1}(-a, 0)$ e $\mathbf{A_2}(a, 0)$, do eixo menor em $\mathbf{B_1}(0, b)$ e $\mathbf{B_2}(0, -b)$ e, conseqüentemente, o centro em **O**(0, 0).

Consideremos um ponto **P**(x, y) qualquer da curva.

Pela definição observamos que:

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1A_2 = 2a$$



Daí, temos:

$$PF_2 + PF_1 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 + \cancel{y^2} - (x+c)^2 - \cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} - 2cx - \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2 \Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Na elipse temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$$

Substituindo na equação, obtemos:

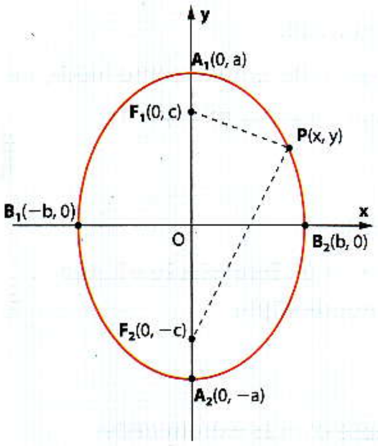
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Uma vez que $ab \neq 0$, vem:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em que $a = OA_1 = OA_2$, $c = OF_1 = OF_2$ e **b** tal que $b^2 = a^2 - c^2$. Essa equação é denominada *equação reduzida da elipse* de focos no eixo **x** e centro na origem.

Vejamos agora:



Se os focos da elipse estão sobre o eixo **y** e o centro na origem, conforme a figura, a equação reduzida da elipse é dada por:

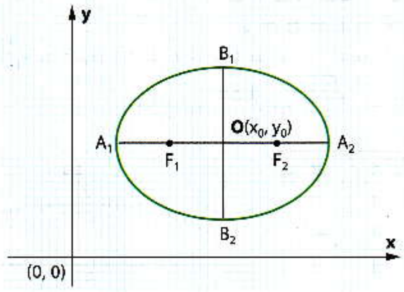
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

**Para refletir**

A recíproca é verdadeira: equações da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $a \neq b$ representam elipses, ou seja, apenas os pontos de uma elipse satisfazem essa equação.

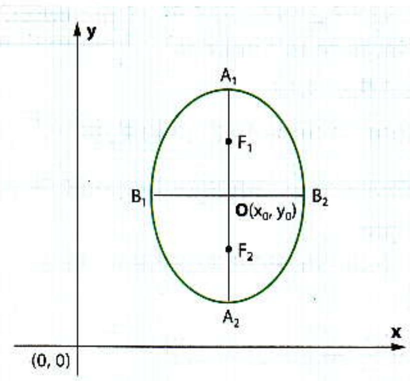
Analogamente, chegamos às equações da elipse com centro qualquer. Assim, temos as seguintes equações, considerando o centro um ponto qualquer, **O**$(x_0, y_0)$, e os eixos paralelos aos eixos **x** e **y**:

1ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo **x**, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

2ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo **x**, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

## Exercícios resolvidos

**9.** Determine a equação da elipse de focos $\mathbf{F_1}(3, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-3, 0)$ e vértices, que são as extremidades do eixo maior, $\mathbf{A_1}(5, 0)$ e $\mathbf{A_2}(-5, 0)$.

**Resolução:**

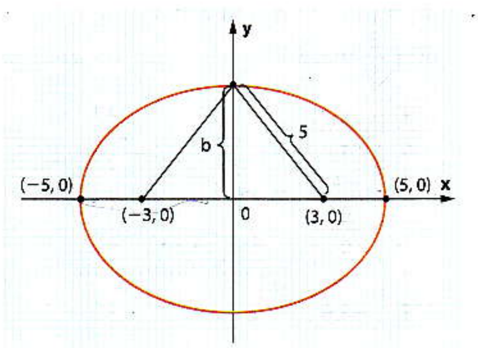
Pelos dados do problema, os focos estão no eixo **x** e temos $a = 5$ e $c = 3$.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16$

Nesse caso, a equação reduzida é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Logo, a equação procurada é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



**10.** Uma elipse tem os focos nos pontos $\mathbf{F_1}(0, 3)$ e $\mathbf{F_2}(0, -3)$. Se o comprimento do eixo menor da elipse é 2, determine a equação dessa elipse.

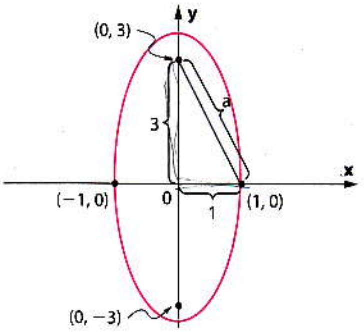
**Resolução:**

Pelos dados do problema, temos:

**V**$(0, 0)$

$c = 3$

$2b = 2 \Rightarrow b = 1$



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 1 + 9 = 10$

Como os focos estão localizados no eixo **y** e o vértice é **V**$(0, 0)$, temos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1 \Rightarrow 10x^2 + y^2 = 10$$

Logo, a equação procurada é $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$ ou $10x^2 + y^2 = 10$.

**11.** Determine os focos e as extremidades do eixo maior da elipse de equação $4x^2 + 25y^2 = 100$.

**Resolução:**

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \Rightarrow \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Como $25 > 4$, o eixo maior está no eixo **x**. Então:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

Logo, os focos são os pontos **F**$_1\left(\sqrt{21}, 0\right)$ e **F**$_2\left(-\sqrt{21}, 0\right)$ e as extremidades do eixo maior são **A**$_1(5, 0)$ e **A**$_2(-5, 0)$.

**Para refletir**

Quais são as extremidades do eixo menor?

**12.** Conhecendo os focos **F**$_1\left(0, \sqrt{3}\right)$ e **F**$_2\left(0, -\sqrt{3}\right)$ e a excentricidade $e = \frac{1}{2}$, determine a equação da elipse.

**Resolução:**

De acordo com os dados do problema, temos:

$c = \sqrt{3}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c = 2\sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = b^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = b^2 + 3 \Rightarrow b^2 = 9$

Segundo os dados do problema, os focos estão localizados no eixo **y**. Assim, vem:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow 4x^2 + 3y^2 = 36$$

Logo, a equação procurada é $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$ ou $4x^2 + 3y^2 = 36$.

**13.** Numa elipse, as extremidades do eixo maior são os pontos **A**$_1(6, 0)$ e **A**$_2(-6, 0)$. Sabendo que a elipse passa pelo ponto **P**$(3, 2)$, determine sua equação.

**Resolução:**

Pelos dados do problema temos $a = 6$.

Como o eixo maior está sobre o eixo **x**, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como a elipse passa pelo ponto **P**$(3, 2)$, temos:

$$\frac{9}{36} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{b^2} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{16}{3}$$

Substituindo na equação original, vem:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{3y^2}{16} = 1 \Rightarrow 4x^2 + 27y^2 = 144$$

Logo, a equação procurada é $\frac{x^2}{36} + \frac{3y^2}{16} = 1$ ou $4x^2 + 27y^2 = 144$.

**14.** Calcule a excentricidade $e = \frac{c}{a}$ e faça o esboço do gráfico de cada elipse:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

**Resolução:**

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

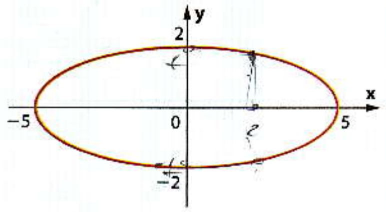
$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

$e = \frac{\sqrt{21}}{5} \simeq \frac{4{,}58}{5} \simeq 0{,}91$

| **x** | **y** |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 0 | −2 |
| 5 | 0 |
| −5 | 0 |
| 2 | 1,8 |
| 2 | −1,8 |



b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

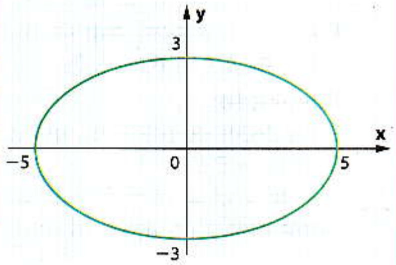
$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

$e = \frac{4}{5} = 0{,}8$

| **x** | **y** |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 0 | −3 |
| 5 | 0 |
| −5 | 0 |
| 2 | 2,7 |
| 2 | −2,7 |



c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

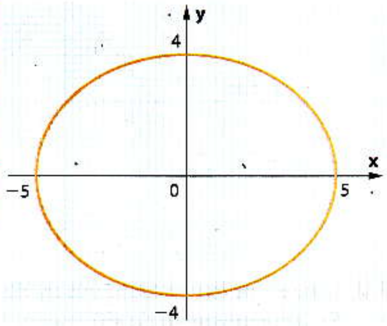
$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$

$e = \frac{3}{5} = 0{,}6$

| **x** | **y** |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 0 | −4 |
| 5 | 0 |
| −5 | 0 |
| 2 | 3,6 |
| 2 | −3,6 |



**Observação**: Quanto maior o valor de $e = \frac{c}{a}$, mais próxima de um segmento é a elipse correspondente.

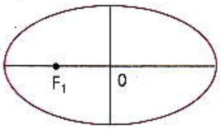
**Para refletir**

O que acontece com a elipse à medida que o valor de e tende a zero?

**15.** Determine a equação da elipse com centro em (2, −1), eixo maior 2a = 6 e foco $\mathbf{F}_1(0, -1)$.

**Resolução:**

Pelos dados do problema identificamos a posição da elipse:



Daí a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Sabemos que:

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Calculando a distância do centro (2, −1) ao foco $\mathbf{F}_1(0, -1)$, vem:

$$c = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 + 1)^2} = 2$$

Como a = 3 e c = 2, temos:

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

Substituindo os dados na equação, vem:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{5} = 1$$

Logo, a equação dessa elipse é

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{5} = 1$$

**16.** A equação $5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 16 = 0$ representa uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo **x**. Determine o centro e os focos dessa elipse.

**Resolução:**

Como $\overline{A_1A_2}$ é paralelo ao eixo **x**, devemos escrever a equação na forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo a equação dada, temos:

$5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 - 20x + 9y^2 - 18y = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 16 + 20 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 45 \Rightarrow$

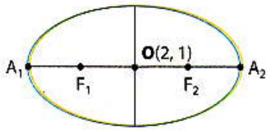
$$\Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{5} = 1$$

Da equação, concluímos que:

centro: $\mathbf{O}(2, 1)$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 5 = b = \sqrt{5}$



Fazendo $c^2 = a^2 - b^2$, vem:

$c^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2$

Daí, temos:

$\mathbf{F}_1(2 - 2, 1) \Rightarrow \mathbf{F}_1(0, 1)$

$\mathbf{F}_2(2 + 2, 1) \Rightarrow \mathbf{F}_2\ (4, 1)$

Logo, essa elipse tem centro $\mathbf{O}(2, 1)$ e focos $\mathbf{F}_1(0, 1)$ e $\mathbf{F}_2(4, 1)$.

**17.** As equações seguintes representam uma circunferência, uma parábola e uma elipse. Identifique cada uma delas e seus principais elementos.

a) $y^2 + 4y - 8x + 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 + 6x + 4y + 7 = 0$

**Resolução:**

a) $y^2 + 4y - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 8x - 12 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = 8x - 8 \Rightarrow (y + 2)^2 = 8(x - 1) \Rightarrow$

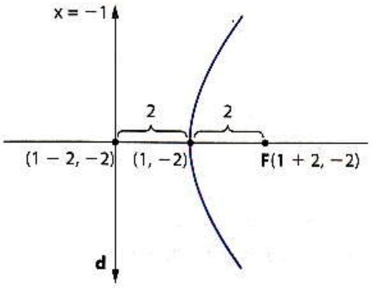
$\Rightarrow (y + 2)^2 = 4 \cdot 2(x - 1)$ (equação de parábola)

Daí, temos:

$\mathbf{V}(1, -2)$

$c = 2$

Esboçando o gráfico, vem:



Logo, a equação é de uma parábola com vértice $\mathbf{V}(1, -2)$, c = 2, foco $\mathbf{F}(3, -2)$ e diretriz x = −1.

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 = 5^2$

Logo, a equação é de uma circunferência de centro $\mathbf{C}(2, 3)$ e raio 5.

c) $x^2 + 2y^2 + 6x + 4y + 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1(x^2 + 6x) + 2(y^2 + 2y) = -7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 + 2y + 1) = -7 + 9 + 2$

$\Rightarrow \Rightarrow 1(x + 3)^2 + 2(y + 1)^2 = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{2} = 1 \text{ (equação de elipse)}$$

Daí, temos:

$\mathbf{C}(-3, -1)$

Como 4 > 2, vem:

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$

Logo, a equação é de uma elipse de centro $\mathbf{C}(-3, -1)$ e focos $\mathbf{F}_1(-3 - \sqrt{2}, -1)$ e $\mathbf{F}_2(-3 + \sqrt{2}, -1)$.

## Exercícios propostos

**10.** Determine a equação da elipse conhecendo:

a) os focos $\mathbf{F_1}(3, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-3, 0)$ e o comprimento do eixo maior, 8;

b) os vértices $\mathbf{A_1}(5, 0)$ e $\mathbf{A_2}(-5, 0)$ e a excentricidade $e = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**11.** Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas das extremidades do eixo maior e a excentricidade das elipses de equação:

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $2x^2 + y^2 = 2$

**12.** O eixo maior de uma elipse está contido no eixo **x**. Sabendo que o centro é (0, 0), o comprimento do eixo menor é 6 e a distância focal é 10, determine a equação da elipse.

**13.** Qual é a medida do eixo maior de uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$?

**14.** Dois dos vértices de um quadrilátero são os focos da elipse de equação $x^2 + 5y^2 = 20$. Os outros dois vértices são as extremidades do eixo menor da elipse. Calcule a área do quadrilátero.

**15.** Em uma elipse, o centro é $(-2, 4)$, um dos focos é $(-2, 7)$ e uma das extremidades do eixo menor é $(-3, 4)$. Determine a equação dessa elipse.

**16.** Quais são as extremidades do eixo menor da elipse de equação $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$?

**17.** Dadas as elipses $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ e $\dfrac{(x + 3)^2}{8} + \dfrac{(y - 1)^2}{3} = 1$, qual delas tem maior excentricidade?

**18.** Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o ponto $\mathbf{A}(-2, k)$ pertença à elipse $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$.

a) $k = 1 \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $k = 2 \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $k = 3 \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

d) $k = 4 \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $k = -1 \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

**19.** A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ é de uma elipse. Os semi-eixos maior e menor medem:

a) 4 e 3.

b) 4 e 2.

c) 4 e 1.

d) 3 e 2.

e) 3 e 1.

**20.** A equação da elipse que passa pelos pontos (2, 0), (−2, 0) e (0, 1) é:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$.

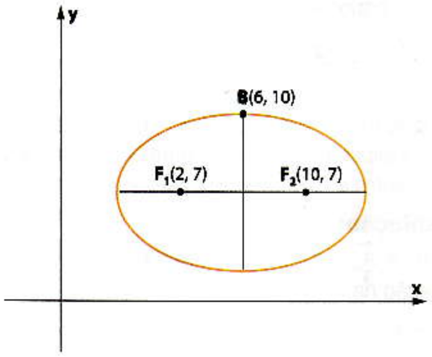
b) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

c) $2x^2 - 4y^2 = 1$.

d) $x^2 - 4y^2 = 4$.

e) $x^2 + y^2 = 4$.

**21.** Encontre a equação da elipse abaixo:

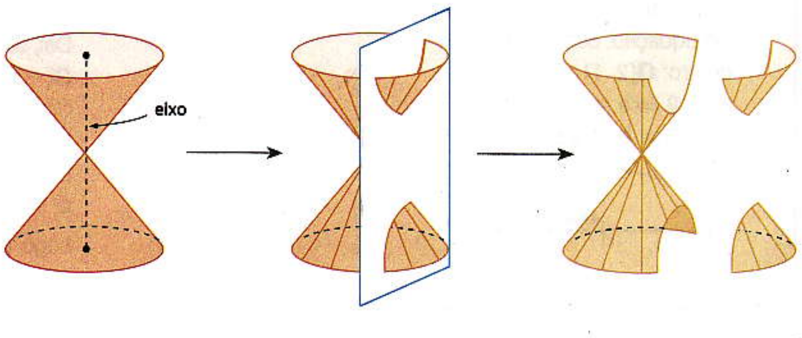


**22.** A reta $y = ax + 1$ intercepta a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ somente num ponto. Calcule $8a^2$.

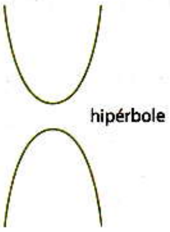
## 4 Hipérbole

### Origem

Vamos considerar um cone duplo e um plano qualquer que seccione as duas folhas do cone conforme mostram as figuras:

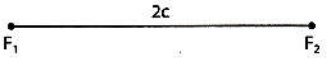


Nesse caso, a secção cônica obtida é denominada *hipérbole*.

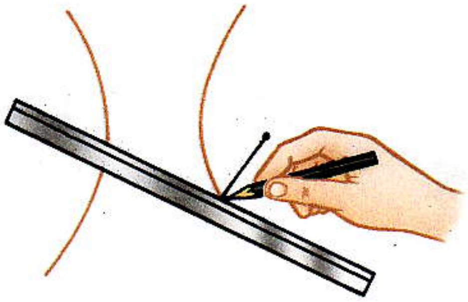


## Definição e elementos

Consideremos, inicialmente, dois pontos fixos, $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, de um plano cuja distância $d(F_1, F_2) = 2c$.

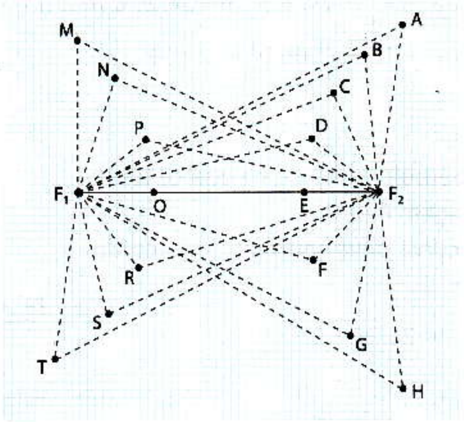


Imagine que vamos marcar uma série de pontos no plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias aos pontos fixos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ seja sempre constante e menor que 2c. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de régua, lápis, alfinetes e barbante.

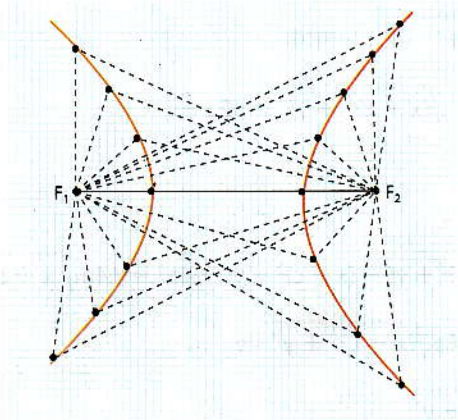


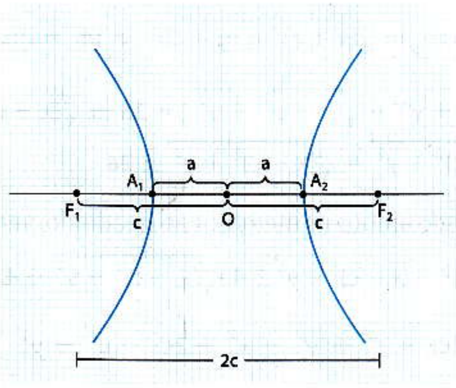
Construindo o gráfico ponto a ponto, teremos:

$$|AF_1 - AF_2| = |BF_1 - BF_2| = |CF_1 - CF_2| = \ldots = |TF_1 - TF_2| = 2a \text{ (constante), com } 2a < 2c$$



**O conjunto de todos os pontos do plano com essa propriedade chama-se *hipérbole*.**





Assim, definimos que hipérbole é o lugar geométrico dos pontos **P**(x, y) de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é constante ($2a < 2c$), com $F_1F_2 = 2c$.

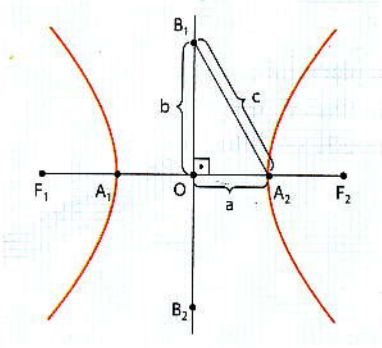
Na figura, temos:

- $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, os focos da hipérbole, sendo $F_1F_2 = 2c$ a distância focal;
- $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, os vértices da hipérbole, sendo $A_1A_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$ (constante da definição);
- **O**, o centro da hipérbole (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e de $\overline{A_1A_2}$);
- o número $e = \frac{c}{a}$, que é a excentricidade da hipérbole (note que $e > 1$, pois $c > a$).

**Observação:** Considerando uma hipérbole de focos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ e vértices $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, vimos que $F_1F_2 = 2c$ e $A_1A_2 = 2a$. Então, $OF_2 = c$ e $OA_2 = a$.

**Para refletir**

Quanto mais próximo de 1 for a excentricidade, mais a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas (perpendiculares ao eixo real). E se a excentricidade for cada vez maior, tendendo ao infinito, a hipérbole se aproxima de duas semi-retas opostas (com origem em $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$).



Seja $\mathbf{B_1}$ um ponto da mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ tal que o triângulo $B_1OA_2$ seja retângulo em **O**, com o cateto $\overline{OA_2}$ medindo **a** e a hipotenusa $\overline{B_1A_2}$ medindo **c**. Assim, chamando de **b** a medida do cateto $\overline{OB_1}$, temos $a^2 + b^2 = c^2$ ou $b^2 = c^2 - a^2$.

**Para refletir**

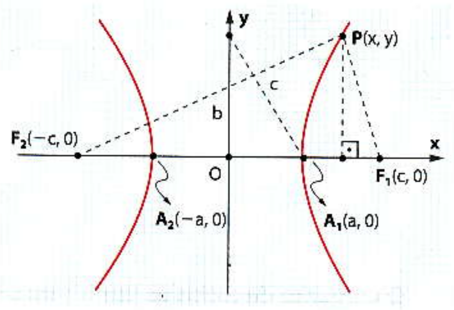
- Nas mesmas condições de $\mathbf{B_1}$ existe $\mathbf{B_2}$, sobre a mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, tal que $B_1B_2 = 2b$.
- $\overline{A_1A_2}$ é chamado *eixo real* e $\overline{B_1B_2}$, *eixo imaginário* da hipérbole.

## Equação da hipérbole

Consideremos inicialmente a hipérbole da figura, na qual os focos pertencem ao eixo **x** e o centro é a origem **O**(0, 0).

Um ponto **P**(x, y) qualquer da curva deve satisfazer, de acordo com a definição, a seguinte condição:

$$|PF_2 - PF_1| = 2a$$



Como $PF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$ e $PF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$, temos:

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow (x + c)^2 + y^2 - (x - c)^2 - y^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2cx - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando, novamente, os dois membros ao quadrado, obtemos:

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2] \Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Mas:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$$

Substituindo $(c^2 - a^2)$ na equação anterior, temos $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

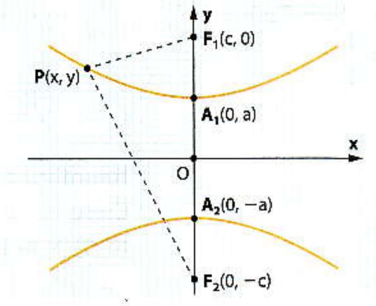
Como $ab \neq 0$, vem:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

em que $a = OA_1 = OA_2$, $c = OF_1 = OF_2$ e **b** é tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

Essa fórmula é denominada *equação reduzida da hipérbole*, quando os focos estão sobre o eixo **x** e são eqüidistantes da origem.

Veja agora:



Caso os focos estejam sobre o eixo **y**, a equação reduzida da hipérbole será:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

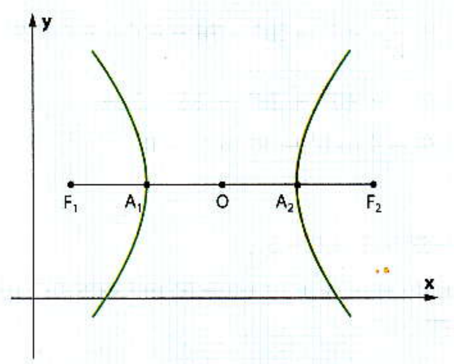
**Para refletir**

A recíproca é verdadeira: equações dessa forma representam hipérboles, ou seja, apenas pontos de uma hipérbole satisfazem essa equação.

Analogamente, podemos generalizar essa equação para um centro qualquer.

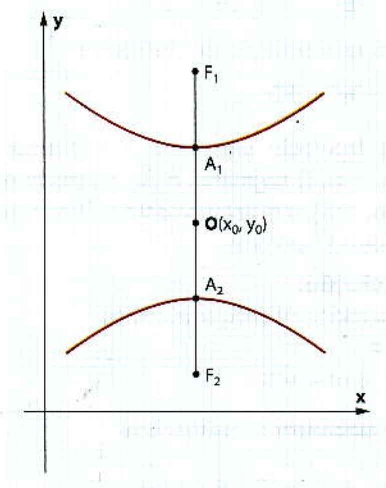
Considerando o centro da hipérbole $O(x_0, y_0)$ e os eixos (real e imaginário) paralelos aos eixos **x** e **y**, temos:

1º) Eixo real paralelo ao eixo **x**:



$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

2º) Eixo real paralelo ao eixo **y**:



$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1}$$

## Exercícios resolvidos

**18.** Determine uma equação da hipérbole de focos $\mathbf{F_1}(5, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-5, 0)$ e de vértices $\mathbf{A_1}(3, 0)$ e $\mathbf{A_2}(-3, 0)$.

**Resolução:**

Pelos dados do problema, temos:

$c = 5$

$a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

Como os focos estão sobre o eixo **x**, vem:

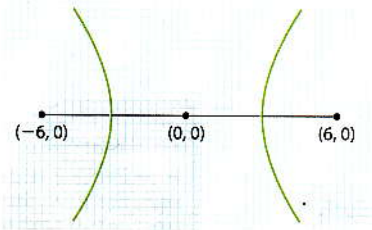
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 9y^2 = 144$$

Logo, uma equação da hipérbole é $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ou $16x^2 - 9y^2 = 144$.

**19.** Determine uma equação da hipérbole de focos $\mathbf{F_1}(6, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-6, 0)$ e de excentricidade igual a $\frac{3}{2}$.

**Resolução:**



Pelos dados do problema, temos:

$c = 6$

$$e = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2c}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

Como os focos estão sobre o eixo **x** e **O**(0, 0), vem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 = 80$$

Logo, uma equação da hipérbole é $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ ou $5x^2 - 4y^2 = 80$.

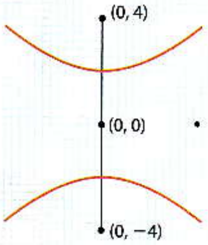
**20.** Uma hipérbole tem focos nos pontos $\mathbf{F_1}(0, 4)$ e $\mathbf{F_2}(0, -4)$. O segmento $\overline{A_1A_2}$, chamado eixo transversal (ou real), tem comprimento 6. Determine uma equação dessa hipérbole.

**Resolução:**

Pelos dados do problema, temos:

$c = 4$

$$\underbrace{2a}_{\text{comprimento do eixo transversal}} = 6 \Rightarrow a = 3$$



$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 7$

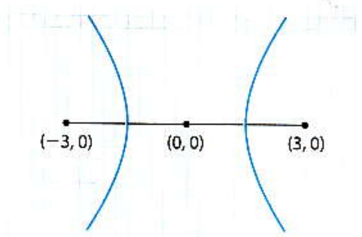
Como os focos estão sobre o eixo **y** e **O**(0, 0), vem:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1 \Rightarrow 7y^2 - 9x^2 = 63$$

Logo, uma equação da hipérbole é $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ ou $7y^2 - 9x^2 = 63$.

**21.** Uma hipérbole tem focos nos pontos $\mathbf{F_1}(3, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-3, 0)$ e passa pelo ponto $\mathbf{P}(\sqrt{5}, 2)$.

Qual é a equação dessa hipérbole?



**Resolução:**

Como os focos estão sobre o eixo **x** e o centro em (0, 0), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como a hipérbole passa pelo ponto $\mathbf{P}(\sqrt{5}, 2)$, vem:

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{a^2} - \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{5}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \quad \text{(I)}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ e $c = 3$, obtemos:

$9 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 9 - b^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\frac{5}{9 - b^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow 5b^2 - 36 + 4b^2 = 9b^2 - b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 + \cancel{5b^2} + \cancel{4b^2} - \cancel{9b^2} - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 - 36 = 0 \Rightarrow b^4 = 36 \Rightarrow b^2 = 6$$

Mas:

$a^2 = 9 - b^2 = 9 - 6 = 3$

Substituindo esse valor na equação reduzida da hipérbole, vem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1 \Rightarrow 2x^2 - y^2 = 6$$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ ou $2x^2 - y^2 = 6$.

**22.** Determine o centro, os focos e os vértices da hipérbole de equação $3x^2 - y^2 + 18x + 8y + 38 = 0$.

**Resolução:**

Transformando inicialmente a equação, temos:

$3x^2 - y^2 + 18x + 8y + 38 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2 + 6x) - (y^2 - 8y) = -38 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 8y + 16) = -38 + 27 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\,(x + 3)^2 - 1(y - 4)^2 = -27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1(y - 4)^2 - 3(x + 3)^2 = 27 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(y-4)^2}{27} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Da equação obtida, vem:

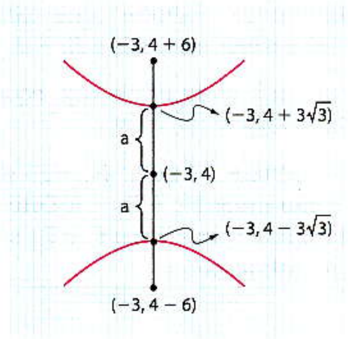
centro: **O**$(-3, 4)$

$a^2 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9} = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow c = 6$

Esboçando o gráfico, temos:



Logo, a hipérbole tem centro **O**$(-3, 4)$, vértices $\left(-3, 4 + 3\sqrt{3}\right)$ e $\left(-3, 4 - 3\sqrt{3}\right)$ e focos $(-3, 10)$ e $(-3, -2)$.

**23.** Em uma hipérbole de centro **O**$(5, 5)$, a distância focal é $2c = 6$ e o eixo real $2a = 2$ é paralelo ao eixo **x**. Determine a equação dessa hipérbole.

**Resolução:**

Do enunciado, vem:

Centro: **O**$(5, 5)$

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

Se o eixo real é paralelo ao eixo **x**, a equação é do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Logo, a equação é $\frac{(x-5)^2}{1} - \frac{(y-5)^2}{8} = 1$.

**24.** Uma hipérbole tem equação $9x^2 - 16y^2 = 144$. Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas dos vértices e a excentricidade da hipérbole.

**Resolução:**

$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

A equação indica que os focos estão sobre o eixo **x** com centro $(0, 0)$, daí:

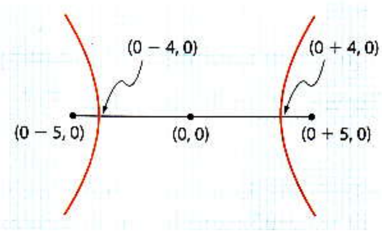
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Logo, $\mathbf{F_1}(5, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-5, 0)$, $\mathbf{A_1}(4, 0)$ e $\mathbf{A_2}(-4, 0)$ e a excentricidade $e = \frac{5}{4}$.



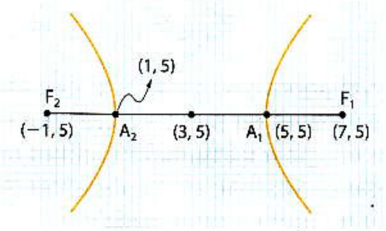
**25.** Determine a equação da hipérbole de centro $(3, 5)$, com um dos vértices em $(1, 5)$ e um dos focos em $(-1, 5)$.

**Resolução:**

Pelos dados do problema, o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo **x**, cuja equação é da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo um esboço da hipérbole, temos:



$a = 3 - 1 = 2$

$c = 3 - (-1) = 4$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

Substituindo os dados na fórmula, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$$

Logo, a equação procurada é

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1.$$

## Exercícios propostos

**23.** Determine a equação da hipérbole, dados:

a) os focos $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$ e os vértices $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$;

b) os vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e a distância entre os focos igual a 8;

c) os vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e a excentricidade igual a 2.

**24.** Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas dos vértices e a excentricidade das hipérboles das equações:

a) $4x^2 - 25y^2 = 100$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

c) $3x^2 - 4y^2 = 36$

**25.** Determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto $P(4\sqrt{2}, 3)$ e tem os focos nos pontos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$.

**26.** Calcule o comprimento do segmento $A_1A_2$ (os pontos $A_1$ e $A_2$ são os vértices) numa hipérbole de equação $4x^2 - 25y^2 = 100$.

**27.** Calcule o valor de **m** para que a hipérbole de equação $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ passe pelo ponto $P(\sqrt{15}, 4)$.

**28.** Numa hipérbole de excentricidade igual a $\sqrt{5}$, os vértices são os pontos $A_1(2, 0)$ e $A_2(-2, 0)$. Determine as coordenadas de seus focos.

**29.** Consideremos a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 = 16$. Qual é a equação de uma circunferência cujo centro coincide com o centro da hipérbole e que passa pelos focos da hipérbole?

**30.** Calcule a excentricidade $e = \frac{c}{a}$, esboce o gráfico de cada uma das hipérboles e relacione o valor de **e** com a respectiva figura:

a) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$

b) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{5} = 1$

c) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

**31.** Determine a equação da hipérbole cujos focos são $F_1(3, 6)$ e $F_2(3, -6)$ e o eixo imaginário é $2b = 6$.

**32.** Qual é a distância focal na hipérbole cuja equação é $4x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 136 = 0$?

**33.** O centro de uma hipérbole é o ponto $(4, -3)$, seu eixo real é $2a = 6$ e o eixo imaginário é $2b = 4$. Determine a equação dessa hipérbole e seus focos $F_1$ e $F_2$, sabendo ainda que $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo **x**.

## Assíntotas da hipérbole

Vamos considerar a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de centro na origem e eixo real horizontal.

Isolando **y** nessa equação, obtemos:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Vamos observar agora o termo $x^2 - a^2$ que está na raiz quadrada. Nele, **a** é constante, pois é um valor fixo na hipérbole, mas **x** é variável, ou seja, para cada ponto pertencente à hipérbole, **x** assumirá um valor real diferente.

Então, vamos imaginar **x** assumindo valores muito afastados do centro da hipérbole. Esses valores corresponderiam a pontos das curvas mais e mais distantes de $A_1$ e $A_2$.

À medida que **x** assume valores cada vez maiores (no sentido positivo do eixo das abscissas) ou cada vez menores (no sentido negativo), a diferença $x^2 - a^2$ vai se aproximando cada vez mais do próprio $x^2$, já que $a^2$, sendo constante, fica quase desprezível perto de $x^2$.

Por exemplo, se a = 1, teremos:

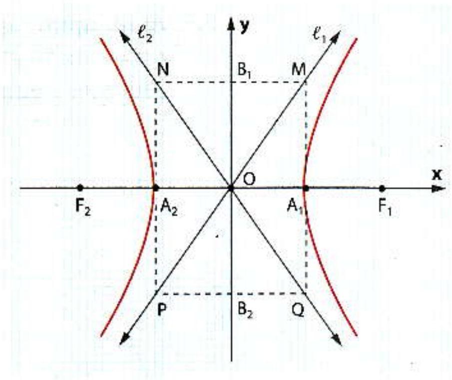
| x | $x^2$ | $x^2 - a^2$ |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 |
| 20 | 400 | 399 |
| 2 000 | 4 000 000 | 3 999 999 |

e assim por diante.

Então, podemos considerar que, para valores muito grandes, ou muito pequenos (se **x** for negativo, ao quadrado fica positivo e a diferença é a mesma), a equação da hipérbole $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ se aproxima de $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2}$ e, portanto, de $y = \pm\frac{b}{a}x$ que são retas que passam pela origem e têm, respectivamente, declividades $\frac{-b}{a}$ e $\frac{+b}{a}$.

A essas retas damos o nome de *assíntotas*, que são as retas para as quais tende a curva, embora nunca as toquem (pois o pequeno $\mathbf{a^2}$ sempre estará presente).

No gráfico dessa hipérbole, podemos facilmente determinar pontos dessa reta, construindo o retângulo MNPQ que passa pelos pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$:



Observe que as diagonais desse retângulo são retas de declividades $\frac{-b}{a}$ e $\frac{b}{a}$, respectivamente.

De agora em diante, para traçarmos o gráfico de uma hipérbole podemos começar traçando as assíntotas (basta ter os valores de **a**, **b** e as coordenadas do centro) e depois, à mão livre, conduzirmos as duas curvas que compõem a hipérbole, sem chegar a tocar essas retas, mas aproximando-as cada vez mais delas.

Generalizando, as equações das assíntotas serão:

$$y - y_C = \pm\frac{b}{a}(x - x_C) \quad \text{(se o eixo real for horizontal)}$$

e

$$y - y_C = \pm\frac{a}{b}(x - x_C) \quad \text{(se o eixo real for vertical)}$$

## Exercício resolvido

**26.** Determine as equações das retas assíntotas da hipérbole de equação $\frac{(x-5)^2}{64} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1$.

**Resolução:**

Da equação, vem:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{centro: } \mathbf{O}(5, 2)\\ a^2 = 64 \Rightarrow a = 8\\ b^2 = 36 \Rightarrow b = 6\\ \text{eixo real horizontal}\end{array}\right.$$

Equações das assíntotas:

$$y - 2 = \pm\frac{6}{8}(x - 5)\begin{array}{l}\nearrow 4y - 8 = 3x - 15 \Rightarrow 3x - 4y - 7 = 0\\ \searrow 4y - 8 = -3x + 15 \Rightarrow 3x + 4y - 23 = 0\end{array}$$

Logo, as equações das retas assíntotas são $3x - 4y - 7 = 0$ e $3x + 4y - 23 = 0$.

## Exercícios propostos

**34.** Determine as equações das assíntotas da hipérbole de equação:

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$

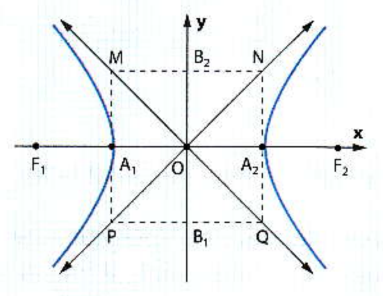
b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

**35.** As equações das assíntotas de uma hipérbole são $y = 2x$ e $y = -2x$. Se a hipérbole tem vértices $\mathbf{A_1}(3, 0)$ e $\mathbf{A_2}(-3, 0)$, determine a equação da hipérbole.

## Hipérbole eqüilátera

Observemos a figura:



Quando temos b = a, o retângulo MNPQ se transforma num quadrado. Nesse caso, as assíntotas tornam-se perpendiculares e a hipérbole é denominada *hipérbole eqüilátera*.

A equação dessa hipérbole eqüilátera de centro $\mathbf{O}(x_0, y_0)$ é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

**Para refletir**

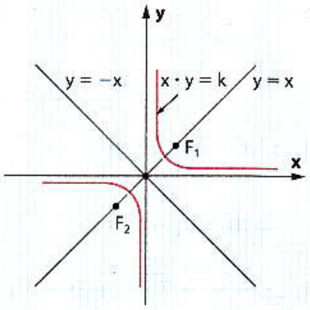
Se o centro dessa hipérbole é O(0, 0), sua equação é:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 - y^2 = a^2$.

**Observação**: Uma das hipérboles eqüiláteras mais famosas é a que descreve a relação entre a pressão e o volume de um gás perfeito a temperatura constante, conhecida como lei de Boyle, segundo a qual o produto da pressão pelo volume é sempre constante em condições isotérmicas: PV = k.

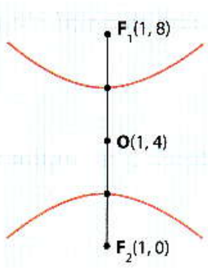
Entretanto, a equação xy = k não se parece nada com as hipérboles estudadas até aqui. O detalhe é que todas as hipérboles estudadas têm os eixos real e imaginário paralelos aos eixos **x** e **y**. Se os eixos real e imaginário não forem paralelos aos eixos **x** e **y**, aparecerá o termo xy na equação da hipérbole e, mais particularmente, se as assíntotas de uma hipérbole eqüilátera forem os eixos **x** e **y** (e portanto os eixos real e imaginário estão sobre as retas y = x e y = −x), então a equação da hipérbole se reduz à forma $xy = \frac{a^2}{2}$.

Dessa forma, o gráfico da lei de Boyle é realmente uma hipérbole eqüilátera tal como as estudadas neste capítulo, com a diferença de ter um sistema de coordenadas rotacionado de 45° em relação ao sistema de coordenadas mais adequado, que é o paralelo aos eixos real e imaginário e adotado neste capítulo.



## Exercício resolvido

**27.** Os focos de uma hipérbole eqüilátera são $\mathbf{F_1}(1, 8)$ e $\mathbf{F_2}(1, 0)$. Determine a equação dessa hipérbole.



**Resolução:**

Pelos dados do problema deduzimos:

centro: **O**(1, 4), o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$

posição da hipérbole: eixo real é paralelo ao eixo **y** valor da distância focal: $2c = 8 \Rightarrow c = 4$

tipo de equação: $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$

Como a hipérbole é eqüilátera, temos:

$c^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 8$

Logo, a equação é $\frac{(y - 4)^2}{8} - \frac{(x - 1)^2}{8} = 1$.

## Exercícios propostos

**36.** Determine a equação da hipérbole eqüilátera:

a) de focos $\mathbf{F_1}(6, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-6, 0)$;

b) de centro (2, 4) e um dos vértices em (2, 2).

**37.** Determine as coordenadas dos focos e as coordenadas dos vértices da hipérbole eqüilátera de equação $x^2 - y^2 = 25$.

**38.** Numa hipérbole eqüilátera com centro em (0, 0), a distância entre os vértices é 8. Sabendo que os focos estão sobre o eixo **y**, determine a equação dessa hipérbole.

**39.** Considere uma hipérbole eqüilátera, com centro em (0, 0), cujos focos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ estão no eixo **x** e que passa pelo ponto **P**(13, −12). Nessas condições, calcule a área do triângulo $PF_1F_2$.

## 5 Reconhecimento de cônicas

No capítulo 2, vimos que, para a equação geral $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ representar uma circunferência, precisamos atender a três condições:

1ª) $A = B \neq 0$
2ª) $C = 0$
3ª) $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Agora, vamos ver quais condições precisamos ter para que a equação geral $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ represente uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole.

**Para refletir**

Embora $C = 0$ não seja condição necessária para termos parábolas, elipses ou hipérboles, aqui estamos sempre considerando que seja. Assim, todas essas condições valem se $C = 0$.

### Parábola

1ª) $A = 0$ e $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ e $B = 0$ (ou seja, entre **A** e **B**, apenas um pode existir)
2ª) $BD \neq 0$ ou $AE \neq 0$ (a equação geral precisa ter duas variáveis, **x** e **y**)

**Observação**: Se a equação geral tiver apenas uma variável (ou **x** ou **y**), então ela representará um par de retas ou o conjunto vazio.

### Elipse

1ª) $AB > 0$ e $A \neq B$ (ou seja, **A** e **B** precisam ser diferentes e ter o mesmo sinal)
2ª) $BD^2 + AE^2 - 4ABF > 0$ $\left(\text{ou, alternativamente, } \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} > 4F\right)$

### Hipérbole

1ª) $AB < 0$ (ou seja, **A** e **B** precisam ter sinais diferentes)
2ª) $BD^2 + AE^2 - 4ABF \neq 0$ $\left(\text{ou, alternativamente, } \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} \neq 4F\right)$

**Observação**: Se $BD^2 + AE^2 - 4ABF = 0$, a equação geral representará um par de retas.

Uma maneira alternativa de se reconhecer a cônica é escrever as equações na forma reduzida usando completamento de quadrados.

## Exercício resolvido

**28.** No sistema de coordenadas cartesianas, o que é representado em cada equação abaixo?

a) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$

b) $3x^2 - 2y^2 + 4y - 2 = 0$

**Resolução:**

a) Como $A = 4$ e $B = 9$ são diferentes e têm o mesmo sinal, temos uma provável elipse.

Sendo $D = -16$, $E = -54$ e $F = 61$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{D^2}{A} + \dfrac{E^2}{B} = \dfrac{(-16)^2}{4} + \dfrac{(-54)^2}{9} = 64 + 324 = 388 \\ 4F = 244 \end{cases}$$

Como $388 > 244$, temos uma elipse.

Logo, a equação dada representa uma elipse.

*Outra resolução:*

Vamos obter a equação reduzida:

$$4x^2 - 16x + \_\_\_ + 9y^2 - 54y + \_\_\_ = -61 + \_\_\_ + \_\_\_ \Rightarrow 4(x^2 - 4x + \_\_\_) + 9(y^2 - 6y + \_\_\_) = -61 + \_\_\_ + \_\_\_ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -61 + 16 + 81 \Rightarrow 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{2} = 1 \text{ (equação reduzida de uma elipse)}$$

Logo, a equação representa uma elipse.

b) Como os sinais de $A = 3$ e $B = -2$ são diferentes, temos uma provável hipérbole.

Sendo $D = 0$, $E = 4$ e $F = -2$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{D^2}{A} + \dfrac{E^2}{B} = \dfrac{0^2}{3} + \dfrac{4^2}{-2} = 0 - 8 = -8 \\ 4F = -8 \end{cases}$$

Como $-8 = -8$, então *não* é uma hipérbole.

Logo, a equação dada representa um par de retas.

*Outra resolução:*

Vamos obter a equação reduzida:

$$3x^2 - 2y^2 + 4y + \_\_\_ = 2 + \_\_\_ \Rightarrow 3x^2 - 2(y^2 - 2y + \_\_\_) = 2 + \_\_\_ \Rightarrow 3x^2 - 2(y^2 - 2y + 1) = 2 + (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2(y - 1)^2 = 0 \text{ (}\textit{não}\text{ é uma equação reduzida de hipérbole)}$$

Então:

$$\left(\sqrt{3}x\right)^2 - \left[\sqrt{2}(y - 1)\right]^2 = 0 \Rightarrow \left[\sqrt{3}x + \sqrt{2}(y - 1)\right]\left[\sqrt{3}x - \sqrt{2}(y - 1)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2}\right) = 0 \begin{cases} \nearrow \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - \sqrt{2} = 0 \\ \searrow \sqrt{3}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Logo, a equação representa um par de retas.

## Exercícios propostos

**40.** Reconheça o que representa cada equação no plano cartesiano:

a) $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 2 = 0$

b) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

c) $x^2 - 2x - y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$

e) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 5 = 0$

**41.** No sistema de coordenadas cartesianas, a equação $4x^2 - 9y^2 - 8x + 4 = 0$ é representada por um(a):

a) elipse.

b) hipérbole.

c) circunferência.

d) parábola.

e) par de retas.

# 6 Outras aplicações

## Exercícios resolvidos

**29.** Dada a função quadrática $y = x^2 + 6x + 5$, obtenha as coordenadas do foco da parábola que representa o gráfico dessa função.

**Resolução:**

Completando quadrados:

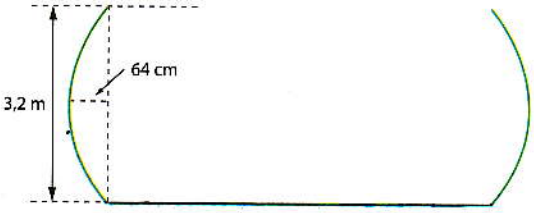
$y = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow y - 5 + \_\_\_ = x^2 + 6x + \_\_\_ \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 5 + 9 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 4 = (x + 3)^2 \Rightarrow (x + 3)^2 = y + 4$

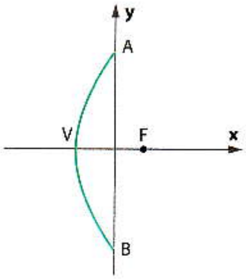
Comparando com $(x - x_V)^2 = \pm 4c(y - y_V)$, temos que as coordenadas do vértice são $(-3, -4)$ e o parâmetro **c** é igual a $\frac{1}{4}$. Então as coordenadas do foco são $-3$ e $-4 + \frac{1}{4}$, ou seja, $\mathbf{F}\left(-3, -\frac{15}{4}\right)$.

**30.** Um arquiteto projetou no salão central de um espaço cultural duas paredes parabólicas, opostas uma à outra, de forma que duas pessoas, com suas cabeças posicionadas cada uma no respectivo foco da parábola de sua parede, poderiam conversar normalmente, sem precisar gritar. Sua obra virou um sucesso, com todos os visitantes do espaço cultural querendo experimentar o tal "telefone de parede". Entretanto, alguns visitantes têm dificuldade de encontrar o ponto correto onde a conversação é perfeita (no foco da parábola) e ficam mexendo a cabeça até conseguir.



O pé direito do salão (distância entre o chão e o teto) tem 3,2 m. Considerando uma linha vertical pelos pontos no chão e no teto onde a parede parabólica começa e acaba, o ponto da parede mais afastado dessa vertical está a 64 cm. Além disso, as duas paredes parabólicas são iguais e têm eixo de simetria horizontal passando a 1,60 m do chão. Qual é o melhor lugar para se posicionar a cabeça para uma conversação perfeita, em relação à vertical citada acima?

**Resolução:**



Precisamos obter a equação da parábola. Escolheremos um sistema de coordenadas adequado que simplifique o processo analítico. Portanto, o eixo **y** coincidirá com a vertical citada no enunciado e o eixo **x** coincidirá com o eixo de simetria. A escala será em centímetros.

Assim, as coordenadas do vértice serão $\mathbf{V}(-64, 0)$, e dos pontos, $\mathbf{A}(0, 160)$ e $\mathbf{B}(0, -160)$. A equação da parábola é, então:

$(y - 0)^2 = 4c(x + 64) \Rightarrow y^2 = 4c(x + 64)$

Substituindo o ponto **A** na equação, temos:

$$160^2 = 4c(0 + 64) \Rightarrow 4c = \frac{160 \cdot 160}{64} \Rightarrow c = 100$$

Portanto, as coordenadas do foco neste sistema de coordenadas são $(-64 + 100, 0) = (36, 0)$.

O melhor lugar para posicionar a cabeça é a 1,60 m do chão (onde passa o eixo de simetria da parábola) e a 36 cm da linha vertical do pé da parede, que é o ponto do foco da parábola.

## Exercícios propostos

**42.** A tabela abaixo mostra a excentricidade da órbita elíptica ao redor do Sol dos oito planetas do sistema solar. Qual dos planetas tem a órbita mais parecida com uma circunferência? Para esse planeta, calcule a diferença percentual entre o tamanho do semi-eixo menor e do maior.

| Planeta | Excentricidade da órbita |
|---|---|
| Mercúrio | 0,206 |
| Vênus | 0,007 |
| Terra | 0,017 |
| Marte | 0,093 |
| Júpiter | 0,048 |
| Saturno | 0,056 |
| Urano | 0,046 |
| Netuno | 0,009 |

**43.** Dada a função quadrática $y = -4x^2 + 8x + 12$, obtenha as coordenadas do foco da parábola que representa o gráfico dessa função.

**44.** Sabendo que a órbita de Mercúrio em torno do Sol tem excentricidade 0,206; que o Sol é sempre um dos focos da elipse das órbitas planetárias; que a unidade astronômica (UA) vale 1 para a distância média entre o Sol e a Terra; que o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol chama-se afélio e, no afélio, Mercúrio está a 0,47 UA do Sol; e que o ponto da órbita em que o planeta está mais próximo do Sol chama-se periélio, obtenha, em unidades astronômicas, a distância de Mercúrio ao Sol no periélio. Use sua calculadora se desejar.

## Atividades adicionais

**1.** Determine a equação da parábola que tem:

a) foco no ponto **F**$(-5, 0)$ e diretriz de equação $x = 5$;

b) foco no ponto **F**$(0, 4)$ e vértice **V**$(0, 0)$;

c) foco no ponto **F**$(3, 5)$ e diretriz de equação $y = -1$;

d) foco no ponto **F**$(2, -2)$ e vértice **V**$(2, -4)$.

**2.** Determine as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz das parábolas que têm por equação:

(*Sugestão*: Lembre-se, por exemplo, de que $2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)$)

a) $y^2 = -6x$

b) $x^2 = -8y$

c) $y^2 = 20x$

d) $y = \frac{1}{12}x^2$

**3.** Encontre as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco, a equação da reta diretriz e a equação do eixo de simetria das parábolas de equações:

a) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$;

b) $y^2 + 2y - 5x + 11 = 0$.

**4.** Os valores de **b** para os quais a parábola $y = x^2 + bx$ tem um único ponto em comum com a reta $y = x - 1$ são:

a) $-1$ e 3.

b) $-1$ e 2.

c) $-3$ e $-1$.

d) 0 e $-1$.

e) 0 e 2.

**5.** Os gráficos de $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3x + m$ se interceptam em um ponto apenas. O gráfico de $g(x)$ corta o eixo **y** no ponto de ordenada:

a) 1,5.

b) 0,5.

c) 0.

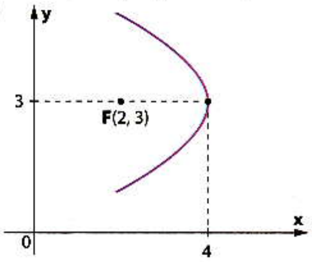
d) $-1,0$.

e) 1,0.

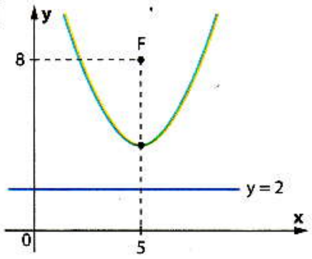
**6.** Seja **V**$(h, k)$ o vértice da parábola de equação $x^2 - 4x - 4y + 12 = 0$. A reta de equação $y = 3$ intercepta a parábola nos pontos **A** e **B**. Determine a área do triângulo VAB.

**7.** Encontre as equações das parábolas:

a)



b)



**8.** Determine a equação da elipse conhecendo:

a) os focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e as extremidades do eixo maior $A_1(0, 6)$ e $A_2(0, -6)$;

b) os focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e a excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**9.** Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas das extremidades do eixo maior e a excentricidade das elipses de equação:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

b) $x^2 + 2y^2 = 50$

c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

**10.** Considere a elipse $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$. Encontre os valores do centro, eixo maior, eixo menor, distância focal e excentricidade, assim como os focos e extremidades de cada eixo.

**11.** Sejam $F_1$ e $F_2$ os focos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Quais as equações das circunferências que passam pela origem e têm centros $F_1$ e $F_2$?

**12.** Determine a equação da hipérbole, dados os focos $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$ e a excentricidade igual a $\frac{5}{3}$.

**13.** Determine as coordenadas dos focos, as coordenadas dos vértices e a excentricidade das hipérboles de equações:

a) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $4x^2 - 9y^2 = 36$

c) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

**14.** Ache o centro, os focos, os vértices e as equações das assíntotas da hipérbole $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$.

**15.** Considere uma hipérbole eqüilátera que passa pelo ponto **P**$(13, -12)$ e cujo eixo real está contido no eixo das abscissas. Sendo $F_1$ e $F_2$ os focos da hipérbole, determine a área do triângulo $PF_1F_2$.

**16.** Os pontos $A_1$, $A_2$, $B_1$ e $B_2$ são, respectivamente, as extremidades do eixo real e imaginário da hipérbole de equação $\frac{(y + 2)^2}{36} - \frac{(x - 1)^2}{64} = 1$. Nesse caso a área do quadrilátero $A_1$, $A_2$, $B_1$ e $B_2$ é:

a) 96.

b) 48.

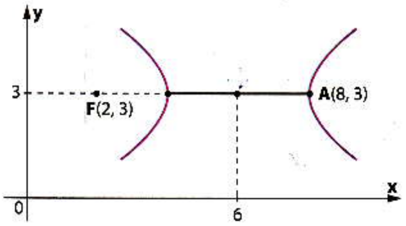
c) 24.

d) 64.

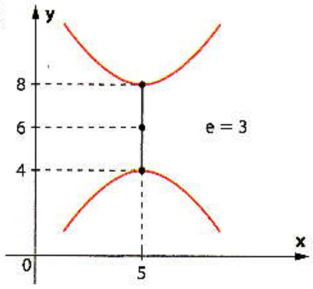
e) 192.

**17.** Encontre as equações das hipérboles:

a)



b)

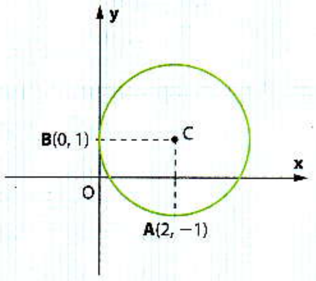


**18.** A cônica representada pela equação $3x^2 - 4y^2 + 8y - 16 = 0$ é:

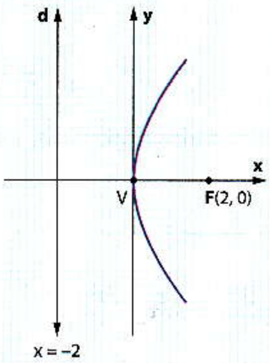
a) uma parábola.
b) uma hipérbole.
c) uma elipse.
d) uma circunferência.
e) duas retas.

**19.** Determine a equação de cada secção cônica cujo gráfico é dado:

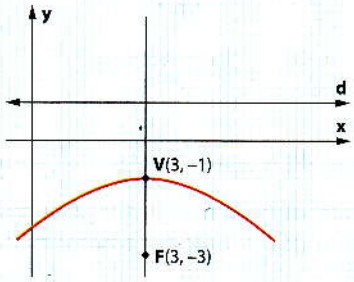
a) circunferência



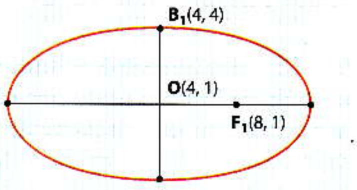
b) parábola



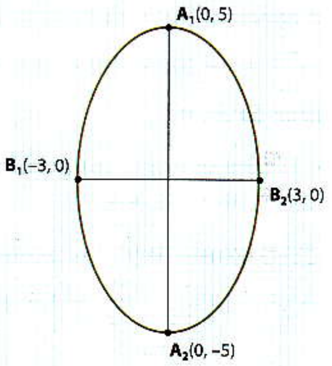
c) parábola



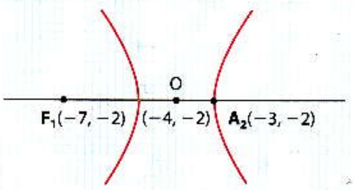
d) elipse



e) elipse



f) hipérbole



**20.** Entre as cinco equações abaixo, há uma circunferência, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Identifique cada uma delas.

a) $x^2 + y^2 = 16$
b) $x^2 - y = 0$
c) $x^2 - y^2 = 0$
d) $4x^2 + y^2 = 16$
e) $x^2 - y^2 = 16$

**21.** Uma elipse tem focos $\mathbf{F_1}(8, 0)$ e $\mathbf{F_2}(-8, 0)$ e vértices $\mathbf{V_1}(10, 0)$ e $\mathbf{V_2}(-10, 0)$. Sabendo que $\mathbf{B}(-5, y)$ é um ponto da elipse, qual é a área do triângulo $BF_1F_2$?

a) $12\sqrt{3}$.
b) 12.
c) $24\sqrt{3}$.
d) 24.
e) nda.

**22.** O centro da hipérbole de equação $3x^2 - 2y^2 - 18x + 15 = 0$ é o ponto **C** tal que:

a) **C**(0, 3).
b) **C**(3, 0).
c) **C**(0, −3).
d) **C**(−3, 0).
e) **C**(−3, 3).

## Questões de vestibular

**1.** (Unifor-CE) Seja a parábola de equação $y = -x^2 - 4x + 1$. A equação da reta que passa pelo vértice dessa parábola e pela origem do sistema cartesiano é:

a) $2x + 5y = 0$.
d) $13x + 2y = 0$.
b) $5x + 2y = 0$.
e) $13x - 2y = 0$.
c) $5x - 2y = 0$.

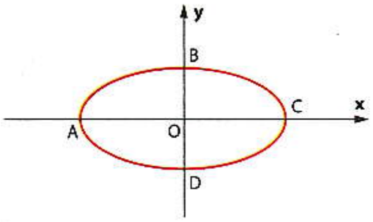
**2.** (UFC-CE) Calcule a área do quadrilátero que tem dois vértices coincidindo com os focos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ e outros dois com as extremidades do eixo menor da elipse.

**3.** (UFPA) Determine a distância entre os focos da elipse $5x^2 + 9y^2 - 10x - 31 = 0$.

**4.** (UFC-CE) O número de pontos de intersecção das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{2} = 1$ é igual a:

a) 0.
c) 4.
e) 6.
b) 3.
d) 5.

**5.** (Unifor-CE) Na figura abaixo tem-se uma elipse.



Se OB = 2 cm e OC = 4 cm, a equação dessa elipse é:

a) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.
d) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.
e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.
c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

**6.** (Uece) A interseção dos gráficos da relação $x^2 - y^2 = 0$ e da função $y + x = 3$ ocorre:

a) em nenhum ponto.
b) em apenas um ponto $\mathbf{P}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
c) em apenas um ponto $\mathbf{P}\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
d) em exatamente dois pontos.

**7.** (Uece) A equação $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ representa um(a):

a) circunferência.
c) parábola.
b) elipse.
d) par de retas concorrentes.

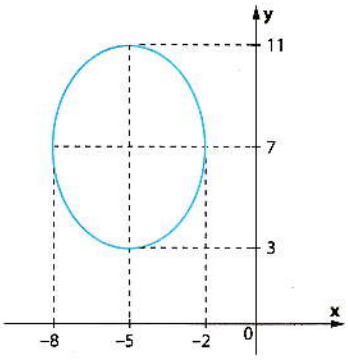
**8.** (UFC-CE) O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a equação $y^2 - 2y = 3 - x^2$ é um(a):

a) par de retas concorrentes.
b) circunferência.
c) parábola.
d) elipse.
e) hipérbole.

**9.** (UEL-PR) Em uma praça dispõe-se de uma região retangular de 20 m de comprimento por 16 m de largura para construir um jardim. A exemplo de outros canteiros, este deverá ter a forma elíptica e estar inscrito nessa região retangular. Para aguá-lo, serão colocados aspersores nos pontos que correspondem aos focos da elipse. Qual será a distância entre os aspersores?

a) 4 m
c) 8 m
e) 12 m
b) 6 m
d) 10 m

**10.** (Vunesp) A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação dessa elipse é:

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$.
b) $\frac{(x + 5)^2}{9} + \frac{(y - 7)^2}{16} = 1$.
c) $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 1$.
d) $\frac{(x - 5)^2}{9} + \frac{(y + 7)^2}{16} = 1$.
e) $\frac{(x + 3)^2}{5} + \frac{(y - 4)^2}{7} = 1$.

**11.** (Fuvest-SP) A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos **A** e **B**. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento AB é:

a) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.
b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{3}\right)$.

c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$.

d) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

e) $\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

**12.** (Vunesp) O conjunto de todos os pontos **P**(x, y) do plano, com $y \neq 0$, para os quais **x** e **y** satisfazem a equação

$$\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x^2 + 1}\right) = 0 \text{ é uma:}$$

a) família de parábolas.
b) família de circunferências centradas na origem.
c) família de retas.
d) parábola passando pelo ponto **Q**(0, 1).
e) circunferência centrada na origem.

**13.** (Unifor-CE) Seja **r** a reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares e que contém a intersecção das parábolas de equações $x = (y - 3)^2$ e $x = (y + 7)^2$. A equação de **r** é:

a) $x + y + 23 = 0$.
b) $x + y + 27 = 0$.
c) $x - y - 27 = 0$.
d) $x - y + 27 = 0$.
e) $x - y - 23 = 0$.

**14.** (UFPB) Uma reta tem coeficiente angular $m = -1$ e passa pelo vértice da parábola $4x - y^2 + 6y - 5 = 0$. Sua equação cartesiana é:

a) $x + y - 2 = 0$.
b) $x - y + 3 = 0$.
c) $x - y - 1 = 0$.
d) $2x + y - 1 = 0$.
e) $x + y - 1 = 0$.
f) $3x + y - 3 = 0$.

**15.** (FGV-SP) No plano cartesiano, a curva de equações paramétricas $x = 2 \cos t$ e $y = 5 \operatorname{sen} t$ com $t \in \mathbb{R}$ é:

a) uma senóide.
b) uma cossenóide.
c) uma hipérbole.
d) uma circunferência.
e) uma elipse.

**16.** (UFC-CE) A elipse **F** do plano cartesiano xy obtida da elipse **E**: $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ por uma translação que leva os focos de **E** em pontos eqüidistantes da origem e sobre o eixo Ox admite uma equação igual a:

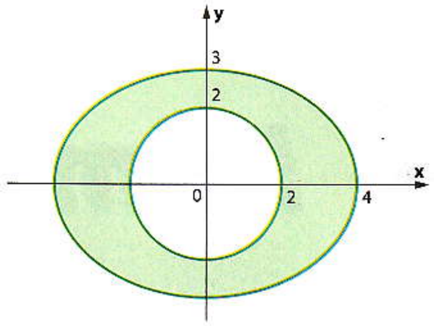
a) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 18$.
b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 6$.
c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 16$.
d) $x^2 + 2y^2 = 25$.
e) $2x^2 + 3y^2 = 49$.

**17.** (UFMG)

a) Uma elipse é o conjunto de pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos $F_1$ e $F_2$ é uma constante igual a **k**. Determine a equação da elipse em que $F_1\left(-\sqrt{15}, 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{15}, 0\right)$ e $k = 8$.

b) Seja **C** uma circunferência de centro (1, 0) e raio **r**. Determine os valores de **r** para os quais a intersecção de **C** com a elipse do item anterior seja não-vazia.

**18.** (UFPB) A planta baixa de um projeto paisagístico encontra-se ilustrada na figura abaixo. A região colorida corresponde à parte gramada e está limitada: internamente, pela circunferência que passa pelo ponto (2, 0), com centro na origem; e, externamente, pela elipse centrada na origem, com dois de seus vértices nos pontos (4, 0) e (0, 3).



A região colorida pode ser descrita pelo conjunto:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 4\}$.
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 \geqslant 144\}$.
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 4 \text{ e } 9x^2 + 16y^2 \leqslant 144\}$.
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 4 \text{ ou } 9x^2 + 16y^2 \leqslant 144\}$.
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4 \text{ e } 9x^2 + 16y^2 \leqslant 144\}$.
f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

**19.** (Vunesp) Fixado um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, considere os pontos **O**(0, 0), **A**(0, 2) e a reta **r** de equação $y = -1$.

a) Se a distância do ponto **Q**$(x_0, 2)$ ao ponto **A** é igual à distância de **Q** à reta **r**, obtenha o valor de $x_0$, supondo $x_0 > 0$.

b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos **P**(x, y) desse plano, cuja distância até o ponto **A** é igual à distância até a reta **r**.

**20.** (UFBA) Considere uma elipse e uma hipérbole no plano cartesiano, ambas com centro na origem e eixos de simetria coincidindo com os eixos coordenados. Sabendo que os pontos (3, 0) e $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 1\right)$ pertencem à elipse e que $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ e (2, 1) pertencem à hipérbole, determine os pontos de intersecção dessas cônicas.

**21.** (Unifesp) A parábola $y = x^2 - tx + 2$ tem vértice no ponto $(x_t, y_t)$. O lugar geométrico dos vértices da parábola, quando **t** varia no conjunto dos números reais, é:

a) uma parábola.
b) uma elipse.
c) um ramo de uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas concorrentes.

**22.** (UFBA) Determine a área do quadrilátero ABCD, no qual **A** e **C** são os vértices da cônica $9x^2 - 4y^2 = 36$, e **B** e **D** são os pontos de intersecção dessa cônica com a reta que contém a bissetriz do primeiro quadrante.

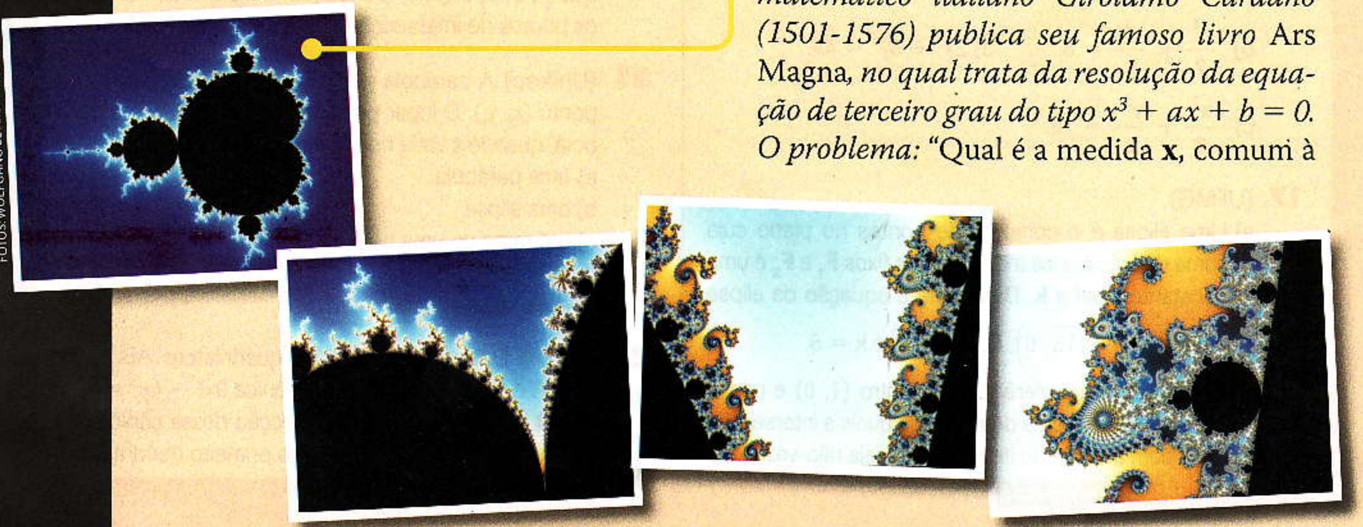
# Capítulo 4

# Números complexos

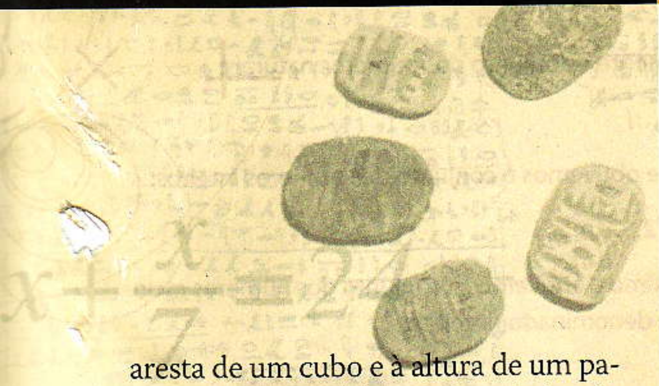
As descobertas matemáticas muitas vezes parecem ser, a princípio, totalmente dissociáves de qualquer correspondente na Natureza, fazendo-nos pensar que não possuem aplicação prática. Por exemplo, o movimento aparentemente desordenado de partículas no ar, como o que se vê quando a luz incide em lugares muito secos revelando micropartículas que flutuam em movimentos aleatórios, parecendo poeira, constitui objeto da Teoria do Caos, que explica o funcionamento de sistemas complexos e dinâmicos. O primeiro a observar esse fenômeno foi o biólogo e físico escocês Robert Brown (1773-1858), a quem é atribuída a teoria do movimento browniano. Mais tarde, em 1905, Albert Einstein propôs que a matéria fosse constituída de moléculas. O estudo desse fenômeno deu origem a uma nova concepção de movimento, desordenado e aleatório, denominado por Benoît Mandelbrot (matemático polonês, nascido em 1924) de fractal. A Geometria euclidiana já não era suficiente para explicá-lo e cada vez mais se fazia presente e necessário outro tipo de Geometria, a não-euclidiana.

O primeiro destes fractais é chamado conjunto de Mandelbrot e as outras são réplicas dele contidas nele. Por definição, o conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos pontos **c** do plano complexo que satisfazem uma seqüência iterativa, isto é, que se forma por repetição de uma ou mais ações.

Os números complexos aparecem no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publica seu famoso livro Ars Magna, no qual trata da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$. O problema: "Qual é a medida **x**, comum à



FOTOS: WOLFGANG BEYER/WK COMMONS



aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?” *corresponderia a* $x^3 - 15x = 4$, *e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão* $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$*! Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números “esquisitos”, mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.*

*Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números “funcionavam”. Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por* $\sqrt{-1}$*, como, por exemplo,* $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$*. No século XVIII, Euler introduz o símbolo* ***i*** *para representar a raiz quadrada de* $-1$*. Assim,* $\sqrt{-121}$ *passa a ser expresso por* $11i$*. Finalmente, a representação geométrica dos números complexos elaborada pelo matemático, astrônomo e físico alemão Gauss (1777-1855), no final do século XVIII, tornou mais significativo seu estudo e aplicabilidade.*

*Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações.*

## Atividades

**1.** Em *Ars Magna*, Cardano apresenta uma das raízes da equação de 3º grau $x^3 + ax + b = 0$, dada por

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}.$$

Essa fórmula foi sugerida a ele por Tartaglia, outro famoso matemático italiano dessa época.

a) Mostre como Cardano se deparou com o número $\sqrt{-121}$ ao tentar encontrar as raízes da equação que resolvia o problema do cubo e do paralelepípedo mencionado.

b) Verifique que 4 é raiz da equação.

**2.** Em 1545, Cardano propôs em um de seus livros o seguinte problema: Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40.

a) Registre uma equação que traduza esse problema.

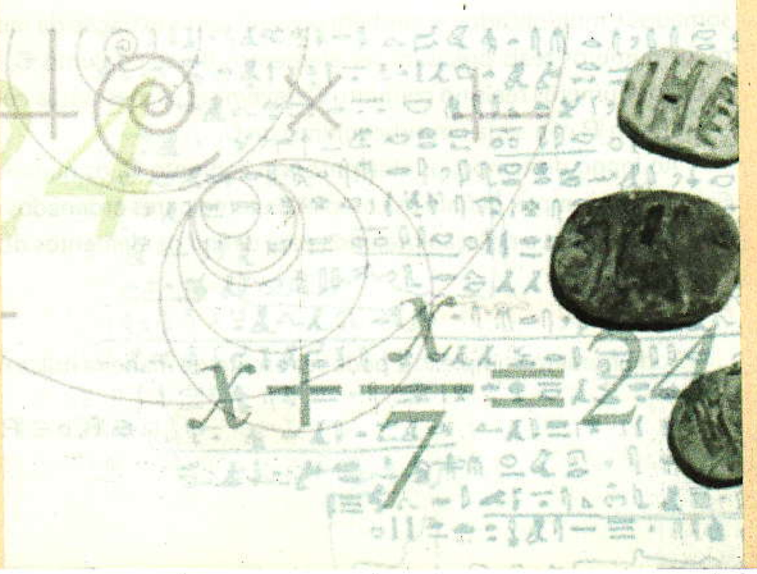
b) Resolva a equação obtida, mantendo as propriedades que são válidas para os números reais.

c) Expresse as raízes na forma proposta por Euler.

**3.** Em 1975, Mandelbrot estudou a equação $X_{n+1} = (X_n)^2 + Z$, na qual $Z = a + bi$, $i^2 = -1$ e $n = 1, 2, 3, ...$ Através de um programa recursivo de computador (um programa em *loop*), **Z** variou e o computador imprimiu na tela os pontos $X_{n+1}$. Constatou que, para cada valor de **Z**, uma figura era impressa na tela. Ampliando as figuras descobriu que continham cópias aproximadas de si mesmas (auto-semelhança).

Exemplo extraído de
http://br.geocities.com/silvandabr/complexo.html.
Acesso em 18/5/2007.

Você pode, com os recursos matemáticos que conhece até agora, desenvolver pelo menos um pouco essa seqüência. Comece considerando $X_0 = 0$, depois, faça $X_1 = (X_0)^2 + Z$ e assim por diante. Quando aparecer **i**, substitua por $\sqrt{-1}$, e $i^2$ por $-1$. Simplesmente anote os resultados e observe a seqüência encontrada. Ela dá origem ao conjunto de Mandelbrot e esse será seu primeiro contato com a matemática sobre a qual essa teoria foi construída.



# 1 Introdução

Entre os conjuntos numéricos já conhecidos tínhamos inicialmente o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Para que a subtração fosse sempre possível, ele foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros:

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

**Para refletir**

Em $\mathbb{Q}$, a única divisão impossível é a divisão por 0.

Em $\mathbb{Q}$, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e **a** e **b** pertencentes a $\mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados de irracionais ($\mathbb{I}\text{r}$).

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\text{r}$$

Portanto, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$ e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geqslant 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real **x** que elevado ao quadrado resulte −1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos *números complexos*.

# 2 O conjunto dos números complexos

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos — os números complexos — devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto $\mathbb{C}$ devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto $\mathbb{R}$ não seria um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Ao longo do tempo, os elementos do conjunto $\mathbb{C}$, os números complexos, foram definidos de várias formas. Gauss, por exemplo, definiu os complexos como pares ordenados de números reais.

Hoje em dia, a notação preferida para definir os elementos do conjunto complexo é a forma algébrica.

## A forma algébrica

Todo número complexo **z** pode ser escrito de maneira única na forma:

$$z = a + bi \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1)$$

Essa é a *forma algébrica* ou *forma binomial* de escrever um número complexo. Observemos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{parte real}\\ \text{de } \mathbf{z}\\ \downarrow\\ \text{Re}(z)\,=\,a}} + \underbrace{bi}_{\substack{\text{parte}\\ \text{imaginária}\\ \text{de } \mathbf{z}\\ \downarrow\\ \text{Im}(z)\,=\,b}}$$

**i** é a unidade imaginária, tal que $i^2 = -1$.

**Para refletir**

Como $i^2 = -1$, é comum encontrar quem defina $i = \sqrt{-1}$. Neste livro preferimos continuar usando $i^2 = -1$.

A existência do **i** é que permite que no conjunto $\mathbb{C}$ exista raiz de índice par de números negativos, não definida no conjunto $\mathbb{R}$.

Por exemplo, se $x \in \mathbb{C}$ e $x^2 = -25$, então $x = \pm 5i$, pois:

$$-25 = (i^2) \cdot 25 = i^2 5^2 = (5i)^2$$

Se o número complexo possui a unidade imaginária (ou seja, se $b \neq 0$) ele é chamado de imaginário.

Devemos observar também que, se $b = 0$, temos $z = a$ (número real); e se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = bi$, que é um número imaginário puro.

**Exemplos:**

1º) Em $z = 2 + 3i$, temos $\text{Re}(z) = 2$ e $\text{Im}(z) = 3$.

2º) Em $z = 3$, temos $\text{Re}(z) = 3$ e $\text{Im}(z) = 0$. Portanto, **z** é real.

3º) Em $z = -2i$, temos $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = -2$. Portanto, **z** é um número imaginário puro.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são intuitivas. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que $\mathbf{i^2}$ é um número real e vale $-1$. Não há necessidade alguma de decorar fórmulas.

**Exemplos:**

1º) $(2 + 3i) + (-3 + 4i) = (2 - 3) + (3 + 4)i = -1 + 7i$

2º) $(1 + 2i)(2 - 3i) = 1 \cdot 2 + 1(-3i) + (2i)2 + (2i)(-3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 + i - 6(-1) = 2 + i + 6 = 8 + i$

3º) $(1 + i) - (3 + 2i) = (1 - 3) + (1 - 2)i = -2 - 1i = -2 - i$

## Exercícios resolvidos

**1.** Dados os números complexos $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 z_2$

c) $z_1^2$

d) $z_1 + z_2^2$

**Resolução:**

a) $z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (-2 + i) =$
$= (1 - 2) + (3 + 1)i = -1 + 4i$

b) $z_1 z_2 = (1 + 3i)(-2 + i) =$
$= 1(-2) + 1 \cdot i + 3i(-2) + 3i \cdot i =$
$= -2 + i - 6i + 3i^2 = -2 - 5i + 3(-1) =$
$= -5 - 5i$

c) $z_1^2 = (1 + 3i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 =$
$= 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i + 9(-1) = -8 + 6i$

d) $z_1 + z_2^2 = (1 + 3i) + (-2 + i)^2 =$
$= (1 + 3i) + [4 - 4i + i^2] =$
$= (1 + 3i) + [4 - 4i + (-1)] =$
$= (1 + 3i) + (3 - 4i) = 1 + 3i + 3 - 4i = 4 - i$

**2.** Calcule $z_1 - z_2$, dados os números complexos $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -1 + 4i$.

**Resolução:**

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (-1 + 4i) = (2 + 3i) + (1 - 4i) =$
$= (2 + 1) + (3 - 4)i = 3 - i$

**3.** Determine o valor real de **x** para que o número complexo:

a) $z = (1 - 2x) + 3i$ seja um número imaginário puro.

b) $z = (8 - x) + (2x - 3)i$ seja um número imaginário puro.

c) $z = 6 - (3x - 5)i$ seja um número real.

d) $z = (1 - x) + (x - 1)i$ seja o número real 0.

**Resolução:**

a) $z = (1 - 2x) + 3i$

Para que **z** seja um número imaginário puro é necessário que $\text{Re}(z) = 0$, pois $\text{Im}(z) = 3 \neq 0$.

Então:

$\text{Re}(z) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Verificando, vem:

$$z = (1 - 2x) + 3i = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 3i =$$

$= (1 - 1) + 3i = 0 + 3i = 3i$ (número imaginário puro)

Logo, $x = \frac{1}{2}$.

b) $z = (8 - x) + (2x - 3)i$

$Re(z) = 0 \Rightarrow 8 - x = 0 \Rightarrow x = 8$

Para $x = 8$, temos:

$Im(z) = (2 \cdot 8 - 3) = 13 \neq 0$

Verificando, para $x = 8$:

$z = (8 - 8) + (2 \cdot 8 - 3)i = 0 + 13i = 13i$ (número imaginário puro)

Logo, $x = 8$.

c) $z = 6 - (3x - 5)i$

Para que **z** seja real é necessário que $Im(z) = 0$:

$Im(z) = -(3x - 5) = 0 \Rightarrow -3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Verificando, para $x = \frac{5}{3}$:

$$z = 6 - \left(3 \cdot \frac{5}{3} - 5\right)i = 6 - (5 - 5)i =$$

$= 6 - 0i = 6$ (número real)

Logo, $x = \frac{5}{3}$.

d) $z = (1 - x) + (x - 1)i$

Para que **z** seja 0 é necessário que $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 0$.

Então:

$Re(z) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$Im(z) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Verificando, para $x = 1$:

$z = (1 - x) + (x - 1)i = (1 - 1) + (1 - 1)i = 0 + 0i = 0$

Logo, $x = 1$.

**4.** Efetue as operações indicadas:

a) $(6 + 5i) + (3 - 4i)$

b) $(1 - i) - (3 - 2i)$

c) $(1 + i)(1 - i)$

d) $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$

e) $(3 - i)^3$

f) $(2 - 3i)^2 - (3 - i)2i$

**Resolução:**

a) $(6 + 5i) + (3 - 4i) = 6 + 5i + 3 - 4i =$

$= (6 + 3) + (5 - 4)i = 9 + i$

b) $(1 - i) - (3 - 2i) = 1 - i - 3 + 2i =$

$= (1 - 3) + (2 - 1)i = -2 + i$

c) $(1 + i)(1 - i) = 1 \cdot 1 - \cancel{i} + \cancel{i} - i^2 =$

$= 1 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

d) $i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4 i = 1i = i$

$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$

$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$

$i^8 = i^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Observe que as potências de **i** começam a se repetir depois de $\mathbf{i}^4$. De modo geral, temos:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$

$i^{4n+1} = (i^4)^n i = 1 \cdot i = i$

$i^{4n+2} = (i^4)^n i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{4n+3} = (i^4)^n i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$

Ou seja:

$i^{4n+p} = i^p$

e) $(3 - i)^3 = (3 - i)^2(3 - i) =$

$= (3^2 - 2 \cdot 3i + i^2)(3 - i) = (9 - 6i - 1)(3 - i) =$

$= (8 - 6i)(3 - i) = 24 - 8i - 18i + 6i^2 =$

$= 24 - 26i - 6 = 18 - 26i$

f) $(2 - 3i)^2 - (3 - i)2i =$

$= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 - (6i - 2i^2) =$

$= 4 - 12i + 9i^2 - 6i + 2i^2 = 4 - 18i - 11 =$

$= -7 - 18i$

**5.** Calcule o valor de:

a) $i^{49}$

b) $i^{100}$

c) $3i^{15} - i^{16}$

**Resolução:**

a) $i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^4)^{12} \cdot i = i$

Ou, de outra maneira:

$i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^2)^{24} i = (-1)^{24} i = 1i = i$

Portanto, $i^{49} = i$.

b) $i^{100} = (1^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

Ou, de outra maneira:

$i^{100} = (i^4)^{25} \cdot i^0 = i^0 = 1$

Portanto, $i^{100} = 1$.

c) $3i^{15} - i^{16}$

$i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 i = (-1)^7 i = -1i = -i$

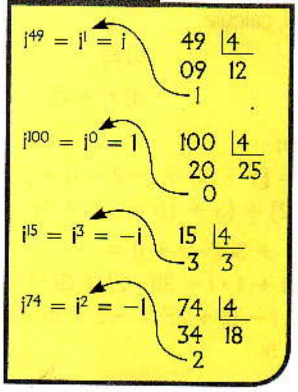
$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

Então, temos:

$3i^{15} - i^{16} = 3(-i) - 1 = -3i - 1$

Portanto, $3i^{15} - i^{16} = -1 - 3i$.

**Para refletir**



**6.** Resolva a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$.

**Resolução:**

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

(impossível em IR)

Em $\mathbb{C}$ podemos resolvê-la. Assim, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-1)4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \text{ e}$$

$$x'' = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

Verificando, vem:
$S = x' + x'' = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$
$P = x'x'' = (-2 + i)(-2 - i) = 4 + \cancel{2i} - \cancel{2i} - i^2 =$
$= 4 - (-1) = 5$
Satisfazendo então $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja,
$x^2 + 4x + 5 = 0$.

**7.** Encontre o número complexo **z** tal que:
a) $4z = z - (-9 + 6i)$;
b) $z - i^{36} = i^{43} - z$;
c) $iz = z - 1 + 5i$.

**Resolução:**

a) $4z = z - (-9 + 6i) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4z - z = -(-9 + 6i) \Rightarrow 3z = 9 - 6i \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 3 - 2i$
Logo, $z = 3 - 2i$.

b) $z - i^{36} = i^{43} - z \Rightarrow z + z = i^{43} + i^{36} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2z = -i + 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Logo, $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

c) $iz = z - 1 + 5i$
Como $z = a + bi$, temos:
$i(a + bi) = a + bi - 1 + 5i \Rightarrow$

$$\Rightarrow -b + ai = (a - 1) + (b + 5)i \Rightarrow \begin{cases} -b = a - 1 \\ a = b + 5 \end{cases}$$

Então:
$-b = b + 5 - 1 \Rightarrow -2b = 4 \Rightarrow b = -2$
$a = -2 + 5 = 3$
Logo, $z = 3 - 2i$.

**8.** Calcule o valor de:
a) $(1 + i)^2$; b) $(1 + i)^{20}$; c) $(1 + i)^{21}$.

**Resolução:**

a) $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i$
b) $(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = [2i]^{10} =$
$= 2^{10} \cdot i^{10} = 1024 \cdot i^2 = -1024$
c) $(1 + i)^{21} = (1 + i)^{20} \cdot (1 + i) =$
$= -1024 \cdot (1 + i) = -1024 - 1024i$

## Exercícios propostos

**1.** Dados os números complexos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ e $z_3 = 2 - 2i$, calcule:
a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 - z_2$
c) $z_1 z_2$
d) $(z_1 + z_2)z_3$
e) $(z_1 + z_2) + z_3$
f) $z_3 - z_2$
g) $z_1^2 + z_2$
h) $z_1z_3 + z_2z_3$
i) $z_1 + (z_2 + z_3)$
j) $z_2 - z_1$
l) $z_1 + z_2 z_3$
m) $z_2^2 + z_3^2 - z_1^2$

**2.** Determine o número **z** em cada caso:
a) $3z + 4i = z - 6i^{20}$
b) $3zi = z + i$

**3.** Efetue:
a) $i^9$
b) $i^{14}$
c) $i^{60}$
d) $i^{99}$
e) $i^{1035}$
f) $(-i)^{16}$
g) $\frac{i^{25} + i^{18}}{i^{22}}$
27
h) $16i^5 + 5i^{10} - (3i)^3$
i) $(1 - 2i)^5$
j) $i^{600} - i^{285}$

**4.** Sendo $z = 2 - 2i$, calcule:
a) $z^2$ b) $z^8$ c) $z^9$

**5.** Resolva o sistema $\begin{cases} 3z_1 - z_2 = 1 - i \\ 5z_1 - 2z_2 = 1 + 3i \end{cases}$

de variáveis $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$.

**6.** Determine o valor de **x**, real, para que o número complexo:
a) $(x^2 - x) + 3i$ seja um número imaginário puro;
b) $(x^2 - 1) + i$ seja um número imaginário puro;
c) $x + (x^2 - 4)i$ seja um número real;
d) $x + xi$ seja o número real 0;
e) $(x^2 - 4x + 3) + (x - 2)i$ seja um número imaginário puro;
f) $x + (x^2 - 7x + 12)i$ seja um número real;
g) $(1 - xi)(x + i)$ seja um número real.

**7.** Verifique as seguintes igualdades:
a) $(2 - 3i)(-2 + i) = -1 + 8i$

b) $(3 + i)(3 - i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right) = 2 + i$

c) $\left(\sqrt{2} - i\right) - i\left(1 - i\sqrt{2}\right) = -2i$

d) $(1 - i)^4 = -4$

**8.** Mostre que os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ são as soluções da equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

**9.** Encontre a expressão geral da adição e multiplicação de números complexos na forma algébrica, supondo que $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$.

**10.** Prove que, se **z** é um número complexo, então $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

## 3 Conjugado de um número complexo

A propriedade do inverso multiplicativo pode ser escrita da seguinte maneira: se $z \neq 0$, existe um único número complexo $\frac{1}{z}$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Como podemos determinar o número $\frac{1}{z}$ na forma algébrica?

Para isso, precisamos definir o que vem a ser o conjugado de um número complexo.

O conjugado de um número complexo $z = (a, b) = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = (a, -b) = a - bi$.

**Exemplos:**

1º) Se $z = 2 + 3i$, então $\overline{z} = 2 - 3i$.

2º) Se $z = -3 - 4i$, então $\overline{z} = -3 + 4i$.

3º) Se $z = 2$, então $\overline{z} = 2$.

4º) Se $z = 5i$, então $\overline{z} = -5i$.

5º) Se $z = i$, então $\overline{z} = -i$.

6º) Se $z = (2, 3)$, então $\overline{z} = (2, -3)$.

7º) Se $z = (-1, -1)$ então $\overline{z} = (-1, 1)$.

8º) Se $z = 0$, então $\overline{z} = 0$.

**Para refletir**

Em que casos temos $z = \overline{z}$?

**Exercício resolvido**

**9.** Determine o número complexo **z** tal que $2z - 1 = \overline{z} + i$.

**Resolução:**

Consideremos $z = a + bi$.

Então: $2z - 1 = \overline{z} + i \Leftrightarrow 2(a + bi) - 1 = (a - bi) + i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a + 2bi - 1 = a - bi + i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a - 1) + 2bi = a + (-b + 1)i$

Igualando as partes reais e imaginárias, temos:

$2a - 1 = a \Rightarrow a = 1$

$2b = -b + 1 \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Logo, $z = 1 + \frac{1}{3}i$.

### Propriedades do conjugado

1ª) Se $z = a + bi$, então:

$z\overline{z} = a^2 + b^2$ (que é real, positivo ou nulo)

Dados ou hipóteses $\begin{cases} z = a + bi \\ \overline{z} = a - bi \end{cases}$

Tese $\{z\overline{z} = a^2 + b^2$

Demonstração:

Efetuando o produto $z\overline{z}$, temos:

$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$

2ª) Para o número complexo **z**, temos que:

$z = \overline{z} \Leftrightarrow$ **z** é número real

Demonstração:

Se $z = a + bi$, temos:

$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow bi = -bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow$ **z** é real

3ª) Se $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ são números complexos, então:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ (o conjugado da soma é igual à soma dos conjugados)

Demonstração:

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = a + c - bi - di = (a - bi) + (c - di) =$

$= \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

4ª) Se $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ são números complexos, então:

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ (o conjugado de um produto indicado é igual ao produto dos conjugados)

Demonstração:

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$z_1z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i \Rightarrow \overline{z_1z_2} = (ac - bd) - (bc + ad)i$ ①

Sabemos também que:

$\overline{z}_1 = a - bi$ e $\overline{z}_2 = c - di$

Portanto:

$\overline{z}_1\overline{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (bc + ad)i$ Ⓘ̄Ⓘ

Comparando ① e ⑪, concluímos que:

$\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$

## Exercícios resolvidos

**10.** Dado $z \neq 0$, determine $\frac{1}{z}$ na forma $a + bi$ de tal modo que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (questão proposta na página anterior).

**Resolução:**

Basta multiplicar numerador e denominador por $\mathbf{\overline{z}}$ ou seja, pelo conjugado de **z**, que é diferente de 0, pois $z \neq 0$. Assim:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \Rightarrow \frac{1}{a + bi} =$$

$$= \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Logo:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$$

**Para refletir**

Se $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$ é o inverso multiplicativo de z e pode ser indicado também por $z^{-1}$.

**11.** Dado $z = 1 + 2i$, encontre o inverso multiplicativo de $z\left(\frac{1}{z} \text{ ou } z^{-1}\right)$.

**Resolução:**

*1ª maneira:*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + 2i} = \frac{1 - 2i}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 - 2i}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2i}{1 + 4} = \frac{1 - 2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Logo, $\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

*2ª maneira:*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 2i}{1 + 4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

## 4 Divisão de números complexos

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$.

## Exercícios resolvidos

**12.** Escreva na forma $a + bi$ o número complexo $\frac{1}{3 - i}$.

**Resolução:**

$$\frac{1}{3 - i} = \frac{1(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{9 + 1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

**13.** Efetue $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$.

**Resolução:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 + 5i} = \frac{(1 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} =$$

$$= \frac{2 - 5i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} = \frac{12 - i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$.

### Exercícios propostos

**11.** Determine $\bar{z}$ para:

a) $z = 1 + 5i$;
b) $z = 2i$;
c) $z = 0$;
d) $z = -4 + 2i$;
e) $z = 5$;
f) $z = 3 + 3i$;
g) $z = -1 - i$;
h) $z = \sqrt{2} - 2i$.

**12.** Calcule $z\bar{z}$ nos casos:

a) $z = 3 - 4i$
b) $z = 7i$
c) $z = -1 - i$

**13.** Se $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 3 + 5i$, determine:

~~a) $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e $\overline{z_1 + z_2}$~~
b) $z_1 + \bar{z}_2$
c) $z_1\bar{z}_2$
d) $z_1\bar{z}_1 + z_2$
e) $\bar{z}_1\bar{z}_2$ e $\overline{z_1z_2}$
f) $\bar{z}_1z_2$
g) $z_1 + z_2\bar{z}_2$

**14.** Encontre **z** tal que $\bar{z} + 2zi - 1 = 2$.

**15.** Determine o inverso multiplicativo de **z**, sabendo que:

a) $z = 2 + 4i$
b) $z = -1 - 2i$
c) $z = 1 - 3i$
d) $z = -2 + 3i$

**16.** Efetue as divisões indicadas:

a) $\dfrac{2 + 3i}{1 + 2i}$
b) $\dfrac{1}{3 + 2i}$
c) $\dfrac{1 + 3i}{1 - i}$
d) $\dfrac{1 + i}{i}$
e) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

**17.** Escreva na forma $z = a + bi$ os números complexos:

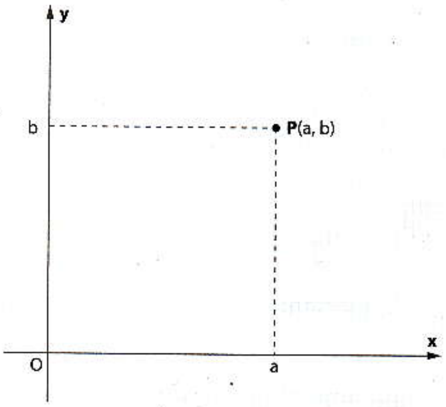
a) $z = \dfrac{1}{1 + i}$
b) $z = \dfrac{(3 - 4i)(4 - 3i)}{3 - 2i}$
c) $z = \dfrac{i}{2 + i} - \dfrac{2 + i}{i}$
d) $z = \left(\dfrac{1 + i}{2i}\right)^4$

## 5 Representação geométrica dos números complexos

Conforme foi dito anteriormente, os números complexos podem ser representados de várias formas. Até agora vimos a forma algébrica $a + bi$. Outra maneira de representar um complexo **z** é através de um par ordenado de números reais. Assim, se $z = a + bi$, podemos escrever que $z = (a, b)$. (Gauss só usava essa notação.)

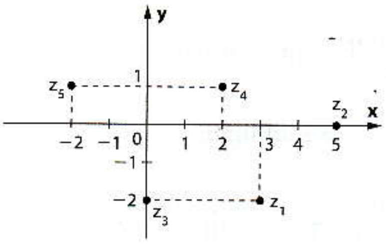
Por outro lado, sabemos que a cada par de números reais $(a, b)$ está associado um único ponto do plano. Logo, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto **P** do plano de coordenadas **a** e **b**, isto é, **P**$(a, b)$.

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss*. Dizemos que o ponto **P**$(a, b)$ é o *afixo* do número complexo $a + bi$.



**Exemplo:** Vamos representar geometricamente os números complexos $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2 + i$ e $z_5 = -2 + i$.

$z_1 = 3 - 2i \Rightarrow (3, -2)$
$z_2 = 5 \Rightarrow (5, 0)$
$z_3 = -2i \Rightarrow (0, -2)$
$z_4 = 2 + i \Rightarrow (2, 1)$
$z_5 = -2 + i \Rightarrow (-2, 1)$



**Observações:**

1ª) Os números complexos reais pertencem ao eixo **x**, mantendo a correspondência segundo a qual para cada número real existe um ponto da reta.

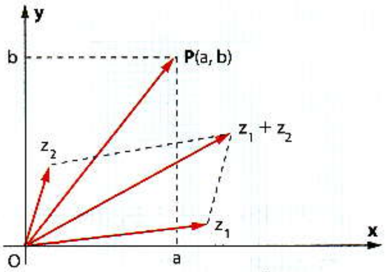
2ª) Os números imaginários puros pertencem ao eixo **y**.

3ª) Os demais números complexos ($a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de **a** e **b**.

4ª) Para cada número complexo existe um único ponto do plano e vice-versa.

5ª) Podemos associar a cada complexo $z = a + bi$ um único vetor com extremidades no ponto **O**, origem do sistema de coordenadas cartesianas, e no ponto **P**(a, b).

Nesse plano complexo, além do número complexo $z = a + bi$, estão representados outros dois números complexos, $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, e a soma deles, $z_1 + z_2$ (diagonal do paralelogramo formado por $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$).



6ª) A associação dos números complexos $z = a + bi$ aos vetores permite o uso dos números complexos em diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade em nível superior; o aluno que optar por um curso superior na área de exatas descobrirá que corrente elétrica, voltagem, impedância, etc. são todos números complexos.

## Exercícios resolvidos

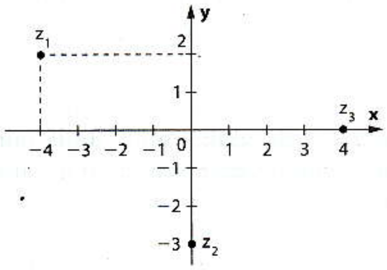
**14.** Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = 4$, localize, no plano complexo, os pontos correspondentes a cada número.

**Resolução:**

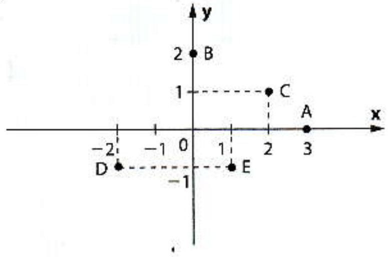
$z_1 = -4 + 2i \Rightarrow (-4, 2)$

$z_2 = -3i \Rightarrow (0, -3)$

$z_3 = 4 \Rightarrow (4, 0)$



**15.** Determine os números complexos correspondentes aos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E** na figura abaixo.



**Resolução:**

**A**(3, 0) $\Rightarrow z = 3$

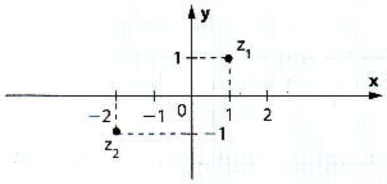
**B**(0, 2) $\Rightarrow z = 2i$

**C**(2, 1) $\Rightarrow z = 2 + i$

**D**(−2, −1) $\Rightarrow z = -2 - i$

**E**(1, −1) $\Rightarrow z = 1 - i$

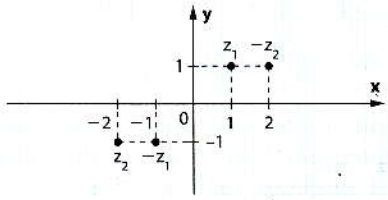
**16.** Dados os pontos correspondentes aos números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z}$, descubra os pontos correspondentes aos números $\mathbf{-z_1}$ e $\mathbf{-z_2}$.



**Resolução:**

**P**(1, 1) $\Rightarrow z_1 = 1 + i \Rightarrow -z_1 = -1 - i \Rightarrow$
$\Rightarrow$ **P'**(−1, −1)

**Q**(−2, −1) $\Rightarrow z_2 = -2 - i \Rightarrow -z_2 = 2 + i \Rightarrow$ **Q'**(2, 1)



**17.** Localize os pontos do plano correspondentes aos números complexos $z = a + bi$, nos seguintes casos:

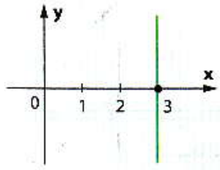
a) $a = 3$

b) $a \geqslant 0$ e $b \leqslant 0$

c) $a < 0$ e $b = 0$

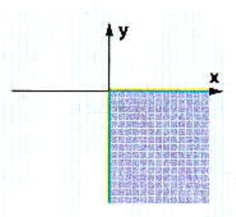
**Resolução:**

a) $a = 3$



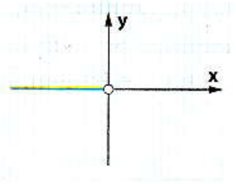
Pontos $z = a + bi$, com $a = 3$ e **b** qualquer.

b) $a \geqslant 0$ e $b \leqslant 0$



Pontos $z = a + bi$, com $a \geqslant 0$ e $b \leqslant 0$.

c) $a < 0$ e $b = 0$



Pontos $z = a + bi$, com $a < 0$ e $b = 0$.

**18.** Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

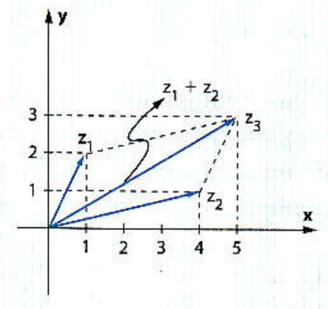
**Resolução:**

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem:

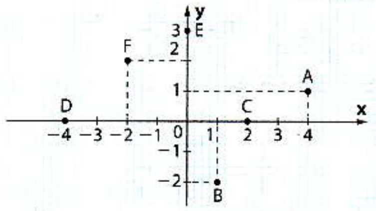
Observe que $\mathbf{z_3}$ corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.



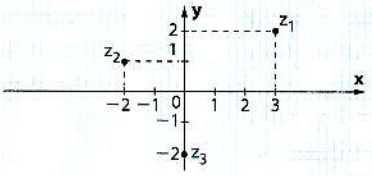
## Exercícios propostos

**18.** Num mesmo plano complexo, localize os pontos correspondentes aos seguintes números complexos:
$z_1 = -3 + 3i$; $z_2 = 1 + 4i$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -4i$;
$z_5 = 2 - 3i$; $z_6 = 3$; $z_7 = -4$.

**19.** Escreva os números complexos correspondentes aos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** do plano:



**20.** Dados os pontos correspondentes aos números complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ e $\mathbf{z_3}$, descubra os pontos correspondentes aos números complexos $-\mathbf{z_1}$, $-\mathbf{z_2}$ e $-\mathbf{z_3}$.



**21.** Localize os pontos do plano correspondentes aos números complexos $z = a + bi$, nos seguintes casos:

a) $b = -2$

b) $a = -1$ e $b > 0$

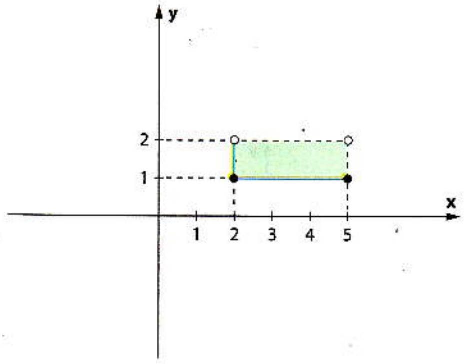
c) $a = 0$ e $b > 0$

d) $a \leqslant 3$ e $b \geqslant -3$

e) $a > 0$

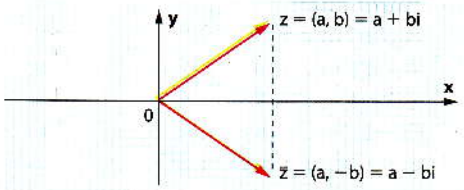
f) $a > 2$ e $b \geqslant 3$

**22.** Determine os possíveis valores reais de **a** e **b** para que os pontos correspondentes aos números $z = a + bi$ estejam na região colorida.



## Interpretação geométrica do conjugado

Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de **z** é representado pelo simétrico de **z** em relação ao eixo **x**.

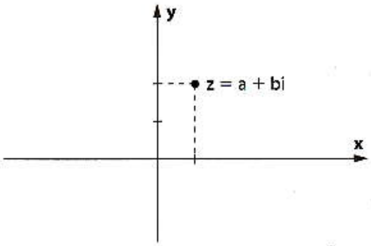


## Exercícios propostos

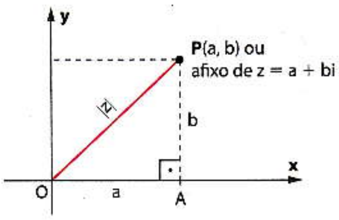
**23.** Localize no plano complexo os números complexos dados abaixo e seus respectivos conjugados:

a) $z = 1 + 3i$
b) $z = -1 - i$
c) $z = 3i$
d) $z = 3$
e) $z = 3 - 2i$
f) $z = -5 + 4i$
g) $z = -2i$
h) $z = -5$

**24.** Dada a figura, localize nela os números complexos $-\mathbf{z}$, $\overline{\mathbf{z}}$ e $-\overline{\mathbf{z}}$.



# 6 Módulo de um número complexo



Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas **O** ao afixo de **z**.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAP, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observemos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes.

Então podemos dizer que, dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se *módulo* de **z** e indica-se por $|z|$ o número real positivo ou nulo dado por:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Observação:** Uma conexão interessante com a Geometria analítica é que, pensando nos complexos **z** e **w** como pontos no plano, o módulo da diferença é a distância entre os dois pontos: $|z - w| = d(z, w)$.

## Exercícios resolvidos

**19.** Determine o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 + 3i$
b) $z = 3i$
c) $z = -1 - 2i$
d) $z = \frac{1}{2}$
e) $z = -3$
f) $z = 0$

**Resolução:**

a) Se $z = 2 + 3i$, então:

$$|z| = |2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

b) Se $z = 3i$, então:

$$|z| = |3i| = \sqrt{9} = 3$$

c) Se $z = -1 - 2i$, então:

$$|z| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

d) Se $z = \frac{1}{2}$, então:

$$|z| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

e) Se $z = -3$, então:

$$|z| = |-3| = 3$$

f) Se $z = 0$, então:

$$|z| = |0| = 0$$

**20.** Descubra a distância do ponto **A**(1, 2) ao ponto **B**(5, −1).

**Resolução:**

*1º processo:*

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

*2º processo:*

$z = 1 + 2i$ e $w = 5 - i$

$z - w = -4 + 3i$

$$d(A, B) = |z - w| = |-4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

## Propriedades envolvendo módulo

1ª) Se **z** é um número complexo, então:

$z\overline{z} = |z|^2$

Demonstração:

Sabemos que:

$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Logo:

$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}$

Portanto, $z\overline{z} = |z|^2$.

2ª) Se **z** é um número complexo, então:

$|z| = |\overline{z}|$

Demonstração:

Dado $z = a + bi$, temos:

$\overline{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Portanto, $|z| = |\overline{z}|$.

3ª) Se $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ são números complexos, então:

$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

Demonstração:

Usando a primeira propriedade, temos:

$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2})$ Ⓘ

Mas sabemos que:

$\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ Ⓘⓘ

Então, substituindo Ⓘⓘ em Ⓘ, vem:

$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2 = (z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$

Como o módulo é um número positivo ou nulo, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros e chegamos ao que queríamos demonstrar:

$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

**Para refletir**

Quando $|z| = 1$, o que ocorre com $z^{-1}$?

### Exercícios propostos

**25.** Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 1 + i$
b) $z = -3 - 2i$
c) $z = -7$
d) $z = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$
e) $z = 3 + 4i$
f) $z = 3i$
g) $z = 3 + 4\sqrt{2}i$
h) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

**26.** Determine o módulo de cada um dos números complexos:

a) $(3 - i)(2 + 2i)$
b) $\dfrac{(2 + 3i)^2}{i}$
c) $\dfrac{3 + 4i}{2 + i}$
d) $\dfrac{(1 + i)(\overline{2 + 3i})}{1 - i}$

**27.** Se $z_1 = 1 - 3i$ e $z_2 = 2 + 5i$, determine:

a) $|z_1| + |z_2|$
b) $|z_1z_2|$
c) $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
d) $|z_1 + z_2|$
e) $|z_1||z_2|$
f) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$
g) $|z_1|^4$
h) $|z_2|^6$
i) $|z_1|^3$

**28.** Localize graficamente os números complexos **z** tal que:

a) $|z| = 4$
b) $|z| > 4$
c) **z** é um imaginário puro e $|z| \geqslant 4$
d) $|z| \leqslant 2$
e) **z** é um imaginário puro e $|z| < 3$

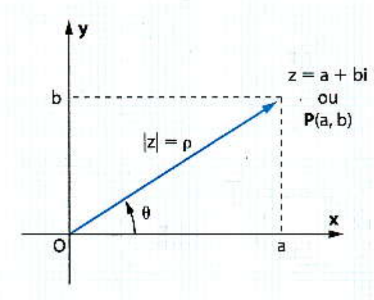
**29.** Prove que, se $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ são dois números complexos quaisquer, com $z_2 \neq 0$, então $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

## 7 Forma trigonométrica dos números complexos

Sabemos que um número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto do plano, de coordenadas (a, b). Essas são as coordenadas cartesianas do ponto **z**. Veremos agora que esse mesmo ponto pode ser representado por suas *coordenadas polares*, que são:

1ª) o módulo do vetor $\overrightarrow{Oz}$, indicado por $|z|$ ou $\rho$, representando a distância do ponto **P** à origem do plano (supondo $|z| \neq 0$);

2ª) o ângulo $\theta$, em que $0 \leqslant \theta < 2\pi$, que o vetor $\overrightarrow{Oz}$ forma com o eixo **x**. Esse ângulo $\theta$ é chamado *argumento* de **z** (ou *argumento principal* de **z**) e indicado por arg(z).



$z = a + bi, z \neq 0$

$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\arg(z) = \theta$

Já vimos em Trigonometria que:

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$ $\quad$ (com $0 \leqslant \theta < 2\pi$)

**Para refletir**

Devemos considerar $\theta$ a partir do eixo **x**, no sentido anti-horário.

Essas igualdades levam a:

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos:

$z = a + bi = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \operatorname{sen}\theta i = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

Portanto:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

que é chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar* de **z**.

### Exercícios resolvidos

**21.** Determine a representação geométrica e a forma trigonométrica do número complexo dado:

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $z = -1 + i$

d) $z = 2i$

e) $z = -3$

**Resolução:**

a) $z = 1 + i$

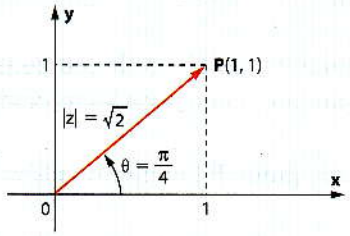
$a = 1$

$b = 1$

Então:

$|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$$



Assim, a forma trigonométrica de **z** é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\,\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Verificação:

Como $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2}{2} + i\cdot\frac{2}{2} = 1 + i$$

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

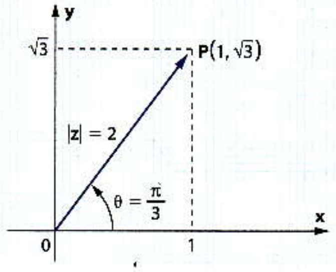
$a = 1$

$b = \sqrt{3}$

Então:

$$|z| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$



Portanto, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

c) $z = -1 + i$

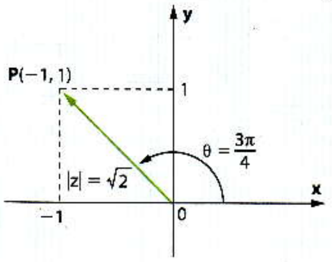
$a = -1$

$b = 1$

Então:

$$|z| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

d) $z = 2i$

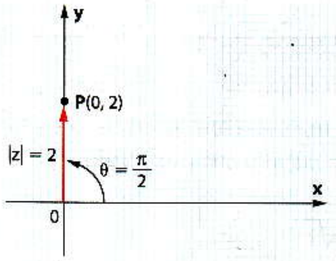
$a = 0$

$b = 2$

Então:

$$|z| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

e) $z = -3$

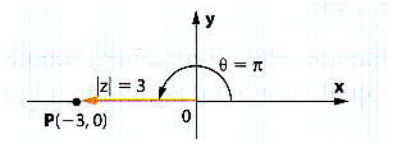
$a = -3$

$b = 0$

Então:

$|z| = |-3| = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-3}{3} = -1 \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{0}{3} = 0 \\ \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \pi$$



Logo, a forma trigonométrica é dada por:

$z = 3(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$

**22.** Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $z = 8\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

**Resolução:**

a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{2} =$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Logo, $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) $z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}(0 + i \cdot 1) =$

$= \sqrt{3} \cdot 0 + i\sqrt{3} \cdot 1 = i\sqrt{3}$

Logo, $z = i\sqrt{3}$.

c) $z = 8\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right) =$

$= 8\left[-\cos\dfrac{\pi}{6} + i\left(-\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = 8\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] =$

$= -4\sqrt{3} - 4i$

Logo, $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

## Exercícios propostos

**30.** Dê a representação geométrica e a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) $\sqrt{3} + i$

b) $-\sqrt{3} + i$

c) $\sqrt{3} - i$

d) $-\sqrt{3} - i$

**31.** Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $6i$

b) $2 + 2i$

c) $-8\sqrt{3} + 8i$

d) $4$

e) $2 - 2i$

f) $-3$

g) $i$

**32.** Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $5(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0)$

c) $\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}$

d) $4(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$

e) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

**33.** Determine o valor do arg(z) dos números complexos:

a) $z = \dfrac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$

b) $z = \dfrac{i}{-2 - 2i}$

**34.** Dados os números complexos $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 3i$:

a) coloque-os na forma trigonométrica;

b) efetue o produto $z_1z_2$ e coloque-o na forma trigonométrica;

c) constate que $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ e que $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

## Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Consideremos os números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, dados na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$$

O produto $z_1z_2$ é dado por:

$$z_1z_2 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)|z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) = |z_1||z_2|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) =$$
$$= |z_1||z_2|[(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) + i(\text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1)] = |z_1||z_2|[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto:

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Assim, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à 1ª volta ($0 \leq \arg(z_1z_2) < 2\pi$).

### Exercício resolvido

**23.** Calcule o produto $z_1z_2$ com

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right) \text{ e}$$

$$z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}\right).$$

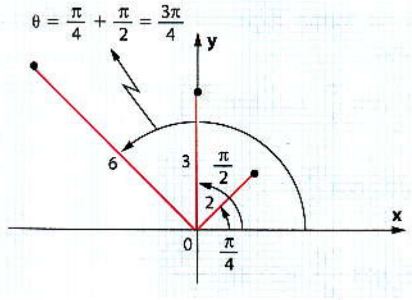
**Resolução:**

Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$z_1z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:



Em $z_1z_2$ houve uma rotação positiva a $\mathbf{z_1}$ de um ângulo igual ao ângulo de $\mathbf{z_2}$. Ou seja, nesse caso, houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a $\mathbf{z_1}$. Como o argumento de $\mathbf{z_1}$ era $\frac{\pi}{4}$ e $\mathbf{z_1}$ recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo $z_1z_2$ é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$ ou $|z_1||z_2|$.

**Observação**: A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual *basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos*, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos.

## Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Dados os números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$$

podemos obter o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, para $z_2 \neq 0$, assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)]$$

**Para refletir**

Faça a demonstração mencionada.

A demonstração dessa relação pode ser feita mostrando que o produto de $\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)]$ por $\mathbf{z_2}$ é igual a $\mathbf{z_1}$.

Assim, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica, com o segundo número diferente de 0, é o número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à 1ª volta $\left(0 \leq \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) < 2\pi\right)$.

## Exercício resolvido

**24.** Calcule o quociente

$\frac{z_1}{z_2}$ para $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ e

$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$.

**Resolução:**

Substituindo $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ na fórmula dada, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$.

**Para refletir**

$\frac{7\pi}{4}$ é o ângulo côngruo de $-\frac{\pi}{4}$ tal que $0 \leq \frac{7\pi}{4} < 2\pi$.

## Exercícios propostos

**35.** Dados os números complexos

$z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$ e

$w = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, calcule zw, $\mathbf{w^2}$, $\frac{z}{w}$ e $\frac{w}{z}$.

**36.** Determine o número complexo $\mathbf{z_1}$, sabendo que

$z_2 = 10\left(\cos\frac{\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)$ e

$z_1z_2 = 20\sqrt{3}\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i \cdot \text{sen}\,\frac{17\pi}{18}\right)$.

**Para refletir**

Os números obtidos devem ter seus argumentos tal que $0 \leq \theta < 2\pi$.

## Potenciação de números complexos na forma trigonométrica – a primeira fórmula de De Moivre*

A potência $\mathbf{z^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{\text{n fatores}}$.

Assim, se um número complexo **z** está escrito na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot ... \cdot z}_{\substack{\text{multiplicação}\\ \text{de n fatores}}} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot ... \cdot |z|}_{\substack{\text{produto de n}\\ \text{módulos}}} \cdot [\cos\underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{\substack{\text{soma de n}\\ \text{argumentos}}} + i \cdot \text{sen}\,\underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{\substack{\text{soma de n}\\ \text{argumentos}}}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}\,(n\theta)]} \text{ (fórmula de De Moivre)}$$

Para n = 0, temos:

$$z^0 = |z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}\,(0 \cdot \theta)] = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0) = 1(1 + 0) = 1$$

Assim, podemos dizer que a potência de ordem **n** de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a **n** e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por **n**, reduzido à primeira volta $(0 \leq \arg(z^n) < 2\pi)$.

---

* Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês.

