1. Função exponencial

1.1 Definição

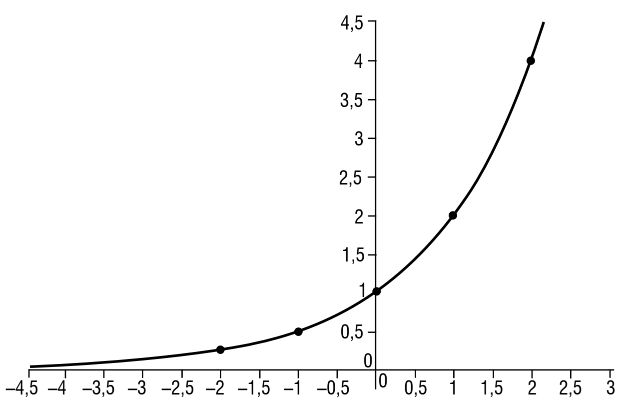
Na apostila de Álgebra Básica, foram definidas potências de expoentes naturais, inteiros e racionais. Além disso, também foi vista uma maneira natural de se definir uma potência de expoente irracional (aproximando cada irracional por uma sequência de racionais). Sendo assim, para cada $a \neq 1$ positivo, fica bem definida uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos reais positivos) dada por $f(x) = a^x$ (consideramos $a \neq 1$, pois se $a = 1$, teríamos uma função bastante trivial). Tal função herda propriedades vistas na apostila de Álgebra Básica. Temos para $x, y \in \mathbb{R}$:

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
II. $(a^x)^y = a^{xy}$

Veremos agora dois exemplos de funções exponenciais e seus gráficos:

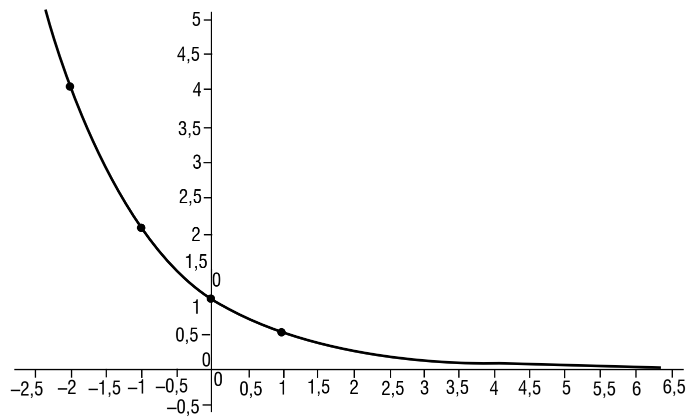
I. $f_1(x) = 2^x$:

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



II. $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$:

x	-2	-1	0	1	2
$f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



1.2 Crescimento e decrescimento

Nos exemplos vistos acima, pudemos ter alguma ideia de como as funções exponenciais se comportam com relação ao crescimento. De fato, a intuição prevalece.

Teorema 1 (Crescimento e decrescimento)

I. Se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente, ou seja, $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y$.
II. Se $a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é decrescente, ou seja, $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x < y$.

Demonstração:

Faremos I e então II seguirá de forma análoga.

Veja que $f(x) > f(y) \Leftrightarrow a^x > a^y \Leftrightarrow a^{x-y} > 1$. Provaremos então que $a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$ e isso implicará $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow x > y$.

Para demonstrar que $a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$, faremos isso para r inteiro, racional e o caso r irracional seguirá pela teoria de limites de sequências (que está fora do nosso escopo).

Caso 1:

$r = n \in \mathbb{Z}$:

Queremos provar que $a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0$. Temos duas partes a demonstrar:

Parte 1: $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$:

Como $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$ é o produto de n termos maiores que 1, segue que $a^n > 1$ (poderíamos usar indução para sermos mais formais, mas não é necessário).

Parte 2: $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$:

Faremos aqui a contrapositiva, ou seja, provaremos que se $n \leq 0$, então $a^n \leq 1$. Para isso, veja que $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ e que, como $-n \leq 0$, temos que $a^{-n} \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a^{-n}} \leq 1$, como queríamos.

Caso 2:

$r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p, q, $\in \mathbb{Z}$:

Mais uma vez, temos duas partes a demonstrar:

Parte 1: $\frac{p}{q} > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} > 1$

Podemos supor que p, q são inteiros positivos.

Como q é inteiro positivo e $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a > 1$, segue que $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Logo, $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} > 1$, como queríamos. (Usamos algumas vezes o resultado do caso 1).

Parte 2: $a^{\frac{p}{q}} > 1 \Rightarrow \frac{p}{q} > 0$:

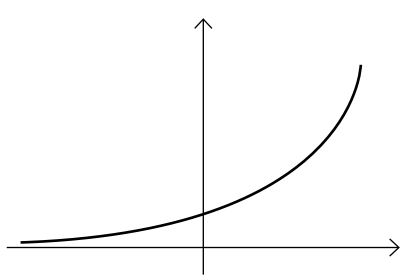
Provaremos a contrapositiva, ou seja, provaremos que se $\frac{p}{q} \leq 0$, então $a^{\frac{p}{q}} \leq 1$. Podemos supor que $p \leq 0$ e $q > 0$. Assim, pelo mesmo argumento da parte 1, segue que $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e, usando o caso 1, como $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}$ e $p \leq 0$, segue que $a^{\frac{p}{q}} \leq 1$.

Isso conclui a prova nos dois casos.

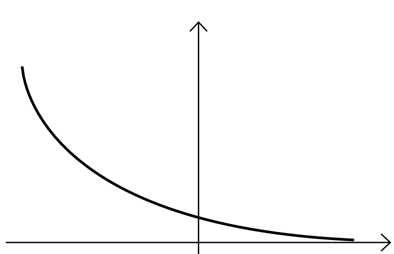
1.3 Gráfico

Vimos dois exemplos de gráficos em 1.1 e a partir de 1.2, podemos concluir as seguintes propriedades:

I. O gráfico está sempre acima do eixo x, pois $a^x > 0$ para todo x real.
II. O gráfico corta o eixo y no ponto (0,1).
III. O gráfico é de uma das formas a seguir:



(a > 1)



(a < 1)

1.4 Equações exponenciais

Muitas equações exponenciais se reduzem à seguinte equação mais simples (via técnicas algébricas adquiridas na apostila de álgebra básica):

Teorema 2 (Igualdade dos expoentes)

Se $a \neq 1$ e $a^x = a^y$, então temos que $x = y$.

Demonstração:

A demonstração é imediata a partir do fato de que a função exponencial é monótona (crescente ou decrescente) e, portanto, injetiva.

Para vermos algumas técnicas, vejamos exemplos de equações exponenciais:

Ex. 1: Resolva a equação $3^{2x+1} \cdot 27^{x-1} = 9^{2x+5}$.

Solução: A ideia é escrever todas as potências em uma mesma base. Como $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$, escreveremos tudo na base 3: $3^{2x+1} \cdot (3^3)^{x-1} = (3^3)^{2x+5} \Leftrightarrow 3^{2x+1} \cdot 3^{3x-3} = 3^{4x+10}$. Assim, temos que $3^{5x-2} = 3^{4x+10} \Leftrightarrow 5x - 2 = 4x + 10 \Leftrightarrow x = 12$.

Logo, o conjunto solução é {12}.

Ex. 2: Resolva a equação $5^{x-2} + 5^{x+1} = 505$.

Solução: Aqui podemos colocar no lado esquerdo 5^{x-2} em evidência e obter $5^{x-2}(1 - 5^2 + 5^3) = 505 \Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 101 = 505 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Logo, o conjunto solução é {3}.

Ex. 3: Sendo x real não negativo resolva a equação $x^{x^2-4x+3} = 1$.

Solução: Inicialmente, devemos verificar se $x = 0$ e $x = 1$ são soluções da equação dada. Testando tais valores, vemos que $x = 1$ satisfaz a equação, pois $1^0 = 1$. Supondo agora $x \neq 0$, $x \neq 1$, temos que $x^{x^2-4x+3} = x^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Daqui, concluímos que $x = 3$, já que estamos supondo $x \neq 1$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{1,3\}$.

Ex. 4: Resolva a equação $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Solução: Aqui podemos fazer uma troca de variáveis bastante útil: $2^x = t$. Assim, a equação dada se torna uma equação do segundo grau: $t^2 - 6t + 8 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 4$. Daí, temos que $2^x = 2^1$ ou $2^x = 2^2$ e então o conjunto solução é $S = \{1,2\}$.

1.5 Inequações exponenciais

Muitas inequações exponenciais se reduzem à seguinte inequação mais simples (via técnicas algébricas adquiridas na apostila de álgebra básica):

Teorema 3 (Desigualdade entre os expoentes)

I. Se $a > 1$ e $a^x > a^y$, então $x > y$.
II. Se $a < 1$ e $a^x > a^y$, então $x < y$.

Demonstração: A demonstração é imediata a partir do fato de que a função exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.

Para vermos algumas técnicas, vejamos exemplos de inequações exponenciais:

Ex. 1: Resolva a inequação $\left(3^x\right)^{2x-7} > \frac{1}{27}$.

Solução: Coloquemos tudo na base 3: $3^{x(2x-7)} > 3^{-3}$. Como $3 > 1$ (sempre tenha muito cuidado nesta passagem!), temos que $x(2x - 7) > -3 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 > 0$ e então o conjunto solução é $S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

Ex. 2: Resolva a inequação $x^{2x^2-9x+4} < 1$ nos reais não negativos.

Solução: Primeiramente, devemos verificar se $x = 0$ e $x = 1$ são soluções. Após uma simples verificação, vemos que apenas $x = 0$ é solução. Agora, dividiremos o problema em dois casos:

Caso 1:

$0 < x < 1$:

Podemos reescrever a inequação como $x^{2x^2-9x+4} < x^0$. Agora, devemos ficar MUITO atentos, pois $0 < x < 1$. Dessa forma, temos que $2x^2 - 9x + 4 > 0$ (MUITA atenção aqui mais uma vez!) e então $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 4$. Fazendo a interseção com $0 < x < 1$, temos que a solução deste caso é $0 < x < \frac{1}{2}$.

Caso 2:

$x > 1$:

Mais uma vez, podemos reescrever a inequação $x^{2x^2-9x+4} < x^0$. Entretanto, neste caso, a base da potência é maior do que 1 e então podemos concluir que $2x^2 - 9x + 4 < 0$, o que nos dá $\frac{1}{2} < x < 4$. Fazendo a interseção com $x > 1$, temos que a solução deste caso é $1 < x < 4$.

Juntando a solução $x = 0$ e os casos 1 e 2, temos que o conjunto solução é $S = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 4)$.

2. Função logarítmica

2.1 Contexto histórico

Os logaritmos foram introduzidos no começo do século XVII por John Napier basicamente para simplificar contas de multiplicação (as contas de multiplicação eram transformadas em contas de adição, substancialmente mais simples). Com o passar do tempo, os logaritmos foram rapidamente usados por navegadores, cientistas, engenheiros e vários outros para simplificar suas contas.

2.2 Definição

A ideia dos logaritmos é ser a operação reversa da potenciação. Por exemplo, como 2 elevado à potência 3 é 8, segue que o logaritmo de 8 na base 2 é 3, e escrevemos $\log_2 8 = 3$.

Formalmente, a função logarítmica $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, é a inversa da função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$. O real a é chamado de base do logaritmo e x é dito logaritmando.

Em palavras mais simples, temos o seguinte: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

Exs.:

I. $\log_5 3125 = 5$, pois $3125 = 5^5$.

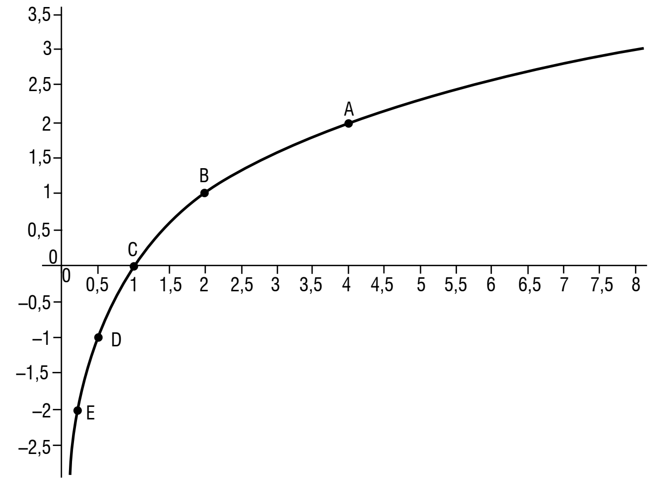
II. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, pois $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

III. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, pois $\frac{1}{81} = 3^{-4}$.

Veremos dois exemplos de funções logarítmicas e seus gráficos:

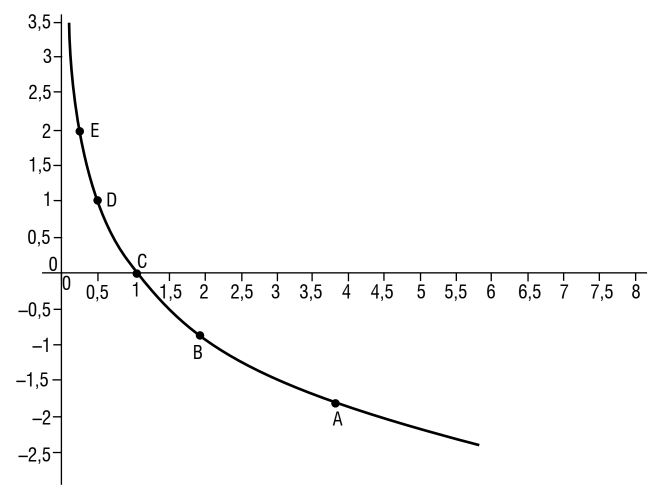
I. $f_3(x) = \log_2 x$:

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f_3(x) = \log_2 x$	2	1	0	–1	–2



II. $f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$:

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	–2	–1	0	1	2



CUIDADO!

Lembre-se sempre de que a base do logaritmo é um real positivo diferente de 1 e o logaritmando é sempre positivo.

2.2 Crescimento e decrescimento

Nos exemplos vistos, pudemos ter alguma ideia de como as funções logarítmicas se comportam com relação ao crescimento. De fato, a intuição mais uma vez prevalece.

Teorema 4 (Crescimento e decrescimento)

I. Se $a > 1$, a função $g(x) = \log_a x$ é crescente, ou seja, $g(x) > g(y) \Leftrightarrow x > y$.

II. Se $a < 1$, a função $g(x) = \log_a x$ é decrescente, ou seja, $g(x) > g(y) \Leftrightarrow x < y$.

Demonstração:

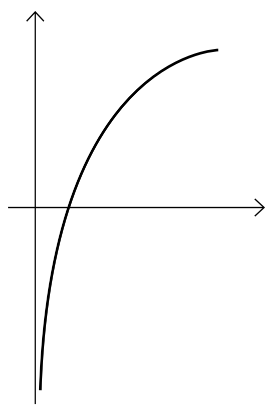
Segue do fato de o logaritmo ser a inversa da função exponencial. Fica como exercício demonstrar o seguinte resultado:

"Sejam *f, g* duas funções tais que *g* é a inversa de *f*. Então, *f* é crescente (decrescente) se, e somente se, *g* é crescente (decrescente)."

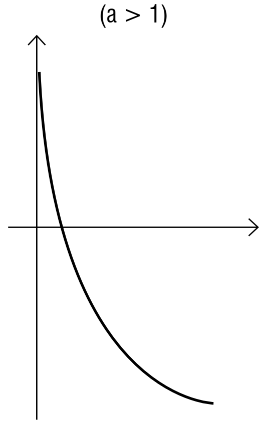
2.3 Gráfico

Vimos dois exemplos de gráficos em 2.1 e, a partir de 2.2, podemos concluir as seguintes propriedades:

I. O gráfico está todo à direita do eixo *y*, pois a função logarítmica só está definida nos reais positivos.
II. O gráfico corta o eixo *x* no ponto (1,0)
III. É simétrico ao gráfico da função $f(x) = a^x$ com relação à reta $y = x$ (já que o logaritmo é a inversa da exponencial).
IV. O gráfico é de uma das formas a seguir:



(a > 1)



(a < 1)

2.4 Propriedades

I. (Definição) $a^{\log_a b} = b$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = k$, temos que $a^k = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b$.

II. (Logaritmo do produto) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

Demonstração:

Fazendo $\log_a bc = k$, $\log_a b = l$ e $\log_a c = m$, temos que $b = a^l$ e $c = a^m$. Logo, $bc = a^{l+m}$. Por outro lado, $bc = a^k$ e então $a^k = a^{l+m} \Rightarrow k = l + m \Rightarrow \log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

III. (Logaritmo da divisão) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Demonstração:

Análogo a II.

IV. ("Regra do peteleco" – este é apenas um nome para facilitar a memorização) $\log_a x^r = r\log_a x$, para $r \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Fazendo $\log_a x^r = k$ e $\log_a x = l$, temos que $x = a^l \Rightarrow x^r = (a^l)^r = a^{lr}$. Como $a^k = x^r$, segue que $a^k = a^{lr} \Rightarrow k = lr$ e então $\log_a x^r = r\log_a x$.

V. ("Regra do peteleco invertido" – este é apenas um nome para facilitar a memorização) $\log_{a^r} x = \frac{1}{r}\log_a x$, se $r \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração:

Análogo a IV.

VI. ("Mudança de base") Em muitos problemas, queremos mudar as bases dos logaritmos para uma base mais conveniente. Para isso, usamos o seguinte: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Demonstração:

Sejam $\log_a x = k$, $\log_b x = l$, $\log_b a = m$. Então $x = a^k$, $x = b^l$, $a = b^m$. Daí, $x = a^k = (b^m)^k = b^{mk}$ e então $b^{mk} = b^l \Rightarrow mk = l$. Com isso, segue que $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Obs.: Uma maneira muito útil de se usar a mudança de base é $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Comentário: Essa é uma das propriedades mais úteis de logaritmos.

2.5 Equações logarítmicas

Muitas equações logarítmicas se reduzem à seguinte equação mais simples (usando as propriedades vistas e as técnicas adquiridas na apostila de álgebra básica). Devemos sempre nos lembrar das restrições sobre o logaritmando e a base e testar as soluções encontradas no fim.

Teorema 5 (Igualdade dos expoentes)

Se $\log_a x = \log_a y$, então $x = y$.

Demonstração:

A demonstração é imediata a partir do fato de que a função logarítmica é monótona (crescente ou decrescente) e, portanto, injetiva.

Para vermos algumas técnicas, vejamos exemplos de equações logarítmicas.

Ex. 1: Resolva a equação $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$.

Solução: Fazendo $t = \log_2 x$, temos que $t^2 - t - 2 = 0$ e, portanto, $t = 2$ ou $t = -1$. Assim, $x = 4$ ou $x = \frac{1}{2}$ e o conjunto solução é $S = \left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$.

Ex. 2: Resolva a equação $\log_x(2x + 3) = 2$.

Solução: Verificaremos as restrições no fim. Temos que $x^2 = 2x + 3$ e então $x = 3$ ou $x = -1$. Veja que $x = -1$ não pode ser solução, pois a base deve ser positiva. Assim, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

2.6 Inequações logarítmicas

Muitas inequações logarítmicas se reduzem à seguinte inequação mais simples (usando as propriedades vistas e as técnicas adquiridas na apostila de álgebra básica). Devemos sempre nos lembrar das restrições sobre o logaritmando e a base.

Teorema 6 (Desigualdade entre os expoentes)

I. Se $a > 1$ e $\log_a x > \log_a y$, então $x > y$.
II. Se $a < 1$ e $\log_a x > \log_a y$, então $x < y$.

Demonstração:

A demonstração é imediata a partir do fato de que a função logarítmica é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.

Para vermos algumas técnicas, vejamos exemplos de inequações exponenciais:

Ex. 1: Resolva a inequação $\log_3 x^2 - 3\log_3 x + 2 > 0$.

Solução: A restrição dos logaritmos é $x > 0$. Fazendo $\log_3 x = t$, temos que $t^2 - 3t + 2 > 0$ e então $t < 1$ ou $t > 2$. Logo, $\log_3 x < 1 = \log_3 3 \Rightarrow x < 3$ ou $\log_3 x > 2 = \log_3 9 \Rightarrow x > 9$. Intersectando com a restrição, temos que o conjunto solução é $S = (0,3) \cup (9, +\infty)$.

Ex. 2: Resolva a inequação $\log_x(2x^2 - 5x + 2) > 1$.

Solução: Fazendo a restrição, temos $x > 0$, $x \neq 1$ e $2x^2 - 5x + 2 > 0$, o que nos dá $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$. Juntando as restrições, temos: $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$. Temos agora que dividir o problema em dois casos, de acordo com a base ser ou não maior que 1:

Caso 1:

$0 < x < 1$:

Aqui temos $\log_x(2x^2 - 5x + 2) > 1 = \log_x x$ e como a base é menor que 1, temos que $2x^2 - 5x + 2 < x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0$ e então $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Intersectando com a restrição e com $0 < x < 1$, temos que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Caso 2:

$x > 1$:

Temos mais uma vez $\log_x(2x^2 - 5x + 2) > 1 = \log_x x$ e como a base é maior que 1, segue que $2x^2 - 5x + 2 > x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 > 0$ e então $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Intersectando com a restrição e com $x > 1$, segue que $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Juntando os casos, temos que o conjunto solução é $S = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

2.7 Outras definições

I. Antilogaritmo: $\text{antilog}_a\, x = a^x$

Ex.: $\text{antilog}_2\, 3 = 2^3 = 8$

II. Cologaritmo:
$\text{colog}_a\, x = -\log_a x$

Ex.: $\text{colog}_2\, 8 = -\log_2 8 = -3$

III. Logaritmo decimal: É o logaritmo cuja base é 10. Para representá-lo, simplesmente omitimos a base: $\log x$. Assim, $\log 100 = 2$, por exemplo, pois $100 = 10^2$.

IV. Logaritmo natural: É o logaritmo cuja base é $e = 2{,}7182717284...$, um número irracional chamado número de Euler ou constante de Napier. Tal número pode ser definido de algumas maneiras, que serão vistas mais a fundo na apostila de Limites. Uma maneira de defini-lo é $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ A representação do logaritmo natural é $\ln x$.

V. Característica (parte inteira) e mantissa (parte fracionária): Dado um número $x > 0$, consideremos seu logaritmo decimal $\log x$. Definimos a característica (parte inteira) de $\log x$, representada por $\lfloor \log x \rfloor$, como sendo o maior inteiro que não ultrapassa $\log x$. A mantissa (parte fracionária) de $\log x$, representada por $\{\log x\}$, é definida como sendo $\{\log x\} = \log x - \lfloor \log x \rfloor$.

Ex.: $\log 15 = 1{,}176...$ e então $\lfloor \log 15 \rfloor = 1$ e $\{\log 15\} = 0{,}176...$

Comentário: A característica e a mantissa montam as famosas tábuas de logaritmos, usadas para efetuar as complicadas multiplicações mencionadas no início do texto.

2.8 Número de algarismos de um inteiro

Teorema 7 (Número de algarismos em função do log)

O número de algarismos de um inteiro x é dado por $\lfloor \log x \rfloor + 1$.

Demonstração:

Seja n o número de algarismos de x. Assim, podemos escrever que $10^{n-1} \leq x < 10^n \Leftrightarrow n - 1 \leq \log x < n$ e isto quer dizer precisamente que $\lfloor \log x \rfloor = n - 1 \Leftrightarrow n = \lfloor \log x \rfloor + 1$, como queríamos.

Comentário: Essa fórmula é útil para saber o número de algarismos de potências, quando conhecemos os logaritmos das bases.

Ex.: Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$, calcule o número de algarismos de 2^{20}.

Solução: Calculemos $\log 2^{20}$: usando a "regra do peteleco", temos que $\log 2^{20} = 20\log 2 = 6{,}02$. Logo $\lfloor \log 2^{20} \rfloor = 6$ e o número de algarismos buscado é $6 + 1 = 7$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Resolva a equação $2^{3x-4} = 4^{x+1}$.

Solução: A ideia nesse tipo de problema é 'igualar' as bases: $2^{3x-4} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2}$. Daí, temos $3x - 4 = 2x + 2$, logo $x = 6$.

02 Resolva a inequação $25^x - 23 \cdot 5^x - 50 < 0$.

Solução: Fazendo $5^x = t$ ($t > 0$), temos $t^2 - 23t - 50 < 0$. As raízes da expressão quadrática são 25 e –2 e, como a concavidade é voltada para cima, tem-se que $-2 < t < 25$. No entanto, repare que t é positivo (pois é potência de positivo), logo, $0 < t < 25$. Voltando à variável original, temos $0 < 5^x < 25$, o que nos dá $x < 2$.

03 Dado que $\log 2 \approx 0{,}3010$, dê aproximações para log5 e log6,25.

Solução: A base dos logaritmos é 10 (pois não aparece). Logo, $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 5 \approx 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$.

Para o outro log, veja que $\log 6{,}25 = \log\frac{625}{100} = \log 625 - \log 100 \Rightarrow \log 6{,}25 = \log 5^4 - 2 \Rightarrow \log 6{,}25 = 4\log 5 - 2$.
Substituindo a aproximação anterior, segue que $\log 6{,}25 = 0{,}796$.

04 Prove que $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ sempre que as expressões estão bem definidas.

Solução: Basta 'tirar log' na base c dos dois lados, escreva você mesmo.

05 Resolva a equação $2^x = 3^{x+1}$.

Solução: Como as bases não são potências de um mesmo inteiro, não podemos seguir a mesma ideia do exercício resolvido 1. Com variável no expoente em uma situação dessas, a ideia é 'tirar log' dos dois lados. Isso pode ser feito em qualquer base, mas é conveniente escolher uma das bases que já aparece no problema: $\log_3 2^x = \log_3 3^{x+1} \Rightarrow x \cdot \log_3 2 = x + 1$ $\Rightarrow x = \frac{1}{\log_3 2 - 1}$.
É possível simplificar a resposta, pois $\log_3 2 - 1 = \log_3 2 - \log_3 3 = \log_3 \frac{2}{3}$. Daí, segue que $x = \log_{\frac{2}{3}} 3$ (repare que foi utilizada a fórmula de mudança de base no formato $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$)

06 Resolva a equação $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2 3$.
Solução: Usando a regra do produto, temos $\log_2(x^2 - 1) = \log_2 3$. Igualando os logaritmandos, temos $x^2 = 4$, ou seja, $x = \pm 2$. No entanto, veja que não podemos ter valores de x menores do que 1 (pois aparece $x - 1$ dentro de um logaritmo).

$$\therefore S = \{2\}.$$

Obs.: Neste problema, as bases já eram originalmente todas iguais. Em algumas outras situações, teremos logaritmos em bases diferentes. A 1ª coisa a ser feita, em geral, é utilizar a fórmula de mudança de base para 'igualar' as bases de todos os logaritmos.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Resolva as equações e inequações exponenciais abaixo:

a. $3^{x^2-15} = 9^x$
b. $3^{x-1} + 3^{1-x} = 10 \cdot 3^{-1}$
c. $3^{1/x} < \frac{1}{9}$
d. $3^{|x|} > 9$
e. $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 42{,}5$
f. $3^{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}$

02 Resolva as equações exponenciais abaixo:

a. $2^{x^2-2\cdot x} = 2^{3x-6}$
b. $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}$
c. $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$
d. $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$
e. $3^x = 5^x$
f. $x^{2x-3} = 1$ ($x > 0$)

03 Para que valores de m a equação: $81^x - m \cdot 9^x + 2m - 3 = 0$ admite solução única?

04 **(ITA)** A soma de todos os valores de x que satisfazem à identidade $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$ é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) n.d.a.

05 **(ITA)** Seja $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$, em que $x \in \mathbb{R}$. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $f: D \to \mathbb{R}$ é uma função injetora é:

(A) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \leq -2\}$
(B) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2\}$
(C) $D = \mathbb{R}$
(D) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
(E) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

06 **(ITA)** Dada a equação $3^{2x} + 5^{2x} - 15^x = 0$, podemos afirmar que:

(A) não existe x real que a satisfaça.
(B) $x = \log_3 5$ é uma solução desta equação.
(C) $x = \log_5 3$ é uma solução desta equação.
(D) $x = \log_3 15$ é uma solução desta equação.
(E) $x = 3\log_5 15$ é uma solução desta equação.

07 **(ITA)** Seja a um número real com $0 < a < 1$. Então, os valores reais de x para os quais $a^{2x} - (a + a^2)a^x + a^3 < 0$ são:

(A) $a^2 < x < a$.
(B) $x < 1$ ou $x > 2$.
(C) $1 < x < 2$.
(D) $a < x < \sqrt{a}$.
(E) $0 < x < 4$.

08 **(ITA)** Dadas as funções $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $g(x) = x\operatorname{sen}x$, $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

(A) ambas são pares.
(B) f é par e g é ímpar.
(C) f é ímpar e g é par.
(D) f não é par nem ímpar e g é par.
(E) ambas são ímpares.

09 **(EN)** O domínio da função $y = \dfrac{-32x}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243}}$ é:

(A) $(-\infty, -5)$
(B) $(-\infty, 5)$
(C) $(-5, +\infty)$
(D) $(5, +\infty)$ d)
(E) $(-5, 5)$

10 **(EFOMM)** Calcule o valor de x na expressão $2^{3x+5} - 2^{3x+1} = 3^{3x+5} - 3^{3x+4} - 142 \cdot 3^{3x}$:

(A) $-1/2$.
(B) $-1/3$.
(C) 0.
(D) $1/3$.
(E) $1/2$.

11 **(AFA)** Determine as soluções da equação $3 \cdot 9^x + 7 \cdot 3^x - 10 = 0$.

12 Resolva a equação: $\log_3(x^2 - 8x) = 2$.

13 Resolva a equação $\log_3 \log_4 (x + 1) = 2$.

14 Ache os valores de x para que exista $\log_x\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

15 Resolva as equações logarítmicas abaixo:

a. $\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$
b. $\log(x + 4) + \log(2x + 3) = \log(1 - 2x)$
c. $\log_2\left(x^2 - 1\right) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$
d. $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$
e. $\log^2 x + \log x + 1 = \dfrac{7}{\log\frac{x}{10}}$
f. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$
g. $x^{1-\log x} = 0{,}01$
h. $\log_x(3 \cdot x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$
i. $\log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \dfrac{1}{2x}$

16 Resolva a equação: $2\log_2(x - 1) - \log_2(x + 1) = 3$.

17 Resolva a inequação: $\log_3(x + 2) - \log_3 x > 1$.

18 Resolva a inequação: $\log_{x-1}(2 - 3x) < 0$.

19 Resolva a inequação: $\log_3 x - \log_2 x > 1$.

20 Resolva as equações:

a. $3^{x^2-4} = 5^{2x}$
b. $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$

21 Resolva a equação: $4^x + 6^x = 9^x$.

22 Sejam a e b dois números reais positivos e diferentes de 1. Qual a relação entre a e b para que a equação $x^2 - x(\log_b a) + 2\log_a b = 0$ tenha duas raízes reais e iguais?

23 Simplifique $\log_{x_2} x_1 \cdot \log_{x_3} x_2 \ldots \log_{x_n} x_{n-1}$.

24 Calcule $-\log_n[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}]$.

25 Determine os valores reais de x que satisfazem:

a. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2} x^4 > 0$.
b. $\log_2 x \cdot \log_3 2x + \log_3 x \cdot \log_2 3x \geq 0$.

26 Resolva a equação $x^{x^{x^{x\ldots}}} = 2$ $(x > 0)$.

27 Resolva $(\log x)^{\log x} = \log x$.

28 Determine os valores de k para os quais a equação $2^x + 2^{-x} = 2k$ admite solução real.

29 Para quais valores reais de x vale a relação $\log(x^2) = 2\log x$?

30 **(EN)** Se $\log_\alpha x = n$ e $\log_\alpha y = 5n$, então $\log_\alpha \sqrt[4]{x^3 y}$ é igual a:

(A) $n/4$.
(B) $2n$.
(C) $3n/4$.
(D) $3n$.
(E) $5n/4$.

31 **(EN)** Seja x a solução da equação $\log_7\sqrt{x+1} + \log_7\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}\log_7 3$.

O valor de $z = \log_{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{64} + \log_x 128$ é:

(A) 4.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 1.
(E) 0.

32 **(EFOMM)** Sendo $\log 2 = p$ e $\log 3 = q$, o valor de $\dfrac{\log 2 + \log 4 + \log 8}{\log 6 + \log 9}$ é igual a:

(A) $\dfrac{3p}{q+2p}$.
(B) $\dfrac{6p}{p+3q}$.
(C) $\dfrac{3p}{p+q}$.
(D) $\dfrac{p+q}{2q}$.
(E) $\dfrac{6p+q}{2p}$.

33 **(EFOMM)** Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, o valor de $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$ é:

(A) $n + m$.
(B) $2n + m$.
(C) $3n + m$.
(D) $2n + 2m$.
(E) $2n + 3m$.

34 **(AFA)** Qual o valor da soma dos 7 primeiros termos da progressão geométrica $\log_{1/2} 1/4$, $\log_{1/2}$, $1/16$, ...?

(A) 1/4.
(B) 1/2.
(C) 128.
(D) 254.

35 **(AFA)** Uma das soluções da equação

$$-\frac{1}{2}\log(x+1) = \log\frac{1}{(x-1)^3} + \log\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{é:}$$

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

36 **(ITA)** Determine o conjunto solução da inequação

$$\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4\left(x^2-5\right)\right] > 0$$

37 **(ITA)** Com respeito à função $g(x) = \ln\left(\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right)$, podemos afirmar que:

(A) está definida apenas para $x \geq 0$.
(B) é uma função que não é par nem ímpar.
(C) é uma função par.
(D) é uma função ímpar.
(E) n.d.a.

38 **(ITA)** As raízes reais da equação $2\left[1 + \log_{x^2}(10)\right] = \left[\frac{1}{\log\left(x^{-1}\right)}\right]^2$ são:

(A) 10 e $\sqrt{10}$.
(B) 10 e $\frac{1}{\sqrt{10}}$.
(C) $\frac{1}{10}$ e $\sqrt{10}$.
(D) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{\sqrt{10}}$.
(E) n.d.a.

39 **(ITA)** Seja $a_1, a_2, ..., a_n$ ($a_i > 0$, $i = 1,2, ..., n$) uma progressão geométrica de razão r. Seja também $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \log(qx^p)$, em que p e q são reais positivos. Nessas condições, $f(a_1)$, $f(a_2)$, ..., $f(a_n)$ é:

(A) uma progressão geométrica de razão $\log(qr^p)$
(B) uma progressão geométrica de razão $p\log r$
(C) uma progressão aritmética de razão $\log q + p\log a_1$
(D) uma progressão aritmética de razão $\log q + p\log r$
(E) uma progressão aritmética de razão $p\log r$

40 **(ITA-82)** O conjunto verdade da desigualdade

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2 - 2x + 1\right)\right) < 0 \quad \text{é:}$$

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$
(B) $(-2, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$
(C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
(D) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
(E) o conjunto vazio.

