MATEMÁTICA

1

SISTEMA DE ENSINO

MATEMÁTICA

Volume 1 - 1ª Edição

Goiânia
AP360° EDUCACIONAL
2019

SUMÁRIO

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM

FRENTE A

FRENTE B

FRENTE C

FRENTE D

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL)	dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. Compreender fenômenos (CF)	construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. Enfrentar situações-problema (SP)	selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. Construir argumentação (CA)	relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V. Elaborar propostas (EP)	recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Competência de área 1	
Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	
H1	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2	Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2	
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	
H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3	
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11	Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12	Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14	Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4	
Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H15	Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16	Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17	Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18	Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5	
Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	
H19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6	
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	
H24	Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7	
Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	
H27	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29	Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

OBJETOS DE CONHECIMENTO ASSOCIADOS À MATRIZ DE REFERÊNCIA

Conhecimentos numéricos	operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
Conhecimentos geométricos	características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
Conhecimentos de estatística e probabilidade	representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
Conhecimentos algébricos	gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
Conhecimentos algébricos/ geométricos	plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em : 28 jul. 2014.

Em um pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?

O problema matemático descrito acima foi elaborado por **Leonardo Fibonacci**. Ele origina uma sequência numérica conhecida como **Sequência de Fibonacci**. Esta sequência é construída de forma que cada número é igual à soma dos dois que o antecedem.

SEQUÊNCIAS

Uma sequência ou sucessão é uma lista ordenada de objetos, números ou eventos, com dois aspectos importantes: o tipo e a ordem dos elementos. Todos os elementos de uma sequência são do mesmo tipo e obedecem a uma mesma ordem.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Na Matemática nos interessamos pelas sequências numéricas cujos termos se sucedem obedecendo a uma determinada lei. A essa lei dá-se o nome de **lei de formação da sequência**, com a qual podemos determinar qualquer um de seus termos.

De maneira geral, pode-se representar as sequências numéricas por:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

Sendo:

- a_1 o primeiro termo da sequência.
- a_2 o segundo termo da sequência.
- a_3 o terceiro termo da sequência.
- a_n o enésimo termo da sequência.

Exemplo:

- Na sequência numérica (3, 6, 9, 12, ...), de múltiplos positivos de 3, temos que: $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$, e assim sucessivamente.

LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA NUMÉRICA

POR RECORRÊNCIA

Caracteriza-se por duas regras: uma que identifica o primeiro termo a_1 e outra que relaciona cada termo a_n com seu antecessor a_{n-1}.

Exemplo:

Seja a sequência finita A cujos termos obedecem à seguinte lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Para $n = 1$, temos que $a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$
- Para $n = 2$, temos que $a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$
- Para $n = 3$, temos que $a_4 = a_3 + 2 = 7 + 2 = 9$
- Para $n = 4$, temos que $a_5 = a_4 + 2 = 9 + 2 = 11$

Portanto, $A = (3, 5, 7, 9, 11)$

PELO TERMO EM FUNÇÃO DE SUA POSIÇÃO

Caracteriza-se por uma fórmula que expressa a_n em função de n.

Exemplo:
Seja a sequência infinita A cujos termos obedecem à seguinte lei: $a_n = 3^n$, para todo n natural positivo.

- Para $n = 1$, temos que $a_1 = 3^1 = 3$
- Para $n = 2$, temos que $a_2 = 3^2 = 9$
- Para $n = 3$, temos que $a_3 = 3^3 = 27$
- Para $n = 4$, temos que $a_4 = 3^4 = 81$

Portanto, A = (3, 9, 27, 81, ...)

POR UMA PROPRIEDADE DOS TERMOS

Caracteriza-se por uma propriedade comum aos termos da sequência.

Exemplo:

- Seja a sequência infinita A cujos termos são os números primos positivos escritos em ordem crescente.

Portanto, A = (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Progressão Aritmética é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado a uma constante chamada razão da progressão.

Exemplo:

- Na sequência (2, 5, 8, 11, 14, ...) cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado ao número 3, que é a razão dessa progressão.

Observe que, para obter a razão de uma progressão aritmética, basta subtrair de qualquer termo, a partir do segundo, o termo anterior.