## Exercícios resolvidos

**25.** Dado o número $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, determine $\mathbf{z^7}$.

**Resolução:**

Na forma trigonométrica, temos:

$$z^7 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right]^7 =$$

$$= 2^7\left(\cos 7 \cdot \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,7 \cdot \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 128\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $z^7 = 128\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$.

Na forma algébrica, vem:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z^7 = 128\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= 128\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right) = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}\,i$$

Logo, $z^7 = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}\ i$.

**26.** Calcule a potência $(1 - i)^{10}$.

**Resolução:**

Uma das maneiras é multiplicar $(1 - i)$ por ele mesmo, usando dez fatores. Outra é desenvolver a expressão $(1 - i)^{10}$ usando o binômio de Newton. Uma terceira maneira é escrever o número complexo $(1 - i)$ na forma trigonométrica e usar a fórmula de De Moivre. Assim, temos:

$z = 1 - i$

$a = 1$

$b = -1$

Então:

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{7\pi}{4}$$

Assim:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo:

$$z^{10} = (1 - i)^{10} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left[\cos\left(10 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

Mas:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5$$

$$10 \cdot \frac{7\pi}{4} = \frac{70\pi}{4} = \frac{35\pi}{2}$$

$\frac{35\pi}{2}$ corresponde a oito voltas mais $\frac{3\pi}{2}$, isto é:

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2} = 8 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Ou seja, $\frac{35\pi}{2}$ é côngruo de $\frac{3\pi}{2}$.

Portanto:

$$z^{10} = (1 - i)^{10} = 2^5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$$

Na forma algébrica, temos:

$z^{10} = (1 - i)^{10} = 32[0 + i(-1)] =$

$= 32 \cdot 0 - 32i = -32i$

Logo, $z^{10} = -32i$.

**27.** Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}^*$, para o qual $\left(2\sqrt{3}\,i + 2\right)^n$ é real e positivo.

**Resolução:**

Passando o número $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ para a forma trigonométrica:

$$|z| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ (60°)$$

Usando a fórmula de De Moivre, temos:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \cdot \text{sen}\,n\theta) =$$

$$= 4^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{n\pi}{3}\right)$$

Para que $\mathbf{z^n}$ seja real e positivo, devemos ter:

$$\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = 0 \qquad \cos\frac{n\pi}{3} > 0$$

Como $n \in \mathbb{N}^*$, fazemos:

$n = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{1\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

$n = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

$n = 3 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{3\pi}{3} = \text{sen}\,\pi = 0$ e $\cos\frac{3\pi}{3} = \cos\pi =$

$= -1 < 0$

⋮

⋮

$n = 6 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{6\pi}{3} = \text{sen}\,2\pi = 0$ e $\cos\frac{6\pi}{3} =$

$= \cos 2\pi = 1 > 0$

Logo, o menor valor de $n \in \mathbb{N}^*$ é 6.

Nesse caso, temos:

$\left(2\sqrt{3}i + 2\right)^6 = 4^6(\cos 2\pi + i \cdot \text{sen}\,2\pi) = 4\,096$ (real positivo)

**Para refletir**

Verifique para n = 4 e n = 5.

## Exercícios propostos

**37.** Determine o produto $z_1z_2$ e o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ para:

a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ e

$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$ e

$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

**38.** Determine o produto $z_1z_2$ e dê a sua interpretação geométrica, nos casos:

a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ e

$z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$

b) $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$ e

$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

**39.** Calcule os valores das potências $\mathbf{z^2}$, $\mathbf{z^3}$ e $\mathbf{z^9}$, sabendo que $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$.

**40.** Usando a fórmula de De Moivre, calcule as potências:

a) $(1 - i)^3$

b) $(3 - 3i)^5$

c) $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^7$

d) $\left(-1 - \sqrt{3}i\right)^{100}$

e) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$

f) $\left(\sqrt{3} + i\right)^9$

g) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$

h) $(-3i)^{17}$

**41.** Sabendo que $z_1 = 2(\cos 30° + i \cdot \text{sen}\,30°)$ e $z_2 = 3(\cos 150° + i \cdot \text{sen}\,150°)$, determine:

a) $z_1z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

c) $z_1^3$

d) $z_2^{99}$

## Radiciação – raízes enésimas de números complexos

Dado um número complexo **z** e um número natural **n**, $n > 1$, definimos em $\mathbb{C}$:

Raiz enésima de **z** é um número complexo $\omega$ tal que $\omega^n = z$.

**Exemplos:**

1º) 2, −2, 2i e −2i são as raízes quartas do número complexo 16.

2, pois $2^4 = 16$

−2, pois $(-2)^4 = 16$

2i, pois $(2i)^4 = 16$

−2i, pois $(-2i)^4 = 16$

Há, portanto, em $\mathbb{C}$, quatro raízes quartas de 16.

2º) **i** e **−i** são as raízes quadradas do número complexo −1.

**i**, pois $i^2 = -1$

**−i**, pois $(-i)^2 = -1$

Há, portanto, em $\mathbb{C}$, duas raízes quadradas de −1.

3º) 3 e $-3$ são as raízes quadradas do número complexo 9.
3, pois $3^2 = 9$
$-3$, pois $(-3)^2 = 9$
Há, portanto, em $\mathbb{C}$, duas raízes quadradas de 9.

4º) 1, $-1$, **i** e **$-$i** são as raízes quartas do número complexo 1.
1, pois $1^4 = 1$
$-1$, pois $(-1)^4 = 1$
**i**, pois $i^4 = 1$
**$-$i**, pois $(-i)^4 = 1$
Há, portanto, em $\mathbb{C}$, quatro raízes quartas de 1.

5º) A única raiz quinta de 0 é 0, pois 0 é o único número complexo tal que $0^5 = 0$.

A pergunta então é: Quantas são as raízes enésimas de um número complexo $z \neq 0$ e como podemos determiná-las? Veremos isso com a *segunda fórmula de De Moivre*.

## A segunda fórmula de De Moivre

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de **z** significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega|(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$$

de modo que $\omega^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números $\omega$ tal que:

$$[|\omega|(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)]^n = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$|\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha) = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Da igualdade:

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha) = z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

vem $|\omega|^n = |z|$, $\cos n\alpha = \cos\theta$ e $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\theta$.

De $|\omega|^n = |z|$, temos $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$ (sempre real e positivo).

De $\cos n\alpha = \cos\theta$ e $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\theta$, temos:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ (com } k \in z\text{)}$$

Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k \leq n - 1$.

Assim, concluímos que:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$ (segunda fórmula de De Moivre) para $k = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$

Após $k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos **n** raízes distintas.

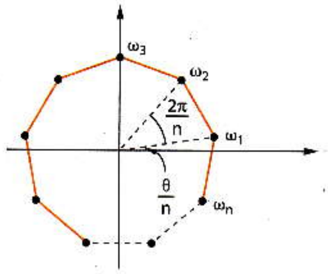
Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Assim, qualquer número complexo **z**, não-nulo, admite **n** raízes enésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Geometricamente, as **n** raízes são vértices de um polígono regular de **n** lados.

Logo, sabendo uma delas e sabendo quantas são no total, é possível obter as $n - 1$ raízes desconhecidas.



## Exercícios resolvidos

**28.** Determine as raízes cúbicas de **−i** e interprete-as geometricamente.

**Resolução:**

Escrevendo **z** na forma trigonométrica, temos:

$z = -i$

$a = 0$

$b = -1$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

**Para refletir**

Números complexos da forma $z = ai$ têm argumento $\frac{\pi}{2}$ para $a > 0$ e $\frac{3\pi}{2}$ para $a < 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

Portanto:

$$z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, vem:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ (real positivo)

Como $n = 3$, então **k** poderá ser 0, 1 ou 2. Assim, temos:

- para $k = 0$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- para $k = 1$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- para $k = 2$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Observe que $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{4\pi}{6}$.

Assim, as raízes cúbicas de **−i** são:

$$\omega_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$\omega_1 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

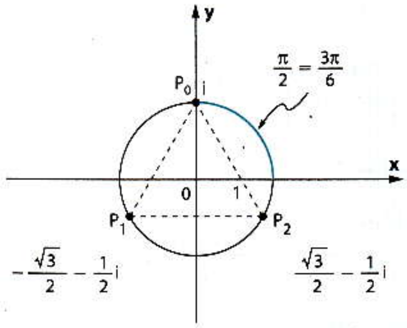
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega_2 = 1\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Interpretando geometricamente, as três raízes cúbicas estão sobre uma circunferência de raio $|\omega| = 1$ e dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{4\pi}{6}$rad, formando um triângulo eqüilátero de vértices $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$. Se calculássemos $\omega_3$, encontraríamos $\omega_3 = \omega_0$ e $\mathbf{P_3}$ coincidiria com $\mathbf{P_0}$. E assim por diante: $P_4 \equiv P_1$, $P_5 \equiv P_2$, etc.



**29.** Encontre as raízes quartas do número complexo $1 + i$.

**Resolução:**

$z = 1 + i$

$a = 1$

$b = 1$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

**Para refletir**

Para $a > 0$, temos:

$a + ai \Leftrightarrow$ argumento $\frac{\pi}{4}$; $-a + ai \Leftrightarrow$ argumento $\frac{3\pi}{4}$;

$-a - ai \Leftrightarrow$ argumento $\frac{5\pi}{4}$; $a - ai \Leftrightarrow$ argumento $\frac{7\pi}{4}$.

Portanto:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$$

Como $n = 4$, então **k** poderá ser 0, 1, 2 e 3. Assim:

- para $k = 0$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 0}{4} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$

- para $k = 1$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{4} = \frac{9\pi}{16}$$

- para $k = 2$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4} = \frac{\frac{17\pi}{4}}{4} = \frac{17\pi}{16}$$

- para $k = 3$:

$$\frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{4} = \frac{25\pi}{16}$$

Observe que os argumentos $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}$ formam uma PA de razão $\frac{8\pi}{16}$. As raízes quartas de **z** são dadas por:

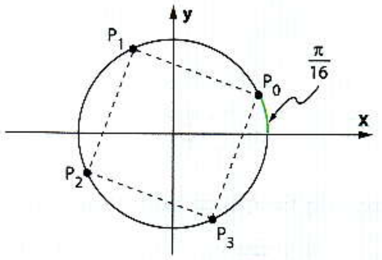
$$\omega_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$\omega_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right)$$

Geometricamente, as quatro raízes quartas estão sobre uma circunferência de raio $\sqrt[8]{2}$ e dividem a circunferência em quatro arcos congruentes a $\frac{8\pi}{16}$ rad, formando um quadrado de vértices $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3}$.



**30.** Determine as raízes enésimas do número complexo 1.

**Resolução:**

$z = 1$

$a = 1$

$b = 0$

$|z| = |1| = 1$

**Para refletir**

Todo número real positivo ou nulo tem argumento 0 e todo número real negativo tem argumento $\pi$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{0}{1} = 0 \\ \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = 0$$

Portanto:

$z = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\, 0)$

Pela segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$\omega_k = \sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{0 + 2k\pi}{n}\right)$$

em que $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n - 1)$.

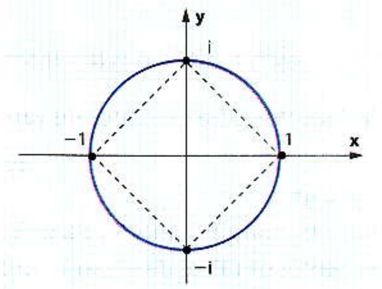
Portanto, as raízes enésimas da unidade são dadas por:

$$\sqrt[n]{1} = 1\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$$

Por exemplo, as raízes quartas da unidade são obtidas por (n = 4, k = 0, k = 1, k = 2, k = 3):

- para k = 0:
  $\omega_0 = 1(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0) = 1$
- para k = 1:
  $\omega_1 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4}\right) = 1(0 + i) = i$
- para k = 2:
  $\omega_2 = 1\left(\cos \frac{4\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4}\right) = 1(-1 + i \cdot 0) = -1$
- para k = 3:
  $\omega_3 = 1\left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4}\right) = 1[0 + i(-1)] = -i$

Geometricamente, as **n** raízes enésimas da unidade estão sobre a circunferência de raio 1 e dividem a circunferência em **n** partes congruentes a $\frac{2\pi}{n}$. Neste exemplo, a circunferência ficou dividida em quatro arcos congruentes a $\frac{\pi}{2}$.



**Observação**: Se ω é uma das raízes enésimas de um número complexo **z** e $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ são raízes enésimas da unidade, então $\omega\mu_1, \omega\mu_2, ..., \omega\mu_n$ são as raízes enésimas de **z**. Por exemplo, para determinar as raízes quartas de 81:

$3^4 = 81 \Rightarrow \omega = 3$ (é uma raiz quarta de 81)

Como as raízes quartas da unidade são $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = i$, $\mu_3 = -1$ e $\mu_4 = -i$, então as quatro raízes quartas de 81 são:

$\omega\mu_1 = 3 \cdot 1 = 3$

$\omega\mu_2 = 3 \cdot i = 3i$

$\omega\mu_3 = 3(-1) = -3$

$\omega\mu_4 = 3(-i) = -3i$

## Exercícios propostos

**42.** Determine as raízes quadradas dos seguintes números complexos e dê sua representação geométrica:
a) $-4$ b) $-i$ c) $1 - i$ d) $1 - \sqrt{3}i$

**43.** Determine as raízes quartas dos seguintes números complexos e dê sua representação geométrica:
a) $-1$
b) $-1 - \sqrt{3}i$
c) $-i$
d) $-8 - 8\sqrt{3}i$
e) $\sqrt{3} + i$

**44.** Calcule as raízes sextas de 729.

**45.** Encontre as raízes cúbicas dos seguintes números complexos e dê sua representação geométrica:
a) 125 b) $-27$ c) $8i$ d) $1 - i$

**46.** Calcule e represente geometricamente as raízes:
a) cúbicas da unidade;
b) quintas da unidade;
c) sextas da unidade.

**47.** Um hexágono regular está inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ e um de seus vértices é o afixo de $z = 2i$. Determine os outros cinco vértices.

## 8 Equações binômias e trinômias

Qualquer equação que possa ser reduzida à forma:

$$ax^n + b = 0 \quad (\text{com } a \in \mathbb{C} \text{ e } b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

é chamada *equação binômia*.

Para resolvê-la, isolamos $\mathbf{x^n}$ no primeiro membro e aplicamos a segunda fórmula de De Moivre:

$$ax^n + b = 0 \Leftrightarrow x^n = \frac{-b}{a}$$

Essa equação admite **n** raízes enésimas de $\frac{-b}{a}$.

Outro tipo muito comum de equação que envolve números complexos é o que se pode reduzir à chamada *equação trinômia*:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (\text{com } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \text{ e } c \in \mathbb{C}, a \neq 0, b \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Para resolvê-la, fazemos uma mudança de variável, $x^n = y$, obtendo uma equação do 2º grau:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cujas soluções são **y′** e **y″**.

Recaímos então nas equações anteriores, pois $y' = x^n$ e $y'' = x^n$.

Resolvendo-as, temos as raízes da equação inicial.

## Exercício resolvido

**31.** Resolva as equações em $\mathbb{C}$:

a) $2x^3 - 16i = 0$ b) $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$

**Resolução:**

a) $2x^3 - 16i = 0 \Rightarrow 2x^3 = 16i \Rightarrow x^3 = 8i$

Vamos procurar as raízes cúbicas de 8i:

$z = 8i$

$a = 0$

$b = 8$

$|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{0}{8} = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \frac{8}{8} = 1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto:

$$z = 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

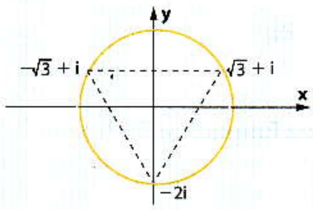
Como $n = 3, k = 0, k = 1, k = 2, \sqrt[3]{8} = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$,

temos:

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$\omega_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{9\pi}{6}\right) = -2i$$



Logo, o conjunto solução da equação $2x^3 - 16i = 0$ é $S = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$.

b) $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$

Fazendo a mudança de variável $x^3 = y$, temos:

$y^2 + 26y - 27 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1(-27)}}{2} =$$

$$= \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = 1$ e $y'' = -27$

Agora, precisamos resolver as equações binômias $x^3 = 1$ e $x^3 = -27$, ou seja, precisamos encontrar as raízes cúbicas de 1 e de −27.

- $x^3 = 1$

  $z = 1 \Rightarrow |z| = 1$

  $\theta = \arg(z) = 0$

  Portanto:

  $$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

  $n = 3, k = 0, k = 1, k = 2$ e $\theta = 0$

  $\omega_0 = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\, 0) = 1$

  $$\omega_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

  $$\omega_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- $x^3 = -27$

  $z = -27 \Rightarrow |z| = 27$

  $\theta = \arg(z) = \pi$

  $\sqrt[3]{27} = 3$

  $$\omega_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

  $\omega_1 = 3(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi) = -3$

  $$\omega_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

Logo, o conjunto solução da equação $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$ é:

$$S = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i\right\}.$$

## Exercícios propostos

**48.** Resolva as equações em ℂ:

a) $x^3 - 8 = 0$
b) $x^2 - i = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^4 - i = 0$
e) $x^6 + 729 = 0$
f) $2x^5 - 64 = 0$
g) $x^4 - (1 + i) = 0$
h) $x^2 + 4x + 5 = 0$
i) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
j) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$
l) $x^2 - 2ix + 3 = 0$
m) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$
n) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

**49.** Constate que $1 + i\sqrt{3}$ é uma das seis soluções da equação $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$.

# 9 Outras aplicações

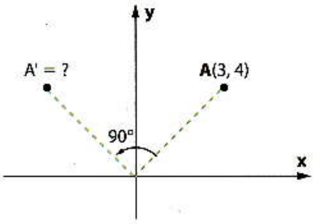
## Exercícios resolvidos

**32.** *Aplicação à Geometria*

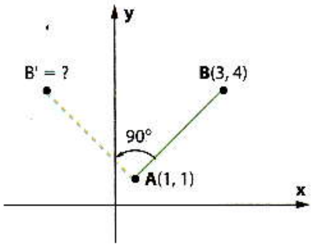
Uma aplicação importante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é possibilitar a rotação de coordenadas no plano. No volume 2 desta coleção vimos algumas aplicações de matrizes à computação gráfica, sendo uma delas a rotação de pontos em relação à origem. Esse mesmo papel anteriormente exercido por uma matriz de rotação pode ser desempenhado pelos números complexos, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um ponto (a, b) deve ser rotacionado, em relação à origem, em $\alpha$ graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo $a + bi$ pelo complexo $1(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$.

De acordo com o texto acima:

a) Encontre as novas coordenadas do ponto **A**(3, 4) após uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação à origem.



b) Encontre as novas coordenadas do segmento AB, com **A**(1, 1) e **B**(3, 4) após uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto **A**.

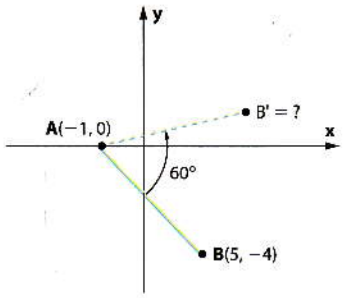


**Resolução:**

a) O ponto **A**(3, 4) representa geometricamente o complexo $z = 3 + 4i$. Para haver uma rotação de 90° no sentido anti-horário, precisamos multiplicar **z** por $1(\cos 90° + i \cdot \text{sen}\,90°)$. Como
$1(\cos 90° + i \cdot \text{sen}\,90°) = i$,
então basta multiplicar **z** por **i**.
$(3 + 4i) \cdot i = -4 + 3i = (-4, 3)$
Então, as novas coordenadas do ponto **A** são −4 e 3, ou seja, **A'**(−4, 3).

b) O ponto **A**(1, 1) e o ponto **B**(3, 4) representam geometricamente os complexos $w = 1 + i$ e $z = 3 + 4i$. Como a rotação é em torno do ponto **A**, devemos rotacionar apenas o número complexo **t** que equivale à diferença $z - w$ (no caso, $t = z - w = 2 + 3i$) e depois somá-lo novamente com **w**. Assim, como visto no item **a**, para haver uma rotação de 90° no sentido anti-horário precisamos multiplicar por **i** e depois somar $t + w$, pois a rotação é em torno de **w**:
$t' = (2 + 3i) \cdot i = -3 + 2i$
$t' + w = -3 + 2i + 1 + i = -2 + 3i$
Assim, as novas coordenadas do ponto **B** são −2 e 3, ou seja, **B'**(−2, 3) e **A**(1, 1).

**33.** Encontre as novas coordenadas do segmento AB, com **A**(−1, 0) e **B**(5, −4), após uma rotação de 60° no sentido anti-horário em relação ao ponto **A**.



**Resolução:**

O complexo responsável pela rotação pedida é

$$1(\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**A**$(-1, 0) = w = -1$

**B**$(5, -4) = z = 5 - 4i$

O complexo **t** que representa AB é

$(5 - 4i) - (-1) = 6 - 4i.$

Efetuando a rotação de **t**, temos:

$$t' = (6 - 4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3\sqrt{3}\, i - 2i + 2\sqrt{3} =$$

$$= \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i$$

Então:

$$w + t' = -1 + \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i =$$

$$= \left(2\sqrt{3} + 2\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i$$

ou seja, **B'**$\left(2\sqrt{3} + 2, 3\sqrt{3} - 2\right)$. O ponto **A** se mantém **A**$(-1, 0)$, após a rotação.

**34.** *Aplicação à Engenharia elétrica*

Em circuitos de corrente alternada, por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação U = Ri, estudada na Física do ensino médio e que se utiliza dos números reais, torna-se U = Zi, em que **U** é a tensão, **Z** é a impedância e **i** é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre **i**, símbolo da corrente elétrica, e **i**, unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam **j** como unidade imaginária na representação algébrica **a + bj**. Além disso, usam a notação $|w| \angle \theta$ para a forma trigonométrica $|w|(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$ do número complexo **w**.

Baseado no texto acima resolva o problema a seguir: Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220 \angle 0°$, alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j)$ ohm. Obtenha a corrente fornecida pela fonte.

**Resolução:**

$$U = Zi \Rightarrow i = \frac{U}{Z}$$

Para efetuar essa divisão, é preferível ter **U** e **Z** na forma trigonométrica.

Já temos $U = 220 \angle 0° = 220(\cos 0° + i \cdot \text{sen } 0°)$, e agora precisamos obter a forma trigonométrica de **Z**:

$$Z = 10 + 10j \Rightarrow |Z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \theta = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \text{sen } \theta = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 45°$$

Então:

$$10 + 10j = 10\sqrt{2}\,(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°) = 10\sqrt{2} \angle 45°$$

Assim:

$$i = \frac{U}{Z} = \frac{220}{10\sqrt{2}}\,[\cos(0° - 45°) + i \cdot \text{sen } (0° - 45°)] =$$

$$= 11\sqrt{2}\,[\cos(-45°) + i \cdot \text{sen } (-45°)] =$$

$$= 11\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) = 11 - 11j$$

(ou $11\sqrt{2} \angle -45°$)

## Exercícios propostos

**50.** Qual número complexo, na forma algébrica, deve ser usado para se conseguir uma rotação de:

a) 45° anti-horário;
c) 90° horário.
b) 180° anti-horário;

**51.** Considerando as informações do *exercício resolvido 34*, resolva o problema:

Uma fonte de tensão, de valor eficaz $110 \angle 0°$, fornece uma corrente de $i = 11 \angle 60°$ para alimentar uma carga. Qual é a impedância **Z** dessa carga?

**52.** Dado $\overline{AB}$, lado de um triângulo eqüilátero ABC, com **A**(2, 1) e **B**(6, 3), obtenha o vértice **C** sabendo que ele pertence ao 1º quadrante.

## Atividades adicionais

**1.** Efetue as operações indicadas, escrevendo o resultado na forma algébrica $z = a + bi$.

a) $(1 - 3i) + (2 + 5i)$
b) $(-3 + i) + (-2 - 5i)$
c) $\left(\frac{1}{2} + i\right) + \left(\frac{1}{3} - i\right) + i$
d) $(1 - 5i) - (2 - 7i)$
e) $(1 - i) + (3 + i) - (2 - i)$
f) $i + (3 - i) - 2$
g) $(-2 - i) - (-3 - i) - (2 + i)$
h) $\left(1 + \frac{1}{3}i\right) - \left(2 - \frac{1}{4}i\right) + \left(1 + \frac{1}{6}i\right)$
i) $\left(1 + \frac{1}{3}i\right) + (-1 - 2i)$
j) $(-2 + 3i) + (1 - 2i) + (3 - 5i)$
l) $(2 + 4i) - (1 + 2i)$
m) $\left(\frac{1}{3} - i\right) - \left(\frac{1}{2} + 2i\right)$
n) $(3 - i) - (-2 - i) + (-1 - i)$
o) $3 + (-4 - i) - i$
p) $\left(\frac{1}{2} + i\right) - \left(\frac{1}{3} - i\right) + \left(\frac{1}{5} + i\right)$
q) $2i - (1 - i) - 3$

**2.** Efetue as operações indicadas, escrevendo o resultado na forma algébrica $z = a + bi$.

a) $(3 + 2i)(2 - 4i)$
b) $(1 - 2i)(2 - 5i)$
c) $(1 + 3i)(2 - 2i)(1 - 2i)$
d) $(2 + 3i)(3i)$
e) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right)\left(\frac{1}{3} - 3i\right)$
f) $\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{2} + 2i\right)$
g) $(3 - 2i)^3$
h) $(6 + 3i)(3 - 4i) + (5 - i)(1 + 3i)$
i) $(1 - i)^2(1 + i) - (1 - i)(1 + i)^2$
j) $(2 - 5i)(1 + 3i)$
l) $(1 - i)^2$
m) $(1 + i)^3$
n) $3(1 + i)(2 - i)$
o) $(-1 - i)^2(2 - i)$
p) $\left(3 - \sqrt{3}i\right)(2i - 1)^2$
q) $(2 - i) + i - (4 + 3i)i$
r) $(1 + i)(1 + i)^3(1 + i)^{-1}$
s) $3(7 + 2i) - [(5 + 4i) + 1]i$

**3.** Qual o valor de **m** para que o produto $(2 + mi)(3 + i)$ seja um imaginário puro?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 10

**4.** Determine os números reais **a** e **b** tais que $(9 - a) + b \cdot i = (b + 1) + a \cdot i$.

**5.** Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que $(x + y \cdot i)(1 - 3 \cdot i) = -13 - i$.

**6.** Determine o número complexo $z = x + y \cdot i$ tal que $z^2 = 8i$.

**7.** O valor de $i^{19981999876543210}$ é:

a) 0. b) 1. c) −1. d) i. e) −i.

**8.** Se **i** representa o número complexo cujo quadrado é igual a −1, determine o valor numérico da soma $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{27}$.

**9.** O valor da soma $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{1\,996}$ onde **i** é a unidade imaginária, é igual a:

a) 0. b) −1. c) 1. d) i. e) −i.

**10.** Calculando o valor da expressão

$$\frac{i + i^2 + i^5 + i^6 + ... + i^{41} + i^{42}}{i^3 + i^4 + i^7 + i^8 + ... + i^{43} + i^{44}}$$ obtemos:

a) 1.
b) −1.
c) i − 1.
d) i + 1.
e) −i + 1.

**11.** Simplificando $\frac{(2 + i)^{101} \cdot (2 - i)^{50}}{(-2 - i)^{100} \cdot (i - 2)^{49}}$ temos:

a) 1.
b) 2 + i.
c) 2 − 1.
d) 5.
e) −5.

**12.** Calcule $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$.

a) 32
b) 32i
c) 64i
d) 64
e) 32 + 32i

**13.** Escreva na forma $z = a + bi$ os números complexos:

a) $z = \frac{3 + i\sqrt{2}}{2 - i\sqrt{2}}$
b) $z = \frac{(2 + i)^2}{1 + i}$
c) $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2 + i}\right)^3$

**14.** Prove que:

a) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$ (isto é, o conjugado da diferença indicada é igual à diferença dos conjugados).
b) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$ (isto é, se $z = a + bi$, então $z + \overline{z} = 2a$).
c) $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)$ (isto é, se $z = a + bi$, então $z - \overline{z} = 2bi$).
d) $\overline{\overline{z}} = z$ (isto é, o conjugado do conjugado de um número complexo é igual ao próprio número).

**15.** Calcule:

a) $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$ b) $\dfrac{2+i}{i}-\dfrac{(1-2i)^2}{1+i}$

**16.** Determine o número complexo **z** tal que:

a) $i \cdot z + 3(\overline{z} - 1) = 6 + 11i$;

b) $(1 + i)z - (1 + 2i)\overline{z} = -9 + 5i$.

**17.** Resolva a equação $3z + 2 = 2\overline{z} - 3$.

**18.** Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, quando:

a) $z_1 = 2 + 2i$ e $z_2 = 4 + 3i$

b) $z_1 = 1$ e $z_2 = 4$

c) $z_1 = 4 - 2i$ e $z_2 = 1 - i$

d) $z_1 = -2 + i$ e $z_2 = -1 + 4i$

**19.** Dê exemplo de operação que seja:

a) impossível em $\mathbb{N}$ e possível em $\mathbb{Z}$;

b) impossível em $\mathbb{Z}$ e possível em $\mathbb{Q}$;

c) impossível em $\mathbb{Q}$ e possível em $\mathbb{R}$;

d) impossível em $\mathbb{R}$ e possível em $\mathbb{C}$.

**20.** Calcule a distância de $(-1, -4)$ a $(0, 3)$, usando dois processos diferentes.

**21.** Encontre o número **z** tal que $z^2 = 15 - 8i$.

**22.** Determine **z** tal que:

a) $z - 1^{27} = 2z + i^{20}$ b) $2\overline{z} + i^4 = z - 6i^{28}$

**23.** Calcule os valores reais de **a** e **b** para que $z = 3a - bi + 2ai - 6$ seja imaginário puro.

**24.** Marque no plano complexo os números complexos $z = a + bi$ tal que:

a) $a = 2$ e $b < 3$ b) $2a + b = 5$

**25.** Em que quadrante fica o ponto correspondente ao número complexo $z = \dfrac{2 - i^{35}}{3 + i}$?

**26.** Calcule os valores de:

a) $(2i)^4$ b) $(-i)^{23}$ c) $i^{-1}$ d) $i^{\frac{2}{5}}$

**27.** Determine o valor de $(1 - i)^2$.

**28.** Usando o resultado do exercício anterior, determine $(1 - i)^{10}$ e $(1 - i)^{11}$.

**29.** Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 6x + 10 = 0$.

**30.** Determine uma equação do 2º grau que, em $\mathbb{C}$, tenha como raízes $-5 + 2i$ e $-5 - 2i$.

**31.** Preencha as tabelas das operações de adição e multiplicação no conjunto $A = \{-1, 1, -i, i, 0\}$.

| + | −1 | 1 | −i | i | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| −i | | | | | |
| i | | | | | |
| 0 | | | | | |

| × | −1 | 1 | −i | i | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| −i | | | | | |
| i | | | | | |
| 0 | | | | | |

**32.** O conjunto **A** da questão anterior é fechado para a adição, isto é, a adição de dois números de **A** dá sempre um número de **A**? E para a multiplicação? Justifique.

**33.** Escreva as expressões na forma a + bi.

a) $1 - 5i + \overline{(2 + 3i)}$ b) $(2 + 4i)\overline{(4 - 2i)}$

**34.** Trace o vetor correspondente a cada um dos números complexos abaixo e determine seu módulo:

a) $z_1 = 1 + 4i$ c) $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z_2 = 5 - 3i$

**35.** Prove que o ponto médio do segmento de reta que liga $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ é representado por $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

**36.** Verifique, com alguns exemplos, que, para quaisquer dois números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$, temos sempre $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Depois, tente provar.

**37.** O módulo do número complexo $z = \left(\dfrac{1+i}{1-2i}\right)^2$ é:

a) $\dfrac{6}{5}$. d) $\dfrac{3}{5}$.

b) 1. e) $\dfrac{2}{5}$.

c) $\dfrac{4}{5}$.

**38.** Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ d) $(1 + i)(1 - i)$

b) $-i$ e) $\dfrac{1}{i} + (1 + i)$

c) $\dfrac{1}{1+i}$ f) $\dfrac{1-i}{1+i} + (1 + i)$

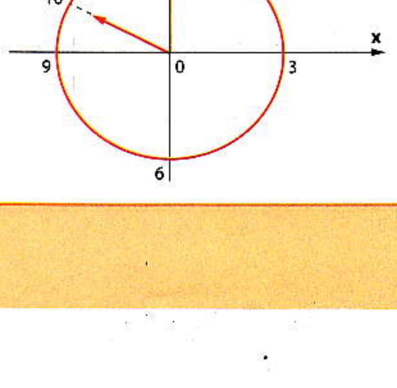
**39.** Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

b) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $6\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

**40.** No plano cartesiano abaixo, representamos um relógio marcando 10 horas.



Se o ponteiro das horas mede 5 cm e o ponteiro dos minutos mede 8 cm, então os números complexos que indicam o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos são, respectivamente, iguais a:

a) $5(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$ e 8i.

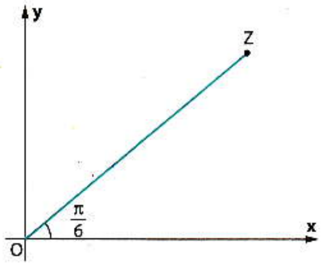
b) $5(\cos 30° - i \cdot \text{sen } 30°)$ e 8i.

c) $5(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$ e $8(\cos 90° - i \cdot \text{sen } 90°)$.

d) $5(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$ e $8(\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°)$.

e) $5(\text{sen } 150° + i \cdot \cos 150°)$ e 8i.

**41.** Considere o seguinte gráfico que representa o número complexo $Z = a + bi$.



Sabendo que o segmento $\overline{OZ}$ mede duas unidades de comprimento, assinale a alternativa correta:

a) $Z = \sqrt{2} + i$

b) $Z = \sqrt{3} + i$

c) $Z = 1 + \sqrt{3}i$

d) $Z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

e) $Z = 1 - \sqrt{3}i$

**42.** A representação de todos os números complexos que têm o módulo igual a uma constante, como, por exemplo, $|z| = 2$, é igual a:

a) um quadrado.

b) um semicírculo.

c) uma circunferência.

d) uma elipse.

e) uma reta.

**43.** Represente, no plano de Argand-Gauss, todos os complexos tais que:

a) $|z + 1 - i| = 1$;

b) $|z + 1 - i| \leq 1$.

**44.** Dos números complexos **z** que satisfazem a condição $|z - 2 - 2i| = 2$, determine:

a) o de maior argumento principal;

b) o de maior módulo.

**45.** Representando no plano de Argand-Gauss os complexos **z**, tal que $|z - 1 + i| \leq 1$, obtemos:

a) uma circunferência de raio 1.

b) um círculo de centro $(1, -1)$ e raio 1.

c) uma reta horizontal.

d) a bissetriz dos quadrantes pares.

e) um semicírculo.

**46.** No plano complexo, o conjunto dos pontos $z = x + yi$ tal que $|z| \leq 1$ e $y \geq 0$ é:

a) uma circunferência.

b) um círculo.

c) um quadrado centrado na origem.

d) um semicírculo.

e) um segmento de reta.

**47.** Calcule o valor das seguintes potências:

a) $\left(\dfrac{1 - i}{i^5}\right)^8$  b) $\dfrac{(1 + i)^3}{(1 - i)^2}$  c) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^{200}$

**48.** Escreva na forma a + bi o número complexo

$$z = \left[2^{\frac{1}{9}}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{12}\right)\right]^{36}.$$

**49.** Calcule as raízes quadradas de $z = 5 + 12i$. (*Sugestão*: Obtenha $w = a + bi$ de modo que $w^2 = 5 + 12i$.)

**50.** Sendo $u = 1 + i$ uma das raízes quartas de um complexo **z**, determine as outras três raízes.

**51.** As raízes quadradas do número $3 + 4i$, onde $i = \sqrt{-1}$, são:

a) $\{2 + i, -2 - i\}$.

b) $\{1 + i, -1 - i\}$.

c) $\{3 + i, -3 - i\}$.

d) $\{4 + i, -4 - i\}$.

**52.** Uma das raízes quartas de um número complexo **z** é 3i. As outras três raízes são:

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}i, \sqrt{3}i, \sqrt{3} - \sqrt{3}i$.

b) $\sqrt{3} + 3i, \sqrt{3} - 3i, -3i$.

c) $3, -3, -3i$.

d) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}i$.

**53.** Dados os números complexos $z = 1 - 3i$ e $w = 1 - i$, determine:

a) $\overline{z}$

b) $|z|$

c) $\arg(w)$

d) o quadrante do afixo de **w**

e) $z + w$

f) $w - z$

g) $zw$

h) $z^2$

i) $\dfrac{z}{w}$

j) $-w$

l) $\dfrac{1}{w}$

m) **w** na forma trigonométrica

**54.** Encontre o número complexo **z** tal que $2z + i^2 = \overline{z} \cdot i^{39}$.

**55.** Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

a) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^2 + 2ix - 5 = 0$

**56.** Determine equações do segundo grau com raízes:

a) $3 - 2i$ e $3 + 2i$;

b) $-2i$ e i.

**57.** Dado o número complexo $z = -1 + \sqrt{3}\,i$, calcule:

a) $z^5$;

b) as raízes quartas de **z**.

**58.** Os pontos **A**, **B** e **C** são os afixos dos números complexos $z_1 = (1 - i)^2$, $z_2 = \dfrac{1}{1 - i}$ e $z_3 = (1 + i)(1 - i)$, respectivamente. A área do triângulo ABC é igual a:

a) 2.

b) 4.

c) $\dfrac{1}{2}$.

d) $\dfrac{1}{4}$.

e) 8.

## Questões de vestibular

**1.** (Fuvest-SP) Determine os números complexos **z** tal que $z + \overline{z} = 4$ e $z\overline{z} = 13$, em que $\boldsymbol{\overline{z}}$ é conjugado de **z**.

**2.** (Mack-SP) A solução da equação $|z| + z = 2 + i$ é um número complexo cujo módulo é:

a) $\frac{5}{4}$.

b) $\sqrt{5}$.

c) 1.

d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

e) $\frac{5}{2}$.

**3.** (Vunesp) Seja **L** o afixo do número complexo $a = \sqrt{8} + i$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy. Determine o número complexo **b**, de módulo igual a 1, cujo afixo **M** pertence ao quarto quadrante e é tal que o ângulo LOM é reto.

**4.** (Vunesp) Considere o número complexo

$u = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, em que $i = \sqrt{-1}$. Encontre o número complexo **v** cujo módulo é igual a 2 e cujo argumento principal é o triplo do argumento principal de **u**.

**5.** (Fuvest-SP)

a) Se $z_1 = \cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2$, mostre que o produto $z_1z_2$ é igual a $\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$.

b) Mostre que o número complexo $z = \cos 48° + i \cdot \operatorname{sen} 48°$ é raiz da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

**6.** (PUC-SP) Dado o número complexo

$z = \frac{1-i}{i} + \frac{i}{1+i}$, qual é o menor valor de $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ de modo que $\mathbf{z^n}$ seja um número real?

**7.** (Unicamp-SP) Ache todas as raízes (reais e complexas) da equação $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

**8.** (Vunesp) Sendo **n** um número natural, prove que o número complexo $-\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ é raiz da equação algébrica $x^{3n+2} + x + 1 = 0$.

**9.** (Unicamp-SP/adaptado) Se $z = x + iy$ é um número complexo, o número real **x** é chamado parte real de **z** e é indicado por Re(z), ou seja, $\operatorname{Re}(x + iy) = x$. Mostre que o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $\operatorname{Re}\left(\frac{z+2i}{z-2}\right) = \frac{1}{2}$, ao qual se acrescenta o ponto (2, 0), é uma circunferência.

**10.** (ITA-SP) Sejam $w = a + bi$ com $b \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos **z** que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$ descreve:

a) um par de retas paralelas.

b) uma circunferência.

c) uma elipse.

d) uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.

e) n.d.a.

**11.** (ITA-SP) Considere, no plano cartesiano, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área desse polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$. b) 5. c) $\pi$. d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. e) $2\pi$.

**12.** (UFPB) Sejam **x** e **y** elementos quaisquer do conjunto $G = \{g = m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Considere as seguintes proposições e assinale com **V** a(s) verdadeira(s) e com **F**, a(s) falsa(s).

( ) Se $y \neq 0$, o quociente $\frac{x}{y} \in G$.

( ) O produto $xy \in G$.

( ) A soma $x + y \in G$.

A seqüência correta é:

a) VFF.

b) FVF.

c) FFV.

d) VVF.

e) VFV.

f) FVV.

**13.** (Vunesp) Se **a**, **b**, **c** são números inteiros positivos tais que $c = (a + bi)^2 - 14i$, em que $i^2 = -1$, o valor de **c** é:

a) 48.

b) 36.

c) 24.

d) 14.

e) 7.

**14.** (UPF-RS) Quanto ao número complexo $z = \frac{6+6i}{1-i}$, a alternativa incorreta é:

a) Escrito na forma algébrica é $z = 6i$.

b) O módulo de **z** é 6.

c) O argumento de **z** é $\frac{\pi}{2}$ rad.

d) Escrito na forma trigonométrica tem-se $z = 6(\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$.

e) $\mathbf{z^2}$ é um número real.

**15.** (UFBA) Sendo $\mathbf{a_n}$ a parte real do número complexo $\left(\frac{i}{3}\right)^n$, para cada número natural **n**, determine $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

**16.** (Uece) O valor de **a**, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, para o qual o número complexo $x = \cos a + i \cdot \operatorname{sen} a$ é tal que

$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, satisfaz:

a) $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2}$.    c) $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{3}$.    d) $\frac{\pi}{10} < a < \frac{\pi}{5}$.

**17.** (FGV-SP) Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a figura:

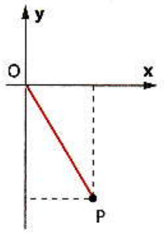
Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11h55 sua ponta estará sobre o número complexo:

a) $-1 + \sqrt{3}i$.    d) $\sqrt{3} - i$.

b) $1 + \sqrt{3}i$.    e) $\sqrt{3} + i$.

c) $1 - \sqrt{3}i$.

**18.** (UEL-PR) Na figura abaixo, o ponto **P** representa um número complexo **z** no plano de Argand-Gauss.



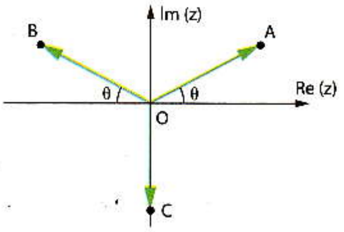
Qual dos números abaixo é **z**, sabendo-se que $OP = \sqrt{13}$?

a) $-9 + 4i$    d) $\sqrt{13}$

b) $2 + 3i$    e) $-\sqrt{13}i$

c) $2 - 3i$

**19.** (Fatec-SP) Na figura abaixo, os pontos **A**, **B** e **C** são as imagens dos números complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ e $\mathbf{z_3}$, no plano de Argand-Gauss.



Se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{3}$ e $\theta = 60°$, então $z_1 + z_2 + z_3$ é igual a:

a) $(3 - \sqrt{3})i$.    d) $3 + \sqrt{3}i$.

b) $3 - \sqrt{3}i$.    e) $3i - \sqrt{3}$.

c) $(3 + \sqrt{3})i$.

**20.** (UFRGS) O ângulo formado pelas representações geométricas dos números complexos $z = \sqrt{3} + i$ e $\mathbf{z^4}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$.    b) $\frac{\pi}{4}$.    c) $\frac{\pi}{3}$.    d) $\frac{\pi}{2}$.    e) $\pi$.

**21.** (Ufscar-SP) Sejam **i** a unidade imaginária e $\mathbf{a_n}$ o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se $\mathbf{a_1}$ é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + ... + i^{a_{10}}$ é igual a:

a) $9i$ ou $-9i$.    d) $8 + i$ ou $8 - i$.

b) $-9 + i$ ou $-9 - i$.    e) $7 + i$ ou $7 - i$.

c) $9 + i$ ou $9 - i$.

**22.** (Uerj) João desenhou um mapa do quintal de sua casa, onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem **O** na base de uma mangueira, e os eixos Ox e Oy com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto (x, y), nesse sistema, é a representação de um número complexo $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Para indicar a posição $(x_1, y_1)$ e a distância **d** do cofre à origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa: $x_1 + iy_1 = (1 + i)^9$.

Calcule:

a) as coordenadas $(x_1, y_1)$;    b) o valor de **d**.

**23.** (Vunesp) Considere os números complexos $w = 2i$ e $z = (1 + i)$.

Determine:

a) $\mathbf{z^2}$ e $(w^2\overline{z} + w)$, onde $\mathbf{\overline{z}}$ indica o conjugado de **z**.

b) $|z|$ e $|w|$. Mostre que a seqüência $(1, |z|, |w|, |zw|, |w^2|)$ é uma progressão geométrica, determinando todos os seus termos e a sua razão.

**24.** (Fuvest-SP) Determine os números complexos **z** que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\text{Im}\left(\frac{z - 1}{1 + i}\right) = \frac{1}{2}$.

(*Lembretes*: $i^2 = -1$; se $w = a + bi$, com **a** e **b** reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\text{Im}(w) = b$.)

**25.** (UFMG) Seja **S** o conjunto de números complexos **z** tais que $|z - (2 + 4i)| = 2$.

a) No plano complexo, faça o esboço de **S**, sendo $z = x + iy$, com **x** e **y** números reais.

b) Determine o ponto de **S** mais próximo da origem.

**26.** (UFMS) Considere as seguintes informações sobre números complexos:

- Um número complexo **z** pode ser escrito sob a forma $z = x + yi$, onde $x \in \mathbb{R}$ é a parte real, $y \in \mathbb{R}$ é a parte imaginária e $i = \sqrt{-1}$.
- O conjugado de um número complexo $z = x + yi$ é indicado e definido por $\overline{z} = x - yi$.

Sejam $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ números complexos tais que $z_1^2 - z_2^2 = 2 + 16i$ e $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = 5 + i$. Calcule a soma da parte real com a parte imaginária do número complexo $26(z_1 - z_2)$.

# Capítulo 5

# Polinômios

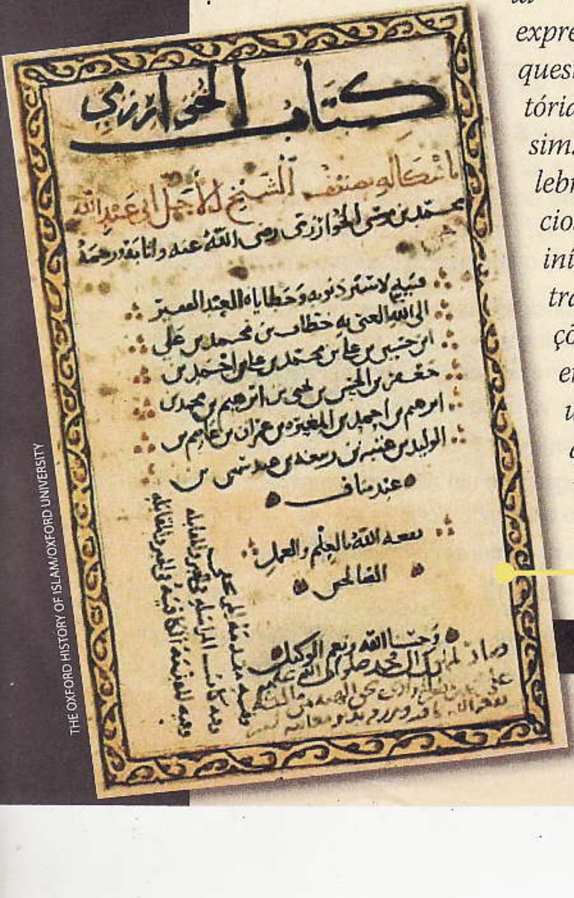
Você saberia dizer em que momento de sua formação começou a usar letras (ou outros símbolos) no lugar de números para resolver problemas matemáticos? Certamente, no início de seus estudos de Matemática, você fazia contas e resolvia problemas que tinham bastante ligação com o seu cotidiano, até que chegou um ponto em que os problemas eram mais complexos; nesse momento foram introduzidos artifícios que facilitavam a representação dos componentes do problema, como o uso de letras que substituíam a incógnita — é daí que vem a expressão "o **x** da questão"! Pois na História também foi assim. Voltando aos célebres papiros egípcios, vimos que no início os problemas tratavam de situações do cotidiano e eram resolvidos de um modo simples, quase por tentativa. Mas com o tempo surgiram os símbolos, e a Aritmética se transformou em Álgebra. Na verdade, Aritmética e Álgebra coexistem e esta última é, hoje, bem sofisticada.

*O termo* álgebra *vem do título do livro* Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá por volta do ano 825, pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm). Veja na foto uma página dessa obra.*

*O matemático Al-Khowarizmi foi quem propôs a reorganização dos termos que aparecem na equação para se chegar à solução. A Álgebra surgiria com essa finalidade — resolver equações —, por isso poderia até ser chamada "a ciência das equações", segundo Baumgart em* Tópicos de história da Matemática.

*Dizemos "equações algébricas" quando são compostas de termos que contêm potências de* **x** *(ou de outra letra qualquer que indique a variável); a expressão que as contém é chamada polinômio. O maior expoente de* **x** *indica o "grau" do polinômio e, conseqüentemente, o grau da equação. Assim, dizemos "equação do segundo grau" quando o maior expoente de* **x** *é 2, e assim por diante.*

*Desde o século XVI são conhecidas fórmulas para a determinação de soluções de equações de até quarto grau. A do segundo grau já*



Página do tratado de Al-Khowarizmi, escrito por volta de 825 d.C.

THE OXFORD HISTORY OF ISLAM/OXFORD UNIVERSITY

*existia há bastante tempo e nós a conhecemos como 'fórmula de Bhaskara', embora ela já fosse aplicada bem antes de sua época (Bhaskara era hindu e viveu no século XII), atribuindo-se a Al-Khowarizmi sua dedução; a de terceiro grau foi desenvolvida pelo matemático Nicolo Fontana de Brescia, conhecido por Tartaglia (que significa 'gago'), sendo depois publicada por Cardano, (ver capítulo anterior); e a de quarto grau, por François Viète (no século XVI).*

*A procura de uma fórmula que determinasse as raízes de uma equação polinomial de grau maior que quatro e que dependesse apenas de seus coeficientes e envolvesse as seis operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) só terminou em 1799, quando Paolo Ruffini publicou uma obra sobre a teoria das equações, na qual mostra que a solução algébrica (isto é, por meio de fórmula) de equações de grau maior que quatro é impossível.*

*O estudo dos polinômios (com suas aplicações) foi tão amplamente explorado pelos matemáticos que se seguiram aos já citados que seria interminável expor seu percurso aqui. Os desenvolvimentos algébricos possibilitaram o aparecimento de áreas muito avançadas de cálculo, entre elas a chamada Análise matemática, preparando o campo para grandes avanços na pesquisa científica.*

*Este capítulo é dedicado ao estudo dos polinômios e à resolução de equações algébricas de qualquer grau. Veremos como analisar as possibilidades de soluções, chamadas raízes da equação, levando em conta que não dispomos de fórmula que forneça imediatamente seus valores, sabendo, entretanto, que no universo dos números complexos nenhuma delas fica sem solução.*

## Atividades

**1.** Um pequeno comerciante de guloseimas aproveitou a oferta do ATACADÃO e comprou 300 pacotes de amendoim torrado. Sabe-se que na sua compra havia três tamanhos diferentes de pacote (pequeno, médio e grande) e que o número de pacotes pequenos foi o triplo do número de pacotes grandes.

a) Indicando por **x** o número de pacotes grandes comprados, expresse, em função de **x**:

- a quantidade de pacotes pequenos;
- a quantidade de pacotes grandes.

b) Consulte a tabela abaixo e represente, em função de **x**, a despesa do comerciante, indicando-a por D(x).

**ATACADÃO**
**OFERTA!**

AMENDOIM TORRADO
EM PACOTE

**Pequeno — R$ 2,00**
**Médio — R$ 3,00**

c) Se a despesa for de R$ 860,00, quantos pacotes de cada tipo terá comprado?

Observe que a expressão que representa uma função é uma expressão algébrica e que ao igualá-la a zero você obteve uma equação algébrica.

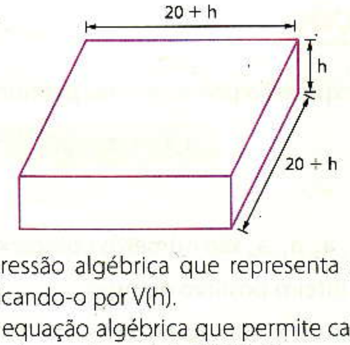
**2.** Numa sala, a medida do comprimento tem 2 m a mais que a largura.

a) Expresse a área dessa sala em função de uma das dimensões, indicando-a por A(x).

b) Calcule a área da sala para uma largura de 4 m.

c) Calcule as dimensões da sala para uma área de 35 m$^2$.

**3.** As dimensões de uma caixa dependem de sua altura, conforme a figura abaixo.



a) Dê a expressão algébrica que represente o volume dessa caixa, indicando-o por V(h).

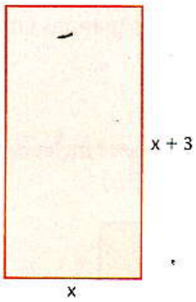
b) Escreva a equação algébrica que permite calcular a altura da caixa quando o volume é de 6 272 u$^3$.

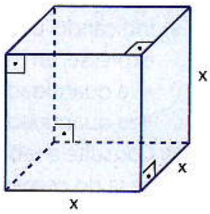
c) Especialmente neste exercício, pela particularidade das medidas apresentadas, você é capaz de determinar a altura da caixa nas condições do item **b**. Experimente.

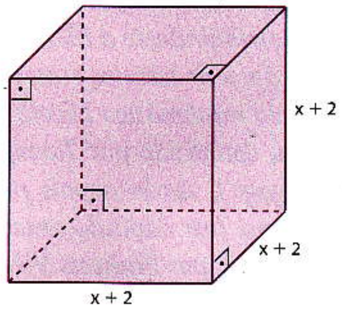
Ao longo deste capítulo você descobrirá como resolver equações desse tipo (quando não houver particularidades).

# 1 Introdução

Na resolução de problemas, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões que permitem depois a resolução do problema por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas. Imagine por exemplo que, em determinados problemas, os enunciados nos levem às seguintes figuras e suas dimensões:







A primeira figura é uma região retangular de dimensões **x** e **x + 3**, cujo perímetro é indicado pela expressão:

$$2x + 2(x + 3) \text{ ou } 4x + 6$$

e cuja área é indicada por:

$$x(x + 3) \text{ ou } x^2 + 3x$$

A segunda figura é um cubo com arestas de medida **x**, cuja área total é indicada por:

$$6x^2$$

e cujo volume é expresso por:

$$x^3$$

A terceira figura é outro cubo com arestas **x + 2**, cuja área total é:

$$6(x + 2)^2 \text{ ou } 6(x^2 + 4x + 4) \text{ ou } 6x^2 + 24x + 24$$

e cujo volume é expresso por:

$$(x + 2)^3 \text{ ou } x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Todas essas expressões são chamadas *expressões polinomiais* ou *polinômios* e serão objeto de estudo neste capítulo.

# 2 Definição

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa **x** toda expressão da forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes;
- **n** é um número inteiro positivo ou nulo;
- o maior expoente de **x**, com coeficiente não-nulo, é o grau da expressão.

Veja, por exemplo, as expressões polinomiais:

1ª) $4x + 6$: expressão polinomial do 1º grau (grau 1).
2ª) $x^2 + 3x$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).
3ª) $x^3$: expressão polinomial do 3º grau (grau 3).
4ª) $6x^2 + (1 - i)x + 5$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).

**Para refletir**

Que nome se dá às expressões seguintes?
a) $6x^5$
b) $x^4 + 6x^2 + 6x + 8$

Pela definição não são expressões polinomiais:

- $x^{-2} + 3x^{-1} + 1$, pois o expoente da variável **x** não pode ser negativo.
- $x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$, pois a variável **x** não pode aparecer em denominador.
- $x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{2}} + 6$, pois o expoente da variável **x** não pode ser fracionário.
- $\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 2$, pois a variável **x** não pode aparecer sob radical.

## 3 Função polinomial

As funções complexas f: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais são denominadas *funções polinomiais*. Assim:

- $f(x) = 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 1.
- $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 2
- $h(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ é uma função polinomial de grau 3.
- $p(x) = x^4 - ix^2$ é uma função polinomial de grau 4.

Então, toda função definida por:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

para todo **x** complexo, é denominada função polinomial de grau **n**, em que **n** é um número inteiro positivo ou nulo e $\mathbf{a_n}$ é diferente de 0.

Se o grau de uma função polinomial for 0, então a função é definida por $f(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$.

**Exemplos:**

1º) $f(x) = 5$

2º) $p(x) = -2$

### Polinômio

A cada função polinomial associa-se um único polinômio (ou expressão polinomial) e vice-versa, de forma que não há confusão em nos referirmos indistintamente às funções polinomiais ou aos polinômios.

**Exemplos:**

1º) $p(x) = 5$ é um polinômio de grau 0 ou polinômio constante.

2º) $p(x) = 2x + 1$ é um polinômio do 1º grau.

3º) $p(x) = x^2 - 5x + 6$ é um polinômio do 2º grau.

### Polinômio identicamente nulo

Define-se o polinômio identicamente nulo (Pin) como o polinômio cujos coeficientes são todos nulos. Assim, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é polinômio nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

**Para refletir**

Como o Pin não tem coeficiente não-nulo, não se define grau para ele.

### Exercícios resolvidos

**1.** Dado o polinômio $p(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - x + 4$, com $m \in \mathbb{R}$, discuta o grau de p(x).

**Resolução:**

Fazendo os coeficientes de $\mathbf{x^3}$ e $\mathbf{x^2}$ iguais a 0, temos:

$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

Analisando, vem:

- se $m \neq 1$ e $m \neq -1$, o polinômio será do 3º grau.
- se $m = 1$, o polinômio será do 2º grau.
- se $m = -1$, o polinômio será do 1º grau.

**2.** Calcule os valores de **a**, **b** e **c** para os quais o polinômio $p(x) = (a + b)x^2 + (a - b - 4)x + (b + 2c - 6)$ seja nulo.

**Resolução:**

$$\text{Se } p(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 & \text{(I)} \\ a - b - 4 = 0 & \text{(II)} \\ b + 2c - 6 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Reunindo (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 2$ e $b = -2$.

Substituindo **b** em (III), vem:

$$b + 2c - 6 = 0 \Rightarrow -2 + 2c - 6 = 0 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = 4$$

Logo, $a = 2$, $b = -2$ e $c = 4$.

## Exercícios propostos

**1.** Verifique se são polinômios:

a) $p(x) = 2x^3 + x + 4$

b) $s(x) = \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} - 1$

c) $r(x) = x^{-2} + 3x^{-1} + 4$

d) $h(x) = x^5 - 1$

e) $q(x) = 4x^5 - 1$

f) $p(x) = 2$

g) $g(x) = \dfrac{1}{x^2} - 3x$

h) $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$

**2.** Em que condições o grau do polinômio $p(x) = (a + 2)x^2 + (b - 3)x + (c - 1)$ é 0?

**3.** Discuta, para $m \in \mathbb{R}$, o grau dos polinômios:

a) $p(x) = (m - 4)x^3 + (m + 2)x^2 + x + 1$.

b) $p(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m - 2)x + m$.

c) $p(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^3 + x^2 + 3$.

## 4 Valor numérico de um polinômio

Considere um polinômio $p(x)$ e um número real $\alpha$.

O valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$ é o número que se obtém substituindo **x** por $\alpha$ e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $p(\alpha)$.

Então, $p(\alpha)$ é o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$.

**Exemplos:**

1º) O valor numérico de $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$ é:

$p(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 5 = 32 - 12 + 5 = 25$

Logo, $p(4) = 25$.

2º) Dado $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 10$, o valor de $p(x)$ para $x = 3$ é:

$p(3) = 4(3)^3 - 3(3)^2 + 5(3) - 10 = 108 - 27 + 15 - 10 = 86$

Logo, $p(3) = 86$.

3º) Se $p(x) = 3x^2 - 7$, então, para $x = i$, o valor numérico de $p(x)$ é $p(i) = -3 - 7 = -10$.

**Para refletir**

O valor numérico do polinômio nulo é 0 para qualquer valor de x.

Assim, de modo geral, dado o polinômio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$ é:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1 \alpha + a_0$$

**Observações:**

1ª) Se $\alpha = 1$, o valor numérico de $p(x)$ é a soma de seus coeficientes:

$$p(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 \Rightarrow p(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$$

2ª) Se $\alpha = 0$, o valor numérico de $p(x)$ é o termo independente:

$$p(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_{n-2} \cdot 0^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 0 + a_0 \Rightarrow p(0) = a_0$$

## Exercícios resolvidos

**3.** Dado o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + x + 5$, calcule $p(2) - p(-1)$.

**Resolução:**

Calculando $p(2)$ e $p(-1)$ separadamente, temos:

$p(2) = 2(2)^3 - (2)^2 + 2 + 5 = 16 - 4 + 2 + 5 = 19$

$p(-1) = 2(-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 5 = -2 - 1 - 1 + 5 = 1$

Assim:

$p(2) - p(-1) = 19 - 1 = 18$

**4.** Dado o polinômio, na forma fatorada, $p(x) = (x^2 + 2)^2(x^3 - 2)^5$, determine:

a) a soma dos seus coeficientes;

b) o termo independente.

**Resolução:**

a) Para obter a soma dos coeficientes, basta fazer:
$p(1) = (1^2 + 2)^2(1^3 - 2)^5 = 3^2 \cdot (-1)^5 = -9$

b) Para obter o termo independente, basta fazer:
$p(0) = (0^2 + 2)^2(0^3 - 2)^5 = 2^2 \cdot (-2)^5 =$
$= 4(-32) = -128$

**5.** Um polinômio $p(x)$ é do 2º grau. Sabendo que $p(2) = 0$, $p(-1) = 12$ e $p(0) = 6$, escreva o polinômio e determine $p(5)$.

**Resolução:**

Se $p(x)$ é um polinômio do 2º grau, sua forma é:

$p(x) = ax^2 + bx + c$.

Então:

$p(2) = 0 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a + 2b + c = 0$ $\textcircled{I}$

$p(-1) = 12 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + c = 12$ $\textcircled{II}$

$p(0) = 6 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 6 \Rightarrow c = 6$ $\textcircled{III}$

Substituindo $\textcircled{III}$ em $\textcircled{I}$ e $\textcircled{II}$, temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1$ e $b = -5$.

Sabendo que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, vamos escrever:

$p(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 5x + 6$

Agora, vamos calcular $p(5)$:

$p(5) = (5)^2 - 5(5) + 6 = 25 - 25 + 6 = 6$

Logo, $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $p(5) = 6$.

## Exercícios propostos

**4.** Dado $p(x) = x^4 - x - 3$, calcule $p(-2)$.

**5.** Dados $p(x) = -3x^3 + x^2 + x - 2$ e $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, calcule $p(-1) + g(1)$.

**6.** Calcule o valor de $p(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ para $x = \sqrt{3}$.

**7.** Consideremos o polinômio $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + n$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = -6$, calcule os valores de **m** e **n**.

**8.** Sabendo que $p(-1) = 0$, calcule o valor de **a** em $p(x) = -2x^3 - 4x^2 - 3x + 2a$.

**9.** Determine o polinômio $p(x)$ do 1º grau tal que $p(5) = 13$ e $p(3) = 7$.

**10.** Calcule a soma dos coeficientes do polinômio $p(x) = (x - 2)^{13}(x^6 - x + 2)^5$.

**11.** Calcule o termo independente do polinômio $p(x)$ obtido desenvolvendo-se a expressão $(x^2 - 3x + 2)^4(8x^4 - 8x^2 - 1)^8$.

**12.** Considere o polinômio $p(x) = ax^8 + bx^5 + cx^2 + d$. Se $p(1) = 7$ e $p(0) = 2$, qual o valor de $a + b + c$?

## 5 Igualdade de polinômios

Dizemos que dois polinômios são iguais ou idênticos se, e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha) \quad (\forall\ \alpha \in \mathbb{C})$$

Para que isso aconteça, sua diferença $p(x) - q(x)$ deve ser o Pin. Assim, dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são iguais se, e somente se, têm coeficientes respectivamente iguais (os coeficientes dos termos de mesmo grau são todos iguais).

**Para refletir**

Polinômios de graus diferentes nunca são iguais.

**Exemplo:**

Dados os polinômios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$, temos:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a = 2, b = 5, c = -4 \text{ e } d = 3$$

### Exercício resolvido

**6.** Determine os valores de **a**, **b**, **c**, **d** e **e** de modo que os polinômios $p(x) = ax^4 + 5x^2 + dx - b$ e $g(x) = 2x^4 + (b - 3)x^3 + (2c - 1)x^2 + x + e$ sejam iguais.

**Resolução:**

Para que $p(x) = g(x)$, devemos ter:

$a = 2$

$0 = b - 3 \Rightarrow b = 3$

$5 = 2c - 1 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$d = 1$

$e = -b = -3$

Logo, $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$ e $= -3$.

### Exercícios propostos

**13.** Determine os valores de **a** e **b** para que sejam iguais os polinômios $p(x) = 3x + 2$ e $q(x) = (a + b)x^2 + (a + 3)x + (2 - b)$.

**14.** Dados $p(x) = (mx^2 + nx + p)(x + 1)$ e $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$, determine os valores de **m**, **n** e **p** para que se tenha $p(x) = g(x)$.

## 6 Raiz de um polinômio

Já sabemos que $p(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$.

Se um número complexo $\alpha$ é tal que $p(\alpha) = 0$, então esse número $\alpha$ é chamado de *raiz* do polinômio $p(x)$.

**Exemplos:**

1º) Dado o polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:

$p(5) = 0 \Rightarrow 5$ é raiz de $p(x)$

$p(3) = -2 \Rightarrow 3$ não é raiz de $p(x)$

2º) Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos:

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz de $p(x)$

$p(3) = 2 \Rightarrow 3$ não é raiz de $p(x)$

3º) O número **i** é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 1$, pois $p(i) = -1 + 1 = 0$.

### Exercícios resolvidos

**7.** Sabendo que $-3$ é raiz de $p(x) = x^3 - 4x^2 - ax + 48$, calcule o valor de **a**.

**Resolução:**

Se $-3$ é raiz de $p(x)$, então $p(-3) = 0$.

Daí:

$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - a(-3) + 48 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -27 - 36 + 3a + 48 = 0 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$

Logo, $a = 5$.

**8.** O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admite as raízes 6 e 1. Calcule os coeficientes **a** e **b**.

**Resolução:**

Se $p(x)$ admite a raiz 6, então $p(6) = 0$.

$p(6) = 6^3 + a(6)^2 + b(6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 216 + 36a + 6b = 0 \Rightarrow 36 + 6a + b = 0$

Se $p(x)$ admite a raiz 1, então $p(1) = 0$.

$p(1) = 1^3 + a(1)^2 + b(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$

Vamos formar, então, o sistema:

$$\begin{cases} 6a + b = -36 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -7$ e $b = 6$.

Logo, $a = -7$ e $b = 6$.

### Exercícios propostos

**15.** Verifique se o número 3 é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$.

**16.** Determine o valor de **k** no polinômio:

a) $p(x) = x^3 + 7x^2 - kx + 3$, sabendo que $x = -1$ é raiz do polinômio;

b) $p(x) = 4x^4 - 8x^3 - (k + 5)x^2 + (3k - 2)x + 5 - k$, sabendo que $x = 2$ é raiz do polinômio.

**17.** Calcule os valores de **a** e **b** no polinômio:

a) $p(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 4)x - 3$, sabendo que 1 e $-1$ são raízes do polinômio;

b) $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, sabendo que 1 é raiz do polinômio e $p(2) = 25$.

**18.** Determine o valor de **a** para que o número $1 - i$ seja raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 2x + a$.

## 7 Operações com polinômios

Por meio de exemplos, vamos retomar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

1º) Se $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 5$, temos:

$$p(x) + q(x) = -x^3 + (3 + 4)x^2 + (2 - 2)x + (-1 - 5) = -x^3 + 7x^2 - 6$$

2º) Se $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 5x^2 - 3x + 4$, temos:

$$p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 3x - 4 = -2x^2 - x - 3$$

3º) Dado $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, temos:

$$7 \cdot p(x) = 7(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3) = 14x^3 - 28x^2 + 35x - 21$$

4º) Dados $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = -2x + 5$, temos:

$$p(x) \cdot q(x) = (3x - 4)(-2x + 5) = -6x^2 + 15x + 8x - 20 = -6x^2 + 23x - 20$$

**Para refletir**

Sejam:
gr[p] = grau de p(x);
gr[q] = grau de q(x).
Então:
- $gr[p \pm q] \leq$ maior valor entre gr[p] e gr[q];
- $gr[p \cdot q] = gr[p] + gr[q]$.

### Exercícios resolvidos

**9.** Determine os valores de **a**, **b** e **c** para que se verifique a igualdade
$[ax^2 + (2a + b)x + 2b] + [cx^2 + (3 - 2c)x - 6] =$
$= 2x^2 - 4$.

**Resolução:**

O polinômio $[ax^2 + (2a + b)x + 2b] + [cx^2 + (3 - 2c)x - 6]$ pode ser escrito na forma:

$(a + c)x^2 + (2a + b + 3 - 2c)x + 2b - 6$

Logo, temos:

$(a + c)x^2 + (2a + b + 3 - 2c)x + 2b - 6 = 2x^2 - 4$

Vamos formar, então, o sistema:

$$\begin{cases} a + c = 2 & \text{Ⓘ} \\ 2a + b + 3 - 2c = 0 & \text{Ⓘ}\text{Ⓘ} \\ 2b - 6 = -4 & \text{Ⓘ}\text{Ⓘ}\text{Ⓘ} \end{cases}$$

Da equação (III), vem:

$2b - 6 = -4 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$

Substituindo na equação (II), obtemos o novo sistema:

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 2a - 2c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ a - c = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$.

**10.** Sabendo que $\dfrac{a}{x + 2} + \dfrac{b}{x - 1} = \dfrac{7x + 8}{x^2 + x - 2}$, determine os valores de **a** e **b**.

**Resolução:**

Como $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$, temos:

$$\frac{a(x - 1) + b(x + 2)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{7x + 8}{x^2 + x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ax - a + bx + 2b}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{7x + 8}{x^2 + x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a + b)x + (-a + 2b)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{7x + 8}{x^2 + x - 2}$$

Para que a igualdade se verifique, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ -a + 2b = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 2$ e $b = 5$.

**11.** Se os polinômios **p**, **q** e **r** têm, respectivamente, graus 3, 5 e 1, determine o grau de:

a) $p + q$;
b) $p \cdot q$;
c) $p \cdot r - q$.

**Resolução:**

a) Na soma de um polinômio de grau 3 com um de grau 5 prevalece o maior grau. Logo, o grau de $(p + q)$ é 5.

b) No produto de um polinômio de grau 3 com um de grau 5 o resultado terá grau $3 + 5 = 8$.

c) O grau do produto $p \cdot r$ é $3 + 1 = 4$. Na subtração $p \cdot r - q$ prevalece o maior grau entre o grau 4 de $p \cdot r$ e o grau 5 de **q**. Assim, o grau de $(p \cdot r - q)$ é 5.

### Exercícios propostos

**19.** Dados os polinômios $p(x) = x^2 - 4x + 3$, $q(x) = -2x + 4$ e $r(x) = 2x^3 - 4x + 5$, calcule:

a) $p(x) + r(x)$.
b) $q(x) - p(x)$.
c) $-4 \cdot r(x)$.
d) $p(x) \cdot q(x)$.
e) $[q(x)]^2$.

**20.** Dados os polinômios $p(x) = ax^2 - 8x + b$ e $q(x) = 3x^2 - bx + a - c$, determine **a**, **b** e **c** para os quais $p(x) + q(x)$ é um polinômio nulo.

**21.** Dado $\dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x - 3} = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$, com $x \neq 0$ e $x \neq 3$, calcule os valores de **a**, **b** e **c**.

**22.** Determine os valores reais de **a** e **b** para que o binômio $2x^2 + 17$ seja igual à expressão $(x^2 + b)^2 - (x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$.

**23.** Sabendo que $p(x) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ e $g(x) = \frac{1}{4}(x-3)(x+5)$, determine os valores de **a** e **b** para que $p(x) = g(x)$.

**24.** Se os polinômios **p**, **q** e **r** têm graus 2, 3 e 4, respectivamente, então o grau do polinômio $p \cdot q + r$ é:

2 + 3 + 4 = 10

a) igual a 10.
b) igual a 9.
c) igual a 5.
d) menor ou igual a 5.
e) menor ou igual a 4.

## Divisão de polinômios

Dados dois polinômios p(x) e h(x), com h(x) não-nulo, dividir p(x) por h(x) significa encontrar dois polinômios q(x) e r(x) que satisfaçam as seguintes condições:

1ª) $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$

2ª) o grau de r(x) não pode ser igual nem maior que o grau de h(x) ou então $r(x) = 0$.

Assim, dizemos que:

- p(x) é o dividendo;
- h(x) é o divisor;
- q(x) é o quociente;
- r(x) é o resto.

Para efetuar a divisão de polinômios usaremos o método da chave, semelhante ao empregado para números inteiros.

### Método da chave

Consideremos a seguinte divisão de números inteiros:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & \underline{8} \\ & 4 \end{array}$<br>$33 : 8 \rightarrow 4$ | 2º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & \underline{8} \\ -32 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$<br>$4 \cdot 8 = 32$<br>Subtraindo (ou somando com o sinal trocado):<br>$33 - 32 = 1$ | 3º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & \underline{8} \\ -32 & 42 \\ \hline 17 & \end{array}$<br>$17 : 8 \rightarrow 2$ | 4º) $\begin{array}{r\|l} \overset{\frown}{33}7 & \underline{8} \\ -32 & 42 \\ \hline 17 & \\ -16 & \\ \hline 1 & \end{array}$<br>$2 \cdot 8 = 16$<br>$17 - 16 = 1$ |

Observemos que:

$$\underbrace{337}_{\text{dividendo}} = \underbrace{8}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{42}_{\text{quociente}} + \underbrace{1}_{\text{resto}}$$

Vamos utilizar a mesma técnica para a divisão de polinômios:

| | |
|---|---|
| 1º) $\begin{array}{l\|l} x^2 - 5x + 6 & \underline{x - 3} \\ & x \end{array}$<br>$x^2 : x = x$ | 3º) $\begin{array}{r\|l} x^2 - 5x + 6 & \underline{x - 3} \\ -x^2 + 3x & x - 2 \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$<br>$-2x : x = -2$ |
| 2º) $\begin{array}{r\|l} x^2 - 5x + 6 & \underline{x - 3} \\ -x^2 + 3x & x \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$<br>$x(x - 3) = x^2 - 3x$<br>Trocando o sinal: $-x^2 + 3x$ | 4º) $\begin{array}{r\|l} x^2 - 5x + 6 & \underline{x - 3} \\ -x^2 + 3x & x - 2 \\ \hline -2x + 6 & \\ 2x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$<br>$-2(x - 3) = -2x + 6$<br>Trocando o sinal: $2x - 6$ |

**Para refletir**

Quando r(x) = 0, dizemos que a divisão é exata e o polinômio p(x) é divisível pelos polinômios h(x) e q(x).

Verificamos que:

$$\begin{array}{c} p(x) \quad = \quad h(x)\cdot q(x) \quad + r(x) \\ \underbrace{x^2-5x+6}_{\substack{\downarrow \\ \text{dividendo}}} = \underbrace{(x-3)}_{\substack{\downarrow \\ \text{divisor}}}\,\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow \\ \text{quociente}}} + \underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ \text{resto}}} \end{array}$$

**Para refletir**

O grau de q(x) é a diferença entre os graus de p(x) e h(x).

Vejamos outra divisão de polinômios:

1º)
$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

$x^4 : x^2 = x^2$

2º)
$$\begin{array}{r|l} x^4+\ x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 \qquad\quad & x^2 \\ \cline{1-1} -2x^3-5x^2+9x-1 & \end{array}$$

$x^2(x^2+3x-2)=x^4+3x^3-2x^2$

Trocando o sinal: $-x^4-3x^3+2x^2$

3º)
$$\begin{array}{r|l} x^4+\ x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 \qquad\quad & x^2-2x \\ \cline{1-1} -2x^3-5x^2+9x-1 & \end{array}$$

$-2x^3 : x^2 = -2x$

4º)
$$\begin{array}{r|l} x^4+\ x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 \qquad\quad & x^2-2x \\ \cline{1-1} -2x^3-5x^2+9x-1 & \\ 2x^3+6x^2-4x \quad\ \ & \\ \cline{1-1} x^2+5x-1 & \end{array}$$

$-2x(x^2+3x-2)=-2x^3-6x^2+4x$

Trocando o sinal: $2x^3+6x^2-4x$

5º)
$$\begin{array}{r|l} x^4+\ x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 \qquad\quad & x^2-2x+1 \\ \cline{1-1} -2x^3-5x^2+9x-1 & \\ 2x^3+6x^2-4x \quad\ \ & \\ \cline{1-1} x^2+5x-1 & \end{array}$$

$x^2 : x^2 = 1$

6º)
$$\begin{array}{r|l} x^4+\ x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 \qquad\quad & x^2-2x+1 \\ \cline{1-1} -2x^3-5x^2+9x-1 & \\ 2x^3+6x^2-4x \quad\ \ & \\ \cline{1-1} x^2+5x-1 & \\ -x^2-3x+2 & \\ \cline{1-1} 2x+1 & \end{array}$$

$1(x^2+3x-2)=x^2+3x-2$

Trocando o sinal: $-x^2-3x+2$

Podemos verificar que:

$$\underbrace{x^4+x^3-7x^2+9x-1}_{\rightarrow\ \text{dividendo}} = \underbrace{(x^2+3x-2)}_{\rightarrow\ \text{divisor}}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{\rightarrow\ \text{quociente}} + \underbrace{(2x+1)}_{\rightarrow\ \text{resto}}$$

## Exercícios resolvidos

**12.** Efetue a divisão de $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ por $h(x) = 2x^2 + 4x - 3$ e faça a verificação.

**Resolução:**

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-2x^3-13x^2+10x-1 & 2x^2+4x-3 \\ \cline{2-2} -2x^4-4x^3+\ 3x^2 \qquad\qquad & x^2-3x+1 \\ \cline{1-1} -6x^3-10x^2+10x-1 & \\ 6x^3+12x^2-\ 9x \quad\ \ & \\ \cline{1-1} 2x^2+\ \ x-1 & \\ -2x^2-\ 4x+3 & \\ \cline{1-1} -3x+2 & \end{array}$$

Fazendo a verificação, vem:

$q(x)\cdot h(x) + r(x) = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 4x - 3) +$
$+ (-3x + 2) = (2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 13x - 3) +$
$+ (-3x + 2) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 = p(x)$

**13.** Usando o método da chave, efetue a divisão do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 6x - 8$ por $h(x) = x^2 - x - 4$.

**Resolução:**

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-6x-8 & x^2-x-4 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2+4x \quad\ \ & x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2-2x-8 & \\ -2x^2+2x+8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Lembre-se de que, como $r(x) = 0$, $p(x)$ é divisível por $h(x)$.

**14.** O polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ é divisível por $h(x) = x^2 + 2x + 5$. Nessas condições, calcule os valores de **a** e **b**.

**Resolução:**

O polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ deve ser escrito como: $p(x) = x^3 + 0x^2 + ax + b$.

Usando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,0x^2 & +\,ax & +\,b & x^2 + 2x + 5 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -\,2x^2 & -\,5x & & x - 2 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +\,(a-5)x & +\,b & \\
 & 2x^2 & +\,4x & +\,10 & \\ \cline{1-4}
 & & (a-1)x & +\,(b+10) &
\end{array}$$

Efetuada a divisão, obtemos: $r(x) = (a - 1)x + (b + 10)$.

Como o resto deve ser o polinômio nulo, temos:

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

$b + 10 = 0 \Rightarrow b = -10$

Logo, $a = 1$ e $b = -10$.

**15.** O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ é divisível por $h(x) = x^2 - 3x - 4$. Nessas condições, resolva a equação $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

**Resolução:**

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,4x^2 & -\,x & +\,4 & x^2 - 3x - 4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\,3x^2 & +\,4x & & x - 1 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & +\,3x & +\,4 & \\
 & +x^2 & -\,3x & -\,4 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Então:

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^2 - 3x - 4)(x - 1)$

Como $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$, vem:

$(x^2 - 3x - 4)(x - 1) = 0$.

Portanto, a resolução da equação dada recai na resolução de equações de graus menores, que já sabemos fazer:

$(x^2 - 3x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ ou $x - 1 = 0$

Resolvendo a primeira equação, temos:

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x' = 4$ e $x'' = -1$

Resolvendo a segunda, vem:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Logo, $S = \{-1, 1, 4\}$.

**16.** Calcule os valores de **m** e **n** de modo que o resto da divisão de $p(x) = x^4 + mx^3 - x^2 + nx + 1$ por $h(x) = x^2 + x + 1$ seja igual a $r(x) = x + 2$.

**Resolução:**

Indicando o quociente por $q(x)$, temos:

$p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$

Como o grau de $p(x)$ é 4 e o grau de $h(x)$ é 2, então o grau de $q(x)$ é 2. Portanto, $q(x) = ax^2 + bx + c$.

Daí:

$$\underbrace{x^4 + mx^3 - x^2 + nx + 1}_{p(x)} =$$

$$= \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{h(x)}\underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{q(x)} + \underbrace{(x + 2)}_{r(x)} =$$

$= ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c + x + 2 = ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c + 1)x + c + 2$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$a = 1$ ①

$a + b = m$ ②

$a + b + c = -1$ ③

$b + c + 1 = n$ ④

$c + 2 = 1 \Rightarrow c = -1$ ⑤

Conhecidos $a = 1$ e $c = -1$, temos:

$\cancel{1} + b - \cancel{1} = -1 \Rightarrow b = -1$

Substituindo em ②, temos:

$1 - 1 = m \Rightarrow m = 0$

Substituindo em ④, temos:

$-1 - \cancel{1} + \cancel{1} = n \Rightarrow n = -1$

Logo, $m = 0$ e $n = -1$.

**17.** Considere a divisão de $p(x)$ por $d(x)$, com quociente $q(x)$ e resto $r(x)$ não-nulo. Se o grau de $p(x)$ é 7 e o grau de $d(x)$ é 2, o que podemos deduzir sobre o grau de $q(x)$ e o grau de $r(x)$?

**Resolução:**

O grau de $q(x)$ é a diferença entre o grau de $p(x)$ e de $d(x)$. Assim, o grau de $q(x)$ é $7 - 2 = 5$.

O grau de $r(x)$ é menor que o grau de $d(x)$, portanto pode ser 1 ou 0.

## Exercícios propostos

**25.** Usando o método da chave, efetue a divisão de $p(x)$ por $h(x)$ quando:

a) $p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $h(x) = x + 1$.

b) $p(x) = 2x^3 + x - 1$ e $h(x) = x - 1$.

c) $p(x) = 7x^3 + 30x^2 - 40x + 15$ e $h(x) = x^2 + 5x - 6$.

**26.** Calcule os valores de **m** e **n** para que seja exata a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 1$ por $h(x) = 2x^2 - x - 1$.

**27.** Dividindo $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por certo polinômio $h(x)$, obtemos o quociente $q(x) = x - 1$ e o resto $r(x) = 2x - 1$. Determine o polinômio $h(x)$.

**28.** Sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ é divisível por $h(x) = x - 2$, resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.

## Divisão por x − a – dispositivo prático de Briot-Ruffini

Usando o método da chave, vamos efetuar a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 5x^2 + x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 6x^2 \phantom{+ x - 2} & 3x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1} x^2 + x - 2 & \\ -x^2 + 2x \phantom{- 2} & \\ \cline{1-1} 3x - 2 & \\ -3x + 6 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Assim, temos:

$$q(x) = 3x^2 + x + 3$$
$$r(x) = 4$$

Há, porém, um dispositivo que permite efetuar as divisões por polinômios do tipo x − a de uma maneira mais simples e rápida: é o chamado *dispositivo prático* ou *algoritmo de Briot-Ruffini*.

| | | |
|---|---|---|
| termo constante do divisor, com sinal trocado | coeficientes de **x** do dividendo p(x) | termo constante do dividendo p(x) |
| | coeficientes do quociente | resto |

Vejamos o roteiro desse dispositivo prático, efetuando a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

1º)

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2º)

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & \downarrow & & & \\ & 3 & & & \end{array}$$

Repetimos (ou "abaixamos") o primeiro coeficiente do dividendo

3º)

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & \downarrow & \underbrace{6 + (-5)} & & \\ & 3 & \downarrow & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$3 \cdot 2 = 6$ e $6 + (-5) = 1$

Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do dividendo.

4º)

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & \downarrow & \underbrace{6 + (-5)} & \underbrace{2 + 1} & \\ & 3 & \downarrow & \downarrow & \\ & & 1 & 3 & \end{array}$$

$1 \cdot 2 = 2$ e $2 + 1 = 3$

Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente.

5º)

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & \underbrace{6 + (-5)} & \underbrace{2 + 1} & \underbrace{6 + (-2)} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$3 \cdot 2 = 6$ e $6 + (-2) = 4$

Pelo quadro, temos:

$$q(x) = 3x^2 + x + 3$$
$$r(x) = 4$$

o mesmo resultado obtido pelo método da chave.

Logo:

$$3x^3 - 5x^2 + x - 2 = (x - 2)(3x^3 + x + 3) + 4$$

**Para refletir**

Na divisão por x − a, o resto é sempre uma constante, pois x − a é um polinômio do 1º grau.

## Exercícios resolvidos

**18.** Divida $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 5$ por $h(x) = x + 3$.

**Resolução:**

$$\begin{array}{c|cccc:c}
-3 & 2 & 7 & 0 & -4 & 5 \\
\hline
 & \downarrow & \underbrace{-6+7}_{\downarrow} & \underbrace{-3+0}_{\downarrow} & \underbrace{9+(-4)}_{\downarrow} & \underbrace{-15+5}_{\downarrow} \\
 & 2 & 1 & -3 & 5 & -10
\end{array}$$

Quociente: $q(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$
Resto: $r(x) = -10$
Logo, $2x^4 + 7x^3 - 4x + 5 =$
$= (x + 3)(2x^3 + x^2 - 3x + 5) - 10$.

**19.** Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$.

**Resolução:**

Observe que, neste caso, o coeficiente de **x** no binômio não é igual a 1; para obter o quociente e o resto pedidos, devemos dividir todos os coeficientes de $p(x)$ e de $h(x)$ por 2. Assim obtemos o quociente procurado $q(x)$, enquanto o resto também ficará dividido por 2 $\left(\frac{r(x)}{2}\right)$.

Então, temos:

$$\frac{p(x)}{2} = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

$$\frac{h(x)}{2} = x - \frac{1}{2}$$

Aplicando o dispositivo prático, vem:

$$\begin{array}{c|cc:c}
\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\
\hline
 & \downarrow & \underbrace{\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)}_{\downarrow} & \underbrace{-1+1}_{\downarrow} \\
 & 2 & -2 & 0
\end{array}$$

Quociente: $q(x) = x - 2$

Resto: $\frac{r(x)}{2} = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

Logo, $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$.

**Para refletir**

$p(x) = \overbrace{(ax - b)}^{h(x)}\, q(x) + r(x)$ dividido por $a \neq 0$:

$$\frac{p(x)}{a} = \frac{(ax - b)q(x)}{a} + \frac{r(x)}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{a} = \overbrace{\left(x - \frac{b}{a}\right)}^{\frac{h(x)}{a}} q(x) + \frac{r(x)}{a}$$

**20.** Calcule o valor de **m** de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + mx + 12$ seja divisível por $h(x) = x + 3$.

**Resolução:**

$$\begin{array}{c|ccc:c}
-3 & 2 & 5 & m & 12 \\
\hline
 & 2 & -1 & m+3 & -3m+3
\end{array}$$

Para que $p(x)$ seja divisível por $h(x)$ devemos ter resto nulo, ou seja:

$-3m + 3 = 0 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$

Logo, $m = 1$.

**21.** Efetue a divisão de $p(x)$ por $q(x)$ para $p(x) = x^3 - (4 + 2i)x^2 + 9ix + 2$ e $q(x) = x - 2i$.

**Resolução:**

$$\begin{array}{c|ccc:c}
2i & 1 & -4-2i & 9i & 2 \\
\hline
 & 1 & -4 & i & 0
\end{array}$$

Logo, $p(x) : q(x) = x^2 - 4x + i$.

## Exercícios propostos

**29.** Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ por $h(x) = x + 3$.
b) $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $h(x) = x - 5$.
c) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $h(x) = 2x - 1$.
d) $p(x) = x^2 - 2x + 1$ por $h(x) = 3x + 1$.

**30.** Nos esquemas seguintes foi aplicado o dispositivo prático de Briot-Ruffini; calcule, então, o dividendo $p(x)$, o divisor $h(x)$, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

a) $$\begin{array}{c|ccc:c}
2 & a & b & c & d \\
\hline
 & 1 & 3 & -2 & 1
\end{array}$$

b) $$\begin{array}{c|cccc:c}
3 & m & n & p & q & r \\
\hline
 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1
\end{array}$$

**31.** Calcule o valor de **a**, sabendo que $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ é divisível por $h(x) = x - 1$.

**32.** Efetue a divisão do polinômio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + ix - 3i$ por $(x + i)$.

**33.** Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 1$ por $q(x) = 3x - 6$.

## Teorema de D'Alembert

Este teorema diz que o resto da divisão de um polinômio p(x) por $x - a$ é p(a).

Antes de fazer a demonstração, vamos verificar o teorema por meio de um exercício.

Vamos determinar o resto da divisão de $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ por $x + 2$ e compará-lo com $p(-2)$.

- Usando o método da chave:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\ x^2 & -\ 2x & +\ 3 & x + 2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +\ 2x^2 & & & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{1-4} & -3x^2 & -\ 2x & +\ 3 & \\ & 3x^2 & +\ 6x & & \\ \cline{2-4} & & 4x & +\ 3 & \\ & & -4x & -\ 8 & \\ \cline{3-4} & & \text{resto} \longrightarrow & -5 & \end{array}$$

- Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr:r} -2 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & -5 \longleftarrow \text{resto} \end{array}$$

- Verificando o teorema de D'Alembert:

$$p(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) + 3 = -8 - \cancel{4} + \cancel{4} + 3 = -5$$

Agora, faremos a demonstração.

Considerando que a divisão de p(x) por $x - a$ resulta um quociente q(x) e um resto **r**, temos:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

Fazendo $x = a$, vem:

$p(a) = (a - a)q(a) + r = 0 \cdot q(a) + r = r \Rightarrow \boxed{r = p(a)}$

**Para refletir**

Na substituição de **x** por **a**, o resto **r** não muda, pois é um valor constante.

### Exercícios resolvidos

**22.** Calcule o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ por $h(x) = x - 4$.

**Resolução:**

De acordo com o teorema de D'Alembert, o resto é igual a:

$p(4) = 2(4)^3 - (4)^2 + 5(4) - 3 =$

$= 128 - 16 + 20 - 3 = 129$

Logo, o resto desta divisão é 129.

**23.** Determine o valor de **a** de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - ax + 2$ seja divisível por $h(x) = x - 2$.

**Resolução:**

Se p(x) é divisível por h(x), o resto da divisão é 0. Então, pelo teorema de D'Alembert, temos:

$p(2) = 0 \Rightarrow 2(2)^3 + 5(2)^2 - a(2) + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 + 20 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = 38 \Rightarrow a = 19$

Logo, $a = 19$.

**24.** Um polinômio p(x) é do 2º grau. Quando dividimos p(x) por **x**, por $x - 1$ e por $x + 2$, obtemos restos 1, 0 e 4, respectivamente. Determine o polinômio p(x).

**Resolução:**

De acordo com o problema, p(x) é um polinômio do 2º grau. Então, ele é da forma $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Segundo o teorema de D'Alembert, temos:

$p(0) = 1 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$ (I)

$p(1) = 0 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b + 1 = 0$ (II)

$p(-2) = 4 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 2b + 1 = 4$ (III)

Reunindo (II) e (III), obtemos:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = \frac{1}{6}$ e $b = -\frac{7}{6}$.

Logo, $p(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1$.

## Exercícios propostos

**34.** Calcule o resto da divisão de:

a) $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ por $h(x) = x - 1$;

b) $p(x) = x^4 + 2x^2 - x - 5$ por $h(x) = x + 3$.

**35.** Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$ é divisível por $x + 3$.

**36.** Calcule o valor de **a** a fim de que o polinômio $p(x) = x^2 - ax + 2$ seja divisível por $h(x) = x - 2$.

**37.** Determine **b** e **c** de modo que o polinômio $p(x) = x^4 + x^2 + bx + c$ seja divisível por $h(x) = x - 2$, mas, quando dividido por $g(x) = x + 2$, deixe resto igual a 4.

## Teorema do fator

Se **c** é uma raiz de um polinômio p(x), de grau n > 0, então x − c é um fator de p(x).

Pelo teorema de D'Alembert, a divisão de p(x) por x − c resulta um quociente q(x) e um resto p(c) tal que:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

Se **c** é uma raiz de p(x), então p(c) = 0 e temos:

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

Portanto, x − c é um fator de p(x).

Como conseqüência, podemos dizer que p(x) é divisível por (x − a) e por (x − b), com a ≠ b, se, e somente se, p(x) for divisível por (x − a)(x − b).

**Para refletir**

Demonstre a recíproca: se x − c é um fator de p(x), então c é raiz de p(x).

## Exercícios resolvidos

**25.** Mostre que $x - 6$ é um fator de $p(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$ e calcule o quociente de p(x) por x − 6.

**Resolução:**

Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | −6 | 1 | −6 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |

Logo, $p(6) = 0$, $q(x) = x^2 + 1$ e $p(x) = (x - 6)(x^2 + 1)$.

**26.** Dado $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$, determine p(x) para x = 3, x = 2 e x = 0. A seguir, escreva p(x) como produto de dois fatores.

**Resolução:**

$p(3) = (3)^3 + (3)^2 - 10(3) + 8 = 27 + 9 - 30 + 8 = 14$

$p(2) = (2)^3 + (2)^2 - 10(2) + 8 = 8 + 4 - 20 + 8 = 0$

$p(0) = (0)^3 + (0)^2 - 10(0) + 8 = 8$

Como $p(2) = 0$, então $x - 2$ é um fator de p(x).

Então, vamos aplicar Briot-Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | −10 | 8 |
| | 1 | 3 | −4 | 0 |

Logo, $q(x) = x^2 + 3x - 4$.

$p(x) = (x - 2)(x^2 + 3x - 4)$

**27.** Verifique se é exata a divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ por $(x + 2)(x + 1)$.

**Resolução:**

Se $p(-2) = 0$ e $p(-1) = 0$, a divisão será exata.

$p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 =$

$= -8 + 8 + 2 - 2 = 0$

$p(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 =$

$= -1 + 2 + 1 - 2 = 0$

Logo, a divisão é exata.

**28.** Determine os valores de **a** e **b** para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$.

**Resolução:**

Para que p(x) seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$, ele deve ser divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 4)$.

Se p(x) é divisível por $x + 1$, temos:

$p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 + a - b + 20 = 0 \Rightarrow a - b = -19$

Se p(x) é divisível por $x - 4$, vem:

$p(4) = 0 \Rightarrow (4)^3 + a(4)^2 + b(4) + 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 64 + 16a + 4b + 20 = 0 \Rightarrow 4a + b = -21$

Então, temos:

$$\begin{cases} a - b = -19 \\ 4a + b = -21 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -8$ e $b = 11$.

## Exercícios propostos

**38.** Mostre que $x + 4$ é fator do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 18x + 8$ e calcule o quociente de p(x) por $x + 4$.

**39.** Dado $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, determine p(x) para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. A seguir, escreva os fatores de p(x).

## 8 Equações polinomiais ou algébricas

Denomina-se *equação polinomial* ou *algébrica* toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

em que os $\mathbf{a_i}$ $(a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0)$ são elementos do conjunto dos números complexos, $n \in \mathbb{N}^*$ e **n** é o grau da equação.

**Exemplos:**

1º) $3x + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 1º grau.

2º) $x^2 - 3x - 4 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.

3º) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ é uma equação algébrica do 3º grau.

4º) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ é uma equação algébrica do 4º grau.

5º) $3x^2 - 2ix + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau.

### Raiz ou zero de uma equação polinomial ou algébrica

Denomina-se *raiz* ou *zero* da equação algébrica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

o valor α de **x** que satisfaz a igualdade, ou seja, o valor tal que:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$$

**Exemplos:**

1º) $x^2 - 7x + 10 = 0$ admite $x = 5$ como raiz:
$(5)^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$

2º) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ admite $x = 1$ como raiz:
$(1)^3 - 3(1)^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

3º) $x^4 + x^3 - x^2 - 4 = 0$ admite $x = -2$ como raiz:
$(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 - 4 = 16 - 8 - 4 - 4 = 0$

4º) $x^2 + 1 = 0$ admite $x = i$ como raiz:
$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

## Conjunto solução de uma equação algébrica

Denomina-se conjunto solução de uma equação algébrica o conjunto das raízes da equação:

**Exemplos:**

1º) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$S = \{2, 5\}$

2º) $3x - 5 = 0$

$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

3º) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

$S = \{-2, -1, 2\}$

4º) $x^2 + 1 = 0$

$S = \{-i, i\}$

### Exercícios propostos

**40.** Verifique se o **x** indicado é raiz da equação dada:

a) $x = 2$; equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

b) $x = -3$; equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

c) $x = -1$; equação $x^4 - x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

d) $x = 2 + 3i$; equação $x^2 - 4x + 13 = 0$

**41.** Encontre o conjunto solução da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, sabendo que ele é um subconjunto de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

## Determinação das raízes de uma equação algébrica

Nosso objetivo é determinar o conjunto solução formado pelas raízes de uma equação algébrica, ou seja, resolver equações da forma $p(x) = 0$, em que $p(x)$ é um polinômio.

Já sabemos resolver equações do 1º e do 2º grau por meio de fórmulas simples, além de algumas de grau maior do que 2 por meio de fatoração ou outro artifício:

- $ax + b = 0$ (com $a \neq 0$) $\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ (raiz da equação de 1º grau);
- $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$) $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (raízes da equação do 2º grau), em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Durante muito tempo, esforços foram feitos para encontrar fórmulas que permitissem resolver qualquer equação algébrica de grau maior do que 2, como, por exemplo:

- $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$
- $x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 44x + 60 = 0$

Verificou-se, por fim, que o melhor meio de resolver essas equações polinomiais seria fazer estimativas de possíveis soluções.

Neste tópico, nosso objetivo é examinar alguns métodos que nos permitam estimar uma ou mais raízes de uma equação polinomial e, assim, determinar todas elas.

### Exercícios propostos

**42.** Calcule as raízes das seguintes equações algébricas:

a) $3x - 12 = 0$.

b) $\sqrt{2}x - 1 = 0$.

c) $x^2 - 6x + 10 = 0$.

d) $10x + 5 = 0$.

e) $x^2 - 4x - 5 = 0$.

**43.** Utilizando a fatoração, calcule as raízes das equações algébricas:

a) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

b) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$.

c) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$.

d) $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$.

(*Sugestões*: No item **a**, $x(x^2 - 4x + 3) = 0$; no item **b**, $x^2(x + 2) + 1(x + 2) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 + 1) = 0$.)

**Para refletir**

Se o produto é nulo, pelo menos um dos fatores é nulo.
Exemplo: $(x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$.

**44.** Resolva as equações algébricas em IR:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

(*Sugestões*: No item **a**, chame $\mathbf{x^2}$ de **p**; no item **b**, chame $\mathbf{x^3}$ de **p**.)

## Decomposição em fatores de primeiro grau

Em 1799, Gauss demonstrou o *teorema fundamental da Álgebra*, que admitiremos sem demonstração:

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau **n** ($n \geqslant 1$) possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Utilizando esse teorema podemos mostrar que os polinômios de grau $n > 1$ podem ser decompostos num produto de fatores do 1º grau.

**Exemplos:**

1º) 2 é raiz de $p(x) = x^2 + 3x - 10$, pois $p(2) = 0$.

Então, pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x - 2$ e temos:

$$\begin{array}{c|cc|c} 2 & 1 & 3 & -10 \\ \hline & \multicolumn{2}{c|}{\underbrace{1 \qquad 5}_{\text{coeficientes de } q_1(x)}} & 0 \end{array}$$

$$q_1(x) = x + 5$$

Daí vem:

$$p(x) = (x - 2)q_1(x) = (x - 2)(x + 5)$$

2º) $-1$ é raiz de $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, pois $p(-1) = 0$.

Então, pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x + 1$ e temos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 - 3x + 2$$

Daí, vem:

$$p(x) = (x + 1)q(x) = (x + 1)(x^2 - 3x + 2)$$

Resolvendo $x^2 - 3x + 2 = 0$, usando a fórmula de Bhaskara, obtemos as raízes 1 e 2, ou seja:

$$q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Desse modo, podemos escrever:

$$p(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1)$$

Vamos demonstrar que todo polinômio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ (com } n \geqslant 1)$$

pode ser decomposto num produto de fatores do 1º grau.

Consideremos, então, o polinômio $p(x)$, de grau $n \geqslant 1$.

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $p(x)$ admite uma raiz $\mathbf{x_1}$.

Pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x - x_1$. Assim, temos:

$$p(x) = (x - x_1)q_1(x)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $q_1(x)$ admite uma raiz $\mathbf{x_2}$.

Pelo teorema de D'Alembert, $q_1(x)$ é divisível por $x - x_2$. Assim, temos:

$$q_1(x) = (x - x_2)q_2(x)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$.

Logo, $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_2(x)$.

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $q_2(x)$ admite uma raiz $\mathbf{x_3}$.

Pelo teorema de D'Alembert, $q_2(x)$ é divisível por $x - x_3$. Assim, temos:

$$q_2(x) = (x - x_3)q_3(x)$$

em que $q_3(x)$ é um polinômio de grau $n - 3$.

Logo, $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)q_3(x)$.

Seguindo esse processo **n** vezes, chegamos a:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \cdot q_n(x), \text{ com } q_n = a_n$$

Então, temos:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

em que $\mathbf{x_i}$ são as raízes de p(x) e $\mathbf{a_n}$ é o coeficiente de $\mathbf{x^n}$.

## Exercícios resolvidos

**29.** Uma das raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ é 1. Resolva a equação.

**Para refletir**

Lembre-se de que resolver a equação significa determinar seu conjunto solução, que neste caso é formado pelo número 1 e pelas demais raízes.

**Resolução:**

Se 1 é raiz de p(x) = 0, temos:

$p(x) = (x - 1)q_1(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ ou $q_1(x) = 0$

Observando que o grau de $q_1(x)$ é 2 e sabendo resolver uma equação do 2º grau, podemos dizer que $q_1(x) = 0$ fornece as outras raízes.

Determinando $q_1(x)$, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | −4 | −2 | 4 |
| | 2 | −2 | −4 | 0 |

$q_1(x) = 2x^2 - 2x - 4$

Determinando as raízes de $q_1(x) = 0$, vem:

$2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

$x = \dfrac{2 \pm 6}{4} \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -1$

Logo, as outras raízes são 2 e −1 e o conjunto solução da equação é S = {−1, 1, 2}.

**Para refletir**

O polinômio $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ pode ser decomposto assim: $2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

**30.** Resolva a equação $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que −2 e 1 são raízes da equação.

**Resolução:**

Se −2 e 1 são raízes de p(x), temos:

$p(x) = (x + 2)(x - 1)q_1(x) = 0.$

Dividindo p(x) por x + 2 e, em seguida, o quociente dessa divisão por x − 1, vem:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 | 1 | −1 | −7 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | −3 | −1 | 3 | 0 |
| | 1 | −2 | −3 | 0 | |

$q_1(x) = x^2 - 2x - 3$

Determinando as raízes de $q_1(x) = 0$, obtemos:

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16$

$x = \dfrac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = -1$

Logo, S = {−2, −1, 1, 3}.

**31.** Determine os valores de **a**, **b** e **c**, sabendo que as raízes da equação $3x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são 1, −1 e 5.

**Resolução:**

Se 1, −1 e 5 são raízes da equação p(x) = 0, então p(x) é divisível por x − 1, x + 1 e x − 5.

Assim, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | a | b | c |
| −1 | 3 | 3 + a | 3 + a + b | 3 + a + b + c |
| 5 | 3 | a | 3 + b | |
| | 3 | 15 + a | | |

Como os restos devem ser iguais a zero, vem:

$$\begin{cases} 3 + a + b + c = 0 \\ 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3 \\ 15 + a = 0 \Rightarrow a = -15 \end{cases}$$

Substituindo os valores de **a** e **b** na primeira equação, obtemos:

$\cancel{3} + (-15) + (-\cancel{3}) + c = 0 \Rightarrow c = 15$

Logo, a = −15, b = −3 e c = 15.

**Para refletir**

Substitua os valores de **a**, **b** e **c** encontrados e escreva o polinômio do 1º membro como um produto de quatro fatores.

## Exercícios propostos

**45.** Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, calcule o valor de **c** e o conjunto solução da equação.

**46.** Resolva as equações abaixo:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são −1 e 1;

b) $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$, sabendo que −2 é uma de suas raízes.

**47.** Determine o conjunto solução das equações:

a) $x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 44x + 60 = 0$, sabendo que −1 e 2 são duas de suas raízes.

b) $x^3 - ix^2 + 4x - 4i = 0$, sabendo que **i** é uma de suas raízes.

## Multiplicidade da raiz

Na decomposição de um polinômio p(x) de grau $n > 0$ em um produto de **n** fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos.

Então em uma equação algébrica de grau **n**, obtemos **n** raízes, das quais algumas podem ser iguais, ou seja, toda equação algébrica de grau $n > 0$ tem, no máximo, **n** raízes distintas.

O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a multiplicidade da raiz.

**Para refletir**

De cada fator do 1º grau, obtemos uma raiz.

**Exemplos:**

1º) No polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$, há dois fatores idênticos a $x - 3$. Nesse caso, dizemos que 3 é *raiz dupla* ou de *multiplicidade 2*.

2º) No polinômio $p(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$, há dois fatores idênticos a $(x + 1)$ e um fator $(x - 2)$. Nesse caso, dizemos que $-1$ é *raiz dupla* ou de *multiplicidade 2*, e 2 é *raiz simples* ou de *multiplicidade 1*.

3º) No polinômio $p(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 18x^2 - 27x - 27 = (x - 3)^3(x + 1)^2 = (x - 3)(x - 3)(x - 3)(x + 1)(x + 1)$, há três fatores idênticos a $(x - 3)$ e dois fatores idênticos a $(x + 1)$. Nesse caso, dizemos que 3 é *raiz tripla* ou de *multiplicidade 3* e $-1$ é *raiz dupla* ou de *multiplicidade 2*.

### Exercícios resolvidos

**32.** Qual é a multiplicidade da raiz 2 do polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$?

**Resolução:**

Vamos eliminar a raiz 2 do polinômio sucessivas vezes, até que isso não seja mais possível.

$$\begin{array}{l|c|ccccc}
\text{sim} \rightarrow & 2 & 1 & -5 & 6 & 4 & -8 \\ \hline
\text{sim} \rightarrow & 2 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ \hline
\text{sim} \rightarrow & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 & \\ \hline
\text{sim} \rightarrow & 2 & 1 & 1 & 0 & & \\ \hline
 & & 1 & 3 \neq 0 & & &
\end{array}$$

Então:

$p(x) = (x - 2)^3(x + 1)$

Logo, 2 é raiz tripla ou de multiplicidade 3.

**33.** Resolva a equação $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$, sabendo que $-1$ é raiz dupla.

**Resolução:**

Se $-1$ é raiz dupla da equação, esta pode ser escrita na forma $(x + 1)^2q(x) = 0$.

Para determinar q(x), devemos eliminar da equação a raiz $-1$ duas vezes sucessivas:

$$\begin{array}{c|ccccc}
-1 & 1 & -3 & -3 & 7 & 6 \\ \hline
-1 & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ \hline
 & \underbrace{1 \quad -5 \quad 6}_{\text{coeficientes de } q(x)} & & & 0 &
\end{array}$$

$q(x) = x^2 - 5x + 6$

Caímos na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolvendo-a, temos $x' = 3$ e $x'' = 2$.

Logo, $S = \{-1, 2, 3\}$.

**34.** Dada a equação $x^3 + ax^2 - 8x + b = 0$, calcule os valores de **a** e **b** de forma que 2 seja raiz dupla da equação.

**Resolução:**

Eliminando a raiz 2 duas vezes sucessivas, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & a & -8 & b \\ \hline
2 & 1 & 2 + a & 2a - 4 & 4a - 8 + b \\ \hline
 & 1 & 4 + a & 4a + 4 &
\end{array}$$

Fazendo os restos iguais a zero, vem:

$$\begin{cases} 4a + 4 = 0 & \textcircled{I} \\ 4a - 8 + b = 0 & \textcircled{II} \end{cases}$$

Da equação $\textcircled{I}$, vem:

$4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$

Substituindo $a = -1$ na equação $\textcircled{II}$, temos:

$-4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 12$

Logo, $a = -1$ e $b = 12$.

**35.** Determine uma equação algébrica do 4º grau que tenha $-1$ como raiz de multiplicidade 3 e 2 como outra raiz.

**Resolução:**

Pelos dados do problema, temos:

$(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)^3(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

Logo, a equação procurada é $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$, ou qualquer outra equivalente a ela, como por exemplo $2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 10x - 4 = 0$.

## Exercícios propostos

**48.** Na equação $(x-3)^3(x+4)^2(x-1)^5=0$, quais são as multiplicidades de suas raízes?

**49.** Qual é a multiplicidade da raiz $-1$ na equação $x^3+x^2-3x-3=0$?

**50.** Resolva a equação polinomial $x^5+5x^4+6x^3-2x^2-7x-3=0$, sabendo que $-1$ é raiz tripla da equação.

**51.** O número 3 é raiz dupla da equação $x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$. Determine as outras duas raízes da equação.

**52.** Considerando a equação $(x-2)^2(x-1)^3(x^2+3x-4)=0$, qual é a multiplicidade da raiz 1?

**53.** Sabendo que 1 é raiz dupla da equação $x^3+ax^2-2x+b=0$, determine o valor de $a+b$.

**54.** Determine uma equação polinomial do 3º grau com $S=\{3, 5\}$, sendo 3 raiz de multiplicidade 2.

**Observação**: Quando resolvemos a equação $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$:

- em $\mathbb{R}$, isto é, com variáveis e coeficientes reais, podemos ter:
  - $\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais distintas;
  - $\Delta = 0 \Rightarrow$ duas raízes reais iguais, ou seja, uma raiz real de multiplicidade 2;
  - $\Delta < 0 \Rightarrow$ nenhuma raiz real.
- em $\mathbb{C}$, isto é, com variável e coeficientes complexos, podemos ter:
  - $\Delta = 0 \Rightarrow$ uma raiz complexa de multiplicidade 2;
  - $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ duas raízes complexas distintas.

**Para refletir**

Quando dizemos raiz complexa significa número real ou não, pois $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

## Relações de Girard

Consideremos a equação algébrica do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ e sejam $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as suas raízes.

A decomposição do primeiro membro em fatores do 1º grau é:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^2+bx+c=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$$

**Para refletir**

$x_1$ e $x_2$ podem ser distintas ou não.

Dividindo todos os termos por **a**, vem:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$-(x_1+x_2)=\frac{b}{a} \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Conhecidas de estudos anteriores, essas relações se estabelecem entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica do 2º grau. Veremos em seguida para equações algébricas de grau maior do que 2.

Consideremos a equação algébrica do 3º grau $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a \neq 0)$ e sejam $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ as suas raízes.

A sua decomposição em fatores do 1º grau é:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Desenvolvendo o produto, temos:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3]$$

Dividindo todos os termos por **a**, vem:

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Consideremos, agora, a equação algébrica do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ e sejam $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ as suas raízes.

A sua decomposição em fatores do 1º grau é:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Usando o mesmo raciocínio para o desenvolvimento, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$$

De forma análoga, considerando a equação algébrica de grau **n**:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

de raízes $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$, ..., $\mathbf{x_n}$, são válidas as seguintes relações entre as raízes e os coeficientes:

1ª) A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2ª) O produto das **n** raízes é:

$$x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3ª) A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b) três a três, é:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c) quatro a quatro, é:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

Essas relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica são denominadas *relações de Girard*.

## Exercícios resolvidos

**36.** Escreva as relações de Girard para a equação algébrica $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$, considerando $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ as raízes da equação.

**Resolução:**

Pela equação, temos:

$a_n = 1$

$a_{n-1} = 7$

$a_{n-2} = -3$

$a_0 = 5$

Assim, obtemos as seguintes relações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{7}{1} = -7$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x_1x_2x_3 = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} = (-1)^3\frac{5}{1} = -5$$

Fazendo de forma mais prática, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\left(\frac{7}{1}\right) = -7$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\left(\frac{-3}{1}\right) = -3$$

$$x_1x_2x_3 = -\left(\frac{5}{1}\right) = -5$$

**Para refletir**

Partindo de $-\left(\frac{b}{a}\right)$, alternamos os sinais de − e + para $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{e}{a}, \frac{f}{a}$, e assim por diante, de acordo com o grau da equação.

**37.** Uma equação algébrica do 3º grau tem raízes −1, 1 e 2. Sabendo que o coeficiente do termo de 3º grau é 2, determine os outros coeficientes e escreva a equação.

**Resolução:**

Se a equação é do 3º grau, tem a forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a = 2$. Então, temos:

$2x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Daí, vem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 1 + 2 = 2 = -\left(\frac{b}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = -4$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 - 2 + 2 = -1 = +\left(\frac{c}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = -2$$

$$x_1x_2x_3 = (-1)1 \cdot 2 = -2 = -\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow d = 4$$

Logo, os outros coeficientes são $b = -4$, $c = -2$ e $d = 4$ e a equação pedida é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$.

**Para refletir**

Podemos escrever a equação com a = 1 e depois multiplicar todos os seus termos por 2. Faça isso e confira.

**38.** Escreva as relações de Girard para a equação algébrica $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 7 = 0$, sendo $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ as quatro raízes.

**Resolução:**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = +\left(\frac{-5}{3}\right) =$$
$$= -\frac{5}{3}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\left(\frac{3}{3}\right) = -1$$

$$x_1x_2x_3x_4 = +\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

**39.** Sendo $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, calcule $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

**Resolução:**

Pelas relações de Girard, sabemos que:

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ Ⓘ

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -4$ Ⓘⓘ

$x_1x_2x_3 = -1$ Ⓘⓘⓘ

Considerando a relação Ⓘ, vamos elevar ambos os membros ao quadrado:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4$

Como $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -4$, temos:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(-4) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 12$

Logo, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 12$.

**40.** As raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ estão em PA. Nessa condição, resolva a equação.

**Resolução:**

Sendo $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ as raízes da equação, vamos representá-las por:

$x_1 = \alpha - r$

$x_2 = \alpha$

$x_3 = \alpha + r$

Pela relação de Girard, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha - \cancel{r} + \alpha + \alpha + \cancel{r} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$

Como $x_2 = \alpha = 3$ é uma das raízes, temos:

$p(x) = (x - 3)q(x) = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | −9 | 23 | −15 |
| | 1 | −6 | 5 | 0 |

$q(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos x' = 5 e x" = 1.

Logo, S = {1, 3, 5}.

**41.** Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, sabendo que uma raiz é dupla.

**Resolução:**

Como uma raiz é dupla, vamos indicar as raízes por $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.

Usando as relações de Girard, temos:

$x_1 + x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 5 \ \textcircled{I}$

$x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 = 7 \ \textcircled{II}$

$x_1x_1x_2 = 3 \Rightarrow x_1^2x_2 = 3 \ \textcircled{III}$

Da relação $\textcircled{I}$, temos:

$2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 2x_1$

Substituindo em $\textcircled{II}$, vem:

$x_1^2 + 2x_1x_2 = 7 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1(5 - 2x_1) = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + 10x_1 - 4x_1^2 - 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x_1^2 + 10x_1 - 7 = 0 \Rightarrow 3x_1^2 - 10x_1 + 7 = 0$

$\Delta = 16$

$x_1 = \dfrac{10 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1' = \dfrac{7}{3}$ e $x_1'' = 1$.

Vamos verificar qual dos valores de $\mathbf{x_1}$ é raiz da equação inicial:

$p\left(\dfrac{7}{3}\right) = -\dfrac{32}{27} \Rightarrow \dfrac{7}{3}$ (não é a raiz da equação)

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ (é a raiz dupla da equação)

Assim, se $x_1 = 1$, vem:

$x_2 = 5 - 2(1) = 3$

Logo, S = {1, 3}.

**42.** As raízes da equação $8x^3 - kx^2 + 7x - 1 = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, são três números reais em PG. Determine essas raízes.

**Resolução:**

Se as raízes estão em PG, podem ser representadas por $\dfrac{r}{q}$, r e rq $(q \neq 0)$.

Usando uma das relações de Girard, temos:

$\dfrac{r}{q} \cdot r \cdot rq = -\left(\dfrac{-1}{8}\right) \Rightarrow r^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{1}{2}$ (uma das raízes)

Substituindo a raiz $\dfrac{1}{2}$ na equação, vem:

$8\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - k\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \dfrac{1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{k}{4} + \dfrac{7}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{k}{4} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow k = 14$

Se k = 14, a equação é $8x^3 - 14x^2 + 7x - 1 = 0$ e $\dfrac{1}{2}$ é uma das raízes. Podemos então obter as outras raízes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 8 | −14 | 7 | −1 |
| | 8 | −10 | 2 | 0 |

$8x^2 - 10x + 2 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 9$

$x = \dfrac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow x' = 1$ e $x'' = \dfrac{1}{4}$.

Logo, as raízes são $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ e 1.

## Exercícios propostos

**55.** A equação $3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ admite raízes $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$. Escreva as relações de Girard para essa equação.

**56.** Os números −2 e 3 são duas raízes da equação $2x^3 - x^2 + mx + n = 0$, em que $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$. Determine a terceira raiz da equação e os valores de **m** e **n**.

**57.** Consideremos a equação polinomial $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$. Sabendo que os números 1 e −3 são raízes da equação, calcule a terceira raiz e escreva a equação.

**58.** As raízes da equação polinomial $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ estão em PA. Calcule essas raízes.

**59.** Resolva a equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.

**60.** Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação $2x^3 + 13x^2 - 5x + 1 = 0$, determine o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

**61.** Os números **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$. Nessas condições, qual é o valor da expressão $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}$?

**62.** Qual é o valor de **k** na equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ para que as raízes da equação estejam em PA?

**63.** Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & a & -c \\ 0 & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sabendo que **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$.

# Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Vimos que as equações polinomiais de grau maior do que 2 não têm um processo determinado de resolução por meio de fórmulas. Devemos procurar, então, uma ou mais raízes para com elas encontrar todas as raízes.

É possível demonstrar uma propriedade que auxilia na pesquisa das raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

então **p** é divisor de $\mathbf{a_0}$ e **q** é divisor de $\mathbf{a_n}$.

**Para refletir**

Dizer que o número racional $\frac{p}{q}$ tem **p** e **q** inteiros e primos entre si equivale a dizer que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.

## Exercícios resolvidos

**43.** Pesquise as raízes racionais da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

**Resolução:**

Na equação dada, temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$.