41 **(ITA)** Os valores de a e k reais que tornam verdadeira a expressão $\log_a 2a + \frac{\log_{2a} k}{\log_{6a} k} \cdot \log_a^2 2a = (\log_a 2a)(\log_a 3)$ são:

(A) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e qualquer valor de k, $k > 0$.
(B) $a = 2$ e qualquer valor de k, $k > 0$, $k \neq 1$.
(C) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e qualquer valor de k, $k > 0$, $k \neq 1$.
(D) quaisquer valores de a e k com $k \neq 6a$.
(E) qualquer valor de a positivo com $a \neq 1$ e $a \uparrow \frac{1}{6}$, e qualquer valor positivo de k.

42 **(ITA)** Sejam os números reais $x > 0$, $a > b > 1$. Os três números reais $x, \sqrt{x \log_a b}, \log_a(bx)$ são, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica infinita. A soma S desta progressão vale:

(A) $S = \frac{2x}{1 - \log_a b}$.
(B) $S = \frac{x+1}{1 - \frac{\log_a b}{2}}$.
(C) $S = \frac{1}{1 - \sqrt{\log_a b}}$.
(D) n.d.a.

43 **(ITA)** Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Esse número é:

(A) 5.
(B) 8.
(C) 2.
(D) 4.
(E) 3.

44 **(ITA)** Se x e y são números reais tais que

$$\ln\left[\left(y^2+1\right) \cdot e^x\right] - \ln\left(y^2+1\right)^4 = x - 3,$$

então:

(A) $y = 1 + \sqrt{e-1}$.
(B) $y = 10 - \sqrt{e-1}$.
(C) $y = \pm\sqrt{e-1}$.
(D) $y = 2\sqrt{e-1}$.
(E) $y = \frac{\sqrt{e-1}}{2}$.

45 **(ITA)** Sejam *f*, *g* funções reais de variável real definidas por $f(x)=\ln(x^2-x)$ e $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Então o domínio de $f \circ g$ é:

(A) $]0, e[$
(B) $]0, 1[$
(C) $]e, e+1[$
(D) $]-1, 1[$
(E) $]1, +\infty[$

46 **(ITA)** Considere $A(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2+4x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Então, temos:

(A) $A(x) > 1$, para algum $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.
(B) $A(x) = 1$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(C) $A(x) < 1$, apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$.
(D) $A(x) > 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$.
(E) $A(x) < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

47 **(ITA)** Seja $f = \log_2(x^2-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < -1$. A lei que define a inversa de *f* é:

(A) $\sqrt{1+2^y}, \forall y \in \mathbb{R}$.
(B) $-\sqrt{1+2^y}, \forall y \in \mathbb{R}$.
(C) $1-\sqrt{1+2^y}, \forall y \in \mathbb{R}$.
(D) $-\sqrt{1-2^y}, \forall y \in \mathbb{R}, y \le 0$.
(E) $1+\sqrt{1-2^y}, \forall y \in \mathbb{R}, y \le 0$.

48 **(ITA)** Em uma progressão geométrica de razão *q*, sabe-se que:

I. o produto do logaritmo natural do primeiro termo a_1 pelo logaritmo natural da razão é 24.
II. a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26.

Se ln*q* é um número inteiro então o termo geral a_n vale:

(A) e^{6n-2}.
(B) e^{4+6n}.
(C) e^{24n}.
(D) e^{6n+2}.
(E) n.d.a.

49 **(ITA)** O conjunto dos números reais que verificam a inequação $3\log x + \log(2x+3)^3 \le 3\log 2$ é dado por:

(A) $(0, +\infty)$
(B) $[1, 3]$
(C) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$
(D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$
(E) n.d.a.

50 **(ITA)** O domínio da função $f(x) = \log_{(2x^2-3x+1)}(3x^2-5x+2)$ é:

(A) $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
(B) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$
(C) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
(D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
(E) n.d.a.

51 Calcule: $\log_2\log_3\text{antilog}_3\log_{1,5}2{,}25$.

52 Resolva o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \log x + \text{colog}\, y = \log 2 \end{cases}$.

53 Determine as características de:

a. $\log_3 16$.
b. $\log_{\frac{2}{3}} 5$.

54 Determine, sabendo que $0{,}3010 < \log 2 < 0{,}3011$, quantos dígitos tem 2^{300}.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Determine as soluções positivas dos sistemas abaixo (*x* e *y* são as variáveis):

a. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^p = y^q \end{cases} (p \ne q), (p, q > 0)$

b. $\begin{cases} x^y = \frac{1}{y^2} \\ x^5 = y^3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^y = \frac{1}{y^2} \\ y^x = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$

02 **(ITA)** Considere as funções $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x)=3^{x+\frac{1}{x}}$, $g(x) = x^2$ e $h(x)=\frac{81}{x}$. O conjunto dos valores de *x* em $\mathbb{R}^*$ tais que $(f \circ g)(x) = (h \circ f)(x)$ é um subconjunto de:

(A) $[0, 3]$
(B) $[3, 7]$
(C) $[-6, 1]$
(D) $[-2, 2]$
(E) n.d.a.

03 **(ITA)** Um acidente de carro foi presenciado por 1/65 da população de Votuporanga (SP). O número de pessoas que souberam do acontecimento *t* horas após é dado por $f(t)=\frac{B}{1+Ce^{-kt}}$, em que B é a população da cidade. Sabe-se que 1/9 da população soube do acidente 3 horas após, então o tempo que passou até que 1/5 da população soubesse da notícia foi de:

(A) 4 horas.
(B) 5 horas.
(C) 5 horas e 24 min.
(D) 5 horas e 30 min.
(E) 6 horas.

04 Mostre que $\log_3 2 + \log_2 3 > 2$.

05 Determine a soma das raízes reais da equação $100^x - k \cdot 10^x + 0{,}1 = 0$, assumindo que esta tem 2 raízes distintas.

06 Resolva os sistemas abaixo:

a. $\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30 \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5} \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2^x 3^y = 12 \\ 2^y 3^x = 18 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^{y-2} = 4 \\ x^{2y-3} = 64 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{5/2} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$

07 Resolva as equações :

a. $3\log_{16}(\sqrt{x^2+1}+x) + \log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = \log_{16}(4x+1) - 1/2$

b. $x^2 \log_2 \dfrac{3+x}{10} - x^2 \log_{\frac{1}{2}}(2+3x) = x^2 - 4 + 2\log_{\sqrt{2}} \dfrac{3x^2+11x+6}{10}$

c. $x^2 \log_6(5x^2-2x-3) - x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3) = x^2 + x$

08 **(ITA)** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz à seguinte propriedade: $f(x + y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Se $g(x) = f\left(\log_{10}\left(x^2+1\right)^2\right)$, então podemos afirmar que:

(A) o domínio de g é $\mathbb{R}$ e $g(0) = f(1)$.
(B) g não está definida para os reais negativos e $g(x) = 2f(\log_{10}(x^2 + 1))$, para $x \geq 0$.
(C) $g(0) = 0$ e $g(x) = 2f(\log_{10}(x^2 + 1))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(D) $g(0) = f(0)$ e g é injetora.
(E) $g(0) = -1$.

09 **(ITA)** Supondo m uma constante real, $0 < m < 1$, encontre todos os números reais x que satisfazem a inequação

$\log_m\left(x^4 + m^4\right) \geq 2 + \log_m\left[\left(\dfrac{x}{2m}\right)^2 + m^2\right]$.

10 **(ITA)** Sobre a expressão $M = \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_5 x}$, em que $2 < x < 3$, qual das afirmações abaixo está correta?

(A) $1 \leq M \leq 2$.
(B) $2 < M < 4$.
(C) $4 \leq M \leq 5$.
(D) $5 < M < 7$.
(E) $7 \leq M \leq 10$.

11 **(ITA)** Considere o desenvolvimento $(x + y)^{10} = A_1x^{10} + A_2x^9y + \ldots$, em que x e y são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual a $\dfrac{405}{2}(\log_k 2)^3$, para algum $k > 1$, $x = \dfrac{2\log_2 k}{\sqrt{\log_k 2}}$ e $y = \dfrac{\sqrt{\log_k 2}}{2\log_2 k}$. Neste caso:

(A) $k^2 = 2$.
(B) $k^2 = 3$.
(C) $k^3 = 2$.
(D) $k^3 = 7$.
(E) $k^3 = 5$.

12 **(ITA)** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} e^x, \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 1, \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Se D é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ tal que $f: D \to \mathbb{R}$ é injetora, então podemos ter:

(A) $D = \mathbb{R}$ e $f(D) = [-1, +\infty)$
(B) $D = (-\infty, 1] \cup (e, +\infty]$ e $f(D) = (-1, +\infty)$
(C) $D = [0, +\infty)$ e $f(D) = (-1, +\infty)$
(D) $D = [0, e]$ e $f(D) = [-1, 1]$
(E) n.d.a.

13 **(ITA)** Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$. A função inversa de f é dada por:

(A) $\log_a\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$, para $x > 1$.
(B) $\log_a\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$.
(C) $\log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$.
(D) $\log_a\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right)$, para $x < -1$.
(E) n.d.a.

14 **(ITA)** Considere uma progressão geométrica de razão inteira $q > 1$. Sabe-se que $a_1a_n = 243$, $\log_q P_n = 20$ e $\log_q a_n = 6$, em que a_n é o enésimo termo da progressão geométrica e P_n é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

(A) $\dfrac{3^9 - 1}{6}$.
(B) $\dfrac{3^{10} - 1}{6}$.
(C) $\dfrac{3^8 - 1}{6}$.
(D) $\dfrac{3^9 - 1}{3}$.
(E) n.d.a.

15 **(ITA)** Sejam x e y reais positivos, ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema: $\begin{cases} x^y = \dfrac{1}{y^2} \\ \log x + \log y = \log \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$. Então o conjunto $\{x, y\}$ está contido no intervalo:

(A) $[2, 5]$
(B) $(0, 4)$
(C) $[-1, 2]$
(D) $[4, 8)$
(E) $[5, +\infty)$

16 **(ITA)** Se x é um número real positivo, com $x \neq 1$ e $x \uparrow \frac{1}{3}$, satisfazendo $\frac{2+\log_3 x}{\log_{(x+2)} x} - \frac{\log_x(x+2)}{1+\log_3 x} = \log_x(x+2)$, então x pertence ao intervalo I, em que:

(A) $I = \left(0, \frac{1}{9}\right)$

(B) $I = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

(C) $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(D) $I = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

(E) $I = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

17 **(ITA)** Determine o conjunto solução da inequação

$$\log_x[(1-x)x] < \log_x[(1+x)x^2]$$

18 Resolva as inequações:

a. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2} - 4^x) \geq -2$

b. $\begin{cases} \log_x(x+2) > 2 \\ (x^2 - 8x + 13)^{4x-6} < 1 \end{cases}$

19 Determine os valores de a reais, tais que: $\frac{\log_a x + \log_a y}{2} \leq \log_a \frac{x+y}{2}$ para todos x e y reais positivos. (Interprete geometricamente.)

20 Resolva a inequação: $\log_x(4x - x^2) > 1$.

21 Mostre que existem a e b irracionais, tais que a^b é racional. (*Sugestão:* Calcule $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$)

22 As representações decimais de 2^{2000} e 5^{2000} são colocadas uma ao lado da outra. Determine o número de algarismos que foram escritos.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Resolva as inequações:

a. $2^x \geq 11 - x$.

b. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} \geq 2^x$

02 Resolva $\log(20 - x) = (\log x)^3$.

03 Determine o número de soluções reais da equação

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 9 = \frac{1}{\log_x \frac{3}{5}}.$$

04 Sabe-se que a área determinada pelas curvas $y = 1/x$, $x = 1$, $x = t$ e $y = 0$ é dada por $H(t) = \ln(t)$, para $t > 1$. Mostre que:

a. para $t > 1$, tem-se $\frac{t-1}{t} < \ln(t) < \frac{t^2-1}{2t}$;

b. para todo $n \geq 1$, tem-se $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

c. conclua que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

05 Usando o exercício anterior, mostre que para todo p natural :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} > \ln(p+1)$$

06 Dado que $0{,}3010 < \log 2 < 0{,}3011$, determine quantos dígitos tem $2^{300} + 5^{300}$.

07 Determine todas as soluções reais da equação $2^x + 3^x + 5^x = 160^{\frac{x}{3}}$.

08 Determine o número de soluções reais positivas da solução $\operatorname{sen} x = \log x$.

09 Quantas soluções possui a equação $x^2 = 2^x$?

10 Se a, b, c são reais positivos maiores que 1, determine o valor mínimo de $\frac{\log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a}{\sqrt[3]{abc}}$.

11 Para x, y e z positivos, determine o mínimo de $x^z + y^z - (xy)^{\frac{z}{4}}$.

RASCUNHO

RASCUNHO

1. Polinômio em *x*

1.1 Conceito

Chama-se polinômio em x, e denota-se por $P(x)$, toda expressão algébrica da forma $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + ... + A_m$, ou seja: $P(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^{m-k}$ em que os coeficientes $A_0, A_1, A_2, ..., A_m$ são números complexos e os expoentes da variável x são inteiros não negativos. O grau do polinômio será dado pelo maior expoente da variável x em uma parcela não nula.

Ex.: $P(x) = x^4 + 5x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2 + 3i$ (grau 4)
$Q(x) = 0x^4 + 5x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2 + 3i$ (grau 2)

Obs.: Se tivermos num polinômio mais de uma variável, podemos pensá-lo como de uma variável, desde que se escolha uma como ordenatriz.

Ex.: $P(x, y, z) = 10x^4y^2z - 5x^3y^4z^2 + 2x^2yz - 2xyz + 5$

1.2 Propriedades do grau

Dados $P(x)$ e $Q(x)$, tem-se:

I. $\text{grau}[P(x) \cdot Q(x)] = \text{grau}[P(x)] + \text{grau}[Q(x)]$
II. $\text{grau}[P(x) + Q(x)] \leq \max\{\text{grau}[P(x)], \text{grau}[Q(x)]\}$

1.3 Raiz

Dizemos que a é raiz do polinômio P, se $P(a) = 0$.

Ex.: Veja que 1 é raiz do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$, pois $P(1) = 0$.

1.4 Operações

As operações de multiplicação, soma e diferença são feitas da maneira habitual. A única operação diferente, de fato, é a divisão de polinômios.

2. Polinômio identicamente nulo

2.1 Conceito

Um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo, quando $P(x) = 0, \forall x$.

Pela definição de grau dada, o polinômio identicamente nulo não possuiria grau. No entanto, é comum dizer que seu grau é igual a $-\infty$. Veja que, fazendo isso, as propriedades de grau continuam válidas inclusive para o polinômio identicamente nulo.

2.2 Teorema

"Um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo, se e somente se todos os seus coeficientes são nulos."

Demonstração: Esta demonstração deve ser omitida numa 1ª leitura, por sua sofisticação.

Faremos por contradição. Considere um polinômio que seja sempre nulo, mas que não possua todos os coeficientes nulos. Daí, existe um grau para este polinômio, ou seja, um expoente máximo dentre os existentes. Assim, escrevemos $A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n = 0$, para todo $x (A_0 \neq 0)$.

Portanto, dividindo por x^n, temos que $A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + ... + \frac{A_n}{x^n} = 0$, para todo $x \neq 0$.

Como esta última equação é válida para todo $x \neq 0$, podemos fazer $x \to +\infty$(ou seja, tomar x arbitrariamente grande) e teremos $A_0 = 0$, uma contradição.

Por isso, todos os coeficientes devem ser nulos.

3. Identidade de polinômios

3.1 Conceito

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos, quando $P(x) = Q(x)$, para todo x.

Utilizamos o símbolo $P(x) \equiv Q(x)$ neste caso.

3.2 Teorema

"Se P e Q são polinômios, então $P(x) \equiv Q(x)$, se e somente se os coeficientes correspondentes de P e Q são iguais. Em particular, os graus de P e Q devem ser iguais."

Demonstração: Considerando o polinômio $U(x) = P(x) - Q(x)$, aplicamos o teorema 2.2 e está finalizado.

4. Divisão de polinômios

Dados polinômios $P(x)$ e $D(x)$, existem (e são únicos) polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que: $\begin{cases} P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \\ \text{grau} R(x) < \text{grau } D(x) \end{cases}$

Obs. 1: Existe um método para encontrar os polinômios Q e R, conhecidos como quociente e resto, respectivamente. Isso será feito em sala de aula, já que uma explicação por escrito mais confundiria do que elucidaria qualquer coisa.

Obs. 2: Quando $R(x) = 0$, para todo x, dizemos que a divisão é exata. Veja que a condição $\text{grau } R(x) < \text{grau } D(x)$ ainda é verdadeira, se considerarmos o grau do polinômio identicamente nulo como $-\infty$.

5. Teorema do resto

"O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ é igual a $P(a)$."

Demonstração: Dividindo $P(x)$ por $(x - a)$, encontramos um quociente $Q(x)$ e um resto R. Veja que R é número (não tem x), pois seu grau deve ser menor que o grau de $(x - a)$, que é 1. Daí, temos que $P(x) \equiv (x - a)Q(x) + R$. Fazendo $x = a$, temos o resultado: $R = P(a)$.

6. Fatoração

6.1 Teorema

"Se o número complexo a é raiz de um polinômio P, então $P(x)$ é divisível por $(x - a)$."

Obs.: Isso é consequência imediata do teorema do resto.

7. Algoritmo de Briot-Ruffini

Consideremos um polinômio $P(x)$ do grau m, ou seja, $P(x)=\sum_{k=0}^{m} A_k x^{m-k}$ e façamos a divisão por $x-a$. Então $P(x) \equiv Q(x)\cdot(x-a)+R$, em que $Q(x)=\sum_{k=0}^{m-1} B_k x^{m-1-k}$; da identidade acima, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} B_0 = A_0 \\ B_1 = A_1 + a.B_0 \\ B_2 = A_2 + aB_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{m-1} = A_{m-1} + aB_{m-2} \\ R = A_m + aB_{m-1} \end{cases}$$

Essas igualdades nos permitem efetuar a divisão de $P(x)$ por $x-a$ através do dispositivo denominado algoritmo de Briot-Ruffini, ou seja:

	A_0	A_1	A_2	...	A_{m-1}	A_m
a	B_0	B_1	B_2	...	B_{m-1}	R

Ex.: $2x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \div x - 2$

	2	–5	3	–4
2	2	–1	1	–2

$Q(x) = 2x^2 - x + 1$ e $R = -2$

Ex.: $x^4 - 3x^2 + 5x - 2 \div x + 1$

	1	0	–3	5	–2
–1	1	–1	–2	7	–9

$Q(x) = x^3 - x^2 + -2x + 7$ e $R = -9$

8. Teorema fundamental da álgebra

Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema envolve conceitos muito mais avançados e não a faremos.

A partir disso, veja que, se P é um polinômio de grau n maior ou igual a 1 tal que a_1 é uma raiz, pela fatoração vista no item 6, temos que $P(x) = (x-a_1)P_1(x)$ e esse polinômio P_1 possui grau $n-1$. Agora, repetimos a mesma ideia. Se P_1 ainda tiver grau maior ou igual a 1, P_1 teria alguma raiz a_2 e, por isso, poderíamos escrever $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)P_2(x)$. Prosseguindo desta forma, os polinômios assim construídos $P_1, P_2, \ldots$ têm graus decrescentes e, num certo momento, o grau de algum P desses será nulo. Portanto, podemos escrever $P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$.

Veja que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são as raízes e que A é o coeficiente líder de P, ou seja, o coeficiente do termo de maior grau do polinômio. Esta é a chamada **forma fatorada** de P.

9. Grau × quantidade de raízes

I. Se P é um polinômio de grau ≥ 1, então #raízes (P) = grau (P);
II. Se P é um polinômio tal que #raízes (P) > grau (P), então $P \equiv 0$ (mais precisamente, se um polinômio se anula numa quantidade de valores maior que o seu grau, então este polinômio é identicamente nulo);
III. se $P(x) = Q(x)$ para uma quantidade de valores de x maior que os graus de P e Q, então P e Q são idênticos ($P(x) \equiv Q(x)$).

Demonstrações: I decorre imediatamente do item anterior, a forma fatorada. Por conta disso, veja que o único polinômio que possui mais raízes do que grau é o identicamente nulo, com infinitas raízes. Portanto, II é verdade. Para o item III, basta considerar o polinômio $P(x) - Q(X)$.

10. Teorema das raízes conjugadas

Se um polinômio de coeficientes reais admite uma raiz complexa da forma $a + bi$ (a e b reais), então também admite a raiz complexa conjugada $a - bi$.

Demonstração: Basta ver que $p(\overline{x}) = \overline{p(x)}$ para polinômios com coeficientes reais.

Obs.: Há um resultado similar para raízes irracionais da forma $a + b\sqrt{d}$, para a, b, d racionais e $\sqrt{d}$ irracional, e a demonstração é basicamente a mesma. O teorema é: "Se um polinômio de coeficientes racionais admite uma raiz complexa da forma $a + b\sqrt{d}$, com a, b, d racionais e $\sqrt{d}$ irracional, então também possui a raiz $a - b\sqrt{d}$."

11. Relações de Girard

Considere um polinômio, de grau n maior ou igual a 1, $P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ e suas n raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distintas ou não.

Definamos as chamadas somas simétricas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

- Soma $\Rightarrow \sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$
- Soma dos produtos 2 a 2 $\Rightarrow \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$
- Soma dos produtos 3 a 3 $\Rightarrow \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$

...
- Soma dos produtos n a n, ou seja, produto $\Rightarrow \sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n$

As relações de Girard afirmam que: $\sigma_1 = -\frac{A_1}{A_0}$, $\sigma_2 = \frac{A_2}{A_0}$, $\sigma_3 = -\frac{A_3}{A_0}$, ..., $\sigma_k = (-1)^k \frac{A_k}{A_0}$, ..., $\sigma_n = (-1)^n \frac{A_n}{A_0}$.

Demonstração: Parece difícil, porque a notação pode confundir um pouco o aluno menos experiente. No entanto, a demonstração é bastante simples.

Dadas as raízes de P, temos sua forma fatorada $P(x) = A_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Agora, vejamos qual é o coeficiente de x^{n-k}. Vendo a forma fatorada como uma grande distributiva, note que, para gerarmos x^{n-k}, precisamos em $n - k$ parêntesis escolher x e, nos outros k, escolher as raízes. Cada parcela dessas contém um produto de k raízes. Portanto, se fizermos todas as possibilidades, teremos a soma dos produtos k a z das raízes, ou seja, σ_k. Além disso, na distributiva, há um sinal que está sendo multiplicado k vezes. Por isso, também há um $(-1)^k$. Então, o coeficiente de x^{n-k} por um lado é $A_0 = (-1)^k\sigma_k$ e, por outro lado, é A_k. Então, $\sigma_k = (-1)^k \frac{A_k}{A_0}$.

Ainda assim, a demonstração pode ter parecido difícil para os não iniciados. Para termos uma situação mais simples, consideremos o caso de grau 3. Fazendo a distributiva em $P(x) = A_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, chegamos a $P(x) = A_0(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)\,x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,x - x_1x_2x_3)$. Igualando os coeficientes aos de $P(x) = A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$, chegamos às relações de Girard para o grau 3, as mais utilizadas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{A_1}{A_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{A_2}{A_0} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{A_3}{A_0} \end{cases}$$

12. Teorema da raiz racional

Considere o polinômio $P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A^n$, de coeficientes inteiros. Se esse polinômio possui uma raiz racional $\dfrac{p}{q}$ (p e q inteiros, na forma irredutível), então:

I. p é divisor de A_n;
II. q é divisor de A_0.

Caso particular: Se $A_0 = 1$, então qualquer raiz racional da equação é inteira (e testamos divisores de A_0).

Demonstração: Exercício 18, nível 2.

13. Polinômios recíprocos

13.1 Definição

Um polinômio de grau n é dito recíproco, se $P(x) = \pm x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Como consequência disso, se a é raiz de um polinômio recíproco, $\dfrac{1}{a}$ também é.

13.2 Classificação

I. Se $P(x) = x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$, temos um polinômio recíproco de primeira espécie. Neste tipo de polinômio, os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são iguais, quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

Ex.: $P(x) = 12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12$

II. Se $P(x) = -x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$, temos um polinômio recíproco de segunda espécie. Neste tipo de polinômio, os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são simétricos, quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

III. $P(x) = -2x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 5x + 2$.

Obs.: Caso P possua grau par, seu termo central deve ser nulo.

13.3 Propriedades

Como 1 e –1 são as únicas raízes de uma equação recíproca que não precisam vir acompanhadas de outra (em pares), já que 1 é o inverso de 1 e –1 é o inverso de –1 , é claro que uma equação recíproca de grau ímpar precisa ter 1 ou –1 como raiz.

Temos as seguintes propriedades:

13.3.1 Equação recíproca de primeira espécie

- grau **ímpar**: sempre terá o –1 como raiz;
- grau **par**: nada podemos afirmar.

13.3.2 Equação recíproca de segunda espécie

- grau **ímpar**: sempre terá o 1 como raiz;
- grau **par**: sempre terá o 1 e o – 1 como raízes.

13.4 Resolução de equação recíproca

Para entender o método, veja o exercício resolvido número 6.

14. Raízes múltiplas

14.1 Definição

Um número r é dito raiz de multiplicidade m de um polinômio P, se existir um polinômio Q tal que $P(x) = (x-r)^mQ(x)$, em que r não é raiz de Q. Se r não é raiz de P, dizemos que r tem multiplicidade 0. Além disso, raízes de multiplicidade 1, 2 e 3 são chamadas de raízes simples, duplas e triplas, respectivamente.

14.2 Teorema

Um número r é raiz de multiplicidade m de um polinômio P, se e somente se $P(r) = P'(r) = P''(r) = \ldots = P^{(m-1)}(r) = 0$, em que P' denota a primeira derivada do polinômio, P'' denota a segunda derivada e, em geral, $P^{(k)}$ denota a k-ésima derivada do polinômio.

15. Transformadas aditiva, multiplicativa, simétrica e recíproca

É possível transformar uma equação polinomial $P(x) = 0$ (equação primitiva) em uma outra equação polinomial $Q(y) = 0$ (equação transformada) de modo que as raízes y relacionem-se com as raízes de x através da função $y = \varphi(x)$ (função transformatriz).

15.1 Transformada aditiva

As raízes da nova equação são obtidas somando k unidades às raízes de uma equação original. Se P é um polinômio, o polinômio $Q(x) = P(x-k)$ possui para raízes as raízes de P aumentadas de k unidades.

Ex.: Considere a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$. Determine a equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.

Solução: A ideia é trocar x por $x - 2$.

$$Q(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 8 = x^3 - x^2 - x - 4$$

Seja $Q(x) \equiv P(x-2)$. Portanto, trocando $x \to x - 2$, tem-se $Q(x+2) \equiv P(x)$. Daí, é fácil ver que, se a é raiz de P, então $a + 2$ é raiz de Q.

Portanto, o polinômio procurado é:

$$Q(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 8 = x^3 - x^2 - x - 4.$$

15.2 Transformada multiplicativa

As raízes da nova equação são obtidas multiplicando por k unidades as raízes de uma equação original. Se P é um polinômio, o polinômio $Q(x) = P\left(\frac{x}{k}\right)$ possui para raízes as raízes de P multiplicadas por k unidades.

Ex.: Considere a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$. Determine a equação polinomial cujas raízes sejam os dobros das raízes da equação dada.

Solução: Estamos interessados em $\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{3}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $x^3 + 15x^2 + 36x - 216 = 0$.

Obs.: A transformada simétrica é um caso particular da transformada multiplicativa, quando $k = -1$.

15.3. Transformada recíproca

As raízes da nova equação são os inversos das raízes da equação original. Se P é um polinômio, o polinômio $Q(x) = x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$ possui para raízes os inversos das raízes de P.

Ex.: Considere a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$. Determine a equação polinomial cujas raízes sejam os inversos das raízes da equação dada.

Solução: Queremos encontrar $x^3\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) - 8\right) = 0 \Leftrightarrow$ $-8x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$.

16. Desenvolvimento em potências de $x - a$

16.1 Utilização do algoritmo de Briot-Ruffini

Consideremos o polinômio, de grau n, $P(x)$. Dividindo esse polinômio por $x - a$, encontramos um quociente $Q_1(x)$ de grau $n - 1$ e um resto R_0. Dividindo $Q_1(x)$ por $x - a$, encontramos um quociente do grau $n - 2$ e um resto R_1, e assim sucessivamente. Temos:

$P(x) = (x - a)Q_1(x) + R_0$
$Q_1(x) = (x - a)Q_2(x) + R_1$
$Q_2(x) = (x - a)Q_3(x) + R_2$
...
$Q_{n-1}(x) = (x - a)Q_n(x) + R_{n-1}$
$Q_n(x) = (x - a)\cdot 0 + R_n$

(observe que $Q_n(x)$ é do grau 0)

Multiplicando-se a segunda igualdade por $x - a$, a terceira por $(x - a)^2$, etc., e somando membro a membro, resulta: $P(x) = R_0 + R_1(x - a) + R_2(x - a)^2 + ... + R_n(x - a)n$, fórmula que permite desenvolver $P(x)$ em potências de $x - a$.

Ex.: Desenvolver $P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 2$.

	1	5	1	–2	1
2	7	15	28	57	
2	9	33	94		
2	11	55			
2	13				
2					

Logo: $P(x) = 57 + 94 \cdot (x - 2) + 55 \cdot (x - 2)^2 + 13 \cdot (x - 2)^3 + (x - 2)^4$

16.2 Utilização da fórmula de Taylor

Se na fórmula do item anterior:

$P(x) = R_0 + R_1(x - a) + R_2(x - a)^2 + ... + R_n(x - a)^n$

assumindo $x = a$, encontraremos $P(a) = R_0$; se derivarmos, obteremos:

$P'(x) = R_1 + 2 \cdot R_2(x - a) + 3 \cdot R_3(x - a)^2 + 4 \cdot R_4(x - a)3 + ... + n \cdot R_n(x - a)^{n-1}$

assumindo $x = a$, encontraremos $P'(a) = R_1$; derivando novamente, resulta:

$P''(x) = 2 \cdot R_2 + 2 \cdot 3 \cdot R_3(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot R_4(x - a)^2 + 4 \cdot 5 \cdot R_5(x - a)^3 + ... + (n - 1) \cdot n \cdot R_n(x - a)^{n-1}$

assumindo $x = a$, $P''(a) = 2 \cdot R_2$, analogamente:

$P'''(a) = 2 \cdot 3 \cdot R_3$, ... , $P^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n \cdot R_n$, ou seja:

$R_0 = P(a), R_1 = P'(a), R_2 = \frac{P''(a)}{2!}, R_3 = \frac{P^{(4)}(a)}{4!}, ..., R_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$, logo:

$P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$, que é a fórmula de Taylor para polinômios.

Ex.: Desenvolver $P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 2$.

$P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1 \rightarrow P(2) = 57$
$P'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 2x - 2 \rightarrow P'(2) = 94$
$P''(x) = 12x^2 + 30x + 2 \rightarrow P''(2) = 110$
$P'''(x) = 24x + 30 \rightarrow P'''(2) = 78$
$P^{(4)}(x) = 24 \rightarrow P^{(4)}(2) = 24$

Logo: $P(x) = 57 + 94\,(x - 2) + 55\,(x - 2)^2 + 13\,(x - 2)^3 + (x - 2)^4$.

17. Decomposição de uma função racional em uma soma de frações parciais

17.1 Frações parciais

Dá-se o nome de frações parciais a frações do tipo $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, em que $A, B, a, p, q \in \Re$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x^2 + px + q$ é um trinômio irredutível ($\Delta < 0$).

17.2 Função racional

É toda função f tal que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinômios e o denominador não é identicamente nulo.

17.3 Teorema

Toda função racional com grau do numerador menor do que o grau do denominador pode ser decomposta de maneira única numa soma de frações parciais. Se o grau do numerador for maior do que o grau do denominador, dividiremos os polinômios e, assim, obteremos um polinômio mais uma nova função racional que recai no caso anterior.

Ex.: $\dfrac{x^3-2}{x^2+x+1} = x-1+\dfrac{-1}{x^2+x+1}$

17.4 Método para decomposição de uma fração racional em uma soma de frações parciais

Deve-se fatorar ao máximo o denominador no conjunto dos números reais e, então, observar as seguintes regras:

I. A cada fator simples $(x-a)$ no denominador corresponde uma fração parcial do tipo $\dfrac{A}{x-a}$;

II. A cada fator repetido $(x-a)^n$ no denominador correspondem n frações parciais do tipo $\dfrac{A_1}{x-a}, \dfrac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \dfrac{A_n}{(x-a)^n}$;

III. a cada fator irredutível simples no denominador do tipo x^2+px+q corresponde uma fração parcial do tipo $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

IV. a cada fator irredutível repetido do tipo $(x^2+px+q)^n$ no denominador correspondem n frações parciais do tipo $\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}, \dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}, \ldots, \dfrac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$

Ex.:

$$\frac{3x^4-x^2+5}{x^2(x+1)^3(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}+\frac{Fx+G}{x^2+1}+\frac{Hx+I}{(x^2+1)^2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Mostre que se um polinômio P é uma função par, então, todos os coeficientes de expoentes ímpares são nulos. (Há um resultado similar para polinômios ímpares.)

Solução: Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Se P é função par, então $P(-x) \equiv P(x)$. Daí, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \equiv a_0 - a_1x + a_2x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n a_nx^n$. Igualando os coeficientes correspondentes, temos que $a_1 = -a_1, a_3 = -a_3, a_5 = -a_5, \ldots$, o que nos dá que todos os coeficientes de expoentes ímpares são nulos.

02 Qual é o resto de $P(x) = 4x^9 + 7x^8 + 4x^3 + 3$ por $x + 1$?

Solução: Pelo teorema do resto, o resto por $x - (-1)$ é igual a $P(-1) = -4+7-4+3 = 2$.