Assim, na PA genérica $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ de razão r, temos que:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = r.$$

CLASSIFICAÇÃO

As progressões aritméticas podem ser classificadas em crescentes, decrescentes ou constantes.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA CRESCENTE

É uma progressão aritmética em que cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo imediatamente anterior. Para que isso ocorra, basta que sua razão seja positiva.

Exemplo:

(5, 9, 13, 17, 21, ...) é uma PA crescente, pois sua razão é $r = 9 - 5 = 4 > 0$.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA DECRESCENTE

É uma progressão aritmética em que cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo imediatamente anterior. Para que isso ocorra, basta que sua razão seja negativa.

Exemplo:

(4, 1, −2, −5, −8, ...) é uma PA decrescente, pois sua razão é $r = 1 - 4 = -3 < 0$.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA CONSTANTE

É uma progressão aritmética em que todos os termos são iguais. Para que isso ocorra, basta que sua razão seja nula.

Exemplo:

(7, 7, 7, 7, 7, ...) é uma PA constante, pois sua razão é $r = 7 - 7 = 0$.

TERMO GERAL

O termo geral de uma progressão aritmética é uma fórmula que relaciona cada um dos seus termos a sua respectiva posição.

Assim, na PA genérica de razão r a seguir, temos que:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$

Assim, analisando o padrão das igualdades, pode-se concluir que o termo de ordem n é igual ao primeiro termo adicionado a (n − 1) vezes a razão, ou seja:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \, . \, r$$

Sendo que:

- a_1 é o 1º termo,
- a_n é o enésimo termo,
- n é a posição do enésimo termo,
- r é a razão.

PROPRIEDADE

- Em qualquer progressão aritmética, cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre seus termos vizinhos.

Exemplo:

Na PA (2, 7, 12, 17, 22), temos que:

$$\frac{2+12}{2} = 7, \frac{7+17}{2} = 12 \text{ e } \frac{12+22}{2} = 17$$

- Em qualquer progressão aritmética, a soma de dois termos equidistantes dos termos extremos é constante e igual à soma dos termos extremos.

Exemplo:

Na PA (2, 7, 12, 17, 22), temos que:

$$2 + 22 = 7 + 17 = 12 \, . \, 2 = 24$$

- Qualquer progressão aritmética de três termos e razão r pode ser expressa na forma:

$$(x - r, x, x + r)$$

- Qualquer progressão aritmética de quatro termos e razão 2r pode ser expressa na forma:

$$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$$

INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Interpolar, ou inserir n meios aritméticos entre dois números reais a e b, significa obter uma progressão aritmética com n + 2 termos e extremos a e b.

Exemplo:

Inserir 3 meios aritméticos entre 12 e 20 significa obter uma progressão aritmética como a mostrada a seguir:

(12, __, __, __, 20)

Para isso, basta determinar o valor da razão.

SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS

Durante uma aula de aritmética em uma pequena cidade do interior da Alemanha, um professor pediu a seus alunos que calculassem o valor da soma:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

Imediatamente após o problema ter sido proposto, um aluno, chamado **Johann Carl Friedrich Gauss**, escreveu em sua pequena lousa o número 5.050 deixando o seu professor muito impressionado.

Observe a justificativa usada por Gauss para resolver tal questão com tanta rapidez:

Escrevendo novamente a soma S, temos que:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

A soma de 1 com 100, de 2 com 99, de 3 com 98, de 4 com 97, e assim por diante, é sempre igual ao número 101, ou seja:

$$(1 + 100) = (2 + 99) = (3 + 98) = ... = 101$$

Como na soma desejada este número aparece 50 vezes, temos que:

$$S = 101 \,.\, 50 = 5050.$$

Intuitivamente, Gauss utilizou a ideia de que a soma de dois termos equidistantes dos termos extremos de uma PA é constante e igual à soma dos termos extremos.

Pode-se utilizar o mesmo procedimento para se obter a expressão que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Assim, considere a PA genérica de razão r a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$$

A soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dos seus n termos é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2}}$$

Sendo que:

- S_n é a soma dos n primeiros termos.
- a_1 é o 1º termo.
- a_n é o último termo somado.
- n é a quantidade de termos somados.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Escreva os quatro primeiros termos da sequência numérica $a_n = 3 - 5n$, para todo $n \in IN^*$.