**p** é divisor de $2 \Rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2\}$

**q** é divisor de $3 \Rightarrow q \in \{-1, 1, -3, 3\}$

Pela propriedade, as prováveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Fazendo a verificação, temos:

$p(-1) = 8 \Rightarrow -1$ (não é raiz)

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

A partir da raiz descoberta, vem:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | −7 | 2 |
| | 3 | 5 | −2 | 0 |

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x' = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } x'' = \frac{-12}{6} = -2$$

Logo, $S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

**Observação**: Como as outras duas raízes, além de 1, também são números racionais, elas seriam descobertas se a pesquisa das raízes racionais prosseguisse:

$p(-2) = 0 \Rightarrow -2$ é raiz

$p(2) = 20 \Rightarrow 2$ não é raiz

$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{9} \Rightarrow -\frac{1}{3}$ não é raiz

$p\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$ é raiz

$p\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}$ não é raiz

$p\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9} \Rightarrow \frac{2}{3}$ não é raiz

**Para refletir**

Fique atento:

- nem todo número $\frac{p}{q}$ obtido é raiz da equação;
- essa pesquisa de raízes racionais só pode ser feita em equações com todos os coeficientes inteiros.

**44.** Resolva a equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

**Resolução:**

Pela equação dada, temos $a_0 = 6$ e $a_n = 1$.

**p** é divisor de $6 \Rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

**q** é divisor de $1 \Rightarrow q \in \{-1, 1\}$

Pela propriedade, as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$$

Fazendo a pesquisa, temos:

$p(-1) = 0 \Rightarrow -1$ é raiz

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

Observando que −1 e 1 são raízes da equação, vamos obter as outras duas raízes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 1 | 1 | −7 | −1 | 6 |
| 1 | 1 | 0 | −7 | 6 | 0 |
| | 1 | 1 | −6 | 0 | |

Daí, temos:

$p(x) = (x + 1)(x - 1)q(x) = 0$ e $q(x) = x^2 + x - 6$

Fazendo $x^2 + x - 6 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x' = 2$ e $x'' = -3$.

Logo, $S = \{-1, -3, 1, 2\}$.

**45.** Determine as raízes inteiras da equação algébrica $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$.

**Resolução:**

Pela equação dada, temos $a_0 = -6$ e $a_n = 2$.

**p** é divisor de $-6 \Rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

**q** é divisor de $2 \Rightarrow q \in \{-1, 1, -2, 2\}$

Pela propriedade, as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

Como foram pedidas apenas as raízes inteiras, temos:

$p(-1) = -2 \Rightarrow -1$ não é raiz

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

Vamos determinar, agora, as outras duas raízes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | −1 | −6 |
| | 2 | 7 | 6 | 0 |

$p(x) = (x - 1)q(x)$ e $q(x) = 2x^2 + 7x + 6$

Fazendo $2x^2 + 7x + 6 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x' = -\frac{3}{2}$ e $x'' = -2$.

Logo, as raízes inteiras da equação são 1 e −2.

## Exercícios propostos

**64.** Pesquise as raízes racionais das equações algébricas:

a) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$

c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$

d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

**65.** Determine as raízes da equação $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$.

## Raízes complexas não reais numa equação algébrica de coeficientes reais

Consideremos a equação algébrica $x^2 - 2x + 2 = 0$, que tem todos os coeficientes reais e pode ser resolvida pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = 1 + i \text{ e } x'' = 1 - i$$

$$S = \{1 + i, 1 - i\}$$

Observemos que a raiz $1 + i$ é um número complexo não real e a outra raiz, $1 - i$, é o seu conjugado.

Podemos demonstrar que, se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, então o complexo conjugado $a - bi$ também é raiz da equação.

Para fazer a demonstração, vamos lembrar antes as propriedades do conjugado de um número complexo vistas no capítulo anterior.

Dados os números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ e sendo $\overline{\mathbf{z_1}}$ e $\overline{\mathbf{z_2}}$ os seus respectivos conjugados, temos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_1 = \overline{z_1} \Leftrightarrow \mathbf{z_1} \text{ é número real}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$$

Consideremos, agora, a equação algébrica de grau $n > 1$, com todos os coeficientes reais:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

Vamos supor que o número complexo não real **z** seja raiz dessa equação e demonstrar que $\bar{\mathbf{z}}$ também é. Procure justificar cada passagem.

$\mathbf{z}$ é raiz $\Rightarrow a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 \Rightarrow$

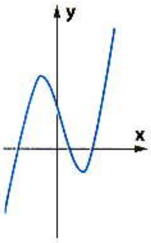
$\Rightarrow a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + ... + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + ... + a_1\bar{z} + a_0 = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{z}}$ é raiz

**Para refletir**

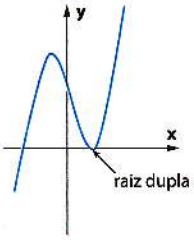
Em uma equação algébrica de coeficientes reais, se z é raiz de multiplicidade **m**, $\bar{z}$ também é raiz de multiplicidade **m**.

Uma diferença importante entre equação algébrica de coeficientes reais de graus par e ímpar é que a de grau ímpar tem no mínimo uma raiz real. Observe os gráficos abaixo, que mostram três funções polinomiais do 3º grau. Note que haverá no mínimo uma raiz real.



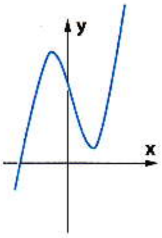
$p(x) = x^3 - 3x + 1$

3 raízes reais



$p(x) = x^3 - 3x + 2$

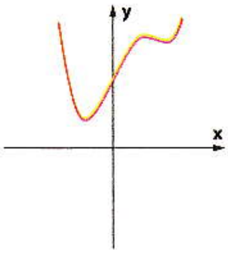
3 raízes reais



$p(x) = x^3 - 3x + 3$

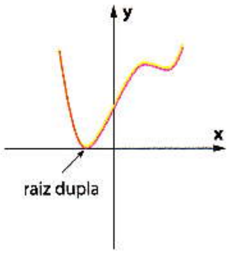
1 raiz real

As próximas figuras mostram o gráfico de seis funções polinomiais do 4º grau. Note que não há necessidade de haver raiz real; quando há, existem duas ou quatro, pois as imaginárias vêm aos pares.



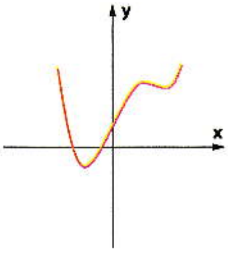
$p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 36$

Nenhuma raiz real



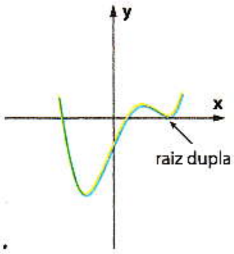
$p(x) = 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 32$

2 raízes reais



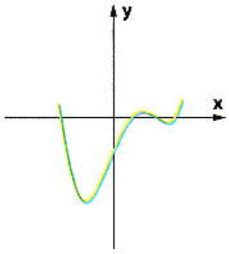
$p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 24$

2 raízes reais



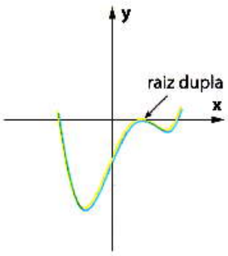
$p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$

4 raízes reais



$p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

4 raízes reais



$p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 36$

4 raízes reais

## Exercícios resolvidos

**46.** Resolva as equações abaixo:

a) $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, sabendo que $3 + i$ é uma raiz da equação;

b) $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4x - 12 = 0$, sabendo que **i** e $2i$ são raízes.

**Resolução:**

a) $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$

Se $3 + i$ é raiz da equação dada, então seu conjugado $3 - i$ é também raiz da equação. Logo:

$p(x) = [x - (3 + i)][x - (3 - i)]q(x) =$

$= [(x - 3) - i][(x - 3) + i]q(x) = [(x - 3)^2 - i^2]q(x) =$

$= (x^2 - 6x + 10)q(x)$

Vamos calcular q(x), dividindo p(x) por $x^2 - 6x + 10$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 & x^2 - 6x + 10 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 6x^3 - 10x^2 \phantom{- 42x + 20} & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-1}
-3x^3 + 20x^2 - 42x + 20 & \\
+3x^3 - 18x^2 + 30x \phantom{+ 20} & \\ \cline{1-1}
2x^2 - 12x + 20 & \\
-2x^2 + 12x - 20 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Então, $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Fazendo $x^2 - 3x + 2 = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x' = 2$ e $x'' = 1$.

Logo, $S = \{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

b) $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4x - 12 = 0$

Se **i** e 2i são raízes, como todos os coeficientes são números reais, podemos garantir que seus conjugados **−i** e −2i também são raízes. Resta descobrir a quinta raiz, que é um número real:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| i | 1 | −3 | 5 | −15 | 4 | −12 |
| −i | 1 | −3 + i | 4 − 3i | −12 + 4i | −12i | 0 |
| 2i | 1 | −3 | 4 | −12 | 0 | |
| −2i | 1 | −3 + 2i | −6i | 0 | | |
| | 1 | −3 | 0 | | | |

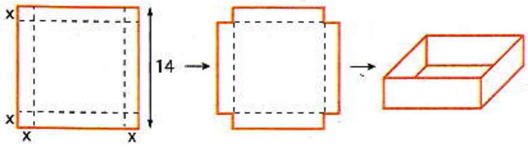
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Logo, $S = \{i, -i, 2i, -2i, 3\}$.

**Para refletir**

O que garante ser a quinta raiz um número real?

**47.** Cortando-se quadrados de 2 cm de lado nos cantos de uma folha quadrada de papelão de 14 cm de lado e dobrando-os conforme a figura, obtém-se uma caixa sem tampa cujo volume é igual a 200 cm³. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado em cada canto para o qual o volume da caixa resultante também seja igual a 200 cm³? Qual é esse valor, caso ele exista?



**Resolução:**

O volume da caixa é dado por:

$A_B \cdot h = (14 - 2x)^2 \cdot x = 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow (196 - 56x + 4x^2)x - 200 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^3 - 56x^2 + 196x - 200 = 0$

Dividindo por 4, temos a equação equivalente $x^3 - 14x^2 + 49x - 50 = 0$.

Do enunciado, sabemos que $x = 2$ é uma raiz dessa equação, então $x^3 - 14x^2 + 49x - 50$ é divisível por $(x - 2)$.

Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | −14 | 49 | −50 |
| | 1 | −12 | 25 | 0 |

Daí, temos que $x^3 - 14x^2 + 49x - 50 = (x - 2)(x^2 - 12x + 25)$. As raízes de $x^2 - 12x + 25 = 0$ são $6 + \sqrt{11}$ e $6 - \sqrt{11}$.

Como o lado **x** do quadrado recortado deve ser menor que metade do lado do quadrado maior, então $6 + \sqrt{11}$ não é aceitável. Assim, apenas $6 - \sqrt{11}$ (aproximadamente 2,68 cm) é solução do problema.

Logo, esse valor existe; é $\left(6 - \sqrt{11}\right)$ cm (aproximadamente 2,68 cm).

## Exercícios propostos

**66.** Determine as raízes das equações:

a) $x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12 = 0$, sabendo que **i** é uma das raízes;

b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$, sabendo que **i** é uma das raízes.

**67.** Qual deve ser o valor de **a** para que 2i seja uma das raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$?

**68.** Os números 1 e 2 + i são raízes da equação algébrica $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes reais. Calcule o valor do coeficiente **c**.

**69.** O número 2 + i é uma das raízes da equação $3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de **m** e a raiz real da equação.

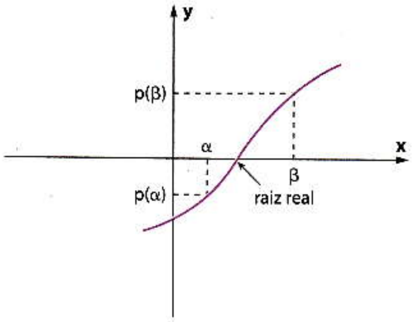
## Métodos numéricos para resolução de equações

A resolução algébrica das equações polinomiais (ou seja, por meio de fórmulas) nem sempre é possível. Está provado que não é possível resolver todas as equações com grau maior do que 4 por meio de fórmulas gerais. Na prática, nem mesmo as de grau 3 e 4 são resolvidas por métodos algébricos. É muito comum, quando se deseja obter uma raiz real, fazê-lo por meio de métodos numéricos.

Os métodos numéricos nos fornecem uma seqüência de valores que se aproximam, com a precisão desejada, da raiz procurada. Vejamos um desses métodos, apenas para ilustração. É o *método da bissecção*:

Se, para α e β números reais, tivermos p(α) e p(β) com sinais contrários, isto é, $p(\alpha) \cdot p(\beta) < 0$, então existe uma raiz real no intervalo ]α, β[. Esse teorema, conhecido como teorema de Bolzano, é fácil de ser percebido observando a figura ao lado.

Podemos melhorar a qualidade da estimativa, calculando p(m) tal que **m** seja ponto médio do intervalo ]α, β[. Assim, p(m) = 0 (e **m** é a raiz procurada) ou $p(m) \neq 0$, de tal forma que $p(m) \cdot p(\alpha) < 0$ ou $p(m) \cdot p(\beta) < 0$. Então, podemos gradativamente reduzir o intervalo até obter a precisão desejada. O uso de uma calculadora é importante, pois o fundamental aqui não é fazer cálculos, mas saber como usar os resultados obtidos.



$p(\alpha) \cdot p(\beta) < 0$

## Exercícios resolvidos

**48.** Descubra uma raiz real de $x^4 + x - 7 = 0$ usando o método da bissecção.

**Resolução:**

Temos p(1) = −5 e p(2) = 11, portanto existe uma raiz no intervalo ]1; 2[.

O ponto médio do intervalo ]1; 2[ é o número m = 1,5.

p(1,5) = −0,44, portanto existe uma raiz no intervalo ]1,5; 2[.

O ponto médio do intervalo ]1,5; 2[ é o número m = 1,75.

p(1,75) = 4,13, portanto existe uma raiz no intervalo ]1,5; 1,75[.

O ponto médio do intervalo ]1,5; 1,75[ é o número m = 1,625.

p(1,625) = 1,60, portanto existe uma raiz no intervalo ]1,5; 1,625[.

O ponto médio do intervalo ]1,5; 1,625[ é o número m = 1,5625.

p(1;5625) = 0,52, portanto existe uma raiz no intervalo ]1,5; 1,625[.

O ponto médio do intervalo ]1,5; 1,5625[ é o número m = 1,5313.

p(1,5313) = 0,03, portanto x = 1,53 já é uma aproximação razoável. O processo pode ser continuado até que se obtenha a precisão desejada. Só como elemento de comparação, a raiz da equação proposta com precisão de quatro casas decimais é 1,5293...

**Observação**: Com a ajuda de uma planilha eletrônica, como o Excel ® da Microsoft, o trabalho de calcular raízes fica muito simples. Existem outros métodos numéricos até mais interessantes que o apresentado, como por exemplo o método de Newton, que permite chegar à raiz desejada mais rapidamente; no entanto, métodos como esse exigem alguns conhecimentos muito específicos de Matemática, o que foge ao objetivo deste capítulo.

**49.** Determine uma raiz real de $x^3 + 2x + 10 = 0$ usando o método da bissecção.

**Resolução:**

Temos p(−2) = −2 e p(−1) = 7, portanto existe uma raiz no intervalo ]−2; −1[.

O ponto médio do intervalo ]−2; −1[ é o número m = −1,5.

p(−1,5) = 3,6, portanto existe uma raiz no intervalo ]−2; −1,5[.

O ponto médio do intervalo ]−2; −1,5[ é o número m = −1,75.

p(−1,75) = 1,14, portanto existe uma raiz no intervalo ]−2; −1,75[.

O ponto médio do intervalo ]−2; −1,75[ é o número m = −1,875.

p(−1,875) = −0,34, portanto existe uma raiz no intervalo ]−1,875; −1,75[.

O ponto médio do intervalo ]−1,875; −1,75[ é o número m = −1,8125.

p(−1,8125) = 0,42, portanto existe uma raiz no intervalo ]−1,875; −1,8125[.

O ponto médio do intervalo ]−1,875; −1,8125[ é o número m = −1,8438.

p(−1,8438) = 0,04, portanto x = −1,84 já é uma aproximação razoável. O processo pode ser continuado até que se obtenha a precisão desejada. Só como elemento de comparação, a raiz da equação proposta com precisão de quatro casas decimais é −1,8474...

## Exercício proposto

**70.** Descubra uma raiz real pelo método da bissecção, usando uma calculadora ou planilha eletrônica.

a) $x^4 + x - 1 = 0$
b) $x^5 - x^3 + 16 = 0$

## Atividades adicionais

**1.** Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o polinômio $p(x) = (a^2 - 9)x^2 + (a + 3)x + 5$ é do 1º grau?

**2.** Se $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$, para que valores de **k** temos $p(2) = 4$?

**3.** Um polinômio p(x) é do 2º grau. Sendo $p(1) = 0$, $p(2) = 7$ e $p(-1) = 4$, escreva o polinômio p(x) e calcule p(0).

**4.** Calcule a soma dos coeficientes e o termo independente de cada polinômio abaixo:

a) $p(x) = 3(x - 2)^5$

b) $q(x) = (x^2 + x - 3)^4(x + 1)^2$

**5.** Calcule **a** e **b** para que os polinômios $p(x) = ax^2 - 3x + b$ e $q(x) = (2 + i)x^2 - 3x + a - b$ sejam iguais.

**6.** Sabendo que a função $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx + c}{2x^3 + dx^2 + 4x + 5}$ independe de **x** e que $f(\pi) = 3$, determine o valor de $a + b - c$.

**7.** Sejam **f** e **g** dois polinômios não nulos de coeficientes reais. Assinale a alternativa correta.

a) grau (fg) = grau (f) · grau (g)

b) grau (f) ⩾ grau (fg)

c) grau (fg) = grau (f) + grau (g)

d) grau (f + g) = grau (f) + grau (g)

e) grau (f + g) = max {grau (f), grau (g)}

**8.** Sejam os polinômios $f = (x + 1)^2$, $g = x^2 - 1$ e $h = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 1$. Calcule o polinômio $fg - h$.

**9.** Determine o valor de **k**, sabendo que o polinômio $4x^2 - 12x + k$ é um quadrado perfeito.

**10.** Usando o método da chave, efetue a divisão de p(x) por h(x) quando:

a) $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ e $h(x) = x + 4$.

b) $p(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$ e $h(x) = x^2 - 6x + 5$.

**11.** Calcule os valores reais de **x** para que $x^3 + 2x^2 + 8x + 7 = 0$, sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 8x + 7$ é divisível por $x + 1$.

**12.** Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de:

a) $p(x) = x^4 + 3x^2 + x - 5$ por $h(x) = x + 2$.

b) $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ por $h(x) = x - 4$.

**13.** Calcule o valor de **a**, sabendo que $p(x) = 2x^3 + ax^2 + (2a + 1)x + a + 3$ é divisível por $x + 4$.

**14.** Determine o polinômio p(x) do 3º grau que se anula para $x = 1$ e que, dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, apresenta resto igual a 6.

**15.** Calcule os valores reais de **m** sabendo que o resto da divisão de:

a) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + m$ por $h(x) = x - m$ é igual a $\mathbf{m^3}$;

b) $p(x) = m^2x^2 - 5mx + 6$ por $h(x) = x - 1$ é menor do que 2.

**16.** Calcule as raízes das seguintes equações algébricas:

a) $-x^2 + 9 = 0$.

b) $-3x + 2 = 0$.

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

d) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

**17.** Um polinômio inteiro em **x**, quando dividido por $x + 2$ dá resto 5 e quando dividido por $x - 2$ dá resto 13. Qual é o resto da divisão desse polinômio por $x^2 - 4$?

**18.** Dada a equação $2x^3 - mx^2 - 2x + 4 = 0$, calcule o valor de **m** para que uma das raízes da equação seja 2. A seguir, calcule as outras raízes dessa equação.

**19.** Encontre os valores de **a**, **b** e **c**, sabendo que 2, 4 e −3 são raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

**20.** Verifique quais das expressões abaixo são polinômios na variável **x** e indique o grau:

a) $x^2 + \sqrt{3}x - 1$

b) $x^2 + \sqrt{x} - 1$

c) $\dfrac{4}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x}$

d) $4x^3 - 2x^2 + 4x$

e) $\dfrac{x + 5}{2}$

f) $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + x$

g) $3x^5$

h) 7

**21.** Dados os polinômios $p(x) = (a - 1)x^2 - (a - b)x + (2a - b + c)$ e $q(x) = 4x^2 - 5x + 1$, determine **a**, **b** e **c** para que:

a) se tenha $p(x) = q(x)$;

b) p(x) seja um polinômio nulo;

c) p(x) seja um polinômio do 1º grau.

**22.** Dados os polinômios $p(x) = 9x^3 - 18x^2 + 11x - 6$ e $q(x) = 3x^2 - 4x + 1$, calcule:

a) $p(x) + q(x)$.

b) $p(x) - q(x)$.

c) $3p(x)$.

d) $p(x)q(x)$.

e) $[q(x)]^2$.

f) $p(x) : q(x)$.

**23.** Considere o polinômio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + k$ e responda:

a) Se −2 é raiz de p(x), qual é o valor de **k**?

b) Se $k = 1$, qual é o resto da divisão de p(x) por $x - 3$?

c) Se $k = 1 - i$, então $2i$ é ou não é raiz de p(x)?

**24.** Resolva as equações algébricas:

a) $x^3 - x^2(5 + i) + x(6 + 5i) - 6i = 0$, sabendo que **i** é uma das raízes;

b) $4x^4 + 16x^3 + 15x^2 - 4x - 4 = 0$, sabendo que −2 é raiz de multiplicidade 2;

c) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 10 = 0$, sabendo que $3 + i$ é uma de suas raízes;

d) $2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$.

## Questões de vestibular

**1.** (Mack-SP) Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

**2.** (Mack-SP) Calcule os valores de **m**, **n** e **ℓ** para os quais o polinômio $p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2\ell)$ é nulo.

**3.** (FEI-SP) Sendo $p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$, determine os coeficientes **a**, **b** e **c**, sabendo que $p(0) = 0$, $p(1) = 0$ e $q(1) = 2$.

**4.** (PUC-SP) Determine os valores de **m**, **n** e **p** de modo que se tenha $(m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p)x + n = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$.

**5.** (Faap-SP) Calcule os valores de **a**, **b** e **c** para que o polinômio $p_1(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

**6.** (FEI-SP) Determine os valores de **a**, **b** e **c** sabendo que $\dfrac{1}{x^3 - 1} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 + x + 1}$.

**7.** (Fuvest-SP) O polinômio p(x) é tal que
$p(x) + xp(2 - x) = x^2 + 3$ para todo **x** real.
Determine p(0), p(1) e p(2).

**8.** (Fuvest-SP) Considere um polinômio não-nulo p(x) tal que $(p(x))^3 = x^2p(x) = xp(x^2)$ para todo **x** real e determine:
a) o grau de p(x); b) p(x).

**9.** (UFRGS) Se P(x) é um polinômio de grau 5, então o grau de $[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2P(x)$ é:
a) 3. b) 8. c) 15. d) 20. e) 30.

**10.** (UFPR) Determine **m** e **n** de modo que o resto da divisão do polinômio $p(x) = x^5 - mx^3 + n$ por $h(x) = x^3 + 3x^2$ seja $r(x) = 5$.

**11.** (Fumec-MG) Calcule **m** e **n** para que o polinômio $p(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $h(x) = x^2 - x - 2$.

**12.** (ITA-SP) Sabendo que $p(x) = x^3 + px + q$ é divisível por $h(x) = x^2 + ax + b$ e por $g(x) = x^2 + rx + s$, demonstre que $b = -r(a + r)$.

**13.** (Uece) Coloque **V** (verdadeira) ou **F** (falsa) nas seguintes proposições:

I) ( ) O quociente da divisão de um polinômio de grau n + 2 por um polinômio de grau n − 1 é um polinômio de grau 4.

II) ( ) O resto da divisão de um polinômio de grau n + 1 por um polinômio de grau **n** é um polinômio de grau menor que **n** ou é o polinômio identicamente nulo.

III) ( ) O resto da divisão de um polinômio de grau 25 por um polinômio de grau 17 pode ser um polinômio de grau 19.

IV) ( ) A soma dos coeficientes do polinômio $x^5(x^5 + 5) - x^2(10x - 1) + 8$ é igual a 5.

A seqüência correta, de cima para baixo é:
a) VFFV. b) FVFV. c) VFVF. d) FVVF.

**14.** (FCMSCSP) Numa divisão de polinômio em que o dividendo é de grau **n** e o quociente é de grau n − 4, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$, o grau do resto pode ser no máximo igual a:
a) 3. b) 4. c) 5. d) n − 4. e) n − 5.

**15.** (PUC-SP) Calcule os valores de **a** e **b** para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax + b$ seja divisível por $g(x) = (x - 1)^2$.

**16.** (PUC-SP) Calcule o valor de **a** para que o resto da divisão do polinômio $p(x) = ax^3 - 2x + 1$ por $h(x) = x - 3$ seja igual a 4.

**17.** (ITA-SP) Determine os valores de **a** e **b** para que os polinômios $p(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x$ e $g(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $h(x) = x + 1$.

**18.** (Fumec-MG) Determine **m** e **n** de modo que $p(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $(x - 2)(x + 1)$.

**19.** (UFPB) O polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + mx^2 + 4x + n$ é divisível por $(x - 1)(x - 2)$. Calcule o valor de $5m + 2n$.

**20.** (FGV-SP) Determine o produto **mn** sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ é divisível por $(x - 1)(x - 2)$.

**21.** (FEI-SP) Dado o polinômio $p(x) = 4x^4 - 5x^2 - 3bx + a$, calcule os valores de **a** e **b** de modo que p(x) seja divisível por $g(x) = x^2 - 1$. [*Sugestão*: Faça $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.]

**22.** (Unicamp-SP) Determine o quociente e o resto da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

**23.** (UFMG) Os polinômios $P(x) = px^2 + qx - 4$ e $Q(x) = x^2 + px + q$ são tais que $P(x + 1) = Q(2x)$ para todo **x** real. Os valores de **p** e **q** são:
a) p = 1 e q = −4.
b) p = 2 e q = 4.
c) p = 4 e q = −4.
d) p = 4 e q = 0.
e) p = −4 e q = 0.

**24.** (Unifor-CE) $P = x - 3$, $Q = x^2 + 3x + 9$ e $R = (a + b)x^3 + (a - b)x^2 + cx + d$. Sabendo que o polinômio $P \cdot Q$ é idêntico a **R**, conclui-se que $a + b + c + d$ é igual a:
a) 28. b) 13. c) $\dfrac{25}{2}$. d) $\dfrac{3}{2}$. e) −26.

**25.** (Uece) Se $P(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 13) + 5$ e $Q(x) = \dfrac{P(x) - P(1)}{3x - 1}$ para $x \neq \dfrac{1}{3}$, então o valor de $Q(0)$ é igual a:

a) 13. b) 12. c) 11. d) 10.

**26.** (Uece) Se os números 2 e −3 são raízes da equação $x^3 - 4x^2 + px + q = 0$, então o resultado da divisão do polinômio $x^3 - 4x^2 + px + q$ por $x^2 + x - 6$ é:

a) $x - 1$. b) $x + 1$. c) $x - 5$. d) $x + 5$.

**27.** (ITA-SP) A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

**28.** (PUC-RS) Se os números −3, **a** e **b** são as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, calcule o valor de $a + b$.

**29.** (PUC-SP) Dado o polinômio $f = \begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}$, pedem-se:

a) as raízes de **f**;
b) o quociente e o resto da divisão de **f** por $x^2 - 1$.

**30.** (PUC-SP) Sabendo que −2 é raiz do polinômio

$f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & k & x \end{vmatrix}$, em que $x \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{R}$, determine:

a) o valor de **k**;
b) as demais raízes do polinômio.

**31.** (Vunesp) Se **m** é raiz do polinômio real $p(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$.

**32.** (Fuvest-SP) O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$. Calcule os valores de **a** e **b**.

**33.** (ITA-SP) Os números **a**, **b** e **c** são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

**34.** (EEM-SP) Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$, sabendo que uma delas é dupla.

**35.** (UFMG) Os números **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\log\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

**36.** (EEM-SP) Dada a equação algébrica $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ e sabendo que o produto de duas de suas raízes é igual a 1, calcule as raízes da equação.

**37.** (Mack-SP) As raízes da equação $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ estão em PG. Nessas condições, calcule o coeficiente **k**.

**38.** (EEM-SP) Dada a equação $x^3 - 9x^2 + 26x + a = 0$, determine o valor do coeficiente **a** para que as raízes dessa equação sejam números naturais sucessivos.

**39.** (Unicamp-SP) Sabendo que a equação $x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$ tem raízes **a**, **b** e **c**, escreva, com seus coeficientes numéricos, uma equação cúbica que tenha como raízes $a + 1$, $b + 1$ e $c + 1$.

**40.** (UFMT) Determine **a** para que a equação $x^3 + 3x^2 + ax - 15 = 0$ apresente suas raízes em PA.

**41.** (PUC-SP) Quais são as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$?

**42.** (FEI-SP) Resolva a equação cúbica $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

**43.** (ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

**44.** (EEM-SP) Determine as raízes da equação $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} + 4x = (x + 2)^2 + 7$.

**45.** (Fuvest-SP) Consideremos a equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que **m** e **n** são números reais. O número $1 + i$ é uma raiz dessa equação. Calcule, então, **m** e **n**.

**46.** (Fuvest-SP) a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?

a) Decomponha o polinômio $p(x)$ em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.
b) Resolva a inequação $p(x) < 4(x - 2)$.

**47.** (Fuvest-SP) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0$, sabendo que o número complexo $z = 1 + 2i$ é uma das suas raízes.

**48.** (Unicamp-SP) Ache todas as raízes (inclusive as complexas) da equação $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

**49.** (Unicamp-SP) Mostre que as raízes de $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$ são também raízes de $x^6 - 1 = 0$. Calcule essas raízes.

**50.** (Fuvest-SP) Considere o polinômio não nulo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, em que $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ estão em PG de razão $q \neq 0$.

a) Calcule $p\left(\dfrac{1}{q}\right)$.
b) Mostre que, para **n** par, o polinômio $p(x)$ não tem raiz real.

**51.** (UFG-GO) Considere o polinômio $p(x) = (x-1)(x-3)^2(x-5)^3(x-7)^4(x-9)^5(x-11)^6$. O grau de p(x) é igual a:

a) 6. b) 21. c) 36. d) 720. e) 1 080.

**52.** (UFRGS) A soma dos coeficientes do polinômio

$(x^2 + 3x - 3)^{50}$ é:

a) 0. b) 1. c) 5. d) 25. e) 50.

**53.** (UFC-CE) Se a expressão

$\dfrac{2x+5}{4x^2-1} = \dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{2x-1}$, onde **a** e **b** são constantes, é verdadeira para todo número real $x \neq \pm\dfrac{1}{2}$, então o valor de a + b é:

a) −2. b) −1. c) 1. d) 2. e) 3.

**54.** (Vunesp) Se **a**, **b**, **c** são números reais tais que $ax^2 + b(x+1)^2 + c(x+2)^2 = (x+3)^2$ para todo **x** real, então o valor de a − b + c é:

a) −5. b) −1. c) 1. d) 3. e) 7.

**55.** (UFPR) A respeito do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sendo **a**, **b**, **c**, **d** números reais, considere as seguintes afirmativas:

I) Se 1 é raiz de p(x), então a + b + c + d = 0.
II) O resto da divisão de p(x) por (x − k) é p(k).
III) Se a = 0, então p(x) tem duas raízes reais.
IV) Se d = 0, então p(x) possui pelo menos uma raiz real.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I, II e IV são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

**56.** (FGV-SP) Dividindo o polinômio P(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se quociente igual a x − 5 e resto igual a 13x + 5. O valor de P(1) é:

a) 12. b) 13. c) 15. d) 16. e) 14.

**57.** (PUC-PR) Dado o polinômio $x^4 + x^3 - mx^2 - nx + 2$, determine **m** e **n** para que o mesmo seja divisível por $x^2 - x - 2$. A soma m + n é igual a:

a) 6. b) 7. c) 10. d) 9. e) 8.

**58.** (Unifesp) A divisão de um polinômio p(x) por um polinômio k(x) tem $q(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ como quociente e $r(x) = x^2 + x + 7$ como resto. Sabendo que o resto da divisão de k(x) por **x** é 2, o resto da divisão de p(x) por **x** é:

a) 10. b) 12. c) 17. d) 25. e) 70.

**59.** (UFBA) Na equação $(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)^{12} = 0$, a multiplicidade da raiz x = 2 é:

a) 1. b) 6. c) 12. d) 24. e) 36.

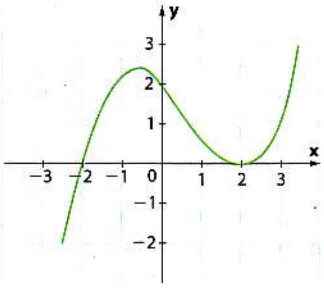
**60.** (Mack-SP)

$$\begin{array}{r|l} ax^4 + 5x^2 - ax + 4 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} r(x) & Q(x) \end{array}$$

Considerando o resto r(x) e o quociente Q(x) da divisão acima, se r(4) = 0, Q(1) vale:

a) 1. b) −3. c) −5. d) −4. e) 2.

**61.** (UFRGS) Na figura abaixo está representado o gráfico de um polinômio de grau 3.



A soma dos coeficientes desse polinômio é:

a) 0,5. b) 0,75. c) 1. d) 1,25. e) 1,5.

**62.** (UFMG) As dimensões **a**, **b** e **c**, em cm, de um paralelepípedo retângulo são as raízes do polinômio $p(x) = 6x^3 - 44x^2 + 103x - 77$.

a) Calcule o volume desse paralelepípedo.
b) Calcule a soma das áreas das faces desse paralelepípedo.
c) Calcule o comprimento da diagonal desse paralelepípedo.

**63.** (UEL-PR) A equação $x^3 - 10x^2 + ax + b = 0$ tem uma raiz igual a 3 + 2i. Nela, **a** e **b** são números reais. Sobre essa equação, é correto afirmar:

a) −3 + 2i também é raiz da equação.
b) A equação não possui raízes reais.
c) A equação possui uma raiz irracional.
d) O valor de **a** é −37.
e) O valor de **b** é −52.

**64.** (UFPB) Considerando as proposições sobre polinômios, assinale com **V** a(s) verdadeira(s) e com **F**, a(s) falsa(s).

( ) Sejam f(x) e g(x) polinômios não nulos tais que f(2) = g(2) = 0. Se r (x) é o resto da divisão de f(x) por g(x), então r(2) = 0.
( ) O polinômio $f(x) = x^3 + 3x + 2$ tem uma raiz inteira.
( ) Se f(x) e g(x) são polinômios de grau 3, então o grau do produto f(x) · g(x) é 9.

A seqüência correta é:

a) VFF.
b) FVF.
c) FFV.
d) VVF.
e) VFV.
f) FVV.

**65.** (Unifap) Seja o polinômio p: IR → IR, definido por $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$. Se os conjuntos **A** e **B** são definidos por $A = \{x \in \mathbb{R}: p(x) = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: p(x) \geqslant 0\}$.

a) Determine o conjunto de todos os pontos **x** que pertencem a **A**.
b) Determine o conjunto de todos os pontos **x** que pertencem a **B**.
c) Esboce um gráfico do polinômio **p**.

## Leitura

### A história das equações algébricas*

A história recente das equações cúbicas e quárticas começa com os matemáticos italianos, um pouco antes da traição de Cardano (Girolamo Cardano, 1501-1576), que publicou, em 1545, na sua obra *Ars Magna*, o método de resolução das equações cúbicas revelado a ele por Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557), sob juramento de segredo total. Cardano justificou a traição com o pretexto de que, ao tomar conhecimento do trabalho de Del Ferro (Scipione del Ferro, 1465-1526), Tartaglia não havia sido o único nem o primeiro a descobrir a fórmula para resolver as cúbicas.

Realmente, Del Ferro estudou as cúbicas antes de Tartaglia, em total segredo. Um pouco antes de sua morte, revelou-o a um aluno, que depois ousou desafiar Tartaglia para um duelo matemático sobre resolução de cúbicas e perdeu, caindo na obscuridade. Há suspeitas de que o método de Del Ferro não era suficiente para resolver todas as cúbicas, pois Del Ferro não conhecia os números negativos (até então, somente a Matemática hindu já lidava bem com as quantidades negativas).

Junto com o método de resolução das cúbicas, o *Ars Magna*, de Cardano, trazia toda a discussão acerca da resolução das quárticas, resultado de um profundo estudo de Ferrari (Ludovico Ferrari, 1522-1565), aluno de Cardano, em cima dos resultados de Tartaglia para as cúbicas. Tartaglia ficou muito furioso com a publicação do *Ars Magna*, acusando Cardano de traidor. Ferrari, por sua vez, escreveu a Tartaglia pedindo desculpas e desafiando-o a uma disputa pública. Tartaglia não estava convencido de que derrotaria Ferrari e adiou ao máximo a disputa, que só ocorreu em Milão, três anos depois. Em uma disputa que toda a cidade acompanhou, Ferrari começou levando a melhor, demonstrando uma compreensão mais profunda da resolução das equações quárticas e cúbicas. Tartaglia, antevendo a derrota, fugiu de Milão e abandonou a disputa. Nos anos que se seguiram à publicação do *Ars Magna*, muitos matemáticos publicaram contribuições para a resolução das equações cúbicas e quárticas.

Soluções de equações algébricas até o quarto grau (as quárticas) são solúveis por fórmulas que envolvem os coeficientes, as quatro operações aritméticas e a extração de raízes. Entretanto, a resolução das quínticas (equações polinomiais de grau 5) continuou sendo um quebra-cabeça por quase 300 anos, pois todos acreditavam que elas também poderiam ser resolvidas por fórmulas; assim, muitos matemáticos tentaram, em vão, obter a fórmula.

Em 1799, Ruffini (Paolo Ruffini, 1765-1822) publicou um trabalho em que, exceto por um pequeno engano, provava a impossibilidade de resolução das quínticas por fórmulas. Entretanto, esse engano não lhe deveria tirar o mérito de ter sido o primeiro a perceber esse fato. Como nessa época era um contra-senso acreditar que alguma equação algébrica não pudesse ser resolvida por meio de fórmulas, Ruffini morreu sem poder corrigir sua prova e sem ser reconhecido por ela.

A primeira prova correta da impossibilidade de resolver as quínticas por fórmulas foi publicada pelo norueguês Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) em 1824. O curioso é que, três anos antes, Abel chegou a acreditar ter obtido a fórmula de resolução das quínticas, porém, ao produzir um exemplo de utilização da fórmula, percebeu que se enganara. Além dele, Galois (Évariste Galois, 1811-1832) também provou essa impossibilidade usando a sua própria teoria, mais tarde chamada teoria de Galois. Com isso, esse gênio francês, que morreu num duelo aos 21 anos de idade, nos permitiu hoje saber quais equações são ou não passíveis de resolução por fórmulas que envolvem os coeficientes.

### Bibliografia

DAVIS, Harold T. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. São Paulo, Atual, 1992.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html
http://members.fortunecity.com/kokhuitan/polyneqn.html

---

* Texto elaborado pelo Prof. Eloy Ferraz Machado Neto.

6

# Capítulo

# Estatística

*Coletar dados é um procedimento fundamental em qualquer área de interesse da nossa vida. Fazemos isso a todo momento. Basta querermos adquirir um bem, que lá vamos nós pesquisar preços e qualidade. Para conhecer o perfil dos alunos de determinada escola, elaboramos um questionário e saímos à coleta de respostas e, depois de cumprida essa etapa, podemos sofisticar nossa pesquisa, analisando a concentração de respostas favoráveis a certos hábitos ou gostos, e assim fazemos, na prática, uma* análise estatística. *Os noticiários nos informam diariamente dados numéricos representados em gráficos e tabelas, formas fáceis de comunicação por serem diretas, esquemáticas, próprias da linguagem matemática. Por isso ela é considerada um ramo da Matemática aplicada.*

*A palavra* estatística *significa, justamente, 'análise de dados'. Como ciência, surgiu milênios antes de Cristo, sendo, no início, uma simples compilação de números. Acredita-se que seu desenvolvimento ocorreu devido à necessidade dos governantes de conhecerem como os recursos e bens estavam distribuídos pela população e do que dispunha o Estado. Até os dias de hoje são conhecidas suas aplicações em relação aos assuntos públicos. O censo, por exemplo, acontece periodicamente e fornece elementos importantes para o planejamento do país. De origem latina, a palavra* censo *significa 'conjunto dos dados estatísticos dos habitantes de uma cidade, estado ou nação'. O mais antigo de que se tem notícia é o da China — diz-se que em 2238 a.C. o imperador Yao mandou realizar um censo da população e das lavouras cultivadas. Por volta de 400 a.C., os romanos já faziam regularmente um levantamento da população e do grau de pobreza, com o objetivo de estabelecer taxas de impostos. O primeiro censo no Brasil foi realizado em 1872 e, desde 1936, quando foi criado o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), acontece a cada dez anos, tornando-se a operação estatística mais importante para a determinação do perfil sociodemográfico do país, dando subsídios para a*

*Fonte: IBGE, Censo demográfico 1980, 1991 e 2000 e Contagem da população 1996.*
*Extraído de http://www.ibge.gov.br/brasil_em_sintese/default.htm. Acesso em 24/5/2007.*

*análise de distribuição de recursos do Fundo de Participação dos Municípios. O gráfico da página ao lado, extraído do site oficial do IBGE, mostra a população do Brasil, em milhões de habitantes, nos últimos censos.*

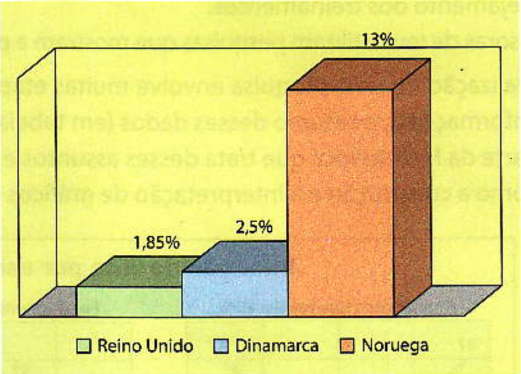
*Apesar de as primeiras noções estatísticas terem aparecido muito tempo antes de Cristo, foi somente no século XVIII que o termo "estatística" se instituiu, por sugestão do alemão Gottfried Achenwall (1719-1772), jurista e historiador, que atribuiu à Estatística um caráter científico, considerando-a "um conjunto de elementos socioeconômicos e políticos nos quais se assenta o Estado".*

*No século XIX destaca-se Karl Pearson (1857-1936), fundador do primeiro departamento universitário dedicado à Estatística aplicada, tornando-a uma disciplina científica independente, integrando-a com várias áreas do conhecimento. Com especial interesse no estudo da "bioestatística", contribuiu, no campo da Psicologia, com a pesquisa estatística da evolução do comportamento humano.*

*Por fornecer dados que embasam todo tipo de pesquisa, é uma disciplina presente em quase todos os cursos superiores. Neste capítulo damos continuidade ao estudo da Estatística que você já deve ter iniciado em séries anteriores, aprofundando-nos um pouco mais ao abordarmos problemas que envolvem conceitos e termos mais específicos. Apesar da freqüência com que aparece no nosso dia-a-dia, uma vez que gráficos e tabelas povoam jornais e revistas, a Estatística pode nos levar a detalhes bastante sofisticados, que envolvem maior conhecimento técnico.*

## Atividades

**1.** Segundo dados de 2003, para reduzir o consumo de agrotóxico, alguns países da Europa cobram dos produtores desse material uma taxa sobre as vendas realizadas. O gráfico seguinte mostra essa taxa em três países. Parte da arrecadação é destinada para a fiscalização e parte é direcionada para a pesquisa, com o objetivo de promover técnicas alternativas de plantio.



a) Qual desses países cobra maior taxa sobre as vendas de agrotóxico de seus produtores?

b) Estabeleça uma relação entre a maior e a menor taxa cobrada por esses países.

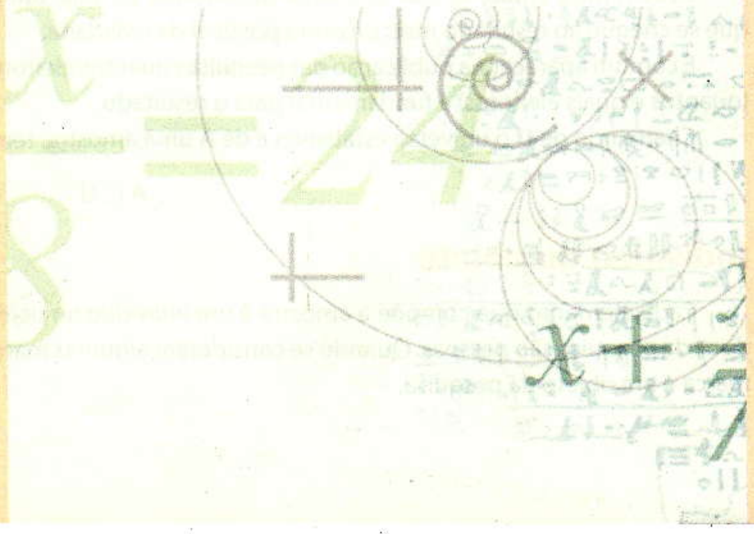
c) Se em um semestre um produtor da Dinamarca vende um total de 12 500 euros da sua produção de agrotóxico, quanto ele deve pagar ao governo nesse período?

**2.** Veja o que o professor de Matemática afirmou a respeito das médias do 2º bimestre obtidas por seus alunos do 3º B: "No 2º bimestre, de todos os meus alunos da 3ª série B, 3 ficaram com média 5,5, enquanto 12 ficaram com 6,0; por outro lado, 6 obtiveram média 7,0, outros 9, média 8,5, e os 6 restantes ficaram com média 9,5".

a) Arrume os dados declarados por esse professor numa tabela.

b) Responda: Quantos alunos havia na 3ª série B?

c) Numa folha de papel quadriculado, faça um gráfico de barras, pinte uma quadrícula para cada 3 alunos e considere que o eixo horizontal (**x**) representa as notas e o eixo vertical (**y**) o número de alunos.



## 1 Introdução

O uso da pesquisa é bastante comum nas várias atividades humanas.

**Exemplos:**

1º) As indústrias costumam realizar pesquisas entre os consumidores antes do lançamento de um novo produto no mercado.

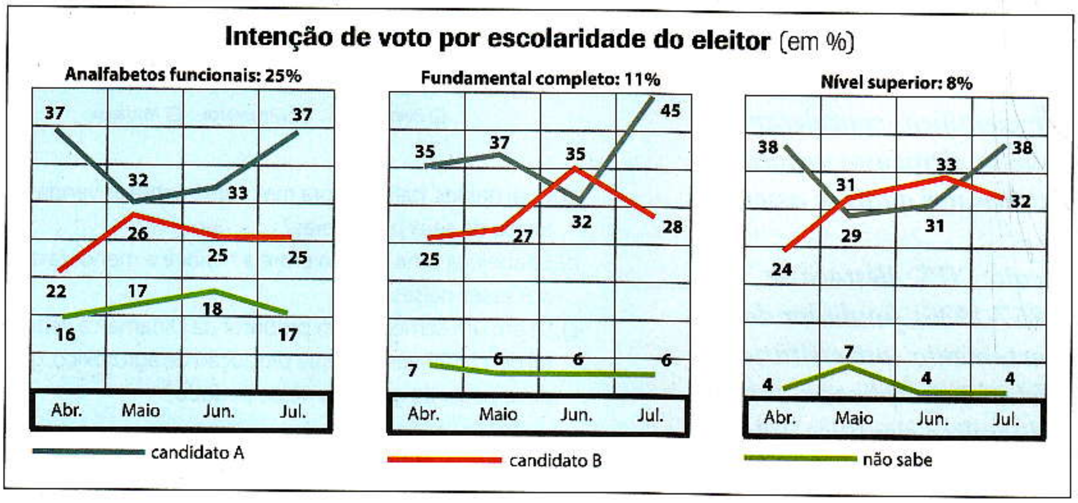
2º) As pesquisas eleitorais fornecem elementos para que os candidatos direcionem a campanha.

3º) A pesquisa do desempenho dos atletas, ou das equipes em uma partida, ou em um campeonato interfere no planejamento dos treinamentos.

4º) Emissoras de tevê utilizam pesquisas que mostram a preferência dos espectadores para organizar sua programação.

A realização de uma pesquisa envolve muitas etapas, como a escolha da amostra, a coleta e organização dos dados (informações), o resumo desses dados (em tabelas, gráficos, etc.) e a interpretação dos resultados.

A parte da Matemática que trata desses assuntos é a *Estatística*. Neste capítulo, vamos estudar noções de Estatística, como a construção e a interpretação de gráficos como os que seguem:



## 2 Termos de uma pesquisa estatística

### População e amostra

Se quisermos saber, por exemplo, qual a matéria favorita entre os alunos de uma classe, podemos consultar todos os alunos da classe.

No entanto, isso não é possível quando queremos pesquisar sobre a intenção de voto dos eleitores do estado de São Paulo, pois não podemos consultar todos os eleitores que constituem a *população* ou o *universo estatístico*.

Recorremos, então, ao que se chama de *amostra*, ou seja, um grupo de eleitores que, consultados, permitem que se chegue ao resultado mais próximo possível da realidade.

É comum aparecer na publicação das pesquisas quantos eleitores foram consultados, pois a escolha da amostra (quantos e quais eleitores) é fundamental para o resultado.

Chamando de **U** o universo estatístico e de **A** uma amostra, temos:

$$A \subset U.$$

**Para refletir**

Em que situação temos $A = U$?

### Indivíduo ou objeto

Cada elemento que compõe a amostra é um *indivíduo* ou *objeto*. No exemplo da intenção de voto, os indivíduos da pesquisa são pessoas. Quando se consideram algumas marcas de lâmpada para testar a durabilidade, cada marca é um objeto da pesquisa.

## Variável

Uma indústria automobilística que pretende lançar um novo modelo de carro faz uma pesquisa para sondar a preferência dos consumidores sobre tipo de combustível, número de portas, potência do motor, preço, cor, tamanho, etc. Cada uma dessas características é uma *variável* da pesquisa.

Na variável "tipo de combustível", a escolha pode ser, por exemplo, entre álcool e gasolina. Dizemos que esses são *valores* ou *realizações* da variável "tipo de combustível".

### Variável qualitativa

Em uma pesquisa que envolve pessoas, por exemplo, as variáveis consideradas podem ser sexo, cor de cabelo, esporte favorito e grau de instrução. Nesse caso dizemos que as variáveis são *qualitativas*, pois apresentam como possíveis valores uma qualidade (ou atributo) dos indivíduos pesquisados.

Além disso, dizemos que as variáveis qualitativas podem ser *ordinais*, quando existe uma ordem nos seus valores, ou *nominais*, quando isso não ocorre.

**Exemplo:**

"Grau de instrução" é uma *variável qualitativa ordinal*, já que seus valores podem ser ordenados (fundamental, médio, superior, etc.).

**Para refletir**

"Esporte favorito" é uma *variável qualitativa nominal*. Justifique.

### Variável quantitativa

Quando as variáveis de uma pesquisa são, por exemplo, altura, peso, idade em anos e número de irmãos, dizemos que elas são *quantitativas*, pois seus possíveis valores são números.

As variáveis quantitativas podem ser *discretas*, quando se trata de contagem (números inteiros), ou *contínuas*, quando se trata de medida (números reais).

**Exemplos:**

1º) "Número de irmãos" é uma *variável quantitativa discreta*, pois podemos contar (0, 1, 2, etc.).

2º) "Altura" é uma *variável quantitativa contínua*, uma vez que pode ser medida (1,55 m, 1,80 m, 1,73 m, etc.).

Quadro-resumo dos tipos de variável de uma pesquisa:

$$\text{Variável}\begin{cases}\text{qualitativa}\begin{cases}\text{nominal}\\\text{ordinal}\end{cases}\\[2ex]\text{quantitativa}\begin{cases}\text{discreta}\\\text{contínua}\end{cases}\end{cases}$$

**Para refletir**

A idade em anos exatos pode ser considerada variável quantitativa discreta (8, 10, 17, etc.).

**Exercício proposto**

**1.** Uma concessionária de automóveis tem cadastrados 3 500 clientes e fez uma pesquisa sobre a preferência de compra em relação a "cor" (branco, vermelho ou azul), "preço", "número de portas" (duas ou quatro) e "estado de conservação" (novo ou usado). Foram consultados 210 clientes. Diante dessas informações, responda:

a) Qual é o universo estatístico e qual é a amostra dessa pesquisa?

b) Quais são as variáveis e qual é o tipo de cada uma?

c) Quais os possíveis valores da variável "cor" nessa pesquisa?

## Freqüência absoluta e freqüência relativa

Suponha que entre um grupo de turistas, participantes de uma excursão, tenha sido feita uma pesquisa sobre a nacionalidade de cada um e que o resultado dela tenha sido o seguinte:

Pedro: brasileiro; Ana: brasileira; Ramón: espanhol; Laura: espanhola; Cláudia: brasileira; Sérgio: brasileiro; Raúl: argentino; Nélson: brasileiro; Sílvia: brasileira; Pablo: espanhol.

O número de vezes que um valor da variável é citado representa a *freqüência absoluta* daquele valor.

Nesse exemplo, a variável é "nacionalidade" e a freqüência absoluta de cada um de seus valores é: brasileira, 6; espanhola, 3; e argentina, 1.

Existe também a *freqüência relativa*, que registra a freqüência absoluta em relação ao total de citações.

Nesse exemplo, temos:

- freqüência relativa da nacionalidade brasileira: 6 em 10 ou $\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{5}$ ou 0,6 ou 60%;
- freqüência relativa da nacionalidade espanhola: 3 em 10 ou $\frac{3}{10}$ ou 0,3 ou 30%;
- freqüência relativa da nacionalidade argentina: 1 em 10 ou $\frac{1}{10}$ ou 0,1 ou 10%.

**Para refletir**

A freqüência relativa pode ser expressa em fração, decimal ou porcentagem.

Podemos associar a freqüência relativa de um evento à probabilidade de que ele ocorra. Se o número total de citações for suficientemente grande, a freqüência relativa se estabiliza em torno de um número que expressa a probabilidade de ocorrência desse evento.

## Tabela de freqüências

A tabela que mostra a variável e suas realizações (valores), com as freqüências absoluta (FA) e relativa (FR), é chamada de *tabela de freqüências*.

Assim, usando o mesmo exemplo, temos:

| Nacionalidade | FA | FR |
|---|---|---|
| brasileira | 6 | 60% |
| espanhola | 3 | 30% |
| argentina | 1 | 10% |
| total | 10 | 100% |

### Exercício proposto

**2.** Um grupo de alunos foi consultado sobre o time paulista de sua preferência, e os votos foram registrados assim: Santos ⊔; Palmeiras ☐; Corinthians ⧄⊔; São Paulo ⧄|. Construa a tabela de freqüências correspondente a essa pesquisa.

## Tabelas de freqüências das variáveis quantitativas

Já sabemos que a variável quantitativa tem seus possíveis valores indicados por números. Veremos agora que, na elaboração de suas tabelas de freqüências, podemos deparar com duas situações.

Para isso, vamos tomar como exemplo um grupo de alunos dos quais foram registrados a idade (em anos), o "peso" (em quilogramas) e a altura (em metros).

Alberto: 14 a, 49,0 kg e 1,73 m;
Alexandre: 14 a, 46,5 kg e 1,66 m;
Carlos: 16 a, 53,0 kg e 1,78 m;
Cláudio: 15 a, 50,0 kg e 1,75 m;
Eduardo: 14 a, 51,0 kg e 1,68 m;
Flávio: 15 a, 49,0 kg e 1,70 m;
Geraldo: 14 a, 44,0 kg e 1,62 m;
Gilberto: 15 a, 51,0 kg e 1,76 m;
Hélio: 14 a, 48,3 kg e 1,68 m;
José Carlos: 16 a, 52,0 kg e 1,79 m;
José Luís: 14 a, 49,0 kg e 1,74 m;
Lúcio: 14 a, 46,5 kg e 1,65 m;
Marcos: 15 a, 48,0 kg e 1,63 m;
Mário: 14 a, 48,5 kg e 1,69 m;
Maurício: 16 a, 50,0 kg e 1,70 m;
Mílton: 14 a, 52,0 kg e 1,75 m;
Renato: 14 a, 46,0 kg e 1,72 m;
Roberto: 15 a, 47,0 kg e 1,69 m;
Saul: 14 a, 51,0 kg e 1,73 m;
Sérgio: 14 a, 49,0 kg e 1,66 m.

**Primeira situação:**

Ao elaborar a tabela de freqüências da variável "idade", notamos que aparecem como possíveis valores 14 anos, 15 anos e 16 anos:

| **Idade** (anos) | **Contagem** | **FA** | **FR** (fração) | **FR** (%) |
|---|---|---|---|---|
| 14 | ⧄⧄∟ | 12 | $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ | 60 |
| 15 | ⧄ | 5 | $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ | 25 |
| 16 | ⊔ | 3 | $\frac{3}{20}$ | 15 |
| total | | 20 | 1 | 100 |

**Segunda situação:**

Para a variável "altura" aparecem muitos valores diferentes, o que torna inviável colocar na tabela uma linha para cada valor. Em casos como esse, agrupamos os valores em intervalos (ou classes), como veremos a seguir:

1º) Calculamos a diferença entre a maior e a menor altura registrada, obtendo a amplitude total (1,79 m − 1,62 m = 0,17 m).

2º) Escolhemos o número de intervalos (geralmente superior a quatro), consideramos um número conveniente (um pouco acima da amplitude total) e determinamos a amplitude de cada intervalo (classe). No exemplo, para 6 intervalos, fazemos 0,18 m : 6 = 0,03 m.

3º) Elaboramos a tabela de freqüências:

| **Altura** (em classes) | **Contagem** | **FA** | **FR** (decimal) | **FR** (%) |
|---|---|---|---|---|
| 1,62 ⊢—— 1,65 m | ∟ | 2 | 0,10 | 10 |
| 1,65 ⊢—— 1,68 m | ⊔ | 3 | 0,15 | 15 |
| 1,68 ⊢—— 1,71 m | ⧄\| | 6 | 0,30 | 30 |
| 1,71 ⊢—— 1,74 m | ⊔ | 3 | 0,15 | 15 |
| 1,74 ⊢—— 1,77 m | □ | 4 | 0,20 | 20 |
| 1,77 ⊢—— 1,80 m | ∟ | 2 | 0,10 | 10 |
| total | | 20 | 1,00 | 100 |

**Observações:**

1ª) As classes (intervalos) foram obtidas, a partir de 1,62 m, fazendo a adição de 0,03 (1,62 + 0,03 = 1,65; 1,65 + 0,03 = 1,68; e assim por diante).

2ª) O símbolo ⊢—— indica intervalo fechado à esquerda e aberto à direita. Assim, a altura 1,68 m não foi registrada em 1,65 ⊢—— 1,68 m, mas no intervalo 1,68 ⊢—— 1,71 m.

## Exercício proposto

**3.** Usando os dados da mesma pesquisa (página anterior), elabore a tabela de freqüências da variável "peso" com seus valores agrupados em 5 classes.

Vamos agora retomar os termos de Estatística vistos até aqui, por meio da seguinte situação:

Em uma escola com 5 classes de 1ª série do ensino médio, cada uma com 45 alunos, foi feita uma pesquisa para traçar o perfil da 1ª série. Para tanto, foram selecionados 5 alunos de cada classe, que responderam a um questionário, a partir do qual foi elaborada a seguinte tabela:

| **Nome** | **Sexo** | **Idade** (anos/meses) | **Altura** (cm) | **Peso** (kg) | **Número de irmãos** | **Cor de cabelo** | ***Hobby*** | **Número do sapato** | **Manequim** | **Desempenho em Matemática** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antônio | M | 15 a 4 m | 156 | 49 | 2 | castanho | esporte | 36 | 38 | ótimo |
| Artur | M | 14 a 7 m | 166 | 48 | 0 | castanho | esporte | 39 | 38 | bom |
| Áurea | F | 15 a 2 m | 165 | 66 | 1 | castanho | música | 36 | 42 | insuficiente |
| Bruno | M | 14 a 8 m | 175 | 63 | 0 | castanho | patinação | 40 | 42 | regular |
| Carla | F | 14 a 5 m | 165 | 57 | 2 | loiro | música | 36 | 40 | regular |
| Cláudia | F | 15 a 3 m | 164 | 50 | 2 | loiro | dança | 36 | 38 | bom |
| Domingos | M | 14 a 6 m | 163 | 51 | 1 | castanho | esporte | 36 | 38 | bom |
| Edite | F | 14 a 7 m | 160 | 60 | 3 | castanho | música | 36 | 40 | ótimo |
| Flávia | F | 14 a 7 m | 175 | 65 | 1 | castanho | esporte | 37 | 42 | bom |
| Fúlvio | M | 14 a 5 m | 150 | 38 | 1 | ruivo | esporte | 34 | 36 | insuficiente |
| Geraldo | M | 15 a 11 m | 146 | 38 | 0 | castanho | aeromodelismo | 34 | 36 | regular |
| José | M | 14 a 10 m | 165 | 52 | 1 | castanho | dança | 38 | 38 | regular |
| Laura | F | 14 a 0 m | 165 | 53 | 2 | castanho | dança | 36 | 38 | bom |
| Lúcia | F | 14 a 8 m | 167 | 65 | 2 | castanho | música | 37 | 42 | bom |
| Mário | M | 15 a 4 m | 165 | 50 | 3 | loiro | patinação | 36 | 38 | insuficiente |
| Mauro | M | 14 a 11 m | 163 | 54 | 4 | castanho | esporte | 38 | 40 | ótimo |
| Nívea | F | 15 a 2 m | 164 | 63 | 1 | loiro | esporte | 38 | 42 | bom |
| Orlando | M | 14 a 8 m | 159 | 64 | 2 | castanho | música | 37 | 42 | regular |
| Patrícia | F | 15 a 1 m | 158 | 43 | 1 | loiro | dança | 36 | 36 | insuficiente |
| Paula | F | 14 a 11 m | 163 | 53 | 1 | castanho | dança | 36 | 38 | bom |
| Renata | F | 14 a 3 m | 162 | 52 | 1 | castanho | dança | 36 | 38 | ótimo |
| Roberto | M | 14 a 2 m | 167 | 53 | 0 | castanho | esporte | 40 | 38 | ótimo |
| Sandra | F | 14 a 10 m | 167 | 58 | 1 | loiro | dança | 40 | 40 | ótimo |
| Teresa | F | 15 a 9 m | 155 | 49 | 0 | castanho | patinação | 35 | 36 | ótimo |
| Vânia | F | 15 a 2 m | 152 | 41 | 3 | castanho | música | 34 | 36 | bom |

A partir da tabela dada, podemos afirmar:

1º) O universo estatístico é constituído de 225 alunos.
2º) A amostra dessa pesquisa é constituída de 25 alunos.
3º) "Cor de cabelo" é uma variável qualitativa nominal.
4º) "Número de irmãos" é uma variável quantitativa discreta.
5º) "Desempenho em Matemática" é uma variável qualitativa ordinal.
6º) "Altura" é uma variável quantitativa contínua.
7º) "Dança" é um valor da variável *hobby*, cuja freqüência absoluta é 7 e cuja freqüência relativa é $\frac{7}{25}$ ou 0,28 ou 28%.
8º) A tabela de freqüências da variável "número de irmãos" é a seguinte:

| **Número de irmãos** | **Contagem** | **FA** | **FR** | **FR** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | ⧄ | 5 | $\frac{5}{25} = 0,2$ | 20% |
| 1 | ⧄⧄ | 10 | $\frac{10}{25} = 0,4$ | 40% |
| 2 | ⧄\| | 6 | $\frac{6}{25} = 0,24$ | 24% |
| 3 | ⊔ | 3 | $\frac{3}{25} = 0,12$ | 12% |
| 4 | \| | 1 | $\frac{1}{25} = 0,04$ | 4% |
| total | | 25 | 1 | 100% |

9º) A tabela de freqüências da variável "peso" (em quilograma), com os valores em classes:
Amplitude total: 66 − 38 = 28
Número de intervalos: 5
Amplitude relativa: 30 : 5 = 6

| **Peso** (kg) | **Contagem** | **FA** | **FR** |
|---|---|---|---|
| 38 ⊢—— 44 | □ | 4 | 16% |
| 44 ⊢—— 50 | ⊔ | 3 | 12% |
| 50 ⊢—— 56 | ⧄□ | 9 | 36% |
| 56 ⊢—— 62 | ⊔ | 3 | 12% |
| 62 ⊢—— 68 | ⧄\| | 6 | 24% |
| total | | 25 | 100% |

## Exercícios propostos

Para os exercícios 4, 5 e 6, utilize o quadro da página anterior.

**4.** Responda:
a) Das variáveis do quadro quais são qualitativas nominais?
b) Quais são os valores da variável "sexo"?
c) Qual é a freqüência absoluta do valor 38 da variável "manequim"? E a freqüência relativa (em fração, decimal e porcentagem)?
d) Qual é o valor da variável "cor de cabelo", cuja freqüência relativa é 72%?

**5.** Elabore a tabela de freqüências da variável "desempenho em Matemática".

**6.** Construa a tabela de freqüências da variável "altura" (em centímetros), com os valores em 6 intervalos (classes).

**7.** A tabela a seguir é resultante de uma pesquisa sobre os "gêneros musicais" mais vendidos em uma loja de CDs durante um dia. Complete os espaços.

| **Gênero musical** | **FA** | **FR** | **FR** | **FR** |
|---|---|---|---|---|
| sertanejo | | | | 30% |
| MPB | | $\frac{6}{25}$ | | |
| rock | | | | |
| clássico | | | 0,14 | |
| total | 50 | | | |

**8.** Foi feito o levantamento dos "salários" dos funcionários de uma empresa e, em seguida, foi elaborada a tabela de freqüências, com os valores da variável em classes. Complete a tabela.

| **Salário** (R$) | **FA** | **FR** |
|---|---|---|
| ⊢—— | | 10% |
| ⊢—— | 15 | |
| ⊢—— | 30 | 50% |
| ⊢—— | 6 | |
| 960 ⊢—— 1050 | | |
| total | | |

**9.** Na Copa do Mundo da Alemanha (2006), o Brasil disputou os seguintes jogos: Brasil 1 × 0 Croácia; Brasil 2 × 0 Austrália; Brasil 4 × 1 Japão; Brasil 3 × 0 Gana; Brasil 0 × 1 França.
a) Construa a tabela de freqüências da variável "resultados", considerando como valores as vitórias, os empates e as derrotas.
b) Elabore a tabela de freqüências da variável "gols marcados por partida", usando como valores 1 gol, 2 gols, 3 gols e 5 gols.

# 3 Representação gráfica

A representação gráfica fornece uma visão de conjunto mais rápida que a observação direta dos dados numéricos. Por isso, os meios de comunicação com freqüência oferecem a informação estatística por meio de gráficos.

Consideremos uma situação em que, na votação para representante e vice-representante da 1ª série do ensino médio, um aluno anota os votos com um "×" ao lado do nome do candidato, enquanto seus colegas votam. Ao terminar a votação, podemos observar o "desenho" ao lado.

| | |
|---|---|
| Adriano | × × × × × × × × × × × × × |
| Letícia | × × × × × × × |
| Luciana | × × × × × × × × × × |
| Marino | × × × × × × |
| Magda | × × × × |

Não precisamos contar os votos para saber quem foi eleito. Pelos "xis", notamos que Adriano foi o escolhido para representante e Luciana para vice.

Com uma simples olhada, obtemos a informação de que necessitamos. Essa é uma característica importante dos gráficos estatísticos.

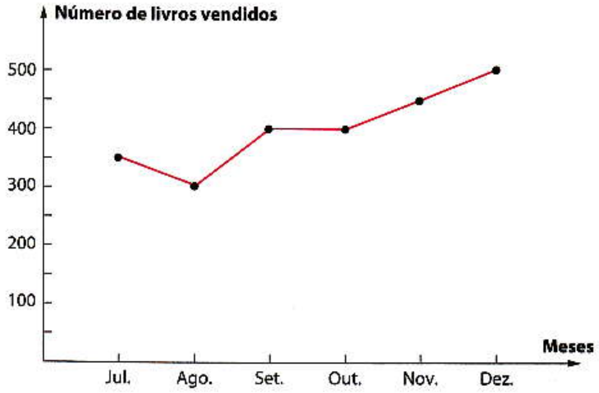
## Gráfico de segmentos

A tabela que segue mostra a venda de livros em uma livraria no segundo semestre de determinado ano.

| Meses do segundo semestre | Número de livros vendidos |
|---|---|
| julho | 350 |
| agosto | 300 |
| setembro | 400 |
| outubro | 400 |
| novembro | 450 |
| dezembro | 500 |

A situação do exemplo estabelece uma correspondência que pode ser expressa por pares ordenados (julho, 350), (agosto, 300), etc. Usando eixos cartesianos, localizamos os seis pares ordenados e construímos um gráfico de segmentos.

Os gráficos de segmentos são utilizados principalmente para mostrar a evolução das freqüências dos valores de uma variável durante um certo período.



A posição de cada segmento indica crescimento, decréscimo ou estabilidade. Já a inclinação do segmento sinaliza a intensidade do crescimento ou do decréscimo.

Pelo gráfico anterior, vemos que:

- de julho para agosto as vendas caíram;
- de setembro para outubro as vendas permaneceram estáveis;
- o crescimento de agosto para setembro foi maior que o de outubro para novembro;
- o mês com maior número de vendas foi dezembro;
- no mês de outubro foram vendidos 400 livros.

**Para refletir**

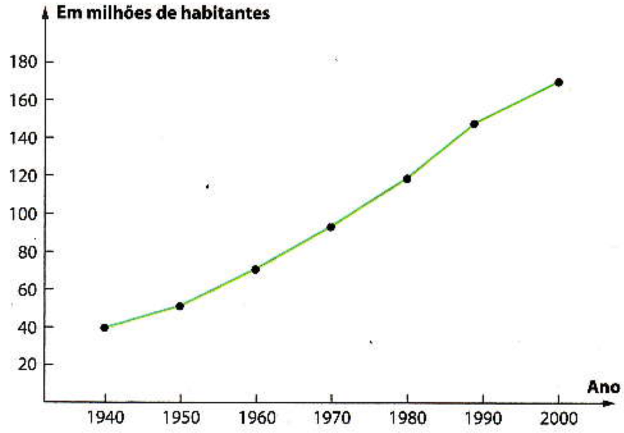
O gráfico de segmentos é chamado também de gráfico de linhas.

**Para refletir**

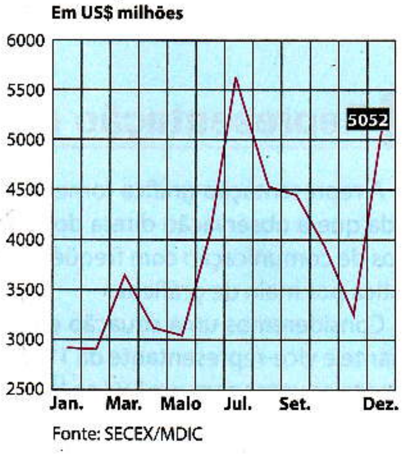
O que indica o saldo da balança comercial?

**Exemplos:**

1º) **Crescimento da população brasileira de 1940 a 2000**



2º) **Saldo da balança comercial brasileira em 2006**



Fonte: SECEX/MDIC

## Exercícios propostos

**10.** Utilize o gráfico de segmentos do exemplo dado (venda de livros) na página anterior e responda:

a) Em que períodos do segundo semestre as vendas subiram?

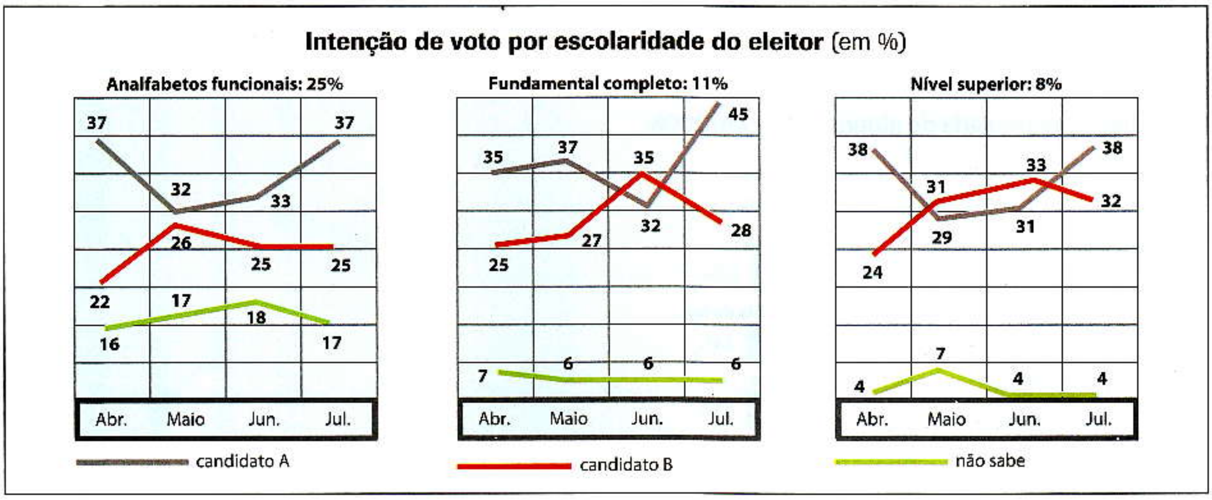
b) Em qual destes dois meses as vendas foram maiores: julho ou outubro?

c) Em que mês do semestre as vendas foram menores?

d) Em que mês foram vendidos 450 livros?

**11.** Um aluno apresentou durante o ano letivo o seguinte aproveitamento: Primeiro bimestre: nota 7; segundo bimestre: nota 6; terceiro bimestre: nota 8; e quarto bimestre: nota 8. Construa um gráfico de segmentos correspondente a essa situação e, a partir dele, tire algumas conclusões.

**12.** Analise os gráficos da introdução do capítulo (página 168) e responda:



**Intenção de voto por escolaridade do eleitor** (em %)

a) Em junho, qual o candidato preferido entre os eleitores com ensino fundamental completo?

b) Em abril, qual a porcentagem do candidato **A** entre os eleitores de nível superior?

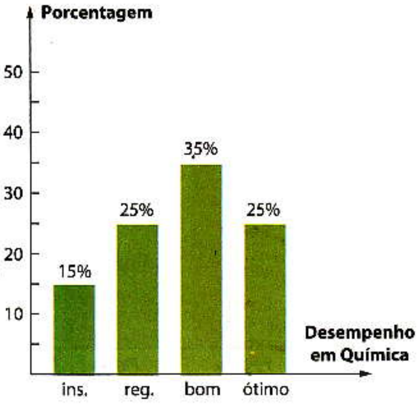
c) Em que mês a porcentagem dos que não sabem em quem votar atingiu 16% entre os analfabetos?

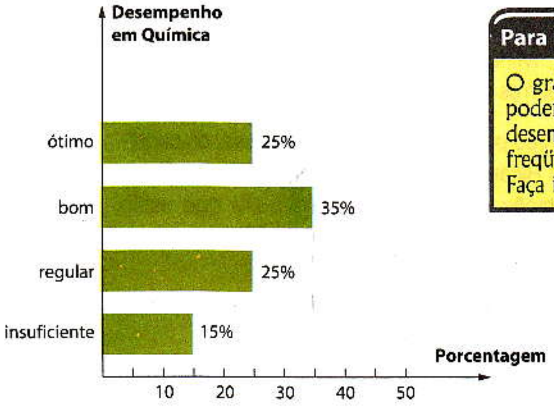
## Gráfico de barras

A partir do "desempenho em Química" demonstrado pelos alunos de uma classe, um professor elaborou a seguinte tabela:

| Desempenho em Química | FA | FR |
|---|---|---|
| insuficiente | 6 | 15% |
| regular | 10 | 25% |
| bom | 14 | 35% |
| ótimo | 10 | 25% |
| total | 40 | 100% |

Com os dados da tabela é possível construir o gráfico de barras:





**Para refletir**

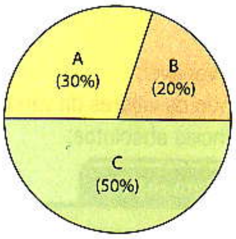
O gráfico de barras poderia ter relacionado desempenho com freqüência absoluta. Faça isso.

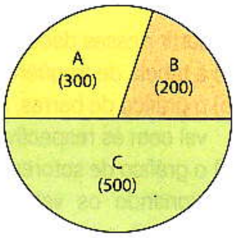
# Gráfico de setores

Em um *shopping center* há três salas de cinema, e o número de espectadores em cada uma delas num determinado dia da semana foi de 300 na sala **A**, 200 na **B** e 500 na **C**.

Veja essa situação representada em uma tabela de freqüências e depois em gráficos de setores:

| Sala | FA | FR | |
|---|---|---|---|
| A | 300 | $\frac{300}{1\,000} = \frac{3}{10}$ | 30% |
| B | 200 | $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ | 20% |
| C | 500 | $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ | 50% |





Em cada gráfico de setores o círculo todo indica o total (1 000 espectadores ou 100%) e cada setor indica a ocupação de uma sala. Na construção do gráfico de setores, determina-se o ângulo correspondente a cada setor por regra de três. Veja como exemplo o da sala **A**:

Usando a freqüência absoluta, vem:

$$\frac{300}{1\,000} = \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 1\,000x = 108\,000^\circ \Rightarrow x = 108^\circ$$

Usando a freqüência relativa (em %), temos:

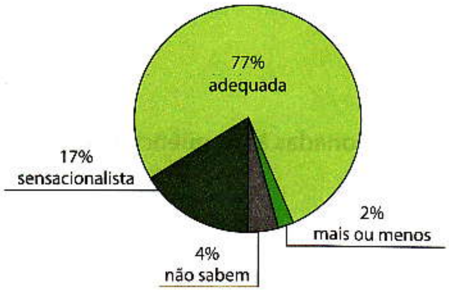
$$\frac{30}{100} = \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 100x = 10\,800 \Rightarrow x = 108^\circ$$

**Para refletir**

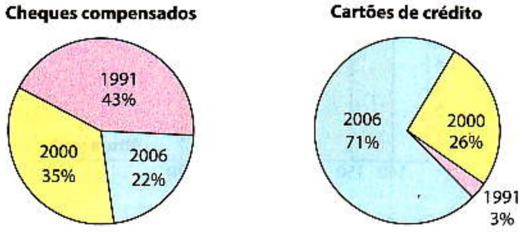
Verifique quais são os ângulos dos setores das salas **B** e **C**. Use um transferidor e constate na figura os ângulos de **A**, **B** e **C**.

**Exemplos:**

1º) Leitores de um jornal avaliam a manchete do dia anterior:

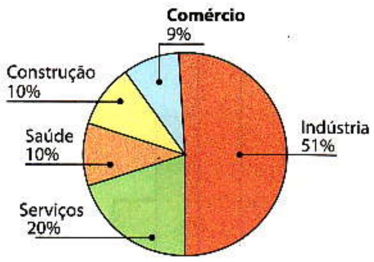


2º) Número de cheques compensados e de cartões de crédito (1991-2006):



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 10 jun. 2007.

3º) Remuneração média em maio de 2007 por ramo de atividade:



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 10 jun. 2007.

## Exercícios propostos

**16.** Em uma eleição concorreram os candidatos **A**, **B** e **C** e, apurada a primeira urna, os votos foram os seguintes: A: 50 votos; B: 80 votos; C: 60 votos; brancos e nulos (BN): 10 votos.

A partir desses dados construa:

a) a tabela de freqüências dessa variável;

b) o gráfico de barras, relacionando os valores da variável com as respectivas freqüências absolutas;

c) o gráfico de setores, relacionando os valores da variável com suas porcentagens.

**Para refletir**

Neste exercício a variável é quantitativa discreta.

**17.** Luísa é muito organizada e para mostrar quanto tempo gasta com suas atividades construiu um gráfico de setores. Observe o gráfico e responda:

a) Quantas horas por dia Luísa estuda em casa?

b) Que porcentagem do dia ela gasta para dormir?

Construa também o gráfico de barras correspondente.

## Histograma

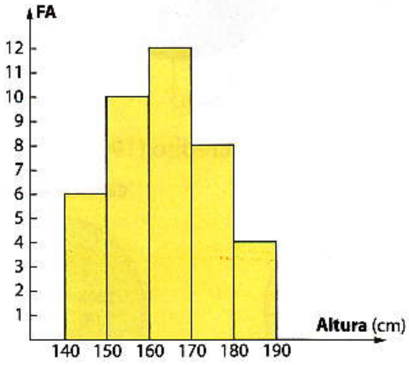
Quando uma variável tem seus valores indicados por classes (intervalos), é comum o uso de um tipo de gráfico conhecido por *histograma*.

**Exemplo:**

Consideremos a "altura" (em centímetros) dos alunos de uma classe, agrupada em intervalos, e a seguir os histogramas correspondentes às freqüências absolutas e relativas:

| **Altura** (cm) | **FA** | **FR** |
|---|---|---|
| 140 ⊢ 150 | 6 | 15% |
| 150 ⊢ 160 | 10 | 25% |
| 160 ⊢ 170 | 12 | 30% |
| 170 ⊢ 180 | 8 | 20% |
| 180 ⊢ 190 | 4 | 10% |

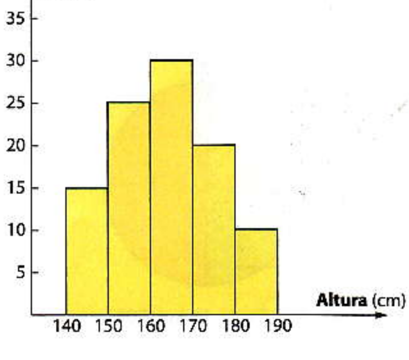
- histograma com as classes (intervalos) relacionadas às freqüências absolutas:



**Para refletir**

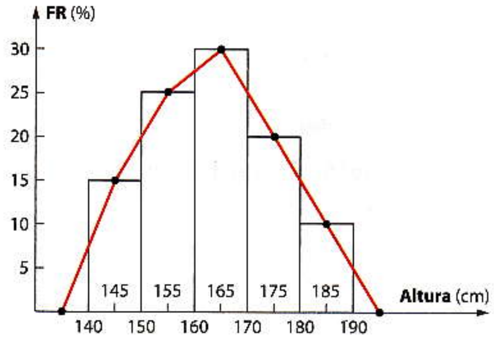
Qual é o número correspondente ao valor médio em cada uma das classes?

- histograma com as classes relacionadas às freqüências relativas (em porcentagem):



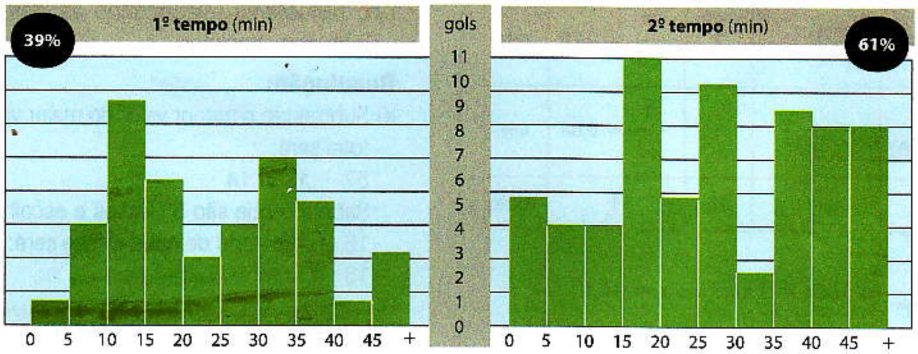
Às vezes usamos como representante de cada classe o valor médio correspondente (por exemplo, 155 representa a classe 150 ⊢—— 160).

Os segmentos que ligam em seqüência os pontos médios das bases superiores formam um gráfico de segmentos conhecido como *polígono do histograma*, que será usado em assuntos posteriores.



**Exemplo:**

Gols marcados em vários momentos de uma partida, nas quatro primeiras rodadas de um campeonato brasileiro de futebol.



## Exercício proposto

**18.** Fazendo o levantamento dos salários dos vinte funcionários de um escritório, foram obtidos os seguintes valores em reais: 650, 800, 720, 620, 700, 750, 780, 680, 720, 600, 846, 770, 630, 740, 680, 640, 710, 750, 680 e 690. A partir deles, construa:

a) a tabela de freqüências com 5 classes;

b) o histograma correspondente relacionando faixa salarial e freqüência absoluta.

---

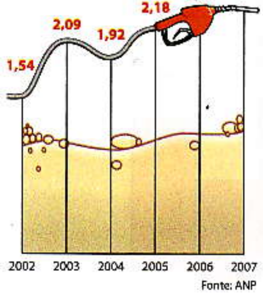
Vimos os vários tipos de gráficos utilizados para representar e interpretar dados estatísticos. É importante que se escolha sempre qual deles é o mais adequado à situação analisada.

É comum, em publicações como revistas e jornais, ilustrar os vários tipos de gráficos com figuras relacionadas ao assunto, tornando-os mais atraentes. Esses são os *gráficos pictóricos* (ou *pictogramas*).

**Exemplos:**

1º) **Gasolina nas alturas**

*Preço médio do litro de gasolina comum no estado de São Paulo – em R$ (mês de janeiro)*



Fonte: ANP

2º) **Os direitos de TV**

*Quanto a Fifa recebeu pela transmissão dos jogos desde a Copa de 1990, na Itália – em US$*

* Pré-contrato assinado em 1994

Fonte: OTI (Organização da Televisão Ibero-Americana)

3º) **O CUSTO DA CPMF**

Brasileiro trabalha, em média, sete dias úteis por ano só para pagar a contribuição*

**Dias úteis trabalhados por ano**

| **Classe baixa** (renda familiar inferior a R$ 3.000) | **Classe média** (renda familiar entre R$ 3.000 e R$ 10 mil) | **Classe alta** (renda familiar acima de R$ 10 mil) |
|---|---|---|

* *Considerando o consumo proporcional à renda*

*Fonte: IBPT*

Extraído de: *Folha de S.Paulo*, 12 jun. 2007.

## Exercícios resolvidos

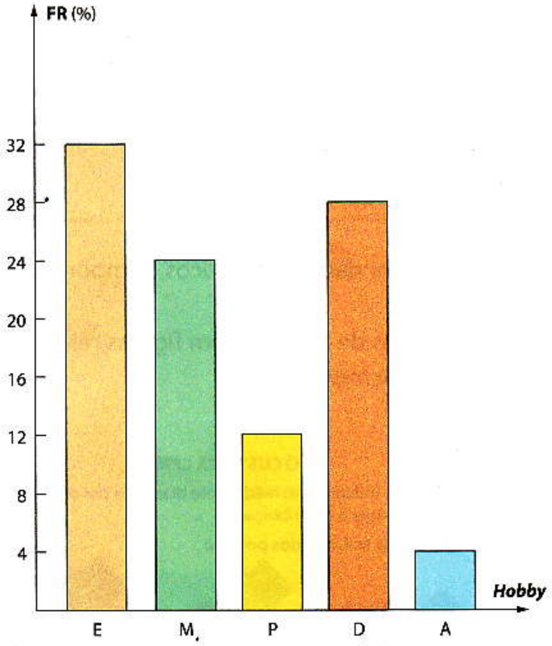
**1.** Construa a tabela de freqüências e os gráficos de barras e de setores para a variável *hobby* da tabela da página 172.

**Resolução:**

| ***Hobby*** | **Contagem** | **FA** | **FR** | |
|---|---|---|---|---|
| esporte (E) | ⧄⊔ | 8 | $\frac{8}{25} = 0{,}32$ | 32% |
| música (M) | ⧄\| | 6 | $\frac{6}{25} = 0{,}24$ | 24% |
| patinação (P) | ⊔ | 3 | $\frac{3}{25} = 0{,}12$ | 12% |
| dança (D) | ⧄∟ | 7 | $\frac{7}{25} = 0{,}28$ | 28% |
| aero-modelismo (A) | \| | 1 | $\frac{1}{25} = 0{,}04$ | 4% |
| total | | 25 | 1 | 100% |

$$\frac{4}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100x = 1\,440° \Rightarrow x = 14{,}4°$$

A cada 4% corresponde um setor de 14,4°.



**E**: 32% $(8 \cdot 4\%) \longrightarrow 8 \cdot 14{,}4° = 115{,}2°$

**M**: 24% $(6 \cdot 4\%) \longrightarrow 6 \cdot 14{,}4° = 86{,}4°$

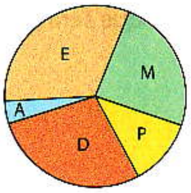
**P**: 12% $(3 \cdot 4\%) \longrightarrow 3 \cdot 14{,}4° = 43{,}2°$

**D**: 28% $(7 \cdot 4\%) \longrightarrow 7 \cdot 14{,}4° = 100{,}8°$

**A**: 4% $\longrightarrow 14{,}4°$

Então:

$115{,}2 + 86{,}4 + 43{,}2 + 100{,}8 + 14{,}4 = 360{,}0°$



**2.** Na realização de uma prova foi anotado o tempo que cada aluno gastou para concluí-la (em minutos): 56; 51; 57; 49; 51; 51; 46; 50; 50; 47; 44; 57; 53; 50; 43; 55; 48; 56; 49; 51; 47; 46; 54; 52; 55; 45; 49; 50; 48; 51. A partir desses dados construa:

a) a tabela de freqüências com os valores em 5 classes;

b) o histograma relacionando as classes e suas freqüências absolutas.

**Resolução:**

a) Subtraindo o menor valor do maior valor, a amplitude total será:

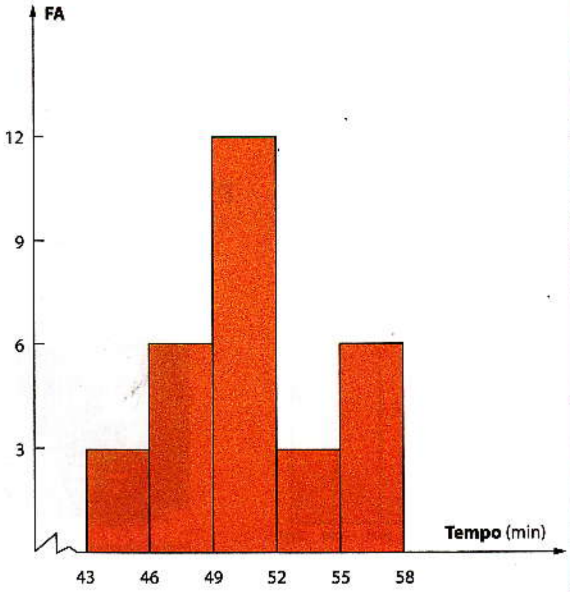
57 − 43 = 14

Sabendo que são 5 classes e escolhendo o número 15, a amplitude de cada classe será:

15 : 5 = 3

| **Tempo** (min) | **Contagem** | **FA** | **FR** |
|---|---|---|---|
| 43 ⊢ 46 | ⊔ | 3 | 10% |
| 46 ⊢ 49 | ⧄\| | 6 | 20% |
| 49 ⊢ 52 | ⧄⧄∟ | 12 | 40% |
| 52 ⊢ 55 | ⊔ | 3 | 10% |
| 55 ⊢ 58 | ⧄\| | 6 | 20% |
| total | | 30 | 100% |

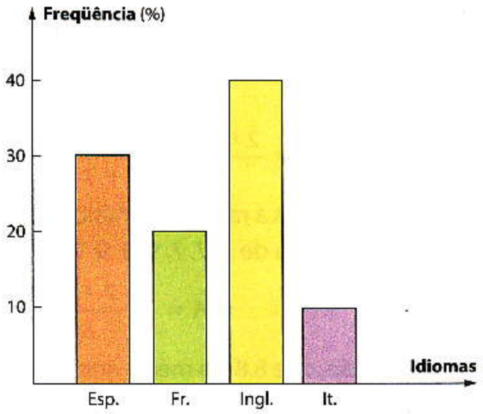
b)



## Exercícios propostos

**19.** A temperatura máxima do dia em uma cidade foi anotada durante vinte dias e apresentou os seguintes dados:
30 °C; 32 °C; 31 °C; 31 °C; 33 °C; 28,5 °C; 33,5 °C; 27 °C; 30 °C; 34 °C; 30,5 °C; 28 °C; 30,5 °C; 29,5 °C; 26 °C; 31 °C; 31 °C; 29 °C; 32 °C; 31,5 °C.
Construa o histograma correspondente com os valores da variável em 5 intervalos.

**20.** Os quarenta alunos de uma classe optaram pelo estudo de uma língua estrangeira, entre espanhol, francês, inglês ou italiano. Veja o gráfico de barras ao lado, que registra a escolha e, a partir dele, construa a tabela de freqüências e o gráfico de setores.



## 4 Medidas de tendência central

A partir da idade das pessoas de um grupo, podemos estabelecer uma única idade que caracteriza o grupo todo.

Considerando a temperatura de vários momentos em um mês qualquer, podemos determinar uma só temperatura que fornece uma idéia aproximada de todo o período.

Avaliando as notas dos vários trabalhos de um aluno no bimestre, podemos registrar com apenas uma nota seu aproveitamento no bimestre.

Em situações como essas, o número obtido é a *medida da tendência central* dos vários números usados. A *média aritmética* é a mais conhecida entre as medidas de tendência central. Além dela, vamos estudar também a *mediana* e a *moda*.

**Para refletir**

O uso da média, da moda ou da mediana é mais ou menos conveniente conforme a situação.

### Média aritmética (MA)

Considerando um grupo de pessoas com 22, 20, 21, 24 e 20 anos, observamos que:

$$MA = \frac{22 + 20 + 21 + 24 + 20}{5} = \frac{107}{5} = 21,4$$

Dizemos, então, que a média aritmética ou simplesmente a média de idade do grupo é 21,4 anos.

Se, ao medir de hora em hora a temperatura em determinado local, registraram-se 14 °C às 6h, 15 °C às 7h, 15 °C às 8h, 18 °C às 9h, 20 °C às 10h e 23 °C às 11h, observamos que:

$$MA = \frac{14 + 15 + 15 + 18 + 20 + 23}{6} = \frac{105}{6} = 17,5$$

Dizemos, então, que no período das 6h às 11h a temperatura média foi 17,5 °C.

No caso de um aluno que realizou diversos trabalhos durante o bimestre e obteve as notas 7,5; 8,5; 10,0 e 7,0, observamos que:

$$MA = \frac{7,5 + 8,5 + 10,0 + 7,0}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$$

Dizemos, então, que nesse bimestre o aluno teve média 8,25.

Assim, generalizando, podemos afirmar que, dados os **n** valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, a média aritmética é o número obtido da seguinte forma:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

**Para refletir**

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa a somatória dos números $x_i$, sabendo que **i** varia de 1 a **n**.

## Média aritmética ponderada

Vejamos, agora, o caso de um aluno que realiza vários trabalhos com pesos diferentes, isto é, com graus de importância diferentes. Se no decorrer do bimestre ele obteve 6,5 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 6,0 no debate (peso 1) e 7,0 no trabalho de equipe (peso 2), a sua média, que neste caso é chamada *média aritmética ponderada*, será:

$$MP = \frac{2 \cdot 6{,}5 + 3 \cdot 7{,}0 + 1 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 7{,}0}{2 + 3 + 1 + 2} = \frac{13 + 21 + 6 + 14}{8} = \frac{54}{8} = 6{,}75$$

Quando calculamos a média aritmética de números que se repetem, podemos simplificar. Dessa maneira, para obter a média aritmética de 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 9, 11 e 11, observamos que:

$$MA = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 11}{3 + 5 + 2} = \frac{21 + 45 + 22}{10} = \frac{88}{10} = 8{,}8$$

Dizemos, então, que 8,8 é a média aritmética dos números 7, 9 e 11, com freqüências 3, 5 e 2, respectivamente.

Observe que esse também é um exemplo de média ponderada, com os pesos sendo as freqüências 3, 5 e 2.

A média aritmética é usada como medida de tendência central, ou seja, como forma de, por meio de um único número, dar uma idéia das características de determinado grupo de números. No entanto, é importante ressaltar que em algumas situações a presença de um valor bem maior ou bem menor que os demais faz com que a média aritmética não consiga traçar o perfil correto do grupo.

Consideremos, por exemplo, um grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos. A média de idade, que é de 10 anos, não demonstra as características desse grupo em termos de idade. Em casos como esse são usadas outras medidas de tendência central, como a *moda* e a *mediana*.

### Exercícios propostos

**21.** Um time de futebol realizou algumas partidas e os resultados foram 3 a 1, 4 a 2, 1 a 1, 0 a 0, 3 a 2, 2 a 1 e 1 a 0. Sabendo que o time não perdeu nenhuma partida, calcule a média aritmética dos gols:

a) marcados;
b) sofridos.

**22.** Se um aluno já fez dois trabalhos e obteve 8,5 e 5,0, qual deve ser a nota do terceiro trabalho para que a média aritmética dos três seja 7,0?

**23.** Qual é a média de idade de um grupo em que há 6 pessoas de 14 anos, 9 pessoas de 20 e 5 pessoas de 16 anos?

**24.** Calcule a média aritmética ponderada de um aluno que obteve no bimestre 8,0 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 9,0 no debate (peso 1) e 5,0 no trabalho de equipe (peso 2).

**25.** A média das idades dos 11 funcionários de uma empresa era de 40 anos. Um dos funcionários se aposentou com 60 anos, saindo da empresa. A média de idade dos 10 funcionários restantes passou a ser:

a) 40 anos.
b) 39,8 anos.
c) 38,9 anos.
d) 38 anos.
e) 37,8 anos.

## Moda (Mo)

Em Estatística, moda é a medida de tendência central definida como o valor mais freqüente de um grupo de valores observados.

No exemplo do grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos, a moda é 2 anos (Mo = 2) e demonstra mais eficiência para caracterizar o grupo que a média aritmética.

Se a temperatura medida de hora em hora, das 6h às 11h, apresentou os resultados 14 °C, 15 °C, 15 °C, 18 °C, 20 °C e 25 °C, então dizemos que nesse período a moda foi 15 °C, ou seja, Mo = 15 °C.

No caso de um aluno que anotou, durante dez dias, o tempo gasto em minutos para ir de sua casa à escola e cujos registros foram 15 min, 14 min, 18 min, 15 min, 14 min, 25 min, 16 min, 15 min, 15 min e 16 min, a moda é 15 min, ou seja, Mo = 15 min.

Se as notas obtidas por um aluno foram 6,0; 7,5; 7,5; 5,0; e 6,0, dizemos que a moda é 6,0 e 7,5 e que a distribuição é bimodal.

**Observação**: Quando não há repetição de números, como, por exemplo, para os números 7, 9, 4, 5 e 8, não há moda.

**Para refletir**

Como é uma distribuição trimodal de números?

## Exercício proposto

**26.** Considere os números 126, 130, 126 e 102 e calcule:
a) a média aritmética (MA);
b) a média aritmética ponderada (MP), com pesos 2, 3, 1 e 2, respectivamente;
c) a moda (Mo).

## Mediana (Me)

A mediana é outra medida de tendência central.

Assim, dados **n** números em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- o número que ocupar a posição central se **n** for ímpar;
- a média aritmética dos dois números que estiverem no centro se **n** for par.

Numa classe, foram anotadas as faltas durante um período de 15 dias: 3, 5, 2, 0, 2, 1, 3, 4, 5, 7, 0, 2, 3, 4 e 7.

Em ordem crescente, temos:

$$\underbrace{0, 0, 1, 2, 2, 2, 3,}_{\text{7 valores}}\ \ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Me}}}{3,}\ \ \underbrace{3, 4, 4, 5, 5, 7, 7}_{\text{7 valores}}$$

Como 15 é ímpar, o termo médio é o 8º.

Logo, a mediana é 3. Simbolicamente, Me = 3.

As idades dos alunos de uma equipe são 12, 16, 14, 12, 13, 16, 16 e 17 anos.

Para determinar a mediana desses valores, colocamos inicialmente na ordem crescente (ou decrescente):

$$12, 12, 13, \underbrace{14, 16,}_{\substack{\text{As duas} \\ \text{posições centrais}}} 16, 16, 17$$

Como temos um número par de valores (8), fazemos a média aritmética entre os dois centrais, que são o 4º e o 5º termos.

Logo, a mediana é dada por:

$$\text{Me} = \frac{14 + 16}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Simbolicamente, Me = 15 anos.

## Exercícios propostos

**27.** Durante os sete primeiros jogos de um campeonato, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 4, 3 e 2 gols. Determine:
a) a média de gols por partida (MA);
b) a moda (Mo);
c) a mediana (Me).

**28.** De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, 14 e 14 reais. Determine:
a) a média diária de gastos (MA);
b) a moda (Mo);
c) a mediana (Me).

## Média aritmética, moda e mediana a partir das tabelas de freqüências

Utilizando os valores (números ou intervalos) e as freqüências absolutas das tabelas de freqüências das variáveis quantitativas, podemos calcular a MA, a Mo e a Me de seus valores.

**Exemplos:**

1º) Pesquisa sobre "número de irmãos" de cada aluno de uma classe:

| Número de irmãos | FA |
|---|---|
| 0 | 8 |
| 1 | 15 |
| 2 | 12 |
| 3 | 5 |
| total | 40 |

*Média aritmética:*

$$\text{MA} = \frac{8 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{40} = \frac{0 + 15 + 24 + 15}{40} = \frac{54}{40} = 1{,}7 \text{ irmão}$$

**Observação**: Embora 1,7 irmão aparentemente seja um absurdo, é correto um valor desse tipo, assim como 3,5 gols por partida, 7,2 medalhas por Olimpíada, etc., pois a média aritmética é uma medida de tendência.

*Moda:*

A maior freqüência é 15, que corresponde ao valor 1 irmão. Logo, Mo = 1 irmão.

*Mediana:*

Como o total de freqüências é 40 (número par), os valores centrais são o 20º e o 21º $\left(\frac{40}{2} = 20 \text{ e } 20 + 1 = 21\right)$.

Se colocados na ordem crescente, virão os 8 valores correspondentes a 0 irmão, seguidos dos 15 valores de 1 irmão e assim por diante. Então, o 20º e o 21º valores serão, ambos, 1 irmão. Logo, $\text{Me} = \frac{1+1}{2} = 1$ irmão.

2º) Pesquisa sobre "peso" (em quilograma) de um grupo de pessoas.

| **Peso** (kg) | **FA** |
|---|---|
| 40 ⊢ 44 | 1 |
| 44 ⊢ 48 | 3 |
| 48 ⊢ 52 | 7 |
| 52 ⊢ 56 | 6 |
| 56 ⊢ 60 | 3 |
| total | 20 |

**Para refletir**

O cálculo da média de números inteiros inclui uma divisão que pode não ser exata.

A partir da tabela em que os pesos estão agrupados em classes, consideramos, em cada classe, o seu valor médio (VM) e anexamos uma nova coluna à tabela. Assim, temos:

$$44 - 40 = 48 - 44 = 52 - 48 = 56 - 52 = 60 - 56 = 4$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

40 + 2 = 42 (freqüência 1)

44 + 2 = 46 (freqüência 3)

48 + 2 = 50 (freqüência 7)

52 + 2 = 54 (freqüência 6)

56 + 2 = 58 (freqüência 3)

| **Peso** (kg) | **FA** | **VM** |
|---|---|---|
| 40 ⊢ 44 | 1 | 42 |
| 44 ⊢ 48 | 3 | 46 |
| 48 ⊢ 52 | 7 | 50 |
| 52 ⊢ 56 | 6 | 54 |
| 56 ⊢ 60 | 3 | 58 |
| total | 20 | |

Agora, podemos calcular MA, Mo e Me usando valores médios e suas freqüências.

*Média aritmética:*

$$\text{MA} = \frac{1 \cdot 42 + 3 \cdot 46 + 7 \cdot 50 + 6 \cdot 54 + 3 \cdot 58}{20} = \frac{42 + 138 + 350 + 324 + 174}{20} = \frac{1\,028}{20} = 51{,}4 \text{ kg}$$

*Moda:*

A freqüência maior, 7, indica o intervalo 48 ⊢ 52, representado por 50, que é o ponto médio.
Logo, Mo = 50 kg.

*Mediana:*

Como o total das freqüências é 20 (número par), os dois valores centrais são o 10º e o 11º. Colocados os valores médios em ordem crescente e de acordo com suas freqüências, o 10º é 50 kg e o 11º também. Logo, $\text{Me} = \frac{50 + 50}{2} = 50$ kg.

## Exercícios propostos

**29.** Determine a MA, a Mo e a Me a partir das tabelas de freqüências.

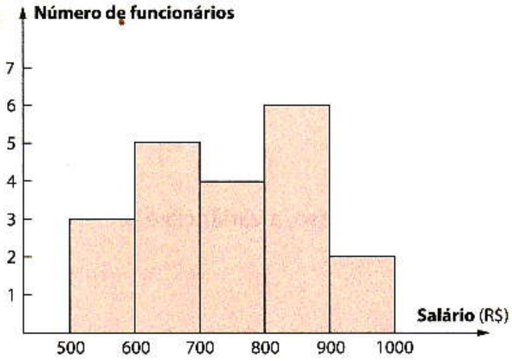
a) "Idade" (em anos) em um grupo de 10 pessoas:

| **Idade** (em anos) | **FA** |
|---|---|
| 13 | 3 |
| 14 | 2 |
| 15 | 4 |
| 16 | 1 |

b) "Altura" (em metros) em um grupo de 21 pessoas:

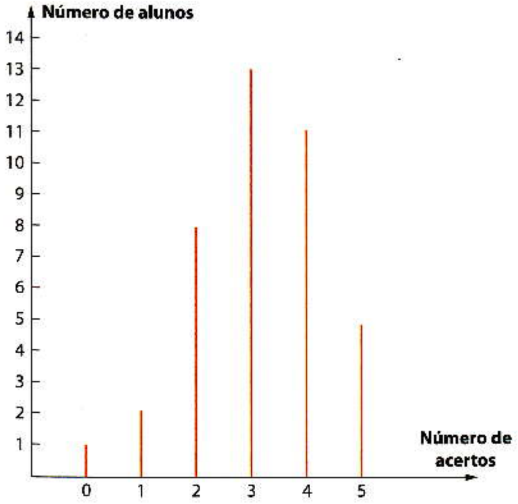
| **Altura** (m) | **FA** |
|---|---|
| 1,61 ⊢ 1,65 | 3 |
| 1,65 ⊢ 1,69 | 6 |
| 1,69 ⊢ 1,73 | 5 |
| 1,73 ⊢ 1,77 | 4 |
| 1,77 ⊢ 1,81 | 3 |

**30.**



O histograma mostra a distribuição salarial (em reais) dos funcionários de uma empresa. Usando os valores médios dos intervalos, construa o polígono do histograma e, depois, calcule a MA, a Mo e a Me.

**31.** Uma prova com 5 testes foi aplicada em uma classe. O levantamento estatístico dos acertos foi registrado no seguinte gráfico:



Determine a partir do gráfico:

a) o número de alunos da classe;

b) a porcentagem da classe que acertou os 5 testes;

c) a porcentagem da classe que acertou 3 ou mais testes;

d) a MA, a Mo e a Me de acertos por pessoa.

## 5 Medidas de dispersão

Já estudamos as medidas de tendência central mais usadas, como a média aritmética, a moda e a mediana. Elas têm como objetivo concentrar em um único número os diversos valores de uma variável quantitativa.

Neste item estudaremos casos em que elas são insuficientes.

Vejamos a seguinte situação:

O critério de aprovação em um concurso estabelece que o candidato deve realizar 3 provas e obter, com suas notas, média igual ou maior que 6,0. Nesse caso, a informação de que o candidato obteve média 7,5 é suficiente para concluir que ele está aprovado.

Consideremos agora outra situação:

Uma pessoa é encarregada de organizar atividades de lazer para um grupo de 6 pessoas e recebe a informação de que a média de idade do grupo é 20 anos. Nesse caso, apenas a informação da média não é suficiente para planejar as atividades, pois podemos ter grupos com média de idade de 20 anos e características totalmente diferentes.

Observemos alguns grupos possíveis:

- Grupo **A**: 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos.

$$MA = \frac{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}{6} = \frac{120}{6} = 20 \text{ anos}$$

- Grupo **B**: 22 anos; 23 anos; 18 anos; 19 anos; 20 anos; 18 anos.

$$MA = \frac{22 + 23 + 18 + 19 + 20 + 18}{6} = \frac{120}{6} = 20 \text{ anos}$$

- Grupo **C**: 6 anos; 62 anos; 39 anos; 4 anos; 8 anos; 1 ano.

$$MA = \frac{6 + 62 + 39 + 4 + 8 + 1}{6} = \frac{120}{6} = 20 \text{ anos}$$

Como a medida de tendência central não é suficiente para caracterizar o grupo **C**, é conveniente utilizar medidas que expressem o grau de dispersão de um conjunto de dados. As mais usadas são a *variância* e o *desvio padrão*.

**Para refletir**

- No grupo **A** não houve dispersão.
- A dispersão no grupo **B** é menor que no grupo **C**.
- Dizemos que o grupo **B** é mais homogêneo que o **C** ou que o grupo **C** é mais heterogêneo que o **B**.

## Variância (V)

A idéia básica de variância é tomar os desvios dos valores $\mathbf{x_i}$ em relação à média aritmética $(x_i - MA)$. Mas a soma desses desvios é igual a 0 (por uma propriedade da média). Uma opção possível, então, é considerar o total dos quadrados dos desvios $\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA)^2$ e expressar a variância (**V**) como a média dos quadrados dos desvios, ou seja:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA)^2}{n}$$

**Para refletir**

Por que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA) = 0$?

**Exemplo:**

Vamos descobrir a variância nos grupos **A**, **B** e **C** citados anteriormente:

- Grupo **A** (20; 20; 20; 20; 20; 20)

  $MA = 20$

  Desvios: $20 - 20 = 0$; todos iguais a 0.

  $V = 0$

  Quando todos os valores são iguais, dizemos que não houve dispersão e, por isso, a variância é 0.

- Grupo **B** (22; 23; 18; 19; 20; 18)

  $MA = 20$

  Desvios: $22 - 20 = 2$; $23 - 20 = 3$; $18 - 20 = -2$; $19 - 20 = -1$; $20 - 20 = 0$; $18 - 20 = -2$

  $$V = \frac{2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2}{6} = \frac{4 + 9 + 4 + 1 + 0 + 4}{6} = \frac{22}{6} \simeq 3{,}6$$

- Grupo **C** (6; 62; 39; 4; 8; 1)

  $MA = 20$

  Desvios: $6 - 20 = -14$; $62 - 20 = 42$; $39 - 20 = 19$; $4 - 20 = -16$; $8 - 20 = -12$; $1 - 20 = -19$

  $$V = \frac{(-14)^2 + 42^2 + 19^2 + (-16)^2 + (-12)^2 + (-19)^2}{6} = \frac{196 + 1764 + 361 + 256 + 144 + 361}{6} =$$

  $$= \frac{3\,082}{6} \simeq 513{,}6$$

A variância é suficiente para diferenciar a dispersão dos grupos: o grupo **A** não tem dispersão ($V = 0$) e o grupo **C** tem uma dispersão maior que a do grupo **B** ($513{,}6 > 3{,}6$).

Porém, não é possível expressar a variância na mesma unidade dos valores da variável, uma vez que os desvios são elevados ao quadrado. Então, definiu-se a medida de dispersão chamada *desvio padrão*.

## Desvio padrão (DP)

O desvio padrão (DP) é a raiz quadrada da variância. Ele facilita a interpretação dos dados, pois é expresso na mesma unidade dos valores observados (do conjunto de dados).

No exemplo que estamos analisando, temos:

- Grupo **A**: $DP = \sqrt{0} = 0$ ano
- Grupo **B**: $DP = \sqrt{3{,}6} \simeq 1{,}9$ ano
- Grupo **C**: $DP = \sqrt{513{,}6} \simeq 22{,}6$ anos

**Para refletir**

A variância e o desvio padrão são números positivos ou nulos.

Resumindo, se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são os **n** valores de uma variável quantitativa **x**, temos:

- A média aritmética dos valores de **x**: $MA = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
- a variância de **x**: $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - MA)^2}{n}$
- o desvio padrão de **x**: $DP = \sqrt{V}$

**Observações:**

1ª) Quando todos os valores da variável são iguais, o desvio padrão é 0.

2ª) Quanto mais próximo de 0 é o desvio padrão, mais homogênea é a distribuição dos valores da variável.

3ª) O desvio padrão é expresso na mesma unidade da variável.

## Exercícios resolvidos

**3.** Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Veja as marcas obtidas por três atletas e responda:

- atleta **A**: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm;
- atleta **B**: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm;
- atleta **C**: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

a) Qual deles obteve melhor média?

b) Qual deles foi o mais regular?

**Resolução:**

a) Calculando a média de cada atleta, obtemos:

Atleta **A**:

$$MA = \frac{148 + 170 + 155 + 131}{4} = \frac{604}{4} = 151 \text{ cm}$$

Atleta **B**:

$$MA = \frac{145 + 151 + 150 + 152}{4} = \frac{598}{4} = 149{,}5 \text{ cm}$$

Atleta **C**:

$$MA = \frac{146 + 151 + 143 + 160}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}$$

Logo, o atleta **A** obteve a maior média, 151 cm.

b) A maior regularidade será verificada a partir do desvio padrão. Assim, temos:

Atleta **A**:

$$V = \frac{(148 - 151)^2 + (170 - 151)^2 + (155 - 151)^2 + (131 - 151)^2}{4} = \frac{9 + 361 + 16 + 400}{4} = \frac{786}{4} = 196{,}5$$

$DP = \sqrt{196{,}5} \simeq 14$ cm

Atleta **B**:

$$V = \frac{(-4{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (2{,}5)^2}{4} = \frac{20{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 6{,}25}{4} = \frac{29}{4} = 7{,}25$$

$DP = \sqrt{7{,}25} \simeq 2{,}7$ cm

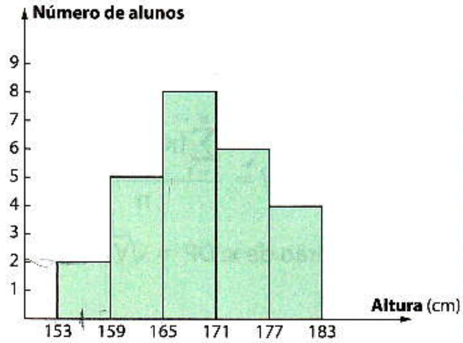
Atleta **C**:

$$V = \frac{(-4)^2 + 1^2 + (-7)^2 + 10^2}{4} = \frac{16 + 1 + 49 + 100}{4} = \frac{166}{4} = 41{,}5$$

$DP = \sqrt{41{,}5} \simeq 6{,}4$ cm

Logo, o atleta **B** foi o mais regular, pois seu desvio padrão é o menor, aproximadamente 2,7 cm.

**4.** O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre altura (em centímetros) entre os alunos de uma classe. Calcule o desvio padrão dessa variável.



**Resolução:**

No histograma, os valores da variável são intervalos e, por isso, vamos usar os seus pontos médios:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 153 ⊢ 159 | 159 ⊢ 165 | 165 ⊢ 171 | 171 ⊢ 177 | 177 ⊢ 183 |
| 156 | 162 | 168 | 174 | 180 |
| (freqüência 2) | (freqüência 5) | (freqüência 8) | (freqüência 6) | (freqüência 4) |

Média aritmética:

$$MA = \frac{2 \cdot 156 + 5 \cdot 162 + 8 \cdot 168 + 6 \cdot 174 + 4 \cdot 180}{2 + 5 + 8 + 6 + 4} = \frac{312 + 810 + 1\,344 + 1\,044 + 720}{25} =$$

$$= \frac{4\,230}{25} = 169{,}2 \text{ cm}$$

Desvios ($x_i - MA$):

156 − 169,2 = −13,2; 162 − 169,2 = −7,2; 168 − 169,2 = −1,2; 174 − 169,2 = 4,8; 180 − 169,2 = 10,8

Variância:

$$V = \frac{2(-13{,}2)^2 + 5(-7{,}2)^2 + 8(-1{,}2)^2 + 6(4{,}8)^2 + 4(10{,}8)^2}{25} =$$

$$= \frac{348{,}48 + 259{,}2 + 11{,}52 + 138{,}24 + 466{,}56}{25} = \frac{1\,224}{25} = 48{,}96$$

Desvio padrão:

$$DP = \sqrt{48{,}96} \simeq 6{,}99 \text{ cm}$$

**Para refletir**

No cálculo da variância foram usadas as freqüências.

## Exercícios propostos

**32.** Em um concurso o critério de aprovação leva em conta a média e o desvio padrão após a realização de 3 provas. Calcule a média e o desvio padrão de um candidato que nas provas obteve, respectivamente, 63 pontos, 56 pontos e 64 pontos.

**33.** Em uma classe as notas obtidas pelos alunos foram agrupadas da seguinte maneira:

0 ⊢ 2,0 (1 aluno); 2,0 ⊢ 4,0 (6 alunos);
4,0 ⊢ 6,0 (9 alunos); 6,0 ⊢ 8,0 (8 alunos);
8,0 ⊢ 10,0 (6 alunos). A partir desses dados:

a) construa o histograma;
b) construa o polígono do histograma;
c) calcule a média, a moda, a mediana e o desvio padrão.

## 6 Estatística e probabilidade

A estatística também é usada para estimar a probabilidade de ocorrência de um evento, principalmente quando ela não pode ser calculada teoricamente pela razão $P = \frac{\text{evento}}{\text{espaço amostral}}$. Quando se diz que a probabilidade de um avião cair é de uma em um milhão, é porque a freqüência relativa de ocorrência de acidentes é de um acidente a cada um milhão de decolagens. Ao longo dos anos, ocorrerão mais decolagens e essa probabilidade pode mudar. Dos anos 1960 para cá, a freqüência relativa de acidentes aéreos no mundo diminuiu cerca de 15 vezes. Isso significa que a probabilidade de ocorrer um acidente nos anos 1960 era 15 vezes maior do que agora.

Quanto maior for a quantidade de experimentos, melhor será a estimativa da probabilidade usando-se a freqüência relativa. Ao jogar uma moeda duas vezes, é possível que ocorra duas vezes cara. Seria absurdo afirmar que a probabilidade de ocorrer cara é de 100%, pois a quantidade de experimentos é muito pequena e não pode ser utilizada para tal afirmação. Entretanto, ao jogar uma moeda 200 vezes, é possível observar algo como 94 caras e 106 coroas; jogando 2 000 vezes, 1 034 caras e 966 coroas; 20 000 vezes, 10 091 caras e 9 909 coroas.

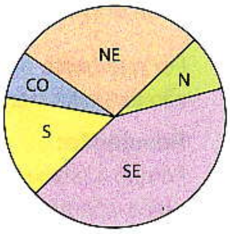
Pela tabela ao lado, portanto, percebe-se que a freqüência relativa tende ao valor teórico de 50% para a probabilidade de ocorrer cara e coroa. Isso é chamado de *lei dos grandes números*.

Previsões do tempo, resultados eleitorais, mortalidade causada por doenças, entre outras, são probabilidades calculadas usando-se freqüências relativas de pesquisas estatísticas. Nesses casos, quanto maior for o histórico de dados a ser analisado, melhor será a previsão.

| Número de jogadas | FA (cara) | FR (cara) |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 100% |
| 200 | 94 | 47% |
| 2 000 | 1 034 | 51,7% |
| 20 000 | 10 091 | 50,45% |

## Exercícios resolvidos

**5.** O gráfico ao lado mostra a distribuição da população brasileira por regiões de acordo com o Pnad 2007. Considerando que a população total do Brasil registrada foi de aproximadamente 184 milhões de habitantes e que no gráfico o ângulo da região Centro-Oeste é de 25°, calcule a população da região Centro-Oeste em porcentagem e em número de habitantes.



**Resolução:**

360° — 100%  $x \simeq 7\%$

25° — x  7% de 184 000 000 = 13 000 000

Logo, a população da região Centro-Oeste para 2007 corresponde a aproximadamente 7% da população do Brasil, ou seja, 13 000 000 habitantes.

**6.** Um dado foi lançado 1 200 vezes, obtendo-se o seguinte resultado:

| Face | Número de vezes |
|---|---|
| 1 | 248 |
| 2 | 355 |
| 3 | 175 |
| 4 | 180 |
| 5 | 126 |
| 6 | 116 |

a) Faça uma tabela de freqüências relativas expressando os resultados em porcentagem.

b) Na sua opinião, o dado jogado é honesto? Justifique.