03 Determine todos os polinômios P tais que $P(x+1) - P(x) \equiv x^2$ e $P(0) = 0$.

Solução: Antes de qualquer coisa, determinaremos o grau de P (esta ideia é muito útil: olhar para o grau!). Para isso, observe que se P tem grau n, então $P(x+1) - P(x)$ possui grau $n - 1$ (tente provar isso usando binômio de Newton!). Assim, o polinômio com o qual estamos trabalhando possui grau 3. Sabendo que $P(0) = 0$, podemos escrever $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Então, teremos $A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) - Ax^3 - Bx^2 - Cx \equiv x^2$, ou seja, $3Ax^2 + (3A+2B)x + A + B + C \equiv x^2$. Comparando os coeficientes, teremos $3A = 1$, $3A + 2B = 0$ e $A + B + C = 0$. Ao resolver o sistema, chegamos em $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{2}$ e $C = \dfrac{1}{6}$. Portanto, o polinômio é $P(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{6}$.

Note que esse polinômio é útil para encontrar a soma dos quadrados dos n primeiros naturais.

04 Dado que $x = 2$ é uma raiz do polinômio $x^3 - x^2 - 4$, determine as outras.

Solução:

Como $x = 2$ é raiz, então $x - 2$ é um fator. Portanto, basta dividir $x^3 - x^2 - 4$ por $x - 2$. Isso pode ser feito utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini ou completando as parcelas: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2(x-2) + x(x-2) + 2(x-2) = (x-2)(x^2+x+2)$.

Por isso, as outras raízes vêm de $x^2 + x + 2$ e são iguais a $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$.

05 Considere o polinômio $P(x) = x^3 - mx^2 + 4x + 1$. Se P possui três raízes reais em P.G., determine o valor de m.

Solução:

Sejam $\dfrac{a}{q}$, a, aq as raízes. Usando as relações de Girard, temos que o produto das raízes é $a^3 = -1$ e, como a é real, temos que a $= -1$. Daí, como -1 é raiz, segue que $P(-1) = -1 - m - 4 + 1 = 0$, o que nos dá $m = -4$.

06 Resolva a equação recíproca $72x^4 - 6x^3 - 181x^2 - 6x + 72 = 0$.

Solução:

Esta é uma equação recíproca de primeira espécie (os coeficientes equidistantes do termo médio são iguais). A ideia para resolver esse tipo de equação é primeiro verificar através das propriedades se 1 ou –1 são raízes para simplificar a equação. Neste caso, não há como fazer uso destas propriedades. Feita esta etapa, a ideia é dividir a equação dada por x^2, obtendo $72\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) - 6\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - 181 = 0$. Agora, fazendo

$x + \frac{1}{x} = t$, temos que $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, donde nossa equação fica $72t^2 - 144 - 6t - 181 = 0 \Leftrightarrow 72t^2 - 6t - 325 = 0$, cujas raízes são $\frac{25}{12}$ e $\frac{13}{6}$. Desta forma, os possíveis valores para x são $-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$.

07 Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 729a + 81b + 9c + d = 0 \\ 1000a + 100b + 10c + d = 0 \end{cases}$$

Solução: Considere $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. O enunciado nos dá que $P(2) = P(3) = P(9) = P(10)$, ou seja, 2, 3, 9 e 10 são raízes de P. Como o polinômio P tem grau no máximo igual a 3, veja que #raízes(P) > grau(P). Portanto, P é o polinômio identicamente nulo e (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0).

08 Se a, b e c são as raízes do polinômio $x^3 - 2x^2 - 3x - 4$, determine o valor numérico de $\frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$.

Solução: A ideia é expressar a^5 em função de potências menores de a (e o mesmo para b e c).
Como a é raiz do polinômio, temos que $a^3 - 2a^2 - 3a - 4 = 0$; logo, $a^3 = 2a^2 + 3a + 4$. Multiplicando por a, temos $a^4 = 2a^3 + 3a^2 + 4a = 2(2a^2 + 3a + 4) + 3a^2 + 4a = 7a^2 + 10a + 8$.
Novamente, multiplicando por a: $a^5 = 7a^3 + 10a^2 + 8a = 7(2a^2 + 3a + 4) + 10a^2 + 8a = 24a^2 + 29a + 28$.
Usando os mesmos argumentos para b e c, chegamos a:

$$\begin{cases} a^5 = 24a^2 + 29a + 28 \\ b^5 = 24b^2 + 29b + 28 \\ c^5 = 24c^2 + 29c + 28 \end{cases}$$

Daí, $a^5 - b^5 = 24(a^2 - b^2) + 29(a - b)$ e $\frac{a^5 - b^5}{a - b} = 24(a + b) + 29$.

Portanto, temos que $\frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a} = [24(a + b) + 29] + [24(b + c) + 29] + [24(c + a) + 29] = 48(a + b + c) + 87$.

Podemos ver, pelas relações de Girard, que $a + b + c = 2$. Então, a expressão pedida é igual a $48 \cdot 2 + 87 = 183$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Escrever o trinômio $2x^4 - 2x^2 + 25$ sob a forma $(x^2 + m)^2 + (x^2 + n^2)$.

02 Determine a e b para $x^4 - 3x^2 - 2x + 1 \equiv (x^2 - ax + 1)(x^2 - b)$

03 Determine a e b, em $5x^2 - 19x + 18 = (x - 2)(x - 3) + a(x - 1)(x - 3) + b(x - 1)(x - 2)$

04 Dado o polinômio $ax(x + 10) + bx(x + 1) + cx(x + 4) + 5a - b + c$, determinar a, b e c de modo que o polinômio seja identicamente nulo.

05 Determine a relação entre a, b e c na identidade: $a(x + 5y - 3z) + b(2x - 2y + 6z) + c(7x + 11y + 3z) = 0$.

06 Um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $P(-2) = -2$, $P(1) = -3$, $P(2) = 2$, $P(-1) = 3$. Temos que:

(A) $b = 0$.
(B) $b = 1$.
(C) $b = 2$.
(D) $b = 3$.
(E) n.d.a.

07 Achar a condição necessária e suficiente para que a fração $\frac{ax + b}{cx + d}$ seja independente de x.

08 **(ITA-95)** A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

09 **(ITA-82)** Os valores de α, β, γ que tornam o polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ divisível por $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ satisfazem as desigualdades:

(A) $\alpha > \beta > \gamma$
(B) $\alpha > \gamma > \beta$
(C) $\beta > \alpha > \gamma$
(D) $\beta > \gamma > \alpha$
(E) $\gamma > \alpha > \beta$

10 **(ITA-91)** Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$. Podemos afirmar que:

(A) $S \subset]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,2[$
(B) $S \subset]-2,-1[\cup]0,1[\cup]3,4[$
(C) $S \subset [0,4]$
(D) $S \subset]-2,-1[\cup]1,2[\cup]3,4[$
(E) n.d.a.

11 **(ITA-96)** Considere o polinômio $P(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 + 12z^3 + 8z^2 + 16$**Ex.:** .

(A) Apenas uma raiz é real.
(B) Apenas duas raízes são reais e distintas.
(C) Apenas duas raízes são reais e iguais.
(D) Quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.
(E) Quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

12 O polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível por $(x + 1)^3$. Qual o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$?

13 **(CN)** Qual é o resto de $2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7$ por $x^2 + x + 1$?

14 Encontre o resto da divisão de $x^{2006} + 2x + 87$ por $x^3 - 1$.

15 **(ITA-97)** Sejam $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ polinômios na variável real x de graus n_1, n_2, n_3, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe–se que $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são divisíveis por $P_3(x)$. Seja $R(x)$ o resto da divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$. Considere as afirmações:

I. $R(x)$ é divisível por $P_3(x)$;
II. $P_1(x) - \frac{1}{2}P_2(x)$ é divisível por $P_3(x)$;
III. $P_1(x) \cdot R(x)$ é divisível por $(P_3(x))^2$.

Então:

(A) Apenas I e II são verdadeiras.
(B) Apenas II é verdadeira.
(C) Apenas I e III são verdadeiras.
(D) Todas as afirmações são verdadeiras.
(E) Todas as afirmações são falsas.

16 Sendo 8 e 6 os restos das divisões de $P(x)$ por $x - 5$ e $x - 3$, respectivamente, pede-se determinar o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 5)(x - 3)$.

17 **(ITA-87)** Considere $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio $A(x)$ pelo trinômio $B(x) = -x^2 + 5x - 6$. Admita que o grau de $A(x)$ é quatro e que os restos da divisão de $A(x)$ por $x + 1$ e $x - 2$ são, respectivamente, 3 e –1. Supondo também que $Q(x)$ seja divisível por $x + 1$, obtenha $R(x)$.

18 **(ITA-82)** Sabendo-se que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 2)$, podemos afirmar que:

(A) a e b têm sinais opostos e são inteiros.
(B) a e b têm o mesmo sinal e são inteiros.
(C) a e b têm sinais opostos e são racionais não inteiros.
(D) a e b têm o mesmo sinal e são racionais não inteiros.
(E) somente a é inteiro.

19 **(ITA-67)** Um polinômio $P(x)$ dividido por $x - 1$ dá resto 3. O quociente desta divisão é dividido por $x - 2$ dando resto 2. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ será?

(A) $3x + 2$.
(B) $3x - 1$.
(C) $2x + 1$.
(D) $4 - x$.
(E) n.d.a.

20 **(ITA-88)** Sejam $A(x)$ e $B(x)$ polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios $C(x)$ e $D(x)$ tais que a igualdade a seguir se verifica: $A(x) \cdot C(x) + B(x) \cdot D(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prove que $A(x)$ não é divisível por $B(x)$.

21 **(ITA-86)** Sejam a, b e c números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ por $x - 2$ e $x + 2$ são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:

(A) 1.
(B) 28/5.
(C) 37/5.
(D) 44/15.
(E) –3.

22 Determine o valor de k para que o polinômio $P(x)$ seja divisível por $D(x)$, nos casos abaixo:

(A) $P(x) = x^4 - 2kx^2 + 3x - 1$; $D(x) = x + 2$
(B) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + k$; $D(x) = 2x + 1$
(C) $P(x) = 4x^2 - 6x + 2k$; $D(x) = 2x - 1$
(D) $P(x) = 2x^3 - kx^2 + 7x - 6$; $D(x) = 2x + 3$

23 Calcule m sabendo que o resto da divisão de $4x^3 - 3x^2 + mx + p$ por $2x - 1$ é p.

24 Determine p e q para que $x^3 + 2x^2 + px + q$ seja divisível por $x^2 - 1$.

25 **(ITA-67)** O polinômio $P(x)$ dividido por $x + 2$ dá resto 1, por $x + 1$ dá resto –1 e por $x - 1$ dá resto 1. Qual o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 2)(x + 1)(x - 1)$?

(A) $x^2 - x + 1$.
(B) $x - 1$.
(C) $x^2 + x + 1$.
(D) $x^2 - x - 1$.
(E) n.d.a.

26 **(PUC)** Determine p e q tais que $x^4 + px^2 + q$ seja divisível por $x^2 + 2x + 5$.

27 Encontre todos os polinômios $P(x)$ tais que $P(2 - x) + 2P(x) = x^3 + 2x + 2$.

28 Qual é o maior valor de n para o qual o polinômio $(x - 1)^n$ divide o polinômio $x^{2006} - 1$?

29 O polinômio $P(x)$, quando dividido por $x^2 + 1$, deixa resto $x + 1$, quando dividido por $x + 1$ deixa resto 2 e é divisível por $x - 1$. Qual é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^4 - 1$?

30 Para a e b distintos, prove que $(a + b - x)^m + x^m - a^m - b^m$ é divisível por $(x - a)(x - b)$.

31 Forme uma equação do 3º grau de coeficientes reais, sabendo que uma raiz é 2, e a outra $2 + 3i$.

32 O polinômio $P(x)$ do 5º grau e de coeficientes reais admite 0, –1, i como raízes, sendo 0 raiz dupla. Determine $P(x)$ sabendo que $P(2) = 120$.

33 **(ITA-00)** Sendo 1 e $1 + 2i$ raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b, c são números reais, então:

(A) $b + c = 4$.
(B) $b + c = 3$.
(C) $b + c = 2$.
(D) $b + c = 1$.
(D) $b + c = 0$.

34 **(ITA-84)** Sabendo-se que $z_1 = i$, z_2, z_3 são as raízes da equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, onde a, b, c são reais não nulos, podemos afirmar que:

(A) z_1, z_2, z_3 são imaginários puros.
(B) z_2 e z_3 são reais.
(C) $z_1z_2z_3 = c$.
(D) $z_1 + z_2 + z_3 = a$.
(E) pelo menos uma das raízes é real.

35 **(ITA-88)** Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que $P(i) = 0$ e $Q(i) = 0$, então podemos afirmar que:

(A) $P(x)$ é divisível por $x + 1$.
(B) $P(x)$ é divisível por $x - 1$.
(C) $P(x) \cdot Q(x)$ é divisível por $x^4 + 2x^2 + 1$.
(D) $P(x)$ e $Q(x)$ são primos entre si.
(E) $Q(x)$ não é divisível por $P(x)$.

36 Achar as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, sabendo que estão em P.A.

37 Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, sabendo que uma das raízes é o dobro da outra.

38 Dada a equação $x^3 - 2ax^2 + 8x + a - 6 = 0$, determine o valor de a, sabendo que a soma das raízes é igual ao seu produto.

39 Calcule k e as raízes a, b, c da equação $x^3 - 7x + k = 0$ de sorte que a raiz c seja igual à metade de b.

40 **(ITA-91)** Os valores de m, de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:

(A) 0.
(B) $\sqrt{3}$ e 3.
(C) 1 e –1.
(D) 2 e –2.
(E) n.d.a.

41 **(ITA-94)** As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então, $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:

(A) 190.
(B) 191.
(C) 192.
(D) 193.
(E) 194.

42 **(ITA-81)** Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?

(A) $p^2 = rq$
(B) $2p + r = q$
(C) $3p^2 = r^2q$
(D) $p^3 = rq^3$
(E) $q^3 = rp^3$

43 **(ITA-78)** Se a, b, c são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde r é um número real, podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

(A) –60.
(B) $62 + r$.
(C) $62 + r^2$.
(D) $62 + r^3$.
(E) $62 - r$.

44 **(ITA-87)** Multiplicando-se por 2 as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$, vamos obter raízes da seguinte equação:

(A) $2y^3 - 6y^2 + 6y - 4 = 0$.
(B) $y^3 - 4y^2 + 8y - 8 = 0$.
(C) $8y^3 - 8y^2 + 4y - 1 = 0$.
(D) $y^3 - 8y^2 + 8y + 8 = 0$.
(E) $4y^3 - 4y^2 - 4y - 8 = 0$.

45 Determine p e q na equação $20x^3 - 8px^2 + 5px + 5q = 0$, sabendo que duas de suas raízes são iguais e que a terceira raiz é a soma das duas primeiras.

46 Resolver a equação do terceiro grau $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é igual à soma das duas outras.

47 Resolver a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que possui duas raízes cuja razão é 3/2.

48 Dada a equação $x^3 - 7x + \lambda = 0$, determinar λ de modo que uma das raízes seja o dobro da outra. Resolver a equação.

49 Calcule os coeficientes p e q da equação $x^2 + px + q = 0$, sabendo-se que suas raízes aumentadas de 1 são as raízes de $x^2 - p^2x + pq = 0$.

50 Determine a e b tais que $P(x) = (ax + b)(x^5 + 1) - (5x + 1)$ é divisível por $(x^2 + 1)$.

51 Resolva a equação $2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2 = 0$.

52 **(ITA-94)** A identidade $\dfrac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo x real diferente de –1. Então, $a + b + c$ é igual a:

(A) 5.
(B) 4.
(C) 3.
(D) 2.
(E) 1.

53 **(ITA-77)** Se $\dfrac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} \equiv \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$, onde a, b, c são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então:

(A) $A = -2$; $B = -1$; $C = 0$.
(B) $A = 2$; $B = 4$; $C = 1$.
(C) $A = -2$; $B = -1$; $C = 0$.
(D) $A = 5$; $B = 2$; $C = 1$.
(E) n.d.a.

54 Decompor as frações abaixo, numa soma de frações parciais:

(A) $\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$.
(B) $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$.
(C) $\dfrac{4}{x^3+4x}$.
(D) $\dfrac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}$.
(E) $\dfrac{3x^3-7x^2+2x-7}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$.

55 **(ITA-91)** Considere as afirmações abaixo:

I. A equação $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ só possui raízes reais;
II. Toda equação recíproca admite um número par de raízes;
III. As raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ são exatamente o dobro das raízes da equação $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Então:

(A) apenas I é verdadeira.
(B) apenas II é falsa.
(C) apenas III é verdadeira.
(D) todas são verdadeiras.
(E) n.d.a.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 **(IME)** Determine os polinômios do 4º grau tais que $P(x) = P(1 - x)$.

02 **(ITA-98 e AFA-01)** Seja $P(x)$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $P(x)$ por $x - 2$ obtém-se um quociente $Q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $P(x)$ por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente $H(x)$ e resto $8x - 5$. Sabe–se que $Q(0) = 13$ e $Q(1) = 26$. Então, $H(2) + H(3)$ é igual a:

(A) 16.
(B) zero.
(C) –47.
(D) –28.
(E) 1.

03 **(ITA-99)** Seja $P(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $P(x) = P(x + 2) - x^2 - 2$ para todo x real. Se –2 é uma raiz de $P(x)$, então o produto de todas as raízes de $P(x)$ é:

(A) 36.
(B) 18.
(C) –36.
(D) –18.
(E) 1.

04 **(ITA-91)** Na divisão de $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por $x - 1$, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e o resto –6. Sabe-se que (b_4, b_3, b_2, b_1) é uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$. Podemos afirmar:

(A) $b_3 + a_3 = 10$.
(B) $b_4 + a_4 = 6$.
(C) $b_3 + b_0 = 12$.
(D) $b_4 + b_1 = 16$.
(E) n.d.a.

05 **(ITA-77)** Se $P(x)$ é um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições $1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$, então temos:

(A) $P(0) = 4$.
(B) $P(0) = 3$.
(C) $P(0) = 9$.
(D) $P(0) = 2$.
(E) n.d.a.

06 Um polinômio $P(x)$ do quarto grau é divisível por sua derivada segunda $P''(x) = x^2 - 4$. Determine $P(x)$.

07 Dadas as equações:

I. $x^4 - 16x^3 + 89x^2 - 206x + 168 = 0$
II. $x^4 - 16x^3 + 91x^2 - 216x + 180 = 0$
III. $x^4 - mx^3 + nx^2 - 462x + 432 = 0$

determinar:

a. as raízes comuns das equações I e II;
b. os valores de m e n, sabendo que III admite as raízes determinadas no item (a).

08 **(ITA-97)** Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 números reais, formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente, com $a_1 \neq 0$. Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então:

(A) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$.
(B) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
(C) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.
(D) $x_1x_2x_3 = 8$.
(E) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 5$.

09 **(ITA-95)** Sabendo que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

(A) 17.
(B) 19.
(C) 21.
(D) 23.
(E) 35.

10 **(ITA-94)** Seja $P(x)$ um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e i como raízes. Se $P(1)P(-1) < 0$, então o número de raízes reais de $P(x)$ pertencentes ao intervalo $]-1, 1[$ é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

11 Determine a e b tais que as equações $x^3 + ax^2 + 11x + 6 = 0$ e $x^3 + bx^2 + 14x + 8 = 0$ possuam duas raízes em comum.

12 **(ITA-93)** Considere a equação de coeficientes reais $x^5 + mx^4 + 2\frac{P}{m}x^3 - 316x^2 + 688x + P = 0$, $m \neq 0$, para a qual $1 + 3i$ é raiz. Sabendo-se que a equação admite mais de uma raiz real e que suas raízes reais formam uma progressão geométrica de razão inteira q cujo produto é igual a 64, podemos afirmar que $\frac{P}{m}$ é:

(A) 20.
(B) 30.
(C) 40.
(D) 120.
(E) 160.

13 **(ITA-90)** Seja $P(x) = 16x^5 - 78x^4 + \ldots + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação $P(x) = 0$ admite mais do que uma raiz real e ainda, $a + bi$ é uma raiz complexa desta equação com $ab \neq 0$. Sabendo–se que $\frac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de $P(x) = 0$ e que a soma destas raízes reais vale $\frac{7}{8}$, enquanto que o produto é $\frac{1}{6}$, o valor de α é:

(A) 32.
(B) 56.
(C) 71.
(D) 11.
(E) 0.

14 Calcular as raízes da equação $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$, sabendo que o produto de duas das suas raízes é igual ao produto das outras duas raízes.

15 Determinar m de modo que a equação $x^4 - mx^2 + 8x - 3 = 0$ tenha uma raiz tripla e calcular as raízes dessa equação.

16 Resolver a equação $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é –1.

17 Mostre que toda equação polinomial de grau ímpar (de coeficientes reais) possui uma raiz real.

18 Considere a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. Mostre que se essa equação possui uma raiz racional p/q (na forma irredutível), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n (Obs: Este é um método poderosíssimo, para achar possíveis raízes racionais de equações algébricas). Conclua que se $a_n = 1$, então qualquer raiz racional da equação é inteira.

19 Para m e n naturais, mostre que se $\sqrt[n]{m}$ não é inteiro, então é irracional. (Sugestão: Use o exercício anterior.)

20 Resolva nos reais as seguintes equações algébricas, com o auxílio do exercício 18, nível 2:

a. $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 32x - 16 = 0$
b. $20x^3 - 27x^2 + 4x + 3 = 0$

21 **(ITA-00)** Sendo I um intervalo de números reais com extremidades a e b com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$.
(B) $\frac{3}{2}$.
(C) $\frac{7}{2}$.
(D) $\frac{11}{6}$.
(E) $\frac{7}{6}$.

22 **(ITA-77)** Seja R o corpo dos números reais. Em relação à equação $5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

(A) não tem solução inteira.
(B) tem somente uma solução.
(C) tem somente duas soluções distintas.
(D) tem três soluções distintas.
(E) n.d.a.

23 Sejam a e b constantes reais. Sobre a equação $x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$, podemos afirmar que:

(A) não possui raiz real se $a < b < -3$.
(B) não possui raiz real se $a > b > 3$.
(C) todas as raízes são reais se $|a| \geq 2$ e $|b| \geq 2$.
(D) possui pelo menos uma raiz real se $-1 < a \leq b < 1$.
(E) n.d.a.

24 **(IME)**
a. Mostre que, se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$, então existe um polinômio $G(x)$ do 2º grau , tal que $P(x) = x^2 \cdot G(x + x^{-1})$.
b. Determine todas as raízes do polinômio $P(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$

25 **(ITA 97)** Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$. Sobre os elementos de S, podemos afirmar que:

(A) todos são números reais.
(B) 4 são números reais positivos.
(C) 4 não são números reais.
(D) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.
(E) 3 são números reais negativos.

26 **(ITA-99)** A equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2ª espécie e admite i como raiz. Se $P(2) = -\frac{105}{8}$ e $P(-2) = \frac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de $P(x)$ é igual a:

(A) 10.
(B) 8.
(C) 6.
(D) 2.
(E) 1.

27 **(ITA-93)** Sabendo-se que a equação de coeficientes reais $x^6 - (a + b + c)x^5 + 6x^4 + (a - 2b)x^3 - 3cx^2 + 6x - 1 = 0$ é recíproca de segunda espécie, então o número de raízes reais desta equação é:

(A) 0.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 6.

28 **(ITA-85)** Como $ax^4 + bx^3 + 5x + 3 = 0$ é recíproca e tem o 1 como raiz, o produto das raízes reais desta equação é:

(A) 2.
(B) –1.
(C) 1.
(D) 3.
(E) 4.

29 Determinar a relação que deve existir entre os coeficientes da equação $x^3 + px + q = 0$, para que tenha duas raízes iguais.

30 Calcular m de modo que a equação $x^3 + mx - 2 = 0$ tenha uma raiz dupla e calcular as raízes desta equação.

31 A equação $x^3 - 11x^2 + 29x - 7 = 0$ possui uma raiz da forma $u + \sqrt{3}$. Determine todas as suas raízes.

32 Pode um polinômio inteiro em x ser nulo para todo valor de x no intervalo $[a, b]$ exceto num ponto c desse intervalo?

33 Considere os polinômios $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ tais que $P(2) = P(3) = P(4) = P(r) = 0$, onde $r \notin \{2, 3, 4\}$. Se não há outras raízes, temos, necessariamente, que:

(A) $a_0 > 4$.
(B) $a_0 < 0$.
(C) $a_0 \neq 0$.
(D) $a_0 > 0$.
(E) n.d.a.

34 Seja P um polinômio tal que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para todo x real, onde a, b, c, d são reais. Se $P(x) = 0$ para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que:

(A) $P(6) = a + 1$.
(B) $P(6) = a + 2$.
(C) $P(6) = a + 3$.
(D) $P(6) = d$.
(E) n.d.a.

35 **(IME)** Mostre que se a equação $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais e distintas, então $p < 0$.

36 **(IME)** Dada a equação $x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = 0$, determine a, b, c, d, sabendo que ela possui uma raiz dupla da forma $a + b\sqrt{3}$ (a, b, c, d racionais).

37 Mostre que os polinômios $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 6$ e $Q(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ possuem um par de raízes complexas comuns e determine-as.

38 Desenvolva $P(x) = 2x^5 - 13x^2 + 4$ em potências de $1 - x$.

39 Prove que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ divide $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$.

40 Resolva a equação:

$$4z^{11} + 4z^{10} - 21z^9 - 21z^8 + 17z^7 + 17z^6 + 17z^5 + 17z^4 - 21z^3 - 21z^2 + 4z + 4 = 0.$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 **(Putnam)** Determine todos os polinômios $P(x)$ tais que $P(1)=1$ e $P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$ para todo x real.

02 Determinar um polinômio inteiro em x, que verifique a identidade: $P(x+2) - 2P(x+1) + P(x) \equiv x$.

03 Considere que as raízes m, n e p da equação $x^3 + ax + b = 0$ sejam racionais. Prove que as raízes de $mx^2 + nx + p = 0$ também são racionais.

04 Seja f um polinômio mônico (ou seja, de coeficiente líder igual a 1) e de coeficientes inteiros tal que existem 4 inteiros distintos a, b, c e d tais que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 12$. Prove que não existe k inteiro tal que $f(k) = 25$.

05

a. Transforme, por uma substituição de variável, uma equação geral do terceiro grau numa equação do terceiro grau na qual o coeficiente em x^2 é igual a zero.

b. Resolva a equação $x^3 + px + q = 0$. (Sugestão: Faça $x = a + b$ e tente calcular a e b.)

06 **(IME–adaptada)** Seja $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros. Mostre que se a_0 e $P(1)$ são ímpares, então $P(x)$ não possui raízes inteiras.

07 Sejam A, B e C as raízes da equação $x(x-2)(3x-7) = 2$, tais que $A \le B \le C$.

a. Mostre que $A \in (0,1)$, $B \in (1,2)$ e $C \in (2,3)$.

b. Calcule $\arctan A + \arctan B + \arctan C$.

08 Qual a condição para que a equação de coeficientes reais $x^3 + px + q = 0$ admita raízes complexas de módulo igual a α?

09 Existe algum polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros tal que $P(3) = 4$ e $P(9) = 9$?

10 **(USAMO)** Sejam a, b e c inteiros distintos e P um polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que as condições $P(a) = b$, $P(b) = c$ e $P(c) = a$ não podem ser satisfeitas simultaneamente.

11 **(ITA-98)** Seja a um número real tal que o polinômio $P(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$ admite apenas raízes reais. Então:

(A) $a \in [2, +\infty[$.
(B) $a \in [-1, 1]$.
(C) $a \in [-\infty, -7]$.
(D) $a \in [-2, -1[$.
(E) $a \in]1, 2[$.

12 **(IME-CG)** Mostre que o polinômio $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ não possui raízes múltiplas.

13 **(IME)** Para que valores de p a equação $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

14 Determine o maior valor de k inteiro para o qual $(x-1)^k$ divide $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$.

15 Seja P um polinômio de grau n de maneira que $P(k) = \frac{k}{k+1}$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Encontre $P(n+1)$.

16 Se P é um polinômio recíproco de grau ímpar, prove que -1 é raiz de P e, então, que $P(x) = (x+1)Q(x)$, onde Q é um polinômio recíproco de grau par.

17 Para quais inteiros a o polinômio $x^2 - x + a$ é um fator de $x^{13} + x + 90$?

18 Determine todos os polinômios P não identicamente nulos tais que $P(3x-2) = 81P(x)$ para todo x real. (Sugestão: Primeiramente, determine o grau de P.)

19 **(OMERJ)** Encontre todos os possíveis polinômios não constantes P tais que, para todo x real, vale a relação $P(2x)P(-2x)P(x^2) = P(-4x^2)(x^2-4)^2$.

20 Sejam a e b inteiros distintos. Mostre que o polinômio $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ não pode ser escrito como produto de dois polinômios de coeficientes inteiros e de grau menor que 4.

RASCUNHO

RASCUNHO

1. Introdução

Diversos são os exemplos do dia a dia nos quais temos que ler dados em formato de tabela, onde as informações são distribuídas através de linhas e colunas. A primeira parte desse capítulo trata dessas tabelas, as quais chamaremos de matrizes.

Uma vez definido o conjunto das matrizes, definiremos operações com os seus elementos. Estudaremos as operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação entre matrizes. Além disso, trataremos o conceito de matriz inversa, mostrando exemplos de matrizes inversíveis e não inversíveis.

A segunda parte do capítulo aborda os determinantes. Veremos que toda matriz quadrada está associada a um número escalar, e veremos como calcular esse número independente do tamanho da matriz.

Para isso, definiremos de forma algébrica o determinante de uma matriz quadrada, mostrando como a definição se aplica a matrizes 2×2 e 3×3. Depois veremos as principais propriedades que derivam da definição e os teoremas de Jacobi e LaPlace, muito necessários para o cálculo de matrizes $n\times n$.

É através do determinante que pode-se determinar se uma matriz A é inversível ou não.

2. Matrizes

2.1 Definições e conceitos iniciais

Uma matriz $m\times n$ (lê-se m por n) é uma tabela de elementos distribuídos em m linhas e n colunas. As dimensões de uma matriz definem a sua ordem, ou seja, nesse caso, podemos dizer que ela é de ordem m por n.

Normalmente representamos uma matriz por letra maiúscula, colocando o número de linhas e de colunas como índices (o número de linhas sempre vem primeiro). Exemplo: A_{3x2} é uma matriz com três linhas e duas colunas.

Chamamos ainda de a_{ij} o elemento da linha i, e da coluna j da matriz. Nesse caso, também podemos representar uma matriz $m\times n$ por $(a_{ij})_{m\times n}$.

Ex.:

$$A_{3x2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=(a_{ij})_{3x2}$$

Obs.: Os elementos de uma matriz podem estar entre parênteses ou colchetes.

De modo geral, uma matriz fica bem definida se soubermos determinar cada a_{ij} em função de i e j, seja por meio de uma expressão ou por meio de uma sentença.

Ex.:

I. Seja $A = (a_{ij})_{2x2}$ com $a_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot i\cdot j$. Como ficaria essa matriz?

$a_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot 1 = 1$; $\quad a_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot 2 = -2$;

$a_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 2\cdot 1 = -2$; $\quad a_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 2\cdot 2 = 4$;

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

II. Considerando $A = (a_{ij})_{3\times3}$, tal que $a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ se } i>j \\ 0, \text{ se } i=j \\ -1, \text{ se } i<j \end{cases}$ teremos:

$$A_{3x3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dizemos ainda que duas matrizes de mesma ordem são iguais se os elementos correspondentes (elementos que ocupam a mesma posição nas matrizes) são todos iguais.

Uma vez definida uma matriz de ordem m por n, chamaremos de $M_{m\times n}(R)$ o conjunto de todas as matrizes com essa ordem e entradas (elementos) reais e de $M_{m\times n}$ (C) as matrizes com entradas complexas.

2.2 Operações algébricas

Adição

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $m\times n$, definimos a soma sendo uma matriz $m\times n$ obtida através da soma dos termos correspondentes, ou seja, se $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$, temos: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

Ex.: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Multiplicação por escalar

Dada uma matriz A e um escalar α, chamaremos de αA uma matriz de mesma ordem que A obtida pelo produto de todos os elementos de A por α, ou seja, se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, têm-se $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$.

Ex.: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Obs.: Chamaremos o produto $(-1)\cdot A$ de $-A$, uma vez que esta matriz é o inverso aditivo de A. Assim, definimos a diferença de matrizes de mesma ordem por: $A - B = A + (-B)$

Propriedades

Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem; α e β escalares, têm-se:

I. (Comutativa da adição) $A + B = B + A$;

II. (Associativa da adição) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

III. (Existe elemento neutro da adição) Seja $0_{m\times n}$ uma matriz com todas as entradas nulas (chamada de matriz nula), têm-se: $\forall A$; $0 + A = A + 0 = A$;

IV. (Existe inverso aditivo) $\forall A$, $\exists(-A)$ | $A + (-A) = (-A) + A = 0$;

V. (Distributiva por escalar em relação a matrizes): $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

VI. (Distributiva por matriz em relação a escalares): $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

VII. (Associativa da multiplicação por escalar): $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

VIII. (Existe elemento neutro na multiplicação por escalar): $1\cdot A = A$.

Todas as propriedades são consequências diretas da definição de soma e multiplicação por escalar.

2.3 Produto de matrizes

Definimos o produto escalar (ou produto interno) de dois vetores pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes, ou seja, se u, v $\in R^n$ tem-se:

$$u = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n) \text{ e } v = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n) \Rightarrow$$

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + ... + u_nv_n.$$

Agora pense em uma matriz $m \times n$ sendo um conjunto de m vetores de R^n, ou seja, considere que cada linha da matriz é um vetor de dimensão n. Nesse caso, como ficaria o produto da matriz $A_{m \times n}$ por um vetor de dimensão n?

Iremos considerar esse vetor como um vetor coluna, ou seja, uma matriz de dimensão $n \times 1$, assim queremos calcular:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = ?$$

Uma vez que cada linha da matriz pode ser vista como um vetor de dimensão n, podemos calcular o produto escalar de cada linha pelo vetor $u = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$, de modo que teremos m produtos diferentes. Esses resultados formarão um vetor de dimensão m, assim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

em que:

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + \dots + a_{in}u_n \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

A vantagem de definirmos o produto de matrizes por um vetor dessa forma é poder tratar sistemas lineares como produto de matrizes por vetores.

Finalmente, se quisermos multiplicar duas matrizes, podemos pensar que ambas são conjuntos de vetores, assim como fizemos no caso anterior.

Ao multiplicar a matriz A pela matriz B, multiplicaremos A por cada um dos vetores que formam B; logo, temos a restrição que o número de colunas de A deve ser o mesmo número de linhas de B (para existir os produtos escalares).