Resolução:

Para n = 1, temos $a_1 = 3 - 5.1 = -2$

Para n = 2, temos $a_2 = 3 - 5.2 = -7$

Para n = 3, temos $a_3 = 3 - 5.3 = -12$

Para n = 4, temos $a_4 = 3 - 5.4 = -17$

Portanto, a sequência numérica é (−2, −7, −12, −17)

02| Escreva os quatro primeiros termos da sequência que $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 6 \end{cases}$, para todo $n \in IN^*$.

Resolução:

Para n = 1, temos $a_2 = a_1 + 6 = 4 + 6 = 10$

Para n = 2, temos $a_3 = a_2 + 6 = 10 + 6 = 16$

Para n = 3, temos $a_4 = a_3 + 6 = 16 + 6 = 22$

Para n = 4, temos $a_5 = a_4 + 6 = 22 + 6 = 28$

Portanto, sequência numérica é (10, 16, 22, 28)

03| Dada a PA $(x + 1, 3x + 1, x + 13, ...)$ determine o valor de x e, em seguida, a sua razão.

Resolução:

Em uma PA, temos que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$. Assim, temos que:

$$(3x + 1) - (x + 1) = (x + 13) - (3x + 1) \Rightarrow x = 3.$$

Substituindo na PA, temos que:

$$(4, 10, 16, ...) \text{ e sua razão é } r = 10 - 4 = 6.$$

Portanto, $x = 3$ e razão $r = 6$.

04| Determine o 1º termo e a razão da PA tal que:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 31 \\ a_3 + a_8 = 43 \end{cases}$$

Resolução:

Utilizando o termo geral para cada termo do sistema, temos que:

- Na 1ª equação: $a_2 = a_1 + r$ e $a_5 = a_1 + 4r$
- Na 2ª equação: $a_3 = a_1 + 2r$ e $a_8 = a_1 + 7r$

Daí, obtêm-se:

$$\begin{cases} a_1 + r + a_1 + 4r = 31 \\ a_1 + 2r + a_1 + 7r = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 5r = 31 \\ 2a_1 + 9r = 43 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $a_1 = 8$ e $r = 3$.

05| Calcule a soma dos 60 primeiros termos da PA (2, 10, 18, ...).

Resolução:

Primeiramente, deve-se determinar o último termo a ser somado, ou seja, a_{60}.

Fazendo $n = 60$ em $a_n = a_1 + (n - 1).r$ temos que:

$a_{60} = a_1 + 59r \ \& \ a_{60} = 2 + 59 . 8 \ \& \ a_{60} = 474.$

Fazendo $n = 60$ em $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) . n}{2}$, temos:

$$S_{60} = \frac{(a_1 + a_{60}) . 60}{2} = \frac{(2 + 474) . 60}{2} = 14.280$$

Portanto, a soma dos 60 primeiros termos é 14.280.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Determine a posição do número 1875 na sequência definida por $a_n = 3 . 5n$, para todo $n \in IN^*$.

02| A sequência numérica definida pela fórmula de recorrência $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$, para $n \geq 3$ é conhecida como sequência de Fibonacci e construída de tal forma que cada número é igual à soma dos dois que lhe antecedem.

Essa sequência foi originada a partir de um problema matemático elaborado por Leonardo Fibonacci (1170-1250), descrito da seguinte forma:

Em um pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?

A Escreva os sete primeiros termos da sequência;

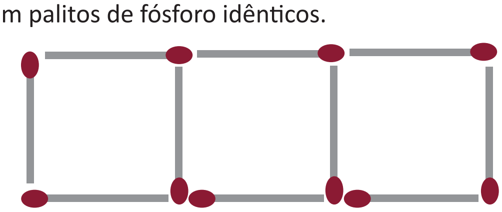
B Resolva o problema elaborado por Fibonacci.

03| UNESP Sabendo-se que (X , 3 , Y , Z , 24), nesta ordem, constituem uma PA de razão r,

A escreva X, Y e Z em função de r;

B calcule a razão r da PA e os valores de X, Y e Z.

04| Na figura a seguir, temos três quadrados construídos com palitos de fósforo idênticos.



Nessas condições, quantos palitos são necessários para construir 160 quadrados?

05| Responda os itens a seguir:

A Quantos múltiplos de 6 há entre 1 e 800?

B Quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1000?

06| Responda os itens a seguir:

A Qual é o 32° termo da PA de razão de razão $r = 2$ e $a_{17} = 49$?