**Resolução:**

a)

| Face | Número de vezes | Freqüência relativa |
|---|---|---|
| 1 | 248 | 20,7% |
| 2 | 355 | 29,6% |
| 3 | 175 | 14,6% |
| 4 | 180 | 15,0% |
| 5 | 126 | 10,5% |
| 6 | 116 | 9,7% |

b) Aparentemente há uma tendência maior em sair as faces "1" e "2" do que as outras faces. Como 1 200 é um número razoavelmente grande, a freqüência relativa deveria ser aproximadamente igual ao valor teórico da probabilidade (que é de 16,6%). Com 1 200 jogadas o resultado teórico esperado seria o de sair cerca de 200 vezes cada face. Assim, podemos afirmar que o dado aparenta não ser honesto.

**7.** "O número de acidentes aéreos no Brasil, entre 1979 e 1998, caiu muito. Foram registrados 403 acidentes em 1979 contra 71 em 1998. No mesmo período, o número de vôos aumentou cinco vezes." Segundo essa afirmação, se a probabilidade de ocorrer um acidente aéreo em 1998 era **P**, qual era essa probabilidade em 1979?

**Resolução:**

Suponha que o número de vôos em 1979 seja **x**. Então:

$$P = \frac{71}{5x} \Rightarrow x = \frac{71}{5P}$$

Em 1979, a probabilidade era:

$$P_2 = \frac{403}{x} \Rightarrow x = \frac{403}{P_2}$$

Logo:

$$\frac{71}{5P} = \frac{403}{P_2} \Rightarrow P_2 = \frac{403 \cdot 5P}{71} = 28{,}4P$$

(cerca de 28 vezes maior)

**8.** Em uma garrafa opaca fechada existem 20 bolinhas, distribuídas entre três cores: preta, vermelha e amarela. Não é possível ver as bolinhas dentro da garrafa, exceto se virarmos a garrafa de ponta-cabeça, quando uma das bolinhas vai para o gargalo e é possível ver sua cor. Ao longo de vários dias, repetiu-se 2 000 vezes a seguinte operação: chacoalhava-se e tombava-se a garrafa para então anotar a cor da bolinha que aparecia no gargalo. Os resultados obtidos foram os seguintes:

| Cor da bolinha | Número de vezes |
|---|---|
| preta | 396 |
| vermelha | 910 |
| amarela | 694 |

Qual deve ser a quantidade de cada bolinha dentro da garrafa?

**Resolução:**

Como a quantidade de experimentos é grande, podemos esperar que a freqüência relativa seja aproximadamente igual à probabilidade teórica. A tabela de freqüências relativas é:

| Cor da bolinha | Número de vezes | Freqüência relativa |
|---|---|---|
| preta | 396 | 0,198 |
| vermelha | 910 | 0,455 |
| amarela | 694 | 0,347 |

Assim, se tivermos **x** bolinhas pretas, **y** bolinhas vermelhas e **z** bolinhas amarelas, as probabilidades teóricas serão:

$$P(\text{preta}) = \frac{x}{20}$$

$$P(\text{vermelha}) = \frac{y}{20}$$

$$P(\text{amarela}) = \frac{z}{20}$$

Igualando-se as probabilidades teóricas com as respectivas freqüências relativas, temos:

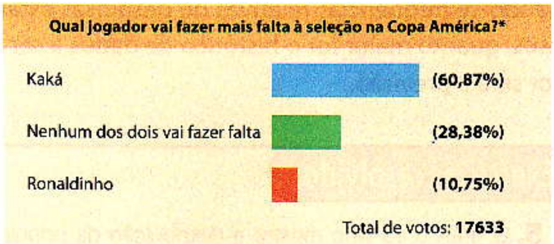
$$\frac{x}{20} = 0{,}198 \Rightarrow x = 3{,}96$$

$$\frac{y}{20} = 0{,}455 \Rightarrow y = 9{,}10$$

$$\frac{z}{20} = 0{,}347 \Rightarrow z = 6{,}94$$

Como as quantidades **x**, **y** e **z** de bolinhas são números inteiros, então $x = 4$, $y = 9$ e $z = 7$.

**9.** Observe a pesquisa (enquete) abaixo, encontrada em um *site* de esportes em 12 de junho de 2007, sobre a expectativa dos internautas a respeito da ausência de alguns jogadores na Copa América:



* Atenção: O resultado desta enquete promovida por *UOL Esporte* refere-se a freqüentadores do *site* e não tem valor científico.

Por que existe o aviso de que o resultado da enquete não tem valor científico?

**Resolução:**

Porque a pesquisa não foi feita com um universo estatístico (população) que possa ser generalizado, de modo que seu resultado é muito específico. Ela só se refere à população de *usuários da internet*, freqüentadores do *site*. Seria inadequado dizer que aproximadamente 61% da população brasileira acredita que Kaká fará muita falta na Copa América, sabendo que o perfil da população brasileira é diferente do perfil dos usuários da internet.

## Exercícios propostos

**34.** Um dado foi lançado 1 000 vezes, obtendo-se o seguinte resultado:

| Face | Número de vezes |
|---|---|
| 1 | 157 |
| 2 | 171 |
| 3 | 160 |
| 4 | 166 |
| 5 | 171 |
| 6 | 175 |

a) Faça uma tabela de freqüências relativas expressando os resultados em porcentagem.

b) Na sua opinião, o dado jogado é honesto? Justifique.

**35.** "O Brasil tem um dos menores índices de acidentes aéreos. Aqui a freqüência é de 0,85 acidente por milhão de decolagens. Essa média é mais baixa que a de outros países latinos (5,7), asiáticos (3,8) e africanos (13). A Europa (0,5) e a Oceania (0,2) têm os menores percentuais." Baseado no texto calcule a probabilidade de ocorrência de um acidente aéreo no Brasil.

**36.** Em uma garrafa opaca fechada existem 10 bolinhas, distribuídas entre as cores azul e branca. Não é possível ver as bolinhas dentro da garrafa, exceto se virarmos a garrafa de ponta-cabeça, quando uma das bolinhas vai para o gargalo e é possível ver sua cor. Ao longo de vários dias, repetiu-se 2 000 vezes a seguinte operação: chacoalhava-se e tombava-se a garrafa para então anotar a cor da bolinha que aparecia no gargalo. Os resultados obtidos foram os seguintes:

| Cor da bolinha | Número de vezes |
|---|---|
| azul | 624 |
| branca | 1 376 |

Na próxima vez em que for repetida essa operação, qual a probabilidade de que a cor da bolinha do gargalo seja azul?

# Atividades adicionais

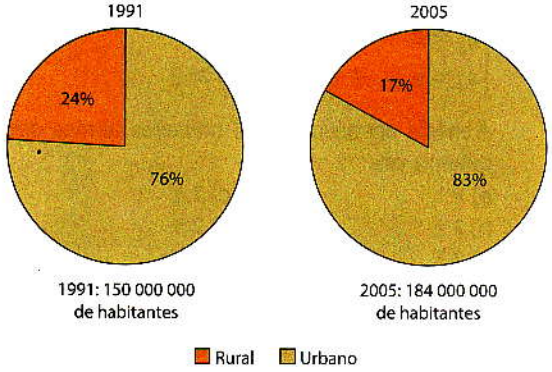
**1.** Entre um grupo de funcionários de uma empresa foi feita uma pesquisa sobre salários, tomando como referência o salário mínimo. Veja os dados obtidos: 5,1; 2,5; 7; 4,3; 3,1; 6; 3,3; 5,5; 4; 6,5; 5; 2,8; 5,7; 4,5; 2; 5; 5,5; 2,9; 5; 1,7; 7; 3; 5,6; 4,2; 3,9.

Elabore a tabela de freqüências considerando a variável "salário" com seus valores em seis classes (intervalos).

**2.** Uma professora anotou o número de faltas dos alunos, durante um semestre, de acordo com os dias da semana. Observe as anotações, construa o gráfico de segmentos e tire conclusões: segunda-feira: 64 faltas; terça-feira: 32; quarta-feira: 32; quinta-feira: 48; sexta-feira: 60.

**3.** Durante uma hora foram anotados os tipos de veículos que passaram pela rua onde está situada uma escola e foram obtidos os seguintes dados: T, T, T, M, A, T, T, M, T, B, B, T, T, A, T, T, C, T, M, T, T, T, C, B, T, T, T, T, T, A, T, T, T, M, C, T, T, T, T, B, T, T, M, B, A (**M**: motocicleta; **C**: caminhão; **B**: bicicleta; **A**: ambulância; **T**: carro). Construa um gráfico de barras que corresponda a essa pesquisa.

**4.** Observe os gráficos comparativos da taxa de urbanização do Brasil (1991/2005) e a população aproximada do Brasil nesses dois anos.



1991: 150 000 000 de habitantes

2005: 184 000 000 de habitantes

Fonte: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/idb2006/a04uf.htm. Acesso em 16/7/2007.

De 1991 a 2005 a população rural do Brasil aumentou ou diminuiu? De quanto por cento?

**5.** O litro de leite do tipo **A** custa R$ 3,60 e do tipo **B**, R$ 2,00. Misturam-se 5 litros do tipo **A** com 3 litros do tipo **B**. Quanto deve custar, em reais, o preço do litro da mistura?

**6.** Em uma classe de 35 alunos há 22 homens e 13 mulheres. Na prova de matemática a nota média dos homens foi 4,8 e a das mulheres foi 4,0. Se a média da classe foi igual a **M**, determine o valor de 10M.

**7.** A média aritmética das idades de um grupo de professores e inspetores é 40. Se a média das idades dos professores é 35 e a média das idades dos inspetores é 50, a razão entre o número de inspetores e o número de professores é igual a:

a) 3 **:** 2.
b) 3 **:** 1.
c) 2 **:** 3.
d) 2 **:** 1.
e) 1 **:** 2.

**8.** A média aritmética dos ângulos internos de um hexágono é igual a:

a) 100°.
b) 120°.
c) 140°.
d) 160°.
e) 180°.

**9.** Antônio corre 5 km a uma velocidade de 10 km/h e em seguida 10 km a 5 km/h. A velocidade média, em km/h, durante a corrida foi:

a) 6.
b) 6,5.
c) 7.
d) 7,5.
e) 8.

**10.** Considere uma progressão aritmética em que o primeiro e o último termo são iguais a 10 e 50 respectivamente. Podemos afirmar que a média aritmética de todos os termos é igual a:

a) 20.
b) 25.
c) 30.
d) 35.
e) 40.

**11.** Em um grupo de pessoas foi pesquisada a variável "década de nascimento". Os dados obtidos foram: 60, 70, 70, 70, 60, 80, 70, 70, 60, 70, 80, 70, 70, 80, 70.

a) Qual é o tipo da variável?
b) Qual é o número de indivíduos na pesquisa?
c) Quantos e quais são os valores (realizações) da variável?
d) Construa a tabela de freqüências, o gráfico de barras e o de setores correspondentes à pesquisa.

**12.** A distribuição dos salários de uma empresa é dada na tabela abaixo:

| **Salário** (R$) | **Número de funcionários** |
|---|---|
| 500,00 | 10 |
| 1 000,00 | 5 |
| 1 500,00 | 1 |
| 2 000,00 | 10 |
| 5 000,00 | 4 |
| 10 500,00 | 1 |
| total | 31 |

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?
b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R$ 2 000,00 cada um. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

**10.** (UFG-GO) A média das notas dos alunos de um professor é igual a 5,5. Ele observou que 60% dos alunos obtiveram nota de 5,5 a 10 e que a média das notas desse grupo de alunos foi de 6,5. Nesse caso, considerando o grupo de alunos que tiveram notas inferiores a 5,5, a média de suas notas foi de:

a) 2,5.
b) 3,0.
c) 3,5.
d) 4,0.
e) 4,5.

**11.** (Fuvest-SP) Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a seguinte tabela:

| Número de infrações | Número de motoristas |
|---|---|
| de 1 a 3 | 7 |
| de 4 a 6 | 10 |
| de 7 a 9 | 15 |
| de 10 a 12 | 13 |
| de 13 a 15 | 5 |
| maior ou igual a 16 | 0 |

Pode-se então afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para esse grupo, está entre:

a) 6,9 e 9,0.
b) 7,2 e 9,3.
c) 7,5 e 9,6.
d) 7,8 e 9,9.
e) 8,1 e 10,2.

**12.** (UFPB) A tabela abaixo apresenta o percentual de candidatos por faixa de pontuação, na prova discursiva de Matemática do PSS-2005/UFPB.

| Pontos | % |
|---|---|
| 0 | 10,1 |
| 1 a 4 | 36,3 |
| 5 a 8 | 31,3 |
| 9 a 12 | 13,2 |
| 13 a 16 | 5,6 |
| 17 a 20 | 2,6 |
| 21 a 24 | 0,9 |

Fonte: Coperve/UFPB

Com base nesses dados, é correto afirmar:

a) Mais de 10% obtiveram, no mínimo, 13 pontos.
b) No máximo, 40% obtiveram até 4 pontos.
c) Mais de 70% obtiveram, no máximo, 8 pontos.
d) Mais de 3% obtiveram de 17 a, no máximo, 20 pontos.
e) Mais de 4% obtiveram de 17 a 24 pontos.

**13.** (UEL-PR) De acordo com os dados apresentados pela tabela, é correto afirmar:

**Rendimento/hora em reais, segundo nível de instrução e sexo**
**Regiões Metropolitanas – 1999**

| | Analfabeto | Ensino fundamental incompleto | Ensino fundamental completo | Ensino médio incompleto | Ensino médio completo | Ensino superior | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distrito Federal** | | | | | | | |
| Homens | 1,98 | 2,47 | 3,57 | 3,49 | 6,68 | 16,64 | 6,56 |
| Mulheres | −(1) | 1,51 | 2,04 | 2,19 | 4,47 | 12,52 | 4,87 |
| **Porto Alegre** | | | | | | | |
| Homens | 1,69 | 2,42 | 3,01 | 2,79 | 4,41 | 9,09 | 3,75 |
| Mulheres | 1,27 | 1,60 | 2,02 | 2,04 | 3,15 | 6,90 | 2,96 |
| **Salvador** | | | | | | | |
| Homens | 1,09 | 1,53 | 2,18 | 2,17 | 3,94 | 10,12 | 3,10 |
| Mulheres | 0,71 | 0,87 | 1,26 | 1,80 | 2,61 | 7,10 | 2,31 |
| **São Paulo** | | | | | | | |
| Homens | 2,02 | 2,94 | 3,74 | 3,38 | 5,71 | 14,33 | 5,28 |
| Mulheres | 1,69 | 1,96 | 2,58 | 2,48 | 3,90 | 10,03 | 4,03 |

Fonte: Convênio DIEESE/SEADE, MTB/FAT e convênios regionais, PED – Pesquisa de Emprego e Desemprego
Elaboração: DIEESE / janeiro de 2000

a) O ingresso de mulheres no ensino superior proporcionou a equiparação dos rendimentos salariais entre os sexos nas regiões metropolitanas.

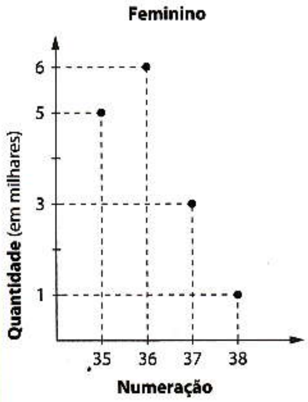
b) Nas regiões apresentadas, os homens são mais bem remunerados do que as mulheres, porque possuem nível de instrução mais elevado.

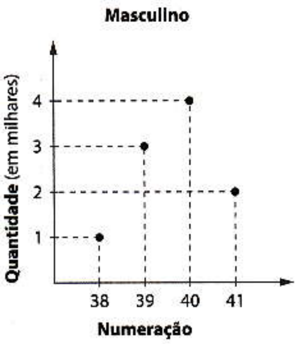
c) A relação entre as variáveis sexo e escolaridade permite inferir que a diferença de gênero determina rendimentos menores às mulheres.

d) A diferença entre a remuneração de homens e mulheres é menor na coluna "Ensino superior", se comparada à das demais colunas.

e) A diferença absoluta dos rendimentos entre homens e mulheres, na coluna "Ensino fundamental incompleto", é maior na cidade da região Nordeste.

**14.** (UFBA) Uma empresa fabrica apenas dois modelos de sapato, sendo um feminino e o outro masculino. Os modelos femininos são fabricados nos números 35, 36, 37 e 38, e cada par é vendido por R$ 80,00. Os modelos masculinos são fabricados nos números 38, 39, 40 e 41, e o preço de venda de cada par é R$ 100,00. Os gráficos abaixo mostram as quantidades (em milhares de pares) produzidas e vendidas por mês pela fábrica.





Com base nessas informações, é correto afirmar:

01) O preço de venda médio dos sapatos é igual a R$ 88,00.

02) O preço de venda mediano dos sapatos é igual a R$ 80,00.

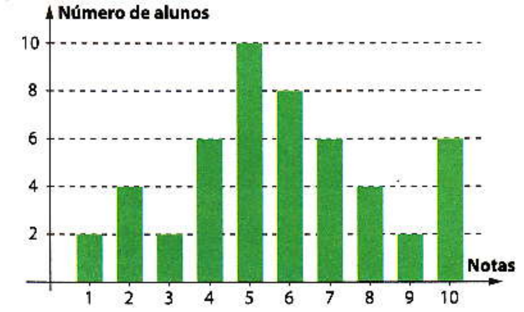
04) A receita obtida com a venda de sapatos masculinos representa menos que 82% da receita correspondente ao modelo feminino.

08) Se a venda do modelo feminino for reduzida em 20%, os dois modelos passarão a contribuir com o mesmo montante para a receita da empresa.

16) Escolhendo-se ao acaso um par de sapatos, entre todos os produzidos em um mês, a probabilidade de que ele seja de número 38 ou do modelo feminino é igual a $\frac{16}{25}$.

32) Escolhendo-se ao acaso um par de sapatos de número 38, a probabilidade de que ele seja do modelo masculino é igual a $\frac{1}{10}$.

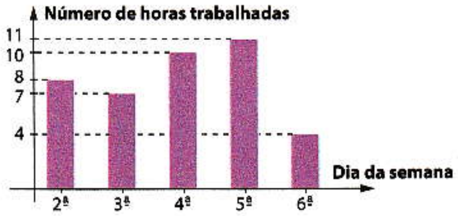
**15.** (Ibmec-SP) Chama-se mediana de um conjunto de 50 dados ordenados em ordem crescente o número **x** dado pela média aritmética entre o 25º e o 26º dado. Observe no gráfico a seguir uma representação para as notas de 50 alunos do primeiro semestre de Ciências Econômicas numa determinada prova.



A mediana das notas dos 50 alunos de Ciências Econômicas nesta prova é igual a:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

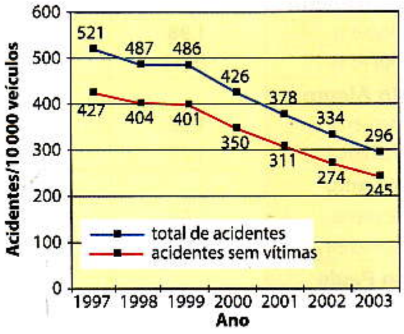
**16.** (Vunesp) Numa certa empresa, os funcionários desenvolvem uma jornada de trabalho, em termos de horas diárias trabalhadas, de acordo com o gráfico:



a) Em média, quantas horas eles trabalham por dia durante uma semana?

b) Numa dada semana ocorrerá um feriado de 1 dia. Qual a probabilidade de eles trabalharem ao menos 30 horas nessa semana?

**17.** (Unicamp-SP) O gráfico abaixo mostra o total de acidentes de trânsito na cidade de Campinas e o total de acidentes sem vítimas, por 10 000 veículos, no período entre 1997 e 2003. Sabe-se que a frota da cidade de Campinas era composta por 500 000 veículos em 2003 e era 4% menor em 2002.



Adaptado de: *Sumário Estatístico da Circulação em Campinas 2002-2003*. Campinas, EMDEC, 2004, p. 12.

a) Calcule o número total de acidentes de trânsito ocorridos em Campinas em 2003.

b) Calcule o número de acidentes com vítimas ocorridos em Campinas em 2003.

**18.** (FGV-SP)

a) Considere **n** números reais não nulos $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, ..., $\mathbf{x_n}$. Em que condição a variância desses números é nula? Justifique.

b) Dados três números reais $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$, qual o valor de **m** que minimiza a expressão $\sum_{i=1}^{3}(x_i - m)^2$?

**19.** (UFPR) Dado um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ com **n** elementos, definimos a média $\bar{x}$ e o desvio padrão **d** de **X** por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$d = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Uma informação útil para quem analisa um conjunto de dados como **X** é que a maioria desses dados pertence ao intervalo $C = [\bar{x} - 2d, \bar{x} + 2d]$. Sendo $X = \left\{\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3\right\}$ um conjunto de dados:

1) calcule a média $\bar{x}$ e o desvio padrão **d**.

2) verifique quais dados do conjunto **X** acima pertencem ao intervalo **C**.

**20.** (Fuvest-SP) Uma prova continha cinco questões, cada uma valendo 2 pontos. Em sua correção, foram atribuídas a cada questão apenas as notas 0 ou 2, caso a resposta estivesse, respectivamente, errada ou certa. A soma dos pontos obtidos em cada questão forneceu a nota da prova de cada aluno. Ao final da correção, produziu-se a seguinte tabela, contendo a porcentagem de acertos em cada questão:

| Questão | Porcentagem |
|---|---|
| 1 | 30% |
| 2 | 10% |
| 3 | 60% |
| 4 | 80% |
| 5 | 40% |

Logo, a média das notas da prova foi:

a) 3,8.

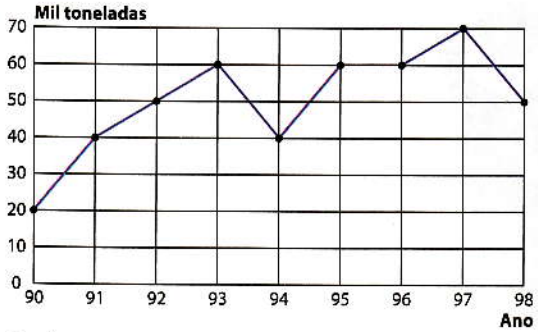
b) 4,0.

c) 4,2.

d) 4,4.

e) 4,6.

**21.** (Vunesp) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção no estado de São Paulo de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 e 1998.



Analisando o gráfico, observa-se que a produção:

a) foi crescente entre 1992 e 1995.

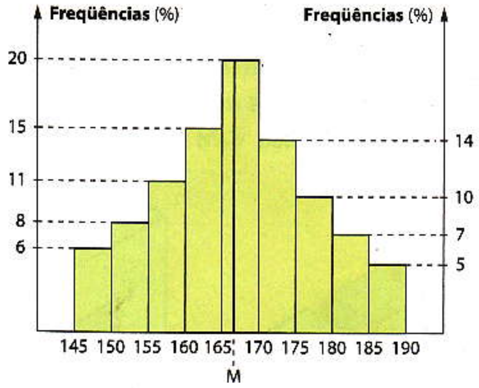
b) teve média de 40 mil toneladas ao ano.

c) em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.

d) a partir de 1995 foi decrescente.

e) teve média de 50 mil toneladas ao ano.

**22.** (PUC-SP) O histograma seguinte representa a distribuição das estaturas de 100 pessoas e as respectivas freqüências. Por exemplo, na terceira classe (155–160) estão situados 11% das pessoas com estaturas de 1,55 m a 1,59 m. A quinta classe (165–170) chama-se classe mediana. Pelo ponto **M** situado na classe mediana, traça-se uma reta paralela ao eixo das freqüências de modo a dividir a área da figura formada pelos nove retângulos das freqüências em duas regiões de mesma área. Determine a abscissa do ponto **M** (mediana das observações).



## Capítulo 7

# Introdução aos limites

Agora vamos falar dos paradoxos, grandes desafios lógicos, às vezes apenas jogos de palavras. Muitas vezes recorremos a raciocínios aparentemente coerentes, mas que escondem contradições absurdas, para convencermos alguém de que algo é verdadeiro. Na Filosofia é a dialética (a arte do diálogo) que possibilita essa argumentação. Paradoxo, do grego parádoksos, *"contrário à opinião comum", significa exposição contraditória, uma argumentação que leva a alguma contradição.*

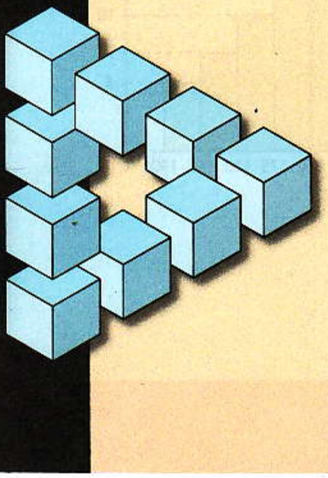
*Na Geometria, figuras impossíveis podem nos levar a resultados absurdos e auxiliar nas argumentações. São famosos os desenhos do artista gráfico holandês Escher (1898-1972), que contradizem os princípios matemáticos.*

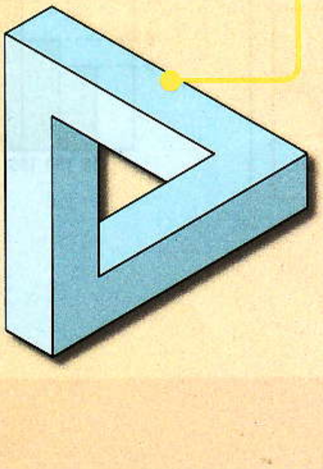
*Se dois lados de um triângulo determinam um plano, como poderíamos ter os pares de lados de um mesmo* triângulo *não-coplanares? Essa figura é um paradoxo!*

*Zenão de Eléia (século V a.C.) era um filósofo que recorria aos paradoxos para construir seus raciocínios. Um de seus argumentos, que sempre desafiou mentes especulativas, foi o "Paradoxo de Aquiles". Conta que Aquiles, um dos heróis da guerra de Tróia, decidiu apostar uma corrida com uma tartaruga e que, por ser mais rápido, permitiu que ela iniciasse a corrida 80 m à sua frente. Ao ser dada a largada, no mesmo intervalo de tempo em que Aquiles percorreu os 80 m, a tartaruga se deslocou 8 m e, enquanto Aquiles os percorria, a tartaruga andava mais 0,8 m, e assim sucessivamente. E Zenão concluiu que Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois sempre haveria um percurso a cumprir, por menor que fosse.*

*Esse paradoxo levou os matemáticos ao conceito de* limite*. Os valores acima podem ser representados por uma seqüência: (80; 8; 0,8; 0,08; 0,008...), já estudada por você. É uma PG de primeiro termo 80 e razão 0,1. Observe que o comprimento do percurso de Aquiles corresponde à soma desses termos e, como a PG é infinita, o máximo que podemos fazer é calcular para qual valor "tende" essa soma. E a esse valor damos o nome de limite. Você pode verificá-lo com o auxílio de uma calculadora ou aplicar a fórmula que você aprendeu. Experimente. De qualquer forma, a conclusão de Zenão é apenas teórica, não corresponde à realidade.*

*O conceito de limite esteve presente ao longo de toda a história da Matemática e foi fundamental para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, assunto que hoje se aplica em inúmeras áreas científicas.*



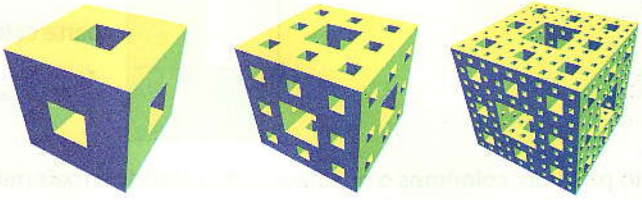


*Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, o primeiro inglês e o segundo alemão, foram contemporâneos (século XVII) e mesmo sem um saber do outro descobriram simultaneamente os princípios do Cálculo. Nele, as funções ocupam um lugar central e seu comportamento é estudado e interpretado. A função pode ter pontos de descontinuidade e interessa determinar se existe um valor para o qual ela tende, que será o seu limite. Para D'Alembert, matemático francês do século XVIII, a idéia de limite era a "verdadeira metafísica do Cálculo", referindo-se à aceitação, por parte de alguns matemáticos, de que havia um estágio intermediário entre uma quantidade ser e não ser alguma coisa, devido à idéia de que uma quantidade "tendia" a um valor, mas não chegava a atingi-lo. Mais tarde, ainda no século XVIII, Augustin-Louis Cauchy viria a dar ao conceito de limite um caráter aritmético ainda mais preciso, apoiando-se na idéia de vizinhança, e é dele a definição de limite que mais se aproxima da que se considera hoje.*

*Este capítulo propõe uma introdução ao assunto, inaugurando nossa jornada no caminho de uma Matemática mais abstrata, tratada de forma mais analítica.*

## Atividades

**1.** Os fractais são bons exemplos de aplicação do conceito de limite. Há um chamado *Esponja de Menger*, obtido a partir de um cubo deste modo: dividindo-o em 27 cubinhos de arestas com $\frac{1}{3}$ do tamanho das arestas originais, removem-se a peça central do cubo e cada um dos 6 cubos centrais de cada face (ou seja, 7 dos 27 cubos são removidos). A partir desse estágio, repete-se o processo com cada um dos 20 cubos restantes, e assim por diante, indefinidamente. Acompanhe os três primeiros estágios, cujo processo é repetido infinitamente, gerando todos os estágios posteriores.



**Primeiro estágio** **Segundo estágio** **Terceiro estágio**

O paradoxo associado a ele é o seguinte: observe que a cada estágio perde-se volume com a retirada dos cubos, mas ganham-se áreas, pois vão aparecendo cada vez mais "túneis". Vamos comprová-lo.

Chamando de **a** a medida da aresta inicial:

a) calcule a área total do cubo inicial;
b) calcule a área total após o primeiro estágio;
c) compare-as (qual é a maior?);
d) calcule o volume da esponja após o primeiro estágio em função do volume inicial do cubo;
e) compare-os (qual é o maior?).

Agora, reflita: Quando o número de estágios tende a infinito, o que acontece com a área e com o volume da esponja?

Assim, podemos definir a Esponja de Menger como *um objeto geométrico que tem volume zero e área infinita*!

**2.** Vamos analisar o comportamento de uma função quadrática. Imagine que uma doceira gaste R$ 2,00 com cada pudim que produza (então, esse é o preço de custo de um pudim). É fácil imaginar que a quantidade de pudins vendidos por dia varie de acordo com o preço de cada um. Então, seja **x** o preço de venda de um pudim e suponhamos que os consumidores comprem diariamente (20 − x) pudins e que essa seja também a quantidade produzida diariamente.

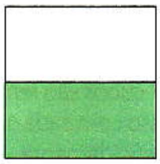
a) Escreva a expressão que representa a quantia gasta por dia para produzir todos os pudins que serão vendidos.
b) Escreva a expressão que representa a quantia arrecadada com a venda diária dos pudins produzidos.
c) Expresse o lucro **L** obtido com a venda diária dos pudins em função do preço de venda de cada pudim.
d) A doceira terá lucro se vender cada pudim por R$ 3,00? E por R$ 21,00? Justifique.
e) Esboce o gráfico da função lucro obtida no item **c** no intervalo em que o lucro é positivo.
f) Observe, no gráfico, o que ocorre com o lucro quando o preço unitário de venda dos pudins se aproxima de R$ 20,00, e quando se aproxima de R$ 11,00.

# 1 A idéia intuitiva de limite

Vejamos alguns casos em que aparece a idéia informal e intuitiva de limite.

**Exemplos:**

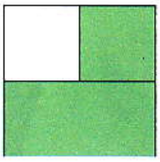
1º) Consideremos uma região quadrada de área igual a 1. Num primeiro estágio, colorimos metade dela:



parte colorida:

$\frac{1}{2}$ da figura

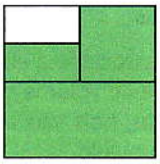
No estágio seguinte, colorimos metade da região e mais metade do que restou:



parte colorida:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ da figura

No próximo, colorimos o que havia sido colorido e mais metade do que restou:



parte colorida:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ da figura

E assim, sucessiva e indefinidamente, a área da região colorida resultante vai *tendendo a* 1. Observemos como os valores $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ vão se aproximando de 1. Dizemos, então, que o *limite* desse desenvolvimento, quando o número de estágios tende a infinito, é colorir a figura toda, ou seja, obter uma área colorida igual a 1.

**Para refletir**

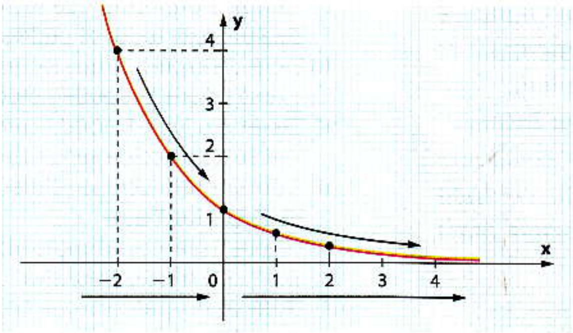
Teoricamente a área 1 nunca será completada, por isso a expressão "tendendo a".

2º) Consideremos a seqüência $\mathbf{a_n}$ de números com $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, explicitada por:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots, & \frac{1}{10}, & \ldots, & \frac{1}{99}, & \frac{1}{100}, & \ldots, & \frac{1}{999}, & \frac{1}{1000}, & \ldots, & \frac{1}{n}, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}333\ldots & 0{,}25 & & 0{,}1 & & & 0{,}01 & & & 0{,}001 & & & \end{array}$$

Observemos que, à medida que **n** cresce indefinidamente, o valor de $\frac{1}{n}$ vai se aproximando, vai tendendo, vai convergindo para 0. Dizemos, então, que, quando **n** *tende a* infinito, o *limite* da seqüência é igual a 0.

3º) Consideremos a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

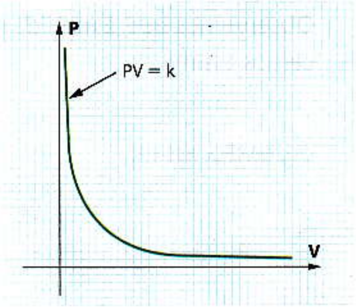


**x** tendendo a um valor cada vez maior ⇒ f(x) tende a 0

Observemos que, à medida que **x** tende a 0, f(x) tende a 1. Notemos também que, à medida que **x** cresce indefinidamente, f(x) tende a 0. Podemos então dizer que o limite dessa função exponencial, para **x** tendendo a infinito, é zero.

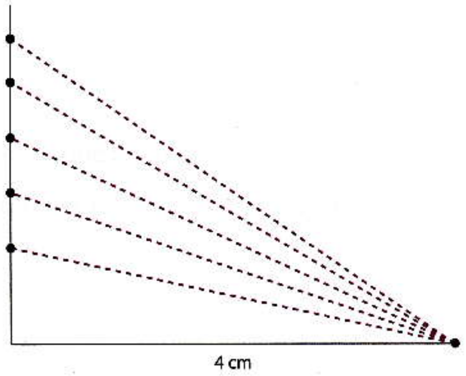
**Observação**: Em todos os exemplos acima, quando dizemos "se **n** tende a infinito..." ou "**x** tende a zero...", queremos mostrar que essas variáveis estão se aproximando desses "valores" (atenção, infinito não é um número!) sem, entretanto, serem iguais a eles. Isso é especialmente útil em determinadas situações matemáticas em que se deseja obter um resultado que só ocorre quando uma determinada variável apresenta um valor que muitas vezes ela não pode ter (como dissemos, infinito não é número). Por isso a variável "tende a esse valor", ou seja, a variável se aproxima gradativamente desse valor, chegando tão perto dele quanto desejamos. E os resultados decorrentes dessas aproximações são os limites.

4º) No capítulo 3 deste livro vimos as hipérboles e, dentre elas, vimos uma hipérbole eqüilátera importante, que representa o gráfico que exprime a relação entre pressão e volume de um gás perfeito, em condições isotérmicas.
Analisando a situação, podemos pensar: É possível o volume ser zero?
Ora, é uma situação impossível. O que é algo de volume zero? Essa é uma situação interessante, que não ocorre na prática, mas que podemos imaginar teoricamente. Observando o gráfico, vemos que quando a pressão aumenta tendendo a infinito o volume diminui, tendendo a zero. Portanto, para a pressão tendendo a infinito, o limite do volume é zero.



## Exercícios propostos

**1.** Considere a região do plano limitada pelo triângulo retângulo de base fixa e igual a 4 cm. Faça a altura ir se aproximando de 3, mas sem nunca atingir 3, isto é, faça a altura tender a 3. Complete a tabela dada e verifique para que valor está tendendo a área dessa região.



| Base | Altura | Área |
|---|---|---|
| 4 | 1 | ▨ |
| 4 | 1,5 | ▨ |
| 4 | 2,0 | ▨ |
| 4 | 2,5 | ▨ |
| 4 | 2,9 | ▨ |
| 4 | 2,999 | ▨ |
| 4 | 2,999999 | ▨ |

**2.** O que ocorre, no limite, com a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se mantivermos a medida de um cateto constante e a do outro cateto for diminuindo, tendendo a 0 (mas nunca igual a 0)?

**3.** Considere a seqüência $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Explicite essa seqüência, escrevendo os valores para $n = 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10, ..., 100, ..., 1\,000, ...$

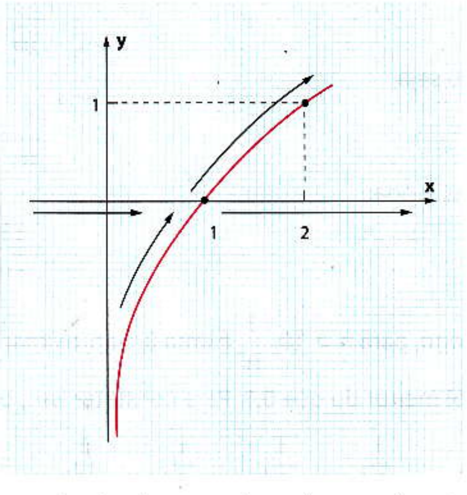
b) Escreva na forma de número decimal os termos da seqüência do item anterior.

c) Para que valor está tendendo essa seqüência quando **n** tende para infinito?

**4.** Considere o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$ e responda:

a) à medida que **x** tende a 1, f(x) tende para que valor?

b) à medida que **x** tende para um valor cada vez maior, f(x) tende para quanto?



**x** tendendo a um valor cada vez maior

## 2 Limites de seqüências

Vejamos alguns exemplos de seqüência e seus respectivos limites (quando existirem).

1º) Retomemos a seqüência $\mathbf{a}_n$, definida por $a_n = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, e explicitada por:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ou, ainda, em representação decimal:

1; 0,5; 0,333...; 0,25; 0,2; 0,16...; 0,142; 0,125; 0,11...; 0,1; ...; 0,01; ...; 0,001; ...

Observemos que, à medida que **n** cresce indefinidamente (tendendo a infinito), o termo $a_n = \frac{1}{n}$ tende a 0. Indicamos assim:

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0$$

ou, então, assim:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0}$$

que lemos: limite de $\frac{1}{n}$ quando **n** tende a infinito é igual a 0. Nesse caso dizemos que a seqüência converge para 0, ou que o limite da seqüência é 0.

**Observação**: O número $\frac{22}{7} = 3,\widehat{14}2857\ldots$ é uma 0,01-aproximação do número irracional $\pi = 3,\widehat{14}1592\ldots$, isto é, é uma aproximação de $\pi$ com erro absoluto menor do que 0,01. Já o número $\frac{22}{7} = 3,14\overset{\downarrow}{2}857\ldots$ *não* é uma 0,001-aproximação de $\pi = 3,14\overset{\downarrow}{1}592\ldots$

De modo geral, se $\varepsilon$ é um número real positivo, dizemos que **x** é uma $\varepsilon$-aproximação de **y** se e só se $|x - y| < \varepsilon$, ou seja, uma $\varepsilon$-aproximação de **y** é uma aproximação de **y** com erro (absoluto) menor do que $\varepsilon$.

Assim, no exemplo acima, quando dizemos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

estamos dizendo que, para qualquer número real positivo $\varepsilon$ dado, sempre é possível encontrar um termo da seqüência $\left(\frac{1}{n}\right)$ a partir do qual *todos* os termos dessa seqüência são $\varepsilon$-aproximações de zero (0). Por exemplo, se tomarmos $\varepsilon = 0,1$, teremos:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{ quando } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

ou seja,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{ quando } n > \frac{1}{0,1}$$

ou, ainda:

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 0,1 \text{ quando } n > 10$$

Logo, para $n > 10$, $\frac{1}{n}$ é uma 0,1-aproximação de zero (0), isto é, uma aproximação de zero (0) com erro (absoluto) menor do que 0,1. Para constatar isso, basta ver os valores da seqüência:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{9}, & \frac{1}{10}, & \frac{1}{11}, & \frac{1}{12}, & \frac{1}{13}, & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
1; & 0,5; & 0,333...; & 0,25; & 0,2; & 0,166...; & 0,142...; & 0,125; & 0,111...; & 0,1; & 0,090909...; & 0,08333...; & 0,076923... &
\end{array}$$

2º) Seja a seqüência $(a_n)_n \in \mathbb{N}^*$, definida por $a_n = \frac{n}{n+1}$ e explicitada por:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{99}{100}, \ldots, \frac{999}{1000}, \ldots$$

ou, em representação decimal, por:

0,5; 0,666...; 0,75; 0,8; 0,833...; 0,857...; 0,875; ...; 0,99; ...; 0,999; ...

Observemos que, à medida que o valor de **n** aumenta, tendendo a infinito, o valor de $\frac{n}{n+1}$ tende a 1. Por mais que, observando a seqüência de valores decimais, percebamos um crescimento nos valores de $\frac{n}{n+1}$, eles nunca serão maiores que 1, pois o numerador é sempre menor que o denominador. Assim, o valor de $\frac{n}{n+1}$ cresce sem nunca ultrapassar 1. Indicamos assim:

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{n}{n+1} \to 1$$

ou, ainda:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

**Para refletir**

Um *sinônimo* de "limite da seqüência é $\alpha$" é dizer que a "seqüência converge para $\alpha$".

que lemos: limite de $\frac{n}{n+1}$, quando **n** tende a infinito, é igual a 1. Nesse caso, o limite da seqüência é 1.

Vejamos, agora, alguns casos em que o limite *não existe*.

### 1º caso

A seqüência $(a_n)_n \in \mathbb{N}^*$, com $a_n = (-1)^n$, explicitada por $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$, oscila entre $-1$ e 1, não convergindo para número algum. O índice **n** pode crescer indefinidamente que o termo $\mathbf{a_n}$ não se aproxima de nenhum número. Dizemos, então, que *não existe o limite*.

Seqüências como essa são chamadas *divergentes*.

### 2º caso

A seqüência 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., $2^n$, ... não converge para nenhum número. Nesse caso, em particular, dizemos que ela diverge para $+\infty$.

Assim:

$$\lim_{n \to \infty} 2^n = +\infty$$

De modo geral, é possível provar que, para $a > 1$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$$

### 3º caso

A seqüência $(a_n)_n \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n = \frac{-n^2}{n+1}$, explicitada por $\frac{-1}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{-9}{4}, \frac{-16}{5}, \frac{-25}{6}, \ldots$, não converge para nenhum número. Nesse caso em particular, dizemos que ela diverge para $-\infty$. Assim:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

## Exercício resolvido

**1.** Calcule:

a) $\lim_{n \to \infty} 5$

b) $\lim_{n \to \infty} (n^3 - 2n + 5)$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{2 - 3n^3}{3n^2 + 2n}$

d) $\lim_{n \to \infty} \frac{n - 1}{3n + 5}$

**Resolução:**

a) $\lim_{n \to \infty} 5$

A seqüência $\mathbf{a_n}$ com $a_n = 5$ é chamada *seqüência constante* e pode ser escrita assim: 5, 5, 5, 5, ...
Ela converge para 5, ou seja:

$$\lim_{n \to \infty} 5 = 5$$

**Observação**: De modo geral, $\lim_{n \to \infty} k = k$ (o limite de uma constante é igual à própria constante).

b) $\lim_{n \to \infty} (n^3 - 2n + 5)$

Para o cálculo desse limite, usamos um artifício: colocamos $\mathbf{n^3}$ em evidência:

$$\lim_{n \to \infty} (n^3 - 2n + 5) = \lim_{n \to \infty} n^3\left(1 - \underset{\to 0}{\underset{\downarrow}{\frac{2}{n^2}}} + \underset{\to 0}{\underset{\downarrow}{\frac{5}{n^3}}}\right) = \lim_{n \to \infty} n^3 = \infty$$

Logo, $\lim_{n \to \infty} (n^3 - 2n + 5) = \lim_{n \to \infty} n^3 = \infty$.

**Para refletir**

Quando n tende à ∞, $\frac{2}{n^2}$ tende a zero. O mesmo ocorre com $\frac{5}{n^3}$.

**Observação**: Pode-se provar que:

- $\lim_{n \to \infty} (a_0 + a_1n + a_2n^2 + ... + a_sn^s) = \lim_{n \to \infty} a_sn^s$ (com $a_s \neq 0$)

Como conseqüência, temos:

- $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_0 + a_1n + a_2n^2 + ... + a_sn^s}{b_0 + b_1n + b_2n^2 + ... + b_tn^t} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{a_sn^s}{b_tn^t}$ (com $a_s \neq 0$ e $b_t \neq 0$)

**Para refletir**

A demonstração é feita colocando $n^s$ em evidência, como no exercício resolvido 1b. Faça isso.

c) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{2 - 3n^3}{3n^2 + 2n} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{-3n^3}{3n^2} = \lim_{n \to \infty} (-n) = -\infty$

d) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n - 1}{3n + 5} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n}} = \dfrac{1}{3}$

ou:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n - 1}{3n + 5} = \lim_{n \to \infty} \frac{1n}{3n} = \frac{1}{3}$$

**Para refletir**

- $2 - 3n^3 = n^3\left(\frac{2}{n^3} - 3\right)$

$3n^2 + 2n = n^2\left(3 + \frac{2}{n}\right)$

- $\dfrac{n - 1}{3n + 5} = \dfrac{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n}}$

## Exercícios propostos

**5.** Explicite os termos das seqüências na forma decimal e constate que:

a) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{3}{n - 1} = 0$

b) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

c) A seqüência $(a_n)_n \in \mathbb{N}^*$, com $a_n = \dfrac{n + 1}{2n - 1}$, que converge para $\dfrac{1}{2}$.

d) A seqüência $(a_n)_n \in \mathbb{N}^*$, com $a_n = \dfrac{8n}{2n + 3}$, que converge para 4.

**6.** Entre as seqüências abaixo, diga quais são convergentes e quais são divergentes e justifique:

a) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

b) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) 3, 3, 3, 3, ...

d) $1, 3, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 3, ...$

e) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

f) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

g) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

h) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, ..., \frac{1}{2n}, ...$

**7.** Quando uma seqüência $\mathbf{a_n}$ diverge para $+\infty$, escrevemos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, e quando diverge para $-\infty$, escrevemos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

Nos exercícios abaixo, dê os "valores" das expressões:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} n$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} n^2$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} (-n^5 + 5)$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} (-n)$

**8.** Calcule os valores dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} 6$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-1 + 4n}{2 + 7n}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{8n}{2n + 3}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n + 5}{3n + 2}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n + 1}{2n - 1}$

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5 - n}{2 + 3n}$

g) $\lim\limits_{n \to \infty} (n^3 - 2)$

h) $\lim\limits_{n \to \infty} (-2n^5 + n + 1)$

## Números reais como limites de seqüências

Já estudamos a ampliação dos conjuntos numéricos desde os naturais (IN) até os reais (IR). Vimos que existem certos números racionais, como 0,333..., que são chamados *dízimas periódicas*. Números desse tipo não são decimais exatos, mas podem ser vistos como "decimais infinitos", ou seja, um número com infinitas casas decimais. Vimos também que a geratriz de 0,333... é $\frac{1}{3}$, pois:

$$N = 0{,}333... \Leftrightarrow 10N = 3{,}333... \Leftrightarrow 10N = 3 + 0{,}333... \Leftrightarrow 10N = 3 + N \Leftrightarrow 9N = 3 \Leftrightarrow N = \frac{3}{9} \Leftrightarrow N = \frac{1}{3}$$

Essa dízima periódica, ou "decimal infinito", é obtida a partir de uma seqüência infinita $\mathbf{S_n}$ de decimais exatos:

$S_1$: 0,3
$S_2$: 0,33
$S_3$: 0,333
$S_4$: 0,3333
⋮ ⋮

que tende para $\frac{1}{3}$. Isso ocorre porque, à medida que **n** cresce, a quantidade de "3" do termo $\mathbf{S_n}$ também cresce, tendendo a infinito (a quantidade de "3"). Então $\mathbf{S_n}$ tende à dízima periódica 0,333... quando **n** tende a infinito. Como a geratriz de 0,333... é $\frac{1}{3}$, $\mathbf{S_n}$ tende a $\frac{1}{3}$ quando **n** tende a infinito.

Assim, à medida que o índice **n** cresce indefinidamente, o termo $\mathbf{S_n}$ vai se tornando cada vez mais próximo de $\frac{1}{3}$, ou seja:

$$n \to \infty \Rightarrow S_n \to \frac{1}{3}$$

ou, ainda:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

Dizemos, então, que a seqüência 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; ... converge para $\frac{1}{3}$, ou tem limite igual a $\frac{1}{3}$.

De modo geral, todo número racional pode ser visto como limite de seqüências de decimais exatos.

**Exemplos:**

1º) O número racional $\frac{1}{2}$ pode ser visto como limite da seqüência constante 0,5; 0,5; 0,5; ...

2º) O número racional $\frac{2}{3}$ pode ser visto como limite da seqüência 0,6; 0,66; 0,666; 0,6666; ...

3º) O número racional $\frac{41}{99}$ pode ser visto como limite da seqüência 0,41; 0,4141; 0,414141; 0,41414141; ...

4º) O número racional $-1$ pode ser visto como limite da seqüência constante $-1$; $-1$; $-1$; $-1$; $-1$; ...

## Um número irracional e um limite importante

Ao estudar os logaritmos naturais no volume 1, vimos que a base desses logaritmos era o número irracional e = 2,7182818284...

A seqüência $(a_n)_n \in \mathbb{N}^*$, tal que $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, está explicitada abaixo:

$$\begin{array}{cccccc} \left(1+\frac{1}{1}\right), & \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, & \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, & \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \ldots, & \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}, \ldots, & \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2{,}0000 & 2{,}2500 & 2{,}3703 & 2{,}4414 & 2{,}5937 & 2{,}7048 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \ldots, \left(1+\frac{1}{500}\right)^{500}, \ldots, & \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}, \ldots, & \left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}, \ldots, & \left(1+\frac{1}{50\,000}\right)^{50\,000}, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2{,}7156 & 2{,}7169 & 2{,}7181 & 2{,}7182 \end{array}$$

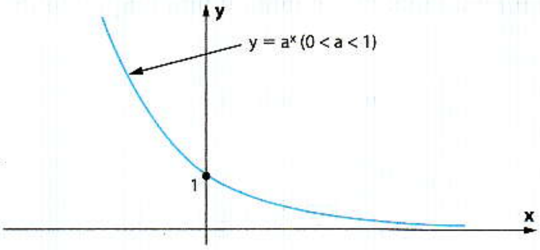
Essa seqüência é importante, pois seu limite é um dos chamados *limites fundamentais*, e seu valor é o número **e**. Assim:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Observação:** Limite da seqüência da soma dos termos de uma PG infinita

No volume 1 desta coleção estudamos as seqüências e, entre elas, as progressões geométricas. Vimos também que é possível obter um valor para a soma de infinitos termos de uma PG quando a razão **q** for tal que $0 < |q| < 1$. Esse valor é o limite da seqüência formada pelas somas da PG. Na ocasião, obtivemos uma fórmula que nos dava o "valor da soma infinita". Esse valor é o limite da soma dos termos da PG para o número de termos tendendo ao infinito. Vejamos:

Como estudado anteriormente, a soma dos **n** primeiros termos da PG é dada por $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ para qualquer razão exceto $q = 1$. Quando $0 < |q| < 1$, o limite de $\mathbf{q^n}$ para **n** tendendo a infinito é zero. É possível perceber isso relembrando o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$, assunto também estudado no volume 1:



Se $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ para $0 < |q| < 1$, então:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(-1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

que é a fórmula estudada anteriormente.

### Exercício proposto

**9.** Determine os números racionais que são limites das seguintes seqüências e justifique-os:

a) 0,6; 0,66; 0,666; 0,6666; ...

b) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ...

c) 0,24; 0,2424; 0,242424; ...

d) 3, 3, 3, 3, 3, ...

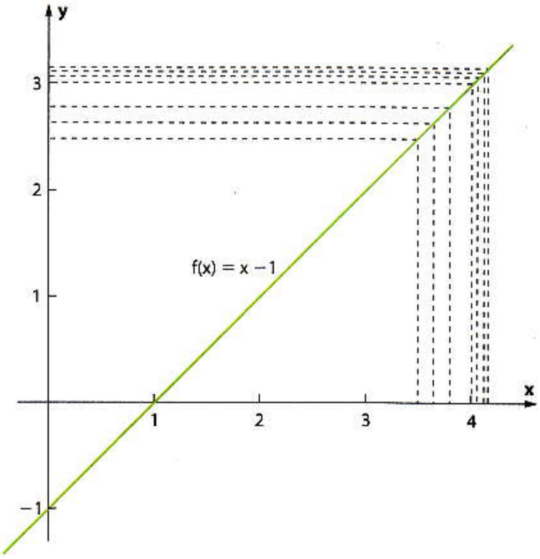
## 3 Limites de funções

No tópico anterior vimos os limites de seqüências; agora estudaremos o que vem a ser o *limite de uma função*. Com esse conceito podemos descobrir o que ocorre com a função num determinado ponto, conhecendo apenas o que está acontecendo com ela nos pontos "bem próximos" daquele determinado. A função nem precisa estar definida naquele ponto. O conceito de limite de uma função é de grande utilidade no cálculo diferencial, assunto a ser estudado em nível superior.

### Idéia intuitiva de limite de uma função

Vamos ver essa idéia com alguns exemplos.

1º) Consideremos o gráfico da função f: IR → IR definida por $f(x) = x - 1$:



Observemos que, à medida que os valores de **x** se aproximam de 4 (sem atingi-lo), por valores menores que 4 (pela esquerda) ou por valores maiores que 4 (pela direita), os valores de f(x) correspondentes se aproximam cada vez mais de 3. A tabela a seguir mostra os valores de f(x) para alguns valores de **x**:

| **x** | 3,9 | 3,99 | 3,999 | 3,9999 | ... | 4,0001 | 4,001 | 4,01 | 4,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | 2,9 | 2,99 | 2,999 | 2,9999 | ... | 3,0001 | 3,001 | 3,01 | 3,1 |

Assim, podemos escrever que:

- o limite de f(x) quando **x** tende a 4 pela esquerda é igual a 3, e indicamos:

$$\lim_{x \to 4_-} f(x) = 3$$

- o limite de f(x) quando **x** tende a 4 pela direita é igual a 3, e indicamos:

$$\lim_{x \to 4_+} f(x) = 3$$

Esses limites são chamados *limites laterais* e, como são iguais, as duas indicações anteriores podem se resumir numa única:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 3$$

e lemos limite de f(x) quando **x** tende a 4 é igual a 3.

2º) Consideremos a função f: IR − {1} → IR definida por $f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1}$.

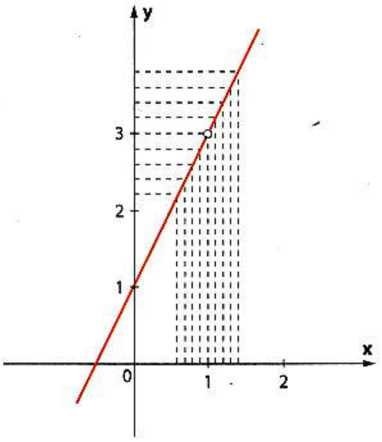
Vamos estudar o limite de f(x) quando **x** tende a 1, ou seja, $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Observemos que, neste caso, a função nem está definida no ponto $x = 1$, ou seja, não existe $f(1)$.

Como $x \neq 1$, então $x - 1 \neq 0$ e podemos dividir numerador e denominador por $(x - 1)$ obtendo:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \neq 1)$$

cujo gráfico está ao lado (a reta dá "um salto" para $x = 1$, pois a função não está definida nesse ponto). Observe na tabela abaixo valores de **x** e $f(x)$ próximos de 1 e 3, respectivamente



| **x** | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | ... | 1,0001 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x) = 2x + 1** | 2,8 | 2,98 | 2,998 | 2,9998 | ... | 3,0002 | 3,002 | 3,02 | 3,2 |

Quando **x** se aproxima gradativamente de 1, quer pela esquerda, quer pela direita, porém sem atingi-lo, os valores correspondentes de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3. Dizemos então que limite de $f(x)$ quando **x** tende a 1 é igual a 3 e escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

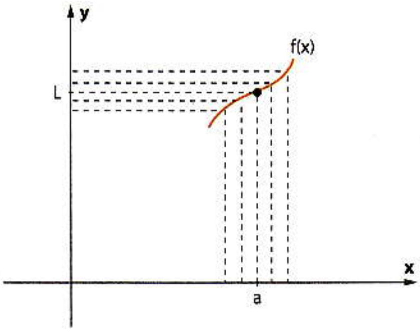
embora $f(1)$ não exista.

## Definição

Consideremos o gráfico da função **f**.

À medida que os valores de **x** se aproximam mais de um número **a**, pela direita e pela esquerda, e, em conseqüência, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de um número **L**, dizemos que o limite de $f(x)$ quando **x** tende a **a** é igual a **L** e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



É importante observar que quando se calcula $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não estamos interessados em $f(a)$, mesmo que ele exista, e sim no comportamento de $f(x)$ quando **x** se aproxima de **a**. Nesse sentido, não há necessidade de o valor $x = a$ pertencer ao domínio de **f** e, portanto, não é necessário que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ seja igual a $f(a)$. Na maioria dos limites importantes, o ponto **a** não pertence ao domínio.

**Exemplos:**

1º) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

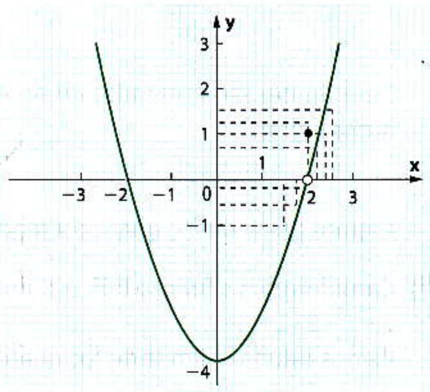
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ para } x \neq 2 \\ 1, \text{ se } x = 2 \end{cases}.$$

Observemos que, conforme **x** se aproxima de 2, quer pela esquerda, quer pela direita, porém sem atingi-lo, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 0. Então, temos:

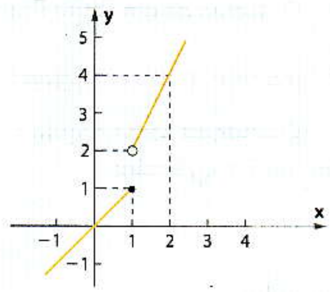
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$$

Notemos que $f(2) = 1$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.



2º) Consideremos a função f: IR → IR, definida por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 1 \\ x + 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, cujo gráfico é a união de duas semi-retas.



Observemos que, quando **x** se aproxima de 1 pela esquerda, f(x) se aproxima de 1. Assim:

$$\lim_{x \to 1_-} f(x) = 1 \text{ (limite lateral à esquerda)}$$

E, quando **x** se aproxima de 1 pela direita, f(x) se aproxima de 2. Assim:

$$\lim_{x \to 1_+} f(x) = 2 \text{ (limite lateral à direita)}$$

Nesse caso, dizemos que o limite de f(x) não existe quando **x** tende a 1, pois os limites à direita e à esquerda são diferentes.

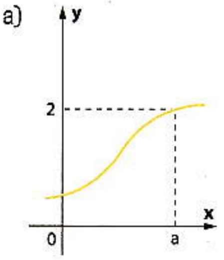
**Observação:** Para que exista um limite $\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$, devem existir e ser iguais os limites laterais à esquerda e à direita, isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a_-} f(x) = \lim_{x \to a_+} f(x)$$

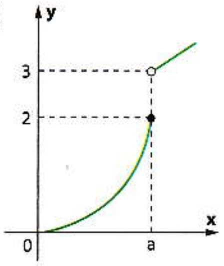
## Exercícios propostos

**10.** Determine, quando existir, o $\lim_{x \to a} f(x)$ nos seguintes casos:

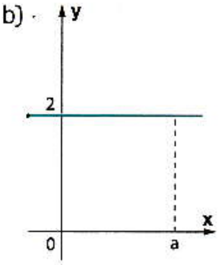
a)



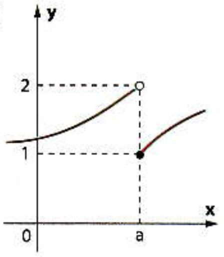
d)



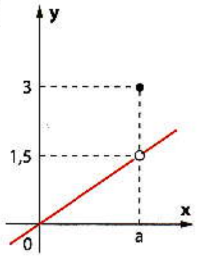
b)



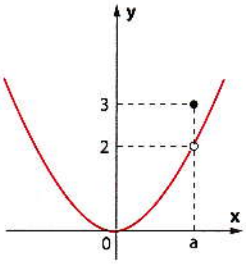
e)



c)



f)



**11.** Dada a função f: IR → IR, definida por f(x) = 3x − 1, construa uma tabela atribuindo a **x** valores próximos de 2, faça o gráfico e calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$.

**12.** Dada a função f: IR − {1} → IR, definida por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, construa uma tabela atribuindo a **x** valores próximos de 1, faça o gráfico e calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$.

**13.** Considere a função f: IR → IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \text{ se } x \neq 3 \\ 2, \text{ se } x = 3 \end{cases}.$$

a) Esboce o gráfico de f(x).
b) Determine f(3).
c) Determine $\lim_{x \to 3_-} f(x)$ e $\lim_{x \to 3_+} (fx)$.
d) Se existir, determine o valor de $\lim_{x \to 3} f(x)$.

**14.** Considere a função f: IR → IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ para } x \leq 2 \\ 2x, \text{ para } x > 2 \end{cases}.$$

a) Esboce o gráfico de f(x).
b) Determine $\lim_{x \to 2_-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2_+} f(x)$.
c) Se existir, determine o valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$.

**15.** Considere a função f: IR → IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, \text{ para } x \neq 2 \\ 0, \text{ para } x = 2 \end{cases}.$$

a) Esboce o gráfico de f(x).
b) Verifique que $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

**16.** Considere a função f: IR → IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ para } x < 2 \\ 4, \text{ para } x = 2 \\ 3, \text{ para } x > 2 \end{cases}.$$

a) Esboce o gráfico de f(x).
b) Determine $\lim_{x \to 2_-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2_+} f(x)$.
c) Se existir, determine o valor $\lim_{x \to 2} f(x)$.

# 4 Propriedades dos limites

O cálculo de um limite fica mais simples a partir de suas propriedades operatórias.

## Primeira propriedade

O limite da soma é igual à soma dos limites (quando existirem). Ou seja, se existirem os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, então:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

**Exemplo:**

$$\lim_{x \to 2} (x + 3) = \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3 = 2 + 3 = 5$$

## Segunda propriedade

O limite do produto é igual ao produto dos limites (quando existirem). Ou seja, se existirem os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, então:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

**Exemplos:**

1º) $\lim\limits_{x \to 3} (5x) = \lim\limits_{x \to 3} 5 \cdot \lim\limits_{x \to 3} x = 5 \cdot \lim\limits_{x \to 3} x = 5 \cdot 3 = 15$

2º) $\lim\limits_{x \to 2} (3x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 \cdot \lim\limits_{x \to 2} x = 3 \cdot \lim\limits_{x \to 2} x = 3 \cdot 2 = 6$

Como conseqüência, se uma delas é a função constante, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = kL \ (k \in \mathbb{R})$$

Outra conseqüência:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \cdot \lim_{x \to a} g(x) =$$
$$= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

Ou seja, o limite da diferença é igual à diferença dos limites (quando existirem).

**Exemplos:**

1º) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 - \lim\limits_{x \to 1} 2x = \lim\limits_{x \to 1} (x \cdot x) - 2 \cdot \lim\limits_{x \to 1} x = \lim\limits_{x \to 1} x \cdot \lim\limits_{x \to 1} x - 2 \cdot \lim\limits_{x \to 1} x =$

$= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1$

2º) $\lim\limits_{x \to 3} (4x^2 - 2x + 1) = \lim\limits_{x \to 3} 4x^2 - \lim\limits_{x \to 3} 2x + \lim\limits_{x \to 3} 1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 1 = 31$

Generalizando, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função polinomial definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

temos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Basta calcular o valor numérico da função no ponto **a**.

3º) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + 3x^2 - x + 3) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 2 + 3 - 1 + 3 = 7$

## Terceira propriedade

O limite do quociente é igual ao quociente dos limites (quando existirem e quando o limite do divisor for diferente de 0). Ou seja, se existirem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, com $L_2 \neq 0$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

**Exemplos:**

1º) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 4} 2}{\lim\limits_{x \to 4} x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2º) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1)}{\lim\limits_{x \to 2} (x - 1)} = \dfrac{2^2 + 1}{2 - 1} = \dfrac{5}{1} = 5$

3º) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = ?$

Como $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$, isto é, o limite do divisor é nulo, não podemos aplicar a propriedade acima. Neste caso, devemos usar um artifício e fazer:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}} = x + 2$$

Então:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

**Para refletir**

A função não está definida para $x = 2$, mas existe seu limite quando $x$ tende a 2.

## Exercícios propostos

**17.** Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x^3$

c) $\lim\limits_{x \to 1} 2x$

d) $\lim\limits_{x \to 1} x^6$

e) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x)$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 1}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + x^2)$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x}{3x - 1}$

**18.** Determine os valores dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 2x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (4x^3 + 2x^2 + x + 2)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} (2x^2 - x + 2)$

e) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - x^2 - 3)^{10}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} (x + 2)^5$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 1}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{2x + 1}$

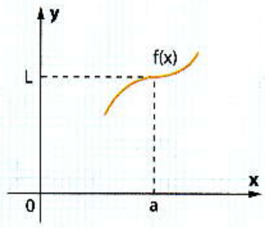
j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}$

l) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + x + 1}{2}$

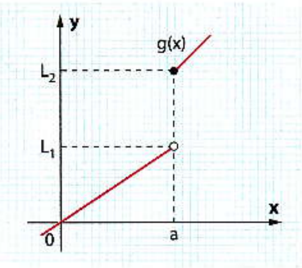
m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{2x^3 + x^2 + 2x + 4}$

## 5 Funções contínuas

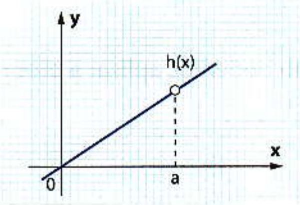
Intuitivamente dizemos que uma função é *contínua* num ponto **a** do seu domínio se nesse ponto ela não dá "saltos" nem apresenta "furo". Vejamos alguns exemplos:



A função **f** é *contínua* no ponto $x = a$.



A função **g** é *descontínua* no ponto x = a. Seu gráfico dá um "salto" nesse ponto.



A função **h** é *descontínua* no ponto x = a. Seu gráfico apresenta um "furo" nesse ponto, isto é, ela não está definida nesse ponto.

Observemos que a função **f** está definida no ponto x = a e, portanto, existe f(a). Vemos também que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A função **g** está definida no ponto x = a e, portanto, existe g(a). Mas *não existe* $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, pois, quando **x** se aproxima de **a** pela esquerda, o limite é $\mathbf{L_1}$ e, quando **x** se aproxima de **a** pela direita, o limite é $\mathbf{L_2}$, com $L_1 \neq L_2$.

A função **h** *não está definida* no ponto x = a, ou seja, *não existe* h(a), embora exista $\lim\limits_{x \to a} h(x)$.

## Definição de função contínua

Uma função **f** é contínua num ponto x = a se, e somente se, as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1ª) existe f(a);
2ª) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
3ª) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**Para refletir**

A primeira condição equivale a dizer que a pertence ao domínio de f.

Quando uma (ou mais) dessas condições não é satisfeita para x = a, dizemos que a função é descontínua em **a**.

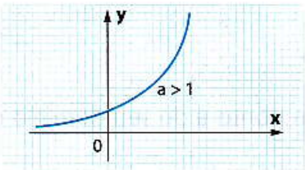
Dizemos também que uma função é *contínua num conjunto* se for contínua em todos os elementos desse conjunto. Dizemos simplesmente que uma função é contínua quando o for em todos os pontos do seu domínio.

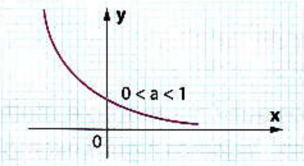
**Exemplos de funções contínuas:**

a) A função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é contínua no conjunto $\mathbb{R}$. Recordamos que, nesse caso, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

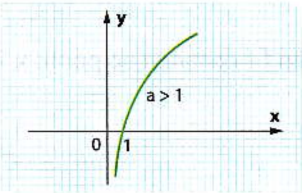
Estão incluídas aí a função afim f(x) = ax + b e a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

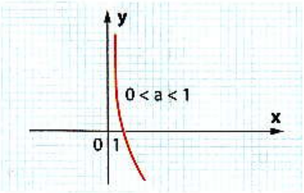
b) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$:



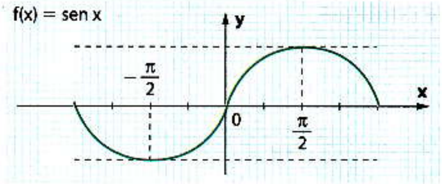


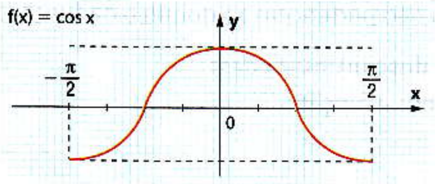
c) A função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$:





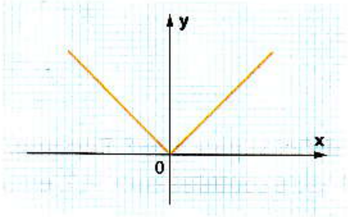
d) As funções trigonométricas seno e cosseno, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \cos x$:





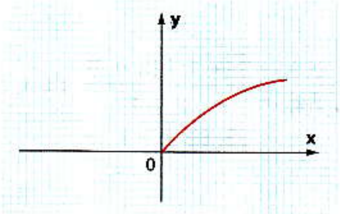
e) A função módulo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$$



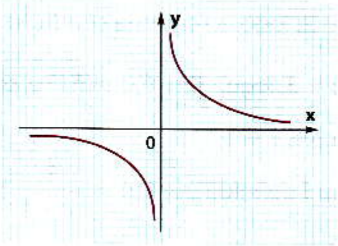
f) A função raiz enésima

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, com **n** natural positivo



g) A função

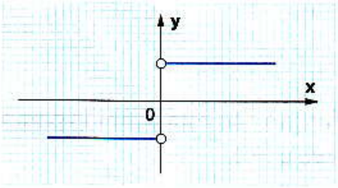
$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Observemos que 0 não pertence ao domínio. A função é contínua para todos os pontos do seu domínio $\mathbb{R} - \{0\}$. Portanto, **f** é contínua.

h) A função

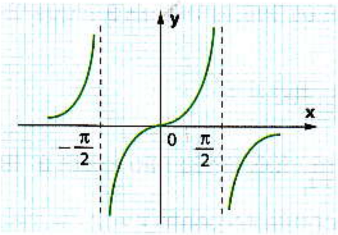
$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$



A função **f** dá um "salto" no ponto $x = 0$. Mas o ponto 0 não pertence ao domínio da função, que é $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Portanto, **f** é contínua.

i) A função tangente

$f: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, com $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \text{tg } x$

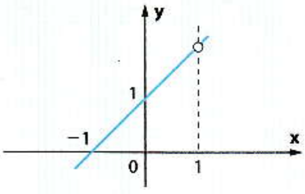


A função tg x é contínua em todos os pontos do seu domínio. A dúvida poderia surgir nos pontos $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, etc., mas esses não pertencem ao domínio da função. Logo, **f** é contínua.

**Exemplos de descontinuidades:**

a) Consideremos a função

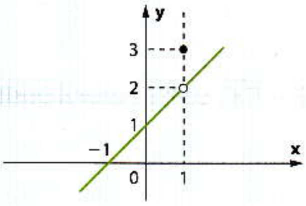
$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$



Essa função não está definida para x = 1. Portanto, não existe f(1). Assim, a primeira condição da definição não está satisfeita. Logo, **f** não é contínua em x = 1, embora seja contínua para todos os pontos do domínio.

b) Consideremos a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 3, \text{ se } x = 1 \end{cases}$$



**Para refletir**

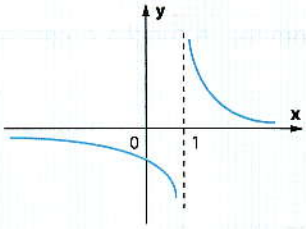
f[x] é contínua em x = 4.

Nesse caso, f(1) = 3. Portanto, a primeira condição da definição está satisfeita.
Além disso, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$; logo, a segunda condição também está satisfeita.

Mas $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ e f(1) = 3; logo, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ e, portanto, a terceira condição não está satisfeita.

Logo, **f** não é contínua em x = 1.

c) Consideremos a função **f** definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$ descontínua no ponto x = 1:

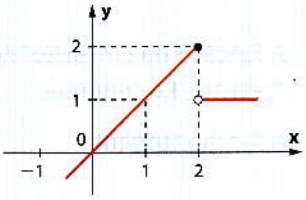


**Para refletir**

A função é contínua para todos os pontos do domínio.

Não existe f(1), pois a função não está definida para x = 1. Logo, a primeira condição não está satisfeita. E, de fato, **f** é descontínua no ponto x = 1.

d) Consideremos a função ao lado, definida por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } x \leq 2 \\ 1, \text{ para } x > 2 \end{cases}$



Observamos que f(2) = 2; assim, a primeira condição está satisfeita.
Vejamos quanto valem os limites laterais à esquerda e à direita de f(x) quando **x** tende a 2.

$$\lim_{x \to 2_-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 2_+} f(x) = 1$$

Como $\lim_{x \to 2_-} f(x) \neq \lim_{x \to 2_+} f(x)$, então não existe o $\lim_{x \to 2} f(x)$. Portanto, a segunda condição não é satisfeita e concluímos que **f** é descontínua no ponto x = 2.

## Algumas propriedades das funções contínuas

Como conseqüência das propriedades dos limites (limite da soma, limite do produto, etc.) temos as propriedades das funções contínuas. Assim, se **f** e **g** são funções contínuas em um ponto $x = a$, também serão contínuas nesse ponto as funções $f + g$, $f - g$, $kf$ ($k \in \mathbb{R}$), $fg$, $\frac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) e $g \circ f$ (**g** composta com **f**).

A terceira condição da definição de função contínua num ponto $x = a$ é $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Então, para determinar o valor do limite de uma função contínua quando **x** tende a **a**, basta determinar $f(a)$.

### Exercícios resolvidos

**2.** Determine os valores dos seguintes limites sabendo que as funções são contínuas em seus domínios:

a) $\lim\limits_{x \to 3} x^2$

b) $\lim\limits_{x \to 3} 1$

c) $\lim\limits_{x \to 4} 3^x$

d) $\lim\limits_{x \to 8} \log_2 x$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x$

f) $\lim\limits_{x \to 16} \sqrt[4]{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} (2^x \sqrt{x})$

h) $\lim\limits_{x \to 1} [\log_2 (x^3 + 7)]$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\text{sen}\, x + 2x)$

**Resolução:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = f(3) = 3^2 = 9$

b) $\lim\limits_{x \to 3} 1 = f(3) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 4} 3^x = f(4) = 3^4 = 81$

d) $\lim\limits_{x \to 8} \log_2 x = f(8) = \log_2 8 = 3$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 16} \sqrt[4]{x} = f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$

g) $\lim\limits_{x \to 1} (2^x \sqrt{x}) = 2^1 \sqrt{1} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 1} [\log_2 (x^3 + 7)] = \log_2 (1^3 + 7) = \log_2 8 = 3$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\text{sen}\, x + 2x) = \text{sen}\, \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \pi$

**3.** Examine se a função definida por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$ admite algum ponto de descontinuidade.

**Resolução:**

Se essa função admitir algum ponto de descontinuidade, ele será $x = 2$.

Mas $\lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 2_+} f(x) = 2$, o que acarreta $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2 = f(2)$.

Logo, a função **f** é contínua no ponto $x = 2$. É contínua também em todo o domínio $\mathbb{R}$.

### Exercícios propostos

**19.** As funções a seguir são contínuas em seus domínios. Determine os valores dos seus limites nos pontos indicados:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^3$

b) $\lim\limits_{x \to 100} \log_{10} x$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to -1} |x|$

f) $\lim\limits_{x \to 0} 2^x$

g) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + x^2 + 2x - 1)$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \text{sen}\, x$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

j) $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x}$

**20.** As funções a seguir são contínuas em seus domínios. Determine os valores dos seus limites nos pontos indicados:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2x + \cos x)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (|x| - 3^x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 + x + 7}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} + 2^x\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 4} (2^x \cdot \log_2 x)$

**21.** Explicite, quando existirem, os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = 3^{-x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

d) $f(x) = \sec x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

**22.** Esboce o gráfico de cada função. Observe onde existem "saltos" no gráfico e mostre qual condição da definição não está satisfeita, apontando os pontos de descontinuidade:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ para } x \leqslant 2 \\ 1, \text{ para } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, \text{ se } x \neq 3 \\ 5, \text{ se } x = 3 \end{cases}$

**23.** Determine os valores de **a** para os quais as funções abaixo são contínuas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)}, \text{ para } x \neq 2 \\ a, \text{ para } x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, \text{ para } x \neq 3 \\ a, \text{ para } x = 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1}, \text{ para } x \neq 1 \\ a, \text{ para } x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ para } x < 0 \\ 0, \text{ para } x = 0 \\ a, \text{ para } x > 0 \end{cases}$

## 6 Um limite muito importante: o limite fundamental trigonométrico

Consideremos a função f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ e verifiquemos qual é o valor de:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

À medida que **x** se aproxima nos dois sentidos de 0, a função $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ se aproxima de 1.

A tabela abaixo foi feita com o auxílio de uma calculadora. É importante perceber que **x** está em radianos, pois $x \in \mathbb{R}$. Se **x** não estiver em radianos, o $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$ não é válido:

| **x** | 0,1 | 0,02 | 0,01 | ... |
|---|---|---|---|---|
| **sen x** | 0,99833 | 0,19998 | 0,00999 | ... |
| $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ | 0,9983 | 0,99993 | 0,99998 | ... |

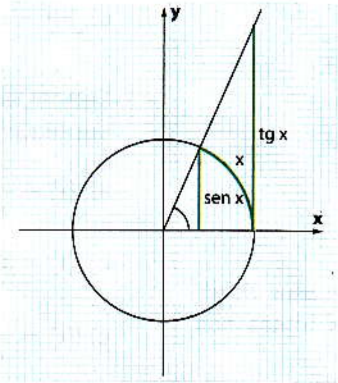
**Para refletir**

Verifique para x = −0,1, x = −0,02 e x = −0,01.

Isso significa que:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1}$$ (limite fundamental trigonométrico)

Geometricamente, temos:



Observando a figura, vemos que:

$$\text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

Tomando o inverso, obtemos:

$$\frac{1}{\text{sen}\, x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\text{tg}\, x} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\, x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

Como sen $x > 0$, pois $0 < x < \frac{\pi}{2}$, multiplicamos por sen x, obtendo:

$$1 > \frac{\text{sen}\, x}{x} > \cos x$$

De maneira análoga, obtemos essa expressão quando $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Assim, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, temos:

$$1 > \frac{\text{sen}\, x}{x} > \cos x$$

ou:

$$\cos x < \frac{\text{sen}\, x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \qquad \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, então a função $\frac{\text{sen}\, x}{x}$, que está entre cos x e 1, tem também limite igual a 1 quando **x** tende a 0, ou seja:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

## Exercício resolvido

**4.** Determine o valor de:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{3x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\, x}{x}$

**Resolução:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\text{sen}\, x}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\, 4x}{4x} \cdot \frac{4}{2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{4x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} 2 = 1 \cdot 2 = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

d) Neste caso, fazemos $u = x - \frac{\pi}{2}$, então $x = u + \frac{\pi}{2}$, e vemos que:

$x \to \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u \to 0$

Assim:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}\, u}{u} = 1$$

e) A função $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$ é contínua no ponto $x = \frac{\pi}{2}$. Então:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\, x}{x} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

## Exercícios propostos

**24.** Determine os valores dos limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{4x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{7x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{5x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } ax}{bx}$ $(a \neq 0 \text{ e } b \neq 0)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg } 2x}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} (2x \cdot \text{cossec } x)$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{\text{sen } x}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen }(x - \pi)}{x - \pi}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{6x - 3\pi}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)}{x^2}$

$\left(\textit{Sugestão}: \text{Multiplique por } \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right)$

**25.** Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } 3x}{5x}, \text{ para } x \neq 0 \\ a, \text{ para } x = 0 \end{cases}$

e determine **a** de modo que a função seja contínua no ponto $x = 0$.

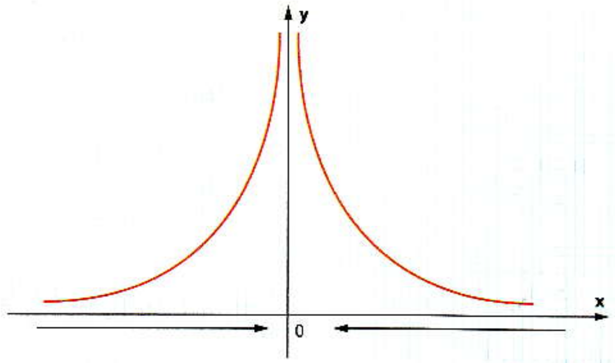
## 7 Limites infinitos

Estudaremos agora os chamados *limites infinitos* de funções f(x) quando $x \to a$ ou quando $x \to \pm\infty$.

### Limites infinitos de f(x) quando $x \longrightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$

Vejamos alguns exemplos.

- Consideremos a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$:



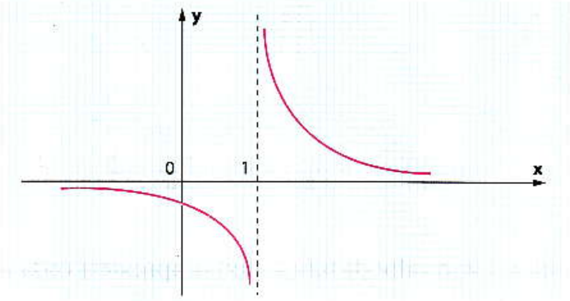
**Para refletir**

Podemos obter valores de f(x) tão grandes quanto desejarmos (maior que qualquer número positivo) tomando **x** suficientemente próximo de 0.

Observemos que, quando **x** tende a 0 pela esquerda ou pela direita, f(x) assume valores arbitrariamente grandes. Assim:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

- Consideremos, agora, a função f: IR − {1} → IR definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$:



Observemos que, quando **x** tende a 1 pela direita, f(x) assume valores positivos arbitrariamente grandes. Assim:

$$\lim_{x \to 1_+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Quando **x** tende a 1 pela esquerda, f(x) assume valores negativos de módulos arbitrariamente grandes. Assim:

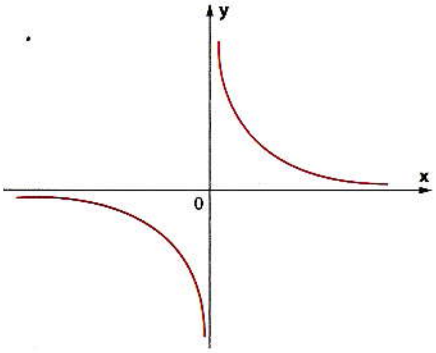
$$\lim_{x \to 1_-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Nesse caso, $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1_-} f(x)$.

**Observação:** Quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então este **L** é um número real (L ∈ IR). Portanto, quando dizemos que existe o limite, é porque existe um número real **L** tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Nos exemplos que estamos estudando, ±∞ não é um número real e, portanto, *não existe o limite*; entretanto, o símbolo ±∞ indica o que ocorre com f(x) quando **x** se aproxima cada vez mais de **a**.

## Exercícios propostos

**26.** Considere a função f: IR* → IR definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$:



Determine:

a) $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{1}{x}$

**27.** Esboce o gráfico da função

$f: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$

(k ∈ ℤ) definida por f(x) = tg x e determine:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}_+} \text{tg } x$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \text{tg } x$

**28.** Esboce o gráfico da função f: IR − {4} → IR definida por

$f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ e determine:

a) $\lim\limits_{x \to 4_+} \dfrac{1}{x-4}$

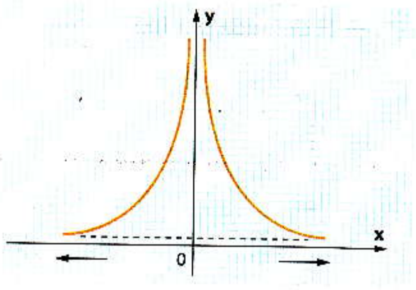
b) $\lim\limits_{x \to 4_-} \dfrac{1}{x-4}$

**29.** Esboce o gráfico da função $f(x) = \ell n\, x$ e determine $\lim\limits_{x \to 0_-} \ell n\, x$.

## Limites de funções f(x) quando x → ±∞

Vejamos alguns exemplos.

- Consideremos a função f: IR* → IR definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$:



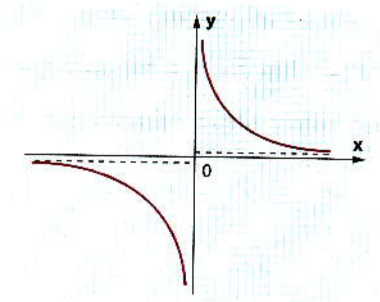
Observemos que, quando **x** tende a $+\infty$, o valor da função f(x) se aproxima cada vez mais de 0. Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Da mesma forma, quando **x** tende a $-\infty$, f(x) também se aproxima cada vez mais de 0. Assim:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

- Consideremos, agora, a função f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$:



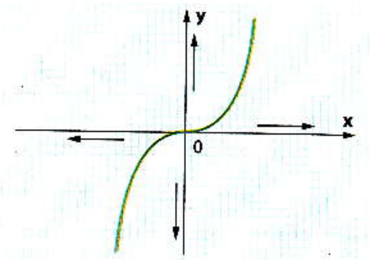
Observemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Consideremos, agora, a função f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$:



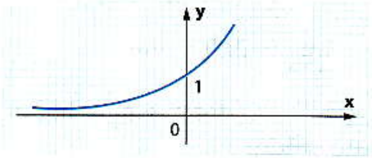
Observemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

e:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

- Consideremos, ainda, a função f: IR → IR definida por $f(x) = e^x$:



Observemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

e:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

## Exercícios propostos

**30.** Esboce os gráficos das funções abaixo e determine, em cada caso, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x + 3$

c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $f(x) = -x^3$

f) $f(x) = 2^x$

**31.** Esboce o gráfico da função f: IR* → IR definida por $f(x) = \frac{-1}{x}$ e determine:

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

## Limite da função polinomial quando $x \longrightarrow \pm\infty$

- Consideremos a função polinomial definida por:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 \; (a_n \neq 0)$$

Nesse caso, temos:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_nx^n)}$$

De fato,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) =$$

colocando $a_nx^n$ em evidência

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[ a_nx^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \frac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n} \right) \right] = \lim_{x \to \pm\infty} a_nx^n \cdot \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} 1}_{=1} = \lim_{x \to \pm\infty} a_nx^n$$

estas parcelas tendem a 0 quando $x \to \pm\infty$

Logo, o limite da função polinomial quando $x \to \pm\infty$ é igual ao limite do seu termo de maior grau.

**Exemplos:**

1º) $\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left[ x^3 \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

tendem a 0

2º) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

3º) $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 2) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$

4º) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$

5º) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^4) = -\infty$

- De modo análogo, se $g(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ e $h(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0$, então definimos a função racional f(x) como sendo:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0} \text{ (com } h(x) \neq 0)$$

e obtemos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

**Exemplos:**

1º) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2º) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{3x^2 + x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

3º) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

## Exercícios propostos

**32.** Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ das funções:

a) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^5 - x^3 + 1$

d) $f(x) = -x^2 + x + 2$

e) $f(x) = -2x^{11} + x^2 + x$

f) $f(x) = \sqrt{2}x^9 + x + 2$

**33.** Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 + 1}{x^5 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 2}$

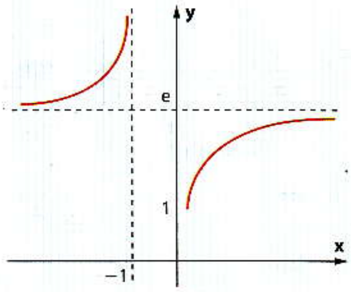
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 3}{5x^5 + x^2 + 1}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2 + 4}$

## 8 Outro limite muito importante: o limite fundamental exponencial

Consideremos a função definida por $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, cujo domínio é dado por $1 + \dfrac{1}{x} > 0$ com $x \neq 0$, ou seja, por $x < -1$ ou $x > 0$.



É possível provar que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

em que **e** é o número irracional dado por e = 2,7182818284...

Podemos deduzir também que:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

pois, fazendo $x = \frac{1}{u}$, notamos que, quando $u \to \pm\infty$, $x \to 0$, e assim:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

**Exemplos:**

1º) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$

2º) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{1}{3}} = \lim\limits_{u \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

Fazendo 3x = u, temos:
$x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$

## Exercício proposto

**34.** Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

# 9 Aplicações

## Exercícios resolvidos

**5.** *Aplicação à Geometria*
Considere um cone reto de raio da base **r** e geratriz **g**. O que acontece com a área lateral desse cone quando o raio **r** tende ao valor **g**?

**Resolução:**
A área lateral do cone é $A_\ell = \pi r g$, de forma que $\lim\limits_{x \to g} \pi r g = \pi g^2$, ou seja, é a área do círculo de raio **g**.

**6.** *Aplicação à Física*
Uma partícula se movimenta sobre uma trajetória qualquer obedecendo à função horária $S(t) = 2t^2 + 5t - 3$, com **S** em metros e **t** em segundos. Lembrando que a velocidade média para percorrer um espaço ΔS num intervalo de tempo Δt é dado por $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$:

a) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de 2 s a 3 s?

b) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de 2 a 2 + x segundos, com $x \neq 0$?

c) Qual a velocidade da partícula no instante t = 2 s (ou seja, com **x** tendendo a zero)?

**Resolução:**

a) $S(2) = 8 + 10 - 3 = 15$

$S(3) = 18 + 15 - 3 = 30$

$\Delta S = 30 - 15 = 15$

$\Delta t = 3 - 2 = 1$

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{15}{1} = 15 \text{ m/s}$$

b) $S(2) = 8 + 10 - 3 = 15$

$S(2 + x) = 2(2 + x)^2 + 5(2 + x) - 3 =$

$= 8 + 8x + 2x^2 + 10 + 5x - 3 = 2x^2 + 13x + 15$

$\Delta S = 2x^2 + 13x + 15 - 15 = 2x^2 + 13x$

$\Delta t = (2 + x) - 2 = x$

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2x^2 + 13x}{x} = 2x + 13 \ (x \neq 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow v = (2x + 13)$ m/s

c) Para obter a velocidade no instante t = 2 s, podemos calcular o limite da velocidade para **x** tendendo a zero:

$$\lim_{x \to 0} (2x + 13) = 13 \text{ m/s}$$

A velocidade no instante t = 2 s é 13 m/s.

**7.** Uma experiência com um novo tipo de bactéria mostrou que a população de bactérias, após **t** dias de iniciada a cultura, era dada pela função $B(t) = 10 + \frac{8t}{(t + 1)^2}$, em que B(t) é a quantidade de bactérias em milhares e **t** é a duração da experiência em dias.

a) Qual será a população de bactérias um dia depois de iniciada a cultura?

b) Qual será a população de bactérias três dias depois de iniciada a cultura?

c) O que acontecerá com a população de bactérias ao longo do tempo? Qual é a população limite?

**Resolução:**

a) $B(1) = 10 + \frac{8 \cdot 1}{2^2} = 12$ mil bactérias

b) $B(3) = 10 + \frac{8 \cdot 3}{4^2} = 11{,}5$ mil bactérias

c) $$\lim_{t \to \infty} \left(10 + \frac{8t}{(t + 1)^2}\right) = 10 + \lim_{t \to \infty} \frac{8t}{t^2} =$$

$= 10 + \lim_{t \to \infty} \frac{8}{t} = 10 + 0 = 10$ mil bactérias, ou seja, com o passar dos dias (dias tendendo a infinito) a população de bactérias tende a 10 mil.

## Exercícios propostos

**35.** Uma partícula se movimenta sobre uma trajetória qualquer obedecendo à função horária $S(t) = t^2 - 4t + 3$, com **S** em metros e **t** em segundos. Lembrando que a velocidade média para percorrer um espaço $\Delta S$ num intervalo de tempo $\Delta t$ é dada por $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$:

a) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de 4 a 4 + x segundos, com $x \neq 0$?

b) Qual a velocidade da partícula no instante t = 4 s (ou seja, com **x** tendendo a zero)?

**36.** Um estacionamento no centro da cidade permite que seus clientes estacionem lá pelo tempo que desejar, desde que paguem por esse serviço. O preço para um cliente estacionar por **x** horas é $p(x) = 2 + x$.

a) Qual é o preço da primeira hora de estacionamento?

b) Qual é o preço da segunda hora de estacionamento?

c) Qual é o preço médio por hora se um cliente estacionar por 4 horas?

d) Qual é o custo médio por hora se um cliente estacionar por **x** horas?

e) Qual seria o custo médio por hora quando **x** tende a infinito? O que significa esse resultado?

**37.** Uma empresa de *chips* eletrônicos tem um custo $C(x) = 1\,000 + 2x$ para fabricação de **x** *chips*, C(x) em dólares, e decidiu ter um lucro de 20% na venda dos *chips*.

a) Determine o preço de venda de cada *chip* se forem fabricadas 100 unidades.

b) Determine o preço de venda de cada *chip* se forem fabricadas 1 000 unidades.

c) O que fazer para baratear gradativamente o custo de cada *chip* sem mudar a função custo?

d) Qual seria o menor preço de venda de cada *chip*, e em que situação isso poderia ocorrer?

## Atividades adicionais

**1.** Quando uma seqüência $\mathbf{a_n}$ diverge para $+\infty$, escrevemos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, e quando diverge para $-\infty$, escrevemos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$. Nos exercícios abaixo, dê os "valores" das expressões:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (-n)^2$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} (-n^2)$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} 2n^2$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} (n^5 - 5)$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

**2.** Calcule os valores dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (4n^3 + 3n^2 + n - 1)$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{2}n^{10} - n^6 + 2\right)$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3 - 2}{n^2 + 4}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^3 + n^2 - n}{n^5 + n^3}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 + n^5}{1 - n^3}$

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2n - n^4}{2 + n^2 + 2n^3}$

**3.** Considere a função f: IR → IR definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ para } x < 0 \\ 2, \text{ para } x = 0 \\ 2x, \text{ para } x > 0 \end{cases}.$$

a) Esboce o gráfico de f(x).

b) Determine $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$.

c) Se existir, determine $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

**4.** Determine, se existir, o $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ sabendo que a função f: IR → IR é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ para } x < 2 \\ 3, \text{ para } x \geq 2 \end{cases}$$

**5.** Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo e determine o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

a) f: IR → IR definida por $f(x) = k$, qualquer que seja $x \in$ IR.

b) f: IR → IR definida por $f(x) = x$, qualquer que seja $x \in$ IR.

**6.** Esboce o gráfico da função f: IR → IR definida por $f(x) = x^3$, qualquer que seja $x \in$ IR.

a) Determine $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$.

b) Se existir, determine $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

**7.** Esboce o gráfico da função f: IR → IR definida por $f(x) = |x|$, qualquer que seja $x \in [-2, 2]$.

a) Determine $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$.

b) Se existir, determine $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

**8.** Consideremos a função f: IR − {0} → IR definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Se $x > 0$, então $|x| = x$ e, portanto,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e, portanto,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = -\frac{x}{x} = -1.$$

a) Esboce o gráfico de f(x).

b) Mostre que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

**9.** Determine os valores dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5}$

h) $\lim\limits_{x \to -4} \left(\sqrt{-x} - x + 2\right)$

**10.** As funções abaixo são contínuas em seus domínios. Determine os valores dos seus limites nos pontos indicados:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\log_2 (\text{sen } x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \text{sen} \left(\sqrt{x} - \log_2 x\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} 2^{x^2} - x$

**11.** Explicite, quando existirem, os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

c) $f(x) = \text{cotg}\, x$

**12.** Esboce o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ para } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$.

Observe onde existem "saltos" no gráfico e mostre qual condição da definição não está satisfeita, apontando os pontos de descontinuidade.

**13.** Esboce os gráficos e verifique se as funções abaixo são contínuas:

a) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x, \text{ para } x \leqslant 0 \\ x, \text{ para } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ para } x \leqslant 0 \\ 2^x, \text{ para } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, \text{ para } 0 < x \leqslant 1 \\ 0, \text{ para } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, \text{ para } 0 < x \leqslant 1 \\ 1, \text{ para } x > 1 \end{cases}$

**14.** Sabendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$, mostre que

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

$\left(\textit{Sugestão}: \text{Multiplique } f(x) \text{ por } \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x}.\right)$

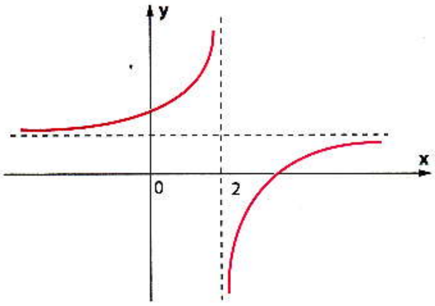
**15.** Determine os valores dos limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{1 - \cos x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \text{sen } x}{x - \text{sen } x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x}$

**16.** Dada a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}$:



Determine:

a) $\lim\limits_{x \to 2_+} \dfrac{x - 3}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 2_-} \dfrac{x - 3}{x - 2}$

**17.** Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e determine:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x)$

**18.** Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{n \to -\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{3x^3 + 2x^2 - x + 2}$

b) $\lim\limits_{n \to -\infty} \dfrac{x + 1}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{n \to -\infty} \dfrac{2x^4 + x^3 + x}{x^2 + x + 1}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x + 2}$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3x^5 + x^4 + 8}{-2x^{11} + x + 1}$

f) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - x}$

**19.** Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ quando } x > 3 \\ -x, \text{ quando } x \leqslant 3 \end{cases}$, esboce o gráfico de **f** e calcule, quando existir:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

**20.** Seja **f** a função tal que $f(x) = \begin{vmatrix} 3x^2 & -2 \\ x^4 & x - 1 \end{vmatrix}$. Então o $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}$.

b) $-\dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{1}{8}$.

d) $\dfrac{1}{4}$.

e) $-\dfrac{1}{4}$.

## Questões de vestibular

**1.** (Fuvest-SP) Um comerciante deseja realizar uma grande liquidação anunciando x% de desconto em todos os produtos. Para evitar prejuízo o comerciante remarca os produtos antes da liquidação.

a) Em que porcentagem **p** devem ser aumentados os produtos para que, depois do desconto, o comerciante receba o valor inicial das mercadorias?

b) O que acontece com a porcentagem **p** quando o valor do desconto da liquidação se aproxima de 100%?

**2.** (UFS/PSS-SE) Analise as sentenças seguintes:

a) Calculando-se $\lim\limits_{x \to 2} [x^3(2x - 1)]$, obtém-se 24.

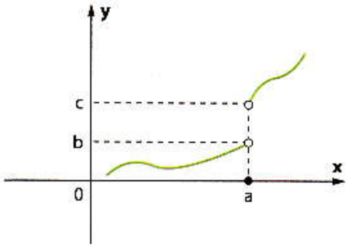
b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\cos x + \text{sen } x) = \frac{1}{2}$.

c) Se **f** é uma função real dada por

$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$, para todo $x \neq 2$, então

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

**3.** (UFPA) Dado o gráfico da função $y = f(x)$, podemos afirmar que:



a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

e) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

**4.** (Cefet-PR) Se $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ é igual a:

a) 1. b) 0. c) $+\infty$. d) $-\infty$. e) Não existe.

**5.** (PUCC-SP) O valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x}$ é:

a) $-2$.

b) $-1$.

c) 0.

d) 1.

e) impossível de ser calculado.

**6.** (FUA-AM) O $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ é:

a) $\frac{1}{2}$. b) 0. c) $\frac{1}{4}$. d) 1. e) $\frac{1}{6}$.

**7.** (PUC-MG) Se $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{2 - 8x}{x + 1}}$, o valor de **L** é:

a) $-2$. b) $-1$. c) 0. d) 1. e) 2.

**8.** (PUC-MG) Considere o número

$M = \log_2\left(3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{3}\right)$. O valor de **M**, quando **n** se torna arbitrariamente grande, é:

a) 2.

b) $2 \cdot \log_2 3$.

c) 3.

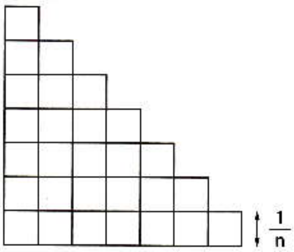
d) $3 \cdot \log_3 2$.

e) $\infty$.

**9.** (Cefet-PR) Se $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - x + 4}{2x^2 + 4x + 2}$, então $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ é igual a:

a) 12. b) 0. c) 1. d) Inexistente. e) 2.

**10.** (UFRJ) Para cada número natural $n \geqslant 1$, seja $\mathbf{F_n}$ a figura plana composta de quadradinhos de lados iguais a $\frac{1}{n}$, dispostos da seguinte forma:



$\mathbf{F_n}$ é formada por uma fila de **n** quadradinhos, mais uma fila de $(n - 1)$ quadradinhos, mais uma fila de $(n - 2)$ quadradinhos e assim sucessivamente, sendo a última fila composta de um só quadradinho (a figura ilustra o caso $n = 7$).

Calcule o limite da área de $\mathbf{F_n}$ quando **n** tende a infinito.

**11.** (FCMSCSP) O $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}\right)$ é:

a) 1. b) 4. c) 2. d) 0. e) Não existe.

**12.** (UFU-MG) Sabendo que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x + 3m}{x - m} = \frac{4}{3}$, com $x \neq m$, então podemos afirmar que:

a) $m > 4$.

b) $m < -4$.

c) $m \in [1, 4]$.

d) $m \in [-4, 1]$.

e) não existe **m** tal que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x + 3m}{x - m} = \frac{4}{3}$.

**13.** (PUC-SP) Sendo **e** a base dos logaritmos neperianos, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ vale:

a) 0.

b) $\infty$.

c) $-1$.

d) 1.

e) $\frac{1}{2}$.

**Para refletir**

Podemos também resolver esse exercício usando

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ell n\ a$.

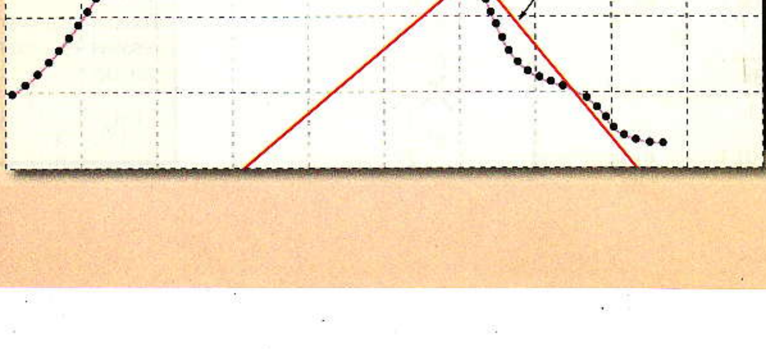
# 8 Capítulo

# Introdução às derivadas

O estudo do comportamento de uma função continua sendo o foco central nesta abordagem e o cálculo de limite é sua principal ferramenta. Uma reta que corta uma curva torna-se sua tangente à medida que aproximamos seus pontos de intersecção com a curva, fazendo com que os valores assumidos pela função, nos pontos por onde passa a secante, aproximem-se cada vez mais um do outro. Esse "deslizar" da reta ao longo da curva fornece dados que descrevem seu comportamento. E isso se consegue através do cálculo de limites.

O estudo das funções que aqui é introduzido diferencia-se das etapas anteriores do estudo da Matemática por tratar de quantidades contínuas e não mais discretas. Foi a tentativa de encontrar algoritmos semelhantes aos existentes para problemas que envolviam quantidades discretas (aquelas que compreendem os números inteiros), como o cálculo do mdc ou mmc, que levou os matemáticos a descobrir os processos do cálculo diferencial, derivada e integral, para lidar com variáveis contínuas (aquelas que envolvem quantidades muito pequenas, os infinitesimais, ou muito grandes, as que tendem ao infinito).

Se, por um lado, nos faltam exemplos palpáveis de sua aplicação na experiência cotidiana, por se tratar de processo que auxilia teoricamente a elaboração de um projeto, por outro nos permite ressaltar que não há limites para a exploração do raciocínio através da Matemática. Nas palavras de dois grandes matemáticos da atualidade,



*As retas ao lado são: uma tangente à curva e outra normal (perpendicular à tangente no ponto de tangência).*
*Extraído de www.findgraph.com/analysis.htm. Acesso em 30/5/2007.*

"Na Matemática, se a experiência não intervém depois que se deu o primeiro passo, é porque não é mais preciso." (Pontes de Miranda)

"Não é paradoxo dizer que em nossos momentos mais teóricos podemos estar mais próximos de nossas aplicações mais práticas." *(A.N. Whitehead), conferimos a idéia de que esta ciência tem em si seu próprio objeto de estudo.*

*O conceito de derivada aparece no século XVIII, descoberto por Leibniz e Newton, quando o cálculo já estava sendo desenvolvido em virtude da preocupação de matemáticos, como Galileu e Kepler, com o conceito de quantidades indivisíveis. Mais tarde, o uso de coordenadas adotado por Fermat e Descartes contribuiu para o avanço da análise infinitesimal, facilitada pela conjunção álgebra/geometria.*

*Este tópico pode ser considerado um elo entre a conclusão da formação matemática do ensino médio e o início da formação do ensino superior. Neste capítulo serão introduzidas as interpretações algébrica e geométrica do conceito de derivada de uma função e suas primeiras aplicações.*

## Atividades

**1.** Já prenunciando o aparecimento dos conceitos próprios do cálculo infinitesimal, Kepler, com a intenção de calcular na prática a área do círculo, propõe uma solução "intuitiva", baseada no "princípio da continuidade": imaginava uma infinidade de triângulos isósceles com vértices no centro do círculo, com alturas de medida aproximadamente igual ao raio, tendo como bases cordas infinitesimais do círculo. Sendo assim, concluiu que a área do círculo, como soma das áreas dos infinitos triângulos, resultava igual à metade do produto do raio pelo perímetro do círculo.

a) Faça um esboço da situação imaginada por Kepler.
Atenção: Para que a medida da altura de cada triângulo seja muito próxima da medida do raio, os lados de cada triângulo têm de se aproximar bastante dela, o que faz com que haja "infinitos" triângulos.

b) Calcule a área do círculo seguindo a proposta de Kepler. Continue a seqüência:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \Rightarrow A = \frac{1}{2}rb_1 + \frac{1}{2}rb_2 + \ldots + \frac{1}{2}rb_n \Rightarrow$$

Aqui, as bases dos triângulos são as cordas do círculo. Então, a quanto tende sua soma?

c) Compare o resultado encontrado com a fórmula da área do círculo que você conhece.

d) Você é capaz de desenvolver raciocínio análogo para uma esfera no caso do cálculo do seu volume? *Sugestão*: Imagine a esfera composta de pirâmides com vértices no centro da esfera e bases infinitesimais próximas da superfície.
Neste capítulo você trabalhará com o conceito de "taxa de variação". Então, vamos dar os primeiros passos aqui.

**2.** A altura do nível de água de um reservatório com a forma de um paralelepípedo variou durante o período em que foi abastecido, como mostra a tabela:

| **Altura da água** (em metros) | **Observação feita ao final da:** |
|---|---|
| 1 | 1ª hora |
| 1,5 | 2ª hora |
| 2,5 | 3ª hora |
| 2,8 | 4ª hora |
| 3 | 5ª hora |
| 4,5 | 6ª hora |
| 5 | 7ª hora |

a) Qual foi o crescimento do nível da água desse reservatório entre o final da 1ª hora e o final da 4ª hora?

b) Quanto o nível da água cresceu por hora, em média, nesse período?

c) Mostre que o crescimento médio horário da altura da água no reservatório entre a 1ª e a 7ª hora não foi igual ao crescimento médio horário entre o final da 1ª e 4ª hora.

d) Mostre que entre a 5ª e 7ª hora, o nível da água aumentou em média horária mais do que entre a 1ª e 4ª hora.

**3.** Estima-se que daqui a **t** anos, a população de uma certa comunidade será dada por $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ (em milhares de habitantes).

a) Qual é a população atual dessa comunidade?

b) Qual será a população dessa comunidade daqui a 1 ano?

c) Quanto essa população crescerá, em média, nesse 1º ano?

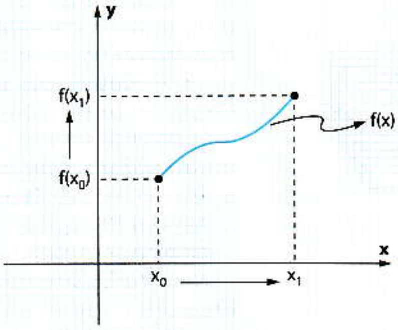
d) Qual será a população dessa comunidade daqui a 2 anos?

e) Quanto essa população crescerá, em média, durante esses 2 anos?

# 1 Explorando a idéia de derivada

Vamos iniciar a exploração intuitiva da idéia de *derivada* por meio da idéia de *variação de uma função.*

Consideremos o gráfico:

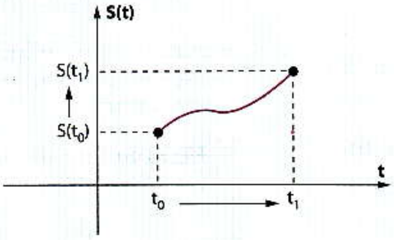


Observemos que, quando a variável independente **x** "passa por $\mathbf{x_0}$ e vai até $\mathbf{x_1}$", o conjunto de valores da função "passa por $f(x_0)$ e chega até $f(x_1)$". Chamamos de *variação média* da função nesse trecho o quociente:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

**Exemplo:**

Se a variável independente é o tempo **t** e **S** é o espaço percorrido por um ponto móvel nesse tempo, temos que **S** é função de **t** e escrevemos $S = S(t)$, que é a equação horária do ponto material em movimento.



Entre os instantes $\mathbf{t_0}$ e $\mathbf{t_1}$, o ponto material se desloca de $S(t_0)$ até $S(t_1)$. A variação média da função **S** nesse trecho ou a *velocidade média* com que o ponto material se desloca entre $\mathbf{t_0}$ e $\mathbf{t_1}$ é dada por:

$$v_m = \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Observemos que, fixando $\mathbf{x_0}$, a variação média da função, relativamente à variação da variável, não é constante e depende de $\mathbf{x_1}$. Assim, tomando vários $\mathbf{x_1}$ cada vez mais próximos de $\mathbf{x_0}$, é possível (mas nem sempre) que essa variação média tenda a um determinado valor. Ocorrendo isso, no limite, quando $\mathbf{x_1}$ tende a $\mathbf{x_0}$, a variação média tende a um valor que será chamado de *taxa de variação instantânea* no ponto $\mathbf{x_0}$. À taxa de variação instantânea da função no ponto $\mathbf{x_0}$ chamamos de *derivada* da função **f** em relação à variável **x** no ponto $\mathbf{x_0}$ e representamos por:

$$f'(x_0)$$

Vamos escrevê-la numa linguagem mais conveniente.

Fazendo $\Delta x = x_1 - x_0$ e $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, temos:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

A variação média de uma função é dada pela razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Como consideramos $\mathbf{x_1}$ variando para se aproximar de $\mathbf{x_0}$, vamos chamá-lo apenas de **x**, e a variação média da função passa, então, a ser dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{(taxa de variação média da função no intervalo } [x_0, x])$$

Assim, a variação instantânea da função **f** no ponto $\mathbf{x_0}$ ou a *derivada da função **f** em relação à variável **x** no ponto $x_0$* é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**Para refletir**

Dizer que $\Delta x \to 0$ é o mesmo que dizer $x \to x_0$.

ou:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou, ainda:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Exemplo:**

No caso do ponto material em movimento, quando $\mathbf{t_1}$ tende a $\mathbf{t_0}$, a velocidade média pode tender a um valor-limite que dará a velocidade instantânea no instante $\mathbf{t_0}$.

Analogamente ao exemplo anterior, fazendo $\Delta t = t_1 - t_0$ e $\Delta S = S(t_1) - S(t_0)$, temos:

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

A velocidade média é dada pela razão:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Como fizemos $\mathbf{t_1}$ tender a $\mathbf{t_0}$, podemos chamá-lo apenas de **t**, e a velocidade média no intervalo de $\mathbf{t_0}$ a $\mathbf{t_1}$ é dada, então, por:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

Logo, a velocidade instantânea no instante $\mathbf{t_0}$ é obtida quando fazemos **t** tender a $\mathbf{t_0}$ ou, equivalentemente, quando fazemos $\Delta t$ tender a 0. Portanto, representando por $\mathbf{v_{(t_0)}}$ a velocidade instantânea no instante $\mathbf{t_0}$, temos:

$$v_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \quad v_m = \lim_{\Delta t \to a} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

ou:

$$v_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

ou, ainda:

$$v_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

Concluímos, então, que a primeira idéia de derivada de uma função **f** num ponto $\mathbf{x_0}$ do seu domínio é a variação instantânea que a função **f** sofre em relação à variável **x** num ponto $\mathbf{x_0}$. Quando essa variável é o tempo, a derivada é a velocidade instantânea de um ponto material em movimento num determinado instante $\mathbf{t_0}$.

## Exercícios resolvidos

**1.** Qual é a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$?

**Resolução:**

Estamos procurando $f'(2)$ e temos $x_0 = 2$, $f(x) = x^3$.

Então:

$f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8$

$f(x_0 + \Delta x) = f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^3 =$

$= (2 + \Delta x)[4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2] =$

$= 8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

Portanto:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{8} + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{8}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}[12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2]}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} 12}_{12} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} 6\Delta x}_{0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2}_{0} = 12$$

Logo, $f'(2) = 12$.

Podemos também resolver esse problema de outra maneira:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Assim:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) =$$

$$= \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

Logo, $f'(2) = 12$.

**2.** Determine $f'(3)$, sabendo que $f(x) = x^2 + 2x$.

**Resolução:**

$x_0 = 3$

$f(x_0) = f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$

$f(x_0 + \Delta x) = f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2 + 2(3 + \Delta x) =$

$= 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 + 6 + 2\Delta x = 15 + 8\Delta x + (\Delta x)^2$

Portanto:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[15 + 8\Delta x + (\Delta x)^2] - 15}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8 + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 8 + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 8 + 0 = 8$$

Podemos resolver esse problema de outra maneira:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 2x) - 15}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 5)}{(x - 3)} =$$

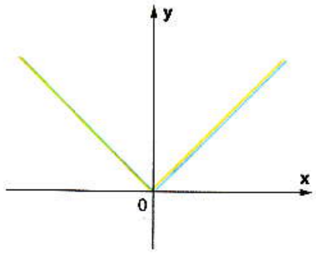
$$= \lim_{x \to 3} (x + 5) = 8$$

Logo, $f'(3) = 8$.

**3.** Calcule a derivada da função $f(x) = |x|$ no ponto $x_0 = 0$.

**Resolução:**

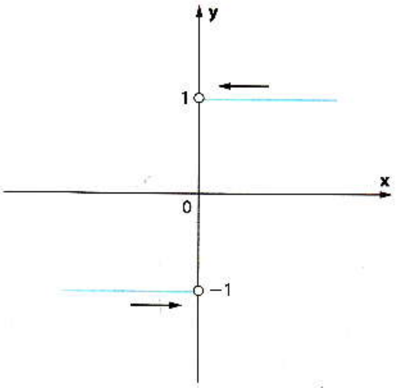
Esboçando o gráfico da função $f(x) = |x|$, vem:



$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ f(x_0) = f(0) = |0| = 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

Já vimos que não existe o limite da função $g(x) = \frac{|x|}{x}$ quando **x** tende a 0, pois quando **x** tende a 0 pela direita esse limite é igual a 1; quando **x** tende a 0 pela esquerda, ele é igual a $-1$.



Como o limite à direita e o limite à esquerda são diferentes, concluímos que não existe o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. Ou seja, não existe o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ e, portanto, não existe $f'(0)$.

Logo, não existe a derivada da função $f(x) = |x|$ no ponto $x_0 = 0$.

**4.** Um ponto material se move sobre uma trajetória qualquer segundo a equação horária $S(t) = t^2 - 2t + 5$, em que **S** é dado em metros (m) e **t** é dado em segundos (s). Determine a velocidade do ponto material no instante $t_0 = 2$ s.

**Resolução:**

Precisamos determinar $v_{(t_0)} = S'_{(t_0)}$. Temos:

$t_0 = 2$

$S(t_0) = S(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 5$

$S(t_0 + \Delta t) = S(2 + \Delta t) = (2 + \Delta t)^2 - 2(2 + \Delta t) + 5 =$

$= \cancel{4} + 4\Delta t + (\Delta t)^2 - \cancel{4} - 2\Delta t + 5 = (\Delta t)^2 + 2\Delta t + 5$

Portanto:

$$v_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta t)^2 + 2\Delta t + \cancel{5} - \cancel{5}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}(\Delta t + 2)}{\cancel{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t + \lim_{\Delta t \to 0} 2 =$$

$$= 0 + 2 = 2$$

Logo, $v_{(t_0)} = 2$ m/s. Assim, a velocidade no instante $t_0 = 2$ s é de 2 m/s.

## Exercícios propostos

**1.** Determine a derivada da função f: IR → IR definida por:

a) $f(x) = 2x + 1$ no ponto $x = 1$;

b) $f(x) = x^2 - 1$ no ponto $x = 2$.

**2.** Determine $f'(2)$, sabendo que f: IR → IR é definida por $f(x) = x^3 - 1$.

**3.** Determine $f'(1)$, se existir, sabendo que f: IR → IR é definida por $f(x) = |x - 1|$.

**4.** Um ponto material se move sobre uma trajetória segundo a equação horária $S(t) = 2t^2 + 1$ (em que **S** é dado em metros e **t** é dado em segundos). Determine a velocidade no instante $t = 3$ s.

**5.** Uma partícula se move em linha reta segundo a equação horária $S(t) = 3t + 2$ (**S** em metros e **t** em segundos). Determine a velocidade da partícula no instante $t = 2$ s.

**6.** Uma partícula se move sobre uma trajetória segundo a equação horária dada abaixo (em que **S** é dado em metros e **t** é dado em segundos). Determine, em cada caso, a velocidade da partícula no instante indicado.

a) $S = 2t^2 + 10t - 1$ no instante $t = 3$ s.

b) $S = t^2 + 3t$ no instante $t = 2$ s.

c) $S = t^3 + t^2 + 2t + 1$ no instante $t = 1$ s.

**7.** A aceleração **a** é a variação instantânea da velocidade **v** em relação ao tempo **t** num instante $\mathbf{t_0}$, ou seja, é a derivada da velocidade **v** no instante $\mathbf{t_0}$: $a_{(t_0)} = v'_{(t_0)}$. Sabendo que um ponto material tem velocidade variável dada pela expressão $v = 3t^2 + 1$, determine sua aceleração, em m/s², nos instantes:

a) $t = 1$ s;

b) $t = 4$ s.