Resumindo, para obter a primeira coluna do resultado, multiplica-se A pela primeira coluna de B (como anteriormente); para obter a 2ª coluna, multiplica-se A pela 2ª coluna de B, e assim sucessivamente. Deste modo, a matriz AB terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

De modo geral, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times p$ então $AB = C$ tal que $C = (c_{ij})$ é uma matriz $m \times p$ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$, ou seja, o termo da linha i, coluna j de C é obtido pelo produto escalar da linha i de A com a coluna j de B.

Obs.: Um dos motivos do produto das matrizes ser definido dessa forma está associado à resolução de sistemas lineares através de matrizes.

Vejamos o caso 2×2.

Sejam os sistemas: $\begin{cases} ex_1 + fx_2 = y_1 \\ gx_1 + hx_2 = y_2 \end{cases}$, $\begin{cases} ay_1 + by_2 = z_1 \\ cy_1 + dy_2 = z_2 \end{cases}$

que podem ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} (BX = Y), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} (AY = Z)$$

Como representar z_1 e z_2 em função de x_1 e x_2?

$$\begin{cases} a(ex_1 + fx_2) + b(gx_1 + hx_2) = z_1 \\ c(ex_1 + fx_2) + d(gx_1 + hx_2) = z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ae + bg)x_1 + (af + bh)x_2 = z_1 \\ (ce + dg)x_1 + (cf + dh)x_2 = z_2 \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} (CX = Z)$$

Porém, $AX = Y$ e $BY = Z$, em que $B \cdot (AX) = Z$. Seria interessante então definir o produto BA de modo que $B \cdot (AX) = (BA) \cdot X = Z = CX$; para isso devemos ter $BA = C$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

O que é coerente com a definição mostrada anteriormente.

Exs.:

1.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 4 \\ 3 \times 1 + 4 \times 2 & 3 \times 3 + 4 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}.$$

2. $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$

$c_{11} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 12$, $c_{21} = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 10$,
$c_{12} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 38$, $c_{22} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 15$,
$c_{13} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 7$, $c_{23} = 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -9$,

Logo: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 38 & 7 \\ 10 & 15 & -9 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

Propriedades

Sejam A, B e C matrizes; α e β escalares; tem-se:

I. $A_{m\times p}; B_{p\times n} \to (\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta(A \cdot B)$
II. (associativa)$A_{m\times p}; B_{p\times q}; C_{q\times n} \to A(BC) = (AB)C$
III. (distributiva pela esquerda)$A_{m\times p}; B_{p\times n}; C_{p\times n} \to A(B + C) = AB + AC$
IV. (distributiva pela direita)$A_{p\times n}; B_{m\times p}; C_{m\times p} \to (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Atenção: Dadas duas matrizes quaisquer, pode-se ter $AB \neq BA$ (não vale à comutativa).
Podemos ter um produto existindo e o outro não; ambos existindo, porém, com ordens diferentes; ou os dois com mesma dimensão, mas com entradas diferentes.

A demonstração dessas propriedades foge ao escopo do assunto.

2.4 Matriz transposta

Dada uma matriz de ordem $m\times n$, definimos sua transposta sendo uma matriz de ordem $n\times m$ obtida pela inversão de papéis das linhas e colunas, ou seja, as linhas passam a ser colunas, assim como as colunas passam a ser linhas.

Assim, se $A_{m\times n} = (a_{ij})$, tem-se $A^T = (a_{ji})$.

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3} \to A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

Propriedades

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrizes e α um escalar, tem-se:

I. $(A^t)^t = A$
II. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
III. $A_{m\times n}; B_{m\times n} \to (A + B)^t = A^t + B^t$
IV. $A_{m\times n}; B_{n\times p} \to (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Atenção: Na propriedade (IV) é importante lembrar a ordem, uma vez que, $B^t A^t \neq A^t B^t$.
Dem (IV): Primeiro, veja que as dimensões são coerentes, já que a ordem de $(AB)^t$ e de $B^t A^t$ é $p\times m$.

Basta então provar que os elementos correspondentes são iguais. Considere o elemento da linha i, coluna j de $(AB)^t$. Este elemento pertence à linha j, coluna i de AB; logo, é o produto da linha j de A pela coluna i de B.

Porém, a coluna i de B é a linha i de B^t, e a linha j de A é a coluna j de A^t, donde estamos calculando o produto da linha i de B^t com a coluna j de A^t, que é o elemento da linha i, coluna j de $B^t A^t$.

2.5 Matrizes notáveis e seus elementos

Matriz quadrada

Se uma matriz tem o mesmo número de linhas e de colunas, ela é denominada matriz quadrada ($m = n$). Dizemos que a matriz tem n^2 elementos ou que é de ordem n. Nesse caso, é comum colocar apenas uma dimensão da matriz como índice.

Em toda matriz quadrada de ordem n, tem-se:

I. Diagonal Principal: diagonal formada pelos elementos a_{ij}, com $i = j$. Chamamos os elementos dessa diagonal de elementos principais.
II. Diagonal Secundária: diagonal formada pelos elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$. Chamamos os elementos dessa diagonal de elementos secundários.
III. Elementos Conjugados: são aqueles que apresentam posições simétricas em relação à diagonal principal. Os elementos principais são autoconjugados.

Ex.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

Matriz nula

Matriz em que todos os elementos são nulos.

Ex.:

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Matriz quadrada cujos elementos de uma das bandas da diagonal principal são todos nulos.

Ex.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Obs.: Se os zeros estão na banda superior, dizemos que a matriz é triangular superior, se os zeros estão na banda inferior, dizemos que a matriz é triangular inferior.

Matriz diagonal

Matriz quadrada cujos elementos das duas bandas da diagonal principal são todos nulos.

Ex.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Matriz diagonal na qual os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Se a matriz for de ordem n, escreve-se I_n.

Ex.:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica

Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i e j. Isso é equivalente a $A^t = A$.

Ex.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz hemissimétrica (ou antissimétrica)

Uma matriz A é dita hemissimétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i e j. Isso é equivalente a $A^t = -A$. Veja que, fazendo $i = j$ em $a_{ij} = a_{ji}$, obtemos $a_{ii} = 0$, ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser nulos.

Ex.:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Traço

Seja A uma matriz quadrada; chamamos de traço a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja, se $A_n = (a_{ij})_{n\times n}$, então $trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

Propriedades

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, tem-se:

I. $tr(A) = tr(A^t)$
II. $tr(k \cdot A) = k \cdot tr(A)$, em que k é escalar.
III. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
IV. $tr(AB) = tr(BA)$

As três primeiras propriedades são consequências diretas da definição de traço. Analisemos a propriedade (IV):

Vejamos a diagonal principal de AB:

$$\begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \ldots + a_{2n}b_{n2} \\ c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + \ldots + a_{3n}b_{n3} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_{nn} = a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \end{cases}$$

A soma de todas as linhas é o traço de AB, porém, na direita podemos somar por linhas ou por colunas. Repare que a soma dos elementos da primeira coluna pode ser vista como o produto da primeira linha de B com a primeira coluna de A, ou seja, o primeiro elemento da diagonal principal de BA, assim como as demais colunas, logo, essa soma também é o traço de BA.

Obs.: Na propriedade (IV), as matrizes não precisam ser quadradas, basta que os produtos AB e BA o sejam.

2.7 Matriz inversa

Em qualquer conjunto definimos o inverso por uma operação como sendo o elemento que aplicado àquela operação é levado no elemento neutro. Por exemplo, no conjunto dos números reais, o inverso multiplicativo de x é $\frac{1}{x}(x \uparrow 0)$, uma vez que o produto $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (elemento neutro da multiplicação nos reais).

Considere $M_n(C)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas. Repare que esse conjunto possui elemento neutro para operação de multiplicação, uma vez que $AI = IA = A$, em que $I = I_n$ é a matriz identidade. Deste modo, I é considerado o elemento neutro da multiplicação.

Pelo que foi exposto acima, dizemos que B é a matriz inversa de A se $AB = BA = I_n$. Nesse caso, pode-se representar a matriz inversa por A^{-1}.

É importante lembrar que nem toda matriz possui inversa. Por exemplo, tentemos achar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Nesse caso, queremos determinar uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases}$$

Absurdo!

Mais a frente, quando for introduzido o conceito de determinantes, será visto um jeito de caracterizarmos as matrizes que possuem inversa.

Quando uma matriz possui inversa, dizemos que esta é inversível, regular, ou não singular. Caso não possua inversa, dizemos que ela é não inversível ou singular.

Teorema: Seja A uma matriz quadrada de ordem n; então a inversa de A, caso exista, é única.
Dem.: sejam B e C inversas de A, tem-se:
$B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$

Propriedades

Sejam A e B matrizes quadradas não singulares de ordem n, e $\alpha \neq 0$ um escalar, tem-se:

I. $(A^{-1})^{-1} = A$
II. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
III. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
IV. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Atenção: Na propriedade (IV) é importante lembrar a ordem, uma vez que $B^{-1} \cdot A^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$.

As propriedades (I), (III) e (IV) são consequências diretas da definição de matriz inversa. Vejamos a propriedade (II):

Para termos $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ devemos ter $A^t \cdot (A^{-1})^t = I$. De fato isso é verdade, pela propriedade (IV) da transposta ($(XY)^t = Y^t \cdot X^t$); assim:

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I$$

3. Determinantes

3.1 Definições e conceitos iniciais

Motivação

Tentemos resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a_{22}, a segunda por a_{12} e subtraindo, tem-se: $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Usando a mesma ideia para obter x_2, encontra-se $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$ de modo que se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, o sistema terá solução.

Vejamos agora um sistema 3×3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ao resolver o sistema encontram-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})\, x_1 = k_1 \\ (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})\, x_2 = k_2 \\ (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})\, x_3 = k_3 \end{cases}$$

em que k_1, k_2 e k_3 são constantes.

Deste modo, se $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \neq 0$, o sistema terá solução.

Repare que em ambos os casos o denominador depende apenas dos coeficientes do sistema, e uma vez que já vimos que um sistema pode ser escrito na forma $AX = B$, estamos dizendo que o sistema tem solução de acordo com uma relação que envolve as entradas da matriz A.

Devemos, então, tentar enxergar como essa relação aparece em matrizes maiores, e para isso devemos conjecturar algo através dos casos pequenos.

Nos casos 2×2 e 3×3 temos a soma de todos os produtos possíveis com os elementos da matriz (existindo, em cada parcela, exatamente um termo de cada linha e de cada coluna), tendo metade deles sinal positivo e metade deles sinal negativo.

O sinal de cada uma das parcelas parece estar associado à posição dos elementos que está “pegando” na matriz, ou seja, a permutação de seus elementos.

Associaremos então cada matriz a um escalar, do mesmo modo que ocorreu nos casos particulares, e veremos no próximo assunto que de fato isso garante a existência de solução para sistemas lineares.

A função que fará essa associação é conhecida como determinante.

Permutações e inversões

Uma permutação dos elementos de uma sequência é um rearranjo de seus elementos em alguma ordem sem omissões ou repetições. Deste modo, um conjunto de n elementos possui $n!$ permutações simples.

Consideremos uma delas como referência, a qual denominaremos Permutação Fundamental (ou Principal). Neste caso, dizemos que dois elementos de uma permutação formam uma inversão quando estão dispostos em ordem diferente daquela em que estão na Permutação Fundamental.

Ex.: Quantas inversões apresenta a permutação 312 em relação a 123 tomada como principal?

$312 \to 132 \to 123$; 2 inversões.

Ex.: Quantas inversões apresenta a permutação *cadb* em relação a *abcd* tomada como principal?

cadb $\to$ *acdb* $\to$ *acbd* $\to$ *abcd*; 3 inversões.

Obs.: A permutação fundamental não apresenta inversões.

Chamamos ainda de Permutação Inversa aquela que possui todos os elementos em ordem inversa da ordem em que figuram na Permutação Fundamental.

Nesse caso, o número de inversões será máximo, uma vez que todos os pares de elementos formam uma inversão e será dado por $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Classes de uma permutação

Dizemos que uma permutação é de classe par (ímpar) se o número de inversões em relação à principal for par (ímpar). Nesse caso, como a Permutação Principal apresenta zero inversão ela é de classe par.

Teorema 1: Uma permutação muda de classe quando se troca a posição de dois elementos consecutivos.

Dem.: De fato, considere um conjunto A com n elementos, e uma Permutação Fundamental de seus elementos.

Seja p uma permutação simples com k inversões: $p = (a_1, a_2, \ldots a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$; troquemos os elementos a_i e a_{i+1}. Essa troca não altera a posição desses dois elementos em relação aos demais.

Se os dois formavam uma inversão em p, com essa troca deixaram de formar, tendo a nova permutação $k - 1$ inversões. Se os dois não formavam uma inversão em p, agora passaram a formar, donde temos $k + 1$ inversões. Em ambos os casos mudamos a paridade das inversões.

Teorema 2: O número de permutações de classe par de um conjunto de n elementos, $n > 1$, é igual ao número de permutações de classe ímpar.

Dem.: Considere P_0 o conjunto das permutações de classe par e P_1 o conjunto das permutações de classe ímpar.

Seja f: $P_0 \to P_1$ a função que leva uma permutação de classe par em uma de classe ímpar através da inversão das posições dos dois primeiros elementos (essa troca muda a classe pelo Teorema 1).

Veja que f é uma bijeção, uma vez que toda permutação ímpar pode ser obtida por uma par através dessa troca (sobrejetora) e permutações pares diferentes irão gerar permutações ímpares diferentes (injetora). Logo, P_0 e P_1 têm a mesma quantidade de elementos.

Teorema 3: (Teorema de Bezout): Uma permutação muda de classe se trocarmos dois quaisquer de seus elementos.

Dem.: De fato, considere um conjunto A com n elementos, e uma Permutação Fundamental de seus elementos.

Seja p uma permutação simples com k inversões: $p = (a_1, a_2, \ldots a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ troquemos os elementos a_i e a_j. Essa troca não altera a posição desses elementos em relação aos que não estão entre eles.

Entre os elementos a_i e a_j temos $j - i$ elementos. Se k_i e k_j são, respectivamente, os números de inversões, antes da troca, que a_i e a_j fazem com esses elementos, então existem $j - i - k_i$ não invertidos com a_i e $j - i - k_j$ não invertidos com a_j.

Após a troca, os invertidos deixam de ser invertidos e vice-versa, ou seja, passamos a ter entre esses elementos: $(j - i - k_i) + (j - i - k_j) \pm 1$ inversões (-1 se a_i ou a_j estiverem invertidos e $+1$ caso contrário).

Assim, a diferença no número de inversões antes e depois da troca desses elementos é: $|2(j - i - k_i - k_j) \pm 1|$, que é ímpar.

Termo principal e deduzido

Chamamos de termo principal associado a uma matriz quadrada de ordem n o produto dos elementos principais dessa matriz, ou seja, $T_p = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Fixados no termo principal os índices representativos das linhas, chamaremos termo deduzido da matriz qualquer dos produtos da forma $(-1)^k\, a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot \ldots \cdot a_{n\lambda}$, em que $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ indica uma das $n!$ permutações com os índices representativos das colunas e k é o número de inversões dessa permutação em relação à fundamental considerada como $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Obs.:

I. Incluindo o termo principal, teremos numa matriz de ordem n, $n!$ termos deduzidos.
II. Como, pelo Teorema 2, $n!/2$ permutações são de classe par e $n!/2$ são de classe ímpar, teremos uma quantidade igual de termos multiplicados por (–1) e por (+1).
III. Todos os termos deduzidos são produtos de $(-1)^k$ por n fatores.
IV. Cada termo terá um e somente um elemento de cada linha ou coluna.

3.2 Definição de determinante

O determinante associado a uma matriz quadrada de ordem n é a soma algébrica de seus $n!$ termos deduzidos, ou seja,

[illegible], em que $|\sigma|$ representa a classe da permutação σ.

Representa-se por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Obs.: O determinante de uma matriz cujos elementos são números inteiros é um número inteiro, por ser a soma algébrica de produtos de números inteiros.

Através da definição, podem-se obter regras práticas para o cálculo de determinantes 2×2 e 3×3:

Determinante de 2ª ordem

O determinante de uma matriz de 2ª ordem é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Ou seja:

$\ominus$ $\oplus$

[illegible]

Determinante de 3ª ordem (regra de Sarrus)

Repete-se, após a 3ª coluna, a 1ª e a 2ª, respectivamente (o mesmo pode ser feito com as linhas).

Somam-se os produtos dos três elementos da diagonal principal e das diagonais paralelas a ela.

Subtraem-se os produtos dos três elementos da diagonal secundária e das paralelas a ela.

Somam-se algebricamente os resultados obtidos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ex.:

$\Delta =$ [illegible]

$=$ [illegible]

De fato, reparem que em ambos, estamos calculando a soma de todos os produtos possíveis, formados por um único elemento de cada linha e um único elemento de cada coluna, com o sinal variando de acordo com o número de inversões dos índices das colunas.

3.3 Propriedades

I. O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua matriz transposta.
Basta ver que todos os produtos calculados no determinante de uma matriz são os mesmos produtos calculados no determinante da transposta.
Obs.: Decorre desse teorema que qualquer propriedade relativa às linhas é válida para colunas e vice-versa.

II. É nulo todo determinante que contém uma fila nula.
Com efeito, cada termo do determinante contém um elemento dessa fila, logo, terá um fator nulo.

III. Multiplicando-se (dividindo-se) todos os elementos de uma fila por um número, o determinante fica multiplicado (dividido) por esse número.
Com efeito, como em cada termo do determinante aparece um, e só um, elemento da fila considerada, todos os termos ficarão multiplicados (divididos) pelo número e, consequentemente, o determinante fica multiplicado (dividido) por esse número.

IV. Sendo k um escalar e A uma matriz $n\times n$, então, $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$.
Com efeito, em $k \cdot A$, cada linha de A fica multiplicada por k. Pela propriedade (III), segue que o determinante fica multiplicado por [illegible].
Como consequência, toda matriz antissimétrica de ordem ímpar tem determinante nulo. De fato, se A é uma matriz antissimétrica, então $A = -A^t$. Aplicando det dos dois lados e usando as propriedades (I) e (IV): $\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A^t = -\det A \Rightarrow \det A = 0$.

V. Um determinante muda de sinal quando se troca a posição de duas filas paralelas.
Com efeito, uma troca no determinante $\Delta = |a_{ij}|$ da posição de duas filas paralelas implica que cada um dos termos do desenvolvimento de Δ, supostos ordenados em relação aos índices de linha, terá uma troca de dois elementos na permutação dos índices das colunas, e pelo teorema 3, cada um dos termos do desenvolvimento troca de sinal.

VI. Um determinante que possui duas filas paralelas iguais é nulo.
Com efeito, trocando a posição dessas duas filas, o determinante não se altera, e pela propriedade anterior muda de sinal, logo, $\Delta = -\Delta \rightarrow \Delta = 0$.

VII. Um determinante que possui duas filas paralelas proporcionais é nulo.
Com efeito, seja $\Delta = |a_{ij}|$ um determinante em que os elementos de uma fila são os produtos do fator k pelos elementos correspondentes de outra fila paralela. Se $k \neq 0$, podemos dividir a fila considerada por k e $\Delta = k \cdot \Delta'$, em que Δ' tem duas filas paralelas iguais e, portanto, é nulo.

VIII. Um determinante em que são nulos todos os elementos de uma das bandas da diagonal principal reduz-se ao seu termo principal.

Com efeito, seja $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Como em cada termo deve figurar um e apenas um elemento de cada linha e um e apenas um elemento de cada coluna e como na primeira linha há um único elemento não nulo a_{11}, só não se anularão no desenvolvimento de Δ os termos em que figura o fator a_{11}. Na segunda linha há dois elementos não nulos, a_{21} e a_{22}, mas como a_{21} não pode figurar em termo que contenha a_{11}, todos os termos não nulos do desenvolvimento de Δ contêm o fator $a_{11} \cdot a_{22}$. Prosseguindo, obtemos: $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$.

IX. Um determinante em que são nulos todos os elementos de uma das bandas da diagonal secundária reduz-se ao produto de $(-1)^{C_{n,2}}$ pelo produto dos elementos secundários.
Com efeito, com raciocínio análogo ao anterior, verifica-se que o único termo não nulo de Δ é o formado pelos elementos secundários. $T = (-1)^k a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdot ... \cdot a_{n1}$. Nesse caso, k é o número de inversões da permutação $(n, n-1, ..., 2, 1)$ que é, com já sabemos, $C_{n,2}$.

3.4 Cofator e Teorema de LaPlace

Cofator

Definimos o cofator de um elemento a_{ij} de uma matriz A através do seguinte modo:

Inicialmente, traçamos uma reta vertical e outra horizontal por a_{ij}, riscando alguns elementos da matriz.

Calculamos o determinante Δ_{ij} da matriz constituída dos termos não riscados, matriz esta chamada de menor complementar de a_{ij}.

O cofator de a_{ij} é dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$.

Ex.: O cofator do elemento da 2ª linha e 3ª coluna do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ é: } A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 1) = -2.$$

Sabendo o conceito de cofator, vejamos, por exemplo, o que acontece quando desenvolvemos um determinante 3×3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

De fato, o que fizemos com os elementos da primeira linha, poderíamos ter feito com os elementos de qualquer outra linha ou coluna, de modo que, para calcular o determinante 3×3 pode-se escolher qualquer linha ou coluna e somar os produtos das entradas dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

Na verdade, esse resultado não vale apenas para determinantes 3 × 3; seja A uma matriz $n \times n$, vale o seguinte resultado:

Teorema de LaPlace

Um determinante sempre é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos seus respectivos cofatores:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} \text{ ou } \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Dem.: De fato, assim como no caso 3×3, basta lembrarmos que na definição de determinantes aparecem todos os produtos possíveis com os elementos da matriz, tendo cada parcela exatamente um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna.

Assim fixada uma linha i, por exemplo, todas as parcelas terão algum elemento a_{ij} dessa linha, $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Se tivéssemos $i = j = 1$, seria fácil perceber que colocando a_{11} em evidência, teríamos o a_{11} multiplicando o det sem a 1ª linha e a 1ª coluna.

No caso de um elemento a_{ij} qualquer, temos um problema com o número de inversões, já que os produtos são os mesmos que aparecem no determinante tirando a linha i e a coluna j, mas os sinais podem ser diferentes.

Como é mais fácil de visualizar o que ocorre quando se tira a 1ª linha e a 1ª coluna, o que seria necessário para levar a linha i e a coluna j para essas posições?

Se trocássemos a linha i e a coluna j com cada uma das linhas e colunas anteriores, levaríamos essas filas para posições iniciais e manteríamos as demais na mesma ordem da matriz original (que é o que ocorre com o cofator); assim seriam necessárias $(i-1) + (j-1)$ trocas.

Em cada troca de filas alteramos o sinal, em que teremos $(-1)^{i+j+2} = (-1)^{i+j}$.

Assim, colocando a_{ij} em evidência, este ficará multiplicado por $(-1)^{i+j}$ e pelo determinante da matriz sem a linha i, coluna j, ou seja, pelo cofator de a_{ij}.

3.5 Teorema das filas e Teorema de Jacobi

Teorema das filas

Um determinante em que os elementos de uma fila são compostos por somas de p parcelas é igual a uma soma de p determinantes, obtidos do determinante dado, tomando-se no lugar da fila composta as primeiras, segundas, etc., parcelas e conservando todas as outras filas.

Dem.: Seja $\Delta = \det(a_{ij})_{n \cdot n}$ em que os elementos da linha i são da forma:

$a_{i1} = a_1 + b_1 + ... + l_1$
$a_{i2} = a_2 + b_2 + ... + l_2$
....
$a_{in} = a_n + b_n + ... + l_n$

Desenvolvendo Δ segundo os elementos da i-ésima linha, tem-se:

$\Delta = (a_1 + b_1 + ... + l_1)A_{i1} + (a_2 + b_2 + ... + l_2)A_{i2} + ... + (a_n + b_n + ... + l_n)A_{in} =$
$(a_1A_{i1} + a_2A_{i2} + ... + a_nA_{in}) + (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + ... + b_nA_{in}) + ... + (l_1A_{i1} + l_2A_{i2} + ... + l_nA_{in})$;

e pelo Teorema de LaPlace, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ l_1 & \cdots & l_n \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ex.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2+x^2 & 1 & -2 \\ 5+x^3 & 3 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ x^2 & 1 & -1 \\ x^3 & 3 & x^2 \end{vmatrix}$$

Teorema de Jacobi

Um determinante não se altera quando soma-se a uma fila, combinações lineares de filas paralelas.

Dem.: Seja $\Delta = \det (a_{ij})_{n\times n}$, formemos o determinante Δ' em que todas as linhas são iguais às de Δ, exceto a i-ésima, que é obtida através da i-ésima linha somada com uma combinação linear das demais, ou seja,

$L_i' = L_i + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_{i-1}L_{i-1} + \lambda_{i+1}L_{i+1} + \ldots + \lambda_n L_n$, em que L_j representa a linha j.

Pelo teorema das filas, podemos "quebrar" Δ' em vários determinantes em que a linha i ficará com cada uma das parcelas da linha L_i'. Nesse caso, todos os determinantes terão filas proporcionais, exceto um que será exatamente igual ao original, ou seja, teremos: $\Delta' = \Delta$.

3.6 Abaixamento de ordem de um determinante (regra de Chió)

Como consequência do teorema de Jacobi, veremos agora um processo bastante prático para reduzirmos em uma unidade a ordem de um determinante $n \geq 2$, sem alterá-lo, e consequentemente facilitar seu cálculo.

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geq 2$, tal que $a_{11} = 1$, isto é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adicionemos à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$
Adicionemos à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$
....
Adicionemos à j-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1j}$
....
Adicionemos à n-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$
Obteremos a matriz M' tal que $\det M' = \det M$.

$$\det M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \ldots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \ldots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \ldots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de LaPlace:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \ldots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \ldots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \ldots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}_{(n-1)x(n-1)}$$

Isso pode ser resumido através da regra conhecida como regra de Chió:

I. Desde que M tenha $a_{11} = 1$, suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de M.
II. De cada elemento restante na matriz subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares" traçadas do elemento considerado à 1ª linha e à 1ª coluna.
III. Com as diferenças obtidas, construímos uma matriz de ordem $(n-1)$ cujo determinante é igual ao de M.

Ex.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-6 & 5-12 & 6-6 \\ 10-2 & -4-4 & 5-2 \\ 8-6 & 2-12 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 8 & -8 & 3 \\ 2 & -10 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -8+56 & 3-0 \\ -10+14 & -3-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -144 - 12 = -156$$

Obs.:

I. Se na matriz M, $a_{11} \neq 1$ e existir algum outro elemento igual a 1, podemos, através de troca de filas paralelas, transformar M em uma outra matriz que tenha $a_{11} = 1$.
II. Se não existir em M nenhum elemento igual a 1, podemos, usando o teorema de Jacobi, obter uma nova matriz M' que tenha um elemento igual a 1.

3.7 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas então $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Dem.: Faremos apenas o caso 2×2; o caso $n \times n$ foge ao escopo do assunto.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, nesse caso:

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

Em que: $\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) =$
$= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg =$
$= (ad(eh-fg) - bc(eh-fg)) = (ad-bc)(eh-fg) = \det A \cdot \det B$

Uma consequência direta do teorema de Binet é que se A é uma matriz inversível, então:

$AA^{-1} = I \Rightarrow \det A^{-1} \cdot \det A = 1$, de modo que $\det A \neq 0$ e:

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

3.8 Determinante de Vandermonde

Chama-se determinante de Vandermonde de base $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ao determinante:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Um determinante de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças obtidas subtraindo cada elemento $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, ande todos os que o seguem, ou seja,

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1})$$

Dem.: A demonstração foge do escopo do assunto.

4. Matriz inversa

Matriz inversa:

Como visto anteriormente dizemos que A é inversível se, e somente se, existe B tal que:

$AB = BA = I$. Nesse caso dizemos que B é a inversa de A, e a representamos por A^{-1}.

Lema: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se somarmos os produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos correspondentes em outra fila o resultado será nulo.
Dem.: Repare que os cofatores de uma fila de uma matriz não dependem dos elementos dessa fila, uma vez que, no cálculo do cofator, são riscadas sua linha e sua coluna.
Seja então $M = [C_1 \dots C_i \dots C_j \dots C_n]$, em que C_i representa a coluna i. Repare que os cofatores da colunai dessa matriz M são os mesmos cofatores da coluna i da matriz N obtida pela repetição da coluna j no lugar da coluna i, ou seja, $N = [C_1 \dots C_j \dots C_j \dots C_n]$. Nesse caso, como N possui duas colunas iguais, det $N = 0$, porém, pelo Teorema de LaPlace aplicado em sua coluna i, a soma dos elementos da coluna j de M multiplicado pelos cofatores da coluna i deve ser nula.

Teorema: Seja a matriz adjunta de A, a matriz obtida pela transposição da matriz dos cofatores, ou seja, $adjA = (cofA)^t$ então: $(adjA) \cdot A = A \cdot (adjA) = (detA) \cdot I$
Dem.: Seja $A_{ij} = \text{cof } a_{ij}$, então:

$$adjA \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Repare que na diagonal principal teremos os cofatores da coluna k, multiplicando os elementos da coluna k, logo a diagonal será o det A pelo Teorema de LaPlace. Fora da diagonal temos cofatores da linha i, multiplicando cofatores da coluna j, com $i \neq j$, donde pelo Lema, todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

É fácil ver que o mesmo ocorre se fizer $A \cdot (adjA)$.

Logo:

$$adjA \cdot A = A \cdot adjA = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} \cdot = (\det A) \cdot I$$

Corolário: A é inversível se, e somente se, det $A \neq 0$.
De fato, já havíamos visto que se A é inversível então det $A \neq 0$ (por Binet). Para ver a volta, basta dividir a identidade do teorema anterior por det A. Nesse caso:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA}(adjA)}$$

Outra consequência desse resultado é que se $BA = I$, então $AB = I$. Basta verificar que $BA = I$, implica det $A \neq 0$, portanto A é inversível e existe C tal que $AC = CA = I$. Já vimos anteriormente que isso implica $B = C$, portanto $AB = I$.

Matrizes semelhantes

Duas matrizes A e B são ditas semelhantes quando existe uma matriz inversível P tal que $A = P^{-1}BP$.

Propriedades

I. Se A e B são semelhantes, então para todo $(\forall\lambda \in \Re)$, det $(A - \lambda I) =$ det $(B - \lambda I)$.
Dem.: Considerando A e B semelhantes, então existe P inversível tal que $A = P^{-1} BP$, logo: $(\forall\lambda \in \Re)$, $\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1} BP - \lambda P^{-1} P) = \det[P^{-1} (B - \lambda I) P] = \det(B - \lambda I)$
Na última igualdade foi usado o Teorema de Binet.

II. Duas matrizes semelhantes sempre têm o mesmo traço.
Dem.: Basta lembrar que $tr(XY) = tr(YX)$, assim se A e B são semelhantes: $trA = tr(P^{-1} BP) = tr(PP^{-1} B) = tr(IB) = trB$

III. Se A e B são semelhantes então A^k é semelhante a B^k, para todo k natural.
Dem.: Considere $A = P^{-1} BP$, então:
$A^k = A \cdot A \dots A = (P^{-1} BP)(P^{-1} BP) \dots (P^{-1} BP) = P^{-1} B^k P$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Na área de informática, as operações com matrizes aparecem com grande frequência. Um programador, fazendo levantamento dos dados de uma pesquisa, utilizou as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $C = A \times B$. O elemento c_{23} da matriz C é igual a:

(A) 18.
(B) 15.
(C) 14.
(D) 12.
(E) 9.

Solução: Letra E.
Para determinar o elemento da linha 2, coluna 3 do produto AB, basta tomar a 2ª linha de A e multiplicar pela 3ª coluna de B, assim: $c_{23} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 9$

02 Indica-se por det A o determinante de uma matriz quadrada A. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, em que: $a_{ij} = \begin{cases} sen\left[\frac{\pi}{4}(i+j)\right], \text{ se } i = j \\ sen\left[x(i-j)\right], \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Quantos números reais x, tais que $-2\pi < x < 2\pi$, satisfazem a sentença det $A = 1/4$?

(A) 10.
(B) 8.
(C) 6.
(D) 4.
(E) 2.

Solução: Letra B.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\frac{\pi}{2} & sen(-x) \\ senx & sen\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -senx \\ senx & 0 \end{vmatrix} = sen^2x = \frac{1}{4}$$

Logo, $senx = \pm\frac{1}{2}$, onde $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{6}; \pm\frac{5\pi}{6}; \pm\frac{7\pi}{6}; \pm\frac{11\pi}{6}\right\}$.

03 Analise as afirmativas como V ou F, sendo A, B e C matrizes 3 x 3:

a. $(AB)^3 = A^3B^3$
b. $A \cdot (B + C) = AB + CA$

Solução:
a. F. Veja que $(AB)^3 = (AB)(AB)(AB) = ABABAB$. Lembre que, no produto de matrizes, não podemos trocar a ordem (o produto não é comutativo!). Portanto, não temos necessariamente $AAABBB$, que seria A^3B^3.
b. F. Vale a propriedade distributiva. Portanto, $A \cdot (B + C) = AB + AC$. Como não necessariamente $AC = CA$, a equação dada não precisa ser verdadeira.

04
a. Seja A uma matriz quadrada. Prove que $A + A^t$ é uma matriz simétrica.
b. Seja A uma matriz quadrada. Prove que $A - A^t$ é antissimétrica.
c. Seja A uma matriz quadrada. Prove que $A \cdot A^t$ é uma matriz simétrica.
d. Seja A uma matriz quadrada. Prove que A pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica mais uma antissimétrica.

Solução:
a. Seja $X = A + A^t$. Para provar que X é simétrica, devemos provar que $X^t = X$. Veja que: $X^t = (A + A^t)^t$, então $X^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$. Portanto, $X^t = X$ e X é simétrica.
b. Seja $X = A - A^t$. Para provar que X é simétrica, devemos provar que $X^t = X$. Veja que: $X^t = (A - A^t)^t$, então $X^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A$. Portanto, $X^t = -X$ e X é antissimétrica.
c. Seja $X = AA^t$. Para provar que X é simétrica, devemos provar que $X^t = X$. Veja que: $X^t = (AA^t)^t$, então $X^t = (A^t)^tA^t = AA^t$. Portanto, $X^t = X$ e X é simétrica.
d. Pelas letras a e b têm-se $\frac{A+A^t}{2}$ simétrica e $\frac{A-A^t}{2}$ antissimétrica, em que: $A = \left(\frac{A+A^t}{2}\right) + \left(\frac{A-A^t}{2}\right)$ é a soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica.

05 Sejam m e n números reais tais que $m \neq n$ e as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Qual a relação necessária entre m e n para que a matriz **não** seja inversível?