B Qual é o 27° termo da PA de razão de razão $r = 4$ e $a_{13} = 22$?

C Qual é a razão de uma PA que temos $a_9 = 19$ e $a_{17} = -5$?

07| Nos quilômetros 40 e 238 de uma rodovia da figura a seguir estão instalados telefones de emergência. Ao longo da mesma rodovia e entre estes quilômetros, pretende-se instalar 10 outros telefones de emergência. Se os pontos adjacentes de instalação dos telefones estão situados a uma mesma distância, qual é esta distância, em quilômetros?

08| Responda os itens a seguir:

A Qual é a soma dos 40 primeiros termos da progressão aritmética (5, 9, 15, ...).

B Qual é a dos 100 primeiros termos da progressão aritmética (3, 10, 17, 24, ...)?

09|

O Somatório

Um somatório é um operador matemático que nos permite representar facilmente somas de um grande número de termos, até infinitos. É representado com a letra grega maiúscula sigma (Σ), e é definido por:

$$\sum_{n=i}^{k} f(n) = f(i) + f(i+1) + \ldots + f(k-1) + f(k)$$

A variável n é o índice do somatório que designa um valor inicial chamado limite inferior, i.

A variável n percorre os valores inteiros até alcançar o limite superior, k. Observe que:

Se quisermos expressar a soma dos quadrados dos cinco primeiros números naturais podemos representá-lo assim:

$$\sum_{n=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Calcule as seguintes somas:

A $\sum_{n=1}^{20} (2n+1)$

B $\sum_{n=1}^{50} (100-3n)$

10| UNB-DF No projeto urbanístico de uma cidade, o paisagista previu a urbanização do canteiro central de uma das avenidas, com o plantio de 63 mudas de Flamboyant, todas dispostas em linha reta e distantes 5 m uma da outra. No dia do plantio, o caminhão descarregou as mudas no início do canteiro central, no local onde seria plantada a primeira muda. Um jardineiro foi designado para executar o serviço. Para isso, partindo do lugar onde as mudas foram colocadas, ele pegou três mudas de cada vez, plantou-as nos locais designados, enfileirando-as uma após a outra. Calcule, em hectômetros, a distância total mínima percorrida pelo jardineiro após finalizar o trabalho. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

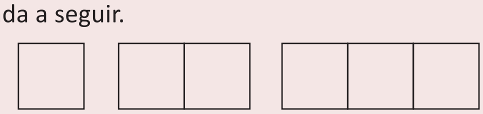


Figura I Figura II Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

A $C = 4Q$

B $C = 3Q + 1$

C $C = 4Q - 1$

D $C = Q + 3$

E $C = 4Q - 2$

02| ENEM As projeções para a produção de arroz no período de 2012–2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

A 497,25

B 500,85

C 502,87

D 558,75

E 563,25

03| ENEM Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é:

- **A** 21
- **B** 24
- **C** 26
- **D** 28
- **E** 31

04| ENEM O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- **A** 38 000
- **B** 40 500
- **C** 41 000
- **D** 42 000
- **E** 48 000

05| FGV Um anfiteatro tem 12 fileiras de cadeiras. Na 1ª fileira há 10 lugares, na 2ª há 12, na 3ª há 14 e assim por diante (isto é, cada fileira, a partir da segunda, tem duas cadeiras a mais que a da frente). O número total de cadeiras é:

- **A** 250
- **B** 252
- **C** 254
- **D** 256
- **E** 258

06| UNISC Numa progressão aritmética, observa-se que a soma (S_n) dos seus "n" termos iniciais ("n" indica a posição de cada termo na série) é fornecida pela expressão $S_n = 7n - n^2$. Assinale a alternativa que mostra o valor do termo que ocupa a 5ª posição da série.

- **A** -2
- **B** 1
- **C** 4
- **D** 7
- **E** 10

07| PUCRJ A soma de todos os números naturais pares de três algarismos é:

- **A** 244888
- **B** 100000
- **C** 247050
- **D** 204040
- **E** 204000

08| ESPM Dois irmãos começaram juntos a guardar dinheiro para uma viagem. Um deles guardou R$ 50,00 por mês e o outro começou com R$ 5,00 no primeiro mês, depois R$ 10,00 no segundo mês, R$ 15,00 no terceiro e assim por diante, sempre aumentando R$ 5,00 em relação ao mês anterior. Ao final de um certo número de meses, os dois tinham guardado exatamente a mesma quantia. Esse número de meses corresponde a:

- **A** pouco mais de um ano e meio.
- **B** pouco menos de um ano e meio.
- **C** pouco mais de dois anos.
- **D** pouco menos de um ano.
- **E** exatamente um ano e dois meses.