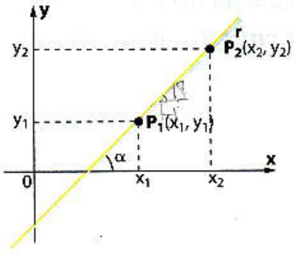
## 2 A interpretação geométrica da derivada

Já estudamos em Geometria analítica a inclinação da reta. Vimos que, dada uma reta **r**, seu coeficiente angular é expresso por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

em que $\mathbf{P_1}(x_1, y_1)$ e $\mathbf{P_2}(x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer da reta **r**. Chamando de α o ângulo que **r** forma com o eixo **x**, o coeficiente **m** é a tangente de α, ou seja:

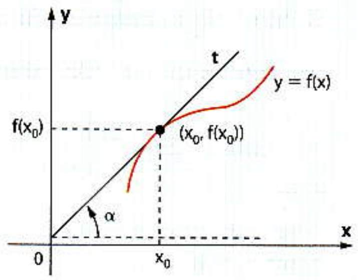
$$m = \text{tg}\,\alpha$$



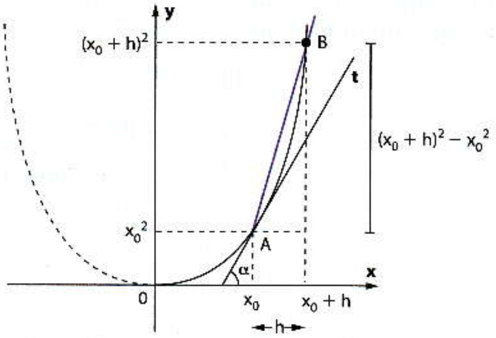
**Para refletir**

- Consideramos α a partir do eixo **x**, em direção a r no sentido anti-horário.
- Não existe m quando r é paralela ao eixo **y**.

Vejamos, agora, o que vem a ser a *inclinação de funções* (ou de curvas que as representam) em um determinado ponto. Intuitivamente, a inclinação de $y = f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$ é a *inclinação da reta tangente* em $(x_0, f(x_0))$ ou simplesmente em $\mathbf{x_0}$.



Consideremos, por exemplo, a inclinação da função $f(x) = x^2$, ou da curva que a representa, no ponto $\mathbf{x_0}$.



A inclinação da secante AB é dada por:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

À medida que **B** vai se aproximando de **A**, ou seja, quando **h** vai tendendo a 0, a reta AB vai se aproximando cada vez mais da reta tangente **t** em $\mathbf{x_0}$. Isso significa que a inclinação de $f(x) = x^2$ em $\mathbf{x_0}$ vai tendendo a $2x_0$.

Numa linguagem mais precisa, escrevemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

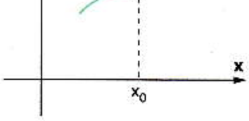
que é exatamente $f'(x_0)$, a derivada da função **f** no ponto $\mathbf{x_0}$ (com a diferença de que aqui chamamos o acréscimo de **h** em lugar de $\mathbf{\Delta x}$). Portanto, existindo $f'(x_0)$, existirá a reta tangente e:

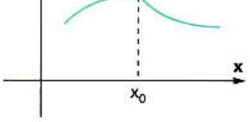
$$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha$$

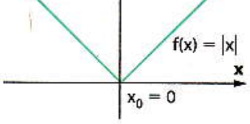
que é o coeficiente angular da reta **t**, tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou:} \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

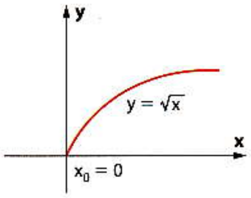
**Observação**: Para admitir reta tangente em um determinado ponto, o gráfico da função não pode dar "salto" (não pode ser descontínuo nele) nem mudar bruscamente de direção (formar "bico") nesse ponto. Não admitem tangente em $\mathbf{x_0}$ os seguintes gráficos de funções:

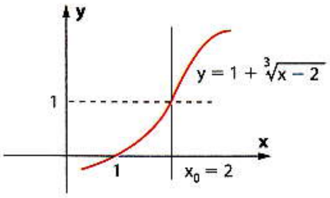






Retas paralelas ao eixo **y** não têm coeficiente angular, pois m = tg 90° não está definido. Assim, se a tangente ao gráfico de uma função num ponto é paralela ao eixo **y**, a função também não admite derivada nesse ponto e dizemos que não existe a tangente ao gráfico por esse ponto. São exemplos disso as seguintes funções, nos pontos $\mathbf{x_0}$ indicados:





## Exercício resolvido

**5.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função:

a) $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$;

b) $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$.

**Resolução:**

a) $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$

A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ é dada por:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

Como $f(1) = 1^2 = 1$, basta calcular $f'(1)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} =$$

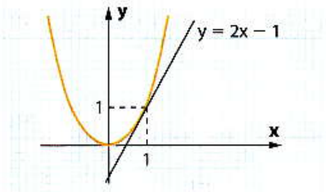
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(1 + h)^2 - 1]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2 + h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Portanto:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 2x - 1$



Logo, $y = 2x - 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.

b) $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$

Neste caso:

$f(2) = 2^3 = 8$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$$

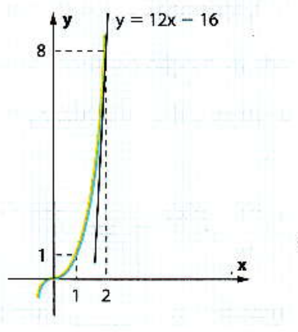
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(2 + h)^3 - 8]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(12h + 6h^2 + h^3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(12 + 6h + h^2)}{\cancel{h}} = 12$$

Portanto:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 12x - 16$



Logo, $y = 12x - 16$ é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$.

## Exercícios propostos

**8.** Dada a função f: IR → IR definida por $f(x) = x^2 + 1$, determine:

a) $f'(2)$;

b) a equação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto $x_0 = 2$.

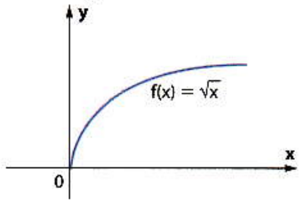
**9.** Dada a função f: IR → IR definida por $f(x) = \frac{x^2}{4}$, determine:

a) $f'(-2)$;

b) a equação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto $x_0 = -2$.

**10.** Dada a função f: IR → IR definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto $x_0 = 1$.

**11.** Dado o gráfico:



a) determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$.

b) verifique que no ponto $x_0 = 0$ não existe f′(0), ou seja, nesse ponto não existe a derivada; portanto, não existe a reta tangente.

## 3 Função derivada

Consideremos uma função **f** com domínio **E** e **I** (I ⊂ E) o conjunto de todos os **x** para os quais existe a derivada f′(x). A função que a cada x ∈ I associa a derivada f′(x) é chamada de *função derivada*. A expressão de **f′** é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

### Exercícios resolvidos

**6.** Sabendo que $f(x) = x^2$, obtenha a função derivada, ou simplesmente a derivada, f′(x).

**Resolução:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x^2 + 2xh + h^2) - x^2]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Logo, $f'(x) = 2x$.

Se quiséssemos f′(1), teríamos $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. E, se quiséssemos $f'(x_0)$, teríamos $f'(x_0) = 2x_0$.

**7.** Determine a derivada da função cosseno, ou seja, determine f′(x), sabendo que f(x) = cos x. Em seguida, determine a equação da reta tangente a f(x) no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

**Resolução:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h) - \cos x]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos x \cdot (\cos h - 1)}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right] = \underbrace{\lim_{h \to 0} \cos x}_{\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} - \underbrace{\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x}_{\operatorname{sen} x} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1} =$$

$$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = -\operatorname{sen} x$$

Logo, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Equação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Para refletir**

$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ é uma aplicação do limite fundamental trigonométrico

$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Veja o capítulo anterior.

Logo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \cos x$ no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$ é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

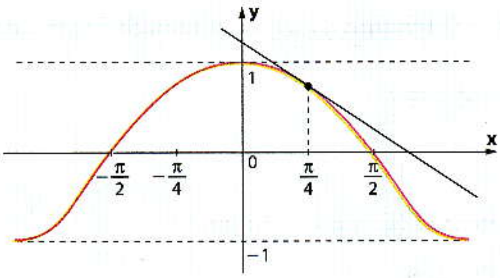
$$\Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Portanto, $f'(x) = -\text{sen } x$ e a reta procurada é

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Veja o gráfico:



**8.** Uma partícula se move sobre uma trajetória obedecendo à equação horária $S(t) = 2t^3 + t + 1$ (**S** dado em metros e **t** dado em segundos). Determine:

a) a função velocidade em função do tempo;

b) a velocidade da partícula no instante $t = 2$ s;

c) a função aceleração em função do tempo;

d) a aceleração da partícula no instante $t = 3$ s.

**Resolução:**

a) Lembramos que a velocidade é dada pela derivada de $S(t)$, ou seja:

$$v(t) = S'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

Como:

$S(t + h) - S(t) =$

$= [2(t + h)^3 + (t + h) + 1] - (2t^3 + t + 1) =$

$= 2(t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3) + t + h + 1 - 2t^3 -$

$- t - 1 = 6t^2h + 6th^2 + 2h^3 + h$

temos:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{6t^2h + 6th^2 + 2h^3 + h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6t^2 + 6th + 2h^2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (6t^2 + 6th + 2h^2 + 1) = 6t^2 + 1$$

Logo, $v(t) = 6t^2 + 1$.

b) Procuramos a velocidade no instante $t = 2$ s, isto é, procuramos $S'(2)$ ou $v(2)$. Portanto:

$v(2) = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25$

Logo, a velocidade da partícula no instante $t = 2$ s é de 25 m/s.

c) A aceleração é dada pela derivada da velocidade, ou seja, $a(t) = v'(t)$. Assim:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t + h) - v(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[6(t + h)^2 + 1] - (6t^2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12th + 6h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(12t + 6h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (12t + 6h) = 12t$$

Logo, $a(t) = 12t$.

d) A aceleração no instante $t = 3$ s é dada por $v'(3)$ ou $a(3)$:

$a(3) = 12 \cdot 3 = 36$

Logo, a aceleração da partícula no instante $t = 3$ s é de 36 m/s².

## Exercícios propostos

**12.** Determine as funções derivadas das funções:

a) $f(x) = x^3$

b) $\ell(x) = -2x^2$

c) $g(x) = x^3 + x^2$.

d) $m(x) = \sqrt{x}$

e) $h(x) = x^2 + 1$

f) $n(x) = \frac{1}{x}$

**13.** Usando o exercício anterior, determine:

a) $f'(1)$

b) $\ell'(-1)$

c) $g'(2)$

d) $m'(a)$

e) $h'(0)$

f) $n'(3)$

**14.** Determine as funções derivadas das funções:

a) $f(x) = \text{sen } x$

b) $h(x) = 2 \cdot \cos x$

c) $g(x) = 1 + \text{sen } x$

d) $\ell(x) = 1 - \cos x$

**15.** Usando o exercício anterior, determine:

a) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

c) $g'(0)$

d) $\ell'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

**16.** Mostre que a derivada da função:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ (em que **a** e **b** são números reais, $a \neq 0$) é igual a **a**;

b) constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é igual a 0;

c) identidade $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é igual a 1.

# 4 Derivadas de algumas funções elementares

Vejamos, agora, como são as derivadas de algumas funções elementares.

## Derivada da função afim: $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Considerando $f(x) = ax + b$, temos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} a = a$$

Logo, podemos escrever que:

$$\boxed{\text{se } f(x) = ax + b, \text{ então } f'(x) = a}$$

**Exemplos:**

1º) Se $f(x) = 2x + 3$, então $f'(x) = 2$.

2º) Se $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, então $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

## Derivada da função identidade: $f(x) = x$

Se na função afim dada anteriormente fizermos $a = 1$ e $b = 0$, teremos a função identidade $f(x) = x$ e poderemos escrever que:

$$\boxed{\text{se } f(x) = x, \text{ então } f'(x) = 1}$$

## Derivada da função constante: $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Se na função afim $f(x) = ax + b$ fizermos $a = 0$ e $b = k$, teremos $f'(x) = a = 0$. Assim,

$$\boxed{\text{se } f(x) = k, \text{ então } f'(x) = 0}$$

**Exemplos:**

1º) Se $f(x) = 8$, então $f'(x) = 0$.

2º) Se $f(x) = \sqrt{3}$, então $f'(x) = 0$.

## Derivada da função potência com expoente natural: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. A derivada de **f** é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Usando o desenvolvimento do binômio de Newton, temos:

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}hx^{n-1} + \binom{n}{2}h^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}h^{n-1}x + \binom{n}{n}h^n =$$

$$= x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2}h^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}h^{n-1}x + h^n$$

Logo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2}h^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}h^{n-1}x + h^n\right] - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}hx^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}h^{n-2}x + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

Portanto, $f'(x) = nx^{n-1}$. Assim,

$$\text{se } f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ então } f'(x) = nx^{n-1}$$

**Exemplos:**

1º) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

2º) Se $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$.

## Derivada da função cosseno: $f(x) = \cos x$

No *exercício resolvido 7* mostramos que:

$$\text{se } f(x) = \cos x, \text{ então } f'(x) = -\text{sen } x$$

## Derivada da função seno: $f(x) = \text{sen } x$

Se $f(x) = \text{sen } x$, então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen }(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Logo:

$$\text{se } f(x) = \text{sen } x, \text{ então } f'(x) = \cos x$$

## Derivada do produto de uma constante por uma função: $g(x) = c \cdot f(x)$

Como $g(x) = c \cdot f(x)$, temos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h} =$$

$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

Assim,

$$\text{se } g(x) = c \cdot f(x), \text{ então } g'(x) = c \cdot f'(x)$$

**Exemplos:**

1º) Se $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$, então $f'(x) = 2 \cdot \cos x$.

2º) Se $f(x) = -3 \cdot \cos x$, então $f'(x) = (-3)(-\text{sen } x) = 3 \cdot \text{sen } x$.

## Derivada da função logarítmica natural (base *e*): $f(x) = \ell n\, x$

É possível demonstrar que:

$$\text{se } f(x) = \ell n\, x, \text{ então } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Veja o quadro-resumo das derivadas obtidas até aqui:

| Função | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = \text{sen } x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\text{sen } x$ |
| $g(x) = c \cdot f(x)$ | $g'(x) = c \cdot f'(x)$ |
| $f(x) = \ell n\, x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |

### Exercícios resolvidos

**9.** Encontre a equação da reta tangente à curva:

a) $y = x^5$ no ponto $x_0 = 1$;

b) $y = \ell n\, x$ no ponto $x_0 = 2$.

**Resolução:**

a) $y = x^5$ no ponto $x_0 = 1$

Neste caso:

$f(x) = x^5 \Rightarrow f(x_0) = f(1) = 1^5 = 1$

$f'(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

No ponto (1, 1), temos:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 5(x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 5x - 4$

Logo, a equação da reta tangente à curva $y = x^5$ no ponto (1, 1) é $y = 5x - 4$.

b) $y = \ell n\, x$ no ponto $x_0 = 2$

$f(x) = \ell n\, x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2}$

Assim, no ponto $x_0 = 2$, temos:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - \ell n\, 2 = \dfrac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + (\ell n\, 2 - 1)$

Logo, a equação da reta tangente à curva $y = \ell n\, x$ no ponto $x_0 = 2$ é $y = \dfrac{1}{2}x + (\ell n\, 2 - 1)$.

**10.** Qual é a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$?

**Resolução:**

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

## 5 Propriedades operatórias das derivadas

Vejamos, agora, algumas propriedades operatórias das derivadas, que admitiremos verdadeiras sem demonstração.

### Derivada de uma soma (ou diferença) de funções

A derivada da soma (ou diferença) de duas funções é igual à soma (ou diferença) das derivadas dessas funções. Ou seja, se **f** e **g** são funções deriváveis no ponto **x**, então f + g (ou f − g) também é derivável nesse ponto e:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

### Exercícios resolvidos

**11.** Determine $f'(x)$, sabendo que:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \ell n\, x - \cos x$

c) $f(x) = 3x^5$

d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

e) $f(x) = ax^2 + bx + c$

f) $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \ell n\, x + 2 \cdot \cos x$

**Resolução:**

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) = (x^2 + x + 1)' = (x^2)' + x' + 1' =$

$= 2x + 1 + 0 = 2x + 1$

Logo, $f'(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \ell n\, x - \cos x$

$f'(x) = (\ell n\, x - \cos x)' = (\ell n\, x)' - (\cos x)' =$

$= \dfrac{1}{x} - (-\text{sen}\, x) = \dfrac{1}{x} + \text{sen}\, x$

Portanto, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \text{sen}\, x$.

c) $f(x) = 3x^5$

Neste caso, $k = 3$ e $g(x) = x^5$. Então, $f(x) = 3 \cdot g(x)$.

Logo:

$f'(x) = 3 \cdot g'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$

Ou, ainda:

$(3x^5)' = 3(x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$

Logo, $f'(x) = 15x^4$.

d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = (3x^2 + 2x + 1)' = (3x^2)' + (2x)' + 1' =$

$= 3(x^2)' + 2x' + 1' = 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 + 0 = 6x + 2$

Logo, $f'(x) = 6x + 2$.

e) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c' =$

$= a(x^2)' + bx' + c' = a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b$

Portanto, $f'(x) = 2ax + b$.

**Observação**: O coeficiente angular da reta tangente à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ no ponto $\mathbf{x_0}$ é dado por $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

f) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \ell n\, x + 2 \cdot \cos x$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot \ell n\, x + 2 \cdot \cos x\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot \ell n\, x\right)' + (2 \cdot \cos x)' =$$

$$= \frac{1}{3}\,(\ell n\, x)' + 2(\cos x)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 2(-\text{sen}\, x) =$$

$$= \frac{1}{3x} - 2 \cdot \text{sen}\, x$$

Logo, $f'(x) = \frac{1}{3x} - 2 \cdot \text{sen}\, x$.

**12.** Determine o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^3 + x^2 + x + 1$ no ponto $x_0 = 1$.

**Resolução:**

O coeficiente angular é dado por $f'(x_0)$. Assim:

$f'(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)' = (x^3)' + (x^2)' + (x)' + (1)' =$

$= 3x^2 + 2x + 1 + 0 = 3x^2 + 2x + 1$

Logo:

$f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$

Portanto, o coeficiente angular procurado é igual a 6.

## Derivada de um produto de funções

A derivada do produto de duas funções é igual à derivada da primeira função vezes a segunda mais a primeira função vezes a derivada da segunda. Ou seja, se **f** e **g** são funções deriváveis no ponto **x**, então **fg** também é derivável nesse ponto e:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**Exemplo:**

Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^3$, temos:

- $(fg)(x) = 2x^4 + x^3 \Rightarrow (fg)'(x) = 8x^3 + 3x^2$ (I)
- $f'(x) = 2$ e $g'(x) = 3x^2$
- $f'(x)g(x) = 2x^3$ e $f(x)g'(x) = (2x + 1)3x^2 = 6x^3 + 3x^2$
- $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x^3 + 6x^3 + 3x^2 = 8x^3 + 3x^2$ (II)

Comparando (I) e (II), verificamos que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

### Exercício resolvido

**13.** Determine $f'(x)$, sabendo que:

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

b) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(\ell n\, x)$

**Resolução:**

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

$f'(x) = (x^2 \cdot \cos x)' = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' =$

$= 2x \cdot \cos x + x^2(-\text{sen}\, x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \text{sen}\, x$

Logo, $f'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \text{sen}\, x$.

b) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(\ell n\, x)$

$f'(x) = (x^2 + 3x + 1)'\ell n\, x + (x^2 + 3x + 1)(\ell n\, x)' =$

$$= (2x + 3)\ell n\, x + (x^2 + 3x + 1)\frac{1}{x} =$$

$$= 2x \cdot \ell n\, x + 3 \cdot \ell n\, x + x + 3 + \frac{1}{x}$$

Logo, $f'(x) = 2x \cdot \ell n\, x + 3 \cdot \ell n\, x + x + 3 + \frac{1}{x}$.

## Derivada de um quociente de funções

A derivada do quociente de duas funções é igual à derivada do numerador vezes o denominador menos o numerador vezes a derivada do denominador, e tudo isso sobre o denominador elevado ao quadrado. Ou seja, se **f** e **g** são funções deriváveis no ponto **x**, com $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é derivável nesse ponto e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Exemplo:**

Se $f(x) = 3x^2 - x - 10$ e $g(x) = x - 2$, para $x \neq 2$, temos:

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{3x^2 - x - 10}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(3x+5)}{x-2} = 3x + 5 \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = 3$ (I)
- $f'(x) = 6x - 1$ e $g'(x) = 1$
- $f'(x)g(x) = (6x - 1)(x - 2) = 6x^2 - 13x + 2$ e $f(x)g'(x) = (3x^2 - x - 10)1 = 3x^2 - x - 10$
- $[g(x)]^2 = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Logo:

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{(6x^2 - 13x + 2) - (3x^2 - x - 10)}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3x^2 - 12x + 12}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 4x + 4} = 3 \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), verificamos que $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

## Exercício resolvido

**14.** Determine $f'(x)$, sabendo que:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x}$

c) $f(x) = \text{tg}\, x$

d) $f(x) = \text{cotg}\, x$

**Resolução:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x+1) - x^2(1+0)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Logo, $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b) $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(\ell n\, x)'x - \ell n\, x \cdot (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ell n\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ell n\, x}{x^2}$$

Logo, $f'(x) = \dfrac{1 - \ell n\, x}{x^2}$.

c) $f(x) = \text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\text{sen}\, x)' \cos x - \text{sen}\, x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot (-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Portanto, se $f(x) = \text{tg}\, x$, então $f'(x) = \sec^2 x$.

d) $f(x) = \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'\, \text{sen}\, x - \cos x \cdot (\text{sen}\, x)'}{\text{sen}^2\, x} =$$

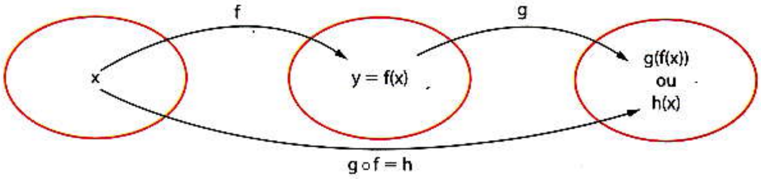
$$= \frac{(-\text{sen}\, x)\text{sen}\, x - \cos x \cdot \cos x}{\text{sen}^2\, x} =$$

$$= \frac{-\text{sen}^2\, x - \cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} = -\frac{\text{sen}^2\, x + \cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} =$$

$$= -\frac{1}{\text{sen}^2\, x} = -\text{cossec}^2\, x$$

Logo, se $f(x) = \text{cotg}\, x$, então $f'(x) = -\text{cossec}^2\, x$.

## Derivada da função composta



Se **f** é derivável no ponto **x** e **g** derivável em f(x), então a função composta g ∘ f é derivável no ponto **x** e:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

**Exemplo:**

Dadas as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = y^2$, vamos calcular $(g \circ f)'(x)$, depois $g'(f(x))f'(x)$ e confirmar que são iguais.

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow (g \circ f)'(x) = 4x^3 - 4x$

  $f'(x) = 2x$

  $g'(y) = 2y$

  $g'(f(x)) = g'(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$

- $g'(f(x))f'(x) = (2x^2 - 2)2x = 4x^3 - 4x$

Portanto, temos $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

**Para refletir**

Verifique essa propriedade para $f(x) = x^3$ e $g(y) = y^2$.

**Exercício resolvido**

**15.** Determine h′(x), sabendo que:

a) $h(x) = \text{sen}\,(2x + 1)$ b) $h(x) = \text{sen}\,(\ell n\, x)$

**Resolução:**

a) $h(x) = \text{sen}\,(2x + 1)$

Neste caso, $y = f(x) = 2x + 1$ e $g(y) = \text{sen}\, y$ e $h(x) = (g \circ f)\,(x)$. Assim:

$f'(x) = (2x + 1)' = 2$

$g'(y) = \cos y = \cos\,(2x + 1)$

Portanto:

$h'(x) = g'(y)f'(x) = \cos\,(2x + 1) \cdot 2 =$
$= 2 \cdot \cos\,(2x + 1)$

b) $h(x) = \text{sen}\,(\ell n\, x)$

Neste caso, $y = f(x) = \ell n\, x$ e $g(y) = \text{sen}\, y$.

Assim:

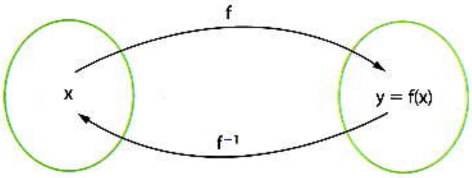
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$g'(y) = \cos y = \cos\,(\ell n\, x)$

Portanto:

$$h'(x) = g'(y)f'(x) = \cos\,(\ell n\, x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos\,(\ell n\, x)$$

## Derivada da função inversa



Se **f** é uma função que admite inversa e é derivável no ponto **x**, com $f(x) \neq 0$, então:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ou seja, se a função é representada por $y = y(x)$, a sua inversa será dada por $x = x(y)$. E, assim:

$$\text{se } x = x(y), \text{ então } x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

**Exemplo:**

A função $f(x) = 3x - 6$ é bijetiva. Logo, existe $\mathbf{f^{-1}}$, inversa de **f**. Podemos determinar $f^{-1}(x)$ fazendo:

$$x = 3y - 6 \Rightarrow 3y = x + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2$$

Temos, então, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

Agora, vamos calcular e comparar $f'(x)$ e $(f^{-1})'(x)$:

- $f(x) = 3x - 6 \Rightarrow f'(x) = 3$
- $(f^{-1})(x) = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}$

Então, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

## Exercícios resolvidos

**16.** Se $f(x) = 2x + 1$, determine $(f^{-1})'(y)$.

**Resolução:**

$y = f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y'(x) = f'(x) = (2x + 1)' = 2$

Portanto:

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2}$

De outra maneira, temos:

$y = 2x + 1 \Rightarrow y'(x) = 2$

A inversa da função $y = 2x + 1$ é dada por:

$x = \dfrac{y - 1}{2}$

Assim, vem:

$x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)} = \dfrac{1}{2}$

Observe que, se derivarmos a função $x = \dfrac{y - 1}{2}$ em relação a **y**, obteremos $x'(y) = \dfrac{1}{2}$.

**17.** Se $y = x^2$, determine a derivada da sua inversa.

**Resolução:**

$y = x^2 \Rightarrow y'(x) = 2x$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

Logo, a derivada da inversa de $y = x^2$ é $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, ou seja,

$x'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

**Para refletir**

A função f tal que $y = x^2$ admite inversa quando definida de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$.

## 6 Derivadas de outras funções

### Função logarítmica: $f(x) = \log_a x$

Recordamos que, se $f(x) = \ell n\, x$ (base **e**), então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Agora procuramos $f'(x)$ quando $f(x) = \log_a x$. Fazendo a mudança de base, temos:

$$\log_e x = \frac{\log_a x}{\log_a e} \Rightarrow \log_a x = \log_a e \cdot \log_e x$$

Então:

$$f(x) = \log_a e \cdot \log_e x$$

Usando a derivada do produto, temos:

$$f'(x) = (\log_a e)\frac{1}{x}$$

Ou seja:

$$\text{se } f(x) = \log_a x, \text{ então } f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

## Função exponencial: $f(x) = a^x$

Sabemos que:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow x = \log_a f(x)$$

Vamos derivar ambos os membros da igualdade $x = \log_a f(x)$, observando que o segundo membro é uma função composta:

$$1 = \frac{1}{f(x)} \cdot \log_a e \cdot f'(x)$$

ou seja:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\log_a e}$$

Como $f(x) = a^x$ e $\frac{1}{\log_a e} = \log_e a$, temos:

$$f'(x) = a^x \cdot \log_e a = a^x \cdot \ell n\, a$$

Assim:

$$\text{se } f(x) = a^x, \text{ então } f'(x) = a^x \cdot \log_e a = a^x \cdot \ell n\, a$$

**Observação**: Se considerarmos o caso particular $f(x) = e^x$, teremos:

$$f'(x) = e^x \cdot \ell n\, e = e^x \cdot 1 = e^x$$

Ou seja:

$$f'(x) = e^x$$

Assim:

$$\text{se } f(x) = e^x, \text{ então } f'(x) = e^x$$

### Exercício resolvido

**18.** Determine $h'(x)$, sabendo que:

a) $h(x) = \log_a (x^2 + 1)$ b) $h(x) = e^{x^2}$

**Resolução:**

a) $h(x) = \log_a (x^2 + 1)$

Trata-se de uma função composta. Assim:

$f(x) = x^2 + 1$

$g(y) = \log_a y$

$f'(x) = 2x$

$g'(y) = \frac{1}{y} \cdot \log_a e = \frac{1}{f(x)} \cdot \log_a e$

Então, vem:

$$h'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \log_a e \cdot f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \log_a e \cdot 2x =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \log_a e$$

Logo, $h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \log_a e$.

b) $h(x) = e^{x^2}$

Trata-se também de uma função composta. Assim:

$y = f(x) = x^2$

$g(y) = e^y$

$f'(x) = 2x$

$g'(y) = e^y$

Então, vem:

$h'(x) = g'(y)f'(x) = e^y \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

Logo, $h'(x) = 2xe^{x^2}$.

## Função potência com expoente real

Já estudamos a função potência com expoente natural e vimos que, se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$. Vamos generalizar esse resultado para:

$$h(x) = x^\alpha \ (x > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R})$$

Sabemos que:

$$e^{\ell n\, x} = x \text{ (lembremos que } a^{\log_a b} = b\text{)}$$

Então:

$$h(x) = x^{\alpha} = (e^{\ell n\, x})^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ell n\, x}$$

Temos aí uma função composta. Considerando $y = f(x) = \alpha \cdot \ell n\, x$ e $g(y) = e^y$, vem:

$$f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \quad g'(y) = e^y$$

Portanto:

$$h'(x) = g'(y)f'(x) = e^y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = e^{\alpha \cdot \ell n\, x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha} \cdot x^{-1} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Logo, $h'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim:

se $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, então $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$)

## Exercício resolvido

**19.** Determine a derivada da função:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $h(x) = \sqrt{\cos x}$

**Resolução:**

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Então:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Logo, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Observe que no ponto $x = 0$ *não existe* a derivada.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Então:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Logo, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Observe que no ponto $x = 0$ *não existe* a derivada.

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

Então:

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Logo, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

Observe que *não existe* a derivada no ponto $x = 0$.

d) $h(x) = \sqrt{\cos x}$

Trata-se de uma função composta. Assim:

$y = f(x) = \cos x$

$g(y) = \sqrt{y}$

Então:

$f'(x) = -\text{sen}\, x$

$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Portanto:

$$h'(x) = g'(y)f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(-\text{sen}\, x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos y}}(-\text{sen}\, x) = -\frac{\text{sen}\, x}{2\sqrt{\cos x}}$$

Logo, $h'(x) = -\frac{\text{sen}\, x}{2\sqrt{\cos x}}$.

Vamos ver agora em dois quadros-resumo as derivadas e suas propriedades:

**TABELA DE DERIVADAS**

| Função | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ |
| $f(x) = ax^2 + bx + c$<br>$(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ | $f'(x) = 2ax + b$ |
| $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = \text{sen}\, x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\text{sen}\, x$ |

**TABELA DE DERIVADAS** (continuação)

| Função | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = \ell n\, x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |
| $f(x) = \log_a x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ell n\, a}$ |
| $f(x) = a^x$ | $f'(x) = a^x \cdot \ell n\, a$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = \text{tg}\, x$ | $f'(x) = \sec^2 x$ |
| $f(x) = \text{cotg}\, x$ | $f'(x) = -\text{cossec}^2\, x$ |
| $f(x) = \sec x$ | $f'(x) = \sec x \cdot \text{tg}\, x$ |
| $f(x) = \text{cossec}\, x$ | $f'(x) = -\text{cossec}\, x \cdot \text{cotg}\, x$ |

**PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DAS DERIVADAS**

| Derivada indicada | Derivada calculada |
|---|---|
| 1ª) $(f + g)'(x)$<br>$(f - g)'(x)$ | $f'(x) + g'(x)$<br>$f'(x) - g'(x)$ |
| 2ª) $(kf)'(x)$ | $k \cdot f'(x)$ |
| 3ª) $(fg)'(x)$ | $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| 4ª) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)$ | $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)^2]}$ |
| 5ª) $(g \text{ o } f)'(x)$ | $g'(y)f'(x)$ |
| 6ª) $(f^{-1})'(y)$ ou $x = x(y)$ | $\dfrac{1}{f'(x)}$ ou $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)}$ |

## Exercícios propostos

**17.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 100$  d) $f(x) = -x^4$

b) $f(x) = \sqrt{x} + x^2$  e) $f(x) = x^2 + x - 4$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{5}} + x$  f) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^3$

**18.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^4$  c) $f(x) = -10x^3 + 2x^2$

b) $f(x) = \sqrt{2}x^3 - 2x$  d) $f(x) = x^{\sqrt{3}} - 1$

**19.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x + \ell n\, x + k$  c) $f(x) = \text{sen}\, x + \sqrt{x}$

b) $f(x) = \cos x + a^x$  d) $f(x) = \log_2 x - \text{tg}\, x$

**20.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 \cdot \ell n\, x$

b) $f(x) = (x^2 + x + 1)(\cos x)$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen}\, x$

d) $f(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b)$

**21.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 \cdot \ell n\, x + 5 \cdot \cos x$

b) $f(x) = x^2 \cdot \cos x - k \cdot \text{tg}\, x$

**22.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen}\, x}$  c) $f(x) = \text{cotg}\, x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$  d) $f(x) = \dfrac{x + 2}{2x}$

**23.** Determine as derivadas das seguintes funções compostas:

a) $h(x) = \text{sen}\, x^3$  d) $h(x) = \ell n\, (\sqrt{x})$

b) $h(x) = \log_{10} (x^2 + 1)$  e) $h(x) = e^{\cos x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

**24.** Determine as derivadas das funções inversas das seguintes funções:

a) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$  c) $y = f(x) = x^3 + 1$

b) $y = f(x) = -x^2 + 2$  d) $y = f(x) = a^x$

**25.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$

# 7 Estudo do comportamento de funções

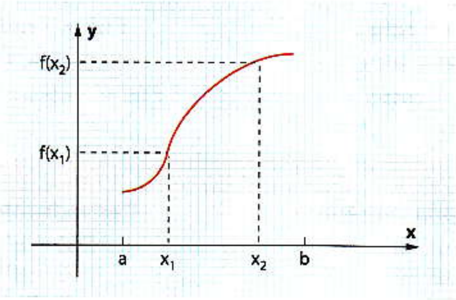
Por meio das derivadas podemos estudar o comportamento de uma função: se é crescente ou decrescente e quais seus valores máximos ou mínimos, quando existirem.

## Funções crescentes ou decrescentes

Recordemos que:

- **f** é crescente em um conjunto $A \subset D(f)$ se, para quaisquer $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, temos:

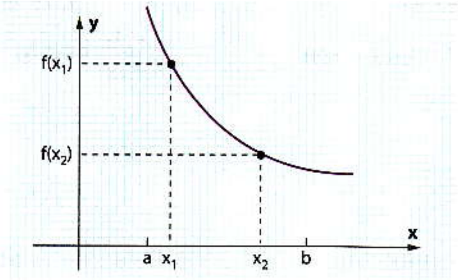
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



f(x) é crescente em [a, b]

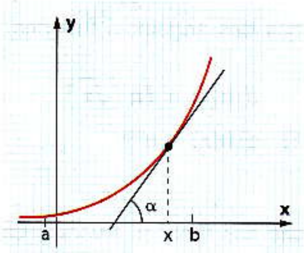
- **f** é decrescente em um conjunto $A \subset D(f)$ se, para quaisquer $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, temos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



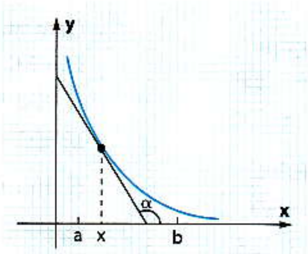
f(x) é decrescente em [a, b]

Observemos os seguintes gráficos:



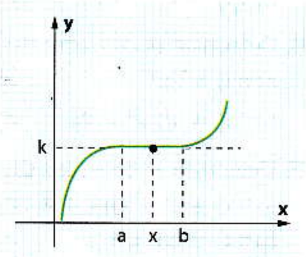
$f'(x) = \text{tg}\,\alpha > 0 \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

**f** é crescente em [a, b]



$f'(x) = \text{tg}\,\alpha < 0 \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

**f** é decrescente em [a, b]



$f'(x) = \text{tg}\,\alpha = 0$

pois em [a, b] **f** é constante

De modo geral, vale a seguinte propriedade:

Dada uma função **f** contínua no intervalo [a, b] e derivável no intervalo (a, b), temos:

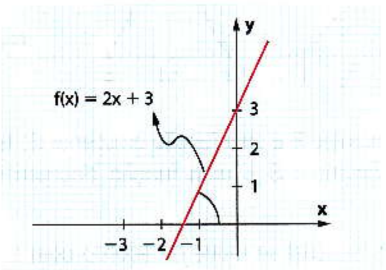
1º) Se $f'(x) > 0$ em (a, b), então **f** é crescente em [a, b].
2º) Se $f'(x) < 0$ em (a, b), então **f** é decrescente em [a, b].
3º) Se $f'(x) = 0$ em (a, b), então **f** é constante em [a, b].

## Exercícios resolvidos

**20.** Dada a função afim f(x) = 2x + 3, verifique em que conjunto ela é crescente.

**Resolução:**

$f'(x) = 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$

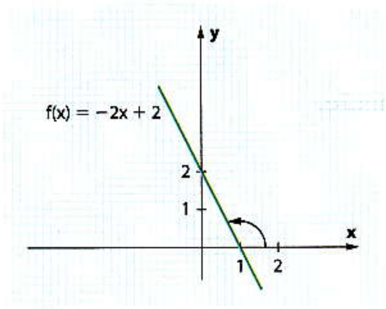


Logo, f(x) = 2x + 3 é crescente em IR.

**21.** Em que conjunto f(x) = −2x + 2 é decrescente?

**Resolução:**

$f'(x) = -2 \Rightarrow f'(x) < 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$



Logo, f(x) = −2x + 2 é decrescente em IR.

**Para refletir**

Já sabíamos verificar quando a função do 1º grau e a quadrática eram crescentes ou decrescentes pelos seus coeficientes. Agora estamos verificando por meio de suas derivadas.
Compare as duas maneiras.

**22.** Em qual conjunto a função quadrática definida por f(x) = x² − x − 6 é crescente ou decrescente?

**Resolução:**

$f(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

Sinal de f'(x):

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

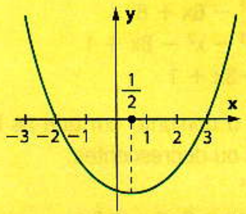
Logo, **f** é crescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Logo, **f** é decrescente no intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

**Para refletir**

Confirme analisando o gráfico de f:



**23.** Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$:

a) determine o conjunto em que **f** é crescente ou decrescente;

b) ache os pontos nos quais a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo **x**;

c) esboce o gráfico de f(x).

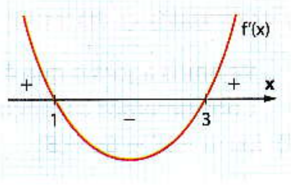
**Resolução:**

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Sinal de f'(x):

As raízes de $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ são 1 e 3.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 > 0$,
que ocorre quando
$x' < 1$ e $x'' > 3$



Logo, **f** é crescente em $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 < 0$, que ocorre quando $1 < x < 3$

Logo, **f** é decrescente em [1, 3].

b) Os pontos nos quais a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo **x** são tais que f'(x) = 0. Isto é:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x' = 1$ e $x'' = 3$

Por outro lado:

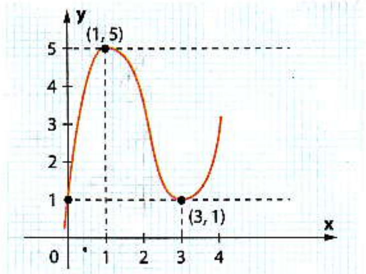
$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

Portanto, a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo **x** nos pontos de coordenadas (1, 5) e (3, 1).

c) Esboço do gráfico

| | $-\infty$ | 1 | | 3 | $+\infty$ **x** |
|---|---|---|---|---|---|
| **f'(x)** | positiva | zero | negativa | zero | positiva |
| **f(x)** | crescente ↗ | | decrescente ↘ | | crescente ↗ |
| | | 5 | | 1 | |



## Exercícios propostos

**26.** Em quais intervalos as funções abaixo são crescentes ou decrescentes?

a) $f(x) = 3x + 6$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

c) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$

d) $f(x) = -3x + 1$

**27.** Determine o conjunto em que as funções abaixo são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \text{sen } x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

c) $f(x) = \ell n\, x$

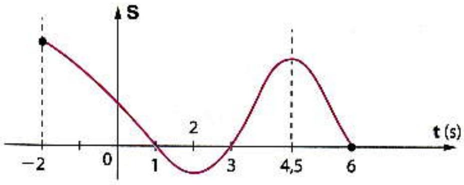
**28.** Considere a função $f(x) = (x - 3)^3 - 3x$:

a) determine o conjunto no qual f(x) é crescente ou decrescente;

b) ache os pontos nos quais a tangente ao gráfico de f(x) é paralela ao eixo **x**;

c) esboce o gráfico de f(x).

**29.** Um ponto material se desloca segundo o gráfico abaixo:



a) Em que instantes **S** é uma função crescente do tempo?

b) Em que instantes **S** é uma função decrescente do tempo?

**30.** Se um ponto material se move de acordo com a função horária $S(t) = 2t^3 - 24t^2 + 72t + 3$ (**S** dado em metros e **t** dado em segundos), determine em que instantes o ponto material tem velocidade:

a) crescente;

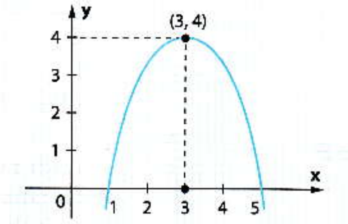
b) decrescente.

## Máximos e mínimos

Vejamos agora o que é máximo e mínimo local (ou relativo) de uma função.

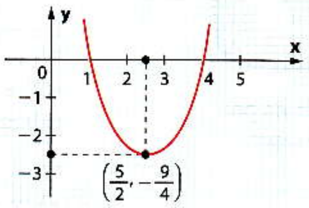
Consideremos as funções:

1ª) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



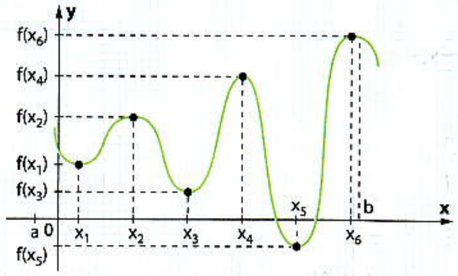
Dizemos que x = 3 é um *ponto de máximo local de* $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ e que f(3) = 4 é um *máximo local de f(x)*.

2ª) $f(x) = x^2 - 5x + 4$



Dizemos que $x = \frac{5}{2}$ é um *ponto de mínimo local de* $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e que $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ é um *mínimo local de f(x)*.

3ª) f(x) definida em [a, b]



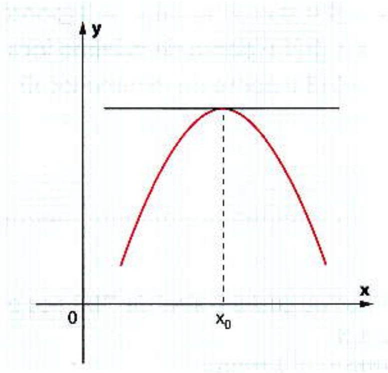
Pontos de máximo locais: $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_4}$ e $\mathbf{x_6}$.
Máximos locais de f(x): $f(x_2)$, $f(x_4)$ e $f(x_6)$.
Pontos de mínimo locais: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_5}$.
Mínimos locais de f(x): $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(x_5)$.
Vizinhança de $\mathbf{x_0}$: intervalo aberto que contém $\mathbf{x_0}$.

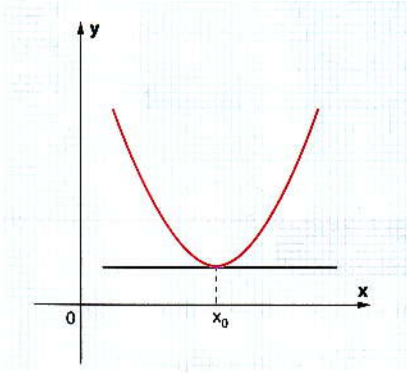
De modo geral, dizemos que um ponto $\mathbf{x_0}$ do domínio de uma função **f** é um *ponto de máximo local* de **f** se existir uma vizinhança de $\mathbf{x_0}$ de modo que, para todo **x** pertencente a essa vizinhança, tenhamos $f(x) \leqslant f(x_0)$. Nesse caso, $f(x_0)$ é denominado *máximo local* de **f**.

Analogamente, dizemos que um ponto $\mathbf{x_0}$ do domínio de uma função **f** é um *ponto de mínimo local* de **f** se existir uma vizinhança de $\mathbf{x_0}$ de modo que, para todo **x** pertencente a essa vizinhança, tenhamos $f(x) \geqslant f(x_0)$. Nesse caso, $f(x_0)$ é denominado *mínimo local* de **f**.

Chamamos também de *máximo absoluto* de f(x) ou somente *máximo* de f(x) o maior valor que a função atinge no seu domínio, e *mínimo absoluto* de f(x) ou somente *mínimo* de f(x) o menor valor atingido por f(x). Na função **f** definida em [a, b], do gráfico anterior, $f(x_6)$ é o máximo absoluto de f(x) no intervalo [a, b] e $f(x_5)$ é o mínimo absoluto de f(x) no intervalo [a, b].

Observemos estes gráficos:





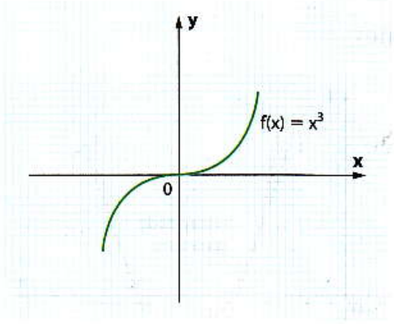
Nesses dois casos a reta tangente no ponto $\mathbf{x_0}$ é horizontal, isto é, seu coeficiente angular é igual a 0, ou seja, $f'(x_0) = 0$. Observemos também que $\mathbf{x_0}$ é ponto de máximo local num exemplo e ponto de mínimo local no outro. Podemos enunciar então uma propriedade.

> Se uma função **f** definida numa vizinhança do ponto $\mathbf{x_0}$ for derivável em $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0}$ for ponto de máximo local ou de mínimo local de **f**, então $f'(x_0) = 0$.

Observemos que a recíproca não é verdadeira, ou seja, $f'(x_0) = 0$ não acarreta que $\mathbf{x_0}$ seja ponto de máximo local ou de mínimo local.

**Exemplo:**

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$$



Mas $x_0 = 0$ não é ponto de máximo local nem de mínimo local.

## Determinação de máximos e mínimos locais

Um ponto $\mathbf{x_0}$ tal que $f'(x_0) = 0$ é chamado de *ponto crítico* de **f**.

Vejamos agora uma propriedade que permitirá indicar se um ponto é de máximo local ou de mínimo local.

Consideremos uma função **f** definida numa vizinhança de $\mathbf{x_0}$, admitindo até a derivada de segunda ordem ($f''(x)$) e tal que $f'(x_0) = 0$. Assim:

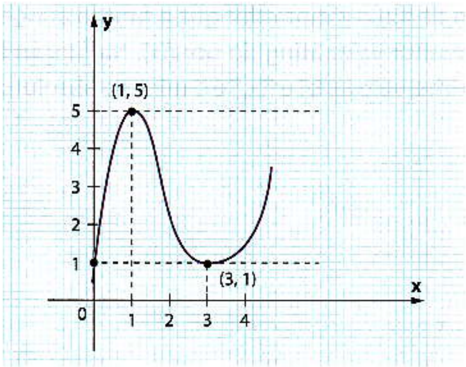
- se $f''(x_0) > 0$, então $\mathbf{x_0}$ é ponto de mínimo local de **f**;
- se $f''(x_0) < 0$, então $\mathbf{x_0}$ é ponto de máximo local de **f**.

**Para refletir**

$f''(x)$ corresponde a $[f'(x)]'$.

Vamos analisar essa propriedade, considerando como exemplo a função **f** do *exercício resolvido 23*:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$



Assim:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x' = 1$ e $x'' = 3$ (pontos críticos de **f**)

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$ (1 é ponto de máximo local)

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$ (3 é ponto de mínimo local)

### Exercício resolvido

**24.** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x$ e determine:

a) os pontos críticos de **f**;

b) os pontos de máximo local e mínimo local;

c) os máximos locais e os mínimos locais.

**Resolução:**

a) $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 15x + 18$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 18 = 0 \Leftrightarrow x' = 2$ e $x'' = 3$

Assim, $x' = 2$ e $x'' = 3$ são os pontos críticos de **f**.

b) $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18 \Rightarrow f''(x) = 6x - 15$

Vejamos qual é o sinal de $f''(x)$ nos pontos críticos 2 e 3.

Para $x_0 = 2$ temos:

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 15 = -3 < 0$

Como $f''(2) < 0$, $x_0 = 2$ é ponto de máximo local.

Para $x_0 = 3$ temos:

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 15 = 3 > 0$

Como $f''(3) > 0$, $x_0 = 3$ é ponto de mínimo local.

c) Máximo local:

$f(2) = 2^3 - \frac{15}{2} \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 = 14$

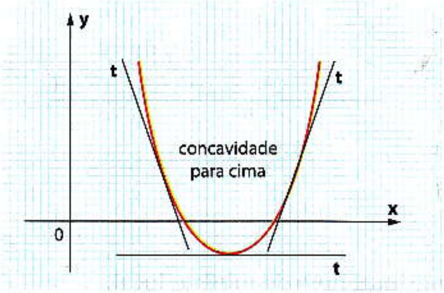
Mínimo local:

$f(3) = 3^3 - \frac{15}{2} \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

## Pontos de inflexão

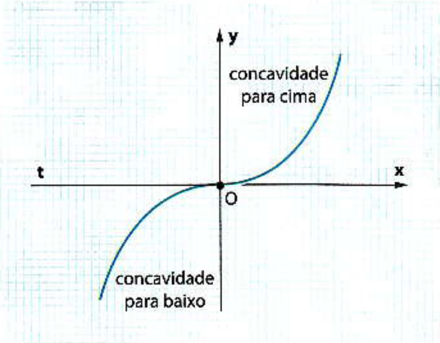
Consideremos os gráficos das funções:

1º) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)

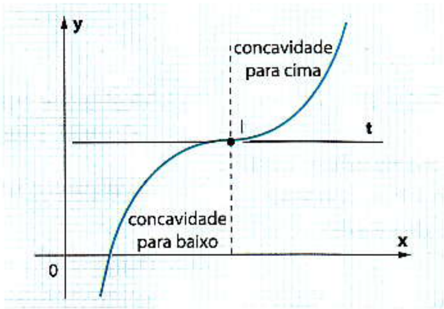


2º) $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a < 0)$

3º) $f(x) = x^3$



4º) $f(x) = (x - a)^3 + b\ (a > 0 \text{ e } b > 0)$



Observemos que, no caso de $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, o gráfico está totalmente acima da reta tangente. No caso $a < 0$, o gráfico está totalmente abaixo da reta tangente. Nos outros dois exemplos, parte da curva está acima da reta tangente e parte da curva está abaixo da reta tangente. O ponto em que ocorre essa mudança (**O** no terceiro exemplo e **I** no quarto exemplo) é chamado de *ponto de inflexão*. Em particular, quando a reta tangente é paralela ao eixo **x** (ou coincide com ele), o ponto de inflexão é dito *ponto de inflexão horizontal*. É o caso do ponto **O**.

Para identificar pontos de inflexão verificamos que, sendo $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então:

- se $f'(x_0) = 0$, $\mathbf{x_0}$ é a abscissa do ponto de inflexão horizontal;
- se $f'(x_0) \neq 0$, $\mathbf{x_0}$ é a abscissa do ponto de inflexão com tangente oblíqua em relação ao eixo **x**.

## Exercícios resolvidos

**25.** Determine as coordenadas do ponto de inflexão da função:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

**Resolução:**

a) Para $f(x) = x^3$, temos:

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

Então:

$f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

$f'''(0) = 6 \neq 0$

$f'(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ é a abscissa de um ponto de inflexão horizontal.

$f(x) = x^3 \Rightarrow f(0) = 0$

Logo, as coordenadas do ponto de inflexão horizontal são (0, 0).

Vamos mostrar que $A_2 \geqslant A_1$, partindo de uma afirmação verdadeira e usando um artifício:

$(x - y)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$

Somando 4xy em ambos os membros, temos:

$x^2 + 2xy + y^2 \geqslant 4xy \Rightarrow (x + y)^2 \geqslant 4xy$

Dividindo ambos os membros por 4, temos:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy$$

Logo, $A_2 \geqslant A_1$.

**Segunda resolução** (usando derivadas):

Sendo **R** um retângulo de dimensões **x** e **y**, seu perímetro é $P = 2x + 2y$ e a área da sua região é $A = xy$. Assim:

$$P = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{P - 2x}{2}$$

$$A = xy \Rightarrow A(x) = x\left(\frac{P - 2x}{2}\right) = \frac{Px - 2x^2}{2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + Px}{2} = -x^2 + \frac{P}{2}x$$

A derivada da função A(x), em **x**, é dada por:

$$A'(x) = -2x + \frac{P}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -2x + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}$$

Calculando a derivada de segunda ordem, temos:

$A''(x) = -2$

Assim, $A''(x) < 0$ para todo **x**. Logo, $x = x_0 = \frac{P}{4}$ é ponto de máximo de A(x). Ou seja, a área será máxima quando tivermos:

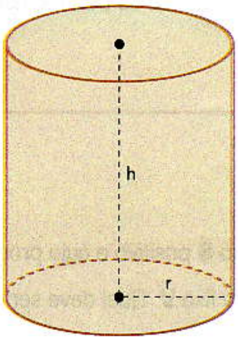
$$\frac{P}{4} = \frac{2x + 2y}{4} = \frac{x + y}{2}$$

que é o lado do quadrado de mesmo perímetro que o retângulo **R**, pois:

$$4\left(\frac{x + y}{2}\right) = 2x + 2y$$

**28.** Quais devem ser as dimensões de uma lata cilíndrica de volume fixo **V**, de forma que a quantidade de material a ser utilizado para a sua fabricação seja a menor possível?

**Resolução:**



Seja **h** a altura da lata cilíndrica e **r** o raio da sua base. Queremos minimizar a sua área total:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral} =$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ①

Como o volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, vem:

$h = \frac{V}{\pi r^2}$ ②

Substituindo ② em ① temos:

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada dessa função em relação a **r** é:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Calculando a derivada de segunda ordem, obtemos:

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

No ponto $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, temos:

$$A''\left[\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 4\pi + \frac{8\pi V}{V} = 12\pi > 0$$

Logo, $A''\left[\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right] > 0$, ou seja, $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ é um ponto de mínimo.

Como $h = \frac{V}{\pi r^2}$, temos:

$$h = \frac{V}{\pi\left[\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{V\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\cancel{V}r}{\cancel{\pi}\left(\frac{\cancel{V}}{2\pi}\right)} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r$$

Logo, h = 2r.

Portanto, as dimensões da lata cilíndrica são

$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ e $h = \frac{V}{\pi r^2}$, o que acarreta h = 2r.

Assim, a lata cilíndrica de volume fixo e área máxima tem altura igual ao dobro do raio.

**29.** O custo total de fabricação de **x** unidades de um produto é dado por $c(x) = (3x^2 + 5x + 192)$ reais. Quantas unidades deverão ser fabricadas para que o custo médio seja o menor possível?

**Resolução:**

$$\text{custo médio} = \frac{\text{custo total}}{\text{número de unidades fabricadas}} \Rightarrow c_m(x) = \frac{3x^2 + 5x + 192}{x} = 3x + 5 + \frac{192}{x}$$

com $x > 0$, pois se trata de número de unidades fabricadas.
A derivada dessa função é:

$$c'_m(x) = 3 - \frac{192}{x^2}$$

$$c'_m(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{192}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{192}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{192}{3} = 64 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -8$$

Como $x > 0$, então $x = 8$.
Calculando a derivada de segunda ordem temos:

$$c''_m(x) = \frac{384}{x^3} \text{ (com } x > 0\text{)}$$

Portanto, $c''_m(x) > 0$ e $x = 8$ é um ponto de mínimo.
Logo, para que o custo médio seja o menor possível, deverão ser fabricadas 8 unidades. O custo médio será de R$ 53,00 e o custo total de R$ 424,00.

**30.** Determine o ponto da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximo do ponto (0, 1).

**Resolução:**
Queremos minimizar a distância **d** do ponto (x, y) da curva ao ponto (0, 1). Assim:

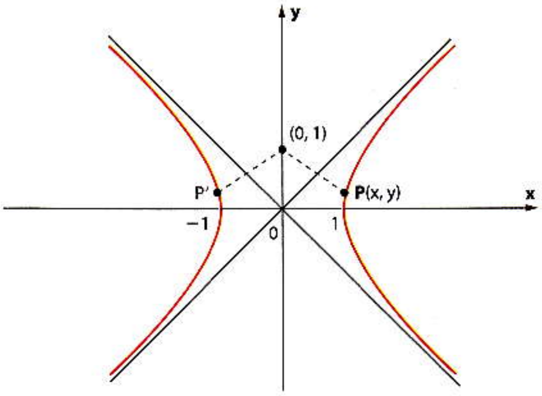
$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow d^2 = x^2 + (y-1)^2 \text{ ①}$$

Minimizar **d** ou **d²** é a mesma coisa.
De $x^2 - y^2 = 1$, obtemos:
$x^2 = 1 + y^2$ ②
Substituindo ② em ① e chamando **d²** de **D**, temos:
$D(y) = 1 + y^2 + (y - 1)^2$
A derivada dessa função é dada por:
$D'(y) = 2y + 2(y - 1) = 4y - 2$

$$D'(y) = 0 \Leftrightarrow 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Calculando a derivada de segunda ordem, vem:
$D''(y) = 4 > 0$

Logo, $D''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ e $y = \frac{1}{2}$ é um ponto de mínimo.



hipérbole $x^2 - y^2 = 1$

Substituindo $y = \frac{1}{2}$ em ②, obtemos:

$$x^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Logo, temos duas soluções: $P\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $P'\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, que são os pontos mais próximos de (0, 1) da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

## Exercícios propostos

**35.** Determine dois números **x** e **y** cuja soma seja um número fixo **S** positivo e cujo produto **P** seja o maior possível.

**36.** Pretende-se fabricar um copo de forma cilíndrica com volume fixo **V**. Qual deve ser o raio da base do copo para se gastar o mínimo possível de material?

**37.** Entre todos os retângulos de área igual a 36 cm², qual é o de menor perímetro?

**38.** Entre todos os retângulos de perímetro igual a 16 cm, qual é o que tem área máxima?

**39.** Numa indústria, o custo de montagem é diretamente proporcional ao número de máquinas utilizadas e o custo de operação é inversamente proporcional ao número de máquinas utilizadas. Quando é que o custo total é mínimo?

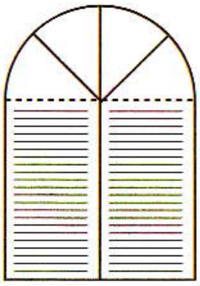
(*Sugestão*: O custo total c(x) é dado pela soma do custo de montagem ($k_1$ x) com o custo de operação $\left(\frac{k_2}{x}\right)$.)

**40.** O custo total de fabricação de **x** unidades de um produto é dado por $c(x) = 3x^2 + x + 48$. Quantas unidades deverão ser fabricadas para que o custo médio seja mínimo?

**41.** Mostre que (2, 2) é o ponto da curva $y = x^3 - 3x$ que está mais próximo do ponto (11, 1).

**42.** Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, sem tampa, sabendo que sua área total é fixada **A** e seu volume é o maior possível.

**43.** Uma janela tem a forma de um semicírculo sobre um retângulo. Determine as dimensões de modo que o perímetro seja 3,6 m e a área a maior possível.



**44.** Determine as dimensões do cilindro reto de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio **R**.

# 8 Outras aplicações da derivada

## Exercícios resolvidos

**31.** (UNA-MG) Sabe-se que metade dos produtos exportados pelo Brasil vem dos recursos naturais.
A derivada primeira da função $E(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 4$, para x = 2, equivale à porcentagem dos produtos primários (café, minério de ferro, etc.), que é de:
a) 36%. b) 38%. c) 41%. d) 49%.

**Resolução:**
$E'(x) = 12x^2 - 6x + 5 \Rightarrow E'(2) = 41$

**Resposta**: alternativa **c**.

**32.** (FÇC-SP) Um móvel efetua um movimento retilíneo uniformemente variado obedecendo à equação horária $S = 6 - 10t + 4{,}0t^2$, em que o espaço **S** é medido em metros e o instante **t** em segundos. A velocidade do móvel no instante t = 4,0 s, em m/s, vale:
a) −10 m/s. c) 10 m/s. e) 32 m/s.
b) 0 m/s. d) 22 m/s.

**Resolução:**
A velocidade é a derivada do espaço:
$v(t) = S'(t) = -10 + 8t \Rightarrow v(4) = -10 + 32 = 22$ m/s

**Resposta**: alternativa **d**.

**33.** Chama-se custo marginal de produção de um artigo o custo adicional para se produzir um artigo além da quantidade já prevista. Na prática, a função custo marginal é a derivada da função custo.

Uma fábrica de sapatos tem um custo para produzir **x** sapatos dado por $C(x) = 3\,000 + 25x$, com **C** em reais. Qual é o custo marginal que essa fábrica terá para produzir mais um sapato?

**Resolução:**
$m(x) = C'(x) = 25$ reais
O custo marginal dessa fábrica é constante e igual a R$ 25,00.

**34.** Uma fábrica de componentes eletrônicos tem um custo para produzir **x** componentes dado por

$$C(x) = \frac{x^3}{3\,000} - \frac{x^2}{2} + 260x + 200,\text{ com } \mathbf{C} \text{ em reais.}$$

Qual é o custo marginal que essa fábrica tem para produzir mais um componente quando x = 0, x = 100, x = 400 e x = 800?

**Resolução:**
O custo marginal é a derivada do custo:

$$m(x) = C'(x) = \frac{x^2}{1000} - x + 260$$

m(0) = 260 reais
m(100) = 170 reais
m(400) = 20 reais
m(800) = 100 reais

## Exercício proposto

**45.** Com os dados do exercício resolvido 34, determine:
a) o nível de produção no qual o custo marginal é mínimo;
b) o custo marginal mínimo.

# Atividades adicionais

**1.** Uma partícula se desloca de acordo com a lei $S(t) = -t^2 + t$ (**S** dado em metros e **t** em segundos). Determine:

a) a sua velocidade em função do tempo;

b) a sua velocidade no instante $t = 1$ s;

c) a aceleração da partícula em função do tempo;

d) a aceleração no instante $t = 4$ s.

**2.** Um ponto material se move de acordo com a lei $S(t) = \operatorname{sen} t + t$ (**S** dado em metros e **t** em segundos). Calcule:

a) a sua velocidade em função do tempo;

b) a sua velocidade no instante $t = \frac{\pi}{3}$ s;

c) a sua aceleração em função do tempo;

d) a sua aceleração no instante $t = \frac{\pi}{4}$ s.

**3.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 3\sqrt{x} - x^3 \cdot \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = x^3 \cdot \ell n\, x - \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen} x$

**4.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{\ell n\, x}$

b) $f(x) = \sec x$

**5.** Determine as derivadas das seguintes funções compostas:

a) $h(x) = \cos(x^2 + 1)$

b) $h(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{x})$

c) $h(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

**6.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{-2}$

b) $f(x) = -x^{-5}$

c) $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2$

**7.** Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \ell n\,(x^3 + 2x)$

b) $f(x) = \dfrac{e^{x^2 + 1}}{\cos x}$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \sqrt{x^2 + 2}$

d) $f(x) = \ell n \sqrt{\dfrac{1}{x}} + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

**8.** Em quais intervalos as funções abaixo são crescentes ou decrescentes?

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

**9.** Sabendo que um ponto material se move de acordo com a função horária $S(t) = -t^2 + 2t + 3$ (**S** dado em metros e **t** dado em segundos), determine em que intervalo de tempo sua velocidade é:

a) crescente;

b) decrescente.

**10.** Mostre que, para qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $x = -\dfrac{b}{2a}$ é um ponto de máximo local ou de mínimo local e $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é um máximo local ou mínimo local.

**11.** Mostre que o retângulo de área máxima inscrito numa circunferência de raio **r** é um quadrado.

**12.** Mostre que, entre todos os triângulos isósceles de igual perímetro, o de área máxima é o triângulo eqüilátero.

**13.** Determine o ponto da curva $y^2 = 4x$ mais próximo do ponto (2, 1).

**14.** Um pedaço de barbante de comprimento **L** é cortado em duas partes, uma delas sendo dobrada na forma de um triângulo eqüilátero e a outra na forma de uma circunferência. Como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas limitadas seja a maior possível?

**15.** Determine o número positivo cuja soma com seu inverso seja a menor possível.

**16.** Dada a função **f** definida por $f(x) = 3x^2 - 2x$, determine, usando a definição:

a) a derivada de **f** no ponto que tem abscissa 5;

b) a função derivada de **f**.

**17.** Usando as regras de derivação, determine:

a) $f'(x)$, quando $f(x) = 5x^3 + 2\sqrt{x} - 3$;

b) $f'(x)$, quando $f(x) = x \cdot \cos x$;

c) $f'(x)$, quando $f(x) = 3^x + e^x$;

d) $(f^{-1})'(x)$, quando $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2}$;

e) $(g \circ f)'(x)$, quando $f(x) = x^2$ e $g(y) = y - 1$;

f) $f''(x)$, quando $f(x) = x^5 - 4x^3 + 7$.

**18.** Um móvel se desloca de acordo com a função $S(t) = 2t^3 - t^2 + 2$ (com **S** dado em metros e **t** dado em segundos). Determine:

a) a função velocidade e a velocidade no instante $t = 3$ s.

b) a função aceleração e a aceleração no instante $t = 2$ s.

## Questões de vestibular

**1.** (UEL-PR) A derivada da função **f**, de IR em IR, definida por $f(x) = -2x^5 + 4x^3 + 3x - 6$, no ponto de abscissa $x = -1$, é igual a:
a) 25.
b) 19.
c) 9.
d) 5.
e) 3.

**2.** (PUC-SP) Uma partícula movimenta-se sobre uma reta, e a lei horária do movimento é dada por $S = 2t^2 - 5t - 2$ (SI). A aceleração escalar do movimento é:
a) 2 $m/s^2$.
b) 4 $m/s^2$.
c) $-5$ $m/s^2$.
d) $-7$ $m/s^2$.
e) zero.

**3.** (FCC-SP) Uma partícula está em movimento, obedecendo à função horária $x = 5 - 2t + t^2$, em unidades do sistema internacional de unidades. A partícula sofrerá reversão da velocidade na posição e no instante:
a) 13 m e $-2$ s.
b) 8 m e $-1$ s.
c) 5 m e 2 s.
d) 5 m e 0 s.
e) 4 m e 1 s.

**4.** (UEL-PR) A equação horária de um móvel é $y = \frac{t^3}{3} + 2t$, sendo **y** sua altura em relação ao solo, medida em metros, e **t** o número de segundos transcorridos após sua partida. Sabe-se que a velocidade do móvel no instante $t = 3$ s é dada por $y'(3)$, ou seja, é a derivada de **y** calculada em 3. Essa velocidade é igual a:
a) 6 m/s.
b) 11 m/s.
c) 15 m/s.
d) 27 m/s
e) 29 m/s.

**5.** (Mack-SP) Se $f(x) = \frac{x^2}{a}$, então $f'(a)$ vale:
a) 2.
b) 1.
c) 0.
d) a.
e) 2a.

**6.** (Mack-SP) A derivada da função **f** dada por

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2x & 3x^2 & 4 \\ 5 & 6x & 2x^2 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) $3x^2$.
b) Não existe.
c) $-4x^3 - 4$.
d) $15x^4$.
e) $6x^4$.

**7.** (UPE) Se a derivada de segunda ordem de uma função real é positiva em um intervalo aberto (a, b), a concavidade da curva que representa geometricamente a função é voltada para cima em (a, b); se for negativa, a concavidade é voltada para baixo em (a, b).
Seja $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $x \in$ IR, a derivada de segunda ordem de uma função real **f**. Então, a concavidade da curva que representa **f** é:
a) voltada para cima, em todo IR.
b) voltada para baixo, em todo IR.
c) voltada para cima, nos intervalos $-1 < x < 1$ ou $x > 2$.
d) voltada para baixo, somente no intervalo $1 < x < 2$.
e) voltada para cima, só no intervalo $x > 2$.

**8.** (Unip-SP) Seja $f: \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \rightarrow$ IR a função definida por $f(x) = x^3 - 3x$. O valor mínimo absoluto de **f** e o valor máximo absoluto de **f** são, respectivamente:
a) $-2$ e 0.
b) $-2$ e 18.
c) 0 e 21.
d) $-2$ e 2.
e) 0 e 18.

**9.** (PUC-PR) Em um painel retangular de comprimento (60 + x) cm e de largura 80 cm, deseja-se reservar no canto superior esquerdo um quadrado de lado **x**. Qual o valor de **x** para que a diferença entre a área do painel e a do quadrado seja a maior possível?
a) 30 cm
b) 70 cm
c) 50 cm
d) 60 cm
e) 40 cm

# Questões do Enem

## Exame Nacional do Ensino Médio

### 2000

O Brasil, em 1997, com cerca de $160 \cdot 10^6$ habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250 000 TEP (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias.

O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país.

O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia.

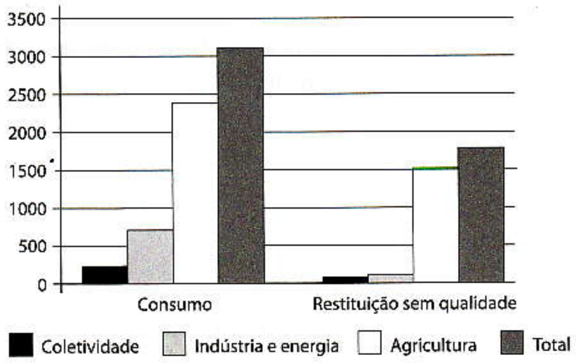
Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é **x** vezes maior do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de **x** é:

a) 2,1.
b) 3,3.
c) 6,3.
d) 10,5.
e) 12,7.

### 2001

**1.** Boa parte da água utilizada nas mais diversas atividades humanas não retorna ao ambiente com qualidade para ser novamente consumida. O gráfico mostra alguns dados sobre esse fato, em termos dos setores de consumo.

**Consumo e restituição de água no mundo**
(em bilhões de m³/ano)

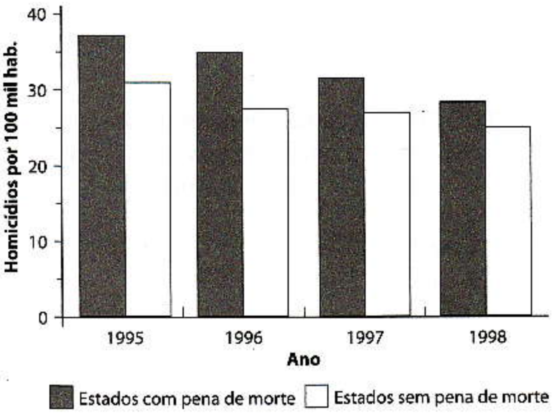


Fonte: Adaptado de MARGAT, Jean-François. A água ameaçada pelas atividades humanas. In WIKOWSKI, N. (Coord). *Ciência e tecnologia hoje.* São Paulo, Ensaio, 1994.

Com base nesses dados, é possível afirmar que:

a) mais da metade da água usada não é devolvida ao ciclo hidrológico.
b) as atividades industriais são as maiores poluidoras de água.
c) mais da metade da água restituída sem qualidade para o consumo contém algum teor de agrotóxico ou adubo.
d) cerca de um terço do total da água restituída sem qualidade é proveniente das atividades energéticas.
e) o consumo doméstico, dentre as atividades humanas, é o que mais consome e repõe água com qualidade.

**2.** O gráfico compara o número de homicídios por grupo de 100 000 habitantes entre 1995 e 1998 nos EUA, em estados com e sem pena de morte.



*Carta Capital*, 6 de dezembro de 2000.

Com base no gráfico, pode-se afirmar que:

a) a taxa de homicídios cresceu apenas nos estados sem pena de morte.
b) nos estados com pena de morte a taxa de homicídios é menor que nos estados sem pena de morte.
c) no período considerado, os estados com pena de morte apresentaram taxas maiores de homicídios.
d) entre 1996 e 1997, a taxa de homicídios permaneceu estável nos estados com pena de morte.
e) a taxa de homicídios nos estados com pena de morte caiu pela metade no período considerado.

**3.** A tabela apresenta a taxa de desemprego dos jovens entre 15 e 24 anos estratificada com base em diferentes categorias.

| Região | Homens | Mulheres |
|---|---|---|
| Norte | 15,3 | 23,8 |
| Nordeste | 10,7 | 18,8 |
| Centro-Oeste | 13,3 | 20,6 |
| Sul | 11,6 | 19,4 |
| Sudeste | 16,9 | 25,7 |
| Grau de instrução | | |
| Menos de 1 ano | 7,4 | 16,1 |
| De 1 a 3 anos | 8,9 | 16,4 |
| De 4 a 7 anos | 15,1 | 22,8 |
| De 8 a 10 anos | 17,8 | 27,8 |
| De 11 a 14 anos | 12,6 | 19,6 |
| Mais de 15 anos | 11,0 | 7,3 |

Fonte: PNAD/IBGE, 1998.

Considerando apenas os dados acima e analisando as características de candidatos a emprego, é possível concluir que teriam menor chance de consegui-lo:

a) mulheres, concluintes do ensino médio, moradoras da cidade de São Paulo.

b) mulheres, concluintes de curso superior, moradoras da cidade do Rio de Janeiro.

c) homens, com curso de pós-graduação, moradores de Manaus.

d) homens, com dois anos do ensino fundamental, moradores de Recife.

e) mulheres, com ensino médio incompleto, moradoras de Belo Horizonte.

## 2002

A tabela refere-se a um estudo realizado entre 1994 e 1999 sobre violência sexual com pessoas do sexo feminino no Brasil.

**Levantamento dos casos de violência sexual por faixa etária**

| Tipificação do agressor identificado | Crianças | | Adolescentes | | Adultos | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Quantidade | % | Quantidade | % | Quantidade | % |
| Pai biológico | 13 | 21,7 | 21 | 13,9 | 6 | 6 |
| Padrasto | 10 | 16,7 | 16 | 10,6 | 0 | 0 |
| Pai adotivo | 1 | 1,6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Tio | 7 | 11,6 | 14 | 9,4 | 1 | 1,4 |
| Avô | 6 | 10,0 | 0 | 0 | 1 | 1,4 |
| Irmão | 0 | 0 | 7 | 4,6 | 0 | 0 |
| Primo | 0 | 0 | 5 | 3,4 | 1 | 1,4 |
| Vizinho | 10 | 16,7 | 42 | 27,8 | 19 | 27,9 |
| Parceiro e ex-parceiro | – | – | 13 | 7,5 | 17 | 25,2 |
| Conhecido (trabalho) | – | – | 8 | 5,3 | 5 | 7,3 |
| Outro conhecido | 13 | 21,7 | 25 | 16,5 | 18 | 26,5 |
| **TOTAL** | **60** | **100** | **151** | **100** | **68** | **100** |

(–) Não aplicável Fonte: *Jornal da Unicamp*. n. 162. maio 2001.

A partir dos dados da tabela e para o grupo feminino estudado, são feitas as seguintes afirmações:

I. A mulher não é poupada da violência sexual doméstica em nenhuma das faixas etárias indicadas.

II. A maior parte das mulheres adultas é agredida por parentes consangüíneos.

III. As adolescentes são vítimas de quase todos os tipos de agressores.

IV. Os pais, biológicos, adotivos e padrastos, são autores de mais de $\frac{1}{3}$ dos casos de violência sexual envolvendo crianças.

É verdadeiro apenas o que se afirma em:

a) I e III.

b) I e IV.

c) II e IV.

d) I, III e IV.

e) II, III e IV.

## 2003

**1.** A eficiência de anúncios num painel eletrônico localizado em uma certa avenida movimentada foi avaliada por uma empresa. Os resultados mostraram que, em média:

- passam, por dia, 30 000 motoristas em frente ao painel eletrônico;
- 40% dos motoristas que passam observam o painel;
- um mesmo motorista passa três vezes por semana pelo local.

Segundo os dados acima, se um anúncio de um produto ficar exposto durante sete dias nesse painel, é esperado que o número mínimo de motoristas diferentes que terão observado o painel seja:

a) 15 000.

b) 28 000.

c) 42 000.

d) 71 000.

e) 84 000.

**2.** O tabagismo (vício de fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que *90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco.* Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente:

a) 740.

b) 1 100.

c) 1 310.

d) 1 620.

e) 1 750.

**3.** Para o registro de processos naturais e sociais devem ser utilizadas diferentes escalas de tempo. Por exemplo, para a datação do sistema solar é necessária uma escala de bilhões de anos, enquanto para a história do Brasil basta uma escala de centenas de anos. Assim, para os estudos relativos ao surgimento da vida no planeta e para os estudos relativos ao surgimento da escrita, seria adequado utilizar, respectivamente, escalas de:

| | Vida no planeta | Escrita |
|---|---|---|
| a) | milhares de anos | centenas de anos |
| b) | milhões de anos | centenas de anos |
| c) | milhões de anos | milhares de anos |
| d) | bilhões de anos | milhões de anos |
| e) | bilhões de anos | milhares de anos |

**4.** Documento I

O cômputo da Idade da Terra
Da criação até o Dilúvio___1616 anos
Do Dilúvio até Abraão_____292
Do Nascimento de Abraão
até o Êxodo do Egito_______503
Do Êxodo até a construção
do Templo__________481
Do Templo até o Cativeiro___414
Do Cativeiro até o Nascimento
de Jesus Cristo________614
Do Nascimento de Jesus Cristo
até hoje______________1560
Idade da Terra_______5520 anos

Documento II

> Avalia-se em cerca de quatro e meio bilhões de anos a idade da Terra, pela comparação entre a abundância relativa de diferentes isótopos de urânio com suas diferentes meias-vidas radiativas.

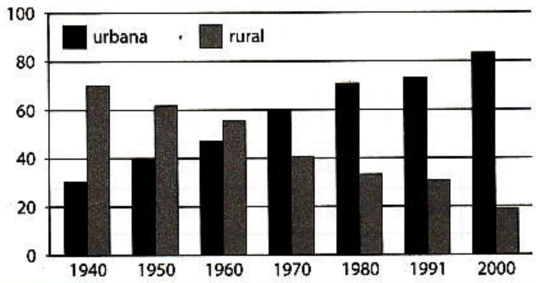
Considerando os dois documentos, podemos afirmar que a natureza do pensamento que permite a datação da Terra é de natureza:

a) científica no primeiro e mágica no segundo.
b) social no primeiro e política no segundo.
c) religiosa no primeiro e científica no segundo.
d) religiosa no primeiro e econômica no segundo.
e) matemática no primeiro e algébrica no segundo.

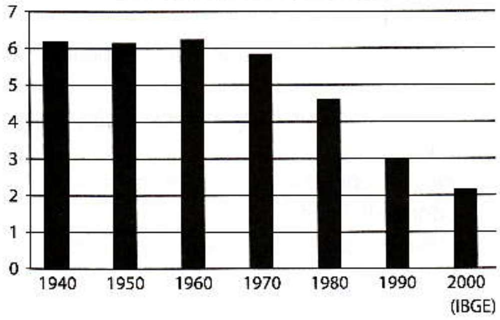
### 2004

**1.** Ao longo do século XX, as características da população brasileira mudaram muito. Os gráficos mostram as alterações na distribuição da população da cidade e do campo e na taxa de fecundidade (número de filhos por mulher) no período entre 1940 e 2000.

**População urbana e rural no Brasil** (%)



**Taxa de fecundidade no Brasil**



Comparando-se os dados dos gráficos, pode-se concluir que:

a) o aumento relativo da população rural é acompanhado pela redução da taxa de fecundidade.
b) quando predominava a população rural, as mulheres tinham em média três vezes menos fihos do que hoje.
c) a diminuição relativa da população rural coincide com o aumento do número de filhos por mulher.
d) quanto mais aumenta o número de pessoas morando em cidades, maior passa a ser a taxa de fecundidade.
e) com a intensificação do processo de urbanização, o número de filhos por mulher tende a ser menor.

**2.** O jornal de uma pequena cidade publicou a seguinte notícia:

**CORREIO DA CIDADE**

ABASTECIMENTO COMPROMETIDO

O novo pólo agroindustrial em nossa cidade tem atraído um enorme e constante fluxo migratório, resultando em um aumento da população em torno de 2000 habitantes por ano, conforme dados do nosso censo:

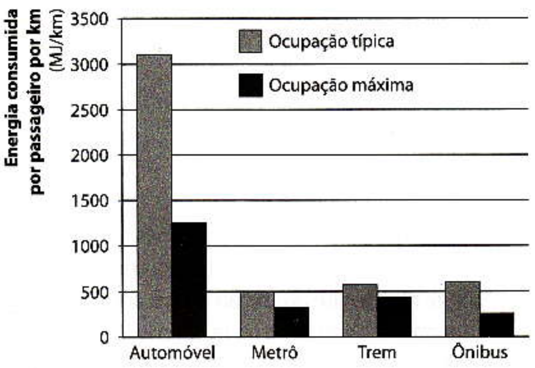
| Ano | População |
|---|---|
| 1995 | 11 965 |
| 1997 | 15 970 |
| 1999 | 19 985 |
| 2001 | 23 980 |
| 2003 | 27 990 |

Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento de água, pois os mananciais que abastecem a cidade têm capacidade para fornecer até 6 milhões de litros de água por dia. A prefeitura, preocupada com essa situação, vai iniciar uma campanha visando estabelecer um consumo médio de 150 litros por dia, por habitante.

A análise da notícia permite concluir que a medida é oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem-sucedida a campanha, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de:

a) 2005.
b) 2006.
c) 2007.
d) 2008.
e) 2009.

**3.** O excesso de veículos e os congestionamentos em grandes cidades são temas de freqüentes reportagens. Os meios de transportes utilizados e a forma como são ocupados têm reflexos nesses congestionamentos, além de problemas ambientais e econômicos. No gráfico a seguir, podem-se observar valores médios do consumo de energia por passageiro e por quilômetro rodado, em diferentes meios de transporte, para veículos em duas condições de ocupação (número de passageiros): ocupação típica e ocupação máxima.



Esse dados indicam que políticas de transporte urbano devem também levar em conta que a maior eficiência no uso de energia ocorre para os:

a) ônibus, com ocupação típica.
b) automóveis, com poucos passageiros.
c) transportes coletivos, com ocupação máxima.
d) automóveis, com ocupação máxima.
e) trens, com poucos passageiros.

**2005**

**1.** Analise o quadro acerca da distribuição da miséria no mundo, nos anos de 1987 a 1998.

**Mapa da miséria**

População que vive com menos de US$ 1 por dia (em %)

| **Região** | **1987** | **1990** | **1993** | **1996** | **1998*** |
|---|---|---|---|---|---|
| Extremo Oriente e Pacífico | 26,6 | 27,6 | 25,2 | 14,9 | 15,3 |
| Europa e Ásia Central | 0,2 | 1,6 | 4,0 | 5,1 | 5,1 |
| América Latina e Caribe | 15,3 | 16,8 | 15,3 | 15,6 | 15,6 |
| Oriente Médio e Norte da África | 4,3 | 2,4 | 1,9 | 1,8 | 1,9 |
| Sul da Ásia | 44,9 | 44,0 | 42,4 | 42,3 | 40,0 |
| África Subsaariana | 46,6 | 47,7 | 49,7 | 48,5 | 46,3 |
| **Mundo** | **28,3** | **29,0** | **28,1** | **24,5** | **24,0** |

*Preliminar
(Fonte: Banco Mundial.)
(Adaptado. *Gazeta Mercantil*, 17 de outubro de 2001, p. A-6.)

A leitura dos dados apresentados permite afirmar que, no período considerado:

a) no sul da Ásia e na África Subsaariana está, proporcionalmente, a maior concentração da população miserável.
b) registra-se um aumento generalizado da população pobre e miserável.
c) na África Subsaariana, o percentual de população pobre foi crescente.
d) em números absolutos a situação da Europa e da Ásia Central é a melhor dentre todas as regiões consideradas.
e) o Oriente Médio e o Norte da África mantiveram o mesmo percentual de população miserável.

**2.** Podemos estimar o consumo de energia elétrica de uma casa considerando as principais fontes desse consumo. Pense na situação em que apenas os aparelhos que constam da tabela abaixo fossem utilizados diariamente da mesma forma.

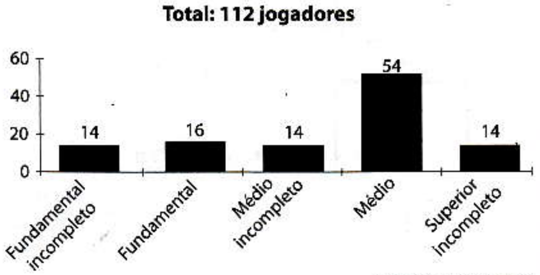
Tabela: A tabela fornece a potência e o tempo efetivo de uso diário de cada aparelho doméstico.

| **Aparelho** | **Potência** (kW) | **Tempo de uso diário** (horas) |
|---|---|---|
| Ar condicionado | 1,5 | 8 |
| Chuveiro elétrico | 3,3 | 1/3 |
| Freezer | 0,2 | 10 |
| Geladeira | 0,35 | 10 |
| Lâmpadas | 0,10 | 6 |

Supondo que o mês tenha 30 dias e que o custo de 1 kWh é de R$ 0,40, o consumo de energia elétrica mensal dessa casa é de aproximadamente:

a) R$ 135.
b) R$ 165.
c) R$ 190.
d) R$ 210.
e) R$ 230.

**3.** A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa ao lado, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro. De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

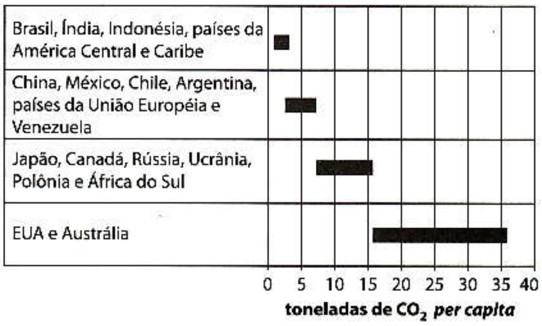


(*O Globo*, 24/7/2005.)

a) 14%.
b) 48%.
c) 54%.
d) 60%.
e) 68%.

## 2006

**1.** A população ambiental tornou-se grave problema a ser enfrentado pelo mundo contemporâneo. No gráfico seguinte, alguns países estão agrupados de acordo com as respectivas emissões médias anuais de $CO_2$ *per capita*.



*O Estado de S. Paulo*, 22/7/2004 (com adaptações).

Considerando as características dos países citados, bem como as emissões médias anuais de $CO_2$ *per capita* indicadas no gráfico, assinale a opção correta.

a) O índice de emissão de $CO_2$ *per capita* dos países da União Européia se equipara ao de alguns países emergentes.

b) A China lança, em média, mais $CO_2$ *per capita* na atmosfera que os EUA.

c) A soma das emissões de $CO_2$ *per capita* de Brasil, Índia e Indonésia é maior que o total pelos EUA.

d) A emissão de $CO_2$ é tanto maior quanto menos desenvolvido é o país.

e) A média de lançamento de $CO_2$ em regiões e países desenvolvidos é superior a 15 toneladas por pessoa ao ano.

**2.**

*Época*, 8/5/2006 (com adaptações).

A partir desses dados, foram feitas as afirmações abaixo.

I) As famílias brasileiras, em 30 anos, aumentaram muito o consumo de proteínas e grãos, que, por seu alto valor calórico, não são recomendáveis.

II) O aumento do consumo de alimentos muito calóricos deve ser considerado indicador de alerta para a saúde, já que a obesidade pode reduzir a expectativa de vida humana.

III) Doenças cardiovasculares podem ser desencadeadas pela obesidade decorrente das novas dietas alimentares.

É correto apenas o que se afirma em:

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

**3.** Na avaliação da eficiência de usinas quanto à produção e aos impactos ambientais, utilizam-se vários critérios, tais como: razão entre produção efetiva anual de energia elétrica e potência instalada ou razão entre potência instalada e área inundada pelo reservatório. No quadro seguinte, esses parâmetros são aplicados às duas maiores hidrelétricas do mundo: Itaipu, no Brasil, e Três Gargantas, na China.

| **Parâmetros** | **Itaipu** | **Três Gargantas** |
|---|---|---|
| Potência instalada | 12 600 MW | 18 200 MW |
| Produção efetiva de energia elétrica | 93 bilhões de kWh/ano | 84 bilhões de kWh/ano |
| Área inundada pelo reservatório | 1 400 km$^2$ | 1 000 km$^2$ |

Internet: <www.itaipu.gov.br>.

Com base nessas informações, avalie as afirmativas que se seguem.

I) A energia elétrica gerada anualmente e a capacidade nominal máxima de geração da hidrelétrica de Itaipu são maiores que as da hidrelétrica de Três Gargantas.

II) Itaipu é mais eficiente que Três Gargantas no uso da potência instalada na produção de energia elétrica.

III) A razão entre potência instalada e área inundada pelo reservatório é mais favorável na hidrelétrica Três Gargantas do que em Itaipu.

É correto apenas o que se afirma em:

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e III.
e) II e III.

# Revisão geral

## Revisão do Ensino Fundamental

### Potenciação

**Propriedades**

1ª) $a^0 = 1$ (para $a \neq 0$)

2ª) $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ (para $a \neq 0$)

3ª) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4ª) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5ª) $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$

6ª) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

7ª) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

**Potência de expoente racional:** $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

**Notação científica:** **x** está em notação científica se $x = \alpha \cdot 10^n$, com $1 \leqslant \alpha < 10$.

### Produtos notáveis

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

### Fatoração de expressões algébricas

**Fator comum em evidência:** $ax + ay + az = a(x + y + z)$

**Agrupamento:** $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

**Diferença de quadrados:** $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

**Trinômio quadrado perfeito:** $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

**Trinômio do 2º grau:** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que $x_1$ e $x_2$ são as raízes do trinômio

**Cubos:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

### Trigonometria no triângulo retângulo

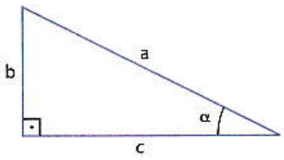
**Teorema de Pitágoras:** $a^2 = b^2 + c^2$

**Razões trigonométricas:**

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$

$\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$



**Ângulos notáveis:**

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| **sen** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **cos** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **tg** | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

**Observação:** Se $\alpha + \beta = 90°$ (ou seja, complementares), então $\text{sen}\ \alpha = \cos \beta$ e $\text{sen}\ \beta = \cos \alpha$.

**Relações fundamentais:** $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$

### Testes

**1.** (Vunesp) A expressão $\sqrt{0,25} + 16^{-\frac{3}{4}}$ equivale a:

a) 1,65.
b) 1,065.
c) 0,825.
d) 0,625.
e) 0,525.

**2.** (Fuvest-SP) Se $4^{16} \cdot 5^{25} = \alpha \cdot 10^n$, com $1 \leqslant \alpha < 10$, então **n** é igual a:

a) 24.
b) 25.
c) 26.
d) 27.
e) 28.

**3.** (Unifor-CE) A expressão $(x - 1)^2 + (x - 1)^3$ é equivalente a:

a) $x^3 + x^2 - 2$.
b) $x^3 + 2x^2 + 1$.
c) $x^3 - 2x^2 + x$.
d) $(x - 1)^5$.
e) $x^3 + x^2 - 2x$.

**4.** (UFC-CE) Seja $A = \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ e $B = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, então A + B é igual a:

a) $-2\sqrt{2}$.
b) $3\sqrt{2}$.
c) $-2\sqrt{3}$.
d) $3\sqrt{3}$.
e) $2\sqrt{3}$.

**5.** (Uneb-BA) O valor da expressão $\dfrac{2^{20} \cdot 3^{17} + 6^{17} \cdot 3}{2^{15} \cdot 3^{17} + 6^{15} \cdot 2}$ é:

a) 12.
b) 48.
c) 6.
d) 1.
e) 36.

**6.** (Fuvest-SP) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28} + 2^{30}}{10}} =$

a) $\dfrac{2^8}{5}$.
b) $\dfrac{2^9}{5}$.
c) $2^8$.
d) $2^9$.
e) $\left(\dfrac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$.

**7.** (FGV-SP) Simplificando-se a fração $\frac{m^2 + m}{5m^2 + 10m + 5}$ obtém-se:

a) $\frac{1}{11}$.
b) $\frac{m}{5(m + 1)}$.
c) $\frac{m}{5(m - 1)}$.
d) $\frac{m + 1}{5m}$.
e) $\frac{m - 1}{5m}$.

**8.** (Fuvest-SP) A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

**9.** (Fuvest-SP) A diferença entre os quadrados de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é:

a) 29.
b) 97.
c) 132.
d) 184.
e) 252.

**10.** (Ufscar-SP) Sejam **m** e **n** dois números reais. A desigualdade $m^2 + n^2 \geqslant 2mn$ vale:

a) somente para $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$.
b) para todos os **m** e **n** reais.
c) somente para $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.
d) somente para $m = n = 0$.
e) somente para **m** e **n** inteiros.

**11.** (Fatec-SP) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e $a - b - c = 10$ com **a**, **b** e **c** números reais. Então, o valor de $a + b + c$ é igual a:

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 10.
e) 20.

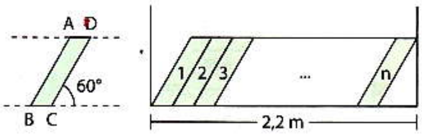
**12.** (Fuvest-SP) Os vértices de um triângulo ABC, no plano cartesiano, são **A**(1, 0), **B**(0, 1) e **C**$\left(0, \sqrt{3}\right)$. Então, o ângulo $B\hat{A}C$ mede:

a) 60°.
b) 45°.
c) 30°.
d) 18°.
e) 15°.

**13.** (UFC-CE) Sejam $\alpha$ e $\beta$ os ângulos agudos de um triângulo retângulo. Se sen $\alpha$ = sen $\beta$ e se a medida da hipotenusa é 4 cm, a área desse triângulo (em cm²) é:

a) 2.
b) 4.
c) 8.
d) 12.
e) 16.

**14.** (FGV-SP) A figura representa uma fileira de **n** livros idênticos, em uma estante de 2 metros e 20 centímetros de comprimento.



AB = DC = 20 cm e AD = BC = 6 cm

Nas condições dadas, **n** é igual a:

a) 32.
b) 33.
c) 34.
d) 35.
e) 36.

**15.** (UFC-CE) Sejam $\alpha$, $\beta$ e $\theta$ os ângulos de um triângulo. Se as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente, e a bissetriz do ângulo $\beta$ mede duas unidades de comprimento (u. c.), a medida do perímetro desse triângulo é:

a) $3(\sqrt{3} + 2)$ u. c.
b) $(\sqrt{3} + 1)$ u. c.
c) $3\sqrt{3}$ u. c.
d) $3(\sqrt{3} + 1)$ u. c.
e) $(3\sqrt{3} - 1)$ u. c.

## Questões dissertativas

**16.** (Fuvest-SP)

a) Qual a medida de $2^{2^2}$?
b) Calcule $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5}$.

**17.** (Unicamp-SP) Dados os dois números positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

**18.** (Vunesp) Se $x + \frac{1}{x} = \lambda$, calcule em função de $\lambda$:

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$;
b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

**19.** (Fuvest-SP)

a) Se $x + \frac{1}{x} = b$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) Resolva a equação $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

**20.** (Unicamp-SP) Um ciclista pedala uma bicicleta com rodas de mesmo diâmetro e com distâncias entre os eixos de 1,20 m. Num determinado instante ele vira o guidão em 30° e o mantém nesta posição para andar em círculo. Calcule os raios dos círculos descritos pelas rodas dianteira e traseira da bicicleta.

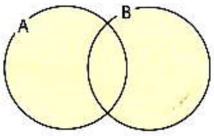
# Conjuntos, conjuntos numéricos e funções

## Conjuntos

Número de subconjuntos de um conjunto **A** com **n** elementos: $p(A) = 2^n$

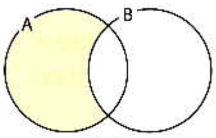
**Operações**

União (∪)

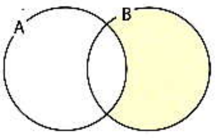


A ∪ B

Diferença (−)

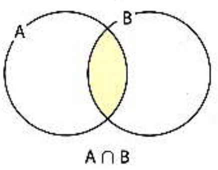


A − B



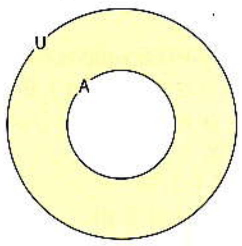
B − A

Intersecção (∩)



A ∩ B

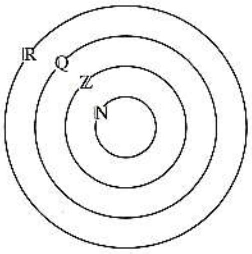
Complementar em relação ao universo



$\overline{A}$ ou $A^C$ ou $C_U^A$

Número de elementos da união:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

## Conjuntos numéricos



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

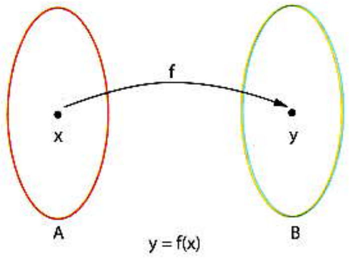
## Funções

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma função de **A** em **B** é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

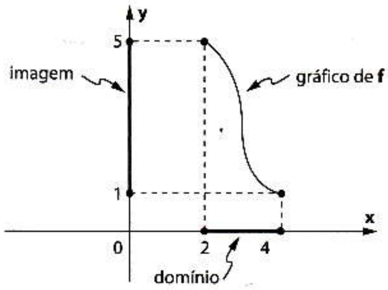
Usamos a seguinte notação:

$$f: A \longrightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

que se lê: **f** é uma função de **A** em **B**.



- **A**: domínio de **f**: D(f)
- **B**: contradomínio de **f**: CD(f)
- O conjunto dos **y** obtidos é a imagem de **f**: Im(f)

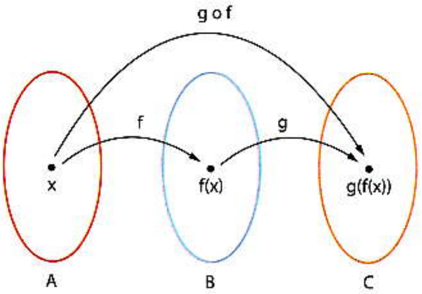


$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\} = [2, 4]$

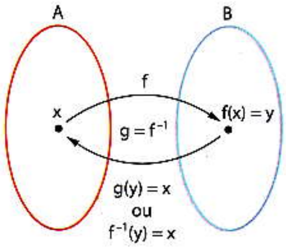
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\} = [1, 5]$

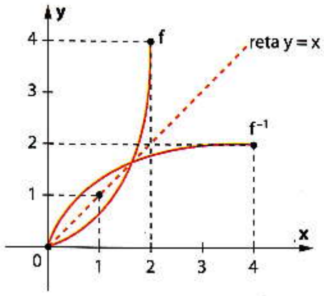
## Tipos de funções

- Função injetiva: $f: A \longrightarrow B$ tal que $x_1 \neq x_2$ em **A** $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em **B**
- Função sobrejetiva: $f: A \longrightarrow B$ tal que $Im(f) = B$
- Função bijetiva: $f: A \longrightarrow B$ tal que **f** é injetiva e sobrejetiva simultaneamente
- Função composta
  Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$, denominamos função composta de **g** e **f** a função $g \circ f: A \longrightarrow C$, que é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$.



- Função inversa
  Dada uma função $f: A \longrightarrow B$, bijetiva, denomina-se função inversa de **f** a função $g: B \longrightarrow A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

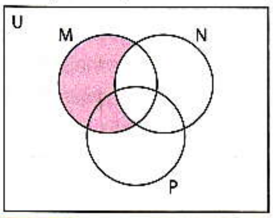




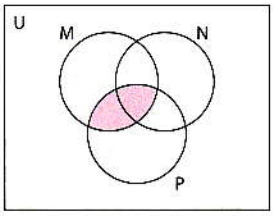
Só existe função inversa de uma função bijetiva.

## Testes

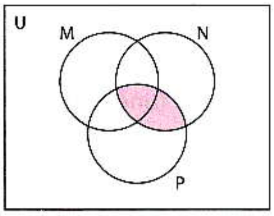
**21.** (UFBA) A representação do complementar de $(M - N) \cap P$, em relação a **P**, está indicada pela região colorida de:

a) 

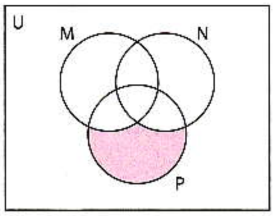
b)



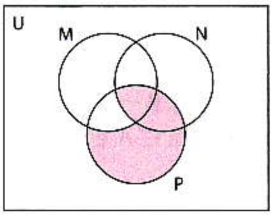
c)



d)

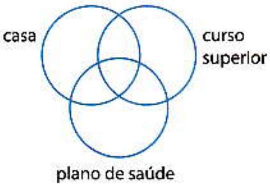


e)



**22.** (PUC-PR) Em uma pesquisa feita com 120 empregados de uma firma, verificou-se o seguinte:

- têm casa própria: 38
- têm curso superior: 42
- têm plano de saúde: 70
- têm casa própria e plano de saúde: 34
- têm casa própria e curso superior: 17
- têm curso superior e plano de saúde: 24
- têm casa própria, plano de saúde e curso superior: 15



Qual a porcentagem dos empregados que não se enquadram em nenhuma das situações anteriores? (*Sugestão*: Utilize o diagrama de Venn para facilitar os cálculos.)

a) 25% c) 35% e) 45%
b) 30% d) 40%

**23.** (UFMG) Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40% dos entrevistados lêem o jornal **A**.
- 55% dos entrevistados lêem o jornal **B**.
- 35% dos entrevistados lêem o jornal **C**.
- 12% dos entrevistados lêem os jornais **A** e **B**.
- 15% dos entrevistados lêem os jornais **A** e **C**.
- 19% dos entrevistados lêem os jornais **B** e **C**.
- 7% dos entrevistados lêem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não lêem nenhum dos três jornais.

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que o número total de entrevistados foi:

a) 1 200. b) 1 500. c) 1 250. d) 1 350.

**24.** (PUC-SP) São dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x} \text{ é par}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leqslant x < 6\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 4\}$. O conjunto **X**, tal que $x \in B$ e $B - X = A \cap C$, é:

a) {0, 1, 3, 5}. d) {0, 3, 5}.
b) {−1, 1, 3, 5, 6}. e) {−1, 1, 3, 5}.
c) {1, 3, 5}.

**25.** (UEL-PR) Observe os seguintes números:

I) 2,212121... IV) 3,1416
II) 3,212223... V) $\sqrt{-4}$
III) $\frac{\pi}{5}$

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais.

a) I e II. c) II e III. e) III e V.
b) I e IV. d) II e V.

**26.** (UFPB) Sejam os reais $y_1 = 0{,}333...$, $y_2 = 5{,}0131313...$ e $y_3 = 0{,}202002000...$ Além disso, consideram-se as somas $S_1 = y_1 + y_2$, $S_2 = y_1 + y_3$ e $S_3 = y_1 + y_2 + y_3$. Então, podemos afirmar que:

a) $\mathbf{y_1}$ é irracional. c) $\mathbf{S_1}$ é irracional. e) $\mathbf{S_3}$ é racional.
b) $\mathbf{y_2}$ é irracional. d) $\mathbf{S_2}$ é irracional.

**27.** (UFC-CE) Sejam **M** e **N** conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de **M** é igual ao dobro do número de subconjuntos de **N**, o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é:

a) o triplo do número de elementos de **M**.
b) o triplo do número de elementos de **N**.
c) o quádruplo do número de elementos de **M**.
d) o dobro do número de elementos de **M**.
e) o dobro do número de elementos de **N**.

**28.** (ITA-SP) Sejam **A** um conjunto com 8 elementos e **B** um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B/A) \cup P(\varnothing)$ é igual a:

a) 8. c) 20. e) 9.
b) 16. d) 17.

**Observação**: Se **X** é um conjunto, P(X) denota o conjunto de todos os subconjuntos de **X**.
$A/B = \{x \in A; x \notin B\}$.

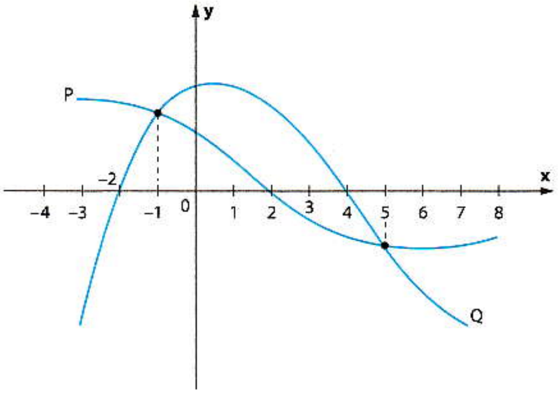
**29.** (Epcar-MG) Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, assinale dentre as relações seguintes a alternativa que representa uma função de **A** em **B**.

a) {(−1, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)}
b) {(−1, 1), (0, 1), (1, 0), (1, 2)}
c) {(0, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 4)}
d) {(−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)}

**30.** (Faap-SP) Durante um mês, o número **y** de unidades produzidas de um determinado bem em função do número **x** de funcionários empregados de acordo com a lei é $y = 50\sqrt{x}$. Sabendo que 121 funcionários estão empregados, o acréscimo de produção com a admissão de 48 novos funcionários é:

a) 550.
c) 100.
e) 200.
b) 250.
d) 650.

**31.** (Fuvest-SP) Os gráficos de duas funções polinomiais **P** e **Q** estão representados na figura a seguir.



Então, no intervalo $[-4, 8]$, $P(x) \cdot Q(x) < 0$ para:

a) $-2 < x < 4$.
b) $-2 < x < -1$ ou $5 < x < 8$.
c) $-4 \leqslant x < -2$ ou $2 < x < 4$.
d) $-4 \leqslant x < -2$ ou $5 < x \leqslant 8$.
e) $-1 < x < 5$.

**32.** (Unifesp) Seja $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma função crescente e sobrejetora, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Sabendo que $f(2) = -4$, uma das possibilidades para $f(n)$ é:

a) $f(n) = 2(n - 4)$.
d) $f(n) = n$.
b) $f(n) = n - 6$.
e) $f(n) = -n^2$.
c) $f(n) = -n - 2$.

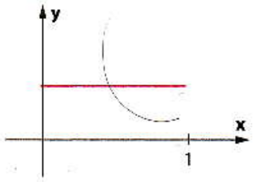
**33.** (UFRN) Sejam **E** o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e **P** o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto **E**.

Se $f: E \longrightarrow P$ é a função que a cada escola de **E** associa seu número de professores, então:

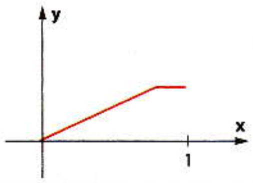
a) **f** não pode ser uma função bijetora.
b) **f** não pode ser uma função injetora.
c) **f** é uma função sobrejetora.
d) **f** é necessariamente uma função injetora.

**34.** (Unifesp) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de **x** correspondem valores distintos de **y**". Tais funções são chamadas injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

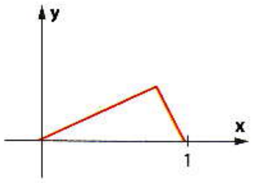
a)



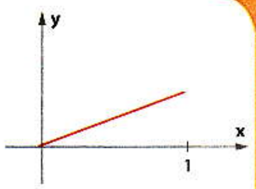
b)



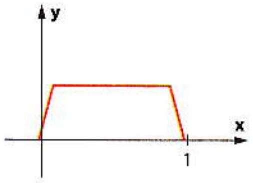
c)



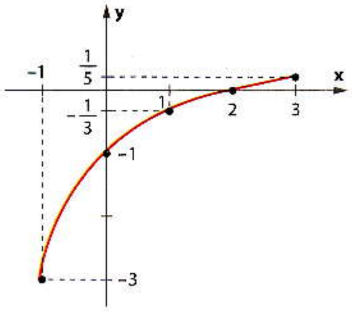
e)



d)



**35.** (Fuvest-SP) A figura abaixo representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \dfrac{x + a}{bx + c}$, para $-1 \leqslant x \leqslant 3$.



Pode-se concluir que o valor de **b** é:

a) $-2$.
c) 0.
e) 2.
b) $-1$.
d) 1.

**36.** (Mack-SP) Se $[-1, 2]$ é o conjunto imagem de uma função $f(x)$, então o conjunto imagem de $g(x) = 2 \cdot f(x) + 1$ é:

a) $[-1, 2]$.
c) $[-1, 5]$.
e) $[-4, -1]$.
b) $[-2, 1]$.
d) $[0, 4]$.

**37.** (Vunesp) Seja $\mathbf{T_C}$ a temperatura em graus Celsius e $\mathbf{T_F}$ a mesma temperatura em graus Fahrenheit. Essas duas escalas de temperatura estão relacionadas pela equação $9T_C = 5T_F - 160$. Considere agora $\mathbf{T_K}$ a mesma temperatura na escala Kelvin. As escalas Kelvin e Celsius estão relacionadas pela equação $T_K = T_C + 273$. A equação que relaciona as escalas Fahrenheit e Kelvin é:

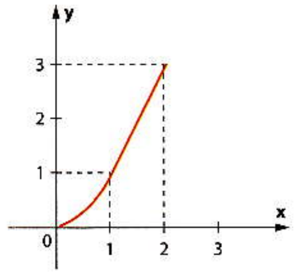
a) $T_F = \dfrac{T_K - 113}{5}$.
d) $T_F = \dfrac{9T_K - 2\,657}{5}$.
b) $T_F = \dfrac{9T_K - 2\,457}{5}$.
e) $T_F = \dfrac{9T_K - 2\,617}{5}$.
c) $T_F = \dfrac{9T_K - 2\,297}{5}$.

**38.** (Ufscar-SP) As funções **f** e **g** associam, a cada número natural, o resto da divisão do número por 3 e por 6, respectivamente. Sendo assim, para todo número natural **x**, $g(f(x))$ é igual a:

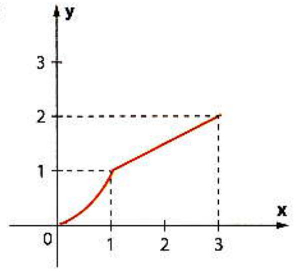
a) $f(x)$.
c) $2f(x)$.
e) $f(x) + g(x)$.
b) $g(x)$.
d) $2g(x)$.

**39.** (UFPB) Considere a função f: $[0, 2] \longrightarrow [0, 3]$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1, 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$. A função inversa de **f** está melhor representada no gráfico:

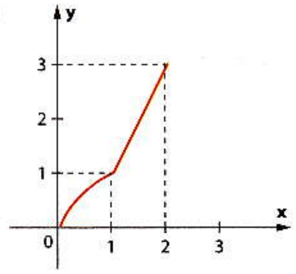
a)



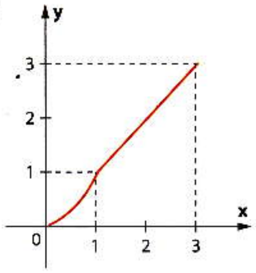
b)



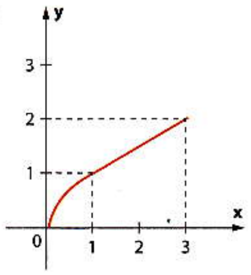
c)



d)



e)



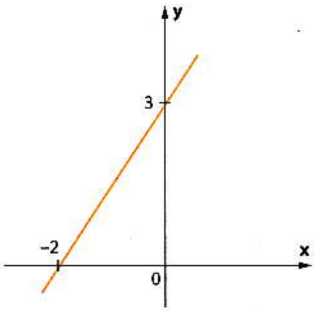
**40.** (AFA-SP) Seja f: $[1, \infty) \longrightarrow [-3, \infty)$ a função definida por $f(x) = 3x^2 - 6x$. Se g: $[-3, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ é a função inversa de **f**, então $[g(6) - g(3)]^2$ é:

a) 5. c) $5 - 2\sqrt{6}$.
b) $2\sqrt{6}$. d) $-5 + 2\sqrt{6}$.

**41.** (ESPM-SP) Se **f** e **g** são funções reais definidas por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, \text{se } x \geqslant 1 \\ 3x + 4, \text{se } x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = x - 3$, então para $K = \dfrac{f \circ g(5)}{f \circ g(3)}$, temos:

a) $K = 0$. c) $K = 2$. e) $K = 4$.
b) $K = 1$. d) $K = 3$.

**42.** (Fatec-SP) Seja **f** a função de IR em IR representada no gráfico abaixo.



O gráfico da função **g**, de IR em IR, definida por $g(x) = f(f(x))$, intercepta o eixo das:

a) ordenadas no ponto (0, 3).
b) abscissas no ponto $\left(-\dfrac{10}{3}, 0\right)$.
c) ordenadas no ponto (0, 4).
d) abscissas no ponto $\left(-\dfrac{4}{9}, 0\right)$.
e) ordenadas no ponto (0, 6).

**43.** (Unit-SE) Seja **f** a função de **A** em IR definida por $f(x) = 1 - 2x$. Se o conjunto imagem de **f** é o intervalo $[-3, 11[$, o conjunto **A** é:

a) $]-5, 2]$. c) $]-5, 1]$. e) $[1, 5[$.
b) $[-2, 5[$. d) $[1, -5[$.

## Questões dissertativas

**44.** (FGV-SP) Numa cidade do interior do estado de São Paulo, uma prévia eleitoral entre 2 000 filiados revelou as seguintes informações a respeito de três candidatos **A**, **B** e **C**, do Partido da Esperança (PE), que concorreram a três cargos diferentes:

I) Todos os filiados votaram e não houve registro de voto em branco, tampouco de voto nulo.
II) 280 filiados votaram a favor de **A** e de **B**.
III) 980 filiados votaram a favor de **A** ou de **B**, mas não de **C**.
IV) 420 filiados votaram a favor de **B**, mas não de **A** ou de **C**.
V) 1 220 filiados votaram a favor de **B** ou de **C**, mas não de **A**.
VI) 640 filiados votaram a favor de **C**, mas não de **A** ou de **B**.
VII) 140 filiados votaram a favor de **A** e de **C**, mas não de **B**.

Determine o número de filiados ao PE que:

a) votaram a favor dos três candidatos;
b) votaram a favor de apenas um dos candidatos.

**45.** (UFRJ) Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais fabricadas pela Nascebem S.A. foi enviada para a fiscalização sanitária. No teste de qualidade, 60 foram aprovadas e 40 reprovadas, por conterem pílulas de farinha. No teste de quantidade, 74 foram aprovadas e 26 reprovadas por conterem um número menor de pílulas que o especificado. O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas foram reprovadas em ambos os testes. Quantas caixas foram aprovadas em ambos os testes?

**46.** (Unicamp-SP) O índice **I** de massa corporal de uma pessoa adulta é dado pela fórmula $I = \frac{M}{h^2}$, onde **M** é a massa do corpo, dada em quilogramas, e **h** é a altura da pessoa, em metros. O índice **I** permite classificar uma pessoa adulta de acordo com a seguinte tabela:

| Homens | Mulheres | Classificação |
|---|---|---|
| $20 \leqslant I \leqslant 25$ | $19 \leqslant I \leqslant 24$ | Normal |
| $25 < I \leqslant 30$ | $24 < I \leqslant 29$ | Levemente obeso |
| $I > 30$ | $I > 29$ | Obeso |

a) Calcule o índice **I** para uma mulher cuja massa é de 64,0 kg e cuja altura é de 1,60 m. Classifique-a segundo a tabela acima.

b) Qual é a altura mínima para que um homem cuja massa é de 97,2 kg não seja considerado obeso?

**47.** (Vunesp) Uma função de variável real satisfaz a condição $f(x + 2) = 2f(x) + f(1)$; qualquer que seja a variável **x**. Sabendo que $f(3) = 6$, determine o valor de:

a) $f(1)$;

b) $f(5)$.

**48.** (EEM-SP) Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade: $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$.

a) Determine $f(1)$.

b) Sabendo que $f(2) = 1$, determine $f(8)$.

**49.** (Ufscar-SP) Uma pesquisa ecológica determinou que a população (**S**) de sapos de uma determinada região, medida em centenas, depende da população (**m**) de insetos, medida em milhares, de acordo com a equação $S(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}}$. A população de insetos, por sua vez, varia com a precipitação (**p**) de chuva em centímetros, de acordo com a equação $m(p) = 43p + 7{,}5$.

a) Expresse a população de sapos como função da precipitação.

b) Calcule a população de sapos quando a precipitação é de 1,5 cm.

**50.** (UFMG) Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = ax + b$ duas funções. Determine as constantes reais **a** e **b** para que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo **x** real.

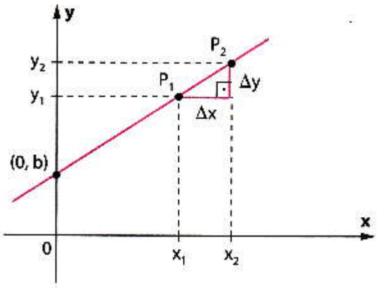
# Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais **a** e **b** tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a = 0$, $f(x) = b$ é função constante.

Se $b = 0$, $f(x) = ax$ é função linear.

Geometricamente, **b** é a ordenada do ponto onde a reta, que é gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo Oy, pois para $x = 0$ temos $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.



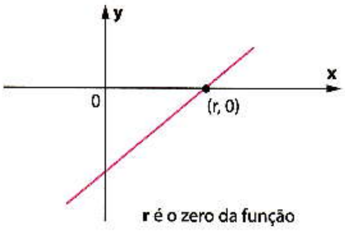
$$P_1(x_1, y_1) \text{ e } P_2(x_2, y_2)$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

O número **a** chama-se *inclinação* ou *coeficiente angular* dessa reta em relação ao eixo horizontal Ox.

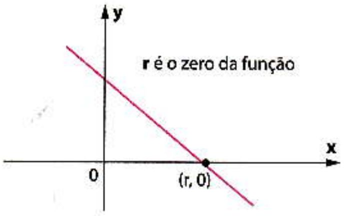
## Função afim crescente, decrescente e zero da função

$a > 0 \longrightarrow$ função crescente



$$x = r \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x > r \Rightarrow f(x) > 0$$
$$x < r \Rightarrow f(x) < 0$$

$a < 0 \longrightarrow$ função decrescente



$$x = r \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x > r \Rightarrow f(x) < 0$$
$$x < r \Rightarrow f(x) > 0$$

## Testes

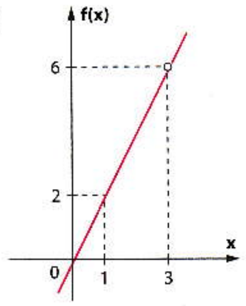
(Faap-SP) Considere o seguinte enunciado para as questões 51 e 52:
A variação de temperatura $y = f(x)$ num intervalo de tempo **x** é dada pela função
$f(x) = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + m - 3$.