Solução: $C = \begin{bmatrix} 2m-n & m+n \\ 3m & 5m+n \end{bmatrix}$.

Uma matriz não é inversível se, e somente se, seu determinante é nulo. Logo:

$(2m-n)(5m+n) - (m+n)\cdot(3m) = 7m^2 - 6mn - n^2 = 0$, fatorando:

$$6m^2 - 6mn + m^2 - n^2 = 0 \Rightarrow 6m(m-n) + (m+n)(m-n) =$$
$$= (m-n)(7m+n) = 0$$

Como m $\neq$ n, segue que 7m + n = 0.

06 Sejam A e P matrizes reais quadradas de ordem n tais que A é simétrica (isto é, $A = A^t$) e P é ortogonal (isto é, $PP^t = I = P^tP$), P diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$, então:

(A) AB é simétrica.
(B) BA é simétrica.
(C) det A = det B
(D) $BA = AB$
(e) B é ortogonal.

Solução: Letra C.
Repare que pelo enunciado, podemos dizer que uma matriz é ortogonal, quando sua transposta coincide com sua inversa, sendo assim: $B = P^{-1}AP$. Aplicando det dos dois lados e usando o teorema de Binet, det B = det$(P^{-1}AP)$ = det P^{-1} · det A · det P = det A.
Outro resultado que poderia ser visto na questão é que B é simétrica, de fato: $B^t = (P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tAP = B$
Vejamos o que deve ocorrer para AB ser simétrica:
$(AB)^t - B^tA^t = BA$, em que AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$. Deste modo as letras (a), (b) e (d) são equivalentes. (é fácil dar contraexemplos para $AB = BA$).
Para ver que B não precisa ser ortogonal, basta ver que toda matriz ortogonal é inversível, e como, det B = det A, a matriz B é inversível se, e somente se, A também o for. Como não foi afirmado nada sobre A nesse sentido, não podemos garantir isso.

07 Existe matriz X de ordem 2 tal que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Solução: Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, em que: $ac + cd = 0$

$\Rightarrow c = 0$ ou $d = -a$.
1º Caso: $c = 0$. Como $a^2 + bc = bc + d^2 = 0$, temos $a = d = 0$, em que $ab + bd = 0 = 1$. Absurdo!
2º Caso: $d = -a$. Nesse caso, $ab + bd = 0 = 1$. Absurdo!
Logo não existe matriz X que satisfaz o sistema.

08 Determine os valores de x (x é um escalar) tais que det$(A - xI) = 0$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e I representa a matriz identidade 2x2.

Solução: Veja que $A - xI = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & -2 \\ 1 & 4-x \end{bmatrix}$.
Com isso, $(A - xI) = (1 - x)(4 - x) - 1 \cdot (-2)$, ou seja, det $(A - xI) = x^2 - 5x + 6$, que tem raízes 2 e 3.

09 Sendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 1$, determine o valor de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ 3u & 3v & 3w \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Solução: Pelo teorema das filas, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3u & 3v & 3w \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3u & 3v & 3w \\ x & y & z \end{vmatrix}$. O

2º determinante é nulo, porque tem duas linhas proporcionais. No 1º, podemos colocar o fator 3 da 2ª linha para fora, e temos: $\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

Trocando as duas últimas linhas de lugar, temos: $\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -3$.

10 Calcule $\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & x & x \\ x & a & x & x & x \\ x & x & a & x & x \\ x & x & x & a & x \\ x & x & x & x & a \end{vmatrix}$ em função de x e a.

Solução: As somas dos elementos de cada linha são todas iguais. Isso nos dá a ideia de fazer a operação $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$ (essa ideia é muito útil, pois faz aparecer na 1ª coluna as somas das linhas).

Daí, temos $\Delta = \begin{vmatrix} a+4x & x & x & x & x \\ a+4x & a & x & x & x \\ a+4x & x & a & x & x \\ a+4x & x & x & a & x \\ a+4x & x & x & x & a \end{vmatrix}$. Colocando o fator comum da 1ª coluna em evidência, temos que $\Delta = (a+4x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 1 & a & x & x & x \\ 1 & x & a & x & x \\ 1 & x & x & a & x \\ 1 & x & x & x & a \end{vmatrix}$.

Agora, usando a regra de Chió, temos:

$\Delta = (a+4x) \cdot \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-x \end{vmatrix}$, logo, $\Delta = (a + 4x) \,.\, (a - x)^4$.

11 Para que valores de m possui inversa a matriz $\begin{bmatrix} m & 2 & 3 \\ m & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$?

Solução: Sabe-se que uma matriz possui inversa se, e somente se, seu determinante for não nulo. Portanto, precisamos ter $\begin{bmatrix} m & 2 & 3 \\ m & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$.

Utilizando a regra de Sarrus, temos $-m - 1 \neq 0$, o que nos dá $m \neq -1$.

12 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix}$ de duas maneiras e obtenha um resultado de fatoração.

Solução: Usando a regra de Sarrus, temos que o determinante é igual a
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Por outro lado, como as somas das linhas são todas iguais, podemos fazer $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ e temos que o determinante é igual a: $\begin{vmatrix} x+y+z & z & y \\ x+y+z & x & z \\ x+y+z & y & x \end{vmatrix}$.

Colocando o fator comum da 1ª coluna em evidência, temos que o determinante é $(x+y+z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & z & y \\ 1 & x & z \\ 1 & y & x \end{vmatrix}$.

$= (x + y + z) \,.\, (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$.

Portanto, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \,.\, (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$, que é uma conhecida identidade algébrica.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

A adição da transposta de A com o produto de B por C é:

(A) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de B por C.
(B) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes.
(C) impossível de se efetuar, uma vez que não existe a soma da transposta de A com o produto de B por C.
(D) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 2×3.
(E) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 3×2.

02 **(AFA-2002)** As matrizes A, B e C são do tipo $m \times 3$, $n \times p$ e $4 \times r$, respectivamente. Se a matriz transposta de (ABC) é do tipo 5×4, então:

(A) $m = p$.
(B) $mp = nr$.
(C) $n + p = m + r$.
(D) $r = n$.

03 Sejam A e B matrizes. Prove que se AB e BA existem, então AB e BA são quadradas.

04 Toda matriz de ordem 2×2, que é igual à sua transposta, possui:

(A) pelo menos dois elementos iguais.
(B) os elementos da diagonal principal iguais a zero.
(C) determinante nulo.
(D) linhas proporcionais.
(E) todos os elementos iguais a zero.

05 Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine o valor de $2A - B$.

06 Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então determine a matriz X de ordem 2, tal que: $\dfrac{X-A}{2} = \dfrac{B+X}{3} + C$.

07 Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$ duas matrizes. Se B é a inversa de A, então determine $x + y$.

08 Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{pmatrix}$, determine os valores de a e b, tais que $B = PAP^{-1}$.

09 Define-se distância entre duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ quadradas e de mesma ordem n pela fórmula: $d(A, B) = \max|a_{ij} - b_{ij}|, \forall i, j|_1^n$. Assim, determine a distância entre as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

10 Sejam A e B matrizes reais 3×3. Se $tr(A)$ denota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações:

I. $tr(A^t) = tr(A)$
II. Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$.
III. $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, para todo $\lambda \in R$.

(A) Todas as afirmações são verdadeiras.
(B) Todas as afirmações são falsas.
(C) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(D) Apenas a afirmação II é falsa.
(E) Apenas a afirmação III é falsa.

11 O produto das matrizes:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ é tal que:

(A) $AB = \begin{bmatrix} ac & bd \\ bd & ac \end{bmatrix}$

(B) $AB = \begin{bmatrix} ad & bc \\ bd & ac \end{bmatrix}$

(C) $BA = \begin{bmatrix} ac + bd \\ bd + ac \end{bmatrix}$

(D) $BA = \begin{bmatrix} abcd & abcd \\ abcd & abcd \end{bmatrix}$

(E) $AB = BA$, para quaisquer valores de a, b, c, d.

12 **(UFRJ)** Considere as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 19941994 & 19941994 \\ 19941994 & 19941995 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Seja $A^2 = A \cdot A$ e $B^2 = B \cdot B$.

Determine a matriz $C = A^2 - B^2 - (A + B)(A - B)$.

13 Multiplicando-se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ por $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, obtemos $AX = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$, uma permutação dos elementos de X. Existem cinco outras matrizes da mesma ordem da matriz "A", com apenas elementos 0 e 1, que, multiplicadas por X, formam as outras permutações dos elementos de X. A soma dessas cinco matrizes é:

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14 **(EN-1983)** Se cada θ real define a matriz: $T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ então, o produto $T_\alpha \cdot T_\beta$ é igual a:

(A) $\dfrac{T_{\alpha+\beta}}{2}$
(B) $T_{\alpha+\beta}$
(C) $T_{2(\alpha-\beta)}$
(D) $T_{\frac{\alpha-\beta}{2}}$
(E) $T_{\alpha-\beta}$

15 **(ITA-1983)** Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que $a = 2^{(1+\log_2 5)}$; $b = 2^{(\log_2 8)}$ $c = \log_{\sqrt{3}} 81$; $d = \log_{\sqrt{3}} 27$. Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

(A) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -3/2 & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -3/2 & 2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & \log_2 5 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_2 81} \end{bmatrix}$

16 **(ITA-1991)** Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que a matriz $mA + nB$ seja não inversível é necessário que:

(A) m e n sejam positivos.
(B) m e n sejam negativos.
(C) m e n tenham sinais contrários.
(D) $n^2 = 7m^2$.
(E) n.d.a.

17 **(ITA-1994)** Seja a uma matriz real quadrada de ordem n e $B = I - A$, em que I denota a matriz identidade de ordem n. Supondo que A é inversível e idempotente (isto é, $A^2 = A$), considere as afirmações:

I. B é idempotente.
II. $AB = BA$
III. B é inversível.
IV. $A^2 + B^2 = I$
V. AB é simétrica.

Com respeito a estas afirmações, temos:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) Apenas uma é verdadeira.
(C) Apenas duas são verdadeiras.
(D) Apenas três são verdadeiras.
(E) Apenas quatro são verdadeiras.

18 Seja $x = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada 2×2 em que m é um número inteiro qualquer. Se $P = (a_{ij})$ é uma matriz definida por $P = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X$ em que n é um número inteiro positivo ($n \geq 1$), então podemos afirmar que:

(A) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(B) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(C) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $n\dfrac{m(m-1)}{2}$.

(D) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, m é par.
(E) n.r.a.

19 Determine todas as matrizes X de ordem 2 e com elementos reais tais que $X^2 = -I$.

20 Dada $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, em que $i^2 = -1$, deduza a fórmula para as potências inteiras positivas de A.

21 Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$, podemos afirmar que:

(A) B^2 é a matriz nula.
(B) $B^2 = -2I$.
(C) B é simétrica.
(D) B é hemissimétrica.
(E) n.r.a.

22 Se A e B são matrizes de ordem n, das afirmativas abaixo, quais são verdadeiras? Justifique.

(I) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(II) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
(III) Se $A \,.\, B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$
(IV) Se $A = P^{-1}BP$, então $A^4 = P^{-1}B^4P$

23 Sejam A, B matrizes $n \times n$ tais que $A^2 = 0$, $B^2 = 0$ e $(A + B)^2 = 0$. Mostre que $(AB)^3 = 0$.

24 Determine a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

25 São dadas duas matrizes, A e B, quadradas de ordem p. A matriz I_p e a matriz 0_p são, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula, quadradas, de ordem p. Nessas condições:

(A) $AB = BA$.
(B) Se $AB = 0_p$ então $BA = 0_p$.
(C) Se $AB = I_p$ então $BA = I_p$.
(D) $AB = BA$ se e só se $AB = I$.
(E) n.r.a.

26 Marlos Charada, o matemático espião, concebeu um código para transformar uma palavra P de três letras em um vetor Y de R^3 como descrito a seguir.
A partir da correspondência:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

A palavra P é transformada em um vetor X de R^3. Em seguida, usando a matriz código $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, o vetor Y é obtido pela equação $Y = AX$.

Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor $X = (12, 1, 17)$ e é codificada como $Y = A\,X = (26, 59, 29)$. Usando o processo acima, decodifique $Y = (64, 107, 29)$.

27 Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 0 & x+1 & 1 \\ 1 & -4 & x-1 \\ 1 & 1-3x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

28 Sendo A uma matriz 3×3 tal que $\det A = 2$, calcule o determinante da matriz $4\,A^{-1}$.

29 Calcule o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

30 Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0$.

31 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n \times n}$.

32 Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

33 **(AFA-2001)** Considere $T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ matriz quadrada definida para todo α real. Sendo cof $(T(\alpha))$ e det $(T(\alpha))$, respectivamente, a matriz cofatora e o determinante da matriz $T(\alpha)$, é correto afirmar que:

(A) $T(-\alpha) = -T(\alpha)$
(B) $\operatorname{cof}T(\alpha) = T(-\alpha)$
(C) $T(-\alpha) = (T(\alpha))^{-1}$
(D) $\operatorname{Det}(T(2\alpha)) = 4\det(T(\alpha))$

34 **(AFA-2000)** O produto das raízes da equação $\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ com $x \in \mathbb{R}_+^*$, é

(A) 1/2.
(B) 3/4.
(C) 4/3.
(D) 3/2.

35 **(AFA-2001)** Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3, det $A = d$, $\det(2A \cdot A^t) = 4k$, em que A^t é a matriz transposta de A, e d é a ordem da matriz quadrada B. Se det $B = 2$ e det $3B = 162$, então o valor de $k + d$ é:

(A) 4.
(B) 8.
(C) 32.
(D) 36.

36 **(ITA-1981)** Dizemos que uma matriz real quadrada A é singular, se det $A = 0$, ou seja, se o determinante de A é nulo, e não singular se det $A \neq 0$. Mediante essa definição qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) A soma de duas matrizes, A e B, é uma matriz singular, se det A = det $-B$.
(B) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se, e somente se, ambas forem singulares.
(C) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se pelo menos uma delas for singular.
(D) Uma matriz singular possui inversa.
(E) A transposta de uma matriz singular é não singular.

37 **(ITA-1995)** Dizemos que duas matrizes $n \times n$, A e B, são semelhantes se existe uma matriz $n \times n$ inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então:

(A) B é sempre inversível.
(B) Se A é simétrica, então B também é simétrica.
(C) $B2$ é semelhante a A.
(D) Se C é semelhante a A, então BC é semelhante a $A2$.
(E) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, em que λ é um real qualquer.

38 **(ITA-93)** Sabendo-se que a soma das raízes da equação $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{bmatrix} = 0$ é –8/3 e que S é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:

(A) $S \subset [-17, -1]$
(B) $S \subset [1, 5]$
(C) $S \subset [-1, 3]$
(D) $S \subset [-10, 0]$
(E) $S \subset [0, 3]$

39 **(ITA-1992)** Seja $C = \{X \in M_{2\times 2}; X^2 + 2X = 0\}$. Dadas as afirmações:

I. Para todo $X \in C$, $(X + 2I)$ é inversível.
II. Se $X \in C$ e $\det(X + 2I) \neq 0$ então X não é inversível.
III. Se $X \in C$ e det $X \neq 0$ então det $X > 0$.

Podemos dizer que:

(A) todas são verdadeiras.
(B) todas são falsas.
(C) apenas II e III são verdadeiras.
(D) apenas I é verdadeira.
(E) n.d.a.

40 Calcule o determinante: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & 25 & 16 \\ 8 & 27 & 125 & 64 \end{vmatrix}$.

41 Determine, usando o método dos cofatores, a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 A matriz B, de ordem 4, é tal que $B^4 = 0$. Mostre que a matriz inversa de $I - B$ é $I + B + B^2 + B^3$.

02 Uma matriz A é dita nilpotente, se existe $n \in N$, tal que $A^n = 0$. O menor n com essa propriedade é dito índice de A.

(A) Dê um exemplo de matriz 3 x 3 de índice 3.
(B) Se A é matriz nilpotente de índice 2, calcule $(I - A)^{-1}$ em função de I e A.
(C) Se A é matriz nilpotente de índice n, determine $(I - A)^{-1}$ em função de $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

03 Seja A uma matriz m x n de elementos reais. Mostre que se $tr(AA^t) = 0$, então a matriz A é, necessariamente, nula.

04 **(UFC)** A matriz quadrada M, de ordem $n > 1$, satisfaz a equação $M^2 = M - I$, em que I é a matriz identidade de ordem $n > 1$. Determine, em termos de M e I, a matriz M^{2003}.

05 Determine A^n dado que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

06 Considere a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 4 & z \end{pmatrix}$. Determine os valores de x, y e z para que os elementos da diagonal principal de C^{-1} sejam todos iguais a 1.

07

a. Prove que se A é matriz 2 x 2, então $A^2 - (\mathrm{tr}A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$.
b. Prove que se A é matriz 2 x 2 tal que $A^3 = 0$, então $A^2 = 0$.

08 Seja F o conjunto das funções homográficas $\left(f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d},\ ad - bc \neq 0\right)$.

Seja M_2 o conjunto das matrizes 2×2. Sendo $P: F \to M_2$ que leva $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$ em $P(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

a. mostre que $P(fog) = P(f) \cdot P(g)$;
b. conclua que $P(fofo...of) = [P(f)]^n$.
c. Seja $f(x) = \dfrac{(\cos\theta)x - \operatorname{sen}\theta}{(\operatorname{sen}\theta)x + \cos\theta}$, calcule $fofo...of$.

09 **(EN-1983)** Se a, b e c são as medidas dos lados opostos aos ângulos opostos aos ângulos A, B e C do triângulo ABC, então o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \text{senA} & \text{senB} & \text{senC} \end{vmatrix}$$ é **nulo**:

(A) somente se $a = b = c$.
(B) somente se $a^2 = b^2 + c^2$.
(C) somente se $a > b > c$.
(D) somente se $a = b$.
(E) quaisquer que sejam a, b e c.

10 Considere a equação: $\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0$, em que: $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2}$ e $G(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ com $x \in R, x \neq 0$. Sobre as raízes reais dessa equação, temos:

(A) Duas delas são negativas.
(B) Uma delas é um número irracional.
(C) Uma delas é um número par.
(D) Uma delas é positiva e outra negativa.
(E) n.d.a.

11 **(ITA)** Julgue: Sejam A, B e C matrizes quadradas $n \times n$ tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, então $\det C = \det(AB)^{-1}$.

12 **(EFOMM)** Sejam A, B e C matrizes de ordem 3×3 inversíveis tais que $\det A^{-1} = 3$ e $\det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right) = 4$. Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que $I = -3C^{-1} \cdot (2B^{-1} + A)^t$, o determinante de C é igual a:

(A) – 8/3.
(B) – 32/3.
(C) – 9.
(D) – 54.
(E) – 288.

13 Prove que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

14 Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

15 Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

16 Se $a + b + c = 2$, qual o valor numérico de $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$?

17 Calcule o determinante: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$.

18 Sabendo que 11843, 13273, 26325, 70824 e 92443 são múltiplos de 13, prove que Δ também o é.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 8 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

19 Sejam $p < m$ dois inteiros positivos. Calcule:

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \cdots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}$$

20 Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

21 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$.

22 Sendo Δ_n o valor do determinante tridiagonal $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$, determine:

23 Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

24 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

25 **(Romênia)** Determine a(s) matriz(es) A, sabendo que sua matriz adjunta é:

$$adjA = \begin{pmatrix} m^2-1 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 1-m & m^2-1 \end{pmatrix}, m \neq 1, -2$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Sejam M e N matrizes do tipo $n \times n$ distintas tais que:

I. $M^3 = N^3$
II. $MN^2 = NM^2$

É possível que $x = M^2 + N^2$ seja inversível?

02 Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ invertíveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^kB^k$ para três valores inteiros consecutivos de k, então $AB = BA$.

03 **(UFC)** Sejam A, B e $A + B$ matrizes $n \times n$ ($n \geq 1$) invertíveis. Encontre uma expressão para $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ em termos de A, $(A + B)^{-1}$ e B.

04 **(Método da variação de parâmetros)** Seja A uma matriz de ordem n e B a matriz obtida ao somarmos x a cada elemento da matriz A. Mostre que:
det B = det A + x (soma dos cofatores de todos os elementos de A).

05 Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

06 Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+a & x & \cdots & x \\ x & x & x+a^2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+a^n \end{vmatrix}$$

07 Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ y & 0 & x & \cdots & x \\ y & y & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

08 **(IMC)** A e B são matrizes de ordem n tais que $AB + A + B = 0$. Prove que $AB = BA$.

09 **(IMC)** Sejam A, B e C matrizes quadradas de entradas reais de mesma ordem, e supondo A inversível. Prove que se $(A - B)C = BA^{-1}$, então $C(A - B) = A^{-1} B$.

10 Calcule $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$.

11 Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda_1 & \cos 2\lambda_1 & \cdots & \cos(n-1)\lambda_1 \\ 1 & \cos\lambda_2 & \cos 2\lambda_2 & \cdots & \cos(n-1)\lambda_2 \\ 1 & \cos\lambda_3 & \cos 2\lambda_3 & \cdots & \cos(n-1)\lambda_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\lambda_n & \cos 2\lambda_n & \cdots & \cos(n-1)\lambda_n \end{vmatrix}$$

12 Determine todas as matrizes A e B $n \times n$ tais que $AB - BA = I$.

13 Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem n satisfazendo:

$$tr(AA^t + BB^t) = tr(AB + A^tB^t)$$

Prove que $A = B^t$.

14 Sejam A e B matrizes 3×3 com elementos reais tais que:

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B)$$

Prove que $\det(xA + yB) = 0$, para todo x, y reais.

RASCUNHO

Introdução

Nesta seção, estudaremos as circunferências. Além de estar presente na natureza (ex.: envoltória do sol e da lua), a circunferência e o círculo foram a base para duas invenções importantíssimas da história: a roda (para uso em transportes) e a engrenagem (para criação de máquinas após a revolução industrial).

Em provas, os problemas de circunferência podem aparecer de forma isolada – normalmente mais simples, envolvendo apenas a relação entre sua equação algébrica e seus elementos geométricos – ou combinados com outras curvas – geralmente retas, que estudamos na seção anterior, ou cônicas, que estudaremos na próxima.

Os seus objetivos nesta seção incluem entender as diferentes equações algébricas do círculo, conseguir encontrar uma reta tangente a uma circunferência dada, relacionar o conceito geométrico de potência com a interpretação algébrica e resolver problemas envolvendo famílias de circunferências.

1. Equações da circunferência

Circunferência é o conjunto dos pontos cuja distância a um ponto fixo (centro) é constante (raio). Exceto quando indicado em contrário, usaremos $O = (a, b)$ para representar o centro e r para o raio da circunferência.

1.1 Equação reduzida

Dados o centro $O = (a, b)$ e o raio R de uma circunferência, podemos escrever sua equação como:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Demonstração: usando a fórmula de distância ponto-ponto, a equação acima equivale a dizer que o ponto $P = (x, y)$ satisfaz $PO = R$.

1.2 Equação geral

Expandindo os produtos notáveis na equação reduzida, vemos que toda circunferência pode ser escrita como:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Em que o centro da circunferência é $O=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ e o raio é $R=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$.

Demonstração: completando quadrados, podemos escrever a equação acima na forma reduzida:

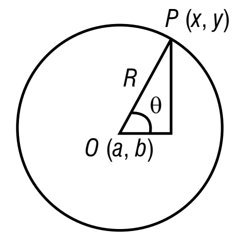
$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Obs.: Para que a equação geral represente uma circunferência real, é necessário ter $D^2 + E^2 > 4F$.

1.3 Equação parametrizada

Em alguns problemas, é interessante escrever um ponto $P = (x, y)$ da circunferência em função do ângulo θ entre o raio e o eixo x.



$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Em que (a, b) representa o centro e R o raio da circunferência.

Demonstração: completando o triângulo retângulo como na figura, temos:

$$\cos\theta=\frac{x-a}{R},\ \operatorname{sen}\theta=\frac{y-b}{R}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Determine o centro e o raio da circunferência da equação

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 10 = 0.$$

Solução: Em vez de decorar fórmulas que relacionam os coeficientes da equação com as coordenadas do centro e o raio, é mais eficaz entender o processo de "completar os quadrados". Veja:

$(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) = -10 \rightarrow$
$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -10 + 16 + 9 \rightarrow$
$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 15.$

Portanto, temos que o centro é o ponto $(4, -3)$ e o raio é $\sqrt{15}$.

02 Para quais valores de k a equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$ representa uma circunferência?

Solução: Há uma condição de existência desenvolvida na teoria. A importância desse desenvolvimento é mostrar que é possível, completando os quadrados, verificar se a equação representa de fato uma circunferência.
Fazendo isso, temos:

$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = -k \rightarrow$
$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -k + 1 + 4 \rightarrow$
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 - k$

Para ser uma circunferência, como vale $R^2 = 5 - k$, devemos ter $5 - k > 0$, ou seja, $k < 5$.

03 Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos (7, 2), (– 5, – 12) e (10, – 3).

Solução:

1ª solução: Escreva a equação da circunferência no formato $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Substituindo os pontos na equação, chegamos ao sistema: $\begin{cases} 7A + 2B + C = -53 \\ -5A - 12B + C = -169 \\ 10A - 3B + C = -109 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, obtemos $A = -2$, $B = 10$ e $C = -59$. Com isso, a equação é $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 59 = 0$. Para garantir que a equação é realmente de uma circunferência (e não um caso degenerado), precisamos levá-la à forma reduzida. Completando os quadrados, chegamos a $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 85$, que representa uma circunferência de centro (1, – 5) e raio $\sqrt{85}$.

2ª solução: O centro da circunferência é a interseção das mediatrizes dos lados do triângulo. Então, precisamos achar as equações dessas mediatrizes. Sejam $A = (7, 2)$, $B = (-5, -12)$ e $C = (10, -3)$.

A equação da mediatriz de AB é $y + 5 = -\frac{6}{7}(x - 1)$;

A equação da mediatriz de AC é $y + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{17}{2}\right)$.

Fazendo a interseção das retas, obtemos o centro $O = (1, -5)$. Para achar o raio, basta calcular OA, por exemplo. Como $OA = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$, obtemos a resposta encontrada na 1ª solução.

3ª solução: A equação da circunferência pode ser encontrada através de um determinante. Esta solução é mais trabalhosa. Veja o penúltimo exercício deste assunto.

2. Posições relativas

2.1 Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Para descobrir a posição de $P = (x_0, y_0)$ em relação a uma circunferência, olhamos para a função potência $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$ (ou $f(x, y) = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F$) aplicada a este ponto:

Ponto interior à circunferência: $f(a, b) < 0$
Ponto sobre a circunferência: $f(a, b) = 0$
Ponto exterior à circunferência: $f(a, b) > 0$

Demonstração: veja que $f(a, b) = OP^2 - R^2$, logo $f(a, b) > 0 \Leftrightarrow OP > r$

Obs.: É comum nos referirmos indistintamente a circunferência $f(x, y) = 0$ e a sua função potência f.

2.2 Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Para descobrir a posição de uma reta $t: Ax + By + C = 0$ em relação a uma circunferência de centro $O(x_0, y_0)$ e raio R, olhamos para a distância $d(O,t) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ do centro à reta:

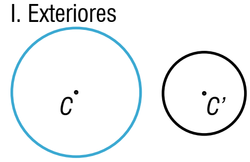
Reta exterior à circunferência: $d(O, t) > R$
Reta tangente à circunferência: $d(O, t) = R$
Reta secante à circunferência: $d(O, t) < R$

Atenção: Existem diversas formas de se encontrar uma reta tangente a uma circunferência, mas a condição $d(O, t) = R$ é, normalmente, a maneira mais eficiente.

2.3 Posição de uma circunferência em relação a outra

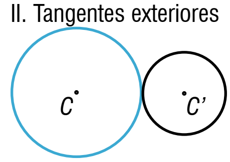
Para descobrir a posição relativa de duas circunferências de centros C e C' e raios R e R', olhamos para a distância $d(C, C')$ entre os centros:

I. Exteriores



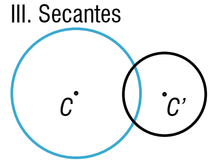
$d(C, C') > R + R'$

II. Tangentes exteriores



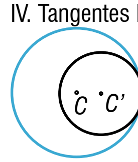
$d(C, C') = R + R'$

III. Secantes



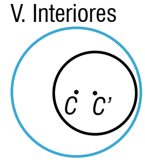
$|R - R'| < d(C, C') < R + R'$

IV. Tangentes Interiores



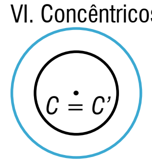
$d(C, C') = |R - R'|$

V. Interiores



$d(C, C') < |R - R'|$

VI. Concêntricos



$d(C, C') = 0$

Atenção: A condição $d(C,C') = R + R'$ (resp. $d(C, C') = |R - R'|$) é necessária e suficiente para caracterizar duas circunferências tangentes exteriores (resp. interiores).

Nota: Duas circunferências secantes são ditas ortogonais quando suas tangentes no ponto de interseção são perpendiculares. Na notação usual, esta condição é equivalente a $O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

04 Determine a posição relativa entre as circunferências C_1: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ e C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 10$.

Solução:
Inicialmente, escrevemos as equações reduzidas das circunferências. Essas são:
C_1: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ e C_2: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 23$.

Temos que $R_1 = 5$, $R_2 = \sqrt{23}$, $O_1 = (3,-4)$, $O_2 = (2,-3)$.
Então, $d = O_1O_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Para sabermos a posição relativa entre as circunferências, devemos comparar d com $|R_1 - R_2|$ e $R_1 + R_2$. Veja que vale $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$ (pois $5-\sqrt{23} < \sqrt{2} < 5+\sqrt{23}$), então, as circunferências são secantes (ver teoria).

05 Determine a equação da reta tangente à circunferência C: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 4$ que passa pelo ponto $P = (1, 1)$.

Solução:
Inicialmente, veja que o ponto (1, 1) pertence à curva, pois satisfaz a equação $(1 + 1 - 4 + 6 = 4)$. A equação reduzida da circunferência é $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 17$, portanto, o centro é o ponto $O = (2, -3)$.

Agora, veja que o fato de P estar sobre a curva ajudará demais! A reta tangente t é perpendicular à reta OP, portanto $m_t \cdot m_{OP} = -1$. Como $m_{OP} = \dfrac{-4}{1}$, segue que $m_t = \dfrac{1}{4}$. Como a reta t passa por (1, 1), temos que t: $y - 1 = \dfrac{1}{4}(x-1)$. Então, a resposta é t: $y = \dfrac{x+3}{4}$.

06 Determine as equações das retas tangentes à circunferência de equação C: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ que passam pelo ponto $A = (7, 0)$.

Solução: Neste problema, o ponto não está sobre a curva. A melhor estratégia é usar a distância do centro à reta. Essa distância deve ser igual ao raio da circunferência. Há outras abordagens, mas esta, normalmente, gera menos esforço .
Reduzindo a equação: C: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$. Portanto, o centro é o ponto $O = (3,-4)$ e o raio é 5.
É fácil ver que as tangentes não serão retas 'verticais' (faça um desenho). Portanto, podemos dizer que, por passarem por A, terão o formato $y - 0 = m(x-7)$, ou seja, $mx - y - 7m = 0$. Como a distância do centro à reta deve ser igual ao raio, devemos ter $\dfrac{|3m-(-4)-7m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$.

Essa equação é equivalente a $|4-4m| = 5\sqrt{m^2+1}$. Como os dois lados são não negativos, podemos elevar ao quadrado e chegamos à equação do 2º grau em m: $9m^2 + 32m + 9 = 0$, que tem raízes $m = \dfrac{-32 \pm 10\sqrt{7}}{18}$.
Portanto, as tangentes são $y = \dfrac{-32 \pm 10\sqrt{7}}{18}(x-7)$.

Obs.: Para verificar se o ponto realmente está fora do círculo, basta substituir suas coordenadas em $C(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y$ e ver se o resultado será positivo (positivo é para pontos no exterior, negativo para pontos no interior e zero para pontos sobre a curva). Neste caso, o ponto realmente está fora, pois $C(7,0) = 7^2 + 0^2 - 6 \cdot 7 + 8 \cdot 0 = 7 > 0$. No entanto, isso não é estritamente necessário na solução. Como encontramos duas tangentes, isso já garante que o ponto está fora.

3. Potência e eixo radical

3.1 Potência de um ponto em relação a uma circunferência

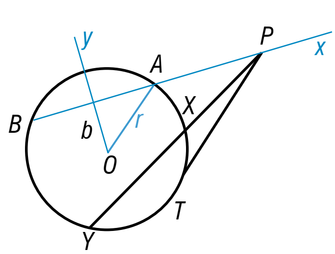
A função potência f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de uma circunferência é dada, como visto anteriormente, por $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$, ou, expandindo e agrupando, $f(x, y) = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F$.

Pela fórmula da distância ponto-ponto, dado um ponto $P(x, y)$, temos que $f(x, y) = OP^2 - R^2$.Essa quantidade recebe o nome de potência de P em relação à circunferência.

Obs.: A função potência sempre tem coeficiente de $x^2 + y^2$ igual a 1. Por exemplo, a função potência de $x^2 + y^2 + 2x = 1$ e de $2x^2 + 2y^2 + 4x = 2$ é a mesma ($f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 1$), pois ambas equações representam a mesma circunferência.

Teorema

Se PAB é uma reta secante à circunferência, então $PA \cdot PB = Pot_C P_0 =$ constante



Demonstração: Dada uma circunferência e uma secante PAB como na figura, considere um sistema de eixos com a origem no interior da circunferência, de forma que o eio y passe pelo seu centro e o eixo x sobre a corda AB.

Podemos escrever:

$A = (a, 0)$, $B = (-a, 0)$, $P = (p, 0)$, $0 = (0, -b)$
$PA \cdot PB = (p + a)(p - a) = p^2 - a^2$

Dessa forma, temos: $OP^2 - r^2 = OP^2 - OA^2 = p^2 + b^2 - a^2 - b^2 = PA \cdot PB$

Como relacionamos a quantidade $PA \cdot PB$ com uma constante $(OP^2 - r^2)$ que não depende dos eixos considerados nem dos pontos A e B escolhidos, podemos escrever $PA \cdot PB = PX \cdot PY = PT^2$.

3.2 Eixo radical

Dadas duas circunferências, o seu eixo radical é o lugar geométrico dos pontos que têm igual potência em relação às duas circunferências.

Este lugar geométrico é sempre uma reta, e quando as circunferências são secantes, essa reta é a extensão da corda comum.

Demonstração: sendo $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1$ e $f_2(x, y) = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$ as respectivas funções potência, um ponto terá mesma potência em relação as duas se, e somente se, $f_1(x, y) = f_2(x, y)$.