09| ENEM Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em:http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

- **A** 12 dias
- **B** 13 dias
- **C** 14 dias
- **D** 15 dias
- **E** 16 dias

10| ENEM O trabalho em empresas de exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

☆	☆☆	☆☆☆	☆☆☆☆	☆☆☆☆☆	...
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.

Funcionário II: aproximadamente 6.000 estrelas.

Funcionário III: aproximadamente 12.000 estrelas.

Funcionário IV: aproximadamente 22.500 estrelas.

Funcionário V: aproximadamente 22.800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Progressão Geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante chamada razão da progressão.

Exemplo:

- Na sequência (2, 6, 18, 54, 162, ...), cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado pelo número 3, que é a razão dessa progressão.

Observe que, para obter a razão de uma progressão geométrica, basta dividir qualquer termo, a partir do segundo, pelo termo imediatamente anterior.

Assim, na PG genérica (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n) de razão q, temos que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = q$$

CLASSIFICAÇÃO

As progressões geométricas podem ser classificadas em crescentes, decrescentes, constantes ou alternantes.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA CRESCENTE

É uma progressão geométrica em que cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo imediatamente anterior. Para que isso ocorra devemos ter:

Exemplos:

- (2, 4, 8, 16, 32, ...) é um PG crescente com $a_1 > 0$ e $q > 1$.
- (-32, −16, −8, −4, ...) é uma PG crescente com $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA DECRESCENTE

- É uma progressão geométrica em que cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo imediatamente anterior. Para que isso ocorra devemos ter:

Exemplos:

- (−2, −4, −16, −32, ...) é uma PG decrescente com $a_1 < 0$ e $q > 1$.
- (32, 16, 8, 4, ...) é uma PG decrescente com $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA CONSTANTE

- É uma progressão geométrica em que todos os termos são iguais. Para que isso ocorra, basta que sua razão deva ser igual a 1.

Exemplo:

- (3, 3, 3, 3, ...) é uma PG constante pois sua razão é $q = 1$.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA ALTERNANTE (OU OSCILANTE)

É uma progressão geométrica em que todos os termos são, alternadamente, de sinais contrários. Para que isso ocorra, basta que sua razão seja negativa.

Exemplo:

- (3, −6, 12, −24, ...) é uma PG alternante pois sua razão é $q = -2 < 0$.

TERMO GERAL

O termo geral de uma progressão geométrica é uma fórmula que relaciona cada um dos seus termos e a sua respectiva posição.

Assim, na PG genérica de razão q a seguir, temos que:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$$

- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$
- $a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$
- $a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$

Assim, analisando o padrão das igualdades, pode-se concluir que o termo de ordem n é igual ao primeiro termo multiplicado por q^{n-1}, ou seja:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Sendo que:

- a_1 é o 1º termo,
- a_n é o n-ésimo termo,
- n é a posição do n-ésimo termo,
- q é a razão.

PROPRIEDADES

- Em qualquer progressão geométrica , cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre seus termos vizinhos.

Exemplo:

Na PG (2, 4, 8, 16, 32), temos que:

$$4^2 = 2 \cdot 8,\ 8^2 = 4 \cdot 16 \text{ e } 16^2 = 8 \cdot 32$$

- Em qualquer progressão geométrica, o produto de dois termos equidistantes dos termos extremos é constante e igual ao produto dos termos extremos.

Exemplo:

Na PG (1, 3, 9, 27, 81), temos que:

$$1 \cdot 81 = 3 \cdot 27 = 9^2 = 81$$

- Qualquer progressão geométrica de três termos e razão q, pode ser expressa na forma:

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$$

- Qualquer progressão geométrica de quatro termos e razão q^2, pode ser expressa na forma:

$$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$$

INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar ou inserir n meios geométricos entre dois números reais a e b, significa obter uma progressão geométrica com n + 2 termos e extremos a e b.