**51.** Calcule **m** de modo que o gráfico da função seja uma reta paralela ao eixo **x**.
a) 3 b) 9 c) 0 d) −3 e) −9

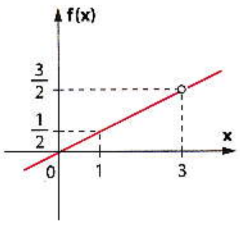
**52.** Calcule **m** de modo que o gráfico da função seja uma reta e f(x) seja crescente.
a) −3 b) 9 c) 3 d) −9 e) 0

**53.** (Mack-SP) A melhor representação gráfica da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x - 6}$ é:

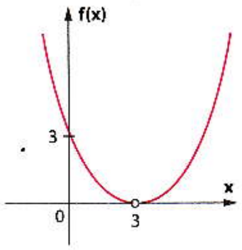
a)



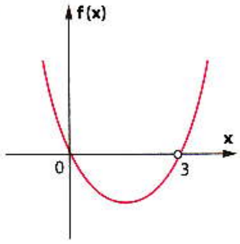
d)



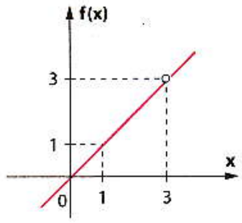
b)



e)



c)



**54.** (AFA-SP) Seja **f** uma função real do primeiro grau com $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$. Então, o valor de f(3) é:
a) −3. b) −2,5. c) −2. d) −1,5.

(Faap-SP) Considere o seguinte enunciado para as questões 55 e 56:
A taxa de inscrição num clube de natação é de R$ 150,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente.

**55.** Calcule quanto uma pessoa pagou ao se inscrever 5 semanas após o início do curso.
a) R$ 62,50
b) R$ 50,50
c) R$ 74,50
d) R$ 78,50
e) R$ 87,50

**56.** Expresse a taxa de inscrição em função do número de semanas transcorridas desde o início do curso.
a) $T = 12{,}50(12 - x)$
b) $T = 12{,}50x$
c) $T = 12{,}50x - 12$
d) $T = 12{,}50(x + 12)$
e) $T = 12{,}50x + 12$

**57.** (FGV-SP) Uma função f(x) é tal que $f(2) = 0{,}4$ e $f(3) = -0{,}6$. Admitindo que para **x** entre 2 e 3 o gráfico seja um segmento de reta, podemos afirmar que o valor de **k**, tal que $f(k) = 0$, é:
a) 2,40. b) 2,35. c) 2,45. d) 2,50. e) 2,55.

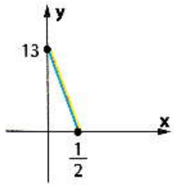
**58.** (PUC-SP) Um grupo de amigos "criou" uma nova unidade de medida para temperaturas: o grau Patota. Estabeleceram, então, uma correspondência entre as medidas de temperaturas em graus Celsius (°C), já conhecida, e em graus Patota (°P), mostrada na tabela abaixo:

| °C | °P |
|---|---|
| 20 | 40 |
| 60 | 48 |

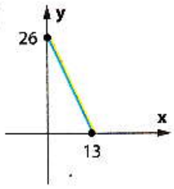
Lembrando que a água ferve a 100 °C, então, na unidade Patota ela ferverá a:
a) 96°. b) 88°. c) 78°. d) 64°. e) 56°.

**59.** (Epcar-MG) Um botijão de gás contém 13 kg de gás. Em média, é consumido, por dia, 0,5 kg do seu conteúdo. O esboço do gráfico que melhor expressa a massa **y** de gás no botijão, em função de **x** (dias de consumo) é:

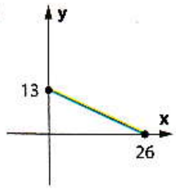
a)



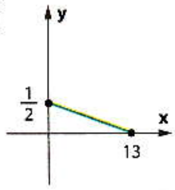
c)



b)



d)



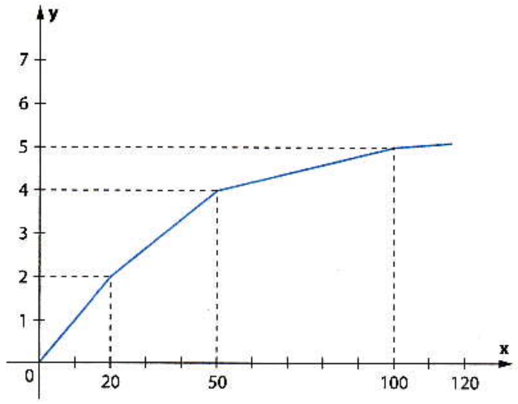
**60.** (FGV-SP) Atualmente, o valor de um computador novo é R$ 3 000,00. Sabendo que seu valor decresce linearmente com o tempo, de modo que daqui a 8 anos seu valor será zero, podemos afirmar que daqui a 3 anos (contados a partir de hoje) o valor do computador será:
a) R$ 1 875,00.
b) R$ 1 800,00.
c) R$ 1 825,00.
d) R$ 1 850,00.
e) R$ 1 900,00.

**61.** (UEL-PR) Uma papelaria faz cópias xerográficas e cobra de acordo com a seguinte tabela de preços:

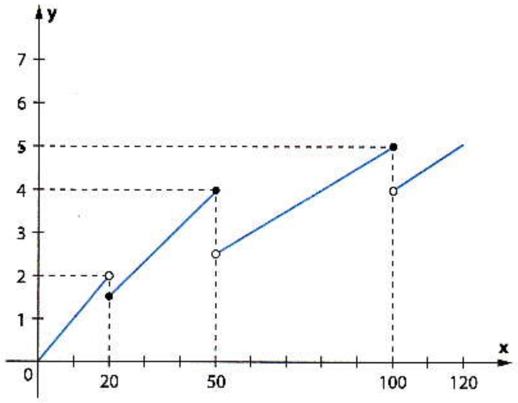
| **Número de cópias** | **Preço por cópia** (em reais) |
|---|---|
| 20 ou menor | 0,10 |
| Maior que 20 até 50 | 0,08 |
| Maior que 50 até 100 | 0,05 |
| Maior que 100 | 0,04 |

Segundo essa tabela, uma pessoa ao fotocopiar, por exemplo, 28 cópias, pagará R$ 0,08 a cópia. Se **y** for o preço total e **x** a quantidade de cópias, a função preço pode ser representada pelo gráfico:

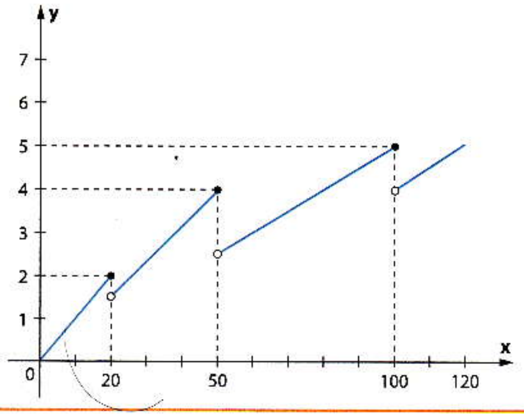
a)



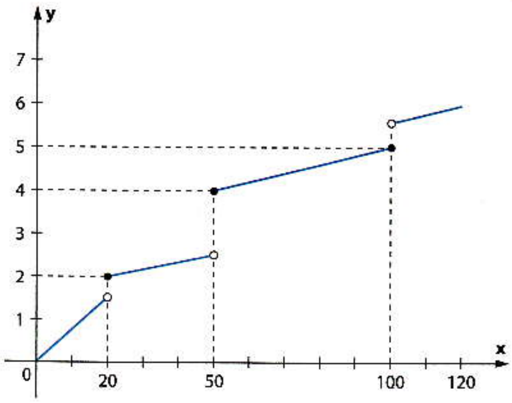
b)



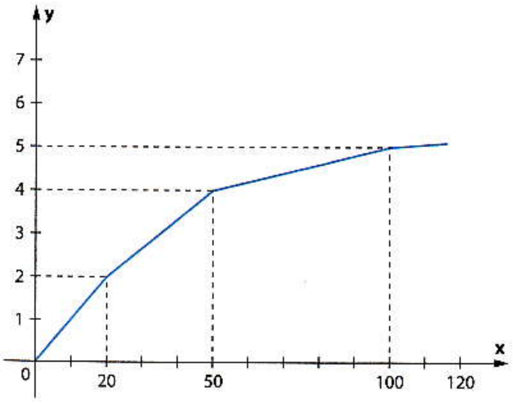
c)



d)



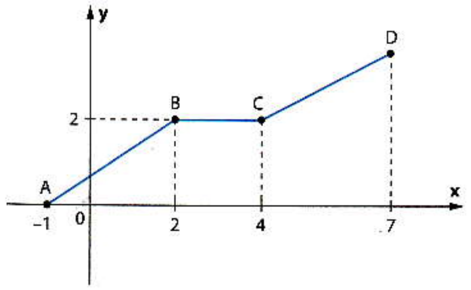
e)



**62.** (FGV-SP) Uma fábrica de camisas tem um custo mensal dado por $C = 5\,000 + 15x$, onde **x** é o número de camisas produzidas por mês. Cada camisa é vendida por R$ 25,00. Atualmente, o lucro mensal é de R$ 2 000,00. Para dobrar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:

a) o dobro do que produz e vende.
b) 100 unidades a mais do que produz e vende.
c) 200 unidades a mais do que produz e vende.
d) 300 unidades a mais do que produz e vende.
e) 50% a mais do que produz e vende.

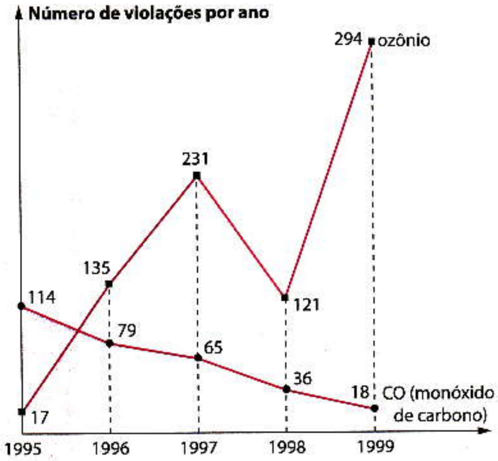
**63.** (Vunesp) A poligonal ABCD da figura abaixo é o gráfico de uma função **f** cujo domínio é o intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 7$. Sabe-se que AB é paralelo a CD e BC é paralelo ao eixo dos **x**.



Nessas condições, $f(7) - f(4,5)$ é igual a:

a) $\frac{3}{2}$. b) $\frac{5}{3}$. c) $\frac{17}{10}$. d) $\frac{9}{5}$. e) 2.

**64.** (UEL-PR) Enquanto a camada de ozônio protege a vida na Terra, o gás ozônio na baixa atmosfera pode comprometer a qualidade do ar. O gráfico a seguir refere-se ao número de violações da qualidade do ar na Região Metropolitana de São Paulo, no período compreendido entre 1995 e 1999. Percebe-se um momento em que a quantidade de violações da concentração de ozônio foi idêntica à quantidade de violações de monóxido de carbono.



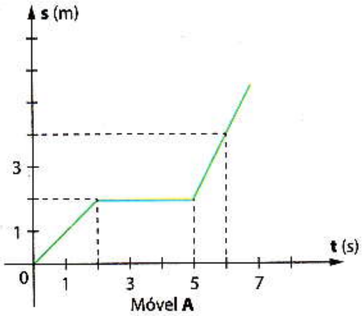
Assinale a alternativa que fornece o valor mais aproximado dessa quantidade de violações.

a) 83 b) 87 c) 91 d) 97 e) 99

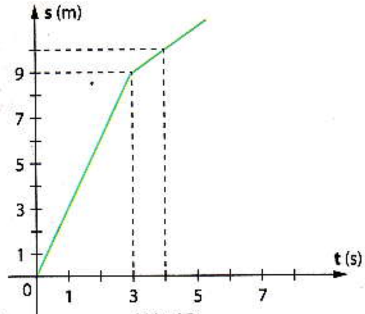
**65.** (Fuvest-SP) Seja **f** a função que associa, a cada número real **x**, o menor dos números $x + 3$ e $-x + 5$. Assim, o valor máximo de f(x) é:

a) 1. b) 2. c) 4. d) 6. e) 7.

**66.** (UEL-PR) Os gráficos abaixo representam a posição **s**, em metros, de dois móveis, em função do tempo **t**, dado em segundos.



Móvel **A**



Móvel **B**

Supondo que o último segmento representado em cada gráfico se prolongue indefinidamente, é correto afirmar que:

a) nos 10 segundos iniciais, o espaço percorrido pelo móvel **A** é maior do que o percorrido pelo móvel **B**.
b) depois dos 5 segundos iniciais, a velocidade do móvel **A** é o dobro da de **B**.
c) nos primeiros 2 segundos, a velocidade do móvel **A** é o triplo da de **B**.
d) depois dos 5 segundos iniciais, os dois móveis têm a mesma velocidade.
e) os dois móveis estão em constante movimento.

**67.** (UFMG) O conjunto solução da inequação $-3x + a > 7$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. Então, o valor de **a** é:

a) 1. b) 2. c) 7. d) 10. e) 13.

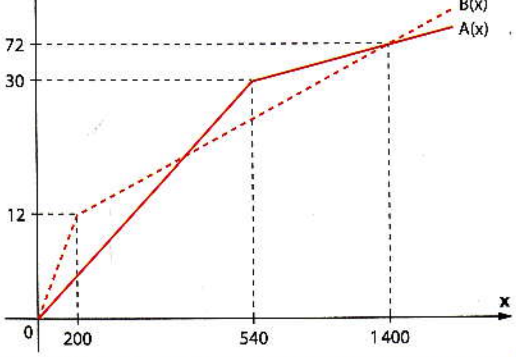
**68.** (UFV-MG) Duas empresas dispõem de ônibus com 60 lugares. Para uma excursão, a Águia Dourada cobra uma taxa fixa de R$ 400,00 mais R$ 25,00 por passageiro, enquanto a Cisne Branco cobra uma taxa fixa de R$ 250,00 mais R$ 29,00 por passageiro. O número mínimo de excursionistas para que o contrato com a Águia Dourada fique mais barato que o contrato com a Cisne Branco é:

a) 37. b) 41. c) 38. d) 39. e) 40.

**69.** (Ibmec-SP) Um pacote de 4 pilhas recarregáveis custa R$ 25,00. Um recarregador de pilhas, com capacidade para recarregar 4 pilhas de uma vez, custa R$ 95,00 e gera R$ 0,20 de custo de energia elétrica cada vez que é utilizado para recarregar 4 pilhas. Uma pilha comum custa R$ 0,80 e tem duração igual ao tempo que uma pilha recarregável pode ser utilizada num aparelho até precisar de uma nova carga. Se um fotógrafo que utiliza 4 pilhas comuns por semana decidir comprar as 4 pilhas recarregáveis e o recarregador, então ele terá recuperado o dinheiro investido nesta compra:

a) em menos de 3 meses.
b) em mais de 3 e menos de 6 meses.
c) em mais de 6 e menos de 9 meses.
d) em mais de 9 meses e menos de um ano.
e) em mais de um ano.

**70.** (Mack-SP) A figura mostra os esboços dos gráficos das funções A(x) e B(x), que fornecem os preços que as copiadoras **A** e **B** cobram para fazer **x** cópias de uma folha.



Para fazer 360 cópias, a copiadora **A** cobra:

a) R$ 7,00 a menos que **B**.
b) R$ 5,00 a mais que **B**.
c) R$ 10,00 a menos que **B**.
d) $\frac{3}{2}$ do que cobra **B**.
e) o mesmo preço cobrado por **B**.

**71.** (Mack-SP) Uma empresa de telefonia celular oferece planos mensais, de 60 e 100 minutos, a preços fixos e proporcionais. Para cada minuto em excesso, é cobrada uma tarifa de R$ 3,00. Um usuário optou pelo plano de 60 minutos, a um custo mensal de R$ 105,00. No primeiro mês, ele utilizou 110 minutos. Se ele tivesse optado pelo plano de 100 minutos, teria economizado:

a) R$ 40,00.
b) R$ 45,00.
c) R$ 50,00.
d) R$ 55,00.
e) R$ 60,00.

**72.** (Fuvest-SP) Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

a) 25. b) 26. c) 27. d) 28. e) 29.

## Questões dissertativas

**73.** (Unicamp-SP) Para transformar graus Fahrenheit em graus centígrados usa-se a fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde **F** é o número de graus Fahrenheit e **C** é o número de graus centígrados.

a) Transforme 35 graus centígrados em graus Fahrenheit.
b) Qual a temperatura (em graus centígrados) em que o número de graus Fahrenheit é o dobro do número de graus centígrados?

**74.** (Unicamp-SP) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:

a) o preço de uma corrida de 11 km;
b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

**75.** (FGV-SP) Um vendedor recebe mensalmente um salário fixo de R$ 800,00 mais uma comissão de 5% sobre as vendas do mês. Em geral, a cada duas horas e meia de trabalho ele vende o equivalente a R$ 500,00.

a) Qual seu salário mensal em função do número **x** de horas trabalhadas por mês?
b) Se ele costuma trabalhar 220 horas por mês, o que é preferível: um aumento de 20% no salário fixo, ou um aumento de 20% (de 5% para 6%) na taxa de comissão?

**76.** (FGV-SP) Quando uma família tem uma renda mensal de R$ 5 000,00, ela consome R$ 4 800,00 por mês. Quando a renda é de R$ 8 000,00, ela consome R$ 7 200,00.

a) Chamando de **x** a renda mensal e de **C** o consumo, obtenha **C** em função de **x**, sabendo que o gráfico de **C** em função de **x** é uma reta.
b) Chama-se poupança mensal da família (**P**) à renda mensal menos o correspondente consumo. Obtenha **P** em função de **x** e encontre os valores da renda para os quais a poupança é maior que R$ 1 000,00.

**77.** (Ufes) Um fabricante de bonés opera a um custo fixo de R$ 1 200,00 por mês (correspondente a aluguel, seguro e prestações de máquinas). O custo variável por boné é de R$ 2,00. Atualmente são comercializadas 1 000 unidades mensalmente, a um preço unitário de R$ 5,00. Devido à concorrência no mercado, será necessário haver uma redução de 30% no preço unitário de venda. Para manter seu lucro mensal, de quanto deverá ser o aumento na quantidade vendida?

**78.** (Vunesp) Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro **n** (tamanho do calçado) em função do comprimento **c**, do pé, em centímetros. Pela fórmula, tem-se $n = [x]$, onde $[x] = \frac{5}{4}c + 7$ indica o menor inteiro maior ou igual a **x**. Por exemplo, se $c = 9$ cm, então $x = 18{,}25$ e $n = [18{,}25] = 19$. Com base nessa fórmula:

a) determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm.
b) se o comprimento do pé de uma pessoa é $c = 24$ cm, então ela calça 37. Se $c > 24$ cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em centímetros, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

**79.** (Unicamp-SP) O custo de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial $\mathbf{Q_0}$, fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância **D** percorrida nessa corrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6 km, a quantia cobrada foi de R$ 8,25, e que em outra corrida, de 2,8 km, a quantia cobrada foi de R$ 7,25.

a) Calcule o valor inicial $\mathbf{Q_0}$.
b) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R$ 75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

**80.** (Fuvest-SP) Uma função **f** satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais **a** e **x**. Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x - 1) + 1$ para todo o número real **x**.

a) Calcule g(3).
b) Determine f(x), para todo **x** real.
c) Resolva a equação $g(x) = 8$.

# Função quadrática

Uma função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais **a**, **b** e **c**, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

## Forma canônica

$f(x) = a(x - m)^2 + k$, em que $m = -\dfrac{b}{2a}$ e

$k = f(m) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

## Zeros da função quadrática

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (fórmula que fornece as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$)

**Observações:**

1ª) O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado *discriminante* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2ª) Quando $\Delta > 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem dois zeros reais diferentes.

Quando $\Delta = 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem um zero real duplo.

Quando $\Delta < 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ não tem zeros reais.

## Relações entre coeficientes e raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Existindo zeros reais tal que $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, obtemos:

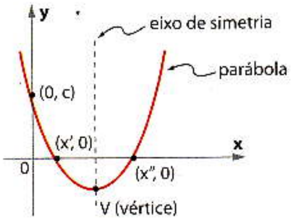
$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

## Forma fatorada

$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - Sx + P)$

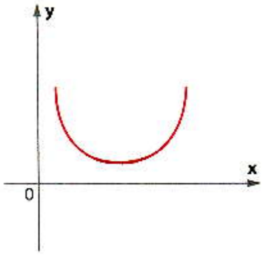
## Gráfico da função quadrática



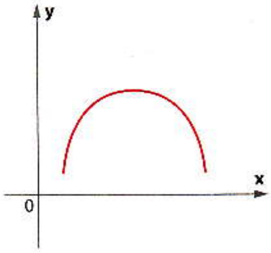
O gráfico da função quadrática é uma parábola.

## Concavidade da parábola

$a > 0$



$a < 0$



## Vértice

O vértice de uma parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, pode ser calculado assim:

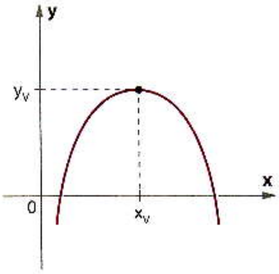
$\mathbf{V}\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

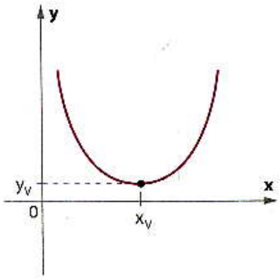
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

## Máximos e mínimos

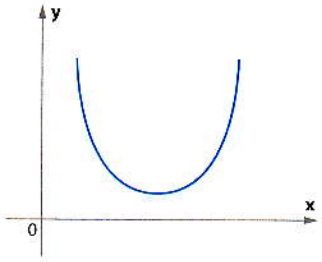
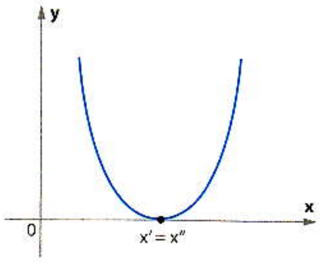
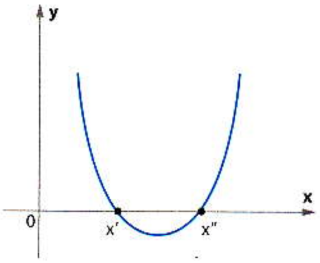
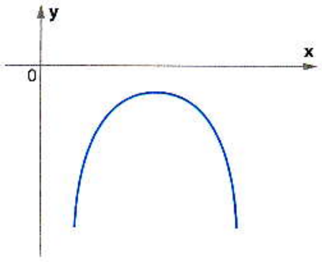
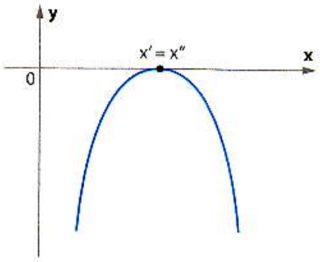
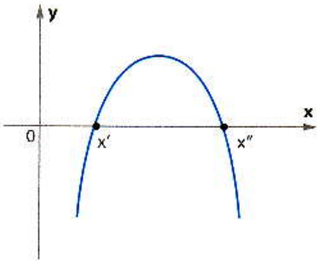
Valor máximo: $a < 0$



Valor mínimo: $a > 0$



## Número de zeros e concavidade

| | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| **$a > 0$** |  |  |  |
| **$a < 0$** |  |  |  |

## Testes

**81.** (FGV-SP) Seja a função $f(x) = x^2$. O valor de $f(m + n) - f(m - n)$ é:

a) $2m^2 + 2n^2$.
b) $2n^2$.
c) 4mn.
d) $2m^2$.
e) 0.

**82.** (Faap-SP) Um reservatório está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, **t** horas após o escoamento ter começado, é dado por $V = 50(80 - t)^2$. A quantidade de água que sai do reservatório nas cinco primeiras horas de escoamento é:

a) 281 250 litros.
b) 32 350 litros.
c) 42 500 litros.
d) 38 750 litros.
e) 320 000 litros.

**83.** (UFBA) Sendo $f(x) = (x - 3)(x + 2)$ uma função real, pode-se afirmar:

01) O conjunto imagem da função é $]-\infty, 3[$.
02) O gráfico da função intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(-2, 0)$ e $(3, 0)$.
04) A função é crescente no intervalo $[-3, 2]$.
08) O gráfico da função tem vértice no ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$
16) Para todo $x < -2$, $f(x) > 0$.
32) O eixo de simetria do gráfico da função é $x = \frac{3}{2}$.

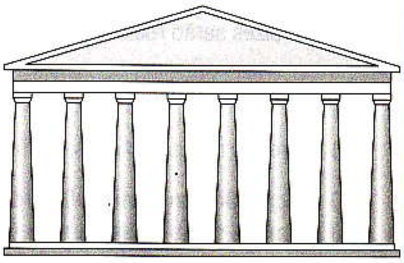
Marque como resposta a soma dos itens corretos.

**84.** (Vunesp) O número de diagonais de um polígono convexo de **x** lados é dado por $N(x) = \frac{x^2 - 3x}{2}$. Se o polígono possui 9 diagonais, seu número de lados é:

a) 10. b) 9. c) 8. d) 7. e) 6.

**85.** (UEL-PR) O Partenon, construído em Atenas, na Grécia Antiga, exemplifica o estilo e as proporções que se encontram em quase todos os templos gregos. Do ponto de vista da geometria, sua fachada é retangular (ver figura abaixo) e possui medidas especiais, obtidas da seguinte maneira: toma-se um segmento de comprimento **L** e divide-se em duas partes, de tal forma que a razão entre o segmento todo (**L**) e a parte maior (**x**) seja igual à razão entre a parte maior e a parte menor. A parte maior seria a base do retângulo, e a menor, a altura. Assinale a alternativa que indica essa razão.

a) $\frac{2}{\sqrt{5} - 1}$
b) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
c) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$
d) $\frac{2}{\sqrt{5} + 3}$
e) $\frac{2}{\sqrt{5} - 3}$



**86.** (Fuvest-SP) Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes da equação $10x^2 + 33x - 7 = 0$. O número inteiro mais próximo do número $5x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)$ é:

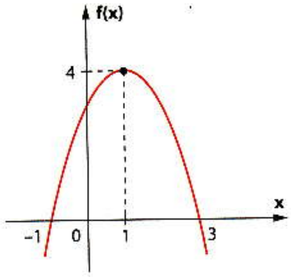
a) −33. b) −10. c) −7. d) 10. e) 33.

**87.** (FEI-SP) A equação $x^2 - x + c = 0$ possui duas raízes reais **r** e **s** tais que $r = 2s$. Os valores de **r** e **s** são, respectivamente:

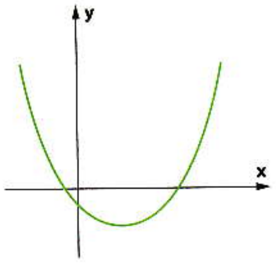
a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$.
b) 2 e 1.
c) $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{6}$.
d) −2 e −1.
e) 6 e 3.

**88.** (UFPB) Se f: IR ⟶ IR é uma função quadrática, cujo gráfico está desenhado abaixo, então:

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
c) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.
d) $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
e) $f(x) = x^2 + 2x + 3$.



**89.** (UFMG) Observe a figura, que representa o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$.



Assinale a única afirmativa falsa em relação a esse gráfico:

a) ac é negativo.
b) $b^2 - 4ac$ é positivo.
c) **b** é positivo.
d) **c** é negativo.

**90.** (UEL-PR) Sejam as funções quadráticas definidas por $f(x) = 3x^2 - kx + 12$. Seus gráficos não cortam o eixo das abscissas se, e somente se, **k** satisfizer à condição:

a) $k < 0$.
b) $k < 12$.
c) $-12 < k < 12$.
d) $0 < k < 12$.
e) $-4\sqrt{3} < k < 4\sqrt{3}$.

**91.** (Ufac) Dada a equação $2x^2 - 6x + 3m = 0$, assinale a alternativa correta:

a) As raízes serão reais e iguais, se $m = \frac{1}{2}$.
b) As raízes serão reais e desiguais, se $m < \frac{3}{2}$.
c) As raízes não serão reais, se $m > \frac{1}{2}$.
d) A equação nunca terá raízes reais.
e) As raízes serão nulas, se $m = 0$.

**92.** (UEL-PR) A função real **f**, de variável real, dada por $f(x) = -x^2 + 12x + 20$, tem um valor:

a) mínimo, igual a −16, para x = 6.
b) mínimo, igual a 16, para x = −12.
c) máximo, igual a 56, para x = 6.
d) máximo, igual a 72, para x = 12.
e) máximo, igual a 240, para x = 20.

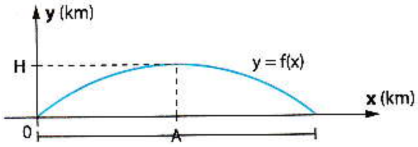
**93.** (FGV-SP) Sabe-se que o custo por unidade de mercadoria produzida de uma empresa é dado pela função $C(x) = x + \frac{10\,000}{x} - 160$, onde C(x) é o custo por unidade, em R$, e **x** é o total de unidades produzidas. Nas condições dadas, o custo total mínimo em que a empresa pode operar, em R$, é igual a:

a) 3 600,00.
b) 3 800,00.
c) 4 000,00.
d) 4 200,00.
e) 4 400,00.

**94.** (Fuvest-SP) O valor, em reais, de uma pedra semipreciosa é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa, em gramas. Infelizmente uma dessas pedras, de 8 gramas, caiu e se partiu em dois pedaços. O prejuízo foi o maior possível. Em relação ao valor original, o prejuízo foi de:

a) 92%. b) 80%. c) 50%. d) 20%. e) 18%.

**95.** (UFPB) O gráfico da função $y = f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x$, representado na figura abaixo, descreve a trajetória de um projétil, lançado a partir da origem.



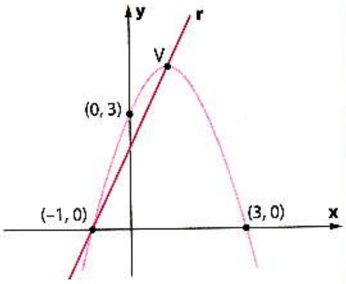
Sabendo-se que **x** e **y** são dados em quilômetros, a altura máxima **H** e o alcance **A** do projétil são, respectivamente:

a) 2 km e 40 km.
b) 40 km e 2 km.
c) 2 km e 10 km.
d) 10 km e 2 km.
e) 2 km e 20 km.

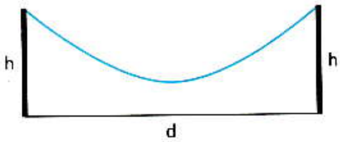
**96.** (UFSC) Assinale a única proposição correta.

A figura a seguir representa o gráfico de uma parábola cujo vértice é o ponto **V**. A equação da reta **r** é:

01) $y = -2x + 2$.
02) $y = x + 2$.
04) $y = 2x + 1$.
08) $y = 2x + 2$.
16) $y = -2x - 2$.



**97.** (Fuvest-SP) Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura **h**, situadas à distância **d** (ver figura), assuma a forma de uma parábola.



Suponha também que:

I) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2.
II) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$.

Se $h = \frac{3}{8}d$, então **d** vale:

a) 14. b) 16. c) 18. d) 20. e) 22.

**98.** (UFPB) O domínio da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ é:

a) $\mathbb{R} - \{0\}$.
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0\}$.
e) $\mathbb{R}$.

**99.** (UFPE) Sendo **x** um número real tal que $x > 7$ ou $x < -3$, assinale a alternativa correta.

a) $(x + 3)(x - 7) < 0$
b) $(x + 3)(x - 7) > 0$
c) $(x + 3)(x - 7) = 0$
d) $x^2 > 49$
e) $x^2 < 9$

**100.** (FGV-SP) O custo diário de produção de um artigo é $C = 50 + 2x + 0{,}1x^2$, onde **x** é a quantidade diária produzida. Cada unidade do produto é vendida por R$ 6,50. Entre que valores deve variar **x** para não haver prejuízo?

a) $19 \leq x \leq 24$
b) $20 \leq x \leq 25$
c) $21 \leq x \leq 26$
d) $22 \leq x \leq 27$
e) $23 \leq x \leq 28$

## Questões dissertativas

**101.** (Unicamp-SP) Uma piscina, cuja capacidade é de 120 m³, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, **t** horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b - t)^2$ para $0 \leq t \leq 20$ e $V(t) = 0$ para $t \geq 20$.

a) Calcule as constantes **a** e **b**.
b) Faça o gráfico da função V(t) para $t \in [0, 30]$.

**102.** (UFC-CE) As raízes da equação $x^2 - px + q = 0$, onde **p** e **q** são constantes, são os cubos das raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$. Determine os valores de **p** e **q**.

**103.** (Vunesp) Considere um retângulo cujo perímetro é 10 cm e onde **x** é a medida de um dos lados. Determine:

a) a área do retângulo em função de **x**;
b) o valor de **x** para o qual a área do retângulo seja máxima.

**104.** (Ufes) Uma microempresa fabrica e vende jaquetas. Todas as jaquetas produzidas são comercializadas e o preço de venda é R$ 75,00 por unidade. Se o custo total diário para fabricar **x** jaquetas é dado em reais por $C(x) = x^2 + 25x + 100$, determine:

a) o número de jaquetas a serem produzidas para que o lucro total diário seja máximo;
b) o lucro total diário máximo.

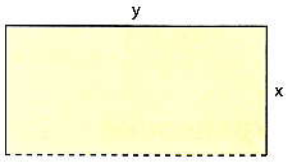
**105.** (FGV-SP) Num parque de diversões **A**, quando o preço de ingresso é R$ 10,00, verifica-se que 200 freqüentadores comparecem por dia; quando o preço é R$ 15,00, comparecem 180 freqüentadores por dia.

a) Admitindo que o preço (**p**) relaciona-se com o número de freqüentadores por dia (**x**) através de uma função do 1º grau, obtenha essa função.
b) Num outro parque **B**, a relação entre **p** e **x** é dada por $p = 80 - 0{,}4x$. Qual o preço que deverá ser cobrado para maximizar a receita diária?

**106.** (UFRJ) Um avião tem combustível para voar durante 4 horas. Na presença de um vento com velocidade **v** km/h na direção e sentido do movimento, a velocidade do avião é de $(300 + v)$ km/h. Se o avião se desloca em sentido contrário ao do vento, sua velocidade é de $(300 - v)$ km/h. Suponha que o avião se afaste a uma distância **d** do aeroporto e retorne ao ponto de partida, consumindo todo o combustível, e que durante todo o trajeto a velocidade do vento é constante e tem a mesma direção que a do movimento do avião.

a) Determine **d** como função de **v**.
b) Determine para que valor de **v** a distância **d** é máxima.

**107.** (Vunesp) Em um acidente automobilístico, foi isolada uma região retangular, como mostrado na figura:



Se 17 m de corda (esticada e sem sobras) foram suficientes para cercar três lados da região, a saber, os dois lados menores de medida **x** e um lado maior de medida **y**, dados em metros, determine:

a) a área (em m²) da região isolada, em função do lado menor;
b) a medida dos lados **x** e **y** da região retangular, sabendo que a área da região era de 36 m², e a medida do lado menor era um número inteiro.

**108.** (Fuvest-SP) Seja $f(x) = ax^2 + (1 - a)x + 1$, onde **a** é um número real diferente de zero. Determine os valores de **a** para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

**109.** (FGV-SP) A receita mensal (em reais) de uma empresa é $R = 20\,000p - 2\,000p^2$, onde **p** é o preço de venda de cada unidade $(0 \leq p \leq 10)$.

a) Qual o preço **p** que deve ser cobrado para dar uma receita de R$ 50 000,00?
b) Para que valores de **p** a receita é inferior a R$ 37 500,00?

**110.** (UFPE) Se a equação $y = \sqrt{2x^2 + px + 32}$ define uma função real $y = f(x)$ cujo domínio é o conjunto dos reais, encontre o maior valor que **p** pode assumir.

# Módulo, função modular, logaritmo, função logarítmica

## Módulo de um número real

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real **r**, que representamos por $|r|$, é igual a **r** se $r \geqslant 0$ e igual a **−r** se $r < 0$.

$$|r| = r, \text{ se } r \geqslant 0$$

e

$$|r| = -r, \text{ se } r < 0$$

**Observação**: Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\sqrt{x^2} = |x|$.

### Propriedades

1ª) Para todo $r \in \mathbb{R}$, temos $|r| = |-r|$.

2ª) Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

## Função modular

Denomina-se *função modular* a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x|$, ou seja:

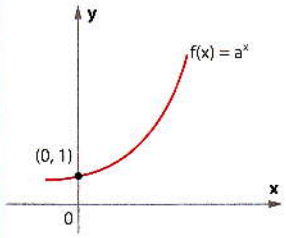
$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

## Função exponencial

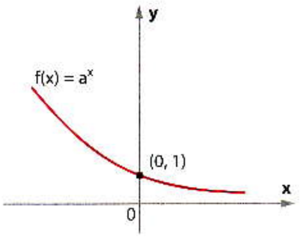
Dado um número real **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$), denominamos *função exponencial de base **a*** uma função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

### Gráficos da função exponencial

$a > 1$



$0 < a < 1$



**Equação**: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

**Inequação**: $a^x > a^y \Rightarrow \begin{cases} x > y, \text{ se } a > 1 \\ x < y, \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$

## Logaritmo de um número

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente **c** chama-se *logaritmo de **b** na base **a***, ou seja:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ com } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \text{ positivos e } a \neq 1$$

Nessa equivalência, temos:

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| $\log_a b = c$ | $a^c = b$ |
| **c**: logaritmo<br>**a**: base do logaritmo<br>**b**: logaritmando | **b**: potência<br>**a**: base da potência<br>**c**: expoente |

**Condição de existência**: $\log_a b$ existe quando e somente quando $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$.

### Conseqüências da definição de logaritmo

Considerando as condições de existência, temos:

1ª) $\log_a 1 = 0$

2ª) $\log_a a = 1$

3ª) $a^{\log_a N} = N$

4ª) $\log_a a^N = N$

5ª) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

### Propriedades

Considerando as condições de existência, temos:

1ª) $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

2ª) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3ª) $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$

4ª) $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ (mudança de base)

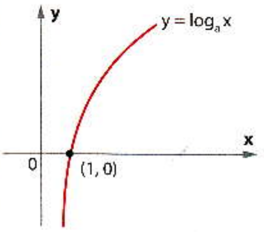
## Função logarítmica

Dado um número real **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$) denomina-se *função logarítmica de base **a*** uma função **f** de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$.

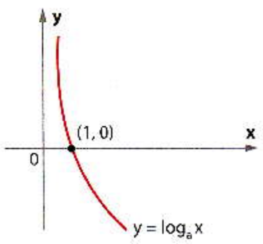
**Observação**: A função logarítmica é a inversa da função exponencial.

### Gráficos da função logarítmica

$a > 1$



$0 < a < 1$



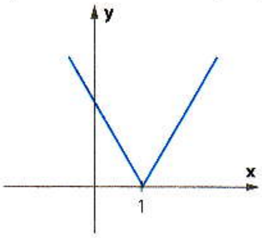
**Equação**: $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

**Inequação**: $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y, \text{ se } a > 1 \\ x < y, \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$

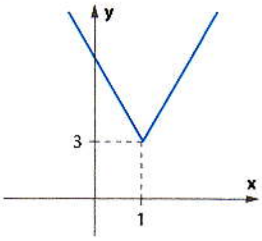
## Testes

**111.** (ESPM-SP) Qual o gráfico que melhor representa a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1| + 3$?

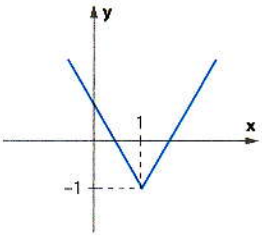
a)



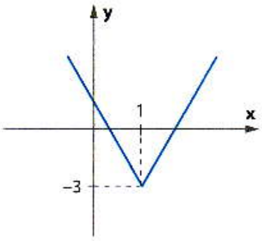
[✓ b)]



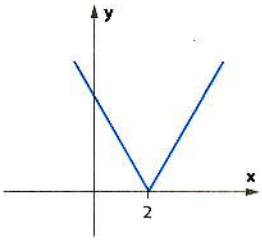
c)



d)

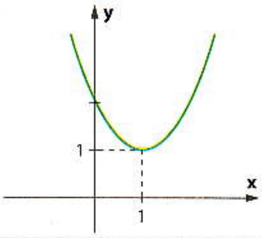


e)

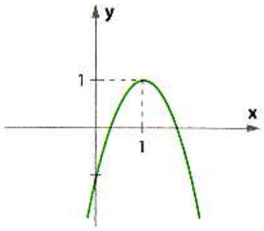


**112.** (Fuvest-SP) O módulo $|x|$ de um número real **x** é definido por $|x| = x$, se $x \geqslant 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Das alternativas abaixo, a que melhor representa o gráfico da função $f(x) = x \cdot |x| - 2x + 2$ é:

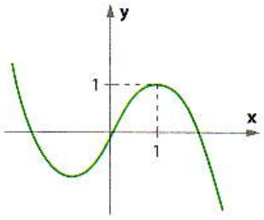
[✓ a)]



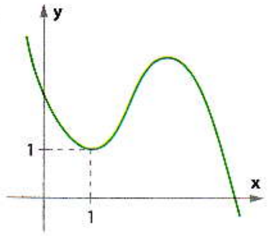
b)



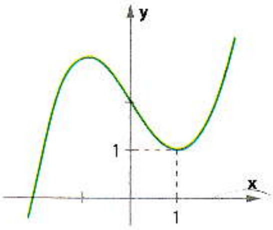
c)



d)



e)

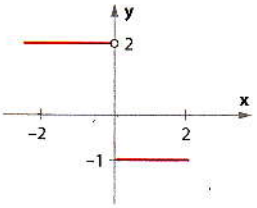


**113.** (Unifesp) Considere a função

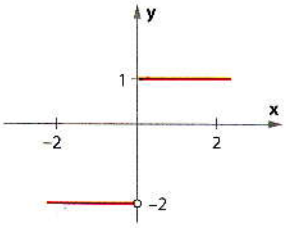
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

A função $g(x) = |f(x)| - 1$ terá o seguinte gráfico:

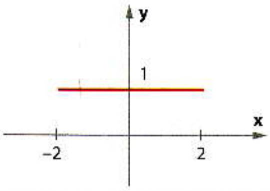
a)



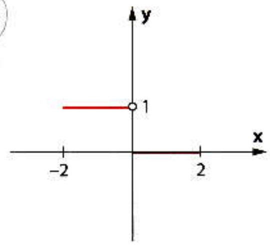
b)



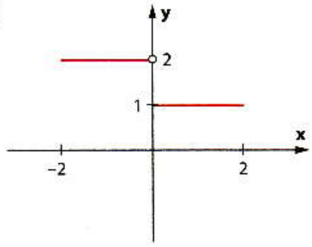
c)



[✓ d)]



e)



**114.** (FGV-SP) Multiplicando os valores inteiros de **x** que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 2| \leqslant 3$ e $|3x - 2| > 5$, obtemos:

a) 12. b) 60. c) −12. d) −60. [✓ e) 0.]

**115.** (UFC-CE) A soma dos inteiros que satisfazem a desigualdade $|x - 7| > |x + 2| + |x - 2|$ é:

a) 14. b) 0. c) −2. d) −15. e) −18.

**116.** (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x + 1}$. Se **a** e **b** são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

a) $a + b = 2$. c) $a - b = 3$. e) $a - b = 1$.
b) $a + b = 1$. d) $a - b = 2$.

**117.** (UEL-PR) Se o número real **K** satisfaz à equação $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, então $\mathbf{K^2}$ é igual a:

a) 0 ou $\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{2}$ ou 1. e) 1 ou 3.
b) 0 ou 1. d) 1 ou 2.

**118.** (AFA-SP) O conjunto solução da inequação $(0{,}5)^{x(x-2)} < (0{,}25)^{x - 1{,}5}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$. c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$. d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

**119.** (Unifesp) O valor de $\log_2 \left(\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n}{n!}\right)$ é:

a) $n^2$. b) $2n$. c) $n$. d) $2 \log_2 n$. e) $\log_2 n$.

**120.** (UFMG) Seja $n = 8^{2 \log_2 15 - \log_2 45}$. Então, o valor de **n** é:

a) $5^2$. b) $8^3$. c) $2^5$. d) $5^3$.

**121.** (UEL-PR) Admitindo-se que $\log_5 2 = 0{,}43$ e $\log_5 3 = 0{,}68$, obtém-se para $\log_5 12$ o valor:

a) 1,6843. c) 1,54. e) 0,2924.
b) 1,68. d) 1,11.

**122.** (UFC-CE) O valor da soma

$$\log_{10} \frac{1}{2} + \log_{10} \frac{2}{3} + \log_{10} \frac{3}{4} + ... + \log_{10} \frac{99}{100} \text{ é:}$$

a) 0. b) −1. c) −2. d) 2. e) 3.

**123.** (UFC-CE) O número real **x**, positivo e diferente de 1, que satisfaz à equação $\log_x (2x) \cdot \log_2 x = 3 - \log_2 \sqrt{x}$ é igual a:

a) $\sqrt[3]{2}$. b) 2. c) $2\sqrt[3]{2}$. d) 4. e) $4\sqrt[3]{2}$.

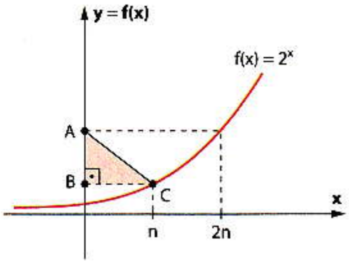
**124.** (PUC-SP) Se $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \log_y x = 2 \end{cases}$, então $x + y$ é igual a:

a) $\frac{5}{3}$. b) $\frac{10}{9}$. c) $\frac{8}{9}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{5}{9}$.

**125.** (Mack-SP) O domínio da função real definida por $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1 - |3^x - 2|}}$ é:

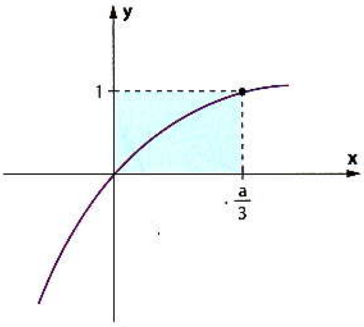
a) $]0,1[$. c) $]2,3[$. e) $]4,5[$.
b) $]1,2[$. d) $]3,4[$.

**126.** (Ufscar-SP) Se a área do triângulo retângulo ABC, indicado na figura, é igual a 3n, conclui-se que f(n) é igual a:



a) 2. b) $2\sqrt{2}$. c) 3. d) $3\sqrt{2}$. e) 4.

**127.** (Mack-SP) A figura mostra o esboço do gráfico da função $y = \log_a (x + b)$:



A área do retângulo assinalado é:

a) 1. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{3}{4}$. d) 2. e) $\frac{4}{3}$.

**128.** (FGV-SP) Daqui a **t** anos, o número de habitantes de uma cidade será $N = 40\,000(1{,}02)^t$. O valor de **t** para que a população dobre em relação à de hoje é:

a) $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}02}$. d) $2 \cdot \dfrac{\log 2}{\log 1{,}02}$.
b) 50. e) $2(\log 2)(\log 1{,}02)$.
c) $(\log 2)(\log 1{,}02)$.

**129.** (Ufscar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$, com $h(t)$ em metros e **t** em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

a) 9. b) 8. c) 5. d) 4. e) 2.

## Questões dissertativas

**130.** (FGV-SP) **A** e **B** são subconjuntos do conjunto dos números reais (IR) definidos por

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = |x + 1| - |x|\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant ||x + 1| - 2|\}$. Determine o intervalo real que representa $\bar{A} \cap \bar{B}$, sendo $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ os complementares de **A** e **B**, respectivamente, em relação a IR.

**131.** (Fuvest-SP)

a) Esboce, para **x** real, o gráfico da função $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$. O símbolo $|a|$ indica o valor absoluto de um número real **a** e é definido por $|a| = a$, se $a \geqslant 0$ e $|a| = -a$, se $a < 0$.

b) Para que valores reais de **x** $f(x) > 2x + 2$?

**132.** (Fuvest-SP) Seja $m \geqslant 0$ um número real e sejam **f** e **g** funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a) Esboce, num plano cartesiano, os gráficos de **f** e de **g** quando $m = \frac{1}{4}$ e $m = 1$.

b) Determine as raízes de $f(x) = g(x)$ quando $m = \frac{1}{2}$.

c) Determine, em função de **m**, o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

**133.** (Vunesp) Resolva as equações exponenciais, determinando os correspondentes valores de **x**.

a) $7^{(x-3)} + 7^{(x-2)} + 7^{(x-1)} = 57$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = -207$

**134.** (UFC-CE) Sendo **a** e **b** números reais positivos tais que $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$, calcule o valor de $\frac{a}{b}$.

**135.** (IME-RJ) Considerando $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, em função de **a** e **b**, determine o logaritmo do número $\sqrt[5]{11{,}25}$ no sistema de base 15.

**136.** (FGV-SP)

a) Resolva a equação $\log (x - 2) + \log (x + 2) = 2$.

b) Quais as raízes da equação $x^{\log x} = 100x$?

**137.** (Unicamp-SP) Resolva o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$.

**138.** (FGV-SP) O gerente de produção de uma indústria construiu a tabela abaixo, relacionando a produção dos operários com sua experiência.

| | | |
|---|---|---|
| **Experiência** (meses) | 0 | 6 |
| **Produção** (unidades por hora) | 200 | 350 |

Acredita o gerente que a produção **Q** se relaciona à experiência **t**, através da função $Q(t) = 500 - Ae^{-kt}$, sendo $e = 2{,}72$ e **k** um número real, positivo.

a) Considerando que as projeções do gerente de produção dessa indústria estejam corretas, quantos meses de experiência serão necessários para que os operários possam produzir 425 unidades por hora?

b) Desse modo, qual será a máxima produção possível dos operários dessa empresa?

**139.** (Vunesp) Uma escala logarítmica foi construída para representar valores muito pequenos de uma variável **x**, usando a fórmula $y = -\log_{10} x$. A tabela mostra dois desses valores:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | $x_1$ | ... | $x_2$ | ... |
| $\mathbf{y = -\log_{10} x}$ | 1,9 | ... | 4,9 | ... |

a) Por quanto devemos multiplicar $\mathbf{x_2}$ para obter $\mathbf{x_1}$?

b) Se $x_3 = 0{,}0000001$, qual deve ser o valor correspondente $\mathbf{y_3}$ nessa escala?

# Progressões

## Progressão aritmética (PA)

Razão: $r = a_n - a_{n-1}$

Termo geral: $a_n = a_1 + (n - 1)r$ ou $a_n = a_p + (n - p)r$

Três termos consecutivos na PA (..., a, b, c, ...): $2b = a + c$

Notação especial de PA de três termos: PA $(x - r, x, x + r)$

Eqüidistância de termos:

$a_x + a_y = a_p + a_q \Leftrightarrow x + y = p + q$

Soma dos **n** primeiros termos: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

**Observação:** $S_1 = a_1$ e $S_n - S_{n-1} = a_n$

## Progressão geométrica (PG)

Razão: $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Termo geral: $a_n = a_1q^{n-1}$ ou $a_n = a_pq^{n-p}$

Três termos consecutivos na PG (..., a, b, c, ...): $b^2 = ac$

Notação especial de PG de três termos: PG $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

Eqüidistância de termos: $a_x \cdot a_y = a_p \cdot a_q \Leftrightarrow x + y = p + q$

Soma dos **n** primeiros termos: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Limite da soma (para $|q| < 1$): $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$

## Testes

**140.** (Vunesp) Considere as seqüências $(a_n)$ e $(b_n)$ definidas por $a_{n+1} = 2^n$ e $b_{n+1} = 3^n$, $n \neq 0$. Então, o valor de $a_{11}b_6$ é:

a) $2^{11} \cdot 3^6$. c) $5^{15}$. e) $6^{30}$.
b) $(12)^5$. d) $6^{15}$.

**141.** (Vunesp) Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considere uma colônia de coelhos que se inicia com um único casal de coelhos adultos e denote por $\mathbf{a_n}$ o número de casais adultos desta colônia ao final de **n** meses. Se $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e, para $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o número de casais de coelhos adultos na colônia ao final do quinto mês será:

a) 13. b) 8. c) 6. d) 5. e) 4.

**142.** (Unifesp) A soma dos termos que são números primos da seqüência cujo termo geral é dado por $a_n = 3n + 2$, para **n** natural, variando de 1 a 5, é:

a) 10. b) 16. c) 28. d) 33. e) 36.

**143.** (UEL-PR) Uma progressão aritmética de **n** termos tem razão igual a 3. Se retirarmos os termos de ordem ímpar, os de ordem par formarão uma progressão:

a) aritmética de razão 2.
b) aritmética de razão 6.
c) aritmética de razão 9.
d) geométrica de razão 3.
e) geométrica de razão 6.

**144.** (Ufscar-SP) Uma função **f** é definida recursivamente como $f(n + 1) = \frac{5f(n) + 2}{5}$. Sendo $f(1) = 5$, o valor de $f(101)$ é:

a) 45. c) 55. e) 65.
b) 50. d) 60.

**145.** (Unirio-RJ) Dado um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 cm, construímos um segundo triângulo retângulo onde um dos catetos está apoiado na hipotenusa do primeiro, e o outro cateto mede 2 cm. Construímos um terceiro triângulo com um dos catetos medindo 2 cm e o outro apoiado na hipotenusa do segundo triângulo. Se continuarmos a construir triângulos sempre da mesma forma, a hipotenusa do 15º triângulo medirá:

a) 15 cm. c) 14 cm. e) $8\sqrt{2}$ cm.
b) $15\sqrt{2}$ cm. d) 8 cm.

**146.** (Fuvest-SP) Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são $1 - a$, $-a$, $\sqrt{11 - a}$. O quarto termo dessa PA é:

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

**147.** (Unifesp) Se os primeiros quatro termos de uma progressão aritmética são **a**, **b**, 5a, **d**, então o quociente $\frac{d}{b}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) 2. d) $\frac{7}{3}$. e) 5.

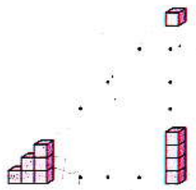
**148.** (UFS-SE) No mês de maio de 1996, uma pessoa colocou R$ 100,00 em sua caderneta de poupança e, todos os meses, vem fazendo depósitos, cada mês colocando R$ 20,00 a mais do que no mês anterior. Dessa forma, ao efetuar o 14º depósito, terá depositado a quantia total de:

a) R$ 280,00. [✓ d)] R$ 3 220,00.
b) R$ 380,00. e) R$ 3 240,00.
c) R$ 1 610,00.

**149.** (UFC-CE) A soma dos 15 primeiros termos de uma progressão aritmética é 150. O 8º termo desta PA é:

a) 10. b) 15. c) 20. d) 25. e) 30.

**150.** (UFPB) Uma escada foi feita com 210 blocos cúbicos iguais, que foram colocados uns sobre os outros, formando pilhas, de modo que a primeira pilha tinha apenas 1 bloco, a segunda, 2 blocos, a terceira, 3 blocos, e assim sucessivamente, até a última pilha, conforme a figura abaixo.



A quantidade de degraus dessa escada é:

a) 50. b) 40. c) 30. [✓ d)] 20. e) 10.

**151.** (Fuvest-SP) A seqüência $\mathbf{a_n}$ é uma PA estritamente crescente, de termos positivos. Então, a seqüência $b_n = 3^{a_n}$, $n \neq 1$, é uma:

a) PG crescente.
b) PA crescente.
c) PG decrescente.
d) PA decrescente.
e) seqüência que não é uma PA e não é uma PG.

**164.** (Unicamp-SP) A Anatel determina que as emissoras de rádio FM utilizem as freqüências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com freqüências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua freqüência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja freqüência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja freqüência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

a) Quantas emissoras FM podem funcionar (na mesma região), respeitando-se o intervalo de freqüências permitido pela Anatel? Qual o número do canal com maior freqüência?

b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a freqüência do canal 285, supondo que todas as freqüências possíveis são utilizadas?

**165.** (Unifesp) Em uma seqüência de 8 números, $a_1$, $a_2$, ..., $a_7$, $a_8$, os cinco primeiros termos formam uma progressão aritmética (PA) de primeiro termo 1; os três últimos formam uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo 2. Sabendo que $a_5 = a_6$ e $a_4 = a_7$:

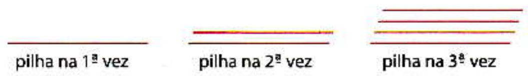
a) determine as razões da PA e da PG;

b) escreva os oito termos dessa seqüência.

**166.** (Ufes) Em um rebanho de 15 000 reses, uma foi infectada pelo vírus "mc1". Cada animal infectado vive dois dias, ao final dos quais infecta outros três animais. Se cada rês é infectada uma única vez, em quanto tempo o "mc1" exterminará a metade do rebanho?

(Dado: $\log_3 15\,001 = 8{,}75$.)

**167.** (Vunesp) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente.



Determine, ao final de 9 dessas operações:

a) quantas tábuas terá a pilha;

b) a altura, em metros, da pilha.

**168.** (UFC-CE) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2^{-x}$. Calcule o valor de

$f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - f(5) + ...$

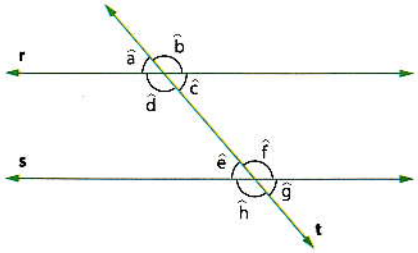
**169.** (UFRJ) Uma progressão geométrica de oito termos tem primeiro termo igual a 10. O logaritmo decimal do produto de seus termos vale 36. Ache a razão da progressão.

# Geometria plana

## Ângulos

Figura plana formada por duas semi-retas de mesma origem.

- Ângulo raso: ângulo de medida 180°
- Ângulo reto: ângulo de medida 90°
- Ângulo agudo: ângulo cuja medida está entre 0° e 90°
- Ângulo obtuso: ângulo cuja medida está entre 90° e 180°
- Ângulos congruentes: ângulos que têm a mesma medida (símbolo: ≅)
- Ângulos complementares: par de ângulos cuja soma das medidas é 90°
- Ângulos suplementares: par de ângulos cuja soma das medidas é 180°
- Ângulos adjacentes: ângulos que possuam um lado comum e as regiões determinadas por eles não têm mais pontos comuns
- Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal:



**r** e **s**: retas paralelas

**t**: reta transversal

$\hat{a}$ e $\hat{c}$: ângulos opostos pelo vértice

$\hat{a}$ e $\hat{e}$: ângulos correspondentes

$\hat{a}$ e $\hat{g}$: ângulos alternos externos

$\hat{c}$ e $\hat{e}$: ângulos alternos internos

$\hat{c}$ e $\hat{f}$: ângulos colaterais internos

$\hat{a}$ e $\hat{h}$: ângulos colaterais externos

## Triângulos

Polígono que tem três lados (conseqüentemente tem três vértices e três ângulos internos).

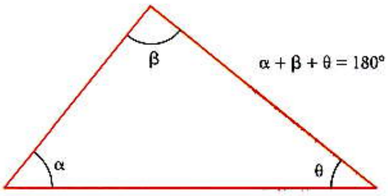
### Classificação de triângulos

| Quanto aos ângulos | Quanto aos lados |
|---|---|
| • *Acutângulo*: possui três ângulos agudos. | • *Eqüilátero*: três lados de mesma medida. |
| • *Retângulo*: possui dois ângulos agudos e um reto. | • *Isósceles*: dois lados de mesma medida. |
| • *Obtusângulo*: possui dois ângulos agudos e um obtuso. | • *Escaleno*: três lados de medidas diferentes entre si. |

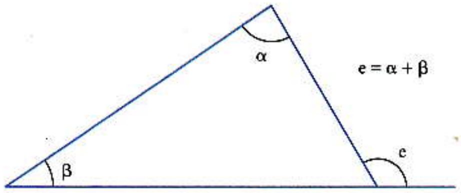
## Propriedades dos triângulos

- Isósceles: Os ângulos da base têm a mesma medida.
- Eqüilátero: os três ângulos internos têm a mesma medida, igual a 60°.
- Retângulo: teorema de Pitágoras (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos).

## Soma dos ângulos internos

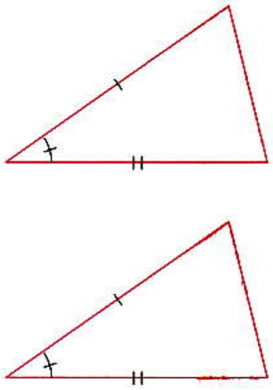


## Ângulo externo

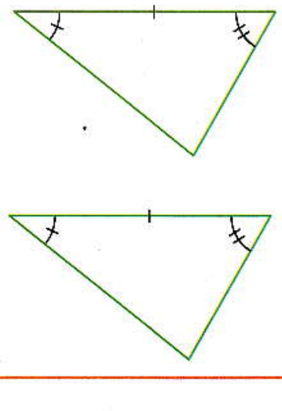


## Congruência de triângulos

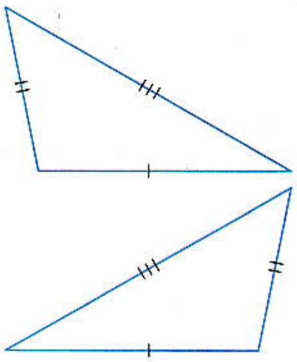
**1º caso: LAL**



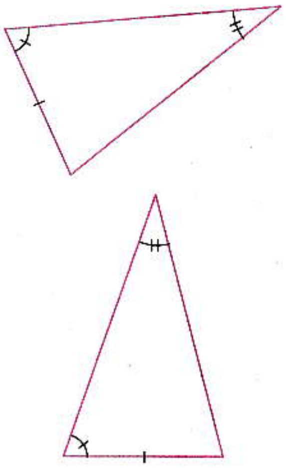
**2º caso: ALA**



**3º caso: LLL**



**4º caso: $\text{LAA}_o$**



## Desigualdade triangular

- Ao maior ângulo opõe-se o maior lado e, reciprocamente, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
- A medida de cada lado de um triângulo deve ser menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

## Quadriláteros

Polígono de quatro lados e, portanto, de quatro vértices e quatro ângulos internos.

### Quaisquer

- Soma dos ângulos internos: 360°
- Duas diagonais

### Paralelogramos

Quadriláteros formados por dois pares de lados paralelos.

**Propriedades**

1ª) Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos são congruentes e dois ângulos não opostos são suplementares (soma das medidas: 180°).

2ª) Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

3ª) Em todo paralelogramo, as diagonais cortam-se ao meio.

## Trapézios

Quadriláteros que têm apenas um par de lados paralelos: base maior e base menor.

**Trapézio retângulo**

Todo trapézio que tem dois ângulos retos. Nele, um dos lados que não é base é perpendicular às duas bases.

**Trapézio isósceles**

Todo trapézio que tem dois lados não paralelos congruentes.

## Polígonos convexos

Diagonais: $d = \frac{n(n-3)}{2}$

Soma dos ângulos internos: $S_i = (n - 2) \cdot 180°$

Soma dos ângulos externos: $S_e = 360°$

## Polígonos regulares

Ângulo interno: $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

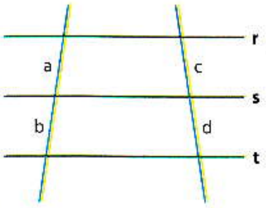
Ângulo externo: $a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$

$a_e + a_i = 180°$

## Cevianas particulares e pontos notáveis de um triângulo

| Ceviana | Definição | Ponto notável |
|---|---|---|
| Mediana | Segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. | ***Baricentro***: encontro das medianas do triângulo; centro de gravidade (ponto de equilíbrio) do triângulo. |
| Bissetriz | Segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice. | ***Incentro***: encontro das bissetrizes internas ao triângulo; centro da circunferência inscrita no triângulo, pois eqüidista dos três lados. |
| Altura | Segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos. | ***Ortocentro***: ponto de encontro das retas que contêm as alturas, podendo pertencer ao exterior do triângulo. |
| Mediatriz | Reta que passa pelo ponto médio de um lado do triângulo e é perpendicular a ele. | ***Circuncentro***: ponto de encontro das mediatrizes dos lados do triângulo; centro da circunferência circunscrita ao triângulo, pois eqüidista dos três vértices. |

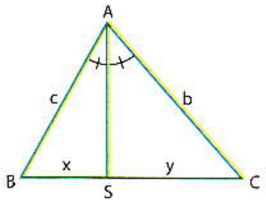
## Teorema de Tales



$r \,//\, s \,//\, t$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

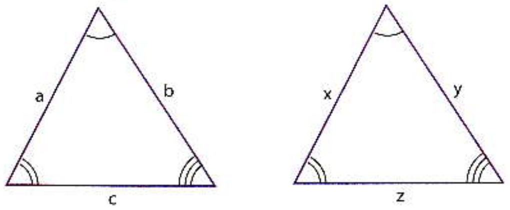
## Teorema da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo



$\overline{AS}$: bissetriz

$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

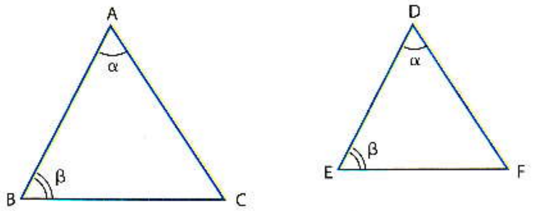
## Semelhança de triângulos



$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ = k (razão de semelhança)

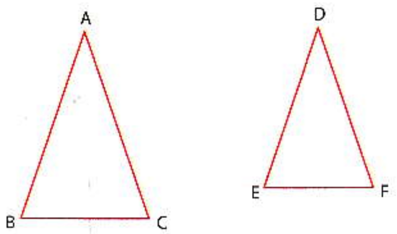
## Casos de semelhança

**1º caso: AA**



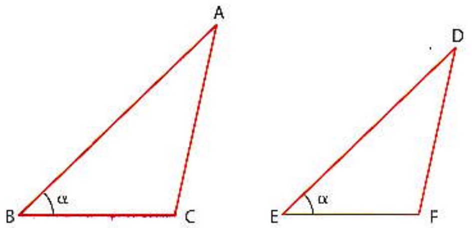
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{D}\\ \hat{B} \cong \hat{E}\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

**2º caso: LLL**



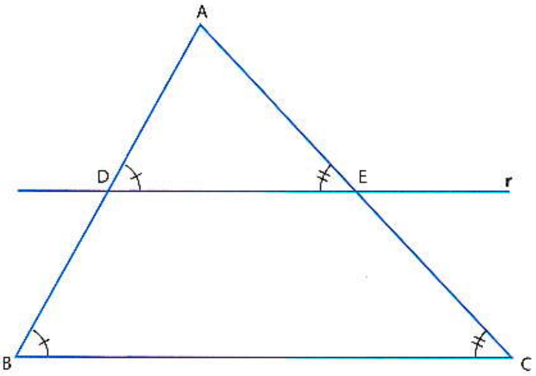
$$\left.\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}\right\} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

### 3º caso: LAL



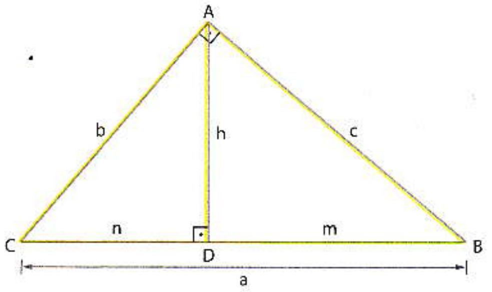
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}\\ \hat{B}\cong\hat{E}\end{array}\right\}\ \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

## Teorema fundamental da semelhança



$r \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$

## Relações métricas nos triângulos retângulos



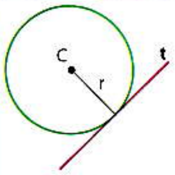
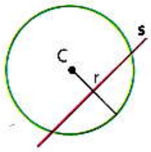
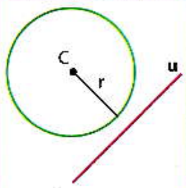
Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\text{Relações métricas}\begin{cases}b^2 = an\\ c^2 = am\\ h^2 = mn\\ ah = bc\end{cases}$$

## Circunferência

Figura geométrica formada por todos os pontos de um plano eqüidistantes de um dado ponto desse plano, chamado centro.

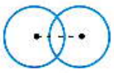
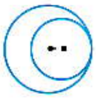
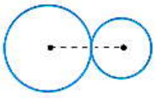
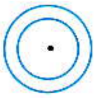
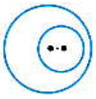
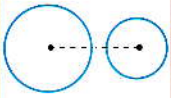
## Posições relativas entre reta e circunferência

| **Tangentes (um único ponto comum)** | **Secantes (dois pontos comuns)** | **Externas (nenhum ponto comum)** |
|---|---|---|
|  <br>$d_{C,t} = \text{raio}$ |  <br>$d_{C,s} < \text{raio}$ |  <br>$d_{C,u} > \text{raio}$ |

## Posições relativas entre duas circunferências

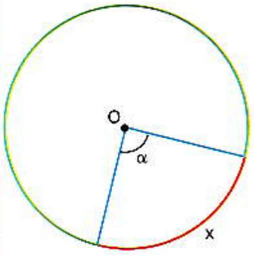
São dadas em função do número de pontos comuns às circunferências.

Chamando de $\mathbf{O_1}$ e $\mathbf{O_2}$ os centros e $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ os respectivos raios, sendo $r_1 > r_2$, obteremos:

| **Pontos comuns** | **Posição relativa** | **Distância entre os centros em função dos raios** | **Figura** |
|---|---|---|---|
| 2 | Secantes | $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ |  |
| 1 | Tangentes internas | $d = r_1 - r_2$ |  |
| | Tangentes externas | $d = r_1 + r_2$ |  |
| 0 | Internas concêntricas | $d = 0$ |  |
| | Internas não concêntricas | $d < r_1 - r_2$ |  |
| | Externas | $d > r_1 + r_2$ |  |

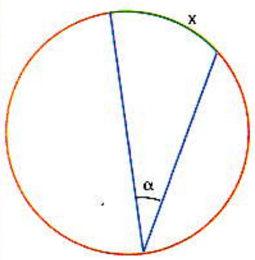
## Ângulos em uma circunferência

### Ângulo central

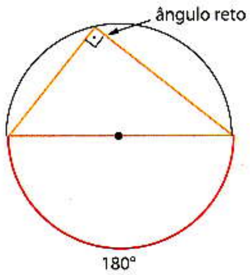


$\alpha = x$

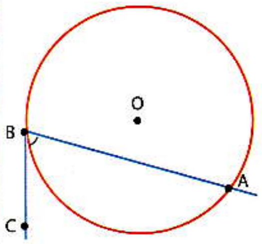
### Ângulo inscrito



$$\alpha = \frac{x}{2}$$



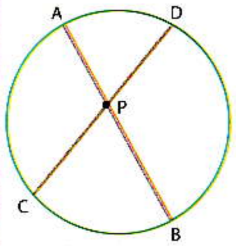
### Ângulo de segmento



$A\hat{B}C$ é ângulo de segmento.

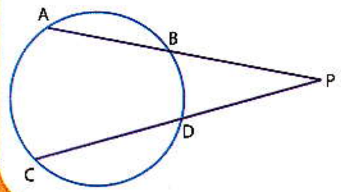
## Relações métricas na circunferência

### Cruzamento de duas cordas



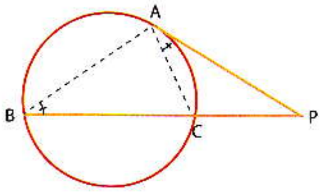
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

### Dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

### Segmento secante e segmento tangente a partir de um mesmo ponto



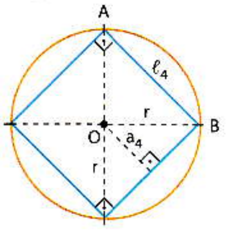
$(PA)^2 = PB \cdot PC$

## Polígonos regulares inscritos na circunferência

Apótema é um segmento com uma extremidade no centro da circunferência circunscrita e outra no ponto médio de um de seus lados.

Se desenharmos uma circunferência inscrita ao polígono regular, o apótema coincidirá com seu raio.

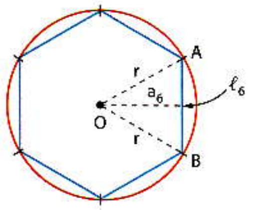
### Quadrado



$\ell_4 = r\sqrt{2}$

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

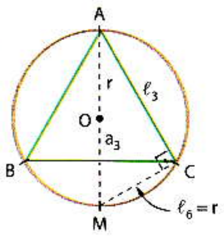
### Hexágono



$\ell_6 = r$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

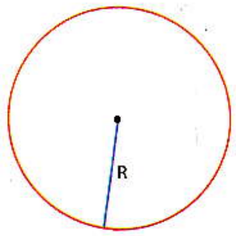
### Triângulo eqüilátero



$\ell_3 = r\sqrt{3}$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

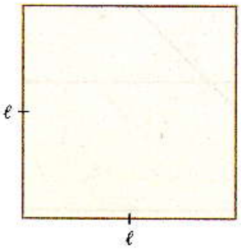
## Comprimento da circunferência



$C = 2\pi R$

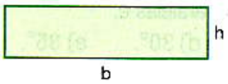
# Áreas

## Área da região quadrada



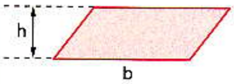
$$A = \ell^2$$

## Área da região retangular



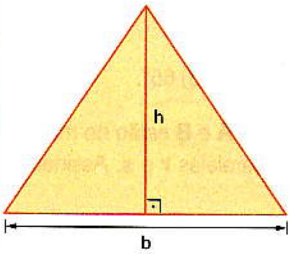
$$A = bh$$

## Área da região limitada por um paralelogramo



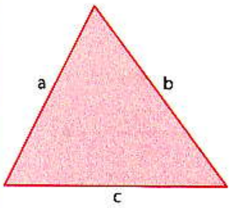
$$A = bh$$

## Área da região triangular



$$A = \frac{bh}{2}$$

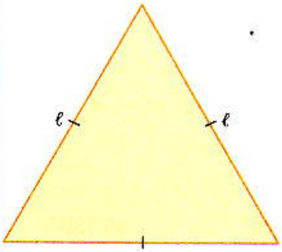
### Área da região triangular sendo conhecidos os três lados (Fórmula de Heron)



$$p = \frac{a + b + c}{2} \text{ (semiperímetro)}$$

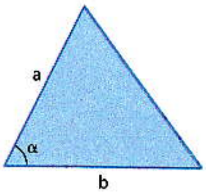
$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

### Área da região limitada por um triângulo eqüilátero



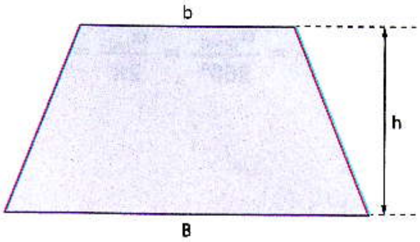
$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

### Área de uma região triangular com o auxílio da Trigonometria



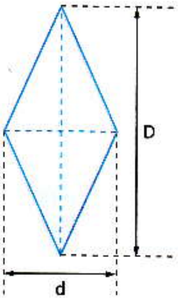
$$A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \alpha$$

## Área da região limitada por um trapézio



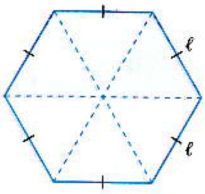
$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

## Área da região limitada por um losango



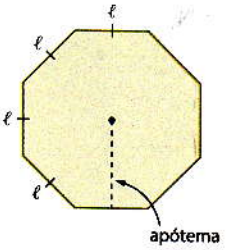
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

## Área da região limitada por um hexágono regular



$$A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

## Área de uma região limitada por um polígono regular



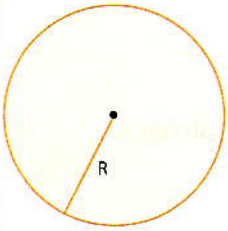
**n** lados

**p:** semiperímetro

$$A = \frac{n\ell a}{2}$$

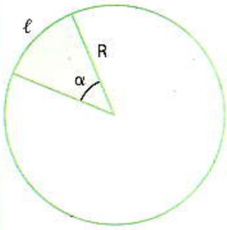
$$A = pa$$

## Área do círculo



$$A = \pi R^2$$

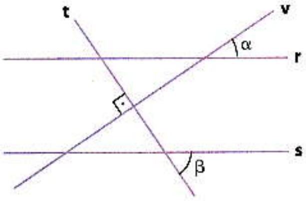
## Área do setor circular



$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

## Testes

**170.** (Cesesp-PE) Na figura abaixo as retas **r** e **s** são paralelas e as retas **t** e **v** são perpendiculares.

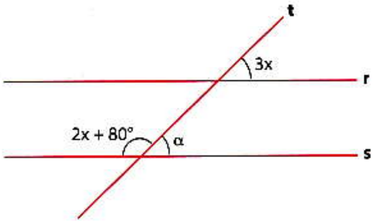


Assinale, então, dentre as alternativas abaixo, a única que completa corretamente a sentença: "os ângulos distintos $\alpha$ e $\beta$ são...:

a) opostos pelo vértice". d) complementares".
b) adjacentes". e) sempre congruentes".
c) suplementares".

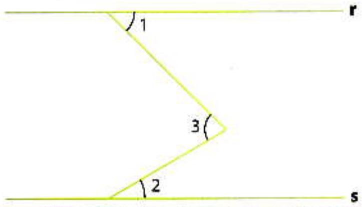
**171.** (UFJF-MG) Na figura abaixo as retas **r** e **s** são paralelas e cortadas por uma reta **t**. O ângulo $\alpha$ na figura vale:

a) 60°.
b) 55°.
c) 50°.
d) 20°.

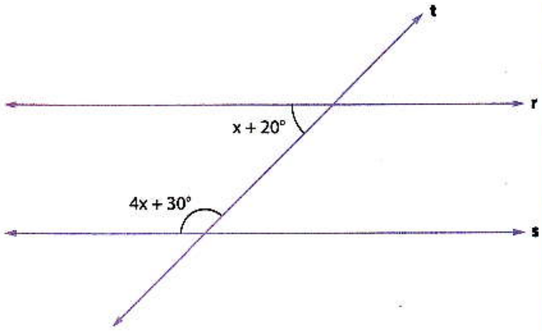


**172.** (Fuvest-SP) Na figura, as retas **r** e **s** são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é:

a) 50. b) 55. c) 60. d) 80. e) 100.



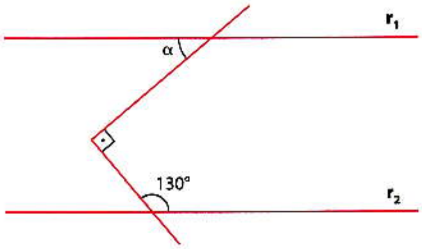
**173.** (Unaerp-SP) As retas **r** e **s** são interceptadas pela transversal **t**, conforme a figura.



O valor de **x** para que **r** e **s** sejam paralelas é:

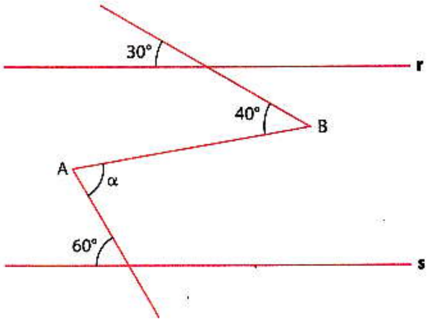
a) 20°. b) 26°. c) 28°. d) 30°. e) 35°.

**174.** (Unirio-RJ) As retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ são paralelas. O valor do ângulo $\alpha$, apresentado na figura a seguir, é:



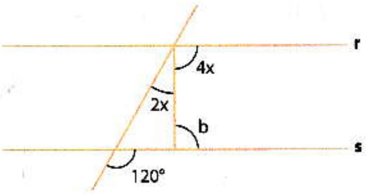
a) 40°. b) 45°. c) 50°. d) 65°. e) 130°.

**175.** (FGV-SP) Na figura, os pontos **A** e **B** estão no mesmo plano que contém as retas paralelas **r** e **s**. Assinale o valor de $\alpha$.



a) 30° b) 50° c) 40° d) 70° e) 60°

**176.** (UFG-GO) Na figura abaixo as retas **r** e **s** são paralelas.



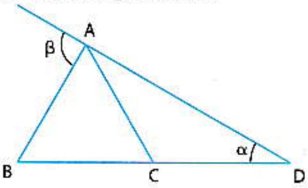
A medida do ângulo **b** é:

a) 100°. c) 110°. e) 130°.
b) 120°. d) 140°.

**177.** (UFG-GO) Se dois lados de um triângulo medem respectivamente 3 dm e 4 dm, podemos afirmar que a medida do terceiro lado é:

a) igual a 5 dm.
b) igual a 1 dm.
c) igual a $\sqrt{7}$ dm.
d) menor que 7 dm.
e) maior que 7 dm.

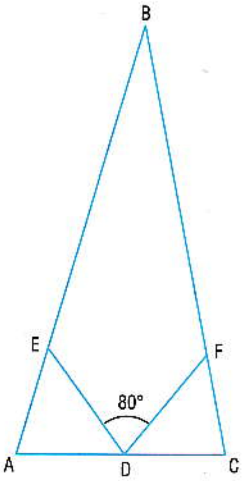
**178.** (UFC-CE) Na figura, os segmentos de reta AB, AC e CD são congruentes, $\beta$ é um ângulo externo, e $\alpha$ um ângulo interno do triângulo ABD.



Assinale a opção que contém a expressão correta de $\beta$ em termos de $\alpha$.

a) $\beta = 3\alpha$
d) $\beta = \frac{2\alpha}{3}$
b) $\beta = 2\alpha$
e) $\beta = \frac{3\alpha}{2}$
c) $\beta = \frac{\alpha}{2}$

**179.** (Fuvest-SP) Na figura abaixo, tem-se que AD = AE, CD = CF e BA = BC.

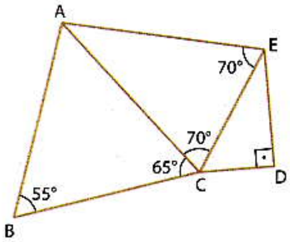


Se o ângulo EDF mede 80°, então o ângulo ABC mede:

a) 20°. b) 30°. c) 50°. d) 60°. e) 90°.

**180.** (UFMG) Com base nos dados dessa figura, pode-se afirmar que o maior segmento é:

a) AB.
b) AE.
c) EC.
d) BC.
e) ED.



**181.** (Uerj) Se um polígono tem todos os lados iguais, então todos os seus ângulos internos são iguais. Para mostrar que essa proposição é falsa, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

a) losango. c) retângulo.
b) trapézio. d) quadrado.

**182.** (PUC-RJ) Os ângulos internos de um quadrilátero medem 3x − 45, 2x + 10, 2x + 15 e x + 20 graus. O menor ângulo mede:

a) 90°. b) 65°. c) 45°. d) 105°. e) 80°.

**183.** (Unifesp) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1 : 3. O ângulo menor desse paralelogramo mede:

a) 45°. b) 50°. c) 55°. d) 60°. e) 65°.

**184.** (Fuvest-SP) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

a) 13. b) 14. c) 15. d) 16. e) 17.

**185.** (Faap-SP) A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

a) 60°.
b) 45°.
c) 36°.
d) 83°.
e) 51°.

**186.** (Unitau-SP) O polígono regular convexo em que o número de lados é igual ao número de diagonais é o:

a) dodecágono. d) hexágono.
b) pentágono. e) heptágono.
c) decágono.

**187.** (Mack-SP) Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Então, o número de diagonais desse polígono é:

a) 119. b) 135. c) 152. d) 90. e) 104.

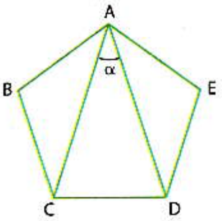
**188.** (UFPB) O número de lados do polígono que tem 90 diagonais é:

a) 20. d) 9.
b) 5. e) nenhuma das respostas.
c) 15.

**189.** (Ibmec-SP) Um matemático gostaria de recobrir o chão de sua sala com várias peças de mesma forma e mesmo tamanho, colocando as peças uma ao lado da outra, sem deixar espaços e sem sobreposições. Não serviriam para este recobrimento as peças com o formato de:

a) triângulo eqüilátero.
b) quadrado.
c) losango.
d) pentágono regular.
e) hexágono regular.

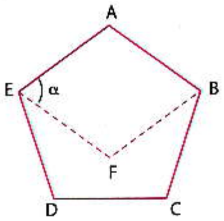
**190.** (Fuvest-SP) Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular.



A medida, em graus, do ângulo α é:

a) 32°. b) 34°. c) 36°. d) 38°. e) 40°.

**191.** (Mack-SP) Na figura, ABCDE é um pentágono regular, EF é paralelo a AB e BF é paralelo a AE.

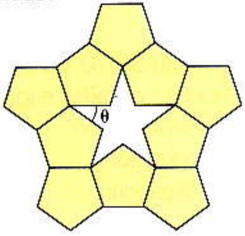


A medida do ângulo α é:

a) 72°. b) 54°. c) 60°. d) 76°. e) 36°.

**192.** (Unifesp) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura. Nestas condições, o ângulo θ mede:

a) 108°.
b) 72°.
c) 54°.
d) 36°.
e) 18°.



**193.** (Ufscar-SP) A figura 1 representa um determinado encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem sobreposições e cortes.

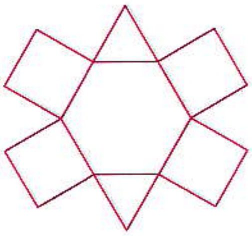


**Figura 1**

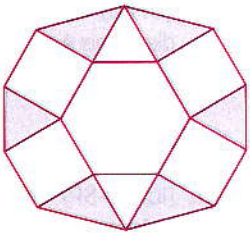


**Figura 2**

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados perfeitamente nos espaços da figura 1, como indicado na figura 2, é correto dizer que:

a) 2 são triângulos eqüiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 15°.
b) 2 são triângulos eqüiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
c) 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 50° e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
d) 2 são triângulos eqüiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.
e) 2 são triângulos eqüiláteros e 4 são triângulos escalenos.

**194.** (Fuvest-SP) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os demais ângulos internos medem 128° cada um. O número de lados do polígono é:

a) 6. b) 7. c) 13. d) 16. e) 17.

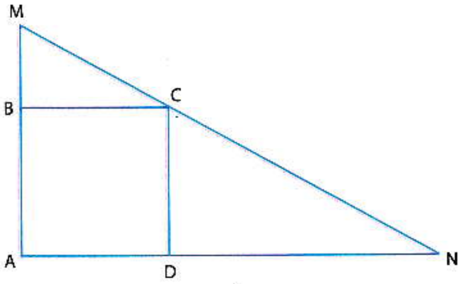
**195.** (Unitau-SP) O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:

a) mediana.
b) mediatriz.
c) bissetriz.
d) altura.
e) base.

**196.** (Ufes) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros ângulos internos?

a) 20°. b) 40°. c) 60°. d) 80°. e) 140°.

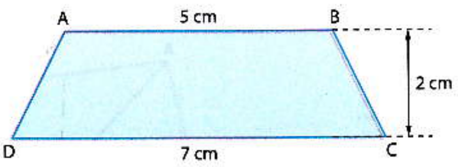
**197.** (UFMG) Nesta figura, o quadrado ABCD está inscrito no triângulo AMN, cujos lados AM e NA medem, respectivamente, **m** e **n**.



Então, o lado do quadrado mede:

a) $\frac{mn}{m+n}$.
b) $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{8}}$.
c) $\frac{m+n}{4}$.
d) $\frac{\sqrt{mn}}{2}$.

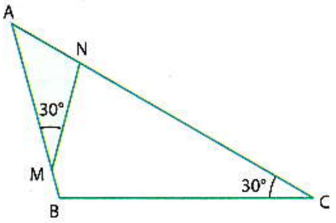
**198.** (UEL-PR) Dado o trapézio da figura abaixo, considere o triângulo CDX obtido pelo prolongamento dos lados DA e CB do trapézio.



A medida da altura desse triângulo é:

a) 7,0 cm.
b) 6,5 cm.
c) 6,0 cm.
d) 5,5 cm.
e) 5,0 cm.

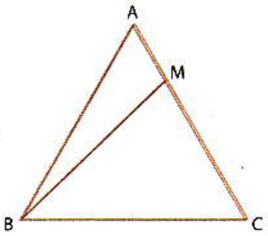
**199.** (Mack-SP) No terreno ABC da figura, uma pessoa pretende construir uma residência, preservando a área verde da região assinalada. Se BC = 80 m, AC = 120 m e MN = 40 m, a área livre para a construção, em metros quadrados, é de:



a) 1 400.
b) 1 600.
c) 1 800.
d) 2 000.
e) 2 200.

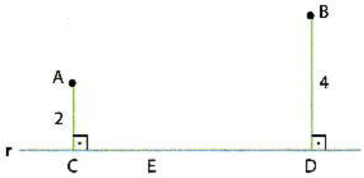
**200.** (Fuvest-SP) Dados: ângulo $M\hat{B}C$ = ângulo $B\hat{A}C$; AB = 3, BC = 2 e AC = 4. Então, MC é igual a:

a) 3,5.
b) 2.
c) 1,5.
d) 1.
e) 0,5.

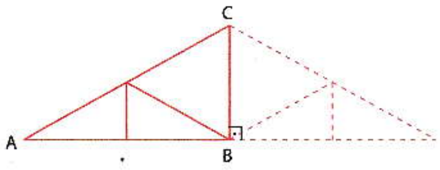


**201.** (Fuvest-SP) Na figura, as distâncias dos pontos **A** e **B** à reta **r** valem 2 e 4. As projeções ortogonais de **A** e **B** sobre essa reta são os pontos **C** e **D**. Se a medida de CD é 9, a que distância de **C** deverá estar o ponto **E**, do segmento CD, para que $C\hat{E}A = D\hat{E}B$?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7



**202.** (Mack-SP) A figura a seguir representa uma estrutura de construção chamada tesoura de telhado. Sua inclinação é tal que, a cada metro deslocado na horizontal, há um deslocamento de 40 cm na vertical. Se o comprimento da viga AB é 5 m, das alternativas a seguir, a que melhor aproxima o valor do comprimento da viga AC, em metros, é:



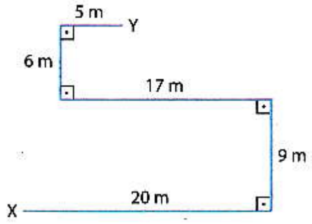
a) 5,4.
b) 6,7.
c) 4,8.
d) 5,9.
e) 6,5.

**203.** (Mack-SP) Num triângulo retângulo, um cateto é o dobro do outro. Então a razão entre o maior e o menor dos segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa é:

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) $\frac{3}{2}$.
e) $\sqrt{5}$.

**204.** (PUC-SP) A figura a seguir mostra a trajetória percorrida por uma pessoa para ir do ponto **X** ao ponto **Y**, caminhando em terreno plano e sem obstáculos. Se ela tivesse usado o caminho mais curto para ir de **X** a **Y**, teria percorrido:

a) 15 m.
b) 16 m.
c) 17 m.
d) 18 m.
e) 19 m.



**205.** (UEL-PR) Tome uma folha de papel em forma de quadrado de lado igual a 21 cm e nomeie os seus vértices **A**, **B**, **C**, **D**, conforme a figura 1. A seguir, dobre-a, de maneira que o vértice **D** fique sobre o "lado" AB (figura 2). Seja **D'** esta nova posição do vértice **D** e **x** a distância de **A** a **D'**.

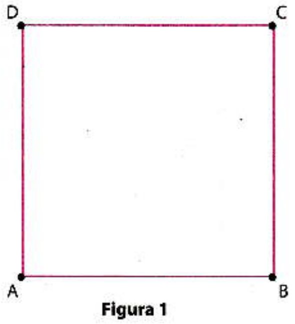


**Figura 1**

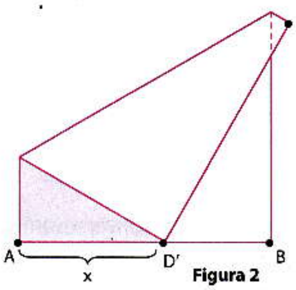


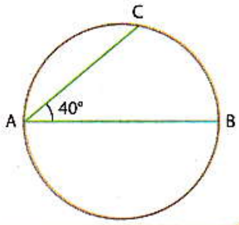
**Figura 2**

A função que expressa a área do triângulo retângulo sombreado em função de **x** é:

a) $A = \frac{-x^3 + 441x}{42}$.
b) $A = \frac{x^3 - 441x}{84}$.
c) $A = \frac{-x^3 + 441x}{84}$.
d) $A = \frac{441 - x^2}{84}$.
e) $A = \frac{441 - x^2}{42}$.

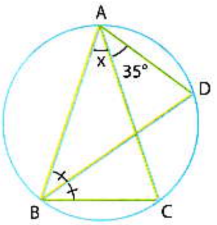
**206.** (PUC-SP) Na figura, AB é o diâmetro da circunferência. O menor dos arcos AC mede:

a) 100°.
b) 120°.
c) 140°.
d) 150°
e) 160°.



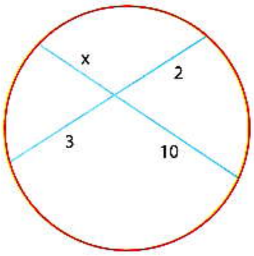
**207.** (Ucsal-BA) Na figura abaixo, o triângulo ABC é isósceles e BD é a bissetriz do ângulo de vértice **B**. A medida **x** do ângulo assinalado é:

a) 55°.
b) 50°.
c) 45°.
d) 40°.
e) 35°.

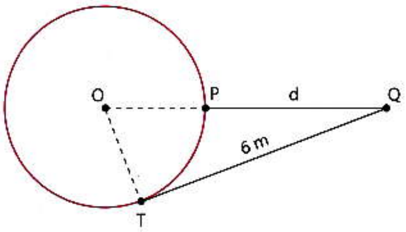


**208.** (Fuvest-SP) O valor de **x** na figura abaixo é:

a) $\frac{20}{3}$.
b) $\frac{3}{5}$.
c) 1.
d) 4.
e) 5.



**209.** (Vunesp) Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa área há um coqueiro, representado na figura por um ponto **Q**. Se a distância de **Q** (coqueiro) ao ponto de tangência **T** (da piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é:



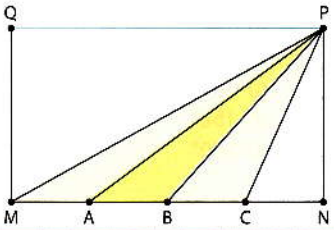
a) 4 m. b) 4,5 m. c) 5 m. d) 5,5 m. e) 6 m.

**210.** (UFPB) Enquanto conversavam sobre matemática, Vicente perguntou ao Ronaldo: "Se meu carro tem rodas de 0,35 m de raio, quantas voltas dará uma delas num percurso de $70\pi$ m?". A resposta correta será:

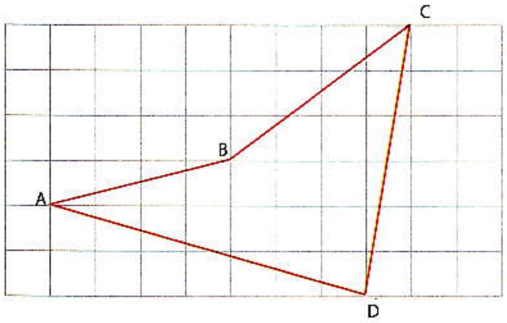
a) 100. b) 101. c) 112. d) 125. e) 198.

**211.** (UEL-PR) A bandeira de um time de futebol tem o formato de um retângulo MNPQ. Os pontos **A**, **B** e **C** dividem o lado MN em quatro partes iguais. Os triângulos PMA e PCB são coloridos com uma determinada cor $\mathbf{C_1}$, o triângulo PAB com a cor $\mathbf{C_2}$ e o restante da bandeira com a cor $\mathbf{C_3}$. Sabe-se que as cores $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$ são diferentes entre si. Que porcentagem da bandeira é ocupada pela cor $\mathbf{C_1}$?

a) 12,5%
b) 15%
c) 22,5%
d) 25%
e) 28,5%



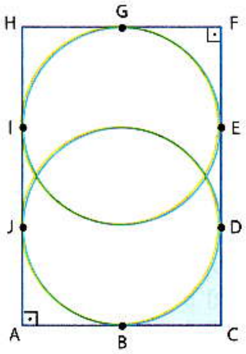
**212.** (UFC-CE) Na figura abaixo, cada quadradinho da malha tem lado 1. A área do quadrilátero ABCD é:



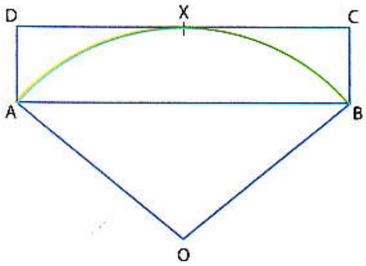
a) 18. c) 20. e) 22.
b) 19. d) 21.

**213.** (UFTM-MG) Na figura, **J**, **B**, **D**, **E**, **G** e **I** são pontos de tangência de duas circunferências de raio **r** em relação aos lados do retângulo ACFH. Sabendo que a distância entre os centros das circunferências é **r**, a razão entre a área da parte sombreada da figura e a área do retângulo ACFH é:

a) $\frac{\pi - 2}{8}$.
b) $\frac{2\pi - 1}{12}$.
c) $\frac{\pi - 2}{24}$.
d) $\frac{4 - \pi}{24}$.
e) $\frac{\pi - 3}{12}$.



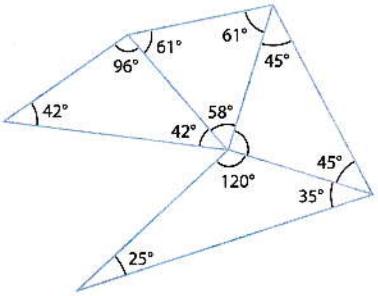
**214.** (Fuvest-SP) Na figura, OAB é um setor circular com centro em **O**, ABCD é um retângulo e o segmento CD é tangente em **X** ao arco de extremos **A** e **B** do setor circular. Se AB = $2\sqrt{3}$ e AD = 1, então a área do setor OAB é igual a:



a) $\frac{\pi}{3}$. c) $\frac{4\pi}{3}$. e) $\frac{7\pi}{3}$.
b) $\frac{2\pi}{3}$. d) $\frac{5\pi}{3}$.

## Questões dissertativas

**215.** (UFPE) Na figura a seguir, determine o ângulo que é oposto ao lado de menor comprimento.

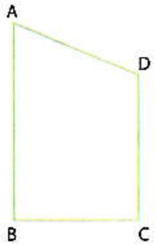


**216.** (Unicamp-SP) Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo $\alpha$ e um ângulo obtuso $\beta$. Suponha que, em um tal trapézio, a medida de $\beta$ seja igual a cinco vezes a medida de $\alpha$.

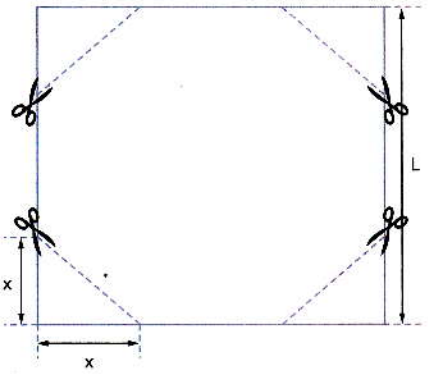
a) Calcule a medida de $\alpha$, em graus.

b) Mostre que o ângulo formado pelas bissetrizes de $\alpha$ e $\beta$ é reto.

**217.** (UFC-CE) Considere a figura a seguir na qual os segmentos de reta AB e CD são perpendiculares ao segmento de reta BC. Se AB = 19 cm, BC = 12 cm e CD = 14 cm, determine a medida, em centímetros, do segmento de reta AD.



**218.** (Ufscar-SP) Uma placa de aço quadrada vai ser transformada em um octógono regular, recortando-se os quatro cantos do quadrado de forma a obter o maior polígono possível, como mostra a figura.

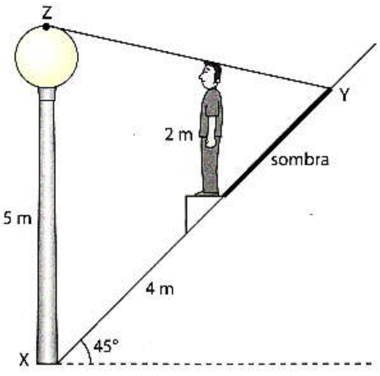


Sendo a medida do lado do quadrado igual a **L**, calcule, em função de **L**:

a) a medida de **x**;

b) o perímetro do octógono obtido.

**219.** (Vunesp) Uma estátua de 2 m de altura e um poste de 5 m de altura estão localizados numa ladeira de inclinação igual a 45°, como mostra a figura. A distância da base do poste à base da estátua é 4 m, e o poste tem uma lâmpada acesa na extremidade superior.



Adotando $\sqrt{2} = 1{,}41$ e sabendo que tanto o poste quanto a estátua estão na vertical, calcule:

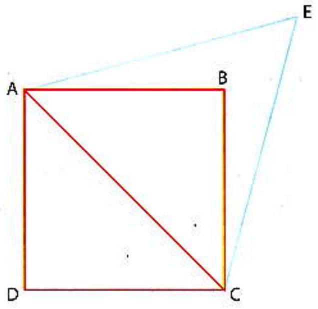
a) o comprimento aproximado da sombra da estátua projetada sobre a ladeira;

b) a área do triângulo XYZ indicado na figura.

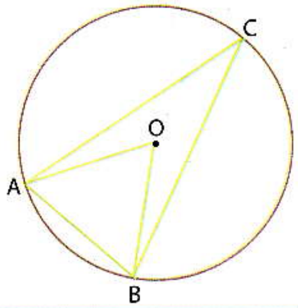
**220.** (PUC-RJ) Os catetos de um triângulo retângulo medem $30\sqrt{2}$ cm e $70\sqrt{2}$ cm. Ache o comprimento da bissetriz do ângulo reto desse triângulo. (*Sugestão*: Use semelhança de triângulos.)

**221.** (UFPE) Seja ABC um triângulo tal que AB = BC = 5 cm e AC = 8 cm. Quanto mede, em mm, a altura deste triângulo em relação ao lado AC?

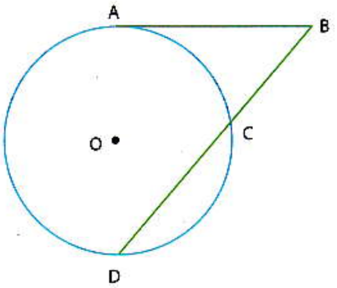
**222.** (UFRJ) Na figura, o triângulo AEC é eqüilátero e ABCD é um quadrado de lado 2 cm. Calcule a distância BE.



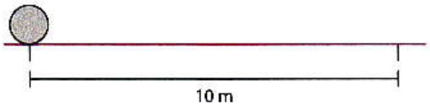
**223.** (UFSC) Na figura, **O** é o centro da circunferência, o ângulo $O\hat{A}B$ mede 50°, e o ângulo $O\hat{B}C$ mede 15°. Determine a medida, em graus, do ângulo $O\hat{A}C$.



**224.** (UFPB) Na figura abaixo, o segmento AB é tangente à circunferência de centro **O**. Se AB mede 30 cm e BC mede 18 cm, determine a medida de CD em centímetros.

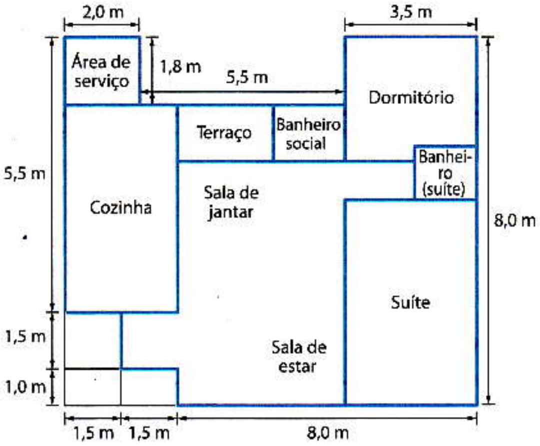


**225.** (UFRJ) Uma roda de 10 cm de diâmetro gira em linha reta, sem escorregar, sobre uma superfície lisa e horizontal.

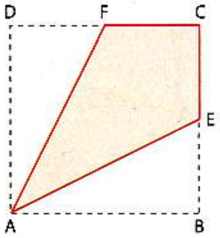


Determine o menor número de voltas completas para a roda percorrer uma distância maior que 10 m.

**226.** (EEM-SP) Calcule a área construída de um apartamento, cuja planta baixa está representada pelo esquema abaixo (despreze a espessura das paredes).



**227.** (UFPB) Na figura abaixo, o quadrado ABCD representa um pedaço de papel de área 144 $cm^2$ do qual foi recortada uma pipa, na forma do polígono AECFA. Sabendo que **E** e **F** são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, respectivamente, qual a área, em $cm^2$, do papel utilizado para fazer a pipa?



**228.** (UFPE) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (**V**) se for verdadeiro ou (**F**) se for falso.

( ) Dois triângulos eqüiláteros quaisquer são semelhantes.

( ) Dois triângulos retângulos são semelhantes se os catetos de um são proporcionais aos catetos do outro.

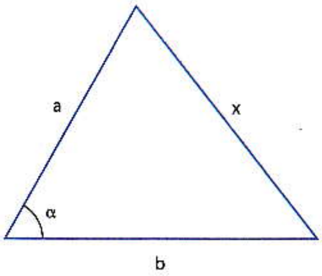
( ) Num triângulo qualquer, cada lado é maior que a soma dos outros dois.

( ) Se as diagonais de um quadrilátero se interceptam nos seus pontos médios, então esse quadrilátero é um retângulo.

( ) Se pelo ponto médio do lado AB de um triângulo ABC traçarmos uma reta paralela ao lado BC, então esta reta interceptará o lado AC no seu ponto médio.

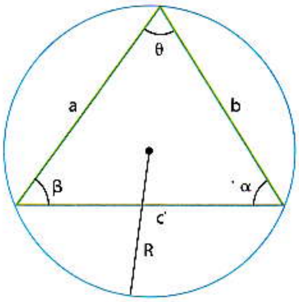
# Trigonometria

## Lei dos cossenos



$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

## Lei dos senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \theta} = 2R$$

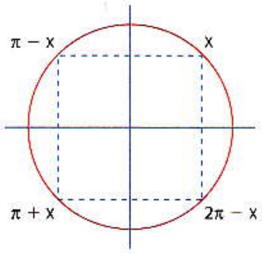
## Graus e radianos

$180° = \pi$ rad

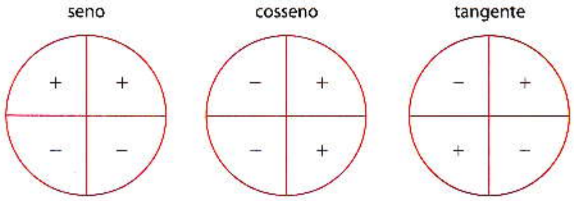
## Seno, cosseno e tangente

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

- Simetria



- Sinais



## Outras relações trigonométricas

- $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
- $\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$
- $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$
- $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

## Adição e subtração de arcos

- $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$
- $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos a$
- $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$
- $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$
- $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$ (para os arcos em que a tangente for definida)
- $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

## Arco duplo e arco metade

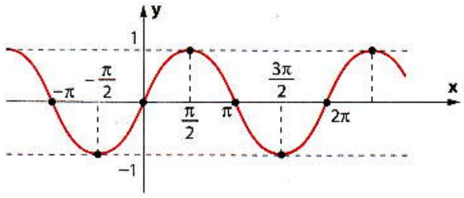
- $\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
- $\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$
- $\cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$
- $\text{tg}\, 2a = \dfrac{2\, \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a}$

## Transformação em produto

- $\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 2 \cdot \text{sen}\, \dfrac{x + y}{2} \cdot \cos \dfrac{x - y}{2}$
- $\text{sen}\, x - \text{sen}\, y = 2 \cdot \text{sen}\, \dfrac{x - y}{2} \cdot \cos \dfrac{x + y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \dfrac{x + y}{2} \cdot \cos \dfrac{x - y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \cdot \text{sen}\, \dfrac{x + y}{2} \cdot \text{sen}\, \dfrac{x - y}{2}$

## Função seno

### Gráfico



### Características

1ª) Função seno é a função de IR em IR definida por f(x) = sen x.

2ª) A função seno tem D = IR e Im = [−1, 1].

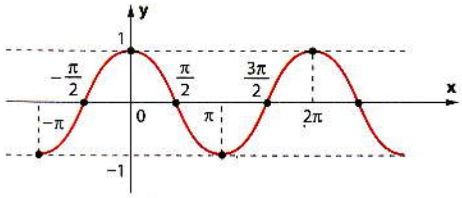
3ª) A função seno não é injetiva nem sobrejetiva.

4ª) A função seno é função ímpar, isto é, $\text{sen}\, x = -\text{sen}\,(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

5ª) A função seno é periódica de período $p = 2\pi$.

## Função cosseno

### Gráfico



### Características

1ª) O domínio é o mesmo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $D = \mathbb{R}$.

2ª) A imagem é a mesma: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $\text{Im} = [-1, 1]$.

3ª) O período é o mesmo: a função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$.

4ª) A função cosseno também não é nem injetiva nem sobrejetiva.

5ª) A função cosseno é par, isto é, $\cos x = \cos(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

## Senóides do tipo $y = a + b \cdot \text{sen}\,(cx - d)$ ou $y = a + b \cdot \cos\,(cx - d)$

O domínio de qualquer senóide é sempre $D = \mathbb{R}$. O que varia é a imagem e o período. Para obter a imagem, basta lembrar que $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ e substituir nas funções.

Para obter o período, basta fazer $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

**Observações:**

1ª) Se $b < 0$, o gráfico fica simétrico ao gráfico com $b > 0$ (simetria em relação ao eixo **x**).

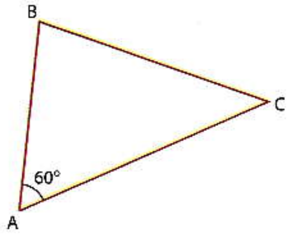
2ª) Antes de desenhar o gráfico, é importante deixar o parâmetro **c** positivo. Para isso, usamos a paridade de seno e cosseno: $\text{sen}\,(-cx) = -\text{sen}\,(cx)$ e $\cos\,(-cx) = \cos\,(cx)$.

3ª) Se $d \neq 0$, o gráfico translada $\dfrac{d}{c}$ unidades.

**d** positivo: o gráfico translada para a direita.
**d** negativo: o gráfico translada para a esquerda.

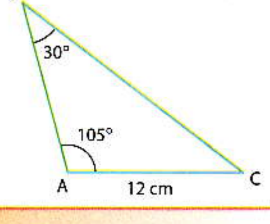
## Testes

**229.** (Unirio-RJ) Deseja-se medir a distância entre duas cidades **B** e **C** sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, onde **A** é uma cidade conhecida, como mostra a figura abaixo.

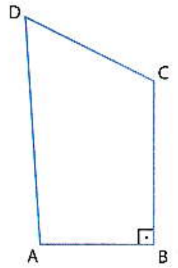


Logo, a distância entre **B** e **C**, em km, é:
a) menor que 90.
b) maior que 90 e menor que 100.
c) maior que 100 e menor que 110.
d) maior que 110 e menor que 120.
e) maior que 120.

**230.** (Mack-SP) Três ilhas **A**, **B** e **C** aparecem num mapa, em escala 1 **:** 10 000, como na figura. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas **A** e **B** é:
a) 2,3 km.
b) 2,1 km.
c) 1,9 km.
d) 1,4 km
e) 1,7 km.



**231.** (Fuvest-SP) No quadrilátero a seguir, $BC = CD = 3$ cm, $AB = 2$ cm, $A\hat{D}C = 60°$ e $A\hat{B}C = 90°$.



A medida, em cm, do perímetro do quadrilátero é:
a) 11. b) 12. c) 13. d) 14. e) 15.

**232.** (UFPA) Qual a medida em radianos de um arco de 135°?
a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{3\pi}{4}$ d) $\pi$ e) $\dfrac{5\pi}{4}$

**233.** (Fuvest-SP) O perímetro de um setor circular de raio **R** e ângulo central medindo $\alpha$ radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado **R**. Então $\alpha$ é igual a:
a) $\dfrac{\pi}{3}$. b) 2. c) 1. d) $\dfrac{2\pi}{3}$. e) $\dfrac{\pi}{2}$.

**234.** (UFPB) Se $\text{sen}\,x = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ e **x** está no segundo quadrante, então:

a) $\text{tg}\,x = \dfrac{6\sqrt{10}}{7}$.

b) $\text{tg}\,x = \dfrac{6\sqrt{10}}{49}$.

c) $\text{tg}\,x = -\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

d) $\text{tg}\,x = -\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

e) nenhuma das relações anteriores é verdadeira.

**235.** (Fuvest-SP) O menor valor de $\dfrac{1}{3 - \cos x}$, com **x** real, é:
a) $\dfrac{1}{6}$. b) $\dfrac{1}{4}$. c) $\dfrac{1}{2}$. d) 1. e) 3.

**236.** (PUC-SP) A afirmação $\cos x = \dfrac{2a - 1}{5}$ é verdadeira se, e somente se, **a** é tal que:
a) $-1 > a$ ou $a > 1$.
b) $-1 \geqslant a$ ou $a \geqslant 1$.
c) $-2 \geqslant a$ ou $a \geqslant 3$.
d) $-2 \leqslant a \leqslant 3$.
e) $-4 \leqslant a \leqslant 6$.

**237.** (AFA-SP) O valor de

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \ldots + \frac{\pi}{2^n} + \ldots\right),\ n \in \mathbb{N},\ \text{é:}$$

a) −1. b) 0. c) $\dfrac{1}{2}$. d) 1.

**238.** (Ufac) O menor valor positivo de **x** que satisfaz a equação $2 \text{ sen } x - 1 = 0$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\frac{\pi}{3}$. d) $\frac{\pi}{2}$. e) $\pi$.

**239.** (Fuvest-SP) O dobro do seno de um ângulo $\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:

a) $\frac{2}{3}$. b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. d) $\frac{1}{2}$. e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**240.** (UFC-CE) Considere a equação $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$. Pode-se afirmar que a soma de suas soluções que pertencem ao intervalo $[0, 4\pi]$ é:

a) 1. b) $-1$. c) 0. d) $4\pi$. e) $2\pi$.

**241.** (PUC-PR) Todo **x** do intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaz a equação $\frac{16^{\text{sen}^2 x}}{4^{5 \text{ sen } x}} = \frac{1}{64}$ pertence ao intervalo:

a) $0 \leq x \leq 72°$.
b) $72° \leq x \leq 144°$.
c) $144° \leq x \leq 216°$.
d) $216° \leq x \leq 288°$.
e) $288° \leq x \leq 360°$.

**242.** (UEL-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, então $\cos x > \frac{1}{2}$ se, e somente se, **x** satisfizer à condição:

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

b) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

c) $\pi < x < 2\pi$.

d) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$.

e) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$.

**243.** (Udesc) A expressão mais simples para

$$1 + \frac{1}{\cos^2 x \cdot \text{cossec}^2 x} - \sec^2 x \text{ é:}$$

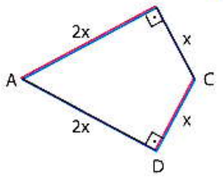
a) 1.
b) $-1$.
c) 0.
d) tg x.
e) $\sec^2 x$.

**244.** (AFA-SP) O valor da expressão

$$\cos 35° \cdot (\text{sen } 25° + \cos 55°) +$$
$$+ \text{ sen } 35° \cdot (\cos 25° - \text{sen } 55°) +$$
$$+ \frac{\text{tg } 31° + \text{tg } 14°}{1 - \text{tg } 31° \cdot \text{tg } 14°} \text{ é:}$$

a) $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$.
b) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.
c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.
d) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

**245.** (Fuvest-SP) No quadrilátero ABCD onde os ângulos **B** e **D** são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de sen $\hat{A}$ é:



a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
c) $\frac{4}{5}$.
d) $\frac{2}{5}$.
e) $\frac{1}{2}$.

**246.** (Uece) Se **x** é um arco do primeiro quadrante tal que $\text{tg } \frac{x}{2} = \sqrt{7}$, então sen x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{7}}{8}$. b) $\frac{\sqrt{7}}{6}$. c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$. d) $\frac{\sqrt{7}}{6}$.

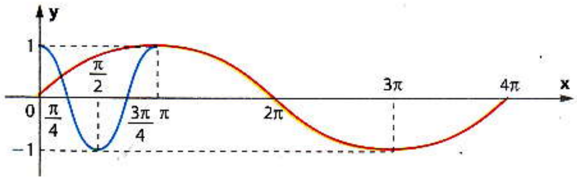
**247.** (Vunesp) Se $\cos x = a$, para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e assumindo que $a \neq 0$ e $a \neq 1$, o valor de tg 2x é:

a) $\frac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1 - a^2}}$.
b) $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$.
c) $2a\sqrt{1 - a^2}$.
d) $\frac{2a\sqrt{1 - a^2}}{2a^2 - 1}$.
e) $2a^2 - 1$.

**248.** (Fuvest-SP) Os números reais sen $\frac{\pi}{12}$, sen a e sen $\frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de sen a é:

a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**249.** (Mack-SP) A figura mostra os esboços dos gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{k}\right)$ e $g(x) = \cos(mx)$. Então:



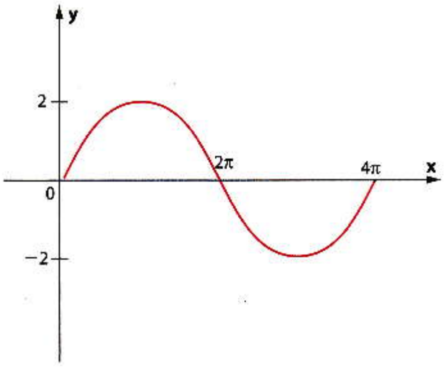
a) $m = 2k$.
b) $|m| = k$.
c) $|m| = \frac{1}{3}k$.
d) $m = \sqrt{k}$.
e) $|m| = -\frac{1}{2}k$.

**250.** (UEL-PR) O conjunto imagem da função y: IR ⟶ IR, $y = 2|\cos 2x| + 1$ é:

a) [0, 2].
b) [1, 3].
c) [−1, 3].
d) [−2, 2].
e) [−2, 0].

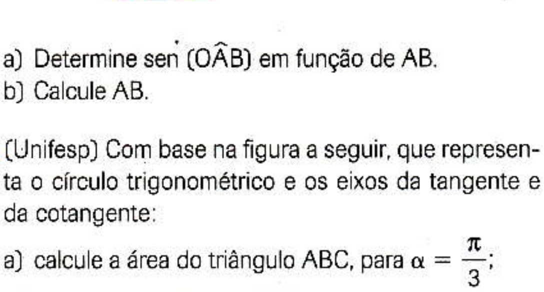
**251.** (Fuvest-SP) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:

a) sen x.
b) $2 \text{ sen } \frac{x}{2}$.
c) 2 sen x.
d) 2 sen 2x.
e) sen 2x.



## Questões dissertativas

**252.** (Fuvest-SP) Na figura abaixo, **O** é o centro da circunferência de raio 1, a reta AB é secante a ela, o ângulo $\beta$ mede 60° e $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

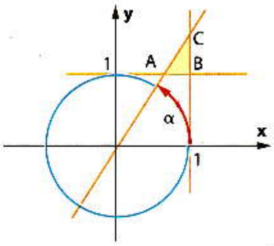


a) Determine sen $(O\hat{A}B)$ em função de AB.
b) Calcule AB.