Cancelando os termos quadráticos, obtemos a equação de uma reta. Não é difícil ver que se existirem pontos de interseção entre as duas circunferências, esses pontos estão no LG (pois tem potência zero em relação a cada uma das duas).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

07 Determine o comprimento das tangentes traçadas à circunferência $2x^2 + 2y^2 + 5y = 7$ pelo ponto $A(1, 1)$.

Solução: Na notação anteriror, temos:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$$

$$AT^2 = f(1,1) = 1^2 + 1^2 + \frac{5}{2}\cdot 1 - \frac{7}{2} = 1 \Rightarrow AT = 1$$

08 Determine a equação da reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2 + y^2 + 4x + y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - y - 11 = 0$.

Solução: O enunciado já indica que as circunferências são secantes, pois se intersectam (caso isso não fosse dito, poderíamos utilizar 2.3. para descobrir a posição relativa entre as circunferências).
Como a reta que passa pelas interseções é o eixo radical, basta subtrair as funções potências para obter a reta $f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0$, ou seja: $6x + 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 4 = 0$.

4. Família de circunferências

4.1 Compartilhando as interseções de uma circunferência e uma reta dada

Dada uma circunferência com função potência f_1 e uma reta $r(x, y)$, com $r(x, y) = Ax + By + C$, as demais circunferências que passam pela interseção da reta com a circunferência dada são definidas por:

$$f = f_1 + k \cdot r, k \in \mathbb{R}^*$$

Demonstração: como r será o eixo radical das duas circunferências, o resultado 3.2. mostra que a equação de r é dada por $f - f_1$. Como uma equação não muda se multiplicarmos todos os lados por uma constante k, isso implica $f - f_1 = k \cdot r$, $k \in \mathbb{R}$.

4.2 Compartilhando as interseções de duas circunferências dadas

Dadas duas circunferências secantes com funções potências $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1$ e $f_2(x, y) = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$, uma circunferência pela interseção das duas é dada por:

$$f = f_1 + t \cdot (f_2 - f_1), t \in \mathbb{R}$$

Demonstração: como a corda comum r dos pares de circunferência (f_2, f_1) e (f_1, f) é a mesma, temos $f_2 - f_1 = k \cdot r$ e $f - f_1 = k' \cdot r$. Eliminando r e fazendo t = k'/k, temos $f - f_1 = t \cdot (f_2 - f_1)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

09 Determine a equação do círculo que passa pelo ponto (–10, –2) e pelas interseções do círculo $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ com a reta $x - y + 4 = 0$.

Solução:
A família de circunferências compartilhando as interseções entre a circunferência e a reta dadas é:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 + k \cdot (x - y + 4) = 0$

Substituindo $x = -10$ e $y = -2$, obtemos o valor de k:
$(-10)^2 + (-2)^2 + 2 \cdot (-10) - 2 \cdot (-2) - 32 + k \cdot (-10-(-2) + 4) = 0 \Rightarrow$
$k = 14$

Logo, a circunferência procurada é:
$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 + 14 \cdot (x - y + 4) = 0$
$x^2 + y^2 + 16x - 16y + 24 = 0$
$(x + 8)^2 + (y - 8)^2 = 104$

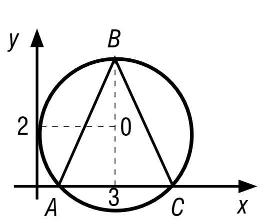
EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Ache a equação da circunferência de raio 13 que passa por (0,0), sabendo que a abscissa do centro é – 12.

02 **(AFA)** Os pontos $A(-5, 2)$ e $B(1, 6)$ são extremos de um dos diâmetros das circunferências de equação:

(A) $x^2 + y^2 - 2y - 25 = 0$
(B) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 57 = 0$
(D) $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 39 = 0$

03 **(AFA)** De acordo com a figura abaixo, podemos afirmar que a área do triângulo isósceles ABC, em unidade de área, é:



(A) $2\sqrt{3}$.
(B) $3\sqrt{3}$.
(C) $4\sqrt{5}$.
(D) $5\sqrt{5}$.

04 Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(-1, 15)$; $B(1,3)$; $C(-1, 2)$.

05 Ache a equação do diâmetro do círculo $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ perpendicular à reta $5x + 2y - 13 = 0$.

06 **(EFOMM)** A interseção da reta $y + x - 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y + -3 = 0$ determina uma corda cujo comprimento é:

(A) 7.
(B) $\sqrt{2}$.
(C) $\sqrt{3}$.
(D) $\sqrt{5}$.
(E) 6.

07 A equação de um círculo é $x^2 + y^2 = 50$. O ponto médio de uma corda deste círculo é (– 2, 4). Ache a equação dessa corda.

08 Determine a equação do círculo cujo centro é o ponto (7, –6) e que passa pelo ponto (2, 2).

09 **(EFOMM)** Sendo r a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 + 10x + 20y + 121 = 0$ e é perpendicular à reta $2x + 6y - 5 = 0$, sua equação é:

(A) $-x + y - 5 = 0$.
(B) $2x + 2y + 5 = 0$.
(C) $-3x + y + 5 = 0$.
(D) $-3x + y - 5 = 0$.
(E) $-2x - y + 5 = 0$.

10 Determine as coordenadas dos pontos de interseção da reta $7x - y + 12 = 0$ com a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

11 **(AFA)** A equação da reta que passa pelo centro da circunferência $2x^2 + 2y^2 - 8x - 16y - 24 = 0$ e é paralela à reta $-8x + 2y - 2 = 0$ é:

(A) $y = 2x$.
(B) $y = x + 2$.
(C) $y = 4x - 8$.
(D) $y = 4(x - 1)$.

12 **(AFA)** A intersecção da reta $y + x + 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ determina uma corda cujo comprimento é:

(A) $\sqrt{2}$.
(B) $2\sqrt{2}$.
(C) $2\sqrt{3}$.
(D) $3\sqrt{2}$.

13 Ache as equações dos círculos de raio $r = \sqrt{5}$, tangentes à reta $x - 2y - 1 = 0$ no ponto $M_1(3,1)$.

14 Ache sobre o círculo $16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$ um ponto M_1 o mais próximo possível da reta $8x - 4y + 73 = 0$ e calcule a distância d do ponto M_1 a essa reta.

15 A circunferência da equação $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ e centro C é tangente ao eixo das abscissas no ponto A e é tangente ao eixo das ordenadas no ponto B. A área do triângulo ABC vale:

(A) 4.
(B) 8.
(C) 12.
(D) 16.

16 **(AFA)** A circunferência, com centro em (2, 1) e tangente à reta $x - y + 3 = 0$, tem equação:

(A) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 - 4y - 2x - 3 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 4y - 2x - 7 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$.

17 Determine a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 3y = 4$ passando pelo ponto (2, 3).

18 Ache as equações das tangentes ao círculo $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ perpendiculares à reta $x - 2y + 9 = 0$.

19 Determine a equação de uma reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 3y = 4$ que passa pelo ponto (5, –1).

20 **(AFA)** A circunferência $x^2 + y^2 = 5$ possui duas retas tangentes, t_1 e t_2, que são paralelas à reta r: $y = -2x + 3$. As equações gerais das retas t_1 e t_2, respectivamente, são:

(A) $2x + y - 5 = 0$ e $2x + y + 5 = 0$
(B) $2x + y - 15 = 0$ e $2x + y + 15 = 0$
(C) $2x + y - 5\sqrt{5} = 0$ e $2x + y + 5\sqrt{5} = 0$
(D) $2x + y - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$ e $2x + y + \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$

21 Determine o valor de k sabendo que a reta $2x + 3y + k = 0$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.

22 Determine a equação cartesiana de uma reta, sabendo que esta passa pelo ponto $P(2, 9)$ e é tangente à figura determinada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = 2 + 8\operatorname{sen}\alpha \\ y = 1 + 8\cos\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

23 Se dois círculos $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ e $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ intersectam-se em dois pontos distintos, então:

(A) $2 < r < 8$.
(B) $r < 2$.
(C) $r = 2$.
(D) $r > 2$.

24 Mostre que as circunferências C_1: $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ e C_2: $x^2 + y^2 - 5 = 0$ são tangentes. Determine a equação da circunferência tangente a C_1 e a C_2 em seu ponto comum que passa pelo ponto (7, 2).

25 **(EFOMM)** Dados os pontos $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ e $C(0, 3)$. Determine suas posições em relação à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

(A) A, interior;
$B \in$ à circunferência;
C, exterior.

(B) A, interior;
B, exterior;
$C \in$ à circunferência.

(C) $A \in$ à circunferência;
B, interior;
C, exterior.

(D) A, exterior;
$B \in$ à circunferência;
C, interior.

(E) $A \in$ à circunferência;
B, exterior;
C, interior.

26 Desde o ponto $A(-2, -1)$ é traçada uma reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. Sendo B o ponto de contato, determine o comprimento do segmento AB.

27 Encontre a distância do ponto à circunferência em cada um dos casos a seguir:

a. $(6, -8)$; $x^2 + y^2 = 9$;
b. $(3, 9)$; $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;
c. $(-7, 2)$; $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

28 Determine a equação do círculo que passa pelo ponto (–10, –2) e pelas interseções do círculo $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ com a reta $x - y + 4 = 0$.

29 Determine o comprimento da corda e a equação da secante comuns aos círculos $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$.

30 **(IIT)** O número de tangentes comuns às circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 24$ é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 3.
(D) 4.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 **(AFA)** Qual das equações abaixo representa a circunferência inscrita no triângulo de vértice $A(3, 5)$, $B(7, 5)$ e $C(3, 8)$?

(A) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 70 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 51 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 68 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 72 = 0$.

02 Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto $A(-6,-3)$ é o dobro de sua distância ao ponto $B(3, 0)$.

03 Calcule o comprimento da corda do círculo $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ que passa pelos pontos $(1,-1)$ e $(0,2)$.

04 Sejam A e B dois pontos do plano. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\frac{PA}{PB} = k$ é um círculo (Apolônio) (para $k \neq 1$) e determine o centro desse círculo.

05 Demonstre analiticamente que a mediatriz de uma corda em uma circunferência é sempre reta suporte de um diâmetro dessa circunferência.

06 **(AFA)** Dada a circunferência $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ e os pontos $D(-1, 2)$ e $E(8, 5)$, pode-se afirmar que $\overline{DE}$:

(A) é um diâmetro de circunferência.
(B) não intercepta a circunferência.
(C) intercepta a circunferência em um único ponto.
(D) é uma corda de circunferência, mas não contém o centro.

07 Determine o ângulo formado na interseção da reta $3x - y - 1 = 0$ com a circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 5$. (Este ângulo, por definição, é o ângulo que esta reta forma com a reta tangente à circunferência no ponto de interseção.)

08 Considere um círculo C de raio 5 cm com centro O em (0,0) e um ponto P sobre a circunferência deste círculo. Seja M a projeção do ponto P sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$. Determine a equação do lugar geométrico do centro de gravidade do triângulo OPM, quando P se desloca sobre a circunferência do círculo C.

09 Em um sistema de eixos ortogonais, o vértice A do triângulo ABC está na origem e o eixo dos x é o suporte do lado AB. O coeficiente angular do lado AC é 1. Sabendo que os pontos B, C e M, este último de coordenadas $(0,-4)$, estão alinhados e que as distâncias BM e BC são iguais, determine a equação da circunferência circunscrita ao referido triângulo.

10 **(IIT)** As tangentes traçadas do ponto $P(1, 8)$ à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 11 = 0$ intersectam a circunferência nos pontos A e B. A equação do circuncírculo do triângulo PAB é:

(A) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 19 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 29 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 19 = 0$.

11 Fazem-se passar pelo ponto $A(4, 2)$ as tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 10$. Calcule o ângulo formado por essas tangentes.

12 Ache as equações dos círculos que, tendo seu centro sobre a reta $4x - y - 3 = 0$ são tangentes às retas $x - 2y = 5$ e $2x + y + 3 = 0$.

13 A reta $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1, a > 0$, intercepta os eixos coordenados x e y nos pontos P e Q, respectivamente. A equação geral da circunferência tangente ao eixo x no ponto P e tangente ao eixo y no ponto Q é:

(A) $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay + a^2 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + a^2 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + a^2 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$.

14 Fazem-se passar pelo ponto $P(2, -3)$ as tangentes ao círculo $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$. Ache a equação da corda que passa pelos pontos de tangência.

15 Seja P o ponto da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ mais próximo da origem. A soma das coordenadas de P é:

(A) 18/5.
(B) 7/2.
(C) 9/2.
(D) 28/5.
(E) 13/2.

16 Ache as equações dos círculos tangentes às três retas $4x - 3y - 10 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$ e $3x - 4y - 15 = 0$.

17 **(AFA)** As equações das retas tangentes à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ e paralelas à reta $x + y - 2 = 0$ são:

(A) $x + y - (3 + 2\sqrt{2}) = 0$ e $x + y - (3 - 2\sqrt{2}) = 0$.
(B) $x + y + (3 + 2\sqrt{2}) = 0$ e $x + y + (3 - 2\sqrt{2}) = 0$.
(C) $x + y + (-3 + 2\sqrt{2}) = 0$ e $x + y + (-3 - 2\sqrt{2}) = 0$.
(D) $x + y - (-3 + 2\sqrt{2}) = 0$ e $x + y - (-3 - 2\sqrt{2}) = 0$.

18 Considere a família de retas dada por $a(3x + 4y - 10) + b(3x - y - 5) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determine as retas dessa família que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

19 Do ponto $P = (-9, 3)$ são traçadas as tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 78 = 0$. Determine a distância do centro da circunferência à corda que une os pontos de contato.

20 O ponto $C(3, -1)$ é o centro de uma circunferência que determina sobre a reta $2x - 5y + 18 = 0$ uma corda, de comprimento 6. Determine a equação desta circunferência.

21 Determine o ângulo formado pela interseção das circunferências $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ e $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$. (Chama-se ângulo formado por duas circunferências o ângulo compreendido entre suas tangentes no ponto de interseção.)

22 Encontre a equação do círculo que passa pelo ponto $(-8, 5)$ e pelas interseções dos círculos $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$, caso eles sejam secantes.

23 Determine a equação do círculo que passa pelas interseções dos dois círculos $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2 = 0$ e é tangente à reta $x + 3y - 14 = 0$.

24 Mostre que a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ no ponto (x_0, y_0) é dada por:

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + D \cdot \frac{x + x_0}{2} + E \cdot \frac{y + y_0}{2} + F = 0$$

25 Mostre que dadas três circunferências cujos centros não estejam alinhados, sempre existe um ponto com igual potência em relação às três circunferências (centro radical).

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Dado o feixe de retas $a(x - 8y + 30) + b(x + 5y - 22) = 0$, determine as retas desse feixe que determinam na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ cordas de comprimento $2\sqrt{3}$.

02 Prove que a corda comum às circunferências que têm por diâmetros as medianas BB' e CC' de um triângulo é parte da reta que contém a altura AA' deste triângulo. (Dados: $A(0, 2a)$; $B(2b, 0)$; $C(2c, 0)$ e $bc < 0$.)

03 Prove, analiticamente, que dados três círculos, ao tomarmos os eixos radicais de cada par destes círculos, as três retas obtidas são concorrentes. (Esse ponto é chamado de centro radical.)

04 Mostre que os pontos $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(b, \frac{1}{b}\right), \left(c, \frac{1}{c}\right), \left(d, \frac{1}{d}\right)$ pertencem a uma mesma circunferência, então $abcd = 1$.

05 Sejam dois pontos fixos $A(a,0)$ e $B(0,b)$ sobre os eixos Ox e Oy. Tomam-se, respectivamente, os pontos A' e B' tais que $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Demonstre que quando varia o comprimento dos segmentos iguais AA' e BB', a mediatriz de $A'B'$ passa por um ponto fixo.

06 Demonstre que as duas circunferências $x^2 + y^2 - 2mx + 2ny - m^2 + n^2 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2nx - 2my + m^2 - n^2 = 0$ se cortam formando um ângulo reto.

07 Determine a equação e o raio do círculo de menor diâmetro que possui com o círculo $x^2 + y^2 - 8x - 25 = 0$ eixo radical $y - 2x - 5 = 0$.

08 Determine a condição para que as circunferências $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ e $(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2$ sejam ortogonais. (Duas circunferências são ortogonais quando se cortam formando um ângulo reto.)

09 Mostre que a equação da circunferência que passa por (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) (pontos não colineares) é dada por:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10 Sejam ABC e BCD triângulos equiláteros, com A e D situados em semiplanos distintos. Seja r uma reta variável passando pelo ponto D. Esta reta intersecta a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em X e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ em Y. Seja T a interseção das retas $\overleftrightarrow{BY}$ e $\overleftrightarrow{CX}$. Determine o lugar geométrico de T, quando a reta r varia.

RASCUNHO

Introdução

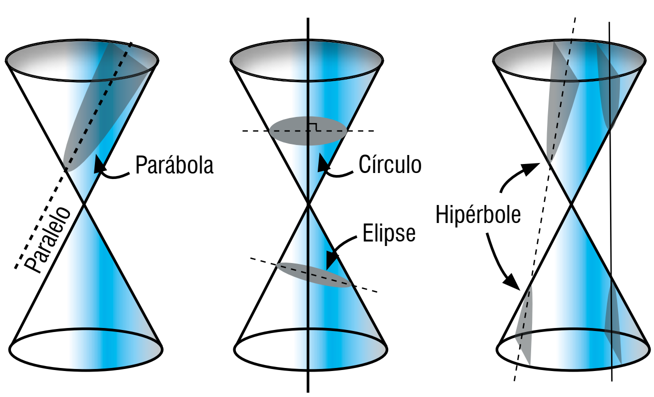
Iniciaremos agora o estudo das cônicas (elipses, hipérboles e parábolas), que são as curvas obtidas a partir da interseção de um plano com um cone circular reto. Na natureza, as cônicas aparecem, por exemplo, na descrição de órbita de planetas (normalmente, elipses), na interseção de ondas sonoras com a superfície (normalmente, hipérboles) e em lançamentos oblíquos (parábola).

Os seus principais objetivos nesta seção são internalizar as definições geométricas, memorizar as relações entre os elementos de cada tipo de cônica e resolver problemas utilizando equações algébricas para modelar cônicas com eixos paralelos aos eixos coordenados. Na próxima seção, você estudará tópicos mais avançados, como fórmulas para o raio vetor, equações para retas tangentes, propriedades óticas e equações polares.

1. Definições

Existem algumas definições possíveis para cônicas, todas elas equivalentes. Mostraremos aqui três dessas definições, mas o estudo inicial será feito a partir de 1.3. A equivalência entre as definições apresentadas virá como exercício quando estudarmos geometria espacial (1.1 e 1.3) e na segunda seção sobre cônicas (1.2. e 1.3).

1.1 Definição espacial



Uma cônica (ou seção cônica) é a interseção de um plano com um cone reto duplo infinito, como ilustrado na figura. Essa cônica será definida como:

Elipse: se a interseção for limitada (i.e., se o ângulo entre a seção e a base do cone for menor que o ângulo entre a geratriz e a base do cone).

No caso em que a seção é paralela à base do cone, a elipse vira um círculo.

Parábola: se o plano for paralelo à geratriz do cone.

Hipérbole: nos demais casos (i.e., se o ângulo entre a seção e a base do cone for maior que o ângulo entre a geratriz e a base do cone). No caso em que a seção é perpendicular à base do cone, a hipérbole é dita equilátera.

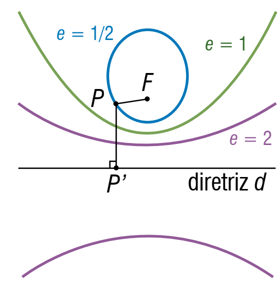
1.2 Definição astronômica

Uma cônica é o conjunto dos pontos cuja razão a um ponto fixo (denominado foco F) e a uma reta fixa (denominada diretriz d) é constante (denominada excentricidade e), i.e., $\frac{PF}{\text{dist}(P,d)} = e$. Essa cônica poderá ser:

Elipse: $e < 1$

Parábola: $e = 1$

Hipérbole: $e > 1$



É possível provar que, no caso da elipse e da hipérbole, sempre existirão um outro foco F' e uma outra diretriz d', tais que $\frac{PF'}{\text{dist}(P,d')} = e$.

1.3 Definição geométrica

Os três tipos de cônicas também podem ser definidos a partir de propriedades geométricas bem específicas, como veremos agora:

Elipse: conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante: $PF + PF' = 2a$. A distância entre os dois pontos é denominada distância focal $2c$ e pode-se mostrar que a excentricidade de 1.2. satisfaz $e = \frac{c}{a}$.

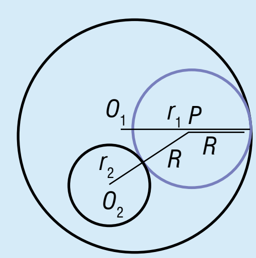
Hipérbole: conjunto dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante: $|PF - PF'| = 2a$. A distância entre os dois pontos é denominada distância focal $2c$ e pode-se mostrar que a excentricidade de 1.2. também satisfaz $e = \frac{c}{a}$ na hipérbole.

Parábola: conjunto dos pontos cuja distância a um ponto fixo (foco) é igual à sua distância a uma reta dada (diretriz): PF = dist (P, diretriz) e uma reta dada (diretriz) é constante.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Dadas duas circunferências, C_1 e C_2, com centros O_1 e O_2 e raios $r_1 > r_2$, determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que são simultaneamente tangentes a C_1 interiormente e a C_2 exteriormente.

Solução: Seja P um ponto do lugar geométrico e R o raio da circunferência associada a P. Pela teoria de circunferências tangentes:



$$PO_1 = r_1 - R, PO_2 = r_2 + R$$

Somando as equações para eliminar o parâmetro R:

$$PO_1 + PO_2 = r_1 + r_2$$

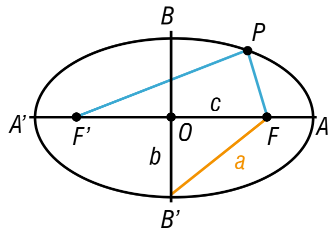
Pela definição 1.3, segue que P pertence a uma elipse de focos O_1 e O_2. Reciprocamente, podemos ver que todo ponto desta elipse pertence ao lugar geométrico.

2. Elipse

2.1 Elementos

A definição $PF + PF' = 2a$ implica que a curva tem dois eixos de simetria: a reta que une os focos e a mediatriz dos focos. Para esses eixos e para seus pontos notáveis, a nomenclatura usual é:

Focos: F, F';
Centro: O;
Vértices: A, A', B, B'.
Eixo maior: $AA' = 2a$ (pois $AA' = AF + A'F = AF + AF' = 2a$).
Eixo menor: $BB' = 2b$.
Distância focal: $FF' = 2c$.



Relação fundamental:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Demonstração: como B' está na elipse e $B'F = B'F'$, temos $B'F + B'F' = 2a \Rightarrow B'F = a$. A relação fundamental, portanto, é o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $OB'F$.

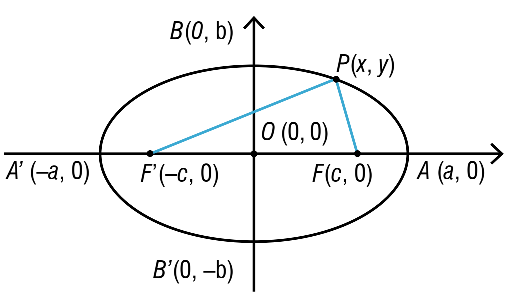
2.2 Equação reduzida

A equação de uma elipse com centro na origem e eixos paralelos aos eixos coordenados é dada por:

Elipse deitada (focos no eixo x): $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

Elipse em pé (focos no eixo y): $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$

Demonstração: para a elipse deitada, tem-se o eixo x sobre os focos, o eixo y na mediatriz dos focos e as coordenadas indicadas na figura:



Partindo da definição:

$$PF + PF' = 2a \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois termos ao quadrado e simplificando, um ponto na elipse precisa satisfazer:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \quad (*)$$

Cancelando o 4, elevando (*) ao quadrado e substituindo $a^2 - c^2 = b^2$:

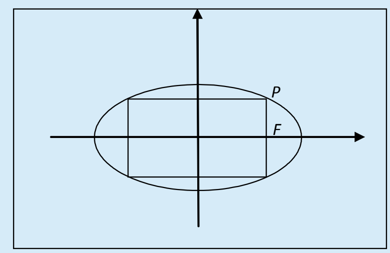
$$a^2\left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 + 2cxa^2 + c^2x^2 \Leftrightarrow$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para a elipse em pé (focos no eixo y), basta trocar x por y e y por $-x$ na equação acima.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02 Considere a elipse de equação $\varepsilon: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Determine a área do retângulo, inscrito em ε, de lados paralelos aos eixos, tal que os focos da elipse estão nos lados do retângulo.

Solução: Veja o desenho abaixo. Os focos da elipse estão sobre o eixo x, já que o maior denominador está no x. Temos que $a^2 = 9$, $b^2 = 4$; portanto, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $c^2 = 5$.



Portanto, $x_F = \sqrt{5}$, em que F é o ponto de abscissa positiva. Considere o ponto P como na figura. Como PF é vertical, temos que $x_P = \sqrt{5}$

Como P pertence à elipse, suas coordenadas devem satisfazer a equação da curva: $\dfrac{x_P^2}{9} + \dfrac{y_P^2}{4} = 1$, o que nos dá $y_P = \dfrac{4}{3}$ (já que P está no 1º quadrante). Vamos, então, ao cálculo da área do retângulo. A base é igual à distância focal $2c = 2\sqrt{5}$. A altura é o dobro de PF, logo, é igual a $2y_P = \dfrac{8}{3}$. Portanto, a área é igual a $2\sqrt{5} \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{16\sqrt{5}}{3}$ unidades de área.

03 Sejam F_1 e F_2 os pontos do plano cartesiano de coordenadas $F_1 = \left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{3}, 0\right)$. Determine as coordenadas dos pontos da reta r de equação $x - y = 1$ cujas somas das distâncias a F_1 e F_2 sejam iguais a 4 (isto é: determine as coordenadas dos pontos P sobre a reta r que satisfazem $PF_1 + PF_2 = 4$).

Solução: A 1ª ideia é utilizar a fórmula de distância entre pontos para calcular PF_1 e PF_2. No entanto, isso nos leva a contas muito grandes e desnecessárias. A melhor ideia é, inicialmente, caracterizar os pontos P tais que $PF_1 + PF_2 = 4$. Veja que esses pontos determinam uma elipse centrada na origem com eixos sobre os eixos x e y tal que $2a = 4$ (logo, $a = 2$) e $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{3}$ (logo, $c = \sqrt{3}$). Usando que $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $b = 1$.

Portanto, temos que P pertence à elipse de equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Como queremos que P também esteja na reta $x - y = 1$, devemos achar a interseção entre essa reta e a elipse. Basta, então, substituir $y = x - 1$ em $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Fazendo isso, temos a equação do 2º grau $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(x-1)^2}{1} = 1$, que tem raízes $x = 0$ e $x = \dfrac{8}{5}$. Como $y = x - 1$, temos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

04 Identifique a direção do eixo principal de cada uma das elipses abaixo (i.e., determine se elas estão "deitadas" ou "em pé"):

a. $2x^2 + y^2 = 1$
b. $x^2 + 2y^2 = 1$

Solução: Colocando as equações na forma reduzida (3.1.), obtemos

$$\frac{x^2}{1/2} + y^2 = 1 \text{ e } x^2 + \frac{y^2}{1/2} = 1.$$

Na primeira equação, o eixo maior está sob y^2, o que significa, comparando com as equações reduzidas, que a elipse está em pé. Na segunda equação, o eixo maior está sob x^2, logo, esta elipse está deitada.

3. Hipérbole

3.1 Elementos

A definição $|PF - PF'| = 2a$ também implica que a curva tem como eixos de simetria a reta que une os focos e a mediatriz dos focos. Para esses eixos e para seus pontos notáveis, a nomenclatura usual é:

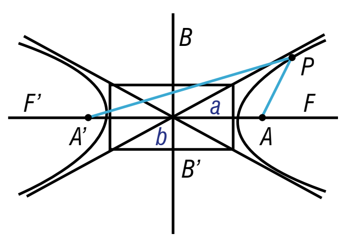
Focos: F, F'; Centro: O; Vértices: A, A', B, B'.

Eixo principal: $AA' = 2a$ (pois $AA' = AF' - A'F' = AF' - AF = 2a$).

Distância focal: $FF' = 2c$.

Eixo transverso: $BB' = 2b$.

Relação fundamental:



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Explicação: na hipérbole, o b não tem uma interpretação geométrica tão intuitiva quanto na elipse. Por ora, definiremos $b^2 = c^2 - a^2$ e, depois, veremos que esse b tem relação com as assíntotas da hipérbole.

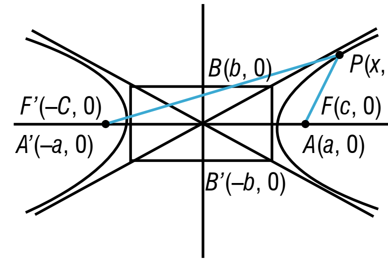
3.2 Equação reduzida

A equação de uma hipérbole com centro na origem e eixos paralelos aos eixos coordenados é dada por:

Hipérbole deitada (focos no eixo x): $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Hipérbole em pé (focos no eixo y): $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

Demonstração: para a hipérbole deitada, tem-se o eixo x sobre os focos, o eixo y na mediatriz dos focos e as coordenadas indicadas na figura:



Partindo da definição:

$$|PF - PF'| = 2a \Leftrightarrow$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Fazendo inicialmente a conta para o ramo direito da hipérbole (depois, basta trocar x por $-x$), o argumento do módulo será positivo e:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois termos ao quadrado e simplificando, um ponto na hipérbole precisa satisfazer:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad (*)$$

Cancelando o 4, elevando (*) ao quadrado e substituindo $c^2 - a^2 = b^2$:

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2 \Leftrightarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para a hipérbole em pé (focos no eixo y), basta trocar x por y e y por $-x$ na equação acima.

3.3 Assíntotas

As assíntotas de uma hipérbole com centro na origem e eixos paralelos aos eixos coordenados são:

Hipérbole deitada (focos no eixo x): $y = \pm\frac{b}{a}x$

Hipérbole em pé (focos no eixo y): $y = \pm\frac{a}{b}x$

Demonstração: para a hipérbole deitada, tem-se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. No 1º quadrante, tem-se:

Dividindo a equação da hipérbole deitada por x^2 e tomando limites: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Dividindo a equação por x, tomando limite e substituindo o resultando anterior: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(y - \frac{b}{a}x\right) = 0$.

O resultado nos outros quadrantes segue da simetria em relação aos eixos coordenados. Para a hipérbole em pé, basta trocar x e y.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

05 Considere os pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$. Determine o lugar geométrico dos pontos P tais que o produto dos coeficientes angulares das retas AP e BP seja igual a 2.

Solução: Seja $P = (x,y)$. Sabemos que $m_{AP} = \frac{y}{x+1}$ e $m_{BP} = \frac{y}{x-1}$. Queremos então que $\frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = 2$, ou seja, $y^2 = 2(x^2 - 1)$, que é equivalente à hipérbole de equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Há um detalhe (muito comum, inclusive, em problemas de lugar geométrico). Veja que os pontos A e B pertencem a essa hipérbole. No entanto, quando P coincide com A ou B, o problema não faz sentido (não faria sentido falar em coeficiente angular da reta AP quando A e P coincidem, por exemplo). Portanto, a resposta é a hipérbole $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$, excluindo-se seus 'vértices' A e B.

06 A hipérbole $x^2 - 2y^2 = 1$ intersecta a reta $y = 2x - 3$ em dois pontos distintos A e B. Determine o ponto médio M de AB.

Solução: Substituindo uma equação na outra:
$x^2 - 2 \cdot (2x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow -7x^2 + 24x - 18 = 0$
As duas raízes x_1 e x_2 dessa equação nos dão as coordenadas de A e B. Usando a fórmula para soma dsa raízes de um trinômio:
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{24}{2 \cdot (-7)} = \frac{12}{7}$$

Como M está na reta dada: $y_M = 2x_M - 3 = 2 \cdot \frac{12}{7} - 3 = \frac{3}{7}$

Obs.: atente para a ideia de se utilizar as relações de Girard para evitar contas com raízes quadradas em problemas deste tipo.

07 Identifique a direção do eixo principal de cada uma das hipérboles abaixo:

a. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

b. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

c. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

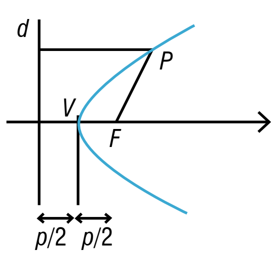
d. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solução: Comparando com a equação reduzida, vemos que a e b são deitadas (eixo principal sob o eixo x) e c e d são em pé (eixo principal sob o eixo y). Na hipérbole deitada, o sinal de "menos" está sempre na frente do termo em y^2 na equação reduzida, independentemente do tamanho dos eixos.

4. Parábola

4.1 Elementos

A definição $PF = dist(P, \text{diretriz})$ implica que a parábola tem um eixo de simetria, que é a reta perpendicular à diretriz passando pelo foco. A nomenclatura usual é:



Foco: F

Vértice: V

Parâmetro: p (mede a distância do foco à diretriz)

Eixo focal: VF

Relação fundamental:

$$VF = \frac{p}{2}$$

Demonstração: por definição, $VF + dist(V, \text{diretriz}) = p$. E, como V pertence à parábola, tem-se $VF = dist(V, \text{diretriz})$.

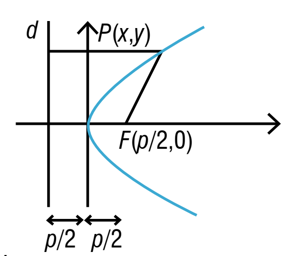
4.2 Equação reduzida

A equação de uma parábola com vértice na origem e eixo focal em um dos eixos coordenados é dada por:

Parábola deitada para a direita (foco no eixo x): $\boxed{y^2 = 2px}$

Parábola em pé para cima (foco no eixo y): $\boxed{x^2 = 2py}$

Demonstração: para a parábola deitada com concavidade para a direita, colocamos os eixos e as coordenadas dos pontos principais como na figura:



Partindo da definição:
$PF = dist(P, \text{diretriz}) \Leftrightarrow$
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

Elevando ao quadrado e simplificando:
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 2px$$

Para a parábola deitada com concavidade para a esquerda, basta trocar p por $-p$. Para a parábola em pé, o raciocínio é análogo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

08 Determine o vértice, o foco e o parâmetro da parábola $y = 4x^2$.

Solução: Comparando a equação dada $x^2 = \frac{1}{4}y$ com a equação reduzida $x^2 = 2py$, tem-se que a parábola tem eixo focal no eixo y (está em pé), que $2p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{8}$ e que o vértice está na origem.