**253.** (Unifesp) Com base na figura a seguir, que representa o círculo trigonométrico e os eixos da tangente e da cotangente:

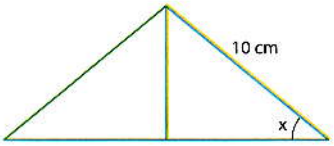
a) calcule a área do triângulo ABC, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

b) determine a área do triângulo ABC, em função de $\alpha$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



**254.** (UFPB) Se $\cos \theta = 0{,}6$ e $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, calcule o valor de 10 sen θ.

**255.** (Vunesp) Numa fábrica de cerâmica, produzem-se lajotas triangulares. Cada peça tem a forma de um triângulo isósceles cujos lados iguais medem 10 cm, e o ângulo da base tem medida **x**, como mostra a figura.



a) Determine a altura h(x), a base b(x) e a área A(x) de cada peça, em função de sen x e cos x.
b) Determine **x**, de modo que A(x) seja igual a 50 cm$^2$.

**256.** (UFMG) Determine todos os valores de **x** pertencentes ao intervalo $(0, \pi)$ que satisfazem a equação $3 \text{ tg } x + 2 \cos x = 3 \sec x$.

**257.** (Fuvest-SP) Determine as soluções da equação $(2 \cos^2 x + 3 \text{ sen } x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$.

**258.** (Vunesp) A relação $y = A + 0{,}6 \text{ sen } [\omega(t - 7)]$ exprime a profundidade **y** do mar, em metros, em uma doca, às **t** horas do dia, $0 \leq t \leq 24$, na qual o argumento é expresso em radianos.

a) Dado que na maré alta a profundidade do mar na doca é 3,6 m, obtenha o valor de **A**.
b) Considerando que o período das marés é de 12 horas, obtenha o valor de ω.

# Geometria espacial

## Geometria espacial de posição

**Uma reta fica determinada por dois pontos distintos.**
**Um plano fica determinado por:**

- **três pontos não-colineares;**
- **duas retas paralelas distintas;**
- **duas retas concorrentes;**
- **uma reta e um ponto fora dela.**

## Posições relativas de duas retas no espaço

- Duas retas no espaço
  - distintas
    - coplanares
      - paralelas
      - concorrentes
        - perpendiculares
        - oblíquas
    - reversas
      - ortogonais
      - não-ortogonais
  - coincidentes (paralelas iguais)

## Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

- Uma reta **r** e um plano $\alpha$ no espaço
  - a reta é paralela ao plano ($r // \alpha$)
  - a reta está contida no plano ($r \subset \alpha$)
  - a reta intersecta o plano
    - a reta é perpendicular ao plano ($r \perp \alpha$)
    - a reta é oblíqua ao plano ($r \not\perp \alpha$)

## Posições relativas de dois planos no espaço

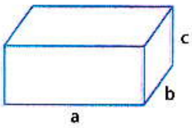
- Dois planos no espaço
  - distintos
    - paralelos
    - secantes
      - perpendiculares
      - oblíquos
  - coincidentes (paralelos iguais)

## Poliedros

Relação de Euler: $V - A + F = 2$

## Prismas

### Paralelepípedo reto retangular

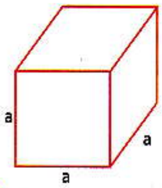


Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Área total: $A_T = 2(ab + ac + bc)$

Volume: $V = abc$

### Cubo

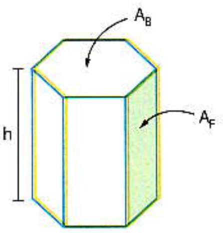


Diagonal: $D = a\sqrt{3}$

Área total: $A_T = 6a^2$

Volume: $V = a^3$

## Prismas regulares



**$A_B$**: área da base (polígono de **n** lados)

**$A_F$**: área de uma face (retângulo)

**h**: altura

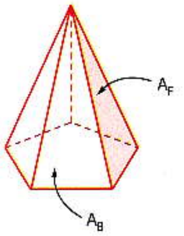
Área lateral: $A_L = n \cdot A_F$

Área total: $A_T = 2A_B + A_L$

Volume: $V = A_B \cdot h$

## Pirâmides

### Pirâmide regular



**$A_B$**: área da base (polígono de **n** lados)

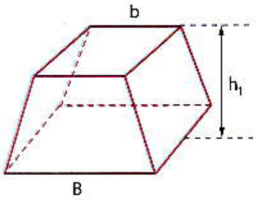
**$A_F$**: área da face (triângulo)

Área lateral: $A_L = n \cdot A_F$

Área total: $A_T = A_B + A_L$

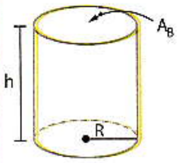
Volume: $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

### Tronco de pirâmide



$$V = \frac{h_1}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$$

## Cilindro



$A_B = \pi R^2$

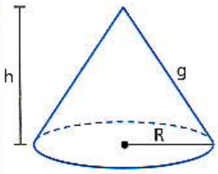
$A_L = 2\pi Rh$

$A_T = 2\pi R(R + h)$

$V = \pi R^2 h$

Cilindro eqüilátero: $h = 2R$

## Cone



$g^2 = h^2 + R^2$

$A_B = \pi R^2$

$A_L = \pi Rg$

$A_T = \pi R(g + R)$

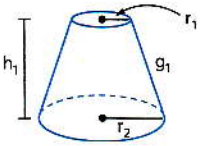
$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Cone eqüilátero: $h = 2R$

Ângulo do setor circular que equivale a área lateral:

$\alpha = \frac{2\pi R}{g}$ (em radianos)

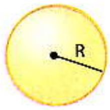
### Tronco de cone



$A_L = \pi g_1(r_1 + r_2)$

$V = \frac{\pi h_1}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

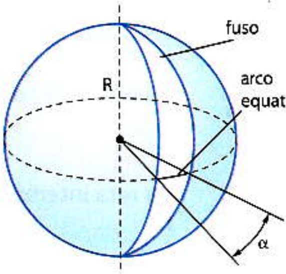
## Esfera



$A = 4\pi R^2$

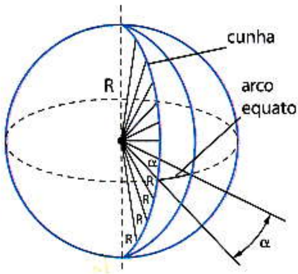
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

### Fuso



$$\frac{A_{fuso}}{4\pi R^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi}$$

### Cunha



$$\frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi}$$

## Testes

**259.** (UFPB) Marque **C** nas afirmativas corretas e **E** nas erradas.

1. ( ) Três pontos colineares determinam somente um plano.
2. ( ) Por um ponto de uma reta **r** dada passa somente um plano **Q**, perpendicular a **r**.
3. ( ) Duas retas concorrentes determinam um plano.
4. ( ) A projeção de uma reta **r** sobre um plano α é sempre outra reta **s**.
5. ( ) Se um plano intercepta dois planos paralelos, as intersecções são retas paralelas.
6. ( ) Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

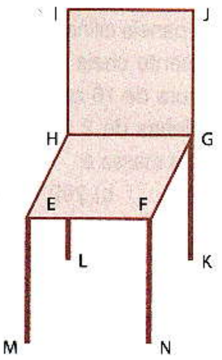
A seqüência correta obtida é:

a) ECCCEC. c) ECECCC. e) ECCECC.
b) CCEECC. d) CCECCE.

**260.** (UEL-PR) A reta **r** é a intersecção dos planos perpendiculares $\alpha$ e $\beta$. Os pontos **A** e **B** são tais que $A \in \alpha$, $A \notin \beta$, $B \in \beta$, $B \notin \alpha$. As retas AB e **r**:

a) são reversas.
b) são coincidentes.
c) podem ser concorrentes.
d) podem ser paralelas.
e) podem ser perpendiculares.

**261.** (UFRN) Na cadeira representada na figura abaixo, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.

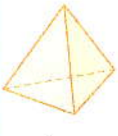


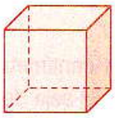
Sendo assim:

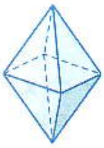
a) Os planos EFN e FGJ são paralelos.
b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.
d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

**262.** (UEL-PR) Para explicar a natureza do mundo, Platão "[...] apresenta a teoria segundo a qual os 'quatro elementos' admitidos como constituintes do mundo – o fogo, o ar, a água e a terra – [...] devem ter a forma de sólidos regulares. [...] Para não deixar de fora um sólido regular, atribuiu ao dodecaedro a representação da forma de todo o universo". (DEVLIN, Keith. *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, 2002. p.119.)

As figuras a seguir representam esses sólidos geométricos, que são chamados de poliedros regulares.


Fogo


Terra


Ar


Universo


Água

Um poliedro é um sólido limitado por polígonos. Cada poliedro tem um certo número de polígonos em torno de cada vértice. Uma das figuras anteriores representa um octaedro. A soma das medidas dos ângulos em torno de cada vértice desse octaedro é:

a) 180°.
b) 240°.
c) 270°.
d) 300°.
e) 324°.

**263.** (UFC-CE) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então o número de faces triangulares é:

a) 12.
b) 11.
c) 10.
d) 9.
e) 8.

**264.** (UEL-PR) Aumentando-se em 1 m a altura de um paralelepípedo, seu volume aumenta 35 $m^3$ e sua área total aumenta 24 $m^2$. Se a área lateral do paralelepípedo original é 96 $m^2$, então o volume original é:

a) 133 $m^3$.
b) 135 $m^3$.
c) 140 $m^3$.
d) 145 $m^3$.
e) 154 $m^3$.

**265.** (UFMG) O volume de uma caixa cúbica é 216 litros. A medida de sua diagonal, em centímetros, é:

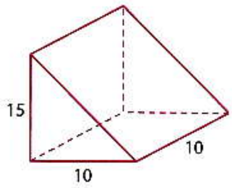
a) $0{,}8\sqrt{3}$.
b) 6.
c) 60.
d) $60\sqrt{3}$.
e) $900\sqrt{3}$.

**266.** (ITA-SP) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em $cm^3$, é:

a) $27\sqrt{3}$.
b) $13\sqrt{2}$.
c) 12.
d) $54\sqrt{3}$.
e) $17\sqrt{5}$.

**267.** (FEI-SP) De uma viga de madeira de seção quadrada de lado 10 cm extrai-se uma cunha de altura h = 15 cm, conforme a figura. O volume da cunha é:

a) 250 $cm^3$.
b) 500 $cm^3$.
c) 750 $cm^3$.
d) 1 000 $cm^3$.
e) 1 250 $cm^3$.



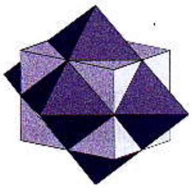
**268.** (Uece) A face ABC do tetraedro VABC é um triângulo eqüilátero de lado 3 cm e a reta passando pelo vértice **V** e perpendicular a esta face intercepta-a em seu centro **O**. Se a aresta VA do tetraedro é 5 cm, então a medida, em cm, do segmento VO é:

a) $\sqrt{15}$.
b) $\sqrt{18}$.
c) $\sqrt{20}$.
d) $\sqrt{22}$.

**269.** (Uece) Numa pirâmide quadrangular regular, uma aresta da base mede $2\sqrt{2}$ cm e uma aresta lateral mede $\sqrt{22}$ cm. O volume dessa pirâmide, em $cm^3$, é:

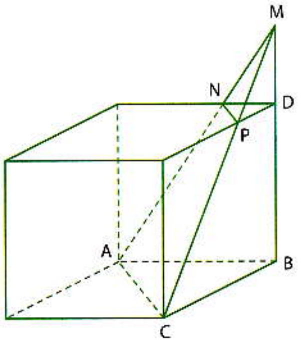
a) $7\sqrt{2}$.
b) $8\sqrt{2}$.
c) $9\sqrt{2}$.
d) $10\sqrt{2}$.

**270.** (UEL-PR) As superfícies de um cubo e de um octaedro regular interpenetram-se, dando origem à figura **F** mostrada a seguir. Sobre cada face do cubo elevam-se pirâmides que têm a base quadrada e as faces em forma de triângulos eqüiláteros. Os vértices das bases das pirâmides estão localizados nos pontos médios das arestas do cubo e do octaedro. A aresta do cubo mede 2 cm. Qual o volume do sólido limitado pela figura **F**?



a) 12 $cm^3$.
b) 14 $cm^3$.
c) 18 $cm^3$.
d) 16 $cm^3$.
e) 20 $cm^3$.

**271.** (UFMG) Observe esta figura:

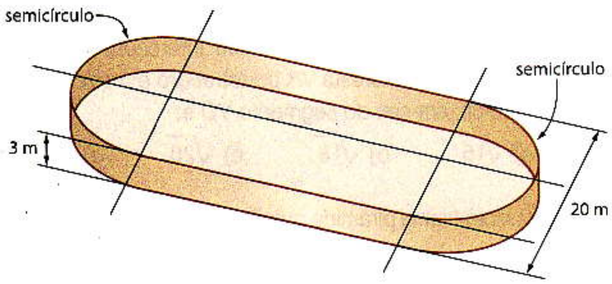


Nessa figura, estão representados um cubo, cujas arestas medem, cada uma, 3 cm, e a pirâmide MABC, que possui três vértices em comum com o cubo. O ponto **M** situa-se sobre o prolongamento da aresta BD do cubo. Os segmentos MA e MC interceptam arestas desse cubo, respectivamente, nos pontos **N** e **P** e o segmento ND mede 1 cm. Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o volume da pirâmide MNPD é, em $cm^3$:

a) $\frac{1}{6}$.  b) $\frac{1}{4}$.  c) $\frac{1}{2}$.  d) $\frac{1}{8}$.

**272.** (UEL-PR) A capacidade aproximada de um aterro sanitário com a forma apresentada na figura a seguir é:

a) 1 135 $m^3$.
b) 1 800 $m^3$.
c) 2 187 $m^3$.
d) 2 742 $m^3$.
e) 3 768 $m^3$.



**273.** (UFV-MG) O interior de uma jarra é um cilindro circular reto e contém **V** litros de água. Se fosse retirado 1 litro desta água, o raio, o diâmetro e a altura da água, nesta ordem, formariam uma progressão aritmética. Se, ao contrário, fosse adicionado 1 litro de água na jarra, essas grandezas, na mesma ordem, formariam uma progressão geométrica. O valor de **V** é:

a) 6.  b) 4.  c) 9.  d) 7.  e) 5.

**274.** (Udesc) Um cubo de lado **h** é inscrito num cilindro de mesma altura. A área lateral desse cilindro é:

a) $\frac{\pi h^2}{4}$.
b) $\frac{\pi h^2\sqrt{2}}{4}$.
c) $\frac{\pi h^2\sqrt{2}}{2}$.
d) $\pi h^2\sqrt{2}$.
e) $2\pi h^2$.

**275.** (UEL-PR) Um cone circular reto tem altura de 8 cm e raio da base medindo 6 cm. Qual é, em centímetros quadrados, sua área lateral?

a) $20\pi$  b) $30\pi$  c) $40\pi$  d) $50\pi$  e) $60\pi$

**276.** (UFRGS) Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder sua altura de 16 cm. O número de doces em formato de bolinhas de 2 cm de raio que se podem obter com toda a massa é:

a) 300.  b) 250.  c) 200.  d) 150.  e) 100.

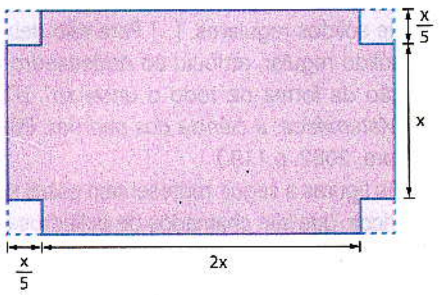
**277.** (UFPE) Considere um tanque com a forma de um cone invertido de raio da base 6 m e altura 8 m. Deixa-se cair dentro do tanque uma esfera de raio 3 m. Assinale a alternativa correspondente à distância do centro da esfera ao vértice do cone.

a) 4 m  b) 2 m  c) 5 m  d) 10 m  e) 6 m

## Questões dissertativas

**278.** (UFPE) Um poliedro convexo possui 10 faces com três lados, 10 faces com quatro lados e 1 face com dez lados. Determine o número de vértices deste poliedro.

**279.** (Unicamp-SP) A figura abaixo é a planificação de uma caixa sem tampa:



a) Encontre o valor de **x**, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.
b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

**280.** (Vunesp) Considere um prisma hexagonal regular, sendo a altura igual a 5 cm e a área lateral igual a 60 $cm^2$.

a) Encontre o comprimento de cada um de seus lados.
b) Calcule o volume do prisma.

**281.** (UFMG) Considere um tetraedro regular de vértices **A**, **B**, **C** e **D**, cujas arestas medem **r**. Considere, ainda, que **M** e **N** são pontos médios das arestas BD e CD, respectivamente. Calcule a área do triângulo AMN.

**282.** (Uerj) Observe as figuras a seguir:

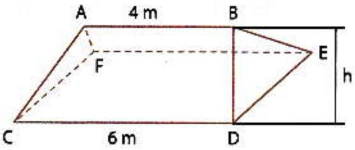


**Figura I**

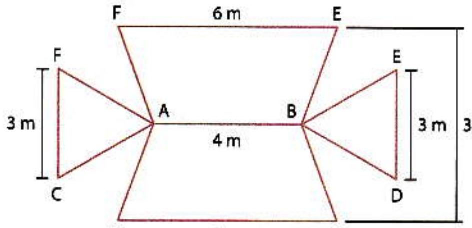


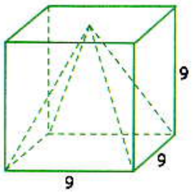
**Figura II**

A figura I mostra a forma do toldo de uma barraca, e a figura II, sua respectiva planificação, composta de dois trapézios isósceles congruentes e dois triângulos. Calcule:

a) a distância **h** da aresta AB ao plano CDEF;

b) o volume do sólido de vértices **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **D**, mostrado na figura I, em função de **h**.

**283.** (UFPE) Na figura a seguir o cubo tem aresta igual a 9 cm e a pirâmide tem um vértice no centro de uma face e como base a face oposta. Se **V** cm³ é o volume da pirâmide, determine $\frac{1}{3}$ V.



**284.** (Unifesp) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm. Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.

a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$).

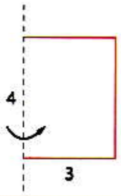
b) Qual deve ser o raio **R** de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água?

**285.** (Vunesp) Um retângulo de medidas 3 cm e 4 cm faz uma rotação completa em torno de seu lado maior, conforme a ilustração.

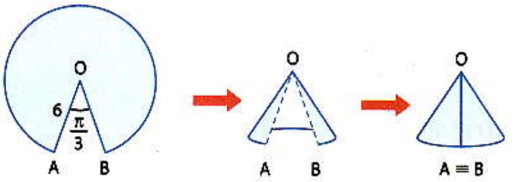
Adotando $\pi = 3{,}14$:

a) encontre a área total da figura gerada;

b) encontre o volume da figura gerada.



**286.** (Ufes) O setor circular sombreado, com 6 cm de raio, transforma-se na superfície lateral de um cone, após "colagem" de seus bordos pontilhados, como ilustrado nas figuras a seguir:



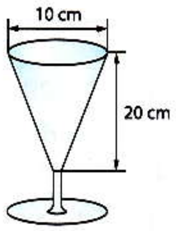
a) Qual a medida do raio da base desse cone?

b) Qual o volume do cone tendo essa base e a superfície lateral descrita anteriormente?

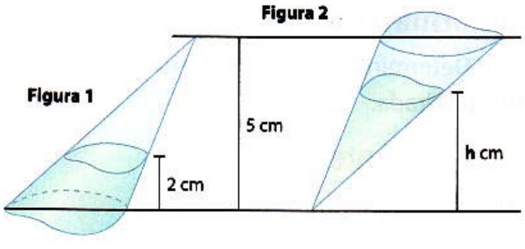
**287.** (Ufscar-SP) Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de *milk shake* com as dimensões mostradas no desenho.

a) Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o *milk shake*, calcule qual foi o volume, em mL, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.

b) Se um deles beber sozinho até a metade da altura do copo, quanto do volume total, em porcentagem, terá bebido?



**288.** (UFRJ) Uma ampola de vidro tem o formato de um cone cuja altura mede 5 cm. Quando a ampola é posta sobre uma superfície horizontal, a altura do líquido em seu interior é de 2 cm (figura 1).



Determine a altura **h** do líquido quando a ampola é virada de cabeça para baixo (figura 2). Lembrete: volume do cone = $\frac{(\text{área da base}) \times (\text{altura})}{3}$

# Matrizes, determinantes e sistemas lineares

## Matrizes

**Matriz é uma tabela.**

$$\text{Matriz } m \times n \begin{cases} \textbf{m} \text{ linhas} \\ \textbf{n} \text{ colunas} \end{cases}$$

**Elemento $a_{ij}$: está na linha i e na coluna j**

## Matriz quadrada

m = n (ordem **n**)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

diagonal principal

## Matriz identidade ($I_n$)

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Matriz nula ($0_{m \times n}$ ou $0_n$)

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Matriz transposta

A matriz transposta de **A** é a matriz $\mathbf{A^t}$ cujas linhas são ordenadamente as colunas de **A**.

## Multiplicação de matrizes

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = AB_{m\times p}$$

igual

## Matriz inversa

**A** e $\mathbf{A^{-1}}$ são inversas se $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$.

## Determinantes

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada.

## Determinante de ordem 1

$|x| = x$

## Determinante de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

## Determinante de ordem 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

## Propriedades principais

1ª) $\det A^t = \det A$

2ª) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

3ª) $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

4ª) $\det (kA) = k^n \cdot \det A$ (**k** é um número real e **n** é a ordem de **A**)

## Sistemas lineares

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{possível (tem solução)} \begin{cases} \text{determinado (SPD: sistema possível e determinado)} \\ \text{(a solução é única)} \\ \text{indeterminado (SPI: sistema possível e indeterminado)} \\ \text{(tem infinitas soluções)} \end{cases} \\ \text{impossível (SI: sistema impossível)} \\ \text{(não tem solução)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D \neq 0 \rightarrow \text{SPD} \\ D = 0 \rightarrow \text{SPI ou SI} \end{cases}$$

## Sistema homogêneo (SH)

Quando todos os termos independentes são nulos:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

## Testes

**289.** (UFRGS) A matriz $A = (a_{ij})$, de segunda ordem, é definida por $a_{ij} = 2i - j$. Então, $A - A^t$ é:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

**290.** (UFS-SE) São dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz $X = A^t + 2B$, onde $\mathbf{A^t}$ é a matriz transposta de **A**, é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

**291.** (UEL-PR) Sejam as matrizes **A** e **B**, respectivamente, $3 \times 4$ e $p \times q$. Se a matriz AB é $3 \times 5$, então é verdade que:

a) $p = 5$ e $q = 5$.
b) $p = 4$ e $q = 5$.
c) $p = 3$ e $q = 5$.
d) $p = 3$ e $q = 4$.
e) $p = 3$ e $q = 3$.

**292.** (Vunesp) Se **A**, **B** e **C** forem matrizes quadradas quaisquer de ordem **n**, assinale a única alternativa verdadeira:

a) $AB = BA$.
b) Se $AB = AC$, então $B = C$.
c) Se $A^2 = O_n$ (matriz nula), então $A = O_n$.
d) $ABC = A(BC)$.
e) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

**293.** (Uece) Sejam as matrizes $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ a seguir e considere a operação entre estas matrizes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$M_2M_1 - M_1M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nessas condições $p + q$ é igual a:

a) 5. b) 6. c) 7. d) 8.

**294.** (FGV-SP) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos da matriz $\mathbf{A^{100}}$ é:

a) 102. b) 118. c) 150. d) 175. e) 300.

**295.** (UFV-MG) Sejam as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e

$M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, onde **x** e **y** são números reais e **M** é a matriz inversa de **A**. Então o produto xy é:

a) $\frac{3}{2}$. b) $\frac{2}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{3}{4}$. e) $\frac{1}{4}$.

**296.** (Vunesp) Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, definida por $a_{ij} = -1 + 2i + j$, para $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$. O determinante de **A** é:

a) 22. b) 2. c) 4. d) −2. e) −4.

**297.** (Uece) Se o determinante da matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ n_1 & n_2 & 3 \end{pmatrix}$ é igual a 34 e o determinante da

matriz $B = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1 & -7 \\ -4 - 3n_1 & -11 \end{pmatrix}$ é igual a −34,

então $n_1 - n_2$ é igual a:

a) 4. b) 5. c) 6. d) 7.

**298.** (Vunesp) Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ onde a, b, c e d $\in$ IR. Se os números **a**, **b**, **c** e **d**, nesta ordem, constituem uma PG de razão **q**, o determinante desta matriz é igual a:

a) 0. b) 1. c) $q^2a^3$. d) $q^3a^2$. e) $2q^3a^2$.

**299.** (Unitau-SP) O valor do determinante $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$ como produto de 3 fatores é:

a) abc.
b) $a(b + c) \cdot c$.
c) $a(a - b)(b - c)$.
d) $(a + c)(a - b) \cdot c$.
e) $(a + b)(b + c)(a + c)$.

**300.** (PUC-PR) Para uma matriz quadrada $A_{n \times n}$, considere as seguintes afirmações:

I) Se a matriz $B_{n \times n}$ é obtida a partir de **A**, permutando-se duas colunas, então $\det B = -\det A$.
II) Se duas linhas da matriz **A** são idênticas, então $\det A = 0$.
III) $\det (kA) = k \cdot \det A$, onde **k** é um real.
IV) Sendo $\mathbf{A^T}$ a matriz transposta de **A**, então $\det (A^T) = -\det A$.

Podemos afirmar que:

a) Todas as afirmações são falsas.
b) Somente uma afirmação é verdadeira.
c) Somente uma afirmação é falsa.
d) Somente duas afirmações são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

**301.** (Fuvest-SP) Se **A** é uma matriz $2 \times 2$ inversível que satisfaz $A^2 = 2A$, então o determinante de **A** será:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 4.

**302.** (UFC-CE) Sejam **A** e **B** matrizes $3 \times 3$ tais que $\det A = 3$ e $\det B = 4$. Então $\det (A \cdot 2B)$ é igual a:

a) 32. b) 48. c) 64. d) 80. e) 96.

**303.** (UFPB) Sendo **I** a matriz identidade de ordem 2 e **M** uma matriz $2 \times 2$, tal que $M^3 = 8I$, então o determinante de **M** é igual a:

a) 64. b) 8. c) 4. d) 2. e) 1.

**304.** (Fuvest-SP) Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi:

a) 110. b) 120. c) 130. d) 140. e) 150.

**305.** (UFTM-MG) Três pacientes usam, em conjunto, 1 830 mg por mês de um certo medicamento em cápsulas. O paciente **A** usa cápsulas de 5 mg, o paciente **B**, de 10 mg, e o paciente **C**, de 12 mg. O paciente **A** toma metade do número de cápsulas de **B** e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. O paciente **C** toma um número de cápsulas por mês igual a:

a) 30. b) 60. c) 75. d) 90. e) 120.

**306.** (Unifesp) Considere o sistema de equações $\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$ onde **c** é uma constante real. Para que a solução do sistema seja um par ordenado no interior do primeiro quadrante ($x > 0$, $y > 0$) do sistema de eixos cartesianos ortogonais com origem em (0, 0), é necessário e suficiente que:

a) $c \neq -1$.

b) $c > -1$.

c) $c < -1$ ou $c > \frac{3}{2}$.

d) $\frac{3}{2} < c$.

e) $-1 < c < \frac{3}{2}$.

**307.** (UEL-PR) O sistema linear $\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$ é:

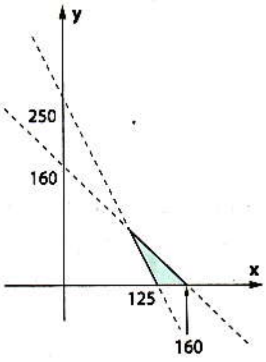
a) homogêneo e indeterminado.
b) impossível e indeterminado.
c) possível e determinado.
d) impossível e determinado.
e) possível e indeterminado.

**308.** (UEL-PR) O sistema $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ é possível e determinado:

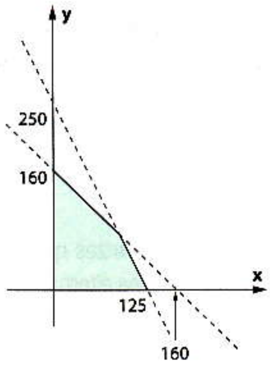
a) para qualquer valor de **a**.
b) somente para $a = 0$.
c) somente para $a = 6$.
d) se $a \neq 0$.
e) se $a \neq -6$.

**309.** (FGV-SP) Uma pessoa trabalha no máximo 160 horas por mês, programando e consertando computadores. Sua remuneração pelo trabalho é de R$ 40,00 por hora de programação e R$ 20,00 por hora de conserto de computador. Sabe-se também que ela trabalha **x** horas por mês com programação e **y** horas com conserto de computadores, ganhando ao menos R$ 5 000,00 por mês com esse trabalho. A região poligonal formada por todos os possíveis pares ordenados (x, y) é:

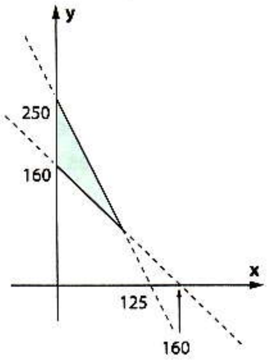
a)



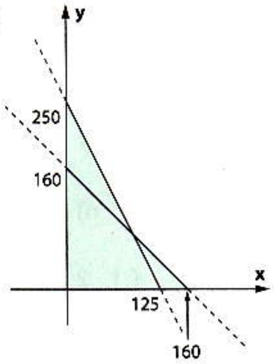
b)



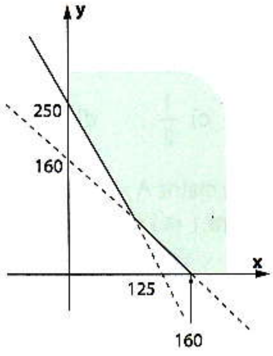
c)



d)



e)



## Questões dissertativas

**310.** (Vunesp) Considere as matrizes reais 2 × 2 do tipo

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\ \text{sen}\, x & \cos x \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$.
b) Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

**311.** (UFC-CE) A matriz quadrada **M**, de ordem $n > 1$, satisfaz a equação $M^2 = M - I$, onde **I** é a matriz identidade de ordem $n > 1$. Determine, em termos de **M** e **I**, a matriz $M^{2003}$.

**312.** (Ufscar-SP) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \log 0{,}1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \log 0{,}01 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) o determinante da matriz $(B - A)$;
b) a matriz inversa da matriz $(B - A)$.

**313.** (Fuvest-SP) Calcule os determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ a & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

**314.** (Vunesp) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$, uma matriz **B**, $(2 \times 2)$, e sabendo que $\det(AB) = 26$:

a) expresse det B em termos de **a**.
b) Sendo $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, calcule o valor de **a**.

**315.** (Ufes) Durante os treinos, um piloto notou dois pontos perigosos num circuito de Fórmula 1. Após a faixa de largada, havia uma depressão na pista e, mais adiante, uma mancha de óleo. Correndo sempre no mesmo sentido, conseguiu anotar a distância de 2 310 m da largada até a mancha de óleo e, nas voltas seguintes, anotou 2 420 m do ponto de depressão até a largada e 2 820 m da mancha até a depressão. Qual o comprimento do circuito?

**316.** (UFPB) Determine o valor de **k** para que o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + 6z = 1 \\ 5x + 2y + kz = 0 \end{cases}$ não tenha solução.

**317.** (Unicamp-SP) Considere o sistema linear abaixo, no qual **a** é um parâmetro real:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -3 \end{cases}$$

a) Mostre que para $a = 1$ o sistema é impossível.
b) Encontre os valores do parâmetro **a** para os quais o sistema tem solução única.

**318.** (Vunesp) Um laboratório farmacêutico tem dois depósitos, $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$. Para atender a uma encomenda, deve enviar 30 caixas iguais contendo um determinado medicamento à drogaria **A** e 40 caixas do mesmo tipo e do mesmo medicamento à drogaria **B**. Os gastos com transporte, por caixa de medicamento, de cada depósito para cada uma das drogarias, estão indicados na tabela.

| | A | B |
|---|---|---|
| $D_1$ | R$ 10,00 | R$ 14,00 |
| $D_2$ | R$ 12,00 | R$ 15,00 |

Seja **x** a quantidade de caixas do medicamento, do depósito $\mathbf{D_1}$, que deverá ser enviada à drogaria **A** e **y** a quantidade de caixas do mesmo depósito que deverá ser enviada à drogaria **B**.

a) Expresse:
- em função de **x**, o gasto $\mathbf{G_A}$ com transporte para enviar os medicamentos à drogaria **A**;
- em função de **y**, o gasto $\mathbf{G_B}$ com transporte para enviar os medicamentos à drogaria **B**;
- em função de **x** e **y**, o gasto total **G** para atender as duas drogarias.

b) Sabe-se que no depósito $\mathbf{D_1}$ existem exatamente 40 caixas do medicamento solicitado e que o gasto total **G** para se atender a encomenda deverá ser de R$ 890,00, que é o gasto mínimo nas condições dadas. Com base nisso, determine, separadamente, as quantidades de caixas de medicamentos que sairão de cada depósito, $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$, para cada drogaria, **A** e **B**, e os gastos $\mathbf{G_A}$ e $\mathbf{G_B}$.

# Análise combinatória e probabilidade

## Análise combinatória

### Fatorial

(**n** inteiro positivo)

$0! = 0$

$1! = 1$

$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \; (n \geqslant 2)$

### Permutação simples de *n* elementos

$P_n = n!$

### Arranjo simples

**Arranjos simples de n elementos tomados p a p (p ≤ n) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados.**

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

### Combinação simples

**Combinações simples de n elementos tomados p a p (p ≤ n) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.**

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$$

## Permutação de *n* elementos

A permutação de **n** elementos dos quais $\alpha$ são de um tipo, $\beta$ de outro e $\gamma$ de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dada por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

## Números binomiais

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (\text{para } n \geqslant p \text{ e } n, p \in \mathbb{N})$$

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = n \end{cases}$$

## Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ll}
1 & = \binom{0}{0} \\
1 \quad 1 & = \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
1 \quad 2 \quad 1 & = \binom{2}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{2} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & = \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & = \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 & = \binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\vdots & \quad \vdots \\
1 \quad n \ldots & = \binom{n}{0}\binom{n}{1} \ldots \qquad \binom{n}{n}
\end{array}$$

**Observações:**

1ª) Relação de Stifel: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

2ª) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

## Binômio de Newton

Termo geral de $(x + y)^n$: $T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$

## Probabilidade

$$p = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

$0 \leqslant p \leqslant 1$

## Probabilidade do evento complementar

**A** e $\overline{\mathbf{A}}$: eventos complementares

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

## Probabilidade da união de dois eventos

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

## Probabilidade condicional

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$$

## Eventos independentes

Se **A** e **B** forem eventos independentes, então $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

## Testes

**319.** (PUC-RJ) Se $\frac{n!}{(n+2)! + (n+1)!} = \frac{1}{48}$, então:

a) $n = 2$.
b) $n = 12$.
c) $n = 5$.
d) $n = 7$.
e) $n = 10$.

**320.** (Unifesp) O valor de $\log_2 \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{n!} \right)$ é:

a) $n^2$.
b) $2n$.
c) $n$.
d) $2 \log_2 n$.
e) $\log_2 n$.

**321.** (Mack-SP) Se $\binom{n}{2} = 28$, então **n** vale:

a) 7. b) 8. c) 14. d) 26. e) 56.

**322.** (Faap-SP) Os valores de **x** que satisfazem a igualdade $\binom{12}{3x-1} = \binom{12}{x+1}$ são:

a) 1 e 4. b) 1 e 3. c) 3 e 4. d) 2 e 3.

**323.** (Unitau-SP) O termo independente de **x** no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 10. b) 30. c) 40. d) 16. e) 20.

**324.** (FGV-SP) Sabendo que:

- **x** e **y** são números positivos;

- $x - y = 1$;
- $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 16$;

podemos concluir que:

a) $x = \frac{7}{6}$. c) $x = \frac{5}{4}$. e) $x = \frac{3}{2}$.

b) $x = \frac{6}{5}$. d) $x = \frac{4}{3}$.

**325.** (UEL-PR) Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x + a)^5$, com $a \in \mathbb{R}$, é $80x^2$, então o valor de **a** é:

a) 6. b) 5. c) 4. d) 3. e) 2.

**326.** (Vunesp) Considere a identificação das placas de veículos, compostas de três letras seguidas de 4 dígitos. Sendo o alfabeto constituído de 26 letras, o número de placas possíveis de serem constituídas, pensando em todas as combinações possíveis de 3 letras seguidas de 4 dígitos, é:

a) 3 120. d) 156 000 000.

b) 78 624 000. e) 175 760 000.

c) 88 586 040.

**327.** (Mack-SP) Considere todos os números de 3 algarismos formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9. Dentre eles, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é:

a) 17. b) 18. c) 15. d) 22. e) 24.

**328.** (UEL-PR) Um número capicua é um número que se pode ler indistintamente em ambos os sentidos, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (exemplo: 5 335). Em um hotel de uma cidade, onde os jogadores de um time se hospedaram, o número de quartos era igual ao número de capicuas pares de 3 algarismos. Quantos eram os quartos do hotel?

a) 20 b) 40 c) 80 d) 90 e) 100

**329.** (UFC-CE) O número de maneiras segundo as quais podemos dispor 3 homens e 3 mulheres em três bancos fixos, de tal forma que em cada banco fique um casal, sem levar em conta a posição do casal no banco, é:

a) 9. b) 18. c) 24. d) 32. e) 36.

**330.** (Unifor-CE) Considere todos os anagramas da palavra DIPLOMATA que começam e terminam pela letra **A**. Quantos desses anagramas têm todas as consoantes juntas?

a) 180 b) 360 c) 720 d) 1 080 e) 1 440

**331.** (UEL-PR) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. O total de funções injetoras de **A** para **B** é:

a) 10. b) 15. c) 60. d) 120. e) 125.

**332.** (UFMG) Duas das cinqüenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinqüenta cadeiras, para ocupá-las, é:

a) 1 225. b) 2 450. c) $2^{50}$. d) 49!. e) 50!.

**333.** (UFPB) As cartelas de um bingo são construídas, distribuindo-se os inteiros de 1 a 75, sem repetição, em uma tabela de cinco linhas por cinco colunas. A primeira, segunda, terceira, quarta e quinta colunas são formadas por 5 inteiros, nos intervalos [1, 15], [16, 30], [31, 45], [46, 60] e [61, 75], respectivamente. Não será considerada a ordem em cada coluna. Por exemplo, as cartelas abaixo são consideradas idênticas.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 35 | 55 | 64 |
| 3 | 17 | 45 | 59 | 70 |
| 4 | 20 | 31 | 46 | 61 |
| 8 | 21 | 40 | 49 | 72 |
| 10 | 23 | 44 | 57 | 75 |

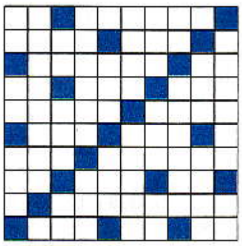
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 35 | 55 | 64 |
| 10 | 20 | 45 | 46 | 61 |
| 4 | 23 | 44 | 59 | 75 |
| 8 | 21 | 40 | 49 | 72 |
| 3 | 17 | 31 | 57 | 70 |

O total de cartelas que se podem construir dessa forma é:

a) 15 015. c) $75^5 \cdot 15!$. e) $3\,003^5$.

b) $5 \cdot 15!$. d) $5^{15} \cdot 75!$.

**334.** (UFPB) Na figura abaixo, está representada uma região do plano limitada por um quadrado de lado 5 cm. A região foi totalmente subdividida em pequenos quadrados de lado 0,5 cm, alguns dos quais hachurados. Se um dos pequenos quadrados for selecionado ao acaso, a probabilidade de ele ser hachurado é:

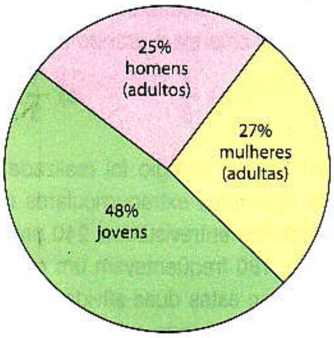


a) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{3}{4}$.

b) $\frac{4}{5}$. d) $\frac{1}{5}$. f) $\frac{1}{4}$.

**335.** (Fuvest-SP) Um recenseamento revelou as seguintes características sobre a idade e a escolaridade da população de uma cidade.

**População**



| Escolaridade | Jovens | Mulheres | Homens |
|---|---|---|---|
| Fundamental incompleto | 30% | 15% | 18% |
| Fundamental completo | 20% | 30% | 28% |
| Médio incompleto | 26% | 20% | 16% |
| Médio completo | 18% | 28% | 28% |
| Superior incompleto | 4% | 4% | 5% |
| Superior completo | 2% | 3% | 5% |

Se for sorteada, ao acaso, uma pessoa da cidade, a probabilidade de esta pessoa ter curso superior (completo ou incompleto) é:

a) 6,12%.
c) 8,45%.
e) 10,23%.
b) 7,27%.
d) 9,57%.

**336.** (UEL-PR) De uma urna contendo 8 bolas brancas e 10 bolas pretas, idênticas, sacam-se, ao acaso, duas bolas sucessivamente, sem reposição. A cor da primeira bola não é revelada. A segunda bola é preta. Sabendo-se disso, qual é a probabilidade de a primeira bola ser branca?

a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{80}{306}$ c) $\frac{8}{18}$ d) $\frac{56}{306}$ e) $\frac{1}{2}$

**337.** (Vunesp) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador **R** não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador **S** ser escalado é 0,7. Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a) 0,06.
c) 0,24.
e) 0,72.
b) 0,14.
d) 0,56.

**338.** (UEL-PR) Dois dados não viciados são lançados. A probabilidade de obter-se a soma de seus pontos maior ou igual a 5 é:

a) $\frac{5}{6}$. b) $\frac{13}{18}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{5}{12}$. e) $\frac{1}{2}$.

**339.** (UFRN) "Blocos lógicos" é uma coleção de peças utilizada no ensino de Matemática. São 48 peças construídas combinando-se 3 cores (azul, vermelha e amarela), 4 formas (triangular, quadrada, retangular e circular), 2 tamanhos (grande e pequeno) e 2 espessuras (grossa e fina). Cada peça tem apenas uma cor, uma forma, um tamanho e uma espessura. Se uma criança pegar uma peça, aleatoriamente, a probabilidade de essa peça ser amarela e grande é:

a) $\frac{1}{12}$. b) $\frac{1}{6}$. c) $\frac{1}{3}$. d) $\frac{1}{2}$.

**340.** (Vunesp) Em um colégio foi realizada uma pesquisa sobre as atividades extracurriculares de seus alunos. Dos 500 alunos entrevistados, 240 praticavam um tipo de esporte, 180 freqüentavam um curso de idiomas e 120 realizavam estas duas atividades, ou seja, praticavam um tipo de esporte e freqüentavam um curso de idiomas. Se, nesse grupo de 500 estudantes um é escolhido ao acaso, a probabilidade de que ele realize pelo menos uma dessas duas atividades, isto é, pratique um tipo de esporte ou freqüente um curso de idiomas, é:

a) $\frac{18}{25}$. b) $\frac{3}{5}$. c) $\frac{12}{25}$. d) $\frac{6}{25}$. e) $\frac{2}{5}$.

## Questões dissertativas

**341.** (Fuvest-SP) Lembrando que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$:

a) calcule $\binom{6}{2}$;

b) simplifique a fração $\frac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$;

c) determine os inteiros **n** e **p** de modo que

$$\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}.$$

**342.** (Ibmec-SP) Considere a palavra IBMEC.

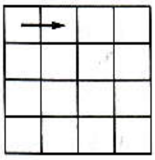
a) Determine quantas palavras podem ser formadas utilizando, sem repetição, uma, duas, três, quatro ou as cinco letras dessa palavra. (Por exemplo, **I**, **BC**, **MEC**, **CEM**, **IMEC** e a própria palavra **IBMEC** devem ser incluídas nesta contagem.)

b) Colocando todas as palavras consideradas no item anterior em ordem alfabética, determine a posição nesta lista da palavra **IBMEC**.

**343.** (UFRJ) Quantos números de 4 algarismos podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez?

**344.** (UFBA) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.

**345.** (IME-RJ) É dado um tabuleiro quadrado 4 × 4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

**346.** (FGV-SP) Uma prova consta de 10 testes de múltipla escolha, cada um com 5 alternativas e apenas uma correta. Se um aluno "chutar" todas as respostas:

a) Qual a probabilidade de ele acertar todos os testes?

b) Qual a probabilidade de ele acertar exatamente 2 testes?

**347.** (UFRJ) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras da tal doença. Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

a) Sorteando ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo.

b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou-se que ele era positivo. Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença.

**348.** (UnB-DF) A probabilidade de que uma noite de novembro seja nublada é de $\frac{2}{3}$. Em uma noite nublada, a probabilidade de que um coelho caia em uma armadilha é de $\frac{1}{3}$ e, em uma noite não nublada, é de $\frac{1}{6}$. Julgue os itens seguintes como verdadeiro ou falso.

0) A probabilidade de que a noite de 1º de novembro seja nublada e de que um coelho caia na armadilha nesta mesma noite é igual a $\frac{2}{9}$.

1) A probabilidade de que um coelho caia em uma armadilha, esteja a noite nublada ou não, é igual a $\frac{1}{3}$.

2) Sabe-se que, na noite em que um coelho cai na armadilha, a probabilidade de que uma raposa mate um coelho é de $\frac{1}{5}$, e nas outras noites, é de $\frac{1}{10}$. A probabilidade de que o coelho caia na armadilha ou a raposa mate um coelho, em uma noite de novembro, é de $\frac{7}{20}$.

# Estatística e Matemática financeira

## Noções básicas de Estatística

### Média aritmética (MA)

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

### Moda (Mo)

Em Estatística, moda é a medida de tendência central definida como o valor mais freqüente de um grupo de valores observados.

### Mediana (Me)

Dados **n** números em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- o número que ocupar a posição central se **n** for ímpar;
- a média aritmética dos dois números que estiverem no centro se **n** for par.

### Variância (V)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA)^2}{n}$$

### Desvio padrão (DP)

$$DP = \sqrt{V}$$

## Noções de Matemática financeira

**x** é a% de **P**: $x = \frac{a}{100} \cdot P$

### Fator de atualização (*f*)

$$f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor velho}}$$

$f > 1$: aumento ⟶ $f = 1 + \text{taxa}$

$f < 1$: desconto ⟶ $f = 1 - \text{taxa}$

$f = 1$: não variou

### Aumentos e descontos sucessivos

$$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$$

### Juros simples

**M**: montante

**C**: capital

**j**: juros do período total

**i**: taxa de juros

**t**: número de períodos

$j = Cit$ e $M = C + j$

### Juros compostos

$M = C(1 + i)^t$   $j = M - C$   $f = 1 + i$

$f_{\text{acumulado}} = (1 + i)^t$

### Valor futuro

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n$$

### Valor presente

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

## Testes

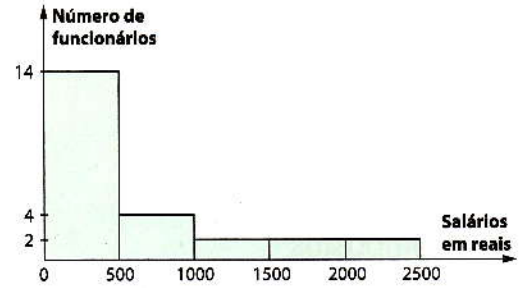
**349.** (FGV-SP) Um conjunto de dados numéricos tem variância igual a zero. Podemos concluir que:
a) a média também vale zero.
b) a mediana também vale zero.
c) a moda também vale zero.
d) o desvio padrão também vale zero.
e) todos os valores desse conjunto são iguais a zero.

**350.** (FGV-SP) Seja **f** uma função de IN em Q, dada por $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 1 \leqslant x < 5 \\ -x + 12, & 5 \leqslant x \leqslant 12 \end{cases}$. Sabendo que a função **f** determina o número de vezes que um equipamento foi utilizado em cada um dos 12 meses de um ano, é correto afirmar que a mediana (estatística) dos 12 registros é igual a:
a) 3. b)3,5. c) $\frac{11}{3}$. d) 4. e) 5,5.

**351.** (PUCC-SP) Sabe-se que os números **x** e **y** fazem parte de um conjunto de 100 números, cuja média aritmética é 9,83. Retirando-se **x** e **y** desse conjunto, a média aritmética dos números restantes será 8,5.
Se $3x - 2y = 125$, então:
a) $x = 95$. c) $x = 80$. e) $x = 75$.
b) $y = 65$. d) $y = 55$.

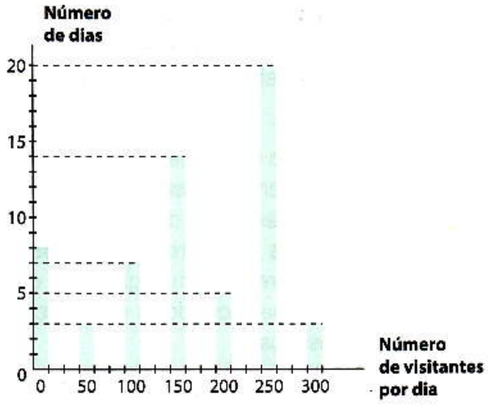
**352.** (Fuvest-SP) Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é:
a) 16. b) 20. c) 50. d) 70. e) 100.

**353.** (PUC-SP) O histograma a seguir apresenta a distribuição de freqüência das faixas salariais numa pequena empresa.



Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é, aproximadamente:
a) R$ 420,00. d) R$ 640,00.
b) R$ 536,00. e) R$ 708,00.
c) R$ 562,00.

**354.** (UEL-PR) O gráfico a seguir apresenta dados referentes ao número de visitantes em uma galeria de arte, durante uma exposição de Cândido Portinari.



De acordo com o gráfico, visitaram a exposição:
a) 3 pessoas por dia.
b) 100 pessoas no sétimo dia.
c) 750 pessoas em 20 dias.
d) 1 050 pessoas em 60 dias.
e) 9 850 pessoas em 60 dias.

**355.** (UFMG) A média das notas na prova de Matemática de uma turma com 30 alunos foi de 70 pontos. Nenhum dos alunos obteve nota inferior a 60 pontos. O número máximo de alunos que podem ter obtido nota igual a 90 pontos é:
a) 13. b) 10. c) 23. d) 16.

**356.** (UFC-CE) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:
a) 6,5. b) 7,2. c) 7,4. d) 7,8. e) 8,0.

**357.** (Uece) Aplicando R$ 10 000,00 a juros simples de 1,2% ao mês (considere 1 mês com 30 dias), durante 18 dias obtém-se um rendimento de:
a) R$ 120,00. c) R$ 72,00.
b) R$ 81,00. d) R$ 68,00.

**358.** (UFC-CE) José emprestou R$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de:
a) 0,2%. b) 0,4%. c) 2%. d) 4%. e) 6%.

**359.** (FGV-SP) Um capital aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% ao mês, triplica em:
a) 75 meses. c) 85 meses. e) 95 meses.
b) 80 meses. d) 90 meses.

**360.** (Uerj) Um lojista oferece 5% de desconto ao cliente que pagar suas compras à vista. Para calcular o valor com desconto, o vendedor usa sua máquina calculadora do seguinte modo:

☐ Preço ☐ x ☐ 5 ☐ % ☐ –

Um outro modo de calcular o valor com desconto seria multiplicar o preço total das mercadorias por:
a) 0,05. b) 0,5. c) 0,95. d) 1,05.

**361.** (Unirio-RJ) Para comprar um tênis de R$ 70,00, Renato deu um cheque pré-datado de 30 dias no valor de R$ 74,20. A taxa de juros cobrada foi de:

a) 0,6% ao mês.
b) 4,2% ao mês.
c) 6% ao mês.
d) 42% ao mês.
e) 60% ao mês.

**362.** (UEL-PR) Em uma liquidação os preços dos artigos de uma loja são reduzidos de 20% de seu valor. Terminada a liquidação e pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem devem ser acrescidos os preços da liquidação?

a) 27,5% b) 25% c) 22,5% d) 21% e) 20%

**363.** (Ufac) Um terreno foi vendido por R$ 16 500,00 com um lucro de 10%; em seguida, foi revendido por R$ 20 700,00. O lucro total das duas transações representa sobre o custo inicial do terreno um percentual de:

a) 38,00%.
b) 40,00%.
c) 28,00%.
d) 51,80%.
e) 25,45%.

**364.** (Uece) Uma pessoa investiu R$ 3 000,00 em ações. No primeiro mês de aplicação, ela perdeu 30% do valor investido. No segundo mês, ela recuperou 40% do que havia perdido. Em porcentagem, com relação ao valor inicialmente investido, ao final do segundo mês houve um:

a) lucro de 10%.
b) prejuízo de 10%.
c) lucro de 18%.
d) prejuízo de 18%.

**365.** (UFV-MG) A sorveteria *Doce Sabor* produz um tipo de sorvete ao custo de R$ 12,00 o quilo. Cada quilo desse sorvete é vendido por um preço de tal forma que, mesmo dando um desconto de 10% para o freguês, o proprietário ainda obtém um lucro de 20% sobre o preço de custo. O preço de venda do quilo do sorvete é:

a) R$ 18,00.
b) R$ 22,00.
c) R$ 16,00.
d) R$ 20,00.
e) R$ 14,00.

**366.** (Fuvest-SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 30% em relação ao seu valor no ano anterior. Se **v** for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0,7)^7v$.
b) $(0,3)^7v$.
c) $(0,7)^8v$.
d) $(0,3)^8v$.
e) $(0,3)^9v$.

**367.** (UFMG) A quantia de R$ 15 000,00 é emprestada a uma taxa de juros de 20% ao mês. Aplicando-se juros compostos, o valor que deverá ser pago para a quitação da dívida, três meses depois, é:

a) R$ 4 000,00.
b) R$ 25 920,00.
c) R$ 40 920,00.
d) R$ 42 000,00.
e) R$ 48 000,00.

**368.** (UEL-PR) Um dos traços característicos dos achados arqueológicos da Mesopotâmia é a grande quantidade de textos, escritos em sua maioria sobre tabuinhas de argila crua. Em algumas dessas tabuinhas foram encontrados textos matemáticos datados de cerca de 2 000 a.C. Em um desses textos, perguntava-se "por quanto tempo deve-se aplicar uma determinada quantia de dinheiro a juros compostos de 20% ao ano para que ela dobre?". (Adaptado de: EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995. p. 77.)

Nos dias de hoje, qual equação seria utilizada para resolver tal problema?

a) $(1,2)^t = 2$
b) $2^t = 1,2$
c) $(1,2)t = 2$
d) $2t = 1,2$
e) $t^2 = 1,2$

## Questões dissertativas

**369.** (FGV-SP) Numa pequena ilha, há 100 pessoas que trabalham na única empresa ali existente. Seus salários (em moeda local) têm a seguinte distribuição de freqüências:

| Salários | Freqüência |
|---|---|
| $ 50,00 | 30 |
| $ 100,00 | 60 |
| $ 150,00 | 10 |

a) Qual a média dos salários das 100 pessoas?
b) Qual a variância dos salários? Qual o desvio padrão dos salários?

**370.** (UFRJ) A altura média de um grupo de quinhentos e três recrutas é de 1,81 m. Sabe-se também que nem todos os recrutas do grupo têm a mesma altura. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira, falsa ou se os dados são insuficientes para uma conclusão. Em cada caso, justifique sua resposta.

a) "Há, no grupo em questão, pelo menos um recruta que mede mais de 1,81 m e pelo menos um que mede menos de 1,81 m."
b) "Há, no grupo em questão, mais de um recruta que mede mais de 1,81 m e mais de um que mede menos de 1,81 m."

**371.** (FGV-SP) Um conjunto de 10 valores numéricos $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_{10}$, tem média aritmética igual a 100 e variância igual a 20. Se adicionarmos 5 a cada valor, isto é, se obtivermos o conjunto $(x_1 + 5)$, $(x_2 + 5)$, $(x_3 + 5)$, ..., $(x_{10} + 5)$:

a) Qual a média do novo conjunto de valores? (Justifique).
b) Qual a variância do novo conjunto de valores? (Justifique).

**372.** (Vunesp) Um capital de R$ 1 000,00 é aplicado durante 4 meses.

a) Encontre o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juros simples de 10% ao mês.
b) Determine o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juros compostos de 10% ao mês.

**373.** (FGV-SP)

a) Um capital **C** foi aplicado a juros simples durante 10 meses, gerando um montante de R$ 10 000,00; esse montante, por sua vez, foi também aplicado a juros simples, durante 15 meses, à mesma taxa da aplicação anterior, gerando um montante de R$ 13 750,00. Qual o valor de **C**?

b) Um capital **C** é aplicado a juros compostos à taxa de 2% ao mês. Três meses depois, um outro capital igual a **C** é aplicado também a juros compostos, porém à taxa de 3% ao mês. Durante quanto tempo o 1º capital deve ficar aplicado para dar um montante igual ao do 2º capital? Você pode deixar indicado o resultado.

**374.** (Vunesp) Um boleto de mensalidade escolar, com vencimento para 10/8/2006, possui valor nominal de R$ 740,00.

a) Se o boleto for pago até o dia 20/7/2006, o valor a ser cobrado será R$ 703,00. Qual o percentual do desconto concedido?

b) Se o boleto for pago depois do dia 10/8/2006, haverá cobrança de juros de 0,25% sobre o valor nominal do boleto, por dia de atraso. Se for pago com 20 dias de atraso, qual o valor a ser cobrado?

**375.** (Fuvest-SP) Um comerciante compra calças, camisas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço **x** que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia.
Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

a) Quanto esse cliente pagou por sua compra, em função de **x**?

b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

**376.** (UnB-DF) Em uma cidade, há 10 000 pessoas aptas para o mercado de trabalho. No momento, apenas 7 000 estão empregadas. A cada ano, 10% das que estão empregadas perdem o emprego, enquanto 60% das desempregadas conseguem se empregar. Considerando que o número de pessoas aptas para o mercado de trabalho permaneça o mesmo, calcule o percentual de pessoas empregadas daqui a 2 anos. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

**377.** (FGV-SP) O "Magazine Lúcia" e a rede "Corcovado" de hipermercados vendem uma determinada marca de aparelho de som do tipo *Home* Cinema, pelo mesmo preço à vista. Na venda a prazo, ambas as lojas cobram a taxa de juros compostos de 10% ao mês, com planos de pagamentos distintos. Comprando a prazo no "Magazine Lúcia", um consumidor deve pagar R$ 2 000,00 no ato da compra e R$ 3 025,00 depois de 2 meses, enquanto na rede "Corcovado" ele pode levar o aparelho sem desembolsar dinheiro algum, pagando uma parcela de R$ 1 980,00, 1 mês após a compra e o saldo em 2 meses após a compra.

a) Qual o valor à vista do aparelho de som?

b) Se um consumidor comprar o aparelho de som a prazo na rede "Corcovado", qual o valor da parcela final, vencível 2 meses após a compra?

**378.** (UFRJ) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é **P**, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$ 100,00 de entrada, uma prestação de R$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$ 220,00 a ser paga em 60 dias. Determine **P**, o valor de venda à vista dessa mercadoria.

# Geometria analítica

## Ponto e reta

### Ponto

**Distância entre dois pontos:**

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Ponto médio:** $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

**Condição de alinhamento de três pontos:**

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

### Reta

**Coeficiente angular da reta:** $m = \text{tg}\,\alpha = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

**(se $x_A \neq x_B$)**

**Equações da reta:**

- $y - y_0 = m(x - x_0)$ **(fundamental)**
- $y = mx + n$ **(reduzida)**
- $ax + by + c = 0$ **(geral)**
- $\dfrac{x}{q} + \dfrac{y}{n} = 1$ **(segmentária)**

**Retas paralelas:** $m_1 = m_2$
**Retas perpendiculares:** $m_1 \cdot m_2 = -1$

### Distância entre ponto e reta

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Distância entre duas retas paralelas

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Ângulo formado por duas retas

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

## Área do triângulo

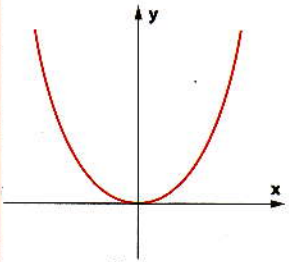
$$S = \frac{1}{2}\,|D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

## Circunferência

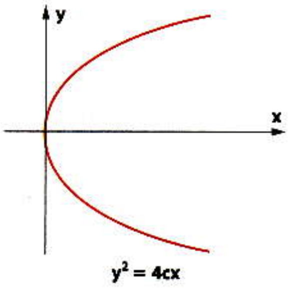
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (reduzida)
- $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$ (normal)

## Secções cônicas

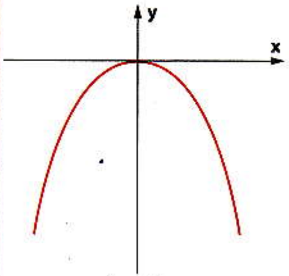
### Equações da parábola com vértice na origem



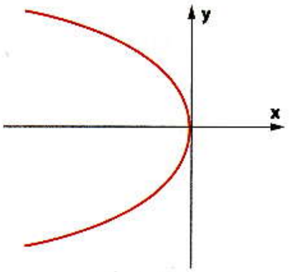
$x^2 = 4cy$



$y^2 = 4cx$

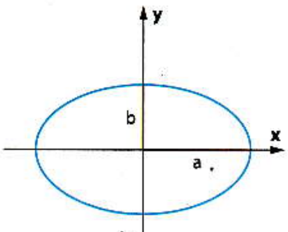


$x^2 = -4cy$

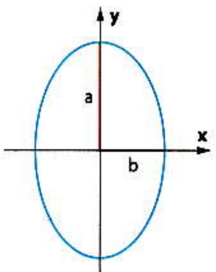


$y^2 = -4cx$

### Equações da elipse com centro na origem



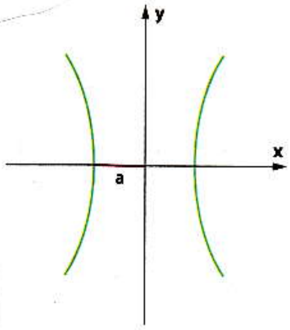
$\frac{-b}{a}$



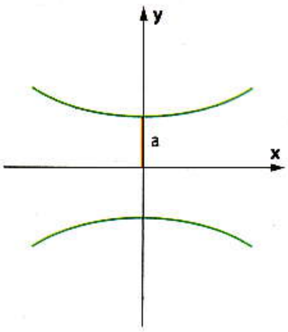
$\frac{c}{a}$

Excentricidade: $e = \frac{-c}{a}$

### Equações da hipérbole com centro na origem



$\frac{-b}{a}$



$\frac{c}{a}$

Excentricidade: $e = \frac{-c}{a}$

Assíntotas: $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$

## Testes

**379.** (Unifesp) Um ponto do plano cartesiano é representado pelas coordenadas $(x + 3y, -x - y)$ e também por $(4 + y, 2x + y)$, em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Nestas condições, $x^y$ é igual a:
a) −8.
b) −6.
c) 1.
d) 8.
e) 9.

**380.** (UEL-PR) Considere os pontos **A**(1, −2), **B**(2, 0) e **C**(0, −1). O comprimento da mediana do triângulo ABC, relativa ao lado AC, é:
a) $8\sqrt{2}$.
b) $6\sqrt{2}$.
c) $4\sqrt{2}$.
d) $3\sqrt{2}$.
e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

**381.** (ITA-SP) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
a) (−b, −b).
b) (2b, −b).
c) (4b, −2b).
d) (3b, −2b).
e) (2b, −2b).

**382.** (UPF-RS) Os pontos **A**(−1, 1), **B**(2, −2) e **C**(3, 4):
a) estão alinhados.
b) formam um triângulo retângulo.
c) formam um triângulo isósceles.
d) formam um triângulo escaleno de 42 u. a.
e) formam um triângulo escaleno de 10,5 u. a.

**383.** (Ibmec-SP) Para que os pontos do plano cartesiano de coordenadas (1, 1), (a, 2) e (2, b) estejam sobre uma mesma reta é necessário e suficiente que:
a) $ab = a - b$.
b) $ab = a + b$.
c) $ab = b - a$.
d) $ab = a^2 - b^2$.
e) $ab = a^2 + b^2$.

**384.** (FGV-SP) No plano cartesiano, o ponto **P** que pertence à reta de equação $y = x$ e é eqüidistante dos pontos **A**$(-1, 3)$ e **B**$(5, 7)$ tem abscissa igual a:

a) 3,1. b) 3,3. c) 3,4. d) 3,5. e) 3,2.

**385.** (Vunesp) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o coeficiente angular e a equação geral da reta que passa pelos pontos **P** e **Q**, sendo **P**$(2, 1)$ e **Q** o simétrico, em relação ao eixo **y**, do ponto **Q'**$(1, 2)$ são, respectivamente:

a) $\frac{1}{3}$; $x - 3y - 5 = 0$. d) $\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$.

b) $\frac{2}{3}$; $2x - 3y - 1 = 0$. e) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y + 5 = 0$.

c) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$.

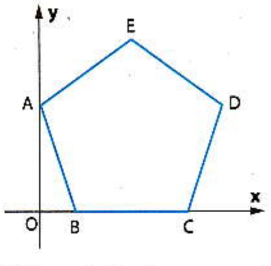
**386.** (UFPI) A reta **r** passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, 1)$ e intercepta os eixos coordenados nos pontos **P** e **Q**. O valor numérico da distância entre **P** e **Q** é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. c) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. e) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

b) $\frac{5}{\sqrt{5}}$. d) $\frac{25}{\sqrt{5}}$.

**387.** (UFTM-MG) A figura representa um pentágono regular ABCDE no sistema de coordenadas cartesianas de origem **O**. O ponto **A** pertence ao eixo **y** e o segmento BC, de medida 1, está contido no eixo **x**. A equação da reta que contém o segmento AB é:

a) $y = -\text{tg } 72° \cdot x + \text{sen } 72°$.
b) $y = \text{tg } 72° \cdot x - \text{sen } 36°$.
c) $y = \text{tg } 36° \cdot x - \cos 36°$.
d) $y = -\text{tg } 72° \cdot x + \cos 72°$.
e) $y = \text{tg } 36° \cdot x + \cos 72°$.



**388.** (Fuvest-SP) O conjunto dos pontos $(x, y)$ do plano cartesiano que satisfazem $t^2 - t - 6 = 0$, onde $t = |x - y|$, consiste de:

a) uma reta. d) uma parábola.
b) duas retas. e) duas parábolas.
c) quatro retas.

**389.** (UFRGS) Sabe-se que a reta **r**, de equação $ax + by = 0$, é paralela à reta **t**, de equação $3x - 6y + 4 = 0$, então, $\frac{a}{b}$ vale:

a) $-2$. b) $-\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 1. e) 2.

**390.** (UEL-PR) Considere os pontos **A**$(1, -2)$, **B**$(2, 0)$ e **C**$(0, -1)$. A equação da reta suporte da altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC, é:

a) $2x + y = 0$. d) $2x + y - 2 = 0$.
b) $2x - y = 0$. e) $2x - y + 2 = 0$.
c) $x + 2y = 0$.

**391.** (Fazu-MG) Se **P**$(a, b)$ é o ponto de intersecção das retas $\begin{cases} 9x - 3y - 7 = 0 \\ 3x + 6y - 14 = 0 \end{cases}$, então $a + b$ é igual a:

a) 3. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{4}$. d) $\frac{5}{3}$. e) $\frac{11}{3}$.

**392.** (FGV-SP) No plano cartesiano, existem dois valores de **m** de modo que a distância do ponto **P**$(m, 1)$ à reta de equação $3x + 4y + 4 = 0$ seja 6; a soma destes valores é:

a) $-\frac{16}{3}$. c) $-\frac{18}{3}$. e) $-\frac{20}{3}$.

b) $-\frac{17}{3}$. d) $-\frac{19}{3}$.

**393.** (Unirio-RJ) A equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ é de uma circunferência cuja soma do raio e das coordenadas do centro é igual a:

a) $-2$. b) 3. c) 5. d) 8. e) 15.

**394.** (UEL-PR) São dados:

uma circunferência de centro **C**$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$;

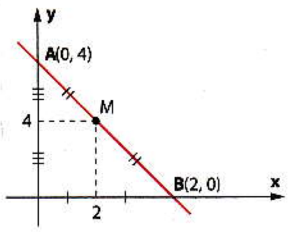
um ponto **T**$\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ que pertence à circunferência.

A equação da circunferência dada é:

a) $4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y - 3 = 0$.
b) $4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y - 4 = 0$.
c) $3x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2 = 0$.
d) $3x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$.
e) $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - y = 0$.

**395.** (UFC-CE) O segmento que une os pontos de intersecção da reta $2x + y - 4 = 0$ com os eixos coordenados determina um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.
b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$.
c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.
d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
e) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$.



**396.** (Vunesp) A equação da elipse de focos $\mathbf{F_1}(-2, 0)$, $\mathbf{F_2}(2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por:

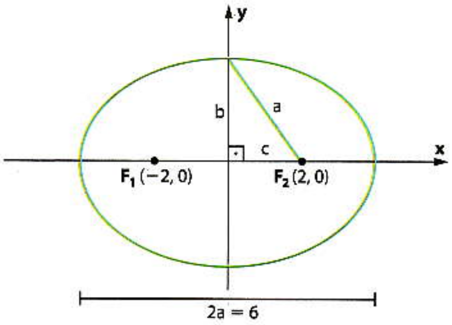
a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1.$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1.$

d) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1.$

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$



**397.** (UFPB) Uma reta tem coeficiente angular $m = -1$ e passa pelo vértice da parábola $4x - y^2 + 6y - 5 = 0$. Sua equação cartesiana é:

a) $x + y - 2 = 0.$

b) $x - y + 3 = 0.$

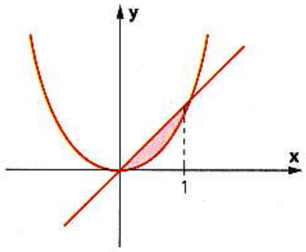
c) $x - y - 1 = 0.$

d) $2x = y - 1 = 0.$

e) $x + y - 1 = 0.$

f) $3x = y - 3 = 0.$

**398.** (PUC-PR) Na figura seguinte, temos representadas as funções definidas por $y = x$ e $y = x^2$.



A região pintada é definida por:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ e } x \leq y \leq x^2\}.$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ e } x^2 \leq y \leq x\}.$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \leq y \leq x^2\}.$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2} \text{ e } \sqrt{y} \leq x \leq y\}.$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq x\}.$

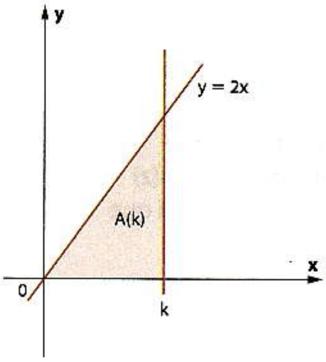
## Questões dissertativas

**399.** (Ufscar-SP) Os pontos $\mathbf{A}(3, 6)$, $\mathbf{B}(1, 3)$ e $\mathbf{C}(x_C, y_C)$ são vértices do triângulo ABC, sendo $\mathbf{M}(x_M, y_M)$ e $\mathbf{N}(4, 5)$ pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente.

a) Calcule a distância entre os pontos **M** e **N**.

b) Determine a equação geral da reta suporte do lado BC do triângulo ABC.

**400.** (Unifesp) Considere a região sombreada na figura, delimitada pelo eixo Ox e pelas retas de equações $y = 2x$ e $x = k$, $k > 0$.



Nessas condições, expresse, em função de **k**:

a) a área A(k) da região sombreada;

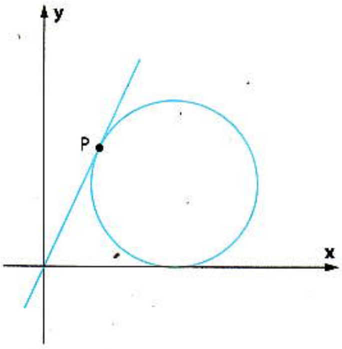
b) o perímetro do triângulo que delimita a região sombreada.

**401.** (Fatec-SP) Os pontos **A**(1, 2), **B** e **C**(5, −2) pertencem a uma mesma reta. Determine o ponto **B**, sabendo que ele é do eixo Ox.

**402.** (UFMG) Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos (4, 0) e (0, 8). Sejam **A** e **B** os pontos da interseção entre a reta e a parábola. Determine a equação da mediatriz do segmento AB.

**403.** (Fuvest-SP) A reta **s** passa pela origem **O** e pelo ponto **A** do primeiro quadrante. A reta **r** é perpendicular à reta **s**, no ponto **A**, e intercepta o eixo **x** no ponto **B** e o eixo **y** no ponto **C**. Determine o coeficiente angular de **s** se a área do triângulo OBC for o triplo da área do triângulo OAB.

**404.** (UFMG) Observe a figura:



Nessa figura, a circunferência tangencia a reta da equação $y = 2x$ no ponto **P** de abscissa $x = 2$ e tangencia, também, o eixo **x**. Determine o raio e as coordenadas do centro da circunferência.

**405.** (UFC-CE) Encontre uma equação da reta tangente à curva $x^2 - 2x + y^2 = 0$ no ponto (1, 1).

# Números complexos, polinômios e equações algébricas

## Números complexos

### Forma algébrica

$z = a + bi$
Parte real de **z**: $Re(z) = a$
Parte imaginária de **z**: $Im(z) = b$
Unidade imaginária: **i**, tal que $i^2 = -1$

### Potência de *i*

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^n = i^R$, onde **R** é o resto da divisão de **n** por 4:

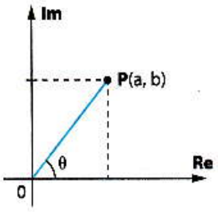
$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \cline{2-2} R & q \end{array}$$

### Conjugado ($\bar{z}$)

Se $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$.

### Plano de Gauss

$z = a + bi = (a, b)$



### Módulo (ρ)

$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

### Argumento (θ)

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho}$ $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ $\text{tg}\,\theta = \dfrac{b}{a}$

### Forma trigonométrica

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

### Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

Sendo $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e
$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, temos:
$z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]$

### Potenciação (1ª fórmula de Moivre)

Seja $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, então:
$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta)]$

## Polinômios

$$\underset{\text{coeficiente}}{a}\,\underset{\text{variável}}{x}^{\overset{\text{expoente}}{n}}$$

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$
em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes;
- **n** é um número inteiro positivo ou nulo;
- o maior expoente de **x**, com coeficiente não nulo, é o grau do polinômio.

### Polinômio identicamente nulo (PIN)

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ é o polinômio nulo $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$.
**Observação**: Não se define grau para o PIN.

### Valor numérico de um polinômio

O valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$ é $p(\alpha)$.
Se $p(\alpha) = 0$, então $\alpha$ é raiz de $p(x)$.

### Divisão de polinômios

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array} \Rightarrow p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Grau de $r(x) <$ grau de $h(x)$
Grau de $q(x) =$ grau de $p(x) -$ grau de $h(x)$

### Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - a)$ é $p(a)$.

### Teorema do fator

Se **c** é uma raiz de $p(x)$, então $(x - c)$ é um fator de $p(x)$.

## Equações algébricas

### Teorema fundamental da Álgebra (TFA)

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau **n** $(n \geq 1)$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

### Decomposição em fatores do primeiro grau

Todo polinômio pode ser decomposto em fatores do 1º grau:
$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$ em que $\mathbf{x_i}$ são as raízes de $p(x)$ e $\mathbf{a_n}$ é o coeficiente de $\mathbf{x_n}$.

## Multiplicidade das raízes

É o número de vezes que uma mesma raiz aparece.

1 vez: raiz simples
2 vezes: raiz dupla ou multiplicidade 2
3 vezes: raiz tripla ou multiplicidade 3
⋮
**n** vezes: raiz de multiplicidade **n**

## Relações de Girard

**Grau 2**

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
- $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$

**Grau 3**

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

- $S = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
- $P = x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}$

**Grau 4**

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

- $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$
- $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{-d}{a}$
- $P = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$

## Raízes complexas não reais

Se $a + bi$ for raiz de $p(x)$, então $a - bi$ também será.

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\overline{z}) = 0$$

## Testes

**406.** (Vunesp) Se **a**, **b**, **c** são números inteiros positivos tais que $c = (a + bi)^2 - 14i$, em que $i^2 = -1$, o valor de **c** é:

a) 48. b) 36. c) 24. d) 14. e) 7.

**407.** (UFPB) Sejam **x** e **y** elementos quaisquer do conjunto $G = \{g = m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Considere as seguintes proposições e assinale com **V** a(s) verdadeira(s) e com **F**, a(s) falsa(s).

( ) Se $y \neq 0$, o quociente $\frac{x}{y} \in G$.
( ) O produto $xy \in G$.
( ) A soma $x + y \in G$.

A seqüência correta é:

a) VFF. c) FFV. e) VFV.
b) FVF. d) VVF. f) FVV.

**408.** (Fazu-MG) O quociente $\frac{8 + i}{2 - i}$ é igual a:

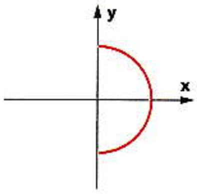
a) $3 + 2i$. c) $1 + 2i$. e) $2 + 3i$.
b) $2 + 2i$. d) $2 + i$.

**409.** (Ufscar-SP) Sejam **i** a unidade imaginária e $\mathbf{a_n}$ o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se $\mathbf{a_1}$ é um número ímpar, então

$i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \dots + i^{a_{10}}$ é igual a:

a) $9i$ ou $-9i$. d) $8 + i$ ou $8 - i$.
b) $-9 + i$ ou $-9 - i$. e) $7 + i$ ou $7 - i$.
c) $9 + i$ ou $9 - i$.

**410.** (Vunesp) A figura representa, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem e raio 1. Indique por $Re(z)$, $Im(z)$ e $|z|$ a parte real, a parte imaginária e o módulo de um número complexo $z = x + yi$, respectivamente, onde **i** indica a unidade imaginária.



A única alternativa que contém as condições que descrevem totalmente o subconjunto do plano que representa a região sombreada, incluindo sua fronteira, é:

a) $Re(z) \geqslant 0$, $Im(z) \geqslant 0$ e $|z| \leqslant 1$.
b) $Re(z) \geqslant 0$, $Im(z) \leqslant 0$ e $|z| \leqslant 1$.
c) $Re(z) \geqslant 0$ e $|z| \geqslant 1$.
d) $Im(z) \geqslant 0$ e $|z| \geqslant 1$.
e) $Re(z) \geqslant 0$ e $|z| \leqslant 1$.

**411.** (Uniube-MG) Considere os números complexos $z = x + iy$, em que x, y e IR e $i^2 = -1$, que têm módulo igual a $\sqrt{3}$ e cujas representações geométricas encontram-se sobre a parábola $y = x^2 - 1$, contida no plano complexo. Se **w** é a soma desses números complexos, então $|w|$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$. b) 3. c) 2. d) $\sqrt{6}$.

**412.** (UEL-PR) Seja **z** um número complexo de módulo 2 e argumento principal 120°. O conjugado de **z** é:

a) $2 - 2i\sqrt{3}$. d) $-1 + i\sqrt{3}$.
b) $2 + 2i\sqrt{3}$. e) $1 + i\sqrt{3}$.
c) $-1 - i\sqrt{3}$.

**413.** (Vunesp) Se **a**, **b**, **c** são números reais tais que $ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$ para todo **x** real, então o valor de $a - b + c$ é:

a) $-5$. b) $-1$. c) 1. d) 3. e) 7.

**414.** (Uece) O resultado da divisão do polinômio $x^5 + 1$ por $x + 1$ é:

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. c) $x^4 + 1$.
b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. d) $x^4 - 1$.

**415.** (PUC-RJ) Se o polinômio $p(x) = x^5 + 2ax^4 + 2b$ é divisível por $(x + 1)^2$, então a soma $a + b$ vale:

a) 1. b) −1. c) 2. d) $-\frac{1}{2}$. e) $\frac{1}{2}$.

**416.** (Fuvest-SP) O grau dos polinômios **f**, **g** e **h** é 3. O número natural **n** pode ser o grau do polinômio não nulo $f \cdot (g + h)$ se e somente se:

a) $n = 6$. d) $3 \leqslant n \leqslant 9$.
b) $n = 9$. e) $3 \leqslant n \leqslant 6$.
c) $0 \leqslant n \leqslant 6$.

**417.** (Fuvest-SP) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e resto $r = 10$. O resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é:

a) −5. b) −3. c) 0. d) 3. e) 5.

**418.** (PUC-SP) Sabe-se que o polinômio $f = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ admite a raiz −1 com multiplicidade 2 e que outra de suas raízes é igual ao módulo de um número complexo **z** cuja parte imaginária é igual a −1. A forma trigonométrica de **z** pode ser igual a:

a) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$.

b) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$.

c) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$.

d) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$.

e) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$.

**419.** (Ibmec-SP) Um polinômio de 7º grau $p(x)$, com coeficientes reais, é divisível pelos polinômios $q(x) = 2x^2 - 9$ e $r(x) = x^2 + 3x + 4$. Se **n** é o número de raízes reais do polinômio $p(x)$, então:

a) $n = 3$ ou $n = 5$. c) $2 \leqslant n \leqslant 4$. e) $n \geqslant 5$.
b) $n = 4$ ou $n = 6$. d) $n \leqslant 3$.

**420.** (UFC-CE) O produto das raízes reais da equação $4x^2 - 14x + 6 = 0$ é igual a:

a) $-\frac{3}{2}$. b) $-\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{3}{2}$. e) $\frac{5}{2}$.

**421.** (UFTM-MG) Sabendo que a unidade imaginária é raiz da equação $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$, o produto das suas outras três raízes é igual a:

a) 2i. b) −2i. c) 2 + i. d) 2 − i. e) 2.

**422.** (UFMG) A soma de todas as raízes de $f(x) = (2x^2 + 4x - 30)(3x - 1)$ é:

a) $\frac{5}{3}$. b) $\frac{3}{5}$. c) $-\frac{3}{5}$. d) $-\frac{5}{3}$.

**423.** (PUC-PR) Sendo **x** e **y** números reais positivos tais que $\begin{cases}\log\left(x^2\sqrt{y}\right) = \log 2 + 1 \\ x - \sqrt{y} = -3\end{cases}$, o produto xy é igual a:

a) 10. b) 30. c) 50. d) 60. e) 25.

## Questões dissertativas

**424.** (UFC-CE) Se **i** representa o número complexo cujo quadrado é igual a −1, determine o valor numérico da soma $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{27}$.

**425.** (Vunesp) Seja $z = 1 + i$ um número complexo.

a) Escreva **z** e $\mathbf{z^3}$ na forma trigonométrica.
b) Determine o polinômio de coeficientes reais, de menor grau, que tem **z** e $|z|^2$ como raízes e coeficiente dominante igual a 1.

**426.** (UFPA) Considere o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$, com $m, n \in \mathbb{R}$. Sabendo que $P(x) + 2$ é divisível por $x + 2$ e $P(x) - 2$ é divisível por $x - 2$, determine os valores de **m** e **n**.

**427.** (Vunesp) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$.

O determinante de **A** é um polinômio $p(x)$.

a) Verifique se 2 é uma raiz de $p(x)$.
b) Determine todas as raízes de $p(x)$.

# Limites e derivadas

## Limites

### Limites importantes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

### Propriedades dos limites

1ª) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

2ª) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

3ª) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

## Funções contínuas

Uma função é contínua num ponto **a** do seu domínio se nesse ponto ela não dá "saltos" nem apresenta "furo", ou seja:

- existe f(a);
- existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

## Derivadas

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## Equação da reta

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

## Função derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

## Derivadas de algumas funções elementares

| Função | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = k \ (k \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) | $f'(x) = 2ax + b$ |
| $f(x) = ax + b \ (a, b \in \mathbb{R})$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = \text{sen } x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\text{sen } x$ |
| $g(x) = c \cdot f(x)$ | $g'(x) = c \cdot f'(x)$ |
| $f(x) = \ell n\, x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| $f(x) = \log_a x$ | $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ell na}$ |
| $f(x) = a^x$ | $f'(x) = a^x \cdot \ell na$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = \text{tg } x$ | $f'(x) = \sec^2 x$ |
| $f(x) = \text{cotg } x$ | $f'(x) = -\text{cossec}^2 x$ |
| $f(x) = \sec x$ | $f'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x$ |
| $f(x) = \text{cossec } x$ | $f'(x) = -\text{cossec } x \cdot \text{cotg } x$ |

## Propriedades operatórias das derivadas

| Derivada indicada | Derivada calculada |
|---|---|
| 1ª) $(f + g)'(x)$<br>$(f - g)'(x)$ | $f'(x) + g'(x)$<br>$f'(x) - g'(x)$ |
| 2ª) $(kf)'(x)$ | $k \cdot f'(x)$ |
| 3ª) $(fg)'(x)$ | $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| 4ª) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ |
| 5ª) $(g \circ f)'(x)$ | $g'(y)f'(x)$ |
| 6ª) $(f^{-1})(y)$ ou $x = x(y)$ | $\frac{1}{f'(x)}$ ou $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ |

## Comportamento das funções

Dada uma função **f** contínua no intervalo [a, b] e derivável no intervalo (a, b), temos:

1º) Se $f'(x) > 0$ em (a, b), então **f** é crescente em [a, b].

2º) Se $f'(x) < 0$ em (a, b), então **f** é decrescente em [a, b].

3º) Se $f'(x) = 0$ em (a, b), então **f** é constante em [a, b].

## Máximos e mínimos

Se uma função **f** definida numa vizinhança do ponto $\mathbf{x_0}$ for derivável em $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0}$ for ponto de máximo local ou de mínimo local de **f**, então $f'(x_0) = 0$.

- Se $f''(x_0) > 0$, então $\mathbf{x_0}$ é ponto de mínimo local de **f**.
- Se $f''(x_0) < 0$, então $\mathbf{x_0}$ é ponto de máximo local de **f**.

## Pontos de inflexão

Para identificar pontos de inflexão verificamos que, sendo $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então:

- se $f'(x_0) = 0$, $\mathbf{x_0}$ é a abscissa do ponto de inflexão horizontal;
- se $f'(x_0) \neq 0$, $\mathbf{x_0}$ é a abscissa do ponto de inflexão com tangente oblíqua em relação ao eixo **x**.

## Testes

**428.** (Cefet-MG) O valor de $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{\sqrt{3x - 6} - \sqrt{x}}$ é:

a) $2\sqrt{3}$.  b) $4\sqrt{3}$.  c) $6\sqrt{3}$.  d) $8\sqrt{3}$.

**429.** (UEL-PR) A equação horária de um móvel é $y = \frac{t^3}{3} + 2t$, sendo **y** sua altura em relação ao solo, medida em metros, e **t** o número de segundos transcorridos após sua partida. Sabe-se que a velocidade do móvel no instante t = 3 s é dada por y′(3), ou seja, é a derivada de **y** calculada em 3. Essa velocidade é igual a:

a) 6 m/s.
b) 11 m/s.
c) 15 m/s.
d) 27 m/s.
e) 29 m/s.

**430.** (Cefet-MG) A derivada da função $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x + \text{tg}\,x$, no ponto $x = \pi$, é:

a) $-2$.
b) $-1$.
c) 0.
d) 1.

**431.** (PUC-MG) O valor da derivada da função $f(x) = \sqrt{7 - x}$ no ponto $(-2, 3)$ é:

a) $-\frac{1}{2}$.
b) $-\frac{1}{6}$.
c) $\frac{1}{6}$.
d) 2.
e) 3.

**432.** (UEL-PR) O valor do limite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x + \frac{1}{2}}$ é:

a) $-\frac{5}{2}$.
b) $-\frac{3}{2}$.
c) $-1$.
d) $-\frac{2}{3}$.
e) $-\frac{2}{5}$.

**433.** (UEL-PR) A equação da reta tangente à curva de equação $y = x^3 + 2x - 1$, no ponto em que $x = -1$, é:

a) $y = 5x + 1$.
b) $y = 4x + 1$.
c) $y = 3x - 1$.
d) $y = -3x + 1$.
e) $y = -4x + 1$.

**434.** (Cefet-PR) Numa PG decrescente de 5 termos $a_4 = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{3x - 9}$ e $\mathbf{a_2}$ é igual à abscissa do ponto máximo da função $f(x) = -2x^2 + 72x - 1$. Dessa forma, a razão desta PG é igual a:

a) 3.
b) $\frac{1}{9}$.
c) $-\frac{1}{3}$.
d) $\pm\frac{1}{3}$.
e) $\frac{1}{3}$.

**435.** (UFJF-MG) Sabendo que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}\,t}{t} = 1$, então

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$ é:

a) $\frac{1}{2}$.
b) 0.
c) 1.
d) $-1$.

**436.** (PUC-MG) O valor do $\lim\limits_{a \to 2} \dfrac{a^3 - 8}{a - 2}$ é:

a) $-\infty$.
b) $+\infty$.
c) 8.
d) 0.
e) 12.

**437.** (UFPR) O valor de $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ é:

a) 2.
b) 0.
c) 8.
d) 4.
e) $\sqrt{2}$.

**438.** (FCMSCSP) Calculando o

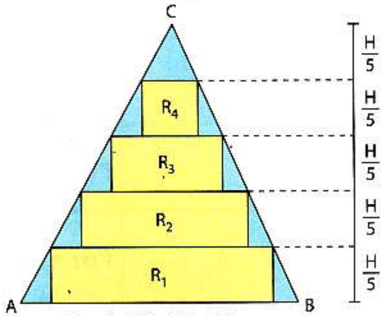
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen}\,2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \text{sen}\,x}$ obtemos:

a) $\sqrt{2}$.
b) $-\sqrt{2}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
e) nda.

## Questões dissertativas

**439.** (FEI-SP) Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$.

**440.** (UFRJ) Considere o triângulo **T**, de vértices **A**, **B** e **C**, tal que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são agudos. Seja **H** a altura relativa ao lado AB. Para cada número natural **n**, seja $\mathbf{F_n}$ a figura formada pela união de **n** retângulos justapostos contidos em **T** (veja na figura o caso $n = 4$). Cada retângulo tem dois lados perpendiculares a AB medindo $\dfrac{H}{n + 1}$ e um lado ligando AC a BC (o maior dos retângulos tem um lado contido em AB).



$F_4 = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$

Sabendo que a área de **T** é **a**, calcule, em função de **a** e de **n**, a diferença entre a área **T** e a área de $\mathbf{F_n}$. Qual o limite da área de $\mathbf{F_n}$ quando **n** tende a infinito? Justifique.

**42.** $k = 1$; $3x - 2y - 4 = 0$

**43.** Reta-suporte da diagonal AC: $4x - 5y + 1 = 0$; reta-suporte da diagonal BD: $2x + 3y - 16 = 0$.

**44.** Paralela

**45.** $a = -4$ ou $a = 1$

**46.** a) $y = -4x + 6$ b) $y = -\frac{3x}{2} + 8$ c) $x = 2$

**47.** $y = 5$

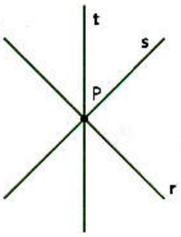
**48.** a) $\mathbf{P}\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ d) $\mathbf{P}(2, 4)$

b) $\mathbf{P}(-2, 5)$ e) Todos os pontos são comuns.

c) $\mathbf{P}\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

**49.** $(-9, 5)$; $(17, 5)$ e $\left(4, -\frac{3}{2}\right)$

**50.**



Se o ponto **P** é comum às três retas, então **P** pertence a intersecção de **r** e **s** e também a **t**, por exemplo.
Para resolver o problema, obteremos a intersecção de **r** e **s** e verificaremos se o ponto obtido pertence à reta **t**.

- Intersecção de duas das retas, por exemplo, $2x + 3y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 & (\cdot 3) \\ 3x + 4y - 1 = 0 & (\cdot -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{6x} + 9y - 3 = 0 \\ -\cancel{6x} - 8y + 2 = 0 \end{cases} +$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo $y = 1$ na primeira equação, temos:

$$2x + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \Rightarrow 2x + 3 - 1 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

O ponto **P** de intersecção das duas retas escolhidas é $\mathbf{P}(-1, 1)$.

- Vamos verificar se $\mathbf{P}(-1, 1)$ pertence à terceira reta, substituindo as coordenadas de **P** na equação da reta:

$$x + y = 0 \Rightarrow -1 + 1 = 0$$

Como o ponto **P** pertence às três retas, então elas concorrem neste ponto.

**51.** $\mathbf{M}\left(\frac{7}{2}, 3\right)$

Seja **M** o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

O ponto médio de $\overline{AC}$ é:

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1 + 6}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$$

O ponto médio de $\overline{BD}$ é:

$$\left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{5 + 2}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$$

Logo, **M** é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

**52.** $\mathbf{M}\left(\frac{56}{13}, \frac{24}{13}\right)$

**53.** $y = \frac{x}{2} + 1$

**54.** $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

**55.** a) $4x - 3y + 18 = 0$ c) $x + y - 5 = 0$

b) $x + 2y - 14 = 0$ d) $x = 3$

**56.** $k = -\frac{1}{4}$

**57.** $(2, 3)$

**58.** $\mathbf{N}(10, -4)$

**59.** Para mostrar que as retas-suporte das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares basta que seus coeficientes angulares, $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$, respectivamente, sejam tal que $m_1 m_2 = -1$

Temos $\mathbf{A}(a, b)$; $\mathbf{B}(a + 4, b + 3)$; $\mathbf{C}(a + 7, b + 7)$ e $\mathbf{D}(a + 3, b + 4)$.

- Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta-suporte de $\overline{AC}$.

$$m_1 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{\cancel{b} + 7 - \cancel{b}}{\cancel{a} + 7 - \cancel{a}} = 1$$

- Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta-suporte de $\overline{BD}$:

$$m_2 = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{b + 4 - (b + 3)}{a + 3 - (a + 4)} = \frac{\cancel{b} + 4 - \cancel{b} - 3}{\cancel{a} + 3 - \cancel{a} - 4} =$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

Como $m_1 m_2 = -1$, então as retas-suporte de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares.

**60.** $\mathbf{P}\left(3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\right)$

**61.** a) 2 b) $\frac{21}{5}$ c) $2\sqrt{5}$ d) 2

**62.** $\frac{22}{5}$

**63.** 3

**64.** $p = 4$ ou $p = -\frac{8}{3}$

**65.** 12

**66.** a) $\frac{18}{5}$ d) 4

b) $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ e) 4

c) 0 f) $\frac{10\sqrt{29}}{29}$

**67.** $k = \frac{52}{3}$ ou $k = 4$

**68.** a) $\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{3}$ d) Retas perpendiculares

b) Retas perpendiculares e) $\operatorname{tg} \theta = \frac{7}{9}$

c) $\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{7}$ f) $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$

**69.** $y = -\frac{3x}{2} + 4$ e $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$

**70.** 4

**71.** 84,5

**72.** $k = -16$ ou $k = 16$

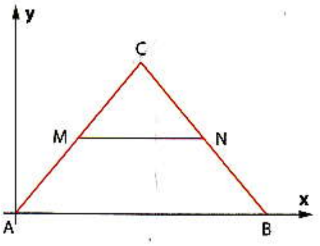
**73.** 4

**74.** 12

**75.** 38

**76.** e

**77.** Vamos adotar um sistema de eixos coordenados onde um dos vértices do triângulo coincide com a origem, e um dos lados está sobre um dos eixos.



Os vértices do triângulo são $\mathbf{A}(0, 0)$; $\mathbf{B}(b, 0)$ e $\mathbf{C}(x, y)$.

O ponto **M**, médio de AC, é **M**$\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ e o ponto **N**, médio de BC, é **N**$\left(\frac{b+x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

a) A reta-suporte do segmento MN tem coeficiente angular m = 0, pois as ordenadas de **M** e **N** são as mesmas. Portánto, a reta-suporte de MN é horizontal e, então, paralela à reta-suporte do segmento AB, como queríamos mostrar.

b) O comprimento de AB é igual a **b**.
O comprimento de MN é igual a:

$$\sqrt{\left(\frac{b+x}{2}-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+0^2} = \frac{b}{2}$$

Portanto, metade do comprimento de AB, como queríamos mostrar.

**78.** $2x + 3y + k = 0, k \in \mathbb{R}$

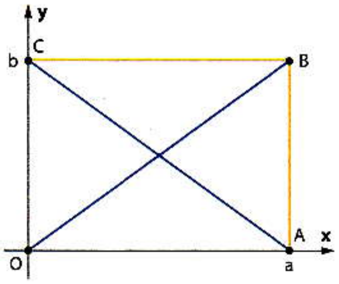
**79.** $3x - 2y + k = 0, k \in \mathbb{R}$

**80.** a) $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$ b) $bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$

## Atividades adicionais

**1.** b **2.** (5, 5)

**3.** É possível escolher qualquer sistema de eixos coordenados, entretanto é conveniente que a origem coincida com um dos vértices do retângulo para facilitar a demonstração.



Para calcular as medidas das diagonais OB e AC devemos ter as coordenadas de suas extremidades. Observando a figura, temos **O**(0, 0); **A**(a, 0); **B**(a, b) e **C**(0, b).

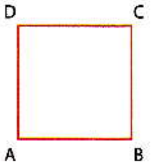
Assim:

$d(O, B) = \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$d(A, C) = \sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

Logo, d(O, B) = d(A, C).

**4.** Se ABCD é um quadrado, então seus lados são congruentes e os ângulos são retos.



Vamos calcular as medidas de seus lados :

$d(A, B) = \sqrt{(-2-6)^2+(2+13)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

$d(B, C) = \sqrt{(13+2)^2+(10-2)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$

$d(C, D) = \sqrt{(21-13)^2+(-5-10)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

$d(D, A) = \sqrt{(6-21)^2+(-13+5)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$

Logo, os lados são congruentes.

Para provar que os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são retos basta mostrar que o △ABC é retângulo (aplicando o teorema de Pitágoras).

Calculando $\overline{AC}$, temos:

$d(A, C) = \sqrt{(13-6)^2+(10+13)^2} = \sqrt{49+529} = \sqrt{578} =$

$= 17\sqrt{2}$

Então, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Assim, o ângulo $\hat{B}$ é reto.

Da mesma forma os outros ângulos são retos.

**5.** $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

**6.** Triângulo escaleno e obtusângulo.

**7.** c **8.** a **9.** d **10.** b **11.** b **12.** b

**13.** $a = \frac{4}{5}$ e $b = \frac{12}{5}$

**14.** Se **A**(2 + 4a, 3 − 5a); **B**(2, 3) e **C**(2 + 4b, 3 − 5b) estão alinhados, então o determinante deve ser igual a 0. Logo:

$$\begin{vmatrix} 2+4a & 3-5a & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2+4b & 3-5b & 1 \end{vmatrix} = 6 + 12a + 6 - 10b + (3-5a)(2+4b) -$$

$$-3(2+4b) - (3-5b)(2+4a) - 2(3-5a) =$$

$$= 6 + \cancel{12a} + 6 - \cancel{10b} + 6 + \cancel{12b} - \cancel{10a} - \cancel{20ab} - 6 -$$

$$- \cancel{12b} - 6 - \cancel{12a} + \cancel{10b} + \cancel{20ab} - 6 + \cancel{10a} = 0$$

Logo, **A**, **B** e **C** estão alinhados.

**15.** (2, 2) **16.** **P**$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **17.** $-\frac{7}{5}$

**18.** a) $x + 2y + 4 = 0$ c) $y = x$
b) $y = -7$ d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

**19.** $y = -\frac{x}{2} + 4$ **20.** **A**(2, 5) **21.** $x - y - 4 = 0$

**22.** a) $y = -\frac{2x}{3} + 2$ c) $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$
b) $x - 2y + 16 = 0$ d) $x + y - 5 = 0$

**23.** 8,4 **24.** Concorrentes

**25.** a) $y = -x$ b) $y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$ c) $y = 2$

**26.** $y = -\frac{5x}{4} + \frac{55}{4}$ **27.** $y = \frac{7x}{3} + \frac{13}{3}$

**28.** $y = -\frac{x}{3} + 1$ **29.** $4x + 5y - 10 = 0$

**30.** $2x - 3y + 38 = 0$ **31.** 22

**32.** $x - y + 2 = 0$ e $x + y = 0$

**33.** 60° **34.** m² **35.** $\frac{7\sqrt{17}}{17}$ **36.** $\frac{64}{3}$

**37.** No exercício temos:

- **M**$\left(0, \frac{b}{2}\right)$ porque é ponto médio de $\overline{AC}$;

- **N**$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ porque é ponto médio de $\overline{BC}$:

Vamos provar que MN = $\frac{AB}{2}$, sendo **A**(0, 0) e **B**(a, 0).

$$d(A, B) = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

$$d(M, N) = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

Logo, $\overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

**38.** Temos os seguintes pontos: **A**(0, 0), **B**(b, 0), **C**(0, c). Como **M** é ponto médio de $\overline{BC}$, então **M**$\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Vamos mostrar que AM = $\frac{BC}{2}$.

$$d(A, M) = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(0-b)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Logo, d(A, M) = $\frac{d(B, C)}{2}$. Então, AM = $\frac{BC}{2}$.

## Questões de vestibular

**1.** **s**: $y = \frac{4x}{3} - \frac{16}{3}$; **t**: $y = \frac{4x}{3} - \frac{4}{3}$ **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**3.** $\sqrt{2}$ **4.** 2 **5.** y = 3x − 2

**6.** a) Considerando os infinitos valores possíveis para **a**, as infinitas retas dadas por $(a + 1)^2x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0$ teriam que se cruzar num único ponto para que exista um ponto independentemente de **a**, por onde elas passem.

Assim, supondo dois valores quaisquer de **a** (aqui cuidadosamente escolhidos para facilitar os cálculos), temos:

$a = 0$: **r**: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$a = -1$: **r**: $2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$

Se o ponto único existir, ele terá que ser (1, 3), pois é a intersecção obtida das duas retas acima.

Verificando o ponto (1, 3) na equação de **r**, temos:

$(a + 1)^2 \cdot 1 + (a^2 - a) \cdot 3 - 4a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 +$
$+ 3a^2 - 3a - 4a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

(verdadeiro), ou seja, a reta passa por (1, 3) independentemente do valor de **a**.

b) a = −1

**7.** b **8.** d **9.** a **10.** b **11.** c **12.** b

**13.** a **14.** b **15.** c **16.** d **17.** d **18.** 36

**19.** a **20.** e **21.** b **22.** e

**23.** a) y = −2x + 8 b) 3

**24.** b

**25.** a) $3\sqrt{2}$ b) **C**(3, 4)

**26.** a) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ b) x − 4y + 11 = 0

**27.** b **28.** d **29.** 01, 04, 08, 16, 32 **30.** c

**31.** a) $m = \pm 2\sqrt{2}$ b) 1

**32.** e

**33.** a) Para que a reta **r** passe por um ponto cujas coordenadas não dependam do parâmetro **a** devemos ter:

$(a + 1)^2x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0$ para qualquer valor de **a**, ou seja:

$(a^2 + 2a + 1)x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2x + 2ax + x + a^2y - ay - 4a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + y - 4)a^2 + (2x - y + 1)a + (x - 1) = 0$

que é verdadeiro para todo **a** desde que:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Substituindo x = 1 nas duas primeiras equações, encontramos y = 3. Portanto, **r** passa pelo ponto (1, 3) independentemente do valor de **a**.

b) a = −1

## Para refletir

*Página 12*

1º) **A**(1, 1) e **B**(3, 1)

$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

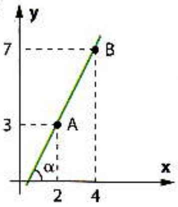
3º) **A**(1, 2) e **B**(1, −4)

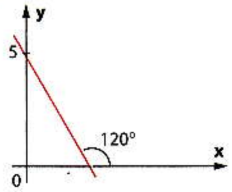
$$d(A, B) = \sqrt{(1-1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$$

5º) **A**(4, 1) e **B**(1, 3)

$$d(A, B) = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

*Página 21*

- 

- 

*Página 22*

Não

*Página 24*

- y = 3x + 8
- y = 4x − 1

*Página 27*

- Observação 3:

Basta transformar a equação geral em reduzida, isolando **y**:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow m_r = \frac{-a}{b}$$

Observação 4:

Em ax + by + c = 0, se y = 0, temos:

$$ax + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-c}{a}$$

Logo, a reta intersecta o eixo **x** em $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Em $ax + by + c = 0$, se $x = 0$, temos:

$by + c = 0 \Rightarrow y = \frac{-c}{b}$

Logo, a reta intersecta o eixo **y** em $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

- $5\sqrt{2}$

*Página 28*

Substituindo (6, 10) em **r**, obtemos $2 \cdot 6 - 10 - 2 = 0$, porque $(6, 10) \in r$.

*Página 31*

As retas são paralelas (coincidentes ou distintas).

*Página 34*

- $\frac{\text{sen}\,(\alpha_1 + 90°)}{\cos\,(\alpha_1 + 90°)} = \frac{\text{sen}\,\alpha_1 \cdot \cos 90° + \text{sen}\,90° \cdot \cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 \cdot \cos 90° - \text{sen}\,\alpha_1 \cdot \text{sen}\,90°} =$

$= \frac{\text{sen}\,\alpha_1 \cdot 0 + 1 \cdot \cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 \cdot 0 - \text{sen}\,\alpha_1 \cdot 1} = \frac{0 + \cos\alpha_1}{0 - \text{sen}\,\alpha_1} = \frac{\cos\alpha_1}{-\text{sen}\,\alpha_1}$

- $m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow \frac{-a'}{b'} = -\frac{1}{-\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{-a'}{b'} = \frac{b}{a} \Rightarrow aa' + bb' = 0$

*Página 35*

$10x + 12y + 7 = 0$

*Página 38*

Quando $P \in r$.

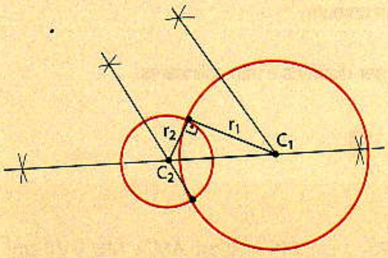
*Página 39*

$\frac{4\sqrt{13}}{13}$

# Capítulo 2

## Abertura

**1.**



Por construção, determinamos os centros das circunferências (encontro das mediatrizes de dois segmentos determinados por duas cordas). Unimos os centros a um dos pontos de intersecção, obtendo o triângulo retângulo.

**2.** a) **C**(4, 8)
b) 1 u, 2 u, 3 u, 4 u, 5 u, 6 u, 7 u, 8 u, 9 u e 10 u
c) À 9ª circunferência, à de raio 9 u.
d) (4, 18)
e) $4\sqrt{5}$

**3.** a) (4,25; 17,5); (25; 4,25); (45,75; 17,5); (25; 45,75)
b) (25; 17,5)
c) 8,75
d) **A**(33,75; 17,5)

**1.** a) **C**(5, 4) e $r = 1$
c) **C**(−3, 1) e $r = 4$
b) **C**(2, 0) e $r = 2$
d) **C**(0, 0) e $r = \sqrt{10}$

**2.** a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
c) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$
b) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 2$
d) $(x - 4)^2 + y^2 = 25$

**3.** a) **C**(2, −3) e $r = 4$
b) **C**(3, 1) e $r = 4$

**4.** a) **C**(2, 4) e $r = 2$
c) **C**(−4, 0) e $r = \sqrt{5}$
b) **C**(−6, 2) e $r = 7$

**5.** a) Sim
c) Não
e) Não
b) Não
d) Sim

**6.** **A** e **B**

**7.** $x^2 + (y + 4)^2 = 2$

**8.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$

**9.** $(x - 2)^2 + y^2 = 8$

**10.** $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 2\}$

**11.** a) **P** pertence a λ.
c) **P** é interno a λ.
b) **P** é externo a λ.

**12.** **P** pertence à circunferência.

**13.** $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 17$

**14.** a) Não há ponto comum e a reta é exterior à circunferência.
b) Os pontos (2, 2) e (−1, −1) são comuns à reta e à circunferência, ou seja, a reta é secante à circunferência.
c) (−2, 0) é o único ponto comum. Logo, a reta é tangente à circunferência.

**15.** (6, −1) e (3, 2)

**16.** 4

**17.** Secantes

**18.** $m = \pm\frac{3}{4}$

**19.** $x + 2y - 8 = 0$

**20.** $y = 3$ e $3y - 4x - 9 = 0$

**21.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$

**22.** $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

**23.** $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

**24.** $\sqrt{2}$

**25.** a) A circunferência $\lambda_2$ é interna a $\lambda_1$.
b) Ponto comum: (2, −1); as circunferências são tangentes externas.

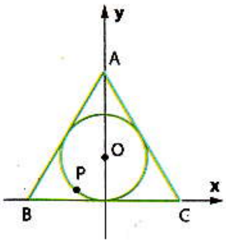
**26.** a

**27.** 4

**28.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49\pi$

**29.** 1 cm

**30.** O mais conveniente é colocar cada um dos três vértices do triângulo sobre algum eixo coordenado.



Como o lado do triângulo vale $2\sqrt{3}$, sua altura vale 3 $\left(h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$.

Assim, os vértices do triângulo são **A**(0, 3), **B**$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e **C**$\left(\sqrt{3}, 0\right)$. O centro da circunferência é o baricentro do triângulo, portanto está a $\frac{1}{3}$ da altura: **O**(0, 1) e o seu raio é 1. Assim, a equação da circunferência é $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Para todo ponto **P**(x, y) pertencente à circunferência, temos:

$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$

As três distâncias de **P** aos vértices são:

$d(P, A) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9}$

$d(P, B) = \sqrt{\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 3}$

$d(P, C) = \sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 3}$

Somando o quadrado das três distâncias, temos:

$x^2 + y^2 - 6y + 9 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 3 =$
$= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 15 = 3(x^2 + y^2 - 2y) + 15$

Como $x^2 + y^2 - 2y = 0$, então a soma dos quadrados é $3 \cdot 0 + 15 = 15$, portanto, constante, como queríamos mostrar.

## Atividades adicionais

**1.** a) **C**$(-2, -6)$ e $r = \sqrt{5}$ b) **C**$(0, 4)$ e $r = 1$

**2.** a) **C**$(3, -4)$ e $r = \sqrt{20}$ c) **C**$(1, 1)$ e $r = \sqrt{2}$
b) **C**$(0, 2)$ e $r = 2$

**3.** a) Não b) Sim c) Não

**4.** Sim; **C**$(-1, -1)$ e $r = 2$ **5.** $x^2 + y^2 = 25$

**6.** $m = 3, n = 0$ e $p < \frac{25}{3}$ **7.** b

**8.** a) Circunferências secantes e se cruzam nos pontos (3, 5) e (1, 3).
b) Circunferências tangentes internas e se tocam no ponto (0, −4).

**9.** d **10.** a **11.** Interno

## Questões de vestibular

**1.** $b = 7$ ou $b = -1$ **2.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

**3.** **C**$(1, -1)$ e $r = \sqrt{3}$ **4.** $2x + 3y - 10 = 0$

**5.** $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$ **6.** $\sqrt{2}$

**7.** $\mathbf{A}\left(\frac{6 + \sqrt{2}}{2}, \frac{8 - \sqrt{2}}{2}\right)$; $\mathbf{B}\left(\frac{6 - \sqrt{2}}{2}, \frac{8 + \sqrt{2}}{2}\right)$

**8.** $k = -20$ **9.** $8\sqrt{2}$ **10.** $x + y - 5 = 0$

**11.** $4y + 3x + 1 + 5\sqrt{7} = 0$ e $4y + 3x + 1 - 5\sqrt{7} = 0$

**12.** $3y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$ e $3y + \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 0$

**13.** $2y + 3x - 5 = 0$

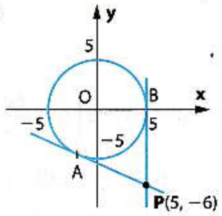
**14.** a) $m = -8$ b) $x + y - 2 = 0$

**15.** a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

b) $(x - 6)^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ e

$$(x - 14)^2 + \left(y - \frac{14\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{196}{3}$$

**16.**



$\overline{AB} = \frac{60\sqrt{61}}{61}$

**17.** a) $-\frac{1}{2}$ b) $y - 2x = 0$; $A \in r$. c) $y = -\frac{x}{2}$

**18.** $r = 3$ **19.** d **20.** a **21.** a

**22.** (5, 5); (4, −2) e (−2, 6)

**23.** d **24.** c **25.** c **26.** c **27.** e

**28.** $x - 2y + 25 = 0$ e $x - 2y - 25 = 0$

**29.** 01) V 02) V 04) V 08) V 16) F
Soma: 15

**30.** a) $\frac{\sqrt{21}}{2}x - y - 3 = 0$

b) $\mathbf{Q}\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}, \frac{6}{5}\right)$

**31.** 28

**32.** $\mathbf{P}\left(3 + \frac{3\sqrt{10}}{10}, 1 + \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

**33.** a) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ c) $y = \frac{4}{3}x + 6$
b) (0, 0) e (0, 6)

**34.** a) $\mathbf{O}_1(0, 5)$ e $r_1 = \sqrt{10}$; $\mathbf{O}_2(-10, 0)$ e $r_2 = \sqrt{85}$.
b) **A**(−3, 6) e **B**(−1, 2)
c) 25 u.a.

**35.** a) (0, 0) b) $a = -4$

**36.** $a = -25$

**37.** a) $x - 1 = 0$; $y + 1 = 0$; $x - y - 1 = 0$
b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$; **C**$(1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$

**38.** c **39.** a **40.** c

## Para refletir

*Página 64*
Não existem pontos em comum.

*Página 66*
Os três pontos devem ser distintos e não colineares.

# Capítulo 3

### Abertura

**1.** a) AP = 9 cm; BP = 1 cm; RP = 10 cm; AM + MB = 10 cm
b) Seu formato se aproximará de uma circunferência.

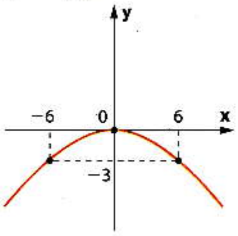
**2.** O Sol é um dos "pregos" e o outro é o que está interno à elipse, em preto.
A "linha" é justamente o contorno da elipse.
O "barbante" corresponde aos segmentos que unem a bolinha vermelha (planeta) aos dois "pregos".

**1.** a) $y^2 = 36x$ c) $x^2 = 28y$
b) $x^2 = -24y$ d) $y^2 = -20x$

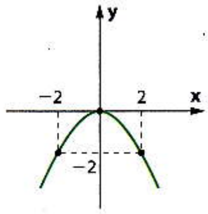
**2.** a) **F**(7, 0); **V**(0, 0); **d**: $x = -7$
b) **F**(0, −1); **V**(0, 0); **d**: $y = 1$
c) $\mathbf{F}\left(0, \frac{5}{2}\right)$; **V**(0, 0); **d**: $y = -\frac{5}{2}$
d) **F**(−4, 0); **V**(0, 0); **d**: $x = 4$

**3.** A concavidade de $x^2 = -12y$ é maior que a concavidade de $x^2 = -2y$.

$x^2 = -12y$



$x^2 = -2y$



**4.** a) $y^2 = 12x$　　c) $(y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) $x^2 = -12y$　　d) $(y + 3)^2 = 12(x + 1)$

**5.** a) **F**$(0, 1)$ e **d**: $y = -1$　　d) **F**$(-1, 0)$ e **d**: $x = 1$

b) **F**$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e **d**: $x = -\frac{1}{2}$　　e) **F**$\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e **d**: $y = -\frac{1}{4}$

c) **F**$(-2, 0)$ e **d**: $x = 2$

**6.** a) **V**$(1, 3)$; **F**$(4, 3)$; **d**: $x = -2$; $y = 3$

b) **V**$(1, 3)$; **F**$\left(1, \frac{13}{4}\right)$; **d**: $y = \frac{11}{4}$; $x = 1$

**7.** 1

**8.** a) $(x + 1)^2 = -4(y - 4)$　　b) $(x - 4)^2 = 12(y - 2)$

**9.** $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$; $(9, 9)$ e $(1, 1)$

**10.** a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$　　b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$

**11.** a) **F**$_1\left(\sqrt{63}, 0\right)$; **F**$_2\left(-\sqrt{63}, 0\right)$; **A**$_1(12, 0)$; **A**$_2(-12, 0)$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

b) **F**$_1(4, 0)$; **F**$_2(-4, 0)$; **A**$_1(5, 0)$; **A**$_2(-5, 0)$; $e = \frac{4}{5}$

c) **F**$_1(0, 1)$; **F**$_2(0, -1)$; **A**$_1\left(0, \sqrt{2}\right)$; **A**$_2\left(0, -\sqrt{2}\right)$; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**12.** $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$　　**13.** 12　　**14.** 16

**15.** $\frac{(x - 2)^2}{1} + \frac{(y - 4)^2}{10} = 1$

**16.** **B**$_1(2, 2)$; **B**$_2(2, 0)$　　**17.** A segunda elipse.

**18.** a　　**19.** d　　**20.** a

**21.** $\frac{(x - 6)^2}{25} + \frac{(y - 7)^2}{9} = 1$

**22.** 6

**23.** a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$　　b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$　　c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

**24.** a) **F**$_1\left(\sqrt{29}, 0\right)$; **F**$_2\left(-\sqrt{29}, 0\right)$; **A**$_1(5, 0)$; **A**$_2(-5, 0)$; $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$

b) **F**$_1\left(\sqrt{41}, 0\right)$; **F**$_2\left(-\sqrt{41}, 0\right)$; **A**$_1(4, 0)$; **A**$_2(-4, 0)$; $e = \frac{\sqrt{41}}{4}$

c) **F**$_1\left(\sqrt{21}, 0\right)$; **F**$_2\left(-\sqrt{21}, 0\right)$; **A**$_1\left(2\sqrt{3}, 0\right)$; **A**$_2\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$;

$e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

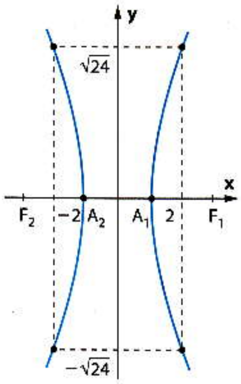
**25.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

**26.** 10　　**27.** $m = \sqrt{3}$

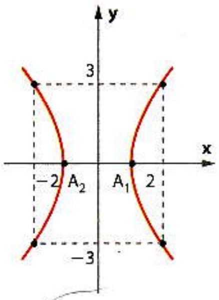
**28.** **F**$_1\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ e **F**$_2\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$

**29.** $x^2 + y^2 = 20$

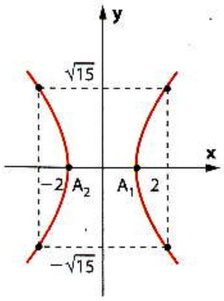
**30.** a) $e = 3$



c) $e = 2$



b) $e = \sqrt{6}$



**31.** $\frac{y^2}{27} - \frac{(x - 3)^2}{9} = 1$

**32.** $2\sqrt{29}$

**33.** $\frac{(x - 4)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$; **F**$_1\left(4 - \sqrt{13}, -3\right)$; **F**$_2\left(4 + \sqrt{13}, -3\right)$

**34.** a) $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{3}{4}x$

b) $y = \frac{2}{5}x$ e $y = -\frac{2}{5}x$

c) $3x - 4y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 17 = 0$

**35.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

**36.** a) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$　　b) $\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$

**37.** **F**$_1\left(5\sqrt{2}, 0\right)$; **F**$_2\left(-5\sqrt{2}, 0\right)$; **A**$_1(5, 0)$; **A**$_2(-5, 0)$

**38.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$

**39.** $60\sqrt{2}$

**40.** a) Elipse　　c) Parábola　　e) Par de retas
b) Hipérbole　　d) Circunferência

**41.** e　　**42.** Vênus; 0,0024%

**43.** **F**$\left(1, \frac{63}{8}\right)$　　**44.** 0,31 UA

## Atividades adicionais

**1.** a) $y^2 = -20x$ c) $(x - 3)^2 = 12(y - 2)$
b) $x^2 = 16y$ d) $(x - 2)^2 = 8(y + 4)$

**2.** a) $\mathbf{F}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $\mathbf{d}$: $x = \frac{3}{2}$ c) $\mathbf{F}(5, 0)$; $\mathbf{d}$: $x = -5$
b) $\mathbf{F}(0, -2)$; $\mathbf{d}$: $y = 2$ d) $\mathbf{F}(0, 3)$; $\mathbf{d}$: $y = -3$

**3.** a) $\mathbf{F}\left(-2, -\frac{17}{16}\right)$; $\mathbf{V}(-2, -1)$; $\mathbf{d}$: $y = -\frac{15}{16}$; $x = -2$

b) $\mathbf{F}\left(\frac{13}{4}, -1\right)$; $\mathbf{V}(2, -1)$; $\mathbf{d}$: $x = \frac{3}{4}$; $y = -1$

**4.** a **5.** e **6.** 2

**7.** a) $(y - 3)^2 = -8(x - 4)$ b) $y - 5 = \frac{1}{12}(x - 5)^2$

**8.** a) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{48} = 1$

**9.** a) $\mathbf{F_1}(\sqrt{5}, 0)$; $\mathbf{F_2}(-\sqrt{5}, 0)$; $\mathbf{A_1}(3, 0)$; $\mathbf{A_2}(-3, 0)$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\mathbf{F_1}(5, 0)$; $\mathbf{F_2}(-5, 0)$; $\mathbf{A_1}(5\sqrt{2}, 0)$; $\mathbf{A_2}(-5\sqrt{2}, 0)$; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\mathbf{F_1}(0, \sqrt{3})$; $\mathbf{F_2}(0, -\sqrt{3})$; $\mathbf{A_1}(0, \sqrt{6})$; $\mathbf{A_2}(0, -\sqrt{6})$; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**10.** $\mathbf{C}(1, 2)$; $\mathbf{A_1}(1, 5)$; $\mathbf{A_2}(1, -1)$; $\mathbf{B_1}(-1, 2)$; $\mathbf{B_2}(3, 2)$; $2c = 2\sqrt{5}$;
$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\mathbf{F_1}(1, 2 + \sqrt{5})$; $\mathbf{F_2}(1, 2 - \sqrt{5})$; $2a = 6$; $2b = 4$

**11.** $(x + 4)^2 + y^2 = 16$ e $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

**12.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

**13.** a) $\mathbf{F_1}(\sqrt{5}, 0)$; $\mathbf{F_2}(-\sqrt{5}, 0)$; $\mathbf{A_1}(1, 0)$; $\mathbf{A_2}(-1, 0)$; $e = \sqrt{5}$

b) $\mathbf{F_1}(\sqrt{13}, 0)$; $\mathbf{F_2}(-\sqrt{13}, 0)$; $\mathbf{A_1}(3, 0)$; $\mathbf{A_2}(-3, 0)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

c) $\mathbf{F_1}(0, \sqrt{13})$; $\mathbf{F_2}(0, -\sqrt{13})$; $\mathbf{A_1}(0, 3)$; $\mathbf{A_2}(0, -3)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

**14.** $\mathbf{O}(2, -1)$; $\mathbf{F_1}(5, 0)$; $\mathbf{F_2}(-5, 0)$; $\mathbf{A_1}(4, 0)$; $\mathbf{A_2}(-4, 0)$; $y = \pm\frac{3}{4}x$

**15.** $60\sqrt{2}$ **16.** a

**17.** a) $\frac{(x - 6)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{12} = 1$ b) $\frac{(y - 6)^2}{4} - \frac{(x - 5)^2}{32} = 1$

**18.** b

**19.** a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ d) $\frac{(x - 4)^2}{32} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$

b) $y^2 = 8x$ e) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

c) $(x - 3)^2 = -8(y + 1)$ f) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$

**20.** a) Circunferência d) Elipse
b) Parábola e) Hipérbole
c) Duas retas concorrentes

**21.** c **22.** b

## Questões de vestibular

**1.** c **2.** 24 **3.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **4.** c **5.** c **6.** b

**7.** a **8.** b **9.** e **10.** b **11.** d **12.** a

**13.** c **14.** a **15.** e **16.** a

**17.** a) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ b) $\sqrt{\frac{14}{15}} \leqslant x \leqslant 5$

**18.** c

**19.** a) $x_0 = 3$ b) $y = \frac{1}{6}(x^2 + 3)$

**20.** $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$; $(-\sqrt{6}, \sqrt{2})$; $(\sqrt{6}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$

**21.** a **22.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$

## Para refletir

*Página 75*

Porque, se o eixo de simetria fosse horizontal, a parábola representaria uma relação em que teríamos duas imagens para um mesmo elemento do domínio, o que contradiz a definição de função.

*Página 82*

- $\mathbf{B_1}(0, 2)$ e $\mathbf{B_2}(0, -2)$
- Ela tenderá a ser uma circunferência.

# Capítulo 4

### Abertura

**1.** a) $x^3 - 15x - 4 = 0$
Então, $a = -15$ e $b = -4$
Logo:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{15}{3}\right)^3 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2} - \frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{15}{3}\right)^3 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2} + \frac{4}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt{-125 + 4} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-125 + 4} + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2}$$

b) Sim

**2.** a) $x^2 - 10x + 40 = 0$ c) $x_1 = 5 - 15i$ e $x_2 = 5 + 15i$
b) $x = 5 \pm \sqrt{-15}$

**3.** $X_1 = a + bi$
$X_2 = a^2 - b^2 + a + (2a + 1)bi$
$X_3 = a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + 2a^3 - 6ab^2 + a^2 - b^2 + a +$
$+ (4a^3 - 4ab^2 + 6a^2 - 2b^2 + 2a + 1)bi$

**1.** a) $5i$
b) $2 - i$
c) $-7 + i$
d) $10 + 10i$
e) $2 + 3i$
f) $3 - 5i$
g) $-4 + 7i$
h) $10 + 10i$
i) $2 + 3i$
j) $-2 + i$
l) $5 + 10i$
m) $-5 - 18i$

**2.** a) $z = -3 - 2i$
b) $z = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

**3.** a) $i$
b) $-1$
c) $1$
d) $-i$
e) $-i$
f) $1$
g) $1 - i$
h) $-5 + 43i$
i) $41 + 38i$
j) $1 - i$

**4.** a) $-8i$
b) $4\,096$
c) $8\,192 - 8\,192i$

**5.** $z_1 = 1 - 5i; z_2 = 2 - 14i$

**6.** a) $x = 0$ ou $x = 1$
b) $x = \pm 1$
c) $x = \pm 2$
d) $x = 0$
e) $x = 3$ ou $x = 1$
f) $x = 4$ ou $x = 3$
g) $x = \pm 1$

**7.** Todas são verdadeiras.

**8.** $z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$

Assim, $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ são raízes da equação dada.

Vamos verificar se $z_1 = 1 + i$ é raiz de $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Substituindo $\mathbf{z_1}$ na equação, temos:

$(1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 1 + \cancel{2i} + i^2 - \cancel{2} - \cancel{2i} + \cancel{2} = 1 - 1 = 0$

Logo, $\mathbf{z_1}$ é raiz da equação.

O mesmo faremos para $\mathbf{z_2}$:

$(1 - i)^2 - 2(1 - i) + 2 = 1 - \cancel{2i} + i^2 - \cancel{2} + \cancel{2i} + \cancel{2} = 1 - 1 = 0$

Logo, $\mathbf{z_2}$ é raiz da equação.

**9.** $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; z_1 z_2 =$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

**10.** $z = x + yi$
$(1 + z)^2 = (1 + x + yi)^2 = [1 + (x + yi)][1 + (x + yi)] =$
$= 1 + (x + yi) + (x + yi) + (x + yi)^2 = 1 + 2(x + yi) + (x + yi)^2 =$
$= 1 + 2z + z^2$

**11.** a) $\overline{z} = 1 - 5i$
b) $\overline{z} = -2i$
c) $\overline{z} = 0$
d) $\overline{z} = -4 - 2i$
e) $\overline{z} = 5$
f) $\overline{z} = 3 - 3i$
g) $\overline{z} = -1 + i$
h) $\overline{z} = \sqrt{2} + 2i$

**12.** a) 25 b) 49 c) 2

**13.** a) $\overline{z}_1 = 2 + 3i; \overline{z}_2 = 3 - 5i; \overline{z}_1 + \overline{z}_2 = 5 - 2i; \overline{z_1 + z_2} = 5 - 2i$
b) $5 - 8i$
c) $-9 - 19i$
d) $16 + 5i$
e) $\overline{z}_1 \overline{z}_2 = 21 - i; \overline{z_1 z_2} = 21 - i$
f) $-9 + 19i$
g) $36 - 3i$

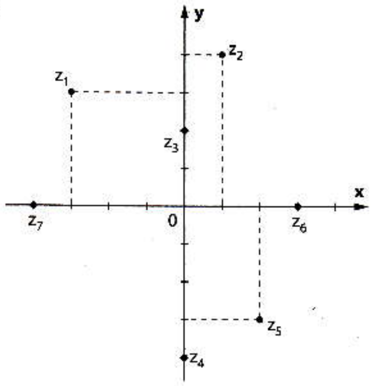
**14.** $z = -1 - 2i$

**15.** a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$
b) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
c) $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$
d) $-\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

**16.** a) $\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$
b) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
c) $-1 + 2i$
d) $1 - i$
e) $-i$

**17.** a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
b) $\frac{50}{13} - \frac{75}{13}i$
c) $-\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i$
d) $-\frac{1}{4}$

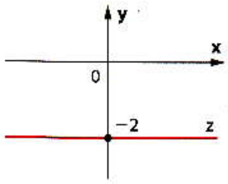
**18.**



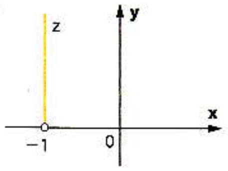
**19.** $z_1 = 4 + i; z_2 = 1 - 2i; z_3 = 2; z_4 = -4; z_5 = 3i;$
$z_6 = -2 + 2i$

**20.** $-z_1 = (-3, -2); -z_2 = (2, -1); -z_3 = (0, 2)$

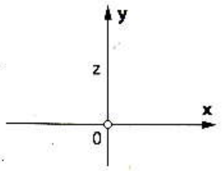
**21.** a)



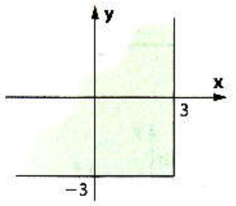
b)



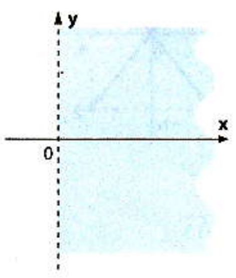
c)



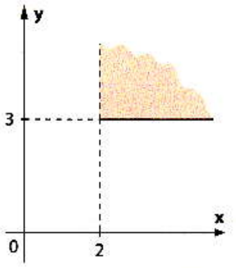
d)



e)

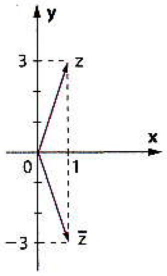


f)

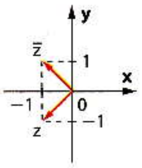


**22.** $2 \leq a \leq 5$ e $1 \leq b < 2$

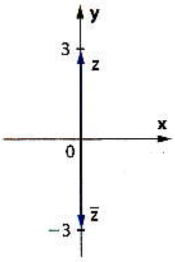
**23.** a)



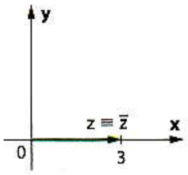
b)



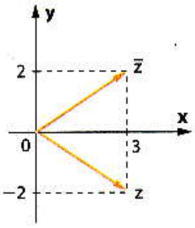
c)



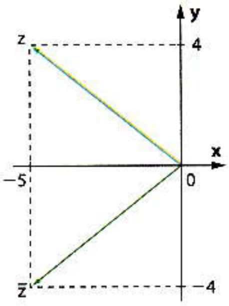
d)



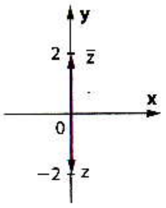
e)



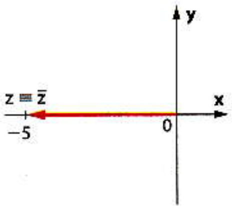
f)



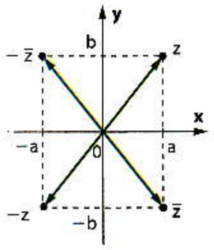
g)



h)



**24.**



**25.** a) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{5}$ g) $\sqrt{41}$

b) $\sqrt{13}$ e) 5 h) 2

c) 7 f) 3

**26.** a) $4\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$

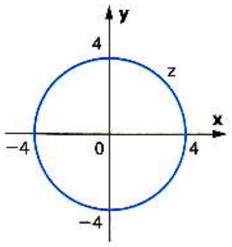
b) 13 d) $\sqrt{13}$

**27.** a) $\sqrt{10} + \sqrt{29}$ d) $\sqrt{13}$ g) 100

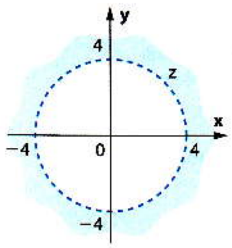
b) $\sqrt{290}$ e) $\sqrt{290}$ h) 24 389

c) $\frac{\sqrt{290}}{29}$ f) $\frac{\sqrt{290}}{29}$ i) $10\sqrt{10}$

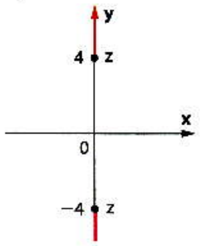
**28.** a)



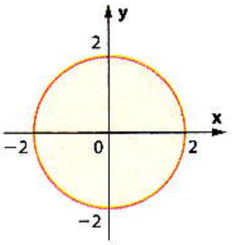
b)



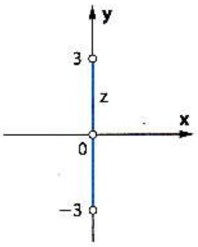
c)



d)



e)



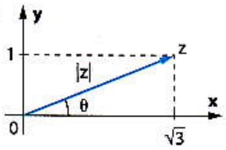
**29.** Usando a propriedade demonstrada ($z\overline{z} = |z|^2$),

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1}{z_2}\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)^2$$

Como $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \geq 0$, $|z_1| \geq 0$ e $|z_2| > 0$, então de $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)^2$

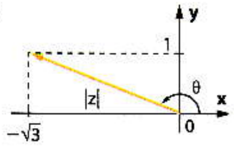
podemos tirar $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, como $z_2 \neq 0$.

**30.** a)



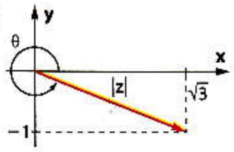
$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

b)



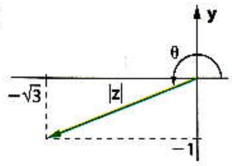
$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

c)



$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

d)



$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$

**31.** a) $z = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{4}\right)$

c) $z = 16\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{6}\right)$

d) $z = 4(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\, 0)$

e) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\, \frac{7\pi}{4}\right)$

f) $z = 3(\cos \pi + i \cdot \text{sen}\, \pi)$

g) $z = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{2}\right)$

**32.** a) $z = \sqrt{3} + i$ c) $z = -i$ e) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

b) $z = 5$ d) $z = -4$

**33.** a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{4}$

**34.** a) $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $z_1z_2 = -3\sqrt{3} + 3i = 6\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{6}\right)$

c) $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$ e $|z_1z_2| = 6$

Como $6 = 2 \cdot 3$, então $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Mas:

$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

Então, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

**35.** $zw = 18\left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{13\pi}{12}\right)$;

$w^2 = 36\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{3}\right)$; $\frac{z}{w} = 2\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{7\pi}{12}\right)$

$\frac{w}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{17\pi}{12}\right)$

**36.** $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{6}\right)$

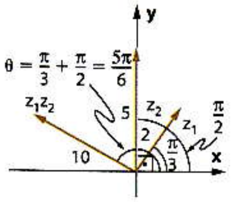
**37.** a) $z_1z_2 = 6\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{11\pi}{12}\right)$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{12}\right)$

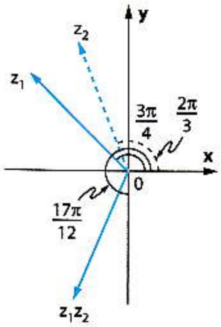
b) $z_1z_2 = 8\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{11\pi}{12}\right)$;

$\frac{z_1}{z_2} = 2\left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{17\pi}{12}\right)$

**38.** a) $z_1z_2 = 10\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{6}\right)$



b) $z_1z_2 = 1\left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{17\pi}{12}\right)$



**39.** $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $z^3 = -8$; $z^9 = -512$

**40.** a) $-2 - 2i$ e) $-8 - 8\sqrt{3}i$

b) $-972 + 972i$ f) $-512i$

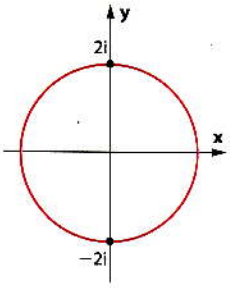
c) $64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}i$ g) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $-2^{99} - 2^{99}\sqrt{3}i$ h) $-3^{17}$

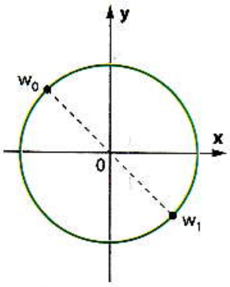
**41.** a) $-6$ c) $8i$

b) $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$ d) $3^{99}i$

**42.** a) $w_0 = 2i$; $w_1 = -2i$

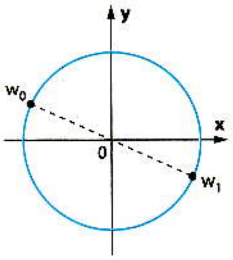


b) $w_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

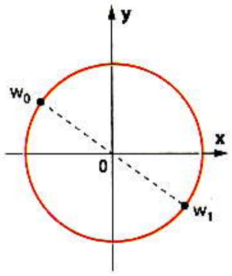


c) $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right);$

$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{15\pi}{8}\right)$

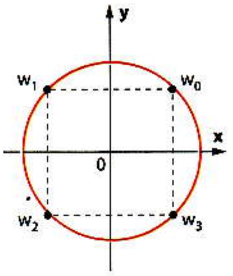


d) $w_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ w_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$



**43.** a) $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$

$w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$

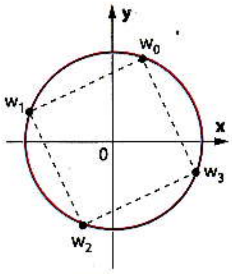


b) $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right);$

$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right);$

$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right);$

$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

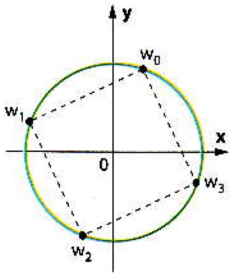


c) $w_0 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right);$

$w_1 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right);$

$w_2 = 1\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{8}\right);$

$w_3 = 1\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{15\pi}{8}\right)$

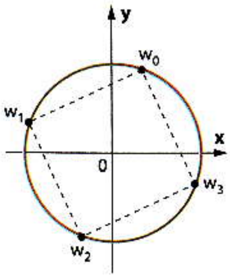


d) $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right);$

$w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right);$

$w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right);$

$w_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right);$

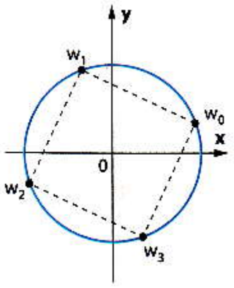


e) $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{24}\right);$

$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\,\frac{13\pi}{24}\right);$

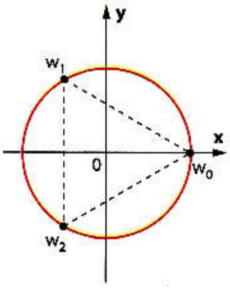
$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\,\frac{25\pi}{24}\right);$

$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i \cdot \text{sen}\,\frac{37\pi}{24}\right);$

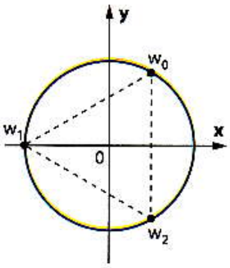


**44.** $3, -3, \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

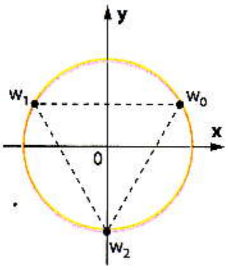
**45.** a) $5, -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i, -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$



b) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$



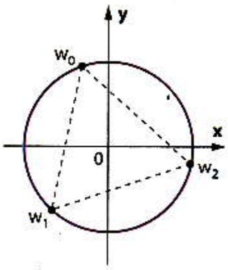
c) $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$



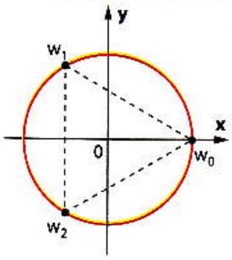
d) $w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{7\pi}{12}\right);$

$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{4}\right);$

$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\, \frac{23\pi}{12}\right)$



**46.** a) $w_0 = 1; w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

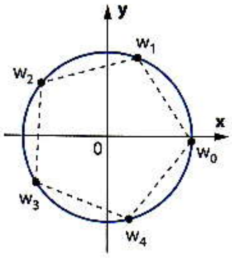


b) $w_0 = 1; w_1 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\, \frac{2\pi}{5}\right);$

$w_2 = 1\left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\, \frac{4\pi}{5}\right);$

$w_3 = 1\left(\cos \frac{6\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\, \frac{6\pi}{5}\right);$

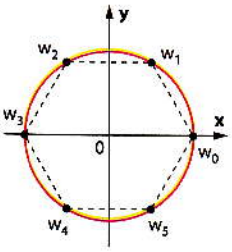
$w_4 = 1\left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\, \frac{8\pi}{5}\right)$



c) $w_0 = 1; w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

$w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; w_3 = -1;$

$w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



**47.** $(0, 2); (-\sqrt{3}, 1); (-\sqrt{3}, -1); (0, -2); (\sqrt{3}, -1); (\sqrt{3}, 1)$

**48.** a) $S = \{2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\}$

b) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$.

c) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

d) $S = \left\{\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{8}; \cos \frac{5\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\, \frac{5\pi}{8};\right.$

$\left.\cos \frac{9\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\, \frac{9\pi}{8}; \cos \frac{13\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\, \frac{13\pi}{8}\right\}$

e) $S = \left\{3i, -3i, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i,\right.$

$\left.-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right\}$

f) $S = \left\{2; 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{5}\right); 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\,\frac{4\pi}{5}\right);\right.$

$\left.2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\,\frac{6\pi}{5}\right); 2\left(\cos\frac{8\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\,\frac{8\pi}{5}\right)\right\}$

g) $S = \left\{\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right); \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right);\right.$

$\left.\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right); \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i \cdot \text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right)\right\}$

h) $S = \{-2 + i, -2 - i\}$
i) $S = \{1, -1, 3, -3\}$
j) $S = \{-2i, 2i, -i, i, -2, 2, -1, 1\}$
l) $S = \{3i, -i\}$

m) $S = \left\{1 + \sqrt{3}i; -2; 1 - \sqrt{3}i; 1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

n) $S = \left\{3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1\right\}$

**49.** $z^3 = (1 + \sqrt{3}i)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 =$

$= 1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i = -8$

$z^6 = (-8)^2 = 64$

Então:

$z^6 + 9z^3 + 8 = 64 - 72 + 8 = 0$

Logo, **z** é raiz da equação.

**50.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  b) $-1$  c) $-i$

**51.** $5 - 5\sqrt{3}i$ (ou $10 \angle -60°$)

**52.** **C**$(4 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 2)$

## Atividades adicionais

**1.** a) $3 + 2i$
b) $-5 - 4i$
c) $\frac{5}{6} + i$
d) $-1 + 2i$
e) $2 + i$
f) $1$
g) $-1 - i$
h) $\frac{3}{4}i$
i) $-\frac{5}{3}i$
j) $2 - 4i$
l) $1 + 2i$
m) $-\frac{1}{6} - 3i$
n) $4 - i$
o) $-1 - 2i$
p) $\frac{11}{30} + 3i$
q) $-4 + 3i$

**2.** a) $14 - 8i$
b) $-8 - 9i$
c) $16 - 12i$
d) $-9 + 6i$
e) $\frac{37}{6} - \frac{5}{6}i$
f) $4 + \sqrt{2}i$
g) $-9 - 46i$
h) $38 - i$
i) $-4i$
j) $17 + i$
l) $-2i$
m) $-2 + 2i$
n) $9 + 3i$
o) $2 + 4i$
p) $(-9 - 4\sqrt{3}) + (-12 + 3\sqrt{3})i$
q) $5 - 4i$
r) $-2 + 2i$
s) $25$

**3.** b  **4.** $a = b = 4$  **5.** $x = -1$ e $y = -4$

**6.** $z = 2 + 2i$ ou $z = -2 - 2i$  **7.** c  **8.** 0  **9.** c

**10.** b  **11.** e  **12.** c

**13.** a) $\frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{6}i$  c) $\frac{6\sqrt{3}}{125} - \frac{33\sqrt{3}}{125}i$

b) $\frac{7}{2} + \frac{i}{2}$

**14.** a) $z_1 = a + bi; z_2 = c + di$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(a + bi) - (c + di)} = \overline{a + bi - c - di} =$

$= \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i =$

$= a - c - bi + di = (a - bi) - (c - di) = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

b) $z = a + bi$

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = a + \cancel{bi} + a - \cancel{bi} = 2a$

Logo, $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$.

c) $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = \cancel{a} + bi - \cancel{a} + bi = 2\,bi = 2\text{Im}(z)$

d) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a + bi)}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$

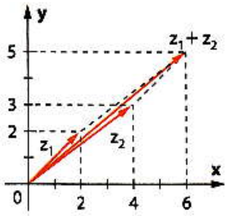
Logo, $\overline{\overline{z}} = z$.

**15.** a) 0  b) $\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i$

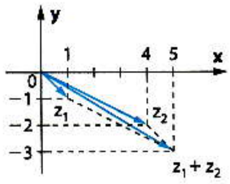
**16.** a) $z = 2 - 3i$  b) $z = 1 + 3i$

**17.** $z = -5$

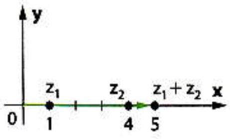
**18.** a) $6 + 5i$



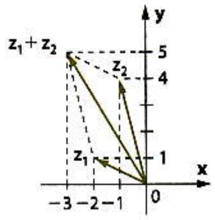
c) $5 - 3i$



b) 5



d) $-3 + 5i$



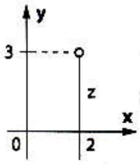
**19.** a) $4 - 6$ ou $1 - 9$ ou $3 - 4$, etc.
b) $2 : 3$ ou $(-5) : (-9)$ ou $(-2) : 5$, etc.
c) $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[4]{7}$ ou $\sqrt[3]{3}$, etc.
d) $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt[4]{-16}$ ou $\sqrt[6]{-3}$, etc.

**20.** $5\sqrt{2}$  **21.** $z_1 = -4 + i$ ou $z_2 = 4 - i$

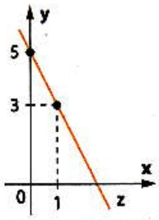
**22.** a) $z = -1 + i$  b) $z = -7$

**23.** $a = 2$ e $b \neq 4$

**24.** a)



b)



**25.** 1º quadrante

**26.** a) 16 b) i c) −i d) −1

**27.** −2i

**28.** −32i e −32 − 32i

**29.** S = {3 + i, 3 − i}

**30.** $x^2 + 10x + 29 = 0$

**31.**

| **+** | **−1** | **1** | **−i** | **i** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|
| **−1** | −2 | 0 | −1 − i | −1 + i | −1 |
| **1** | 0 | 2 | 1 − i | 1 + i | 1 |
| **−i** | −1 − i | 1 − i | −2i | 0 | −i |
| **i** | −1 + i | 1 + i | 0 | 2i | i |
| **0** | −1 | 1 | −i | i | 0 |

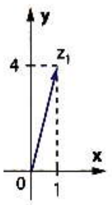
| **×** | **−1** | **1** | **−i** | **i** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|
| **−1** | 1 | −1 | i | −i | 0 |
| **1** | −1 | 1 | −i | i | 0 |
| **−i** | i | −i | −1 | 1 | 0 |
| **i** | −i | i | 1 | −1 | 0 |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**32.** O conjunto **A** não é fechado em relação à adição porque, por exemplo, $-1 \in A$, $-i \in A$ e $-1 - i \notin A$.

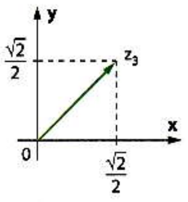
O conjunto **A** é fechado em relação à multiplicação porque qualquer produto de elementos de **A** resulta em um elemento de **A**.

**33.** a) 3 − 8i b) 20i

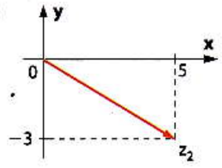
**34.** a)



c)



b)



**35.** $z_1 = a + bi$: o par ordenado associado a $\mathbf{z_1}$ é (a, b).

$z_2 = c + di$: o par ordenado associado a $\mathbf{z_2}$ é (c, d).

O ponto médio de (a, b) e (c, d) é $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ (I).

Então:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{a + bi + c + di}{2} = \frac{(a + c) + (b + d)i}{2} =$$

$$= \frac{a+c}{2} + \left(\frac{b+d}{2}\right)i \text{ (II)}$$

Comparando I com II, temos a demonstração da proposição.

**36.** Se $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 + 2i$, então:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

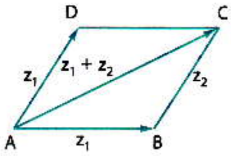
$$|z_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \simeq 2{,}24$$

$$|z_1 + z_2| = |4 + 6i| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \simeq 7{,}21$$

Como $\sqrt{52} < 5 + \sqrt{5}$, temos, neste caso, $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

Vamos demonstrar que, para quaisquer complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ vale $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Considerando que $z_1 + z_2$ equivale a uma soma de vetores e que tal soma pode ser feita pelo método do paralelogramo, temos:



ABCD é paralelogramo. Para existir o triângulo ABC, temos $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Logo, $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

Como $\mathbf{z_1}$ ou $\mathbf{z_2}$ podem ser nulos, então $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

**37.** e

**38.** a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

c) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

d) $z = 2(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0)$

e) $z = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0)$

f) $z = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0)$

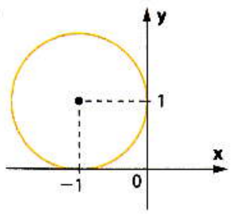
**39.** a) z = −1 + i

b) z = 3i

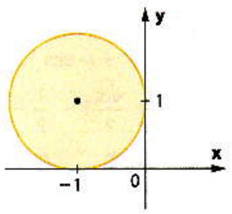
c) $z = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$

**40.** d **41.** b **42.** c

**43.** a)



b)



**44.** a) z = 2i

b) $z = \left(2 + \sqrt{2}\right) + \left(2 + \sqrt{2}\right)i$

**45.** b

**46.** d

**47.** a) 16

b) −1 − i

c) $-2^{99} + 2^{99}\sqrt{3}\,i$

**48.** z = −16

**49.** w = 3 + 2i e w = −3 − 2i

**50.** 1 + i; −1 + i; −1 − i; 1 − i

**51.** a **52.** c

**53.** a) 1 + 3i

b) $\sqrt{10}$

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) 4º quadrante

e) 2 − 4i

f) 2i

g) −2 − 4i

h) −8 − 6i

i) 2 − i

j) −1 + i

l) $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

m) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

**54.** $z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$

**55.** a) $S = \left\{\frac{3}{2} + \frac{i}{2}, \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right\}$  b) $S = \{2 - i, -2 - i\}$

**56.** a) $x^2 - 6x + 13 = 0$  b) $x^2 + ix + 2 = 0$

**57.** a) $-16 - 16\sqrt{3}\,i$

b) $w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right);$

$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right);$

$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right);$

$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

**58.** a

## Questões de vestibular

**1.** $2 + 3i$ e $2 - 3i$  **2.** a  **3.** $b = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3}i$  **4.** $v = 2i$

**5.** a) $z_1 = \cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2$

$z_1 z_2 = (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2) =$

$= \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 +$

$+ i^2 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 = (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) +$

$+ i(\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2) =$

$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

b) $z^{10} + z^5 + 1 = 0$

Vamos substituir **z** por $(\cos 48° + i \cdot \operatorname{sen} 48°)$:

$(\cos 48° + i \cdot \operatorname{sen} 48°)^{10} + (\cos 48° + i \cdot \operatorname{sen} 48°)^5 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 480° + i \cdot \operatorname{sen} 480° + \cos 240° + i \cdot \operatorname{sen} 240° + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 120° + i \cdot \operatorname{sen} 120° + \cos 240° + i \cdot \operatorname{sen} 240° + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (V)

Logo; $\cos 48° + i \cdot \operatorname{sen} 48°$ é raiz de $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

**6.** $n = 4$

**7.** $S = \left\{2, -1, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

**8.** Vamos obter a forma polar de $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, em que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$

Então, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, $z = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$.

A equação $x^{3n+2} + x + 1 = 0$ pode ser escrita da seguinte forma:

$x^{3n}x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow (x^3)^n x^2 + x + 1 = 0$

Vamos substituir o número complexo **z**:

$$(x^3)^n x^2 + x + 1 = \left\{\left[1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3\right\}^n \cdot$$

$$\cdot \left[1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2 + 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) + 1 =$$

$$= [1(\cos 2\pi + \cancelto{0}{i \cdot \operatorname{sen} 2\pi})]^n \cdot \left[1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)\right] +$$

$$+ \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + 1 =$$

$$= [1\cancelto{1}{(1 + 0i)}]^n \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$$

Logo, **z** é raiz da equação $x^{3n+2} + x + 1 = 0$.

**9.** Se $z = x + iy$, então $z + 2i = x + i(y + 2)$ e $z - 2 = (x - 2) + iy$.

Dividindo $\frac{z + 2i}{z - 2}$ encontramos

$\frac{x(x + 2) + y(y + 2) + i[(x - 2)(y + 2) - xy]}{(x - 2)^2 + y^2}$, e a parte real é

$\frac{x(x + 2) + y(y + 2)}{(x - 2)^2 + y^2}$.

Fazendo $\frac{x(x + 2) + y(y + 2)}{(x - 2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}$, encontramos

$x^2 + (y + 2)^2 = 8$ para $x \neq 2$ e $y \neq 0$. Note que $x^2 + (y + 2)^2 = 8$ seria a equação da circunferência de centro $(0, -2)$ e raio $2\sqrt{2}$ se não tivéssemos $x \neq 2$ e $y \neq 0$. Assim, acrescentando-se o ponto $(2, 0)$, temos a circunferência.

**10.** d  **11.** d  **12.** f  **13.** a  **14.** e

**15.** $\frac{9}{10}$  **16.** d  **17.** a  **18.** c  **19.** a

**20.** d  **21.** e

**22.** a) $(16, 16)$  b) $16\sqrt{2}$

**23.** a) $2i$ e $-4 + 6i$

b) $|z| = \sqrt{2}$

$|w| = 2$

$|zw| = 2\sqrt{2}$

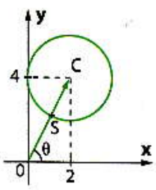
$|w^2| = 4$

Portanto, $(1, |z|, |w|, |zw|, |w^2|) = (1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4)$ e

$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = q = \sqrt{2}$. Logo, a seqüência é uma PG e sua razão é $\sqrt{2}$.

**24.** $z = 2i$ e $z = -2$

**25.** a)



b) $S\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}, \frac{20 - 4\sqrt{5}}{5}\right)$

**26.** 76

## Para refletir

*Página 106*

Quando **z** for real.

*Página 112*

$z^{-1} = \bar{z}$

*Página 116*

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)$

$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)$

Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2}{\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2} =$$

$$= \frac{|z_1|(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i^2 \cdot \text{sen}\,\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2)}{|z_2|(\cos^2\theta_2 - i^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|\overbrace{(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2)}^{\cos(\theta_1 - \theta_2)} + i\overbrace{(\text{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_2 \cdot \text{sen}\,\theta_1)}^{\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)}}{|z_2|\,(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2}$$

Como $\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2 = 1$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

Página 119

$$n = 4\text{: sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$n = 5\text{: sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} > 0$$

# Capítulo 5

### Abertura

**1.** a) $P(x) = 3x$; $G(x) = x$
   b) $D(x) = 900 - x$
   c) 120 pacotes pequenos, 140 pacotes médios e 40 pacotes grandes.

**2.** a) $A(x) = x(x + 2)$
   b) 24 m²
   c) 5 m de largura por 7 m de comprimento

**3.** a) $V(h) = h^3 + 40h^2 + 400h$
   b) $h(20 + h)(20 + h) = 6\,272$
   c) 8 u.c.

**1.** a) Sim
   b) Não
   c) Não
   d) Sim
   e) Sim
   f) Sim
   g) Não
   h) Sim

**2.** $a = -2$, $b = 3$ e $c \neq 1$

**3.** a) Para $m = 4$, o polinômio será do 2º grau; para $m \neq 4$, o polinômio será do 3º grau .
   b) Para $m \neq \pm 2$, o grau do polinômio será 4; para $m = 2$, o grau do polinômio será 0; para $m = -2$, o grau do polinômio será 1.
   c) Para $m \neq \pm 1$, o grau do polinômio será 4; para $m = 1$, o grau do polinômio será 3; para $m = -1$, o grau do polinômio será 2.

**4.** 15

**5.** 1

**6.** 5

**7.** $m = 2$ e $n = 4$

**8.** $a = -\frac{1}{2}$

**9.** $p(x) = 3x - 2$

**10.** $-32$

**11.** $-16$

**12.** 5

**13.** $a = 0$ e $b = 0$

**14.** $m = 2$, $n = 1$ e $p = -3$

**15.** Sim

**16.** a) $k = -9$ b) $k = 19$

**17.** a) $a = 5$ e $b = 3$ b) $a = 10$ e $b = 6$

**18.** $a = 2$

**19.** a) $2x^3 + x^2 - 8x + 8$
   b) $-x^2 + 2x + 1$
   c) $-8x^3 + 16x - 20$
   d) $-2x^3 + 12x^2 - 22x + 12$
   e) $4x^2 - 16x + 16$

**20.** $a = -3$, $b = -8$ e $c = -11$

**21.** $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ e $c = \frac{1}{3}$

**22.** $a = \pm 2$ e $b = 1$

**23.** $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$

**24.** c

**25.** a) $q(x) = x + 3$; $r(x) = 0$
   b) $q(x) = 2x^2 + 2x + 3$; $r(x) = 2$
   c) $q(x) = 7x - 5$; $r(x) = 27x - 15$

**26.** $m = 1$ e $n = -2$

**27.** $h(x) = x^2 - 3x + 2$

**28.** $S = \{-1, 2, 5\}$

**29.** a) $q(x) = 5x - 18$; $r(x) = 56$
   b) $q(x) = 2x^2 + 8$; $r(x) = 37$
   c) $q(x) = x^2 - x$; $r(x) = 2$
   d) $q(x) = \frac{x}{3} - \frac{7}{9}$; $r(x) = \frac{16}{9}$

**30.** a) $p(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$; $h(x) = x - 2$; $q(x) = x^2 + 3x - 2$; $r(x) = 1$
   b) $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 7$; $h(x) = x - 3$; $q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$; $r(x) = 1$

**31.** $a = -1$

**32.** $q(x) = 3x^2 + (-2 - 3i)x + (-3 + 3i)$; $r(x) = 3$

**33.** $r(x) = 43$

**34.** a) $r(x) = -2$ b) $r(x) = 97$

**35.** Não

**36.** $a = 3$

**37.** $b = -1$ e $c = -18$

**38.** Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrr:r} -4 & 1 & -1 & -18 & 8 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -5 \quad 2}_{q(x)} & & & 0 \end{array}$$

Logo, $p(-4) = 0$ e $p(x) = (x + 4)(x^2 - 5x + 2)$. Portanto, o quociente de $p(x)$ por $x + 4$ é $q(x) = x^2 - 5x + 2$.

**39.** $p(-2) = 0$; $p(-1) = 6$; $p(0) = 2$; $p(1) = 0$; $p(2) = 12$
Fatores: $x + 2$; $x - 1$; $2x - 1$

**40.** a) Sim b) Sim c) Não d) Sim

**41.** $S = \{1, 2, 4\}$

**42.** a) $x = 4$ d) $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $x' = 5$ e $x'' = -1$
c) $x' = 3 + i$ e $x'' = 3 - i$

**43.** a) $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 3$
b) $x = -2$ ou $x = \pm i$
c) $x = -2$ ou $x = \pm 3i$
d) $x = 0$ ou $x = 1 + i$ ou $x = 1 - i$

**44.** a) $S = \{1, -1, 2, -2\}$ b) $S = \{1, \sqrt[3]{2}\}$

**45.** $c = -6$; $S = \{-3, -1, 2\}$

**46.** a) $S = \{-1, 1, 1 + i, 1 - i\}$ b) $S = \{-2, 3, 6\}$

**47.** a) $S = \{-1, 2, 10, -3\}$ b) $S = \{i, 2i, -2i\}$

**48.** 3 tem multiplicidade 3; $-4$ tem multiplicidade 2 e 1 tem multiplicidade 5.

**49.** 1 **50.** $S = \{-1, 1, -3\}$ **51.** $x' = 2$ e $x'' = -1$

**52.** 4 **53.** 1 **54.** $x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = 0$

**55.** $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_1x_2x_3 = 1$

**56.** $x_3 = -\frac{1}{2}$; $m = -13$ e $n = -6$

**57.** $x_3 = 4$; $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

**58.** Raízes: 3, 5 e 7. **59.** $S = \{1, -2, 4\}$

**60.** $\frac{189}{4}$ **61.** 4 **62.** $k = 8$ **63.** 0

**64.** a) $1, -1$ e $\frac{1}{2}$ b) $1, -1$ e $\frac{1}{2}$
c) 1 d) $1, 2$ e $\frac{1}{2}$

**65.** $1, -3, i$ e $-i$

**66.** a) $i, -i, -3$ e 4 b) $i, -i, 2 + i$ e $2 - i$

**67.** $a = -12$ **68.** $c = 5$ **69.** $m = 23$; raiz real: $\frac{2}{3}$

**70.** a) 0,7244... b) $-1{,}8634...$

## Atividades adicionais

**1.** $a = 3$ **2.** $k = 3$

**3.** $p(x) = 3x^2 - 2x - 1$; $p(0) = -1$

**4.** a) Soma dos coeficientes: $-3$; termo independente: $-96$
b) Soma dos coeficientes: 4; termo independente: 81

**5.** $a = 2 + i$ e $b = \frac{2+i}{2}$ **6.** 3 **7.** c **8.** $-x^2$

**9.** $k = 9$

**10.** a) $q(x) = x^2 - 3x + 11$; $r(x) = -43$
b) $q(x) = x^2 - 4x - 5$; $r(x) = 1$

**11.** $x = -1$

**12.** a) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 13$; $r(x) = 21$
b) $q(x) = 2x^2 + x + 6$; $r(x) = 25$

**13.** $a = \frac{43}{3}$ **14.** $p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$

**15.** a) $m = 0$ ou $m = -2$ b) $m \in \mathbb{R} \mid 1 < m < 4$

**16.** a) $x = \pm 3$ c) $x' = x'' = -2$
b) $x = \frac{2}{3}$ d) $x' = 1 + i$ e $x'' = 1 - i$

**17.** $r(x) = 2x + 9$

**18.** $m = 4$; Raízes: 2, 1 e $-1$.

**19.** $a = -3$, $b = -10$ e $c = 24$

**20.** a) Sim; grau 2. e) Sim; grau 1.
b) Não f) Não
c) Não g) Sim; grau 5.
d) Sim; grau 3. h) Sim; grau 0.

**21.** a) $a = 5$, $b = 0$ e $c = -9$
b) $a = 1$, $b = 1$ e $c = -1$
c) $a = 1$, $b \neq 1$ e **c** qualquer número complexo

**22.** a) $9x^3 - 15x^2 + 7x - 5$
b) $9x^3 - 21x^2 + 15x - 7$
c) $27x^3 - 54x^2 + 33x - 18$
d) $27x^5 - 90x^4 + 114x^3 - 80x^2 + 35x - 6$
e) $9x^4 - 24x^3 + 22x^2 - 8x + 1$
f) $q(x) = 3x - 2$; $r(x) = -4$

**23.** a) $k = 8$ b) $r(x) = 28$ c) Não

**24.** a) $S = \{i, 2, 3\}$ c) $S = \{3 + i, 3 - i, -i\}$
b) $S = \left\{-2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$

## Questões de vestibular

**1.** Não existe. **2.** $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{5}$ e $\ell = \frac{3}{2}$

**3.** $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$ **4.** $m = 1$, $n = 2$ e $p = -3$

**5.** $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$ **6.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ e $c = -\frac{2}{3}$

**7.** $p(0) = 3$; $p(1) = 2$; $p(2) = 1$

**8.** a) 1 b) $p(x) = x$ ou $p(x) = -x$

**9.** c **10.** $m = 9$ e $n = 5$ **11.** $m = -6$ e $n = 1$

**12.**

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,0x^2 & +\,px & +\,q & x^2+ax+b \\ \cline{5-5}
-x^3 & -\,ax^2 & -\,bx & & x-a \\ \cline{1-4}
 & -ax^2 & +\,(p-b)x & +\,q & \\
 & ax^2 & +\,a^2x & +\,ab & \\ \cline{2-4}
 & & \multicolumn{2}{r}{\underbrace{(p-b+a^2)x+(q+ab)}_{r(x)}} &
\end{array}$$

$$r(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p - b + a^2 = 0 \Rightarrow b = p + a^2 \\ q + ab = 0 \Rightarrow q = -ab \end{cases}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{array}{l|l}
\phantom{-}x^3 + 0x^2 + \quad px + q & x^2 + rx + s \\
\underline{-x^3 - rx^2 - \quad sx \qquad} & \overline{x - r} \\
\quad -rx^2 + (p - s)x + q & \\
\quad \underline{rx^2 + \quad r^2x + rs \quad} & \\
\quad \underbrace{(p - s + r^2)x + (q + rs)}_{r(x)} &
\end{array}$$

$$r(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p - s + r^2 = 0 \Rightarrow s = p + r^2 \\ q + rs = 0 \Rightarrow q = -rs \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} b = p + a^2 \ \text{Ⓘ} \\ q = -ab \ \text{Ⓘ Ⓘ} \\ s = p + r^2 \ \text{(III)} \\ q = -rs \ \text{(IV)} \end{cases}$$

e queremos provar que $b = -r(a + r)$.

Vamos isolar **p** na equação Ⓘ:

$p = b - a^2$

e substituir na equação (III):

$s = b - a^2 + r^2$

Da equação (IV), temos que $s = -\frac{q}{r}$ e da equação (II) temos que $q = -ab$.

Logo:

$$s = \frac{-(-ab)}{r} = \frac{ab}{r}$$

Substituindo em $s = b - a^2 + r^2$, temos:

$$\frac{ab}{r} = b - a^2 + r^2 \Rightarrow ab = rb - a^2r + r^3 \Rightarrow ab - rb = r^3 - a^2r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(a - r) = r(r^2 - a^2) = r(r + a)(r - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{r(r+a)(r-a)}{(a-r)} = \frac{r(r+a)(-1)\cancel{(a-r)}}{\cancel{(a-r)}} = -r(r+a)$$

**13.** b **14.** a **15.** $a = -3$ e $b = 2$ **16.** $a = \frac{1}{3}$

**17.** $a = -\frac{3}{7}$ e $b = \frac{8}{7}$

**18.** $m = -6$ e $n = 1$ **19.** 7 **20.** −66

**21.** $a = 1$ e $b = 0$

**22.** $q(x) = x^{98} + x^{96} + x + ... + x^2 + 1$ e $r(x) = x + 2$

**23.** d **24.** e **25.** a **26.** c **27.** e **28.** −2

**29.** a) $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$ b) $q(x) = x$ e $r(x) = -2x$

**30.** a) $k = 10$ b) $-2, 1 + 2i$ e $1 - 2i$

**31.** 30 **32.** $a = 1$ e $b = -12$ **33.** $\frac{3}{4}$

**34.** −1 (multiplicidade 2) e 2 (raiz simples) **35.** 0

**36.** $x' = 3$ e $x'' = \frac{1}{3}$ **37.** $k = -24$ **38.** $a = -24$

**39.** $x^3 - 5x^2 + 14x - 14 = 0$ **40.** $a = -13$

**41.** 1, 3 e $\frac{1}{3}$ **42.** $S = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ **43.** −2

**44.** $2, -1 + 2i$ e $-1 - 2i$ **45.** $m = -2$ e $n = 0$

**46.** a) $x = 2$
b) $p(x) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

**47.** $S = \{1 + 2i, 1 - 2i, 2, 1\}$

**48.** $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

**49.** Note que $x^6 - 1 = (x - 1)\, q(x)$, ou seja, 1 é raiz de $x^6 - 1$.
Dividindo $(x^6 - 1)$ por $(x - 1)$, encontramos $q(x)$:

$$\begin{array}{c|cccccc:c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

$q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Logo:
$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

Então, as raízes de $q(x) = 0$ são também de $x^6 - 1 = 0$.
Vamos resolver a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
Pesquisa das raízes racionais:
**p** é divisor de 1: $p \in \{+1, -1\}$
**q** é divisor de 1: $q \in \{+1, -1\}$

Assim, $\frac{p}{q} \in \{+1, -1\}$.

Verificando, temos:
$p(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow 1$ não é raiz
$p(-1) = 0 \Rightarrow -1$ é raiz

$$\begin{array}{c|ccccc:c}
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

$x^4 + x^2 + 1 = 0$

Fazendo $y = x^2$, temos:

$$y^2 + y + 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ e } y'' = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

Como $y = x^2$, devemos calcular as raízes quadradas de $y'$ e $y''$. Vamos obter a forma polar de $y'$:

$$y' = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$w_k = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)$$

$$k = 0: w_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_1 = -w_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Como os coeficientes de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ são reais, então os conjugados de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e de $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ também são raízes.

Assim, as raízes de $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ são os elementos do conjunto

$$S = \left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

**50.** a) $(n + 1)\ a_0$

b) $p(x) = a_0 + a_0qx + a_0q^2x^2 + ... + a_0q^nx^n = a_0(1 + qx + q^2x^2 + $
$+ ... + q^nx^n) = 0 \Rightarrow 1 + qx + q^2x^2 + ... + q^nx^n = 0$

Substituindo **qx** por **y**, temos $1 + y + y^2 + ... + y^n = 0$.
O 1º membro é a soma dos termos de uma PG de razão **y** e $a_1 = 1$.
Logo, a soma acima é:

$$\frac{1y^n - 1}{y - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1} = 0 \Rightarrow y^n - 1 = 0 \text{ e } y \neq 1$$

As únicas raízes reais de $y^n - 1 = 0$ para **n** par são 1 ou $-1$. Como $y = 1$ não convém, vamos mostrar que $y = -1$ não convém.

Se $y = -1$, então $qx = -1$.

Como $1 + qx + q^2x^2 + ... + q^nx^n = 0$, então:

$1 + (-1) + (-1)^2 + ... + (-1)^n = 1 - 1 + 1 - ... + 1 = 1$, já que **n** é par.

Logo, $1 + qx + q^2x^2 + ... + q^nx^n$, para **n** par, não é nulo.

Então, as raízes **y** da equação $y^n - 1 = 0$, **n** par, não são reais.

Portanto, **qx** não é real e também **x** não é real.

**51.** b **52.** b **53.** c **54.** e **55.** a **56.** e

**57.** e **58.** c **59.** d **60.** c **61.** b

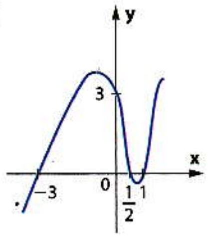
**62.** a) $\frac{77}{6}$ cm³ b) $\frac{103}{3}$ cm² c) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm

**63.** e **64.** a

**65.** a) $A = \left\{-3, \frac{1}{2}, 1\right\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 1\right\}$

c)



## Para refletir

*Página 134*

a)Expressão polinomial de grau 5.

b)Expressão polinomial de grau 4.

*Página 146*

Se $(x - c)$ é fator de $p(x)$, então $p(x) = (x - c)q(x)$, com $r(x) = 0$.
Sendo $x = c$, vem:

$p(c) = (c - c)q(c) = 0$

Logo, **c** é raiz de $p(x) = 0$.

*Página 150*

$3(x - 1)(x + 1)(x - 5)$

*Página 154*

$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

*Página 159*

Como o grau é ímpar e igual a 5, temos cinco raízes. Se a quinta raiz fosse complexa, então o conjunto desta raiz seria também raiz da equação e teríamos uma equação do 5º grau com seis raízes, o que é impossível. Logo, a última raiz é real.

# Capítulo 6

## Abertura

**1.** a) Noruega

b) A taxa cobrada na Noruega corresponde a aproximadamente 7 vezes a taxa cobrada no Reino Unido.

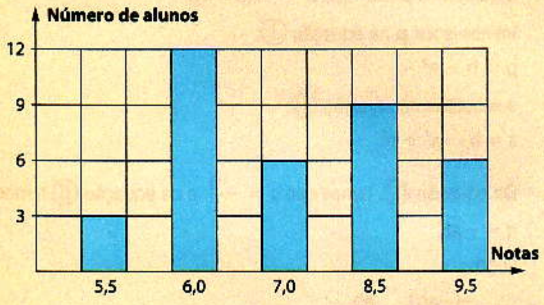
c) 312,5 euros

**2.** a)

| Médias | Quantidade de alunos |
|---|---|
| 5,5 | 3 |
| 6,0 | 12 |
| 7,0 | 6 |
| 8,5 | 9 |
| 9,5 | 6 |

b) 36 alunos

c)



**1.** a) Universo estatístico: conjunto formado pela totalidade dos clientes, ou seja, 3 500 clientes.
Amostra: conjunto formado pelos clientes consultados, ou seja, 250 clientes.

b) Cor: qualitativa nominal; preço: quantitativa contínua; número de portas: quantitativa discreta; estado de conservação: qualitativa ordenal.

c) Branca, vermelha e azul.

**2.**

| Time | FA | FR (%) |
|---|---|---|
| Santos | 2 | 10 |
| Palmeiras | 4 | 20 |
| Corinthians | 8 | 40 |
| São Paulo | 6 | 30 |
| Total | 20 | 100 |

**3.**

| Peso (classes) | Contagem | FA | FR (decimal) | FR (%) |
|---|---|---|---|---|
| 44 ⊢ 46 kg | \| | 1 | 0,05 | 5 |
| 46 ⊢ 48 kg | □ | 4 | 0,20 | 20 |
| 48 ⊢ 50 kg | ⊠∟ | 7 | 0,35 | 35 |
| 50 ⊢ 52 kg | ⊠ | 5 | 0,25 | 25 |
| 52 ⊢ 54 kg | ⊔ | 3 | 0,15 | 15 |
| Total | | 20 | 1,00 | 100 |

**4.** a) Sexo, cor de cabelo, *hobby*.

b) **M** (masculino) e **F** (feminino)

c) 10; $\frac{10}{25}$; 0,4 e 40%

d) Castanho

**5.**

| Desempenho em Matemática | Contagem | FA | FR (%) |
|---|---|---|---|
| Ótimo | ☒└ | 7 | 28 |
| Bom | ☒☐ | 9 | 36 |
| Regular | ☒ | 5 | 20 |
| Insuficiente | ☐ | 4 | 16 |
| Total | | 25 | 100 |

**6.**

| Altura (cm) | Contagem | FA | FR (%) |
|---|---|---|---|
| 146 ⊢ 151 | └ | 2 | 8 |
| 151 ⊢ 156 | └ | 2 | 8 |
| 156 ⊢ 161 | ☐ | 4 | 16 |
| 161 ⊢ 166 | ☒☒\| | 11 | 44 |
| 166 ⊢ 171 | ☐ | 4 | 16 |
| 171 ⊢ 176 | └ | 2 | 8 |
| Total | | 25 | 100 |

**7.**

| Gênero musical | FA | FR | FR | FR (%) |
|---|---|---|---|---|
| Sertanejo | 15 | $\frac{3}{10}$ | 0,30 | 30 |
| MPB | 12 | $\frac{6}{25}$ | 0,24 | 24 |
| *Rock* | 16 | $\frac{8}{25}$ | 0,32 | 32 |
| Clássico | 7 | $\frac{7}{50}$ | 0,14 | 14 |
| Total | 50 | $\frac{50}{50}$ | 1,00 | 100 |

**8.**

| Salário | FA | FR (%) |
|---|---|---|
| 600 ⊢ 690 | 6 | 10 |
| 690 ⊢ 780 | 15 | 25 |
| 780 ⊢ 870 | 30 | 50 |
| 870 ⊢ 960 | 6 | 10 |
| 960 ⊢ 1050 | 3 | 5 |
| Total | 60 | 100 |

**9.** a)

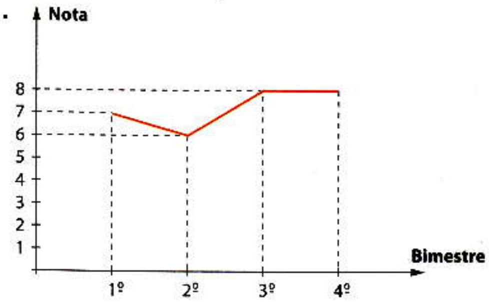
| Resultados | FA | FR | FR (%) |
|---|---|---|---|
| Vitórias | 4 | $\frac{4}{5}$ | 80 |
| Empates | 0 | $\frac{0}{5}$ | 0 |
| Derrotas | 1 | $\frac{1}{5}$ | 20 |
| Total | 5 | $\frac{5}{5}$ | 100 |

b)

| Gols marcados por partida | FA | FR | FR (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $\frac{2}{5}$ | 40 |
| 2 | 1 | $\frac{1}{5}$ | 20 |
| 3 | 1 | $\frac{1}{5}$ | 20 |
| 5 | 1 | $\frac{1}{5}$ | 20 |
| Total | 5 | $\frac{5}{5}$ | 100 |

**10.** a) De agosto a setembro e de outubro a dezembro
b) Outubro
c) Agosto
d) Novembro

**11.**

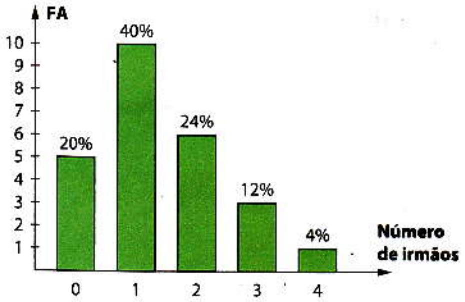


Conclusões:

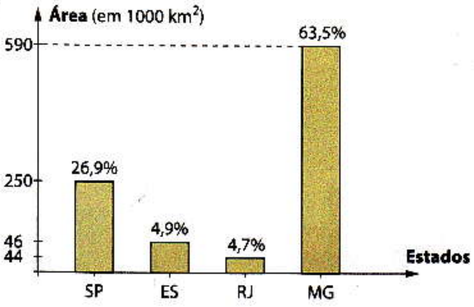
- houve uma queda de rendimento do 1º para o 2º bimestre;
- houve uma melhora de rendimento do 2º para o 3º bimestre;
- houve uma conservação no rendimento do 3º para o 4º bimestre.

**12.** a) Candidato **B**. b) 38% c) Abril

**13.**



**14.**

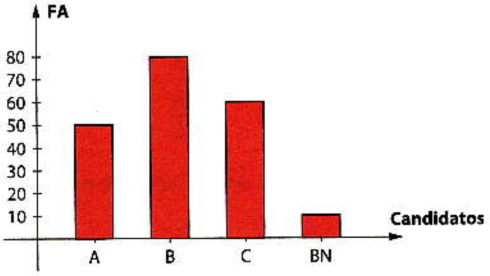


**15.** a) 40 alunos, sendo 19 homens e 21 mulheres.
b) 12 votos.
c) 3 mulheres.
d) 50%.

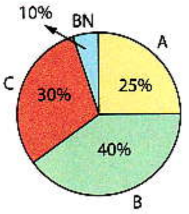
**16.** a)

| **Candidatos** | **FA** | **FR (%)** |
|---|---|---|
| A | 50 | 25 |
| B | 80 | 40 |
| C | 60 | 30 |
| BN | 10 | 5 |
| Total | 200 | 100 |

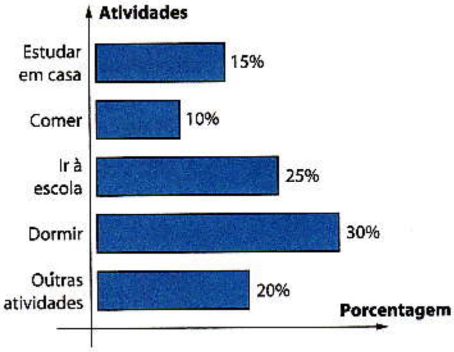
b)



c)



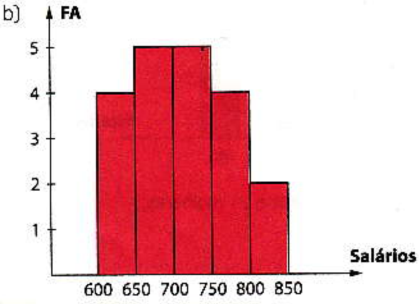
**17.** a) 3h 36min
b) 30%



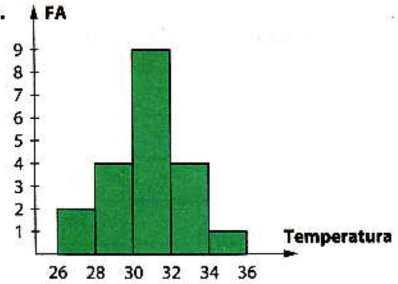
**18.** a)

| **Salário (R$)** | **FA** | **FR (%)** |
|---|---|---|
| 600 ⊢ 650 | 4 | 20 |
| 650 ⊢ 700 | 5 | 25 |
| 700 ⊢ 750 | 5 | 25 |
| 750 ⊢ 800 | 4 | 20 |
| 800 ⊢ 850 | 2 | 10 |
| Total | 20 | 100 |

b)

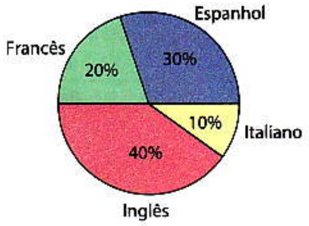


**19.**



**20.**

| **Língua estrangeira** | **FA** | **FR (%)** |
|---|---|---|
| Espanhol | 12 | 30 |
| Francês | 8 | 20 |
| Inglês | 16 | 40 |
| Italiano | 4 | 10 |



**21.** a) 2 gols b) 1 gol

**22.** 7,5 **23.** 17,2 anos **24.** 7,0 **25.** d

**26.** a) 121 b) 121,5 c) 126

**27.** a) 2,3 gols b) 1, 2 e 3 c) 2

**28.** a) 13 reais b) 14 c) 13,5

**29.** a) MA = 14,3; Mo = 15; Me = 14,5
b) MA ≃ 1,71; Mo = 1,67; Me = 1,71

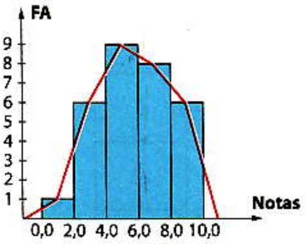
**30.**

MA = 745; Mo = 850; Me = 750

**31.** a) 40 alunos
b) 12,5%
c) 72,5%
d) MA = 3,15; Mo = 3; Me = 3

**32.** MA = 61; DP ≃ 3,56

**33.** a) e b)



c) MA = 5,8; Mo = 5,0; Me = 5,0; DP ≃ 2,4

**34.** a)

| Face | Número de vezes | Freqüência relativa (%) |
|---|---|---|
| 1 | 157 | 15,7 |
| 2 | 171 | 17,1 |
| 3 | 160 | 16,0 |
| 4 | 166 | 16,6 |
| 5 | 171 | 17,1 |
| 6 | 175 | 17,5 |

b) Sim

**35.** 0,000085%

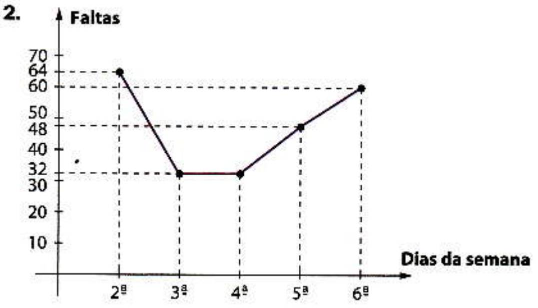
**36.** 30%

## Atividades adicionais

**1.**

| Salário | FA | FR | FR (%) |
|---|---|---|---|
| 1,7 ⊢ 2,6 | 3 | $\frac{3}{25}$ | 12 |
| 2,6 ⊢ 3,5 | 5 | $\frac{5}{25}$ | 20 |
| 3,5 ⊢ 4,4 | 4 | $\frac{4}{25}$ | 16 |
| 4,4 ⊢ 5,3 | 5 | $\frac{5}{25}$ | 20 |
| 5,3 ⊢ 6,2 | 5 | $\frac{5}{25}$ | 20 |
| 6,2 ⊢ 7,1 | 3 | $\frac{3}{25}$ | 12 |
| Total | 25 | $\frac{25}{25}$ | 100 |

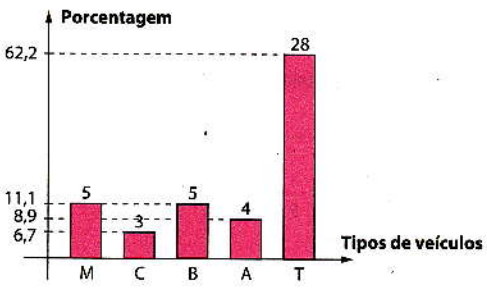
**2.**



Conclusões:

- Na segunda-feira é o maior índice de faltas registrado.
- Na terça-feira e na quarta é o menor índice de faltas registrado.
- Na quinta e na sexta, o índice de faltas volta a subir.

**3.**



**4.** Diminuiu em aproximadamente 13%.

**5.** R$ 3,00 **6.** 45 **7.** e **8.** b **9.** a **10.** c

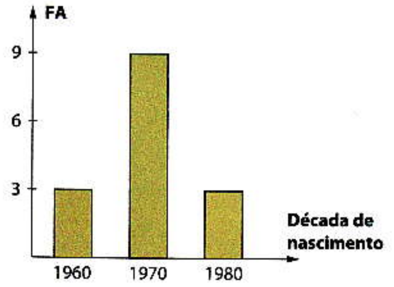
**11.** a) Quantitativa discreta

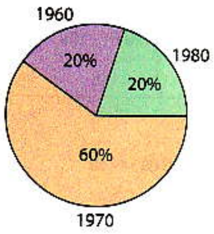
b) 15 indivíduos

c) 3 valores (60, 70 ou 80)

d)

| Década de nascimento | FA | FR | FR (%) |
|---|---|---|---|
| 1960 | 3 | $\frac{3}{15}$ | 20 |
| 1970 | 9 | $\frac{9}{15}$ | 60 |
| 1980 | 3 | $\frac{3}{15}$ | 20 |
| Total | 15 | $\frac{15}{15}$ | 100 |





**12.** a) MA = R$ 2 000,00; Me = R$ 1 500,00

b) Menor

## Questões de vestibular

**1.** b **2.** d **3.** c

**4.** a) 72,2 pontos b) 3 alunos

**5.** d **6.** c **7.** d **8.** e **9.** d **10.** d

**11.** a **12.** c **13.** c **14.** 01, 02, 16 **15.** d

**16.** a) 8 horas por dia b) $\frac{4}{5}$

**17.** a) 14 800 acidentes b) 2 880 acidentes

**18.** a) A variância é nula se todos os valores forem iguais, pois, neste caso, os valores individuais são todos iguais à média; então as diferenças $x_i$ − MA são nulas.

b) O valor é a média aritmética entre $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$.

**19.** 1) $\bar{x} = 3{,}25$; $d = \frac{\sqrt{5}}{4}$

2) Todos

**20.** d **21.** e **22.** 167

## Para refletir

*Página 168*

Quando todos os elementos do universo são pesquisados.

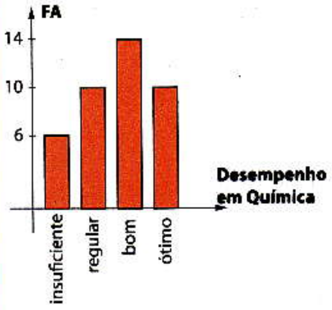
*Página 169*

"Esporte favorito" é variável qualitativa, pois seus valores são qualidades dos indivíduos, gostar ou não de um esporte. É nominal, pois não existe graduação em seus valores.

*Página 174*

A diferença entre o montante obtido com as exportações e o montante gasto nas importações.

*Página 175*



*Página 177*

Sala **B**: 72°; sala **C**: 180°

*Página 178*

| **Altura** | 140 ⊢— 150 | 150 ⊢— 160 | 160 ⊢— 170 | 170 ⊢— 180 | 180 ⊢— 190 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 145 | 155 | 165 | 175 | 185 |

*Página 182*

É uma distribuição em que a moda se repete três vezes.

*Página 186*

Por ser uma propriedade das médias aritméticas.

# Capítulo 7

## Abertura

**1.** a) $A_{total} = 6a^2$  c) $A_{1º} > A_{total}$  e) $V_{1º} < V_{inicial}$

b) $A_{1º} = 8a^2$  d) $V_{1º} = \frac{20}{27}a^3$

A área cresce e o volume decresce.

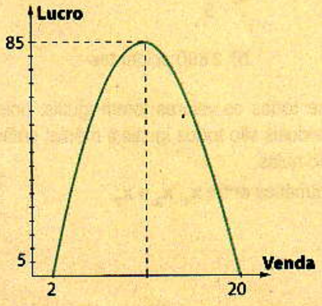
**2.** a) $C(x) = 2(20 - x)$

b) $R(x) = x(20 - x)$

c) $L(x) = -x^2 + 22x - 40$

d) Sim; não

e)



f) O lucro se aproxima de zero. O lucro se aproxima de R$ 81,00.

**1.**

| **Base** | **Altura** | **Área** |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1,5 | 3,0 |
| 4 | 2,0 | 4,0 |
| 4 | 2,5 | 5,0 |
| 4 | 2,9 | 5,8 |
| 4 | 2,999 | 5,998 |
| 4 | 2,999999 | 5,999998 |

A área tende a 6 quando a altura tende a 3.

**2.** Ela tende à medida do cateto constante.

**3.** a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ..., \frac{10}{11}, ... \frac{100}{101}, ... \frac{1000}{1001}\right)$

b) (0,5; 0,66...; 0,75; 0,8; 0,833...; ...; 0,9090...; ...; 0,990099...; ...; 0,99900099...)

c) Para 1.

**4.** a) Para 0.  b) Tenderá ao infinito.

**5.** a) $n = 2$: $a_n = 3$; $n = 4$: $a_n = 1$; $n = 10$: $a_n = 0{,}333...$;
$n = 100$: $a_n = 0{,}0303...$; $n = 1000$: $a_n = 0{,}003003...$
Quando **n** tende a infinito, $\mathbf{a_n}$ tende a 0.

b) $n = 1$: $a_n = 0{,}5$; $n = 10$: $a_n = 0{,}000976$;
$n = 100$: $a_n = 7{,}88 \cdot 10^{-31}$
Quando **n** tende a infinito, $\mathbf{a_n}$ tende a 0.

c) $n = 1$: $a_n = 2$; $n = 5$: $a_n = 0{,}666...$; $n = 10$: $a_n = 0{,}5789...$;
$n = 100$: $a_n = 0{,}5075...$; $n = 1000$: $a_n = 0{,}50075...$
Se $n \to \infty$, então $a_n \to \frac{1}{2}$.

d) $n = 1$: $a_n = 1{,}6$; $n = 10$: $a_n = 3{,}478...$; $n = 50$: $a_n = 3{,}8834...$;
$n = 100$: $a_n = 3{,}94088...$; $n = 1000$: $a_n = 3{,}994008...$
Se $n \to \infty$, então $a_n \to 4$.

**6.** a) É divergente, pois seus valores se alteram e não convergem para número algum.

b) É convergente, pois para **n** tendendo a infinito, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a 0.

c) É uma seqüência constante e, portanto, convergente para 3.

d) Divergente, pois 1, 3, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{4}$, 3, ... é formada por duas seqüências: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... e 3, 3, 3, ... Logo, não converge para um único número.

e) Convergente, pois a seqüência $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}$, ... tende a 0 e a seqüência $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}$, ... tende a 0 também.

f) Divergente, pois $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

g) Divergente, pois $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

h) Convergente, pois se **n** tende a infinito, então $\frac{1}{2n}$ tende a 0.

**7.** a) $\infty$  b) $\infty$  c) $-\infty$  d) $\infty$  e) $-\infty$

**8.** a) 6  c) 4  e) $\frac{1}{2}$  g) $\infty$

b) $\frac{4}{7}$  d) $\frac{1}{3}$  f) $-\frac{1}{3}$  h) $-\infty$

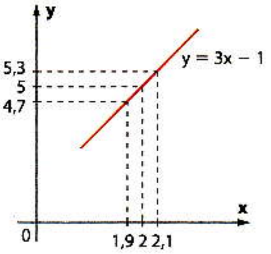
**9.** a) $\frac{2}{3}$  b) 1  c) $\frac{8}{33}$  d) 3

**10.** a) 2    d) Não existe.
b) 2    e) Não existe.
c) 1,5    f) 2

**11.**

| x | y |
|---|---|
| 1,9 | 4,7 |
| 1,99 | 4,97 |
| 1,999 | 4,997 |
| ⋮ | ⋮ |
| 2,001 | 5,003 |
| 2,01 | 5,03 |
| 2,1 | 5,3 |

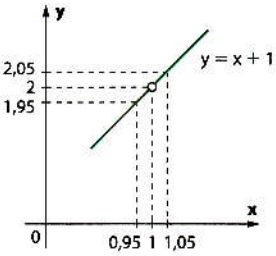
$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$



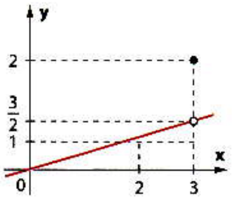
**12.**

| x | y |
|---|---|
| 1,05 | 2,05 |
| 1,01 | 2,01 |
| 1,005 | 2,005 |
| 1,001 | 2,001 |
| ⋮ | ⋮ |
| 0,95 | 1,95 |
| 0,99 | 1,99 |
| 0,999 | 1,999 |

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$



**13.** a)

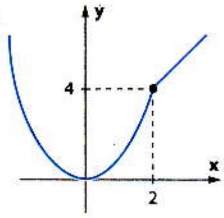


b) 2

c) $\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{3}{2}$; $\lim_{x \to 3_-} f(x) = \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{2}$.

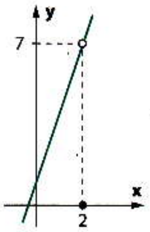
**14.** a)



b) $\lim_{x \to 2_-} f(x) = 4$; $\lim_{x \to 2_+} f(x) = 4$

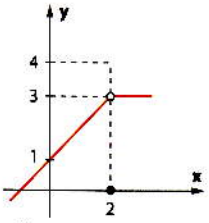
c) 4

**15.** a)



b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$; $f(2) = 0$; $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

**16.** a)



b) $\lim_{x \to 2_-} f(x) = 3$; $\lim_{x \to 2_+} f(x) = 3$

c) 3

**17.** a) 2    c) 2    e) 6    g) 10
b) 8    d) 1    f) $\frac{4}{9}$    h) $\frac{3}{2}$

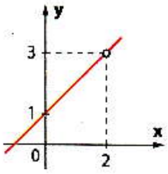
**18.** a) 0    d) 5    g) $\frac{3}{4}$    j) 0
b) 2    e) 1    h) 5    l) $\frac{3}{2}$
c) 3    f) 243    i) 1    m) $\frac{1}{2}$

**19.** a) 8    e) 1    h) −1
b) 2    f) 1    i) 0
c) −1    g) 15    j) 3
d) $\frac{7}{9}$

**20.** a) π    b) $\frac{17}{9}$    c) 3    d) 17    e) 32

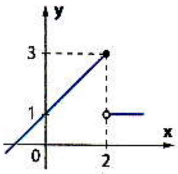
**21.** a) $x = 0$
b) Não há ponto de descontinuidade.
c) $x = 2$ e $x = 3$
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -1$

**22.** a)



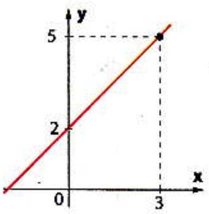
Como não existe f(2), então neste ponto a função é descontínua.

b)



No ponto $x = 2$, temos $\lim_{x \to 2} = 3$ e $\lim_{x \to 2_+} f(x) = 1$. Logo, como não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, a função não é contínua em $x = 2$.

c)



Como $\lim_{x \to 3_-} f(x) = \lim_{x \to 3_+} f(x)$, então $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ e $f(3) = 5$. Logo, a função é contínua.

**23.** a) $a = 4$ b) $a = 6$ c) Não existe **a**.

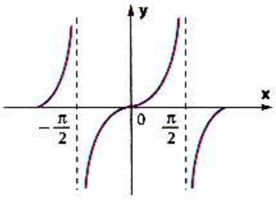
**24.** a) 1 c) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{3}{5}$ g) 2 i) 0 l) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$ d) 4 f) $\frac{a}{b}$ h) 2 j) 1 m) $-\frac{1}{2}$

**25.** $a = \frac{3}{5}$

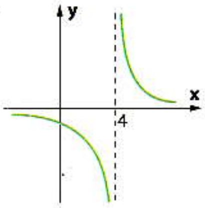
**26.** a) $+\infty$ b) $-\infty$

**27.**



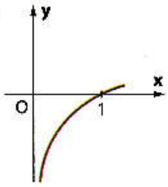
a) $-\infty$ b) $+\infty$

**28.**



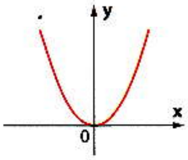
a) $+\infty$ b) $-\infty$

**29.**



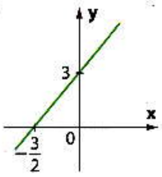
$\lim_{x \to 0_+} \ell n\, x = -\infty$

**30.** a)



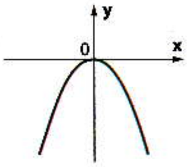
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b)



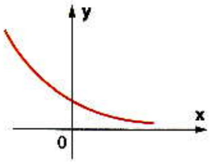
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c)



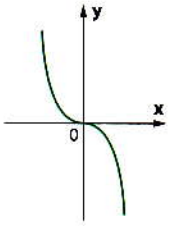
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

d)



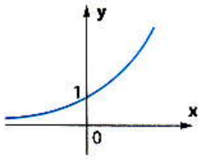
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

e)



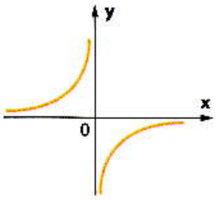
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

f)



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

**31.**



a) 0 b) 0

**32.** a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

**33.** a) $\frac{3}{2}$ c) $+\infty$ e) 0

b) 1 d) $+\infty$ f) 0

**34.** a) $\sqrt{e}$ c) $e^{\frac{2}{3}}$ e) $e^{\frac{1}{2}}$

b) $e^2$ d) $e^3$ f) $\frac{1}{e}$

**35.** a) $(x + 4)$ m/s b) 4 m/s

**36.** a) R$ 3,00 c) R$ 1,50 e) R$ 1,00

b) R$ 1,00 d) $\frac{2 + x}{x}$

Evidentemente, nenhum cliente conseguirá atingir esse custo médio, pois fisicamente é impossível deixar o carro estacionado por infinitas horas. Além disso, o custo total (não o custo médio) tenderia ao infinito, de forma que não seria pagável.

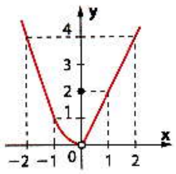
**37.** a) 14,4 dólares
b) 3,60 dólares
c) Aumentar a quantidade fabricada cada vez mais.
d) 2,40 dólares
Isso nunca ocorreria na prática, já que é impossível fabricar infinitos *chips*. Entretanto, é possível chegar bem próximo desse valor.

## Atividades adicionais

**1.** a) ∞ b) −∞ c) ∞ d) ∞ e) 0

**2.** a) ∞ b) ∞ c) ∞ d) 0 e) −∞ f) −∞

**3.** a)

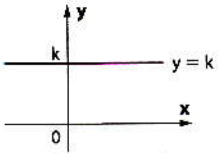


b) $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$

c) 0

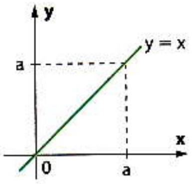
**4.** Não existe.

**5.** a)



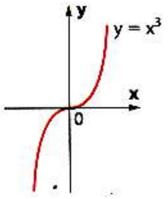
$\lim_{x\to k} f(x) = k$

b)



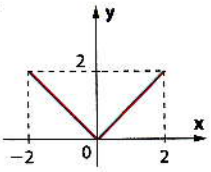
$\lim_{x\to a} f(x) = a$

**6.**



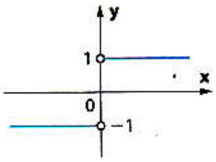
a) $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$ b) 0

**7.**



a) $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$ b) 0

**8.** a)



b) $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = -1$

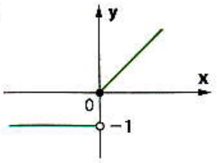
Como $\lim_{x\to 0_+} f(x) \neq \lim_{x\to 0_-} f(x)$, então não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**9.** a) 0 b) 1 c) 6 d) 0 e) 12 f) 3 g) 3 h) 8

**10.** a) 0 b) 14 c) 0

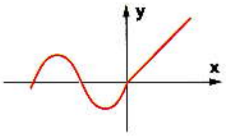
**11.** a) $x = 2$ e $x = -2$ b) $x = 3$ c) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**12.**



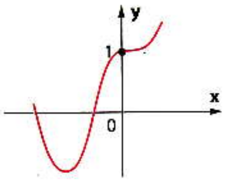
$x = 0$

**13.** a)



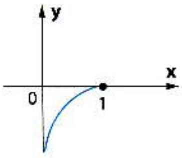
f(x) é contínua em x = 0.

b)



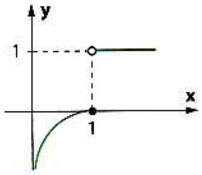
f(x) é contínua em x = 0.

c)



f(x) é contínua em $\mathbb{R}^*_+$.

d)



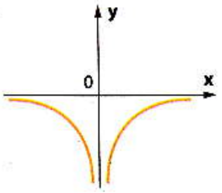
f(x) é descontínua no ponto x = 1.

**14.**
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\, x}{x^2(1+\cos x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\, x}{x^2}=$$
$$=\frac{1}{1+\cos 0}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

**15.** a) 0 b) Não existe. c) $\frac{3}{5}$

**16.** a) −∞ b) +∞

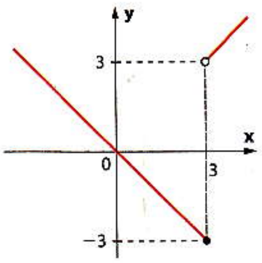
**17.**



a) 0
b) 0

**18.** a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) +∞ d) 0 e) 0 f) 0

**19.**



a) −3
b) 5
c) −1

**20.** e

## Questões de vestibular

**1.** a) $p = \frac{100x}{100 - x}\%$ b) Ela tende a infinito.

**2.** a) V b) F c) V

**3.** e **4.** e **5.** b **6.** c **7.** a **8.** b

**9.** d **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** b **12.** d **13.** d

## Para refletir

*Página 202*

$$\lim_{n \to \infty} (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_s n^s) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} n^s\left(\frac{a_0}{n^s} + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_2}{n^{s-2}} + \ldots + \frac{a_s}{1}\right)$$

Como cada fração tende a 0, se $n \to \infty$, então o limite é $\lim\limits_{n \to \infty} a_s n^s$.
Assim:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_s n^s}{b_0 + b_1 n^1 + b_2 n^2 + \ldots + b_s n^s} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_s n^s}{\lim\limits_{n \to \infty} b_0 + b_1 n^1 + b_2 n^2 + \ldots + b_s n^s} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_s n^s}{b_s n^s}, a_s, b_s \neq 0$$

*Página 214*

$x = -0,1$: $\frac{\text{sen } x}{x} = 0,9983\ldots$

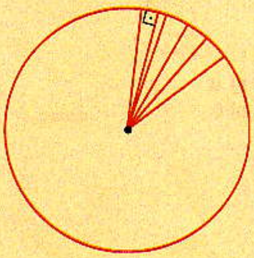
$x = -0,02$: $\frac{\text{sen } x}{x} = 0,99993\ldots$

$x = -0,01$: $\frac{\text{sen } x}{x} = 0,99998\ldots$

# Capítulo 8

### Abertura

**1.** a)



b) $A = \pi r^2$
c) É a mesma.
d) $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

**2.** a) 1,8 m
b) 0,6 m por hora
c) $\frac{5 - 1}{6} = \frac{4}{6} \simeq 0,66\ldots$ m (maior que a anterior)
d) $\frac{5 - 3}{2} = 1$ m por hora

**3.** a) 14 000 habitantes
b) 17 000 habitantes
c) 3 000 habitantes
d) 18 000 habitantes
e) 2 000 habitantes

**1.** a) 2 b) 4

**2.** 12 **3.** Não existe. **4.** 12 m/s **5.** 3 m/s

**6.** a) 22 m/s b) 7 m/s c) 7 m/s

**7.** a) 6 m/s² b) 24 m/s²

**8.** a) 4 b) $y = 4x - 3$

**9.** a) $-1$ b) $y = -x - 1$

**10.** $y = 0$

**11.** a) $y = \frac{x}{4} + 1$ b) Não existe.

**12.** a) $3x^2$
b) $-4x$
c) $3x^2 + 2x$
d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e) $2x$
f) $-\frac{1}{x^2}$

**13.** a) 3
b) 4
c) 16
d) $\frac{1}{2\sqrt{a}}, a > 0$
e) 0
f) $-\frac{1}{9}$

**14.** a) cos x
b) $-2 \cdot \text{sen } x$
c) cos x
d) sen x

**15.** a) 0 b) $-\sqrt{2}$ c) 1 d) 1

**16.** a) $f(x) = ax + b$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x + h) + b - (ax + b)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

b) $f(x) = k$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

c) $f(x) = x = 1 \cdot x + 0$
$f'(x) = 1$

**17.** a) 0
b) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$
c) $\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 1$
d) $-4x^3$
e) $2x + 1$
f) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^2$

**18.** a) $12x^3$
b) $3\sqrt{2}\,x^2 - 2$
c) $-30x^2 + 4x$
d) $\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$

**19.** a) $e^x + \frac{1}{x}$
b) $-\text{sen } x + a^x \cdot \ell n\, a$
c) $\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
d) $\frac{1}{x \cdot \ell n\, 2} - \sec^2 x$

**20.** a) $x^2(3 \cdot \ell n\, x + 1)$
b) $(2x + 1)\cos x - (x^2 + x + 1)\text{sen } x$
c) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{sen } x + \sqrt{x} \cdot \cos x$
d) $3a^2x^2 + 4abx + b^2 + ac$

**21.** a) $\frac{2}{x} - 5 \cdot \text{sen } x$

b) $2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \text{sen } x - k \cdot \sec^2 x$

**22.** a) $\frac{\text{sen } x - x \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x}$ c) $-\text{cossec}^2 x$

b) $-\frac{1}{x^2}$ d) $-\frac{1}{x^2}$

**23.** a) $3x^2 \cdot \cos x^3$ d) $\frac{1}{2x}$

b) $\frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ell n\, 10} \cdot 2x$ e) $-e^{\cos x} \cdot \text{sen } x$

c) $\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

**24.** a) $3\sqrt[3]{x^2}$ c) $\frac{1}{3x^2}$

b) $-\frac{1}{2x}$ d) $\frac{1}{a^x \cdot \ell n\, a}$

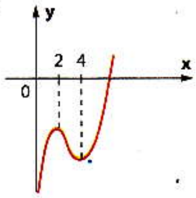
**25.** a) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ c) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

b) $\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

**26.** a) Crescente para todo domínio IR.
b) Crescente para x ∈ [3, +∞) e decrescente para x ∈ (−∞, 3].
c) Crescente nos intervalos $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$ e [2, +∞), e decrescente no intervalo $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$
d) Decrescente em todo domínio IR.

**27.** a) Crescente em IR.
b) Crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
c) Crescente em $\text{IR}^*_+$.

**28.** a) Crescente nos intervalos (−∞, 2] e [4, +∞), e decrescente no intervalo [2, 4].
b) x = 2 e x = 4
c)



**29.** a) Em [2; 4,5]. b) Em [−2, 2] e [4,5; 6].

**30.** a) t > 4 b) t < 4

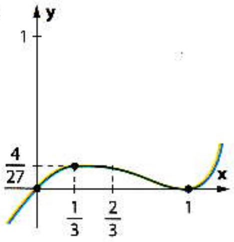
**31.** a) 1 e $\frac{1}{3}$

b) Máximo local: $\frac{1}{3}$; mínimo local: 1

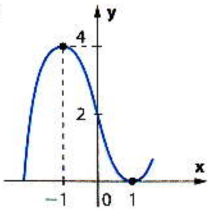
c) Máximo local: $\frac{4}{27}$; mínimo local: 0

d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$

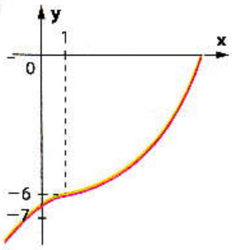
e)



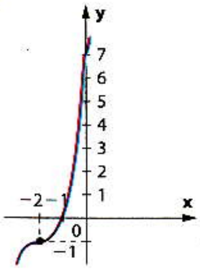
**32.** a)
- ±1
- Máximo local: 4; mínimo local: 0
- [0, 2]
-



b)
- 1
- Não existem pontos de máximo nem de mínimo locais.
- (1, −6)
-



c)
- −2
- Não há pontos de mínimo nem de máximo locais.
- (−2, −1)
-



**33.** f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Para $\mathbf{x_0}$ ser ponto de inflexão, devemos ter:

$f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$

Como $f'''(x) = 6a \neq 0$, pois $a \neq 0$, então $x_0 = -\frac{b}{3a}$ é a abscissa do único ponto de inflexão de f(x).

**34.** a) Pontos críticos: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

Ponto de máximo local: $\frac{\pi}{4}$; ponto de mínimo local: $\frac{5\pi}{4}$

Pontos de inflexão: $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

b) Ponto crítico: $x = -1$
Ponto de mínimo local: $x = -1$
Ponto de inflexão: $x = -2$

c) Ponto crítico: $x = \frac{1}{e}$

Ponto de mínimo local: $x = \frac{1}{e}$

Não há ponto de inflexão.

d) Pontos críticos: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Ponto de máximo local: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Não tem ponto de inflexão.

**35.** $x = y = \frac{S}{2}$

**36.** $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

**37.** É o quadrado de 6 cm de lado.

**38.** É o quadrado de 4 cm de lado.

**39.** O custo total será mínimo quando o custo de montagem for igual ao custo de operação.

**40.** 4 unidades

**41.** Seja o ponto **P** da curva $y = x^3 - 3x$ mais próximo de **Q**(11, 1). Então, **P** tem coordenadas **P**$(x, x^3 - 3x)$. Assim:

$D(x) = d^2 = (x - 11)^2 + (x^3 - 3x - 1)^2$, em que $d = d(P, Q)$.

$D(x) = x^2 - 22x + 121 + (x^6 + 9x^2 + 1 - 6x^4 - 2x^3 + 6x) =$

$= x^6 - 6x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 16x + 122$

$D'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 6x^2 + 20x - 16$

Queremos provar que o ponto procurado é (2, 2). Note que:

$D'(2) = 6 \cdot 2^5 - 24 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 16 = 0$

$D''(x) = 30x^4 - 72x^2 - 12x + 20$

Se $x_0 = 2$ for mínimo local, então $D''(2) > 0$;

$D''(2) = 30 \cdot 2^4 - 72 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 20 = 188 > 0$

Então, $x_0 = 2$ é mínimo. Logo:

$y_0 = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$

Assim, (2, 2) é o ponto de $y = x^3 - 3x$ mais próximo de (11, 1).

**42.** $\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}}$ e $\frac{\sqrt{3A}}{6}$

**43.** Dimensões do retângulo: $h = \frac{3,6}{4+\pi}$; base: $2r = \frac{7,2}{4+\pi}$ e raio da circunferência: $r = \frac{3,6}{4+\pi}$.

**44.** $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ e $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

**45.** a) 500 componentes
b) 10 reais

## Atividades adicionais

**1.** a) $v(t) = -2t + 1$
b) $-1$ m/s
c) $a(t) = -2$
d) $-2$ m/s²

**2.** a) $v(t) = \cos t + 1$
b) $\frac{3}{2}$ m/s
c) $a(t) = -\text{sen}\, t$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ m/s²

**3.** a) $\frac{3}{2\sqrt{x}} - 3x^2 \cdot \text{sen}\, x - x^3 \cdot \cos x$

b) $3x^2 \cdot \ell n\, x + x^2 - \frac{\text{sen}\, x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \cos x$

**4.** a) $\frac{xe^x \cdot \ell n\, x - (e^x + 1)}{x \cdot \ell n^2 x}$
b) $\text{tg}\, x \cdot \sec x$

**5.** a) $-2x \cdot \text{sen}\,(x^2 + 1)$

b) $\frac{\sec^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

c) $3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

**6.** a) $-2x^{-3}$

b) $5x^{-6}$

c) $\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

**7.** a) $\frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}$

b) $\frac{e^{x^2+1}(2x \cdot \cos x + \text{sen}\, x)}{\cos^2 x}$

c) $\cos x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

d) $-\frac{1}{2x} + \sec^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

**8.** a) Crescente no intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) Crescente em todo o domínio IR.

**9.** a) Em nenhum ponto de IR.
b) Em todo o IR.

**10.** Máximo $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ Mínimo $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

$f''(x) = 2a$

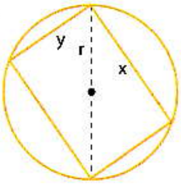
a) Se $a > 0$, então $2a > 0$ e $f''(x) > 0$ (teremos mínimo local).
b) Se $a < 0$, então $2a < 0$ e $f''(x) < 0$ (teremos máximo local).

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, se $a > 0$ temos mínimo local $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; se $a < 0$ temos máximo local $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

**11.**



$x^2 + y^2 = 4r^2 \Rightarrow y = \sqrt{4r^2 - x^2}$

Área do retângulo: $A = xy = x\sqrt{4r^2 - x^2}$

Vamos obter $A'(x)$ e $A''(x)$:

$$A'(x) = (x)'\sqrt{4r^2 - x^2} + x\left(\sqrt{4r^2 - x^2}\right)'$$

Vamos derivar $\sqrt{4r^2 - x^2}$:

$$g(x) = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$u(x) = 4r^2 - x^2 \Rightarrow u'(x) = -2x$$

$$h(u) = \sqrt{u} \Rightarrow h'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$g'(x) = h'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

Logo:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{4r^2 - 2x_0^2}{\sqrt{4r^2 - x_0^2}} = 0 \Rightarrow 4r^2 = 2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = 2r^2 \Rightarrow x_0 = r\sqrt{2}$$

Para ter $x_0 = r\sqrt{2}$ ponto de máximo ou mínimo local, devemos obter

$A''(x)$:

$$A''(x) = \frac{(4r^2 - 2x^2)'\sqrt{4r^2 - x^2} - (4r^2 - 2x^2)\left(\sqrt{4r^2 - x^2}\right)'}{\left(\sqrt{4r^2 - x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x\sqrt{4r^2 - x^2} - (4r^2 - 2x^2)\dfrac{-x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}}{(4r^2 - x^2)} =$$

$$= \frac{-2x(4r^2 - x^2) + (4r^2 - 2x^2)x}{(4r^2 - x^2)\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{-8xr^2 + 2x^3 + 4xr^2 - 2x^3}{(4r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{-4xr^2}{(4r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

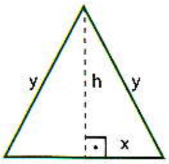
$$A''(x_0) = \frac{-4r\sqrt{2} \cdot r^2}{(4r^2 - 2r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4r^3\sqrt{2}}{(2r^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Logo, $x_0 = r\sqrt{2}$ é ponto de máximo. Então:

$$y_0 = \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}$$

Logo, o retângulo é um quadrado de lado $r\sqrt{2}$.

**12.**



$h = \sqrt{y^2 - x^2}$

Seus lados são 2x, **y** e **y**.
Seu perímetro 2P é:
$2P = 2x + 2y \Rightarrow y = P - x$
Sua área é:

$$\frac{2xh}{2} = xh \Rightarrow A(x) = x\sqrt{y^2 - x^2} = x\sqrt{(P - x)^2 - x^2} =$$

$$= x\sqrt{P^2 - 2Px + \cancel{x^2} + \cancel{-x^2}} = x\sqrt{P^2 - 2Px}$$

$$A'(x) = \sqrt{P^2 - 2Px} + x \cdot \frac{-P}{\sqrt{P^2 - 2Px}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^2 - 2Px - Px = 0 \Rightarrow -3Px = -P^2 \Rightarrow x_0 = \frac{P}{3}$$

Para saber se $x_0$ é máximo ou mínimo local, devemos obter $A''(x)$:

$$A'(x) = \sqrt{P^2 - 2Px} - \frac{Px}{\sqrt{P^2 - 2Px}} = \frac{P^2 - 2Px - Px}{\sqrt{P^2 - 2Px}} =$$

$$= \frac{P^2 - 3Px}{\sqrt{P^2 - 2Px}}$$

$$A''(x) = \left(-3P\left(\sqrt{P^2 - 2Px}\right) -\right.$$

$$\left. - (P^2 - 3Px) \cdot \frac{P}{\sqrt{P^2 - 2Px}}\right) : (P^2 - 2Px) =$$

$$= \frac{[-3P(P^2 - 2Px) - (P^2 - 3Px)P]}{(P^2 - 2Px)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{-3P^3 + 6P^2x - P^3 + 3P^2x}{(P^2 - 2Px)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4P^3 + 9P^2x}{(P^2 - 2Px)^{\frac{3}{2}}}$$

Assim:

$$A''\left(\frac{P}{3}\right) = \frac{-4P^3 + 9P^2 \cdot \dfrac{P}{3}}{\left(P^2 - 2P \cdot \dfrac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-P^3}{\left(\dfrac{P^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Se $A''(x_0) < 0$, então $\mathbf{x_0}$ é ponto de máximo local.
Assim:

$$y = P - x = P - \frac{P}{3} = \frac{2P}{3}$$

Logo, os lados do triângulo são $2x = \frac{2P}{3}$, $\frac{2P}{3}$ e $\frac{2P}{3}$, ou seja, o triângulo é eqüilátero.

**13.** (1, 2)

**14.** A área máxima ocorre quando todo o barbante é usado para fazer a circunferência.

**15.** 1

**16.** a) 28 b) $6x - 2$

**17.** a) $15x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
b) $\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x$
c) $3^x \cdot \ell n\, 3 + e^x$
d) $\frac{2}{3}$
e) $2x$
f) $20x^3 - 24x$

**18.** a) $v(t) = 6t^2 - 2t$; $v(3) = 48$ m/s
b) $a(t) = 12t - 2$; $a(2) = 22$ m/s²

## Questões de vestibular

**1.** d **2.** b **3.** e **4.** b **5.** a **6.** c

**7.** c **8.** d **9.** e

## Para refletir

*Página 241*

$f(x) = x^3$

$g(y) = y^2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^3)^2 = x^6$

$(g \circ f)'(x) = 6x^5$

$f'(x) = 3x^2$

$g'(y) = 2y$

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2y \cdot 3x^2 = 6yx^2 = 6x^3 \cdot x^2 = 6x^5$

Logo, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

*Página 247*

Seja a função afim $f(x)$: $y = ax + b$.

Sabemos que $f(x)$ é crescente para $a > 0$ e decrescente para $a < 0$.

$f'(x) = (ax + b)' = a$

Então, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crescente $\Rightarrow a > 0$.

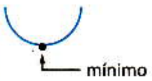
$f(x)$ é decrescente se $f'(x) < 0 \Rightarrow a < 0$

Seja a função $f(x) = ax^2 + bx + c$:

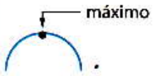
$f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (ponto crítico)

$f''(x) = 2a$

$f''(x) > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \mathbf{x_0}$ é ponto mínimo, ou seja, $f(x)$ tem concavidade voltada para cima.



$f''(x) < 0 \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \mathbf{x_0}$ é ponto máximo, ou seja, $f(x)$ tem concavidade voltada para baixo.



## Questões do Enem

**2000**

b

**2001**

**1.** c **2.** c **3.** e

**2002**

d

**2003**

**1.** b **2.** e **3.** e **4.** c

**2004**

**1.** e **2.** e **3.** c

**2005**

**1.** a **2.** e **3.** d

**2006**

**1.** a **2.** d **3.** e

## Revisão geral

**1.** d **2.** d **3.** c **4.** e **5.** e **6.** d

**7.** b **8.** c **9.** a **10.** b **11.** c **12.** e

**13.** b **14.** d **15.** d

**16.** a) $2^{21}$ b) 7

**17.** $\sqrt[3]{3}$

**18.** a) $\lambda^2 - 2$ b) $\lambda^3 - 3\lambda$

**19.** a) $b^2 - 2$

b) $S = \left\{1, \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

**20.** Roda dianteira: 2,40 m; roda traseira: $1{,}20\sqrt{3}$ m.

**21.** e **22.** a **23.** b **24.** e **25.** c **26.** d

**27.** e **28.** b **29.** d **30.** c **31.** c **32.** b

**33.** c **34.** e **35.** d **36.** c **37.** c **38.** a

**39.** e **40.** c **41.** d **42.** b **43.** a

**44.** a) 80 filiados
b) 1 420 filiados

**45.** 48 caixas

**46.** a) I = 25, ela é levemente obesa.
b) 1,80 m

**47.** a) 2 b) 14

**48.** a) 0 b) 3

**49.** a) $S = 65 + \sqrt{\dfrac{43p + 7{,}5}{8}}$
b) 6 800 sapos

**50.** $a = 1$ e $b = 0$

**51.** d **52.** c **53.** d **54.** b **55.** e **56.** a

**57.** a **58.** e **59.** b **60.** a **61.** c **62.** c

**63.** b **64.** c **65.** c **66.** b **67.** e **68.** c

**69.** d **70.** e **71.** c **72.** c

**73.** a) 95 °F b) 160 °C

**74.** a) R$ 12,90 b) 21 km

**75.** a) $S(x) = 800 + 10x$
b) Aumento na taxa de comissão.

**76.** a) $C(x) = 0{,}8x + 800$
b) $P(x) = 0{,}2x - 800$; renda maior que R$ 9 000,00.

**77.** 100%

**78.** a) 35 b) 24,8 cm

**79.** a) R$ 3,75 b) 30 km

**80.** a) 2 c) $S = \{15\}$
b) $f(x) = \dfrac{x}{2}$

**81.** c **82.** d **83.** 26 **84.** e **85.** a **86.** b

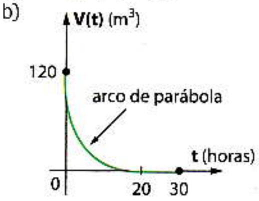
**87.** a **88.** b **89.** d **90.** c **91.** b **92.** c

**93.** a **94.** c **95.** a **96.** 08 **97.** b **98.** e

**99.** b **100.** b

**101.** a) $a = 0{,}3$ e $b = 20$

b)



**102.** $p = 2$ e $q = 1$

**103.** a) $A = -x^2 + 5x$

b) $x = 2{,}5$ cm

**104.** a) 25 jaquetas

b) R$ 525,00

**105.** a) $p(x) = -0{,}25x + 60$

b) R$ 40,00

**106.** a) $d = \dfrac{90\,000 - v^2}{150}$ b) $v = 0$

**107.** a) $A(x) = -2x^2 + 17x$

b) $x = 4$ m e $y = 9$ m

**108.** $-\dfrac{2}{3} \leqslant a < 0$

**109.** a) R$ 5,00

b) $0 \leqslant p < 2{,}50$ ou $7{,}50 < p \leqslant 10{,}00$

**110.** 16 **111.** b **112.** e **113.** d **114.** b

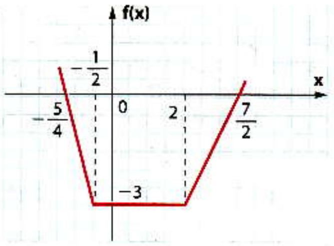
**115.** e **116.** e **117.** b **118.** d **119.** c

**120.** d **121.** c **122.** c **123.** c **124.** b

**125.** a **126.** c **127.** b **128.** a **129.** b

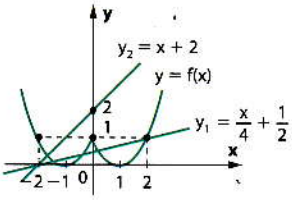
**130.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1$ ou $0 < x < 3\}$

**131.** a)



b) $x < -\dfrac{7}{6}$

**132.** a)



b) $-\dfrac{3}{2}$, 0 e $\dfrac{5}{2}$

c) $m = 0$: 2 raízes distintas; $0 < m < \dfrac{1}{2}$: 4 raízes distintas; $m = \dfrac{1}{2}$: 3 raízes distintas; $m > \dfrac{1}{2}$: 4 raízes distintas.

**133.** a) $S = \{3\}$ b) $S = \{-3\}$

**134.** 27

**135.** $\dfrac{1 - 3a + 2b}{5 - 5a + 5b}$

**136.** a) $S = \left\{2\sqrt{26}\right\}$ b) 100 e $\dfrac{1}{10}$

**137.** $S = \left\{\left(32, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$

**138.** a) 12 meses b) 499 peças

**139.** a) 1 000 b) 7

**140.** b **141.** d **142.** d **143.** b **144.** a

**145.** d **146.** b **147.** d **148.** d **149.** a

**150.** d **151.** a **152.** e **153.** a **154.** c

**155.** d **156.** d **157.** b **158.** e **159.** a

**160.** a) $\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $24\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$ e $48\sqrt{2}$

b) $a_{37} = \sqrt{2} \cdot 2^{18}$; $a_{38} = 6\sqrt{2} \cdot 2^{18}$

**161.** $\dfrac{3}{4}$

**162.** 95 múltiplos

**163.** 2 420 cartas

**164.** a) 101 emissoras; canal 300 b) 104,9 MHz

**165.** a) $r = \dfrac{1}{4}$ e $q = \dfrac{7}{8}$

b) $\left(1, \dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}, 2, 2, \dfrac{7}{4}, \dfrac{49}{32}\right)$

**166.** 16 dias

**167.** a) 256 tábuas b) 1,28 m

**168.** $\dfrac{2}{3}$

**169.** 10 ou −10

**170.** d **171.** a **172.** e **173.** b **174.** a

**175.** d **176.** a **177.** d **178.** a **179.** a

**180.** a **181.** a **182.** b **183.** a **184.** d

**185.** e **186.** b **187.** b **188.** c **189.** d

**190.** c **191.** a **192.** d **193.** d **194.** b

**195.** d **196.** b **197.** a **198.** a **199.** c

**200.** d **201.** a **202.** a **203.** c **204.** c

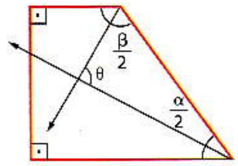
**205.** c **206.** a **207.** d **208.** b **209.** a

**210.** a **211.** d **212.** a **213.** d **214.** c

**215.** 58°

**216.** a) $\alpha = 30°$

b) Desenhando as bissetrizes obtemos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é:



$$\theta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow \theta + \frac{30°}{2} + \frac{5 \cdot 30°}{2} = 180° \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta + 15° + 75° = 180° \Rightarrow \theta = 90°$, ou seja, o ângulo entre as bissetrizes é reto.

**217.** 13 cm

**218.** a) $x = \frac{L(2 - \sqrt{2})}{2}$ b) $8(\sqrt{2} - 1)L$

**219.** a) $\frac{8}{3}$ m b) 11,75 $m^2$

**220.** 42 cm **221.** 30 mm **222.** $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm

**223.** 25° **224.** 32 cm **225.** 32 voltas

**226.** 72,85 $m^2$ **227.** 72 $cm^2$ **228.** V, V, F, F, V

**229.** c **230.** e **231.** b **232.** c **233.** b

**234.** c **235.** b **236.** d **237.** b **238.** a

**239.** b **240.** d **241.** b **242.** e **243.** c

**244.** c **245.** c **246.** c **247.** d **248.** d

**249.** b **250.** b **251.** b

**252.** a) $\frac{\sqrt{3}}{4(AB)}$ b) $\frac{\sqrt{13} + 1}{6}$

**253.** a) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$ b) $\frac{(\text{tg}\,\alpha - 1)^2}{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}$

**254.** 8

**255.** a) $h(x) = 10 \text{ sen } x$; $b(x) = 20 \cos x$; $A(x) = 100 \text{ sen } x \cdot \cos x$
b) $x = 45°$

**256.** $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$

**257.** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

**258.** a) $A = 3,0$ b) $\omega = \pm\frac{\pi}{6}$

**259.** e **260.** a **261.** d **262.** b **263.** e

**264.** c **265.** d **266.** d **267.** c **268.** d

**269.** b **270.** a **271.** b **272.** d **273.** d

**274.** d **275.** e **276.** d **277.** c

**278.** 21 vértices

**279.** a) 50 cm b) R$ 8,40

**280.** a) 2 cm de comprimento e 5 cm de altura
b) $30\sqrt{3}$ $cm^3$

**281.** $\frac{r^2\sqrt{11}}{16}$

**282.** a) 0,8 m b) 8h

**283.** 81 $cm^3$

**284.** a) 34 325 $cm^3$ b) $10\sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}$ cm

**285.** a) 131,88 $cm^2$ b) 103,04 $cm^3$

**286.** a) 5 cm b) $\frac{25\sqrt{11} \cdot \pi}{3}$ $cm^3$

**287.** a) 500 mL b) 87,5%

**288.** $\sqrt[3]{98}$ cm

**289.** b **290.** d **291.** b **292.** d **293.** c

**294.** a **295.** a **296.** d **297.** a **298.** a

**299.** c **300.** d **301.** e **302.** e **303.** c

**304.** c **305.** d **306.** e **307.** e **308.** e

**309.** a

**310.** a) $\begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix}$ b) $x = 0$ ou $x = 2\pi$

**311.** $I - M$

**312.** a) 50 b) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

**313.** $\det A = 2$ e $\det B = -6$

**314.** a) $\frac{26}{3a - 2}\left(a \neq \frac{2}{3}\right)$ b) $a = 5$

**315.** 3 775 m

**316.** $k = 42$

**317.** a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$

Ou seja, $x + y + z = 1 = 2 = -3$. Portanto, o sistema é impossível.
b) $a \neq 1$ ou $a \neq -2$

**318.** a) $G_A = 360 - 2x$; $G_B = 600 - y$; $G = 960 - 2x - y$
b) Do depósito $\mathbf{D_1}$ sairão 30 caixas de medicamentos para a drogaria **A** e 10 caixas para a drogaria **B**. Do depósito $\mathbf{D_2}$ sairão 30 caixas para a drogaria **B** e nenhuma para a drogaria **A**. Os gastos são $G_A$ = R$ 300,00 e $G_B$ = R$ 590,00.

**319.** c **320.** c **321.** b **322.** b **323.** e

**324.** e **325.** e **326.** e **327.** c **328.** b

**329.** e **330.** c **331.** c **332.** b **333.** e

**334.** d **335.** b **336.** a **337.** d **338.** a

**339.** b **340.** b

**341.** a) 15 c) $n = 14$ e $p = 4$
b) $\frac{5}{8}$

**342.** a) 325 palavras
b) 212ª posição

**343.** 3 168 números

**344.** 35 sabores diferentes

**345.** 63 caminhos

**346.** a) $\frac{1}{5^{10}}$ b) $45 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8$

**347.** a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{4}$

**348.** 0) Verdadeiro 1) Falso 2) Verdadeiro

**349.** d **350.** b **351.** b **352.** d **353.** e

**354.** e **355.** b **356.** b **357.** c **358.** d

**359.** b **360.** c **361.** c **362.** b **363.** a

**364.** d **365.** c **366.** a **367.** b **368.** a

**369.** a) $ 90,00 b) V = 900; DP = $ 30,00

**370.** a) Verdadeira
b) Os dados são insuficientes para uma conclusão.

**371.** a) 105 b) 20

**372.** a) R$ 400,00 b) R$ 464,10

**373.** a) R$ 8 000,00 b) $\frac{3 \log 1{,}03}{\log 1{,}03 - \log 1{,}02}$ meses

**374.** a) 5% b) R$ 777,00

**375.** a) 4,17x b) 14%

**376.** 84%

**377.** a) R$ 4 500,00 b) R$ 3 267,00

**378.** R$ 500,00

**379.** a **380.** e **381.** c **382.** e **383.** b

**384.** e **385.** c **386.** c **387.** a **388.** b

**389.** b **390.** a **391.** a **392.** a **393.** b

**394.** a **395.** a **396.** b **397.** a **398.** e

**399.** a) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ b) $x - 4y + 11 = 0$

**400.** a) $A(k) = k^2$ b) perímetro = $k\left(3 + \sqrt{5}\right)$

**401.** **B**(3, 0)

**402.** $2x - 4y + 7 = 0$

**403.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**404.** $r = 5 - \sqrt{5}$; **C** $\left(2\sqrt{2}, 5 - \sqrt{5}\right)$

**405.** $y = 1$

**406.** a **407.** f **408.** a **409.** e **410.** e

**411.** c **412.** c **413.** e **414.** b **415.** e

**416.** e **417.** a **418.** a **419.** a **420.** d

**421.** b **422.** d **423.** c **424.** 0

**425.** a) $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\right)$;

$$z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\ \frac{3\pi}{4}\right)$$

b) $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

**426.** $m = -3$ e $n = -8$

**427.** a) Sim b) 2, 1 e −1

**428.** d **429.** b **430.** c **431.** b **432.** e

**433.** a **434.** e **435.** a **436.** e **437.** d

**438.** b **439.** 2x

**440.** área de $\mathbf{T}_n$ − área de $\mathbf{F}_n$ = $\frac{a}{n+1}$; $\lim\limits_{n \to \infty}$ área de $\mathbf{F}_n$ = a

# Bibliografia

Ávila, G. *Cálculo 1*; funções de uma variável. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1982.

Boyer, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp, 1974.

Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 1993. 14 v.

Dante, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo, Ática, 1997.

Davis, P. J. & Hersh, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1989.

Lima E. L. et alii. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro, SBM, 1997. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1 e 2.)

Morettin, P. A. & Bussab, W. O. *Estatística básica*. São Paulo, Atual, 1981.

Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Interciência, 1986.

______. *Mathematical discovery*. New York, John Wiley & Sons, 1981. 2 v.

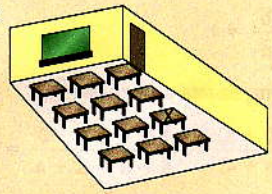
Revista do Professor de Matemática. São Paulo, SBM, 1982/1998. v. 1 a 36.

# Respostas

## Capítulo 1

### Abertura

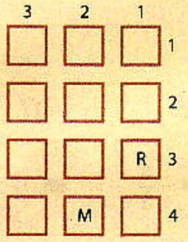
a)



b) A mesa de Paulo está situada na segunda fileira, a partir da parede que contém a lousa, e na terceira fileira, a partir da parede que contém a porta.

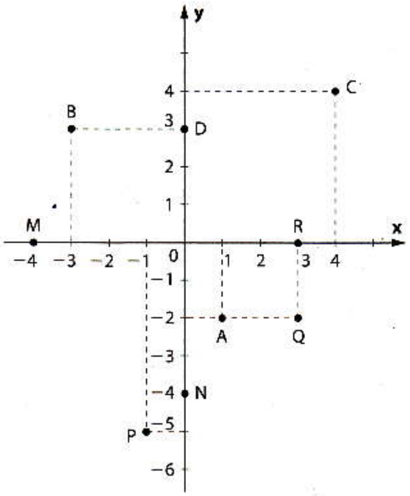
c) **P**(3, 2)

d)



**1.** a) **A**(2, 5) b) **B**(5, 2) c) **C**(−4, 3) d) **D**(−1, −6) e) **E**(3, −4)

**2.**



**3.** **A**(0, 0); **B**(2a, 0); **C**(2a, a); **D**(0, a)

**4.** a **5.** **A**(2, 0); **B**(0, 2); **C**(−2, 0); **D**(0, −2)

**6.** P ∈ 1º quadrante ou P ∈ 3º quadrante

**7.** $\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < m < -\frac{1}{2}\right\}$

**8.** a) $\sqrt{13}$ b) 6 c) $\sqrt{29}$ d) $\sqrt{5}$ e) $6\sqrt{2}$ f) 5

**9.** $a = \pm 2\sqrt{2}$ **10.** $\sqrt{2}$ **11.** 3 e 0 **12.** −2 ou 8

**13.** $3x^2 + 3y^2 + 42x + 22y + 46 = 0$

**14.** Um triângulo é isósceles se dois de seus lados forem congruentes.

Vamos calcular as medidas de seus lados:

$d(A, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$

$d(A, C) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$

$d(B, C) = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{36 + 0} = \sqrt{36} = 6$

- Como os lados AB e AC são congruentes, então o triângulo ABC é isósceles.

perímetro = $2\sqrt{58} + 6$

**15.** a) **M**(−3, 5) c) **M**$\left(2, \frac{3}{2}\right)$
b) **M**(2, −6) d) **M**(−3, −3)

**16.** **B**(8, −2)

**17.** Mediana $AM_3$: $3\sqrt{2}$; mediana $BM_2$: 3; mediana $CM_1$: 3

**18.** 6 **19.** **C**(0, −7) e **D**(−4, −8) **20.** **P**(5, 4)

**21.** (8, 3) e (13, 5) **22.** (4, 6)

**23.** a) Não b) Sim

**24.** $x \neq -1$ **25.** **P**$\left(0, -\frac{6}{5}\right)$

**26.** a) $\frac{1}{2}$ b) −1 c) Não existe. d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $-\frac{1}{5}$

**27.**

| **α** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Não existe. | $-\sqrt{3}$ | −1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**28.** a) $4x - y - 11 = 0$ b) $x - y - 3 = 0$ c) $y = -5$ d) $3x + 8y - 17 = 0$ e) $x = -3$

**29.** Não pertence. **30.** $-\frac{3}{4}$ **31.** $y = -2x - 3$

**32.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ **33.** $y = 4x - 1$

**34.** a) $y = x$ ou $x - y = 0$ c) $y = 0$
b) $y = -x$ ou $x + y = 0$ d) $x = 0$

**35.** a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-10} = 1$ d) $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$

**36.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

**37.** Reta CM: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$; reta AN: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

**38.** a) $3x + y - 3 = 0$ c) $2x - 3y - 10 = 0$
b) $9x - 4y + 41 = 0$ d) $4x - y - 9 = 0$

**39.** $a = \frac{9}{2}$ **40.** $x - 3y + 7 = 0$

**41.** Reta-suporte de $\overline{AB}$: $2x + y - 4 = 0$; reta-suporte de $\overline{AC}$: $x - y - 2 = 0$; reta-suporte de $\overline{BC}$: $x + 2y - 8 = 0$