Como o foco fica a uma distância p/2 do vértice e a parábola está em pé, tem-se $F = \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{16}\right)$.

09 Determine o vértice, o foco e o parâmetro da parábola $y - 2 = 4(x - 1)^2$.

Solução: Note que essa parábola é a mesma do exercício anterior, exceto por uma translação. Nesse caso seu vértice se encontra no ponto (1, 2) e seu foco no ponto (1, 33/16).

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 **(AFA)** A equação da elipse que, em um sistema de eixos ortogonais, tem focos F_1 (–3, 0) e F_2 (3, 0) e passa pelo ponto $P\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}\right)$, é:

(A) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$
(B) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
(C) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$
(D) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

02 **(AFA)** A distância focal da elipse $x^2 + 16y^2 = 4$ é:

(A) 1.
(B) 3.
(C) $\sqrt{15}$.
(D) $\sqrt{20}$.

03 **(AFA)** Se $A(10, 0)$ e $B(-5, y)$ são pontos de uma elipse cujos focos são $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$, o perímetro do triângulo BF_1F_2 é:

(A) 24.
(B) 36.
(C) 40.
(D) 60.

04 **(AFA)** A excentricidade da elipse que tem centro na origem, focos em um dos eixos coordenados e que passa pelos pontos $A(3,2)$ e $B(1,4)$ é:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

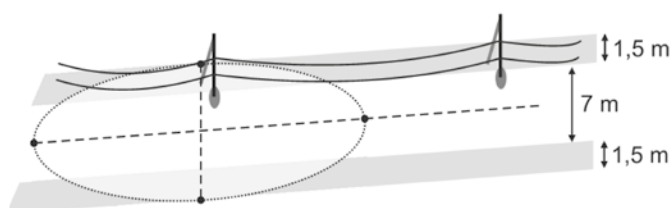
05 Uma cônica tem equação $252x^2 + 9y^2 = 28$. Determine a área do quadrilátero convexo com dois vértices sobre os focos e os outros dois sobre as extremidades do menor dos eixos da cônica.

06 Determine a excentricidade e a equação de uma elipse de centro na origem e de eixo maior igual a 18, sobre Ox, sabendo-se que $P(c, b/3)$ pertence à elipse, em que c é a abscissa de um dos focos e b é o semieixo menor.

07 A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

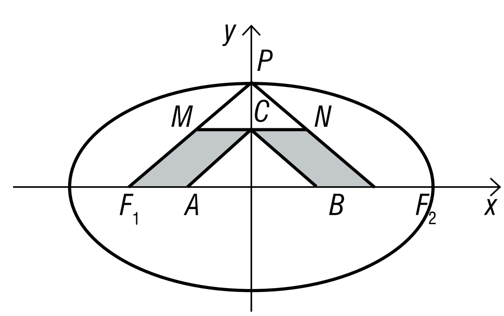
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;
II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;
III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de, aproximadamente:
(Dado: $0{,}943^2 \approx 0{,}889$ e $\sqrt{0{,}111} \approx 0{,}333$.)



(A) 35.
(B) 30.
(C) 25.
(D) 20.
(E) 15.

08 **(AFA)** Na figura abaixo, F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. O ponto C, de coordenadas $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, pertence ao segmento $\overline{MN}$. Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{MN}$ são, respectivamente, paralelos aos segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{F_1F_2}$. Área da figura sombreada, em unidades de área, é:



(A) 3.
(B) 6.
(C) 9.
(D) 12.

09 A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

10 O cometa Halley tem uma órbita elíptica com eixo maior e eixo menor iguais a 540×10^7 km e 140×10^7 km, respectivamente. Sabendo que o Sol está em um dos focos da elipse, calcule o valor $\frac{d}{10^7}$, em que d é a menor distância entre o Sol e o cometa, medida em quilômetros. Desconsidere a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

11 Uma elipse cuja distância focal mede 1 cm está inscrita em um retângulo (de lados paralelos aos eixos principais da elipse) de área igual a $\sqrt{2}$ cm². Determine as medidas dos lados do retângulo.

12 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso). Em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, considere os pontos $A(5; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-5; 0)$ e $D(0; -3)$.

( ) A equação da reta que contém os pontos A e B é $3x + 5y + 15 = 0$.
( ) A área do quadrilátero $ABCD$, em unidades de área do sistema, é igual a 60.
( ) A equação da circunferência inscrita no quadrilátero $ABCD$ é $x^2 + y^2 = \dfrac{225}{34}$.
( ) A equação da elipse que contém os pontos A, B, C e D é $9x^2 + 25y^2 = 225$.
( ) O ponto $P(3;2)$ é interior à elipse que contém os pontos A, B, C e D, e é exterior ao quadrilátero $ABCD$.

13 **(AFA)** A equação reduzida da hipérbole, cujos focos são os extremos do eixo menor da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 625$, e cuja excentricidade é igual ao inverso da excentricidade da elipse dada, é:

(A) $16y^2 - 9x^2 = 144$
(B) $9y^2 - 16x^2 = 144$
(C) $9x^2 - 16y^2 = 144$
(D) $16x^2 - 9y^2 = 144$

14 Determine a equação de uma hipérbole que tem vértices em (0, 3) e (0, –3) e focos em (0, 5) e (0, –5).

15 **(IIT)** Se a excentricidade da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é o recíproco da excentricidade da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ e se a hiérbole passa por um dos focos da elipse, então:

(A) $a^2 = 3$, $b^2 = 2$.
(B) o ponto (2, 0) é um dos focos da hipérbole.
(C) a excentricidade da hipérbole é dada por $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.
(D) a equação da hipérbole é $x^2 - 3y^2 = 3$.

16 Um ponto se move de modo que o produto dos coeficientes angulares das retas que o ligam aos pontos (– 4, – 2) e (4, 2) dá sempre – 4. Determine seu lugar geométrico.

17 Dada a hipérbole $4x^2 - y^2 = 32$, determine uma reta paralela ao eixo dos y tal que seus pontos de interseção com a hipérbole formem com o foco F (de abscissa positiva) um triângulo retângulo em F.

18 O vértice, o foco e a reta diretriz da parábola de equação $y = x^2$ são dados por:

(A) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 1/4); Reta diretriz $y = -1/4$.
(B) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 1/2); Reta diretriz $y = -1/2$.
(C) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 1); Reta diretriz $y = -1$.
(D) Vértice: (0, 0); Foco: (0, – 1); Reta diretriz $y = 1$.
(E) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 2); Reta diretriz $y = -2$.

19 A equação da circunferência de centro $C = (-3, -1)$, que contém o vértice da parábola $y + 2x^2 + 4x = 0$ é:

(A) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$
(B) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$
(C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
(D) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$

20 **(AFA)** O parâmetro da parábola que passa pelo ponto $P(6, 2)$ e cujo vértice $V(3, 0)$ é o seu ponto de tangência com o eixo das abcissas é:

(A) 9/5.
(B) 9/4.
(C) 3.
(D) 9/2.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 **(AFA)** Sobre o triângulo PF_1F_2 em que $P(2, 2)$ e F_1 e F_2 são focos da elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, é correto afirmar que:

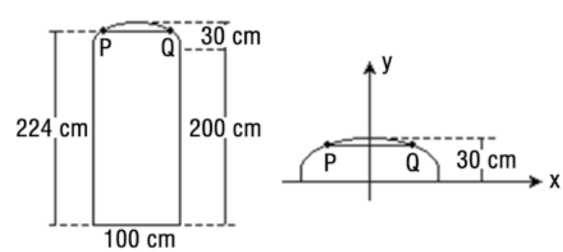
(A) é isósceles.
(B) é obtusângulo.
(C) tem área igual a 16.
(D) tem perímetro igual a $2\sqrt{2} + 8$.

02 **(AFA)** O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que, juntamente com os pontos $A(-3, 5)$ e $B(3, 5)$, determina triângulos com perímetro $2p = 16$ cm é uma:

(A) elipse.
(B) parábola.
(C) hipérbole.
(D) circunferência.

03 Dada uma elipse de semieixos a e b, calcule, em termos destes parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse.

04 Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100 cm × 200 cm e uma semielipse.
Observe as figuras:



Na semielipse, o eixo maior mede 100 cm e o semieixo menor, 30 cm. Calcule a medida da corda PQ, paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224 cm de altura.

05 Seja b um número real. Encontre os valores de b, tais que no plano cartesiano xy, a reta $y = x + b$ intercepta a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ em um único ponto. A soma dos valores de b é:

(A) 0.
(B) 2.
(C) $2\sqrt{5}$.
(D) $\sqrt{5}$.
(E) $-2\sqrt{5}$.

06 **(AFA)** Dada a equação $ax^2 + by^2 = c$, em que a, b e c são reais não nulos, é correto afirmar que, necessariamente, sua representação gráfica é uma:

(A) circunferência, se $a = b$.
(B) hipérbole, se $a = -b$ e $c = b$.
(C) elipse de centro na origem, se $a \neq b$ e $c = 1$.
(D) circunferência, se $a = b$ e $c > 0$.

07 Determine as equações das retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não interceptam a curva do plano dada pela equação $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

08 Considere o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ de raio r e a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Nesse caso, pode-se afirmar que:

(A) se $r < 1$, então as curvas se intersectam em quatro pontos.
(B) se $r = 1$, então as curvas têm quatro pontos em comum.
(C) se $r = 1$, as curvas se intersectam em (0, 1) e (0, –1).
(D) se $r = \sqrt{17}$, então as curvas se intersectam apenas nos pontos $(3, 2\sqrt{2})$ e $(3, -2\sqrt{2})$.
(E) se $r > \sqrt{17}$, então as curvas se intersectam em quatro pontos.

09 **(AFA)** Considere as afirmativas abaixo:

I. As retas $r: \frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ e $s: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t \end{cases}$ são perpendiculares.

II. A equação $4x = y^2$ representa uma parábola com eixo de simetria horizontal.

III. $-\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$ representa uma hipérbole.

É(são) correta(s) a(s) afirmativa(s):

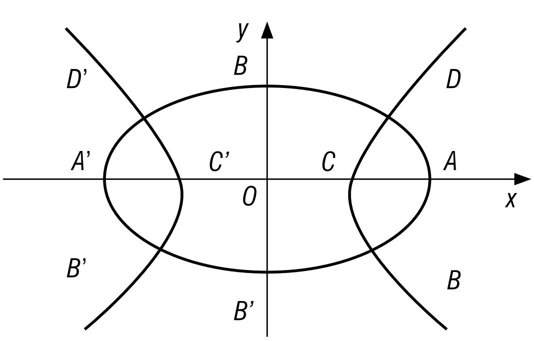
(A) I, II e III.
(B) I, II.
(C) III, somente.
(D) II, somente.

10 **(IIT)** Dada a família de hipérboles $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}=1$, qual das alternativas abaixo é constante quando o ângulo α varia?

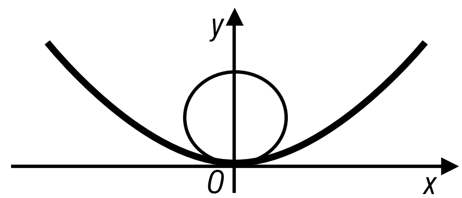
(A) Abscissa dos vértices.
(B) Abscissa dos focos.
(C) Excentricidade.
(D) Diretriz.

11 **(IME)** Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:

a. os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole;
b. BB' é o eixo conjugado da hipérbole;
c. $OB = OB' = 3$ m e $OC = OC' = 4$ m.



12 A figura a seguir mostra, no plano cartesiano, o gráfico da parábola de equação $y=\frac{x^2}{4}$ e uma circunferência com centro no eixo y e tangente ao eixo x no ponto O.



Calcule o raio da maior circunferência, nas condições acima, que tem um único ponto de interseção com a parábola.

13 Sejam os pontos $A(2, 0)$ e $A'(-2, 0)$. Por A', traça-se uma reta variável que intersecta o eixo das ordenadas em B. Por A, traça-se uma perpendicular à reta AB que intersecta a reta $A'B$ em M. Determine o lugar geométrico do ponto M.

14 **(IME)** Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse. Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3}$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

15 É dada uma circunferência (C) de centro na mesma origem e raio R. Nesta circunferência, é traçada uma corda variável AB, paralela ao eixo das abscissas. Pelo ponto A, traça-se a reta (r), paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e pelo ponto B, a reta (s), perpendicular à reta $2y + x + 5 = 0$. Determine e identifique o lugar geométrico das interseções das retas (r) e (s).

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Considere o conjunto das cordas de uma elipse formando um ângulo θ com o eixo maior. Determine o lugar geométrico dos pontos médios dessas cordas.

02 Uma hipérbole tem seu centro na origem e seu eixo conjugado coincidente com o eixo X. O comprimento de cada *latus rectum* é 2/3 e a hipérbole passa pelo ponto $\left(-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Determine sua equação.

03 **(IIT)** Seja P um ponto variável na elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $0<b<a$. Considere que a reta paralela ao eixo y passando por P intersecta a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ em um ponto Q, tal que P e Q têm ordenada de mesmo sinal. Determine o lugar geométrico dos pontos R pertencentes ao segmento PQ tais que $\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}$.

04 Determine o lugar geométrico dos focos de uma elipse da qual se conhecem um ponto $M(\alpha, \beta)$ e o círculo principal $x^2 + y^2 = a^2$.

05 Um segmento de reta OB encontra o círculo $x^2 + y^2 = ax$ no ponto B; a partir deste ponto é traçada uma perpendicular BC ao eixo Ox. Traça-se então uma perpendicular CM a OB ($C \in Ox$, $M \in OB$). Determine a equação do lugar geométrico do ponto M.

06 Considere a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com $a > b$. Seja F e F' seus focos, sendo F o de abscissa positiva. Para um ponto M qualquer sobre a elipse, determine MF e MF' em função da abscissa de M.

Conceitos básicos de geometria espacial

Assunto 11

1. Introdução

No estudo de geometria euclidiana, começamos vendo a parte associada à geometria plana, em que toda a estrutura era contida no plano, um dos conceitos primitivos. Agora, na continuação do estudo, veremos a estrutura da geometria no espaço, que também é um conceito primitivo. Para tanto, temos que assumir alguns axiomas relativos a ele e estabelecer algumas novas definições.

Acrescentem-se aos axiomas da geometria plana mais alguns:

Ax. 1) Três pontos não colineares determinam um plano que os contém.

Ax. 2) Se dois pontos estão num plano, a reta determinada por eles está contida nesse plano. [Ax. de Inclusão]

Ax. 3) Existem infinitos pontos dentro e fora de um plano.

Além disso, é importante adicionar uma modificação à definição de retas paralelas: dizemos que duas retas são paralelas se, e somente se, não se intersectam e são coplanares, ou seja, deve existir um plano que contenha as duas retas.

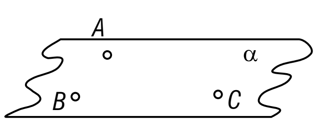
Por meio dos axiomas anteriores, podemos concluir quatro maneiras de determinar um plano:

Det. 1) Três pontos não colineares determinam um plano que os contém.

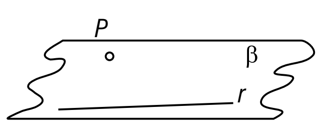
Det. 2) Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano que os contém.

Det. 3) Duas retas concorrentes determinam um plano que as contém.

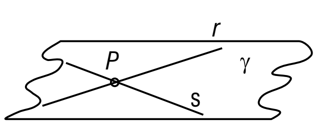
Det. 4) O par de retas paralelas determina um plano que as contém.



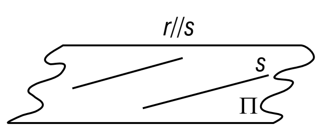
$\alpha = \text{pl}(ABC)$



$\beta = \text{pl}(r, P)$



$\gamma = \text{pl}(r, s)$

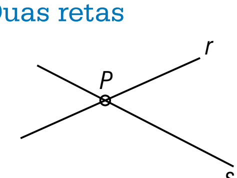


$\Pi = \text{pl}(r, s)$

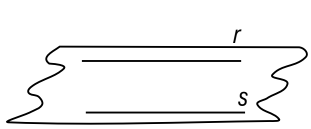
2. Geometria posicional

Estudemos as possíveis interseções entre os conjuntos primitivos.

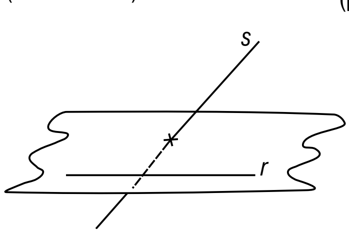
Duas retas



$r \cap s = \{P\}$
(concorrentes)

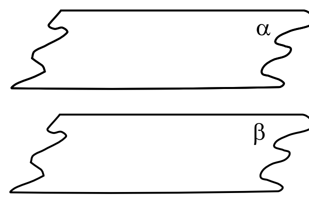


$r // s \Leftrightarrow r, s$ coplanares
$r \cap s = \varnothing$
(paralelas)

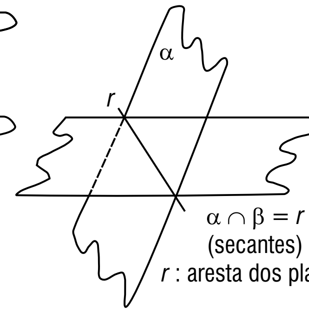


r e s não coplanares
(reversas)

Dois planos

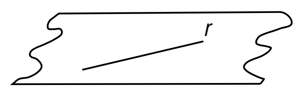


$\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$
(paralelos)

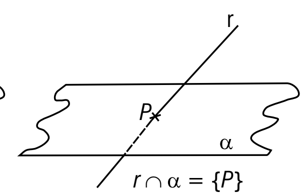


$\alpha \cap \beta = r$
(secantes)
r : aresta dos planos

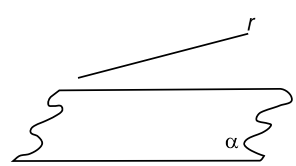
Reta e plano



$r \subset \alpha$
(contido no plano)



$r \cap \alpha = \{P\}$
(secante)
P : traço de r em α



$r // \alpha \leftrightarrow r \cap \alpha = \varnothing$
(paralela)

3. Paralelismo

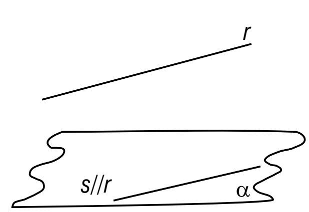
Como vimos na geometria plana, retas paralelas têm particularidades muito interessantes na resolução de problemas. O mesmo vale para problemas em geometria espacial: além do aspecto métrico de manutenção de razões e proporções [teorema de Tales, semelhança de triângulos, paralelogramo, etc], retas paralelas servirão ainda como argumento para transporte de ângulos.

Além das maneiras tradicionais de obter paralelas, vistas em geometria plana, temos mais três formas de fazê-lo no espaço:

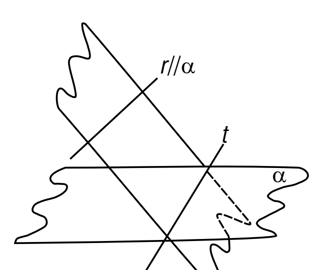
Reta // Plano

Como obter: uma reta é paralela a um plano se existir nele uma outra reta paralela à primeira.

Como usar: a seção gerada num plano por outro que contém uma reta paralela ao plano é paralela à reta.



Obtém-se $r // \alpha$

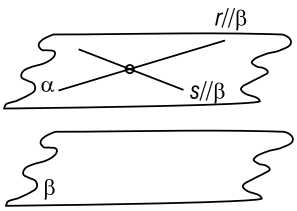


Obtém-se $r // t$

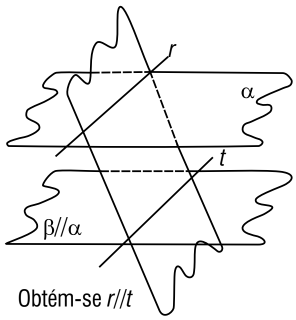
Plano // Plano

Como obter: dois planos são paralelos se duas retas concorrentes de um são paralelas ao outro.

Como usar: as seções de dois planos paralelos geradas por um plano transversal são paralelas entre si.



Obtém-se α//β



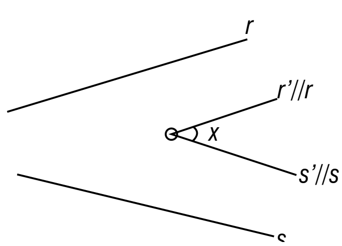
Obtém-se r//t

Transitividade do paralelismo

Se $r//s$ e $s//t$, então $r//t$.

4. Ângulos entre retas reversas

O ângulo entre duas retas reversas é igual ao ângulo entre duas retas paralelas a elas, concorrentes entre si.

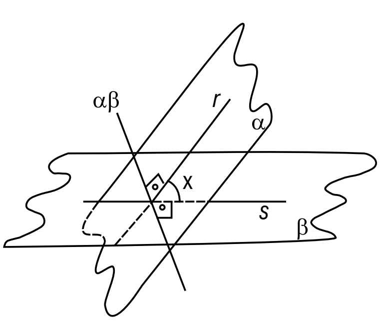


$r \wedge s = r' \wedge s' = x$

Dizemos que duas retas são ortogonais quando são reversas e o ângulo entre elas é de 90°.

5. Ângulos diedros

Definimos o ângulo entre dois planos concorrentes como o ângulo entre duas retas perpendiculares à aresta dos planos. Diedro é a região espacial interna compreendida entre os planos.

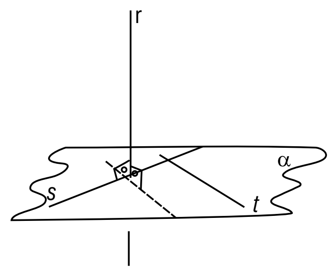


Na figura,
$r \perp \alpha\beta$
$s \perp \alpha\beta$
logo, $\alpha \wedge \beta = r \wedge s = x$

Dizemos que dois planos são perpendiculares quando o diedro entre eles mede 90°.

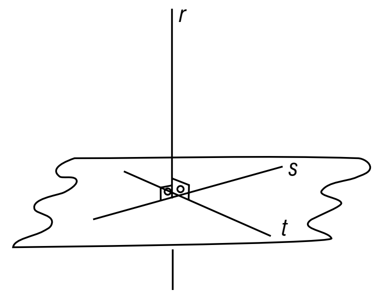
6. Ângulos entre reta e plano / projeção ortogonal

Primeiro, define-se que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é perpendicular ou ortogonal a toda reta desse plano. Para provar que uma reta é perpendicular a um plano, basta identificar duas retas concorrentes do plano às quais a reta original é perpendicular ou ortogonal. Dizemos também que, nesse caso, o ângulo entre a reta e o plano é de 90°.



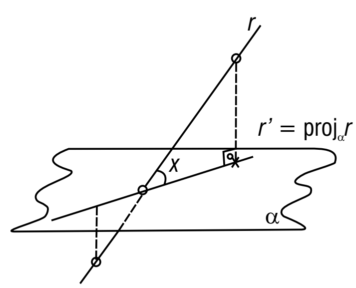
Se $r \perp \alpha$ então $r \perp t$, para toda $t \subset \alpha$

Se $r \perp s$, $r \perp t$,
com s e t concorrentes,
então $r \perp \text{pl}(s, t)$



Dessa maneira, conseguimos projetar perpendicularmente um ponto num plano: a projeção de um ponto P num plano α é o ponto P', tal que PP' é perpendicular a α. Assim, prova-se que a projeção de uma reta não perpendicular a α é uma outra reta.

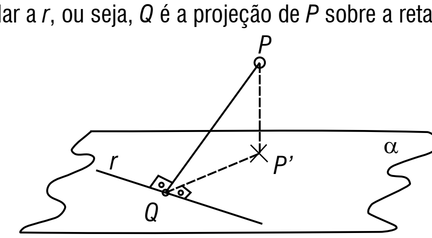
O ângulo entre um plano α uma reta não perpendicular a ele é definido como o ângulo entre a reta e a sua projeção em α.



Sendo r' a projeção de r
no plano α,
$r \wedge \alpha = r \wedge r' = x$

Teorema das três perpendiculares

Seja r uma reta contida em um plano α, e P um ponto externo ao plano. Se P' é a projeção de P em α, e Q é a projeção de P' sobre r, então PQ é perpendicular a r, ou seja, Q é a projeção de P sobre a reta r.

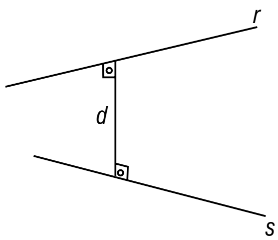


Ilustrando o teorema das três perpendiculares

Pode-se entender da seguinte maneira: a projeção de P em r coincide com projetar P no plano α, e então projetar na reta r.

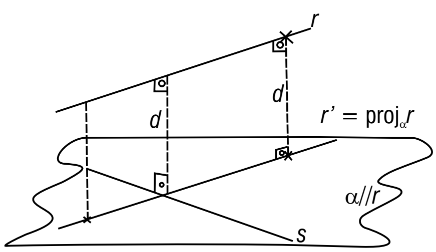
7. Distância entre retas reversas

A distância entre duas retas reversas é igual à medida do segmento perpendicular comum aos dois.



Na figura, d é a distância entre as retas reversas r e s.

Caso necessário, sendo r e s as retas reversas, seja α um plano paralelo a r contendo s. A distância $d(r,s)$ é igual à distância $d(r, \alpha)$.

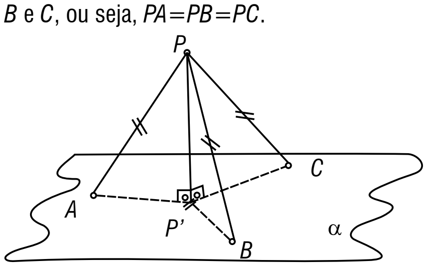


$\text{dist}(r, s) = d = \text{dist}(r, \alpha)$

8. Eixo / plano mediador / plano bissetor

Eixo

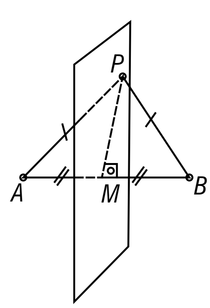
Dados três pontos não colineares A, B e C, chama-se de eixo a reta perpendicular ao plano (ABC) passando pelo circuncentro do triângulo ABC. O eixo de ABC é o lugar geométrico do ponto P que equidista de A, B e C, ou seja, $PA=PB=PC$.



Se $P' = \text{proj}_\alpha P$, então $PA = PB = PC \Leftrightarrow P'$ é circuncentro do ΔABC

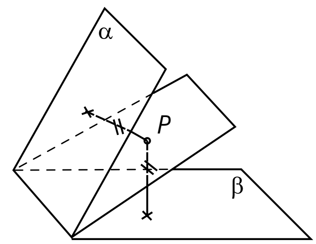
Plano mediador

Dados dois pontos A e B, chamamos de plano mediador do segmento AB o plano perpendicular a AB pelo ponto médio de AB. O plano mediador do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos P que equidistam de A e B, ou seja, $PA = PB$.



Plano bissetor

Dado um diedro formado por dois planos, o plano bissetor é o plano que divide o diedro em dois diedros congruentes. O par de planos bissetores perpendiculares entre si é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos planos dados.

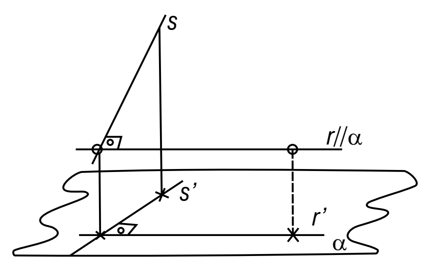


$d(P, \alpha) = d(P, \beta)$

9. Outros teoremas importantes

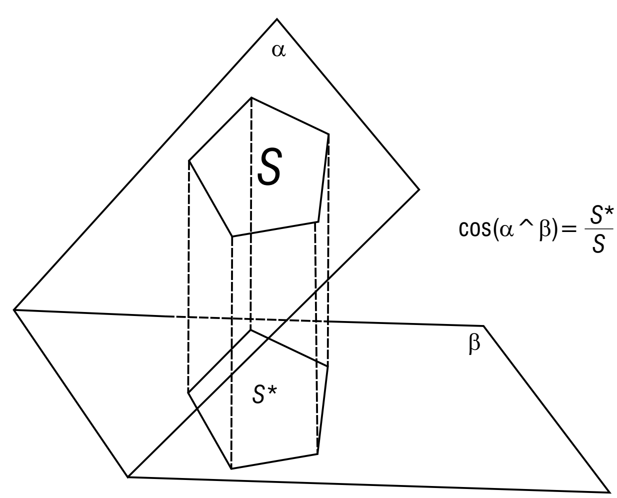
Teorema da projetividade do ângulo reto

A condição necessária e suficiente para que a projeção ortogonal de um ângulo reto seja outro ângulo reto é que um de seus lados seja paralelo ao plano de projeção, e que o outro lado não seja perpendicular ao plano.



Teorema da projeção de áreas

A área da projeção ortogonal de uma figura plana é igual ao produto da área da figura pelo cosseno do ângulo entre os planos da figura e de projeção.



$$\cos(\alpha \wedge \beta) = \frac{S^*}{S}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 **(Lema importante)** Se dois planos paralelos são cortados por um plano transversal, então as interseções são retas paralelas.

Solução:
Sejam α e β os planos paralelos e γ o plano transversal. Além disso, defina $r = \alpha \cap \gamma$ e $s = \beta \cap \gamma$.
Por um lado, veja que *r* e *s* não se intersectam, pois estão em planos paralelos (α e β).
Por outro lado, veja que *r* e *s* são coplanares, pois estão sobre o plano γ.
Portanto, *r*//*s*.

02 **(Projeção do ângulo reto)** Prove que um ângulo reto se projeta como reto se, e somente se, um dos lados é paralelo ao plano de projeção e o outro lado não é perpendicular ao plano.

Solução: É uma proposição com "se e somente se". Nesse caso, vamos dividir em duas partes: ida e volta.
1ª parte (volta): Vamos começar pela volta, que é mais fácil. Seja $B\hat{A}C = 90°$ o ângulo reto. Sejam *A*', *B*' e *C*' as projeções ortogonais de *A*, *B*, *C*, respectivamente, sobre um plano α. Agora, suponha que $\overline{AB} \,//\, \alpha$ e que $\overline{AC}$ não é perpendicular a α (isso garante que os pontos *A*', *B*' e *C*' são distintos).
Acompanhe os seguintes argumentos:
I. $\overline{AA'} \perp \alpha \Rightarrow \overline{AA'} \perp \overline{A'B'}$;
II. $\overline{AB} \,//\, \alpha$ e *A*', *B*', *A*, *B* coplanares $\Rightarrow \overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$
Juntando I e II, temos que $\overline{AB} \perp \overline{AA'}$ (*).
Seja β o plano definido pelas paralelas $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$. Por (*) e $B\hat{A}C = 90°$, veja que $\overline{AB} \perp \beta$, pois é perpendicular a duas retas que passam por *A*. Como $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$, segue que β. Com isso, $\overline{A'B'}$ é perpendicular a qualquer reta de β que passe por A'. Em particular, $\overline{A'B'} \perp \overline{A'C'}$, ou seja, $B'\hat{A}'C' = 90°$.
2ª parte (ida): Vamos usar a mesma notação da 1ª parte. Inicialmente, suponha que $A' = A$.
Suponha agora que $B'\hat{A}C = 90° = B\hat{A}C$.
Suponha, por absurdo, que *B* e *C* não pertençam a α. Então, existem pontos *X* e *Y* sobre as semirretas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que $\overrightarrow{XY} \,//\, \alpha$. Sejam *X*' e *Y*' as projeções de *X* e *Y* em α, respectivamente. Com um argumento análogo ao dado em II, temos que $\overline{XY} \,//\, \overline{X'Y'}$. Então, o quadrilátero *XX'Y'Y* é um retângulo. Logo, $XY = X'Y' = x$.
Definamos $AX = b$, $AX' = b'$, $AY = c$ e $AY' = c'$. Os triângulos *AXY* e *AX'Y'* são triângulos em *A*, portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos que $b^2 + c^2 = b'^2 + c'^2 = x^2$(**).
No entanto, como $b' < b$ e $c' < c$, (**) é um absurdo. Portanto, um dos pontos *B* ou *C* deve pertencer ao plano α.
No caso geral em que $A' \neq A$, basta traçar um plano paralelo a α que passe por *A* e utilizar o argumento acima. Com isso, provamos que *B* ou *C* está nesse plano paralelo, o que garante que $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$ é paralelo a α.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 No cubo *ABCD-EFGH*, determine quantos são os pares de arestas reversas entre si.

02 Num plano α, é dado o quadrilátero *ABCD*, e fora do plano toma-se um ponto *P*. Sendo *E* a interseção de *AB* e *CD*, *F* a interseção de *AD* e *BC*, e *G* a interseção de *AC* e *BD*, determine a interseção dos pares de planos:

a. *PAB* e *PCD*;
b. *PAD* e *PBC*;
c. *PAC* e *PBD*.

03 Sendo *M*, *N*, *P* e *Q* os pontos médios dos lados do quadrilátero reverso *ABCD*, prove que *MNPQ* é um paralelogramo.

04 *ABCD-EFGH* é um cubo. Determine os ângulos entre os seguintes pares de retas reversas:

a. *AE* e *BG*;
b. *EF* e *BC*;
c. *AC* e *FH*;
d. *FH* e *BG*.

05 O segmento *AB* é diâmetro de uma circunferência sobre a qual marca-se o ponto *C*. A reta *VA* é perpendicular ao plano da circunferência. O número de faces do tetraedro *VABC* que são triângulos retângulos é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

06 Duas retas não coplanares *r* e *s* são separadas por um plano π que lhes é paralelo. A reta *r* dista 12 cm de π e a reta *s* dista 30 cm do mesmo plano. Ache a distância entre *r* e *s*.

07 Pelo centro *O* de um triângulo equilátero de lado *x*, traçou-se um segmento *OP* perpendicular ao plano do triângulo com medida *x*. Calcule:

a. a distância de *P* aos vértices do triângulo;
b. a distância de *P* aos lados do triângulo;
c. os ângulos que as oblíquas de *P* aos vértices do triângulo formam com o plano do triângulo.

08 Calcule a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo equilátero de 6 cm de lado, sabendo que o ponto equidista de 4 cm dos vértices do triângulo.

09 Em um plano π está traçado um triângulo, cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. O ponto *A*, exterior ao plano, é equidistante dos três vértices do triângulo e a distância comum é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Calcule a distância do ponto *A* ao plano π.

10 Calcule a distância de um ponto *M* a um círculo de raio 1 e que está situado num plano π, sabendo que a distância de *M* a π é igual a 3 e que a distância de *M* ao centro do círculo é igual a 5.

11 Pelo circuncentro de um triângulo equilátero *ABC* de 12 m de perímetro traça-se a reta perpendicular ao plano do triângulo, sobre a qual se aplica o segmento $OJ = 4$ m. Calcular *JA, JB, JC* e o valor do ângulo que *JA* forma com o plano do triângulo.

12 São dados um plano α, uma reta *r* pertencente a α e um ponto *A* exterior a α. Sabendo que o ponto *A* dista 5 cm de α e 13 cm de *r*, calcule a distância de *r* à projeção ortogonal de *A* sobre α.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Um plano paralelo às diagonais *AC* e *BD* do quadrilátero reverso *ABCD* intersecta os lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA* nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, respectivamente. Prove que *PQRS* é um paralelogramo.

02 São dadas duas retas concorrentes *a* e *b*, e os planos α e β tais que $a \perp \alpha$ e $b \perp \beta$. Prove que a interseção $\alpha\beta$ é perpendicular ao plano (a,b).

03 Calcule a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é *a*, sabendo que as oblíquas traçadas do ponto aos vértices do triângulo formam ângulos de 60° com o mesmo plano.

04 *ABCD* é um quadrado de lado *a* e *M* é o ponto da perpendicular ao plano desse quadrado traçada pelo vértice *A*, tal que $AM = a$. Qual a medida do diedro que tem por aresta *MC* e cujas faces são *MBC* e *MDC*?

05 *ABCD* é um quadrado cujo lado é *a*. Pelo vértice *A* levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado e sobre essa perpendicular toma-se o segmento $AS = a$. Calcule:

a. as distâncias do ponto *S* aos vértices *B*, *C* e *D* do quadrado;
b. as distâncias do ponto *A* aos planos *SBC*, *SCD*, *SBD*;
c. a distância do ponto *A* à reta *SC*.

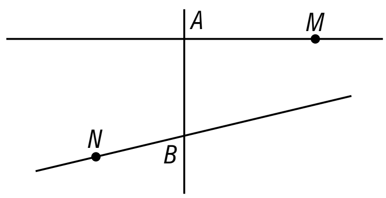
06 $AB = 15$ cm, $AC = 13$ cm, $BC = 4$ cm são os lados de um triângulo *ABC* e *O* é o ponto exterior ao plano *ABC*. Sabendo que as distâncias do ponto *O* aos vértices do triângulo *ABC* são iguais ao diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo, calcule a distância de *O* ao plano *ABC*.

07 Pelo vértice *A* do triângulo equilátero *ABC*, traça-se o segmento *AP*, perpendicular ao plano (*ABC*), de medida igual a *BC*. Calcule o ângulo entre os planos (*PAB*) e (*PBC*).

08 Sendo dados um círculo, um ponto qualquer *S* sobre seu eixo e um quadrilátero convexo *ABCD* circunscrito ao círculo, demonstre que no ângulo tetraédrico *SABCD* a soma das áreas das duas faces opostas é igual à soma das áreas das duas outras.

09 Os vértices *A* e *B* de um triângulo *ABC* distam 3 m e 5 m, respectivamente, de um plano π. Calcule a distância do vértice *C* a esse plano, sabendo que π contém o baricentro do triângulo.

10 *AB* é a perpendicular comum às retas ortogonais *r* e *s*. Sabendo que $AM = 4$ m, $BN = 3$ m e $AB = 5$ m, calcule *MN*.



11 Calcule o valor de um diedro, sabendo que um ponto *A*, a ele interior, dista 4 m de sua aresta, 2 m de uma face e $2\sqrt{2}$ m da outra face.

12 As retas *r* e *s* são reversas. Tomam-se os pontos *A* e *M* sobre *r*, *B* e *N* sobre *s*, tais que *AB* é perpendicular comum a *r* e *s*. Prove que *MN* forma ângulos iguais com *r* e *s* se, e somente se, $AM = BN$.

13 Os triângulos *ABC* e *DEF* são tais que se situam em planos distintos. Sabe-se que as retas *AB* e *DE* se cortam em *M*, *AC* e *DF* se cortam em *N* e *BC* e *EF* se cortam em *P*. Prove que *M*, *N* e *P* são pontos colineares.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Três semirretas de mesma origem são perpendiculares entre si. Prove que a reta traçada da origem perpendicularmente a um plano simultaneamente transversal a essas três retas e que não contém a origem intersecta este plano no ortocentro do triângulo determinado pelas interseções do plano com as semirretas.

02 Num paralelepípedo retângulo *ABCD-EFGH*, existe uma seção que é um hexágono regular. Prove que *ABCD-EFGH* é um cubo.

03 *V-ABC* é um tetraedro em que o triedro de vértice *V* é trirretângulo. Se $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$, calcule a distância de *V* ao plano *ABC*.

04 **(OMERJ)** *ABCD* é um quadrilátero tal que:

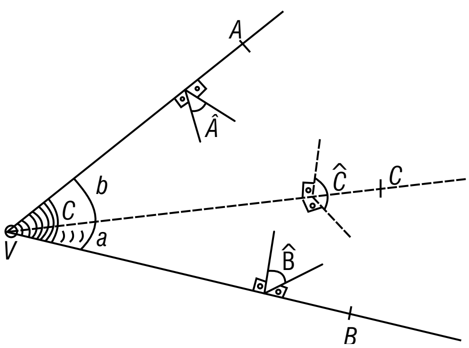
$$A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}A = D\hat{A}B = 90° .$$

Prove que os vértices de tal quadrilátero são coplanares.

RASCUNHO

1. Triedros

Define-se triedro, ou ângulo triédrico, como a região gerada por três semirretas, não coplanares, com mesma origem. Chamamos a origem de vértice, as semirretas de arestas, e os ângulos formados pelas semirretas de faces do triedro.



Triedro V-ABC
vértice V
faces $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$,
arestas $\overline{VA}, \overline{VB}, \overline{VC}$
diedros $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Prova-se que vale a desigualdade triangular para as faces de um triedro: se a, b e c são os valores das faces, então $a \leq b + c$, com igualdade se e somente se a aresta "oposta" a c é interna ao ângulo c [as semirretas seriam coplanares nesse caso]. Além do mais, tem-se que $a + b + c < 360°$.

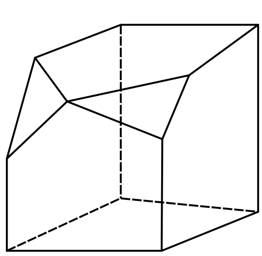
Em cada aresta, está definido um ângulo diedro. Para os ângulos diedros, tem-se que $180° < A + B + C < 540°$.

Chamamos de triedro retângulo, birretângulo e trirretângulo o triedro que possua uma, duas e três faces iguais a um ângulo reto, respectivamente. Chamamos de triedro isósceles o triedro que possua duas faces iguais.

2. Poliedros

Define-se como poliedro uma superfície poliédrica fechada, que é uma superfície composta por um número finito de polígonos não coplanares unidos pelos lados em comum. Chamamos de vértices do poliedro os vértices dos polígonos da superfície, de faces os polígonos que formam a superfície do poliedro, de arestas os segmentos de interseção entre dois polígonos consecutivos.

Vértices de ordem n são os vértices dos quais partem n arestas no poliedro.



No poliedro,
$F_3 = 2, F_4 = 2, F_5 = 4, F = 8,$
$V_3 = 10, V_4 = 1, V = 11, A = 17$

Existem algumas importantes equações de contagem desses objetos, a saber [indica-se por F_n o número de faces de gênero n, e V_n o número de vértices de ordem n.

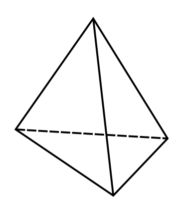
$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots$
$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \ldots$
$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots$
$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \ldots$

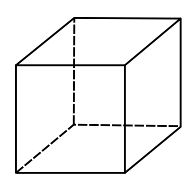
Além dessas equações, existe a Relação de Euler: para todo poliedro convexo, vale a seguinte relação: $V + F = A + 2$. Na verdade, essa relação vale não apenas para os poliedros convexos. Todos os poliedros que satisfazem a essa relação [que tem a ver com a topologia do sólido] são chamados de poliedros eulerianos.

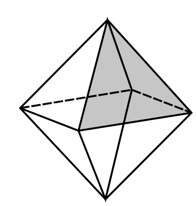
Os poliedros que possuem todas as faces de mesmo gênero e todos os vértices de mesma ordem são chamados de poliedros de Platão. Prova-se que são apenas 5 os possíveis poliedros de Platão:

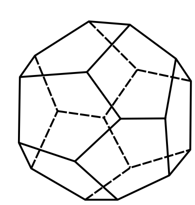
Tetraedro: $F = F_3 = 4$, $V = V_3 = 4$, $A = 6$ (dual de si mesmo)
Hexaedro: $F = F_4 = 6$, $V = V_3 = 8$, $A = 12$
Octaedro: $F = F_3 = 8$, $V = V_4 = 6$, $A = 12$ (dual do hexaedro)
Dodecaedro: $F = F_5 = 12$, $V = V_3 = 20$, $A = 30$
Icosaedro: $F = F_3 = 20$, $V = V_5 = 12$, $A = 30$ (dual do dodecaedro)

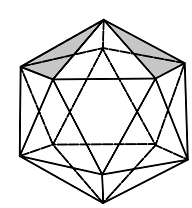
A relação de dualidade acima descrita é a seguinte: tomando um ponto sobre cada face de um dos sólidos, e gerando convenientemente um poliedro, obtém-se o dual. A relação de dualidade é recíproca.


Tetraedro regular


Hexaedro regular


Octaedro regular


Dodecaedro regular


Isocaedro regular

Chama-se diagonal do poliedro a um segmento que une vértices que não estejam numa face do poliedro. O número de diagonais de um poliedro pode ser obtido através de $D = \frac{V(V-1)}{2} - A - d$, em que d é o número de diagonais das faces do poliedro. Se $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ é o número de diagonais numa face de gênero n, então tem-se $d = d_4F_4 + d_5F_5 + d_6F_6 + \ldots$

Para calcular a soma de todos os ângulos nas faces do poliedro, use a seguinte fórmula: $S = 360°(V - 2)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 É possível formar um poliedro regular de 6 faces, sendo todas triângulos?

Solução: Suponha que $F = F_6 = 6$. Usando $3F_3 + 4F_4 + ... = 2A$, temos que $3F = 2A$. Como $F = 6$, segue que $A = 9$. Pela relação de Euler, temos que $V - 9 + 6 = 2$; logo $V = 5$.
Como o poliedro é regular, todos os vértices são do mesmo tipo. Portanto, de $3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... = 2A$, devemos ter $k \cdot V_k = 18$. Como $V = 5$, deveríamos ter $k \cdot 5 = 18$, que não nos daria um k inteiro. Então, não é possível.

Comentário: Caso aceitássemos poliedros não regulares, seria possível. Basta "colar" dois tetraedros regulares *ABCD* e *ABCE*. Apesar de ter todas as arestas de mesma medida, veja que os vértices *A*, *B*, *C* são do tipo 4, enquanto *D* e *E* são do tipo 3.

02 Demonstre que só existem 5 poliedros regulares. Além disso, determine as quantidades de arestas, faces e vértices de cada um.

Solução: Todas as faces devem ser do mesmo tipo, e o mesmo deve acontecer para os vértices. Sejam, então, n e k os tipos das faces e dos vértices, respectivamente.
Temos que $nF = 2A$ e $kV = 2A$, que nos dão $F = \frac{2A}{n}$ e $V = \frac{2A}{k}$. Substituindo na relação de Euler, temos que $V - A + F = 2 \Rightarrow \frac{2A}{k} - A + \frac{2A}{n} = 2$.
Isolando o A, temos $A = \frac{2nk}{2(n+k) - nk}$. Precisamos, então, determinar as possíveis combinações de n e k que nos dão A inteiro.
Lembremos que $n \geq 3$ e $k \geq 3$. Daí, vem a ideia de fazer as substituições $n = 3 + a$ e $k = 3 + b$. Substituindo na expressão de A, temos que $A = \frac{2(3+a)(3+b)}{3-a-b-ab}$. Em particular, temos que $3 - a - b - ab > 0$.
É fácil ver que as únicas opções para (a, b) são (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0) e (0, 2). Se há alguma das variáveis maior ou igual a 3, o denominador fica claramente menor ou igual a zero. Além disso, é fácil ver que todas as 5 soluções geram valores admissíveis para *A, F, V*. Essas 5 soluções dão os 5 poliedros regulares. Veja:
(I) (0, 0) : $n = k = 3$, $A = 6$, $F = 4$, $V = 4$: tetraedro
(II) (1, 0) : $n = 4$, $k = 3$, $A = 12$, $F = 6$, $V = 8$: cubo
(III) (0, 1) : $n = 3$, $k = 4$, $A = 12$, $F = 8$, $V = 6$: octaedro
(IV) (2, 0) : $n = 5$, $k = 3$, $A = 30$, $F = 12$, $V = 20$: dodecaedro
(V) (0, 2) : $n = 3$, $k = 5$, $A = 30$, $F = 20$, $V = 12$: icosaedro

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Achar o número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares.

02 Achar o número de faces de um poliedro convexo que possui 16 ângulos triedros

03 Determinar o número de vértices de um poliedro que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

04 O "cubo-octaedro" possui seis faces quadradas e oito triangulares. Determinar o número de faces, arestas e vértices desse sólido que é euleriano.

05 Quantas diagonais possui o dodecaedro convexo que tem 4 faces quadrangulares e todas as demais triangulares.

06 Calcular o número de diagonais do poliedro convexo de 7 faces e 7 vértices, sabendo que ele é constituído apenas por faces triangulares e trapezoidais.

07 Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces do dodecaedro convexo regular.

08 A soma dos ângulos de um poliedro é 7200º. Calcular o número de faces, sabendo-se que é 2/3 do número de arestas.

09 Um poliedro de 18 arestas só possui faces triangulares e hexagonais. Determine quantas faces de cada tipo existem, sabendo que a soma dos ângulos das faces é 2880º.

10 Um poliedro convexo é composto de 5 faces triangulares, 5 quadradas, 5 trapezoidais e uma pentagonal. Calcule o número de arestas e de vértices do poliedro.

11 Diga se existe ou não cada um dos triedros a seguir, dadas as suas faces:

a. 40°, 50° e 90°;
b. 90°, 90° e 90°;
c. 200°, 100°, 80°;
d. 150°, 140°, 130°.

12 Num triedro, duas faces medem 100° e 140°. Diga entre que valores pode variar a outra face.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Um poliedro convexo tem 7 faces. A soma dos ângulos de todas as faces é igual a 32 retos. Calcule o número de arestas desse poliedro.

02 Calcule o número de diagonais de todo poliedro convexo de 13 faces e 20 arestas.

03 Determine todos os poliedros de 10 arestas.

04 Um poliedro convexo possui, apenas, faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o de faces pentagonais de duas unidades. Calcular os números de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem 7 vértices.

05 Calcular o número de diagonais do poliedro convexo, cujas faces são todas pentagonais, sabendo que todos os seus ângulos sólidos são triedros.

06 Um poliedro de 11 vértices tem o mesmo número de faces triangulares e quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

07 Em um poliedro convexo de 18 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices, sendo triangulares 4 dessas faces. Calcule o número de lados de cada uma das faces restantes, sabendo que são polígonos de mesmo número de lados.

08 Um poliedro convexo de 24 arestas é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Seccionado por um plano convenientemente escolhido, dele se pode destacar um novo poliedro convexo, sem faces triangulares, com uma face quadrangular a mais e um vértice a menos que o poliedro primitivo. Calcule o número de faces do poliedro primitivo.

09 Prove que, em todo poliedro euleriano, valem as seguintes relações:

a) $A + 6 \leq 3F \leq 2A$

b) $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

10 Prove que, em qualquer poliedro euleriano, $F_3 + V_3 \geq 8$.

11 Quantas arestas no máximo pode ter um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem todas 70°?

12 É possível existir um triedro cujos diedros meçam 40°, 50° e 60°?

13 Dois diedros de um triedro medem 60° e 110°. Dê o intervalo de variação do terceiro diedro desse triedro.

RASCUNHO

1. Volumes

Essencialmente, queremos atribuir uma função medida aos sólidos do espaço. Define-se volume como sendo essa função medida, com as seguintes propriedades:

Vol. 1. Se dois sólidos são congruentes, então possuem volumes iguais.

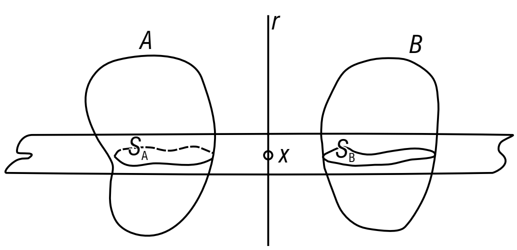
Vol. 2. O volume da união disjunta de dois ou mais sólidos é a soma dos volumes dos sólidos.

Vol. 3. O volume do cubo de aresta unitária é 1.

Vol. 4. Se dois sólidos são semelhantes numa razão K, então a razão de seus volumes é K^3.

Dizemos que dois sólidos são equivalentes quando possuem volumes iguais.

Além dessas propriedades, existe o princípio de Cavalieri, que diz que se seções paralelas de dois sólidos geram áreas iguais, então os sólidos possuem o mesmo volume. Precisamente, se existe uma reta tal que os planos perpendiculares a ela geram seções de mesma área nos sólidos, então seus volumes são iguais. Esse princípio é uma definição, dada de forma que o volume funcione como a integral da área ao longo dessa reta.

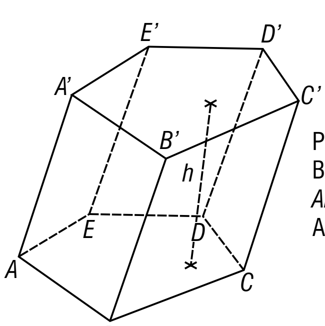


Se $S_A(x) = S_B(x)$ para todo x e r, então $V_A = V_B$

A partir dessas propriedades, deduzem-se fórmulas e relações de volumes entre os sólidos notáveis que estudaremos a partir de já. É importante saber que volume também é uma maneira eficiente de ganhar relações puramente métricas.

2. Prismas

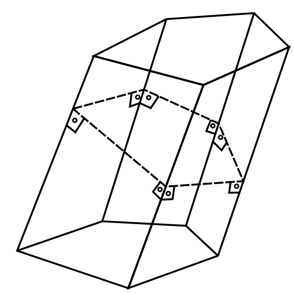
Dado um polígono num plano, chama-se de superfície prismática a união de todas as retas paralelas entre si que passam pelos pontos do bordo do polígono, não coplanares com ele. O sólido obtido entre duas seções paralelas de uma superfície prismática é chamado de prisma.



Prisma *ABCDE – A'B'C'D'E'*
Bases: *ABCDE* e *A'B'C'D'E'*
Arestas laterais: AA', BB', CC', DD', EE'
Altura: *h*

Já que as seções são paralelas, prova-se que os polígonos gerados assim, que chamamos de bases do prisma, são congruentes. Da mesma maneira, os polígonos gerados na superfície prismática são necessariamente paralelogramos, que formam o que chamamos de superfície lateral do prisma. Sendo a altura do prisma a distância entre os planos das bases, tem-se a fórmula do volume: $V = S_{base} \times h$, o produto da área da base pela altura do prisma.

Chamamos de seção reta de um prisma a seção de um plano perpendicular às arestas laterais do prisma. Deduz-se a relação da área lateral, como: $S_{LAT} = a_{lat} \times (2p)_{\text{seção reta}}$, ou seja, o produto da aresta lateral pelo perímetro da seção reta. Também deduz-se a fórmula do volume em função da seção reta: $V = a_{lat} \times S_{\text{seção reta}}$, ou seja, o produto da aresta lateral pela área da seção reta.



Podemos classificar um prisma segundo os seguintes critérios:

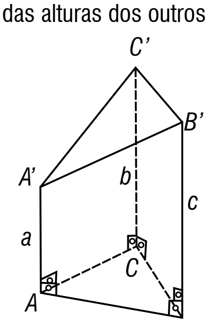
Prisma reto: as arestas laterais são perpendiculares às bases. Dessa maneira, as faces laterais são todas retangulares.

Prisma oblíquo: é o prisma que não é reto; logo, as arestas laterais são oblíquas aos planos.

Prisma regular: é o prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Também classificamos como triangular, quadrangular, pentagonal, etc. de acordo com o polígono que define a base, a saber, triângulo, quadrilátero, pentágono, etc. Em particular, chamamos de paralelepípedo o prisma cujas bases são paralelogramos, de romboedro o prisma cujas faces são losangos, e de ortoedro o prisma cujas faces são retangulares.

Um tronco de prisma é o sólido obtido pelo truncamento (corte) de um prisma, não necessariamente paralelo à base. Em alguns casos, podemos obter relações interessantes quanto ao volume de um tronco: se o tronco for triangular ou se a base dele for um paralelogramo, então vale que o volume é igual ao produto da área da seção reta pela média das arestas laterais ou, equivalentemente, o produto da área da base do tronco pela média das alturas dos outros vértices, relativas à base.

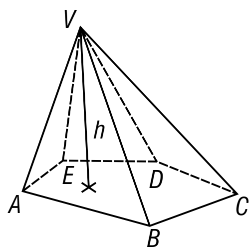


Na figura, o volume do tronco *ABC – A'B'C'* é dado por

$$V = S_{ABC} \times \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

3. Pirâmides

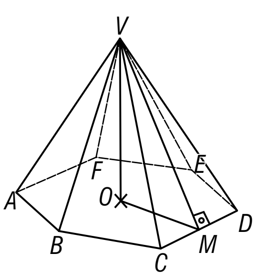
Dado um polígono num plano e um ponto fora desse plano, define-se superfície piramidal como sendo a união de todas as retas traçadas a partir do ponto e dos pontos do bordo do polígono. O sólido obtido através da seção de uma superfície piramidal por um plano qualquer é chamado de pirâmide, cuja base é a seção gerada e cujo vértice é o ponto fora do plano da seção.



Pirâmide *V – ABCDE*
vértice *V*
base *ABCDE*
altura *h*

A distância do vértice à base de uma pirâmide é a altura da pirâmide. Deduz-se a fórmula do volume de uma pirâmide: $V = \frac{1}{3} S_{base} \times h$, um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide.

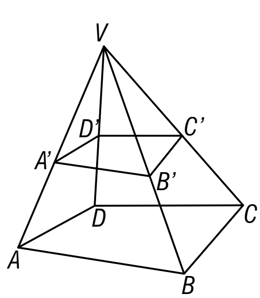
Chama-se de pirâmide regular aquela cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre a base é o centro da base, ou seja, o vértice está no eixo do polígono da base.



Pirâmide *V – ABCDEF* regular
O: centro da base
OM: apótema da base
VO: altura da pirâmide
VM: apótema da pirâmide (apótema lateral)

De acordo com o polígono da base, classificamos a pirâmide como triangular, quadrangular, pentagonal, etc., a saber, se a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc. Em particular, chama-se de tetraedro a pirâmide triangular [não necessariamente regular]. Um tetraedro é dito trirretângulo se existe um vértice cujo triedro é trirretângulo.

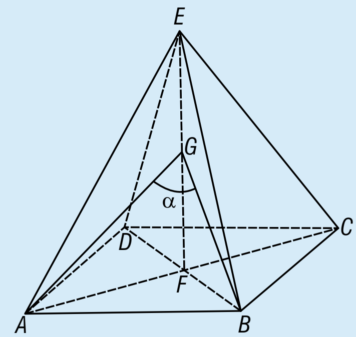
Um tronco de pirâmide é o sólido obtido pelo truncamento de uma pirâmide por um plano paralelo à base. Dessa maneira, prolongando as arestas laterais temos duas pirâmides, uma maior e uma menor, semelhantes entre si.



ABCD – A'B'C'D' é tronco de pirâmide.
V – ABCD ~V – A'B'C'D'

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 A figura a seguir mostra uma pirâmide reta de base quadrangular *ABCD* de lado 1 e altura *EF* = 1. Sendo *G* o ponto médio da altura *EF* e α a medida do ângulo *AGB*, então cosα vale:



(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{5}$

(E) $\frac{1}{6}$

Solução: Veja que $\overline{AF}$ mede metade da diagonal $\overline{AC}$, logo, $AF = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *AGF*, temos que $AG^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, que nos dá $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, $BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como já sabemos que AB = 1, podemos utilizar a lei dos cossenos no triângulo ABG: $1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\alpha$

Daí, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

02 Um triedro trirretângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8 m, 10 m e 12 m. Determine o volume, em m^3, do sólido formado.

Solução: Sejam *x*, *y*, *z* as medidas das arestas que concorrem perpendicularmente duas a duas.
Utilizando o teorema de Pitágoras, temos o sistema de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ y^2 + z^2 = 100 \\ z^2 + x^2 = 144 \end{cases}$. Somando todas as equações, temos que $x^2 + y^2 + z^2 = 154$. Subtraindo esta de cada uma das equações do sistema, obtemos $z = \sqrt{90}$, $x = \sqrt{54}$ e $y = \sqrt{10}$.

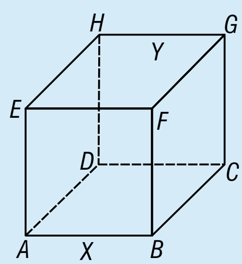
Agora, veja que o volume do sólido é igual a $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{xy}{2} \cdot z = \frac{xyz}{6}$ (considere que a base é um triângulo retângulo de catetos *x* e *y*, por exemplo).
Logo, o volume é igual a $V = \frac{\sqrt{90}\sqrt{54}\sqrt{10}}{6} \Rightarrow V = 15\sqrt{6}\ m^3$.

03 Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais a x. Quanto vale o volume dessa pirâmide?

Solução: Ao traçar a altura da pirâmide, é possível formar um triângulo retângulo de hipotenusa x e catetos h e $\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $x^2 = h^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2$, que gera $h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, o volume é $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{x^3\sqrt{2}}{6}$.

04 No cubo de aresta 'a' mostrado na figura adiante, X e Y são pontos médios das arestas AB e GH respectivamente. Considere a pirâmide de vértice F e cuja base é o quadrilátero $XCYE$. Calcule, em função de a,



a. o comprimento do segmento XY;
b. a área da base da pirâmide;
c. o volume da pirâmide.

Solução:

a. Basta ver que o quadrilátero $AXYH$ é um paralelogramo, pois AX e YH são iguais e paralelos. Daí, temos que $XY = AH = a\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado).
b. Cuidado para não achar que $XCYE$ é um quadrado, porque não é. Os triângulos AEX, EHY, CGY e BCX são congruentes (L.A.L.); logo, $EX = XC = CY = YE$, ou seja, o quadrilátero XCYE é um losango. Então, sua área é igual à metade do produto de suas diagonais. No item a, já calculamos uma delas. A outra é (diagonal do cubo). Então, a área procurada é igual a $S = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.
c. Como queremos o volume da pirâmide e no item anterior calculamos a área de sua base, ficamos tentados a tentar calcular sua altura. No entanto, isso não é tão simples. Vamos a uma outra abordagem.
Veja, inicialmente, que o plano $XCYE$ divide o cubo em duas partes congruentes. Para o cálculo do volume pedido, podemos retirar de uma dessas metades do cubo as pirâmides $YFGC$ e $BCXF$, que são iguais.

Temos $V_{BCXF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC \cdot BX}{2} \cdot BF \Rightarrow V_{BCXF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot a = \frac{a^3}{12}$.

Portanto, o volume da pirâmide é igual a $V = \frac{a^3}{2} - 2 \cdot \frac{a^3}{12} \Rightarrow V = \frac{a^3}{3}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

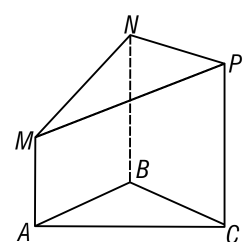
01 Um ortoedro tem dimensões a, b e c, diagonal d e área total S. Prove que $(a + b + c)^2 = d^2 + S$.

02 ABC é um triângulo equilátero de lado 1 sobre um plano α. $AA' = 1$, $BB' = 2$ e $CC' = 3$ são perpendiculares a α. Calcule a área do triângulo $A'B'C'$. Calcule também o volume do sólido $ABCA'B'C'$.

03 Dada uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 e aresta da base 6, calcule:

a. volume e área total;
b. raio da esfera circunscrita;
c. raio da esfera inscrita;
d. raio da esfera tangente às arestas;
e. volume de um tronco de altura 1;
f. área lateral do tronco.

04 Na figura ABC é um triângulo equilátero de 8 m de lado. AM, BN e CP são perpendiculares ao plano ABC, sendo $BN = CP = 6$ m. Sabendo que os planos ABC e MNP formam ângulo de 30º, calcule a área total e o volume do tronco de prisma.



05 Um prisma hexagonal oblíquo de $12\sqrt{3}$ m² de área da base e 5 m de altura tem, por seção reta, um polígono regular de 2 m de lado. Calcular a área lateral do sólido.

06 Um prisma hexagonal regular tem altura igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao polígono da base. As diagonais menores da base medem 15 dm. Calcule a área lateral do prisma, em m².

07 **(ITA-90)** Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice V, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:

(A) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

(B) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

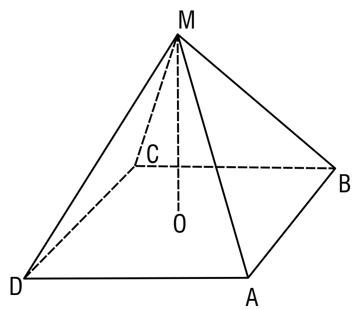
(D) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$

(E) n.d.a.

08 **(ITA-88)** As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces laterais tem comprimento ℓ. O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$. Então, o volume desta pirâmide vale:

(A) $3\sqrt{2}\ell^3$.
(B) $2\ \ell^3$.
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell^3$.
(D) $\sqrt{2}\ \ell^3$.
(E) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ell^3$.

09 **(CBERJ-89)** Na figura, temos uma pirâmide quadrangular regular de altura 8 m e cuja base tem perímetro de 48 m. A distância do vértice "*D*" à face "*AMB*" é:



(A) 4,8 m.
(B) 9,6 m.
(C) 2,4 m.
(D) 5 m.
(E) 1,2 m.

10 **(EN-92)** Em uma pirâmide quadrangular regular a altura é 2 e a aresta da base é 8. O cosseno do ângulo diedro entre duas faces laterais adjacentes vale:

(A) –1/4.
(B) –1/3.
(C) –1/2.
(D) –3/4.
(E) –4/5.

11 **(EN-04)** Em uma pirâmide regular cuja base é um quadrado, os números $\sqrt{2}$, o apótema *a* da base e a altura *h* da pirâmide formam, nesta ordem, uma progressão aritmética e a soma destes é $9\sqrt{2}$. O valor da área da superfície total desta pirâmide é:

(A) $24\left(1+2\sqrt{17}\right)$.
(B) $48\left(3+\sqrt{34}\right)$.
(C) $36\left(2+2\sqrt{34}\right)$.
(D) $12\left(3+3\sqrt{17}\right)$.
(E) $24\left(3+\sqrt{34}\right)$.

12 **(AFA-06)** O produto da maior diagonal pela menor diagonal de um prisma hexagonal regular de área lateral igual a 144 cm² e volume igual a $144\sqrt{3}$ cm³ é:

(A) $10\sqrt{7}$.
(B) $20\sqrt{7}$.
(C) $10\sqrt{21}$.
(D) $20\sqrt{21}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Prove que se um poliedro admite uma esfera inscrita, então, seu volume é dado por $V=\frac{1}{3}Sr$, em que *S* é a área total e *r* é o raio da esfera.

02 Prove que se um prisma é circunscrito a uma esfera de raio *R*, seu volume é dado por $V=\frac{1}{2}S_l r$, onde S_l é a área lateral.

03 As áreas de duas faces de um tetraedro são iguais a *S* e *S'*, e *a* é o comprimento da aresta comum a essas faces. Sendo α o ângulo diedro entre essas faces, calcule o volume do tetraedro.

04 *ABCD* é o paralelogramo contido no plano α. $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$ e $DD' = d$ são perpendiculares a α. Que relação existe entre *a, b, c* e *d* para que *A', B', C'* e *D'* sejam coplanares? Considere que *A'*, *B'*, *C'* e *D'* estão num mesmo semiespaço definido pelo plano de *A*, *B*, *C* e *D*.

05 *ABCD* é um quadrado de lado 2, contido num plano α. $AA' = 2$, $BB' = 1$, $CC' = 4$ e $DD' = x$ são perpendiculares a α e *A', B', C'* e *D'* são coplanares. Calcule:

a. *x*;
b. o volume do tronco de prisma *ABCD-A'B'C'D'*
c. o ângulo entre os planos (*ABCD*) e (*A'B'C'D'*)

06 Dado um cubo *ABCD-RSTU* de 4 m de aresta, considere os pontos *M* e *N*, médios respectivamente das arestas *AB* e *AD*, bem como o ponto *J*, pertencente à aresta *BS*, e distante 1 m do vértice B. Calcule o perímetro e a área da seção produzida no cubo pelo plano *MNJ*.

07 Determine o volume de um tronco de pirâmide de altura *h*, área da base maior *S* e área da base menor *S'*.

08 Um tronco de pirâmide tem bases de áreas *S* e *S'*. Calcule a área da seção média (seção equidistante das bases do tronco).

09 As bases de um tronco de pirâmide são polígonos regulares de bases de áreas *a* e *b* $(a > b)$. Calcule o lado da seção paralela às bases que divide o tronco em dois outros de mesmo volume.

10 Três esferas iguais de raio *r* são tangente entre si duas a duas e tangentes a um plano α. Calcule o raio da esfera tangente as três esferas e ao plano α.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Um tetraedro ABCD é tal que as arestas *AB* e *CD* são ortogonais e medem 3 e 6. Calcule a maior área da seção gerada por um plano paralelo a *AB* e *CD*.

02 Considere uma pirâmide quadrangular regular *V-ABCD* de lado da base 6 e altura da pirâmide 6. Tal pirâmide é seccionada por um plano que passa pelo ponto médio de *VA*, e que intercepta o plano *BCD* segundo uma reta externa a *ABCD*, paralela a *BC*, distando 6 de *BC*. Calcule a área da seção determinada por tal plano.

03 Determine o raio da esfera circunscrita a um tronco de pirâmide quadrangular regular de altura *h* sendo os lados das bases 2*a* e 2*b*.