Exemplo:

- Inserir 4 meios geométricos entre 2 e 32 significa obter uma progressão geométrica como a mostrada a seguir:

(2, __, __, __, __, 32)

Para isso, basta determinar o valor da razão.

SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS

Conta uma antiga lenda, sobre a invenção do jogo de xadrez, que o rei de certo país ficou tão impressionado ao conhecer o jogo que quis recompensar seu inventor, dando-lhe qualquer coisa que ele pedisse.

O inventor, então, disse ao rei: Dê-me simplesmente 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda casa, 4 grãos pela terceira casa, 8 grão pela quarta e assim sucessivamente, até a 64ª casa do tabuleiro.

O rei considerou o pedido bastante simples e ordenou que fosse cumprido. Seria possível pagar tal recompensa? Observe:

A quantidade total de grãos de trigo da recompensa é dada pela soma:

- $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$

Observe que se trata da soma de 64 termos em progressão geométrica de razão 2. Chamando essa soma de S_{64}, temos que:

- $S_{64} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{62} + 2^{63}$

Multiplicando toda equação por 2 (razão da PG), temos que:

- $2S_{64} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} + 2^{64}$.

Subtraindo a 2ª equação da 1ª equação membro a membro, temos que:

- $2S_{64} - S_{64} = 2^{64} - 2^0$ & $S_{64} = 2^{64} - 1$ grãos de trigo.

É evidente que é impossível pagar essa recompensa, pois $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$.

Pode-se utilizar o mesmo procedimento para se obter a expressão que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Assim, considere a PG genérica de razão q a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$$

A soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dos seus n termos é dada por:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ para } q \neq 1$$

Sendo que:

- S_n é a soma dos n primeiros termos.
- a_1 é o 1º termo.
- n é a quantidade de termos somados.

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Considere a progressão geométrica a seguir:

$$\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$$

Nessa PG, a soma de seus n primeiros termos é dada por:

$$s_n = \frac{4.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 8.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Calculando, por exemplo, o valor da soma dos 8, 9 e 10 primeiros termos, com aproximação até os milésimos, temos:

- Soma dos 8 primeiros termos é $S_8 = 7{,}969$.
- Soma dos 9 primeiros termos é $S_9 = 7{,}984$.
- Soma dos 10 primeiros termos é $S_{10} = 7{,}992$.

Os resultados obtidos sugerem que quanto maior a quantidade de termos somados, mais próximo de 8 é o resultado da soma.

Tal fato ocorre pois, quanto maior o valor de n, mais o termo $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se aproxima de zero.

Assim, quando n cresce indefinidamente, temos que:

$$S_n = 8.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 8.(1 - 0) = 8.$$

De maneira geral, em uma PG com infinitos termos de razão q, tal que $-1 < q < 1$, a soma desses infinitos termos convergem para um valor finito.

Na expressão da soma dos n primeiros termos de uma PG, quando n cresce indefinidamente, ou seja, tende ao infinito ($n \to \infty$), o termo q^n se aproxima cada vez mais de zero, ou seja, tende a zero ($q^n \to 0$).

Logo, temos que:

$$S_n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1 (0 - 1)}{q - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{com} -1 < q < 1$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Dada a PG (x + 1, x + 4, x + 10, ...) determine o valor de x e, em seguida, a sua razão.

Resolução:

Em uma PG, temos que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$. Assim, temos que:

$\frac{x + 4}{x + 1} = \frac{x + 10}{x + 4}$

$x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 10x + x + 10$

$8x + 16 = 11x + 10$ & $x = 2$.

Substituindo na PG, temos que:

(3, 6, 12, ...) e sua razão é $q = \frac{6}{3} = 2$.

Portanto, x = 2 e razão q = 2.

02| Dada a PG (5, 10, 20, ..., 1.280), determine.

A O seu sétimo termo.

B A quantidade de termos.

Resolução:

A A razão da PG é $q = \frac{10}{5} = 2$. Fazendo n = 7 em $a_n = a_1 . q^{n-1}$, temos que:

$a_7 = a_1 . q^6 = 5 . 2^6 = 320$.

Portanto, o sétimo termo é 320.

B Fazendo $a_n = 1.280$ em $a_n = a_1 . q^{n-1}$, temos que:

$1.280 = 5 . 2^{n-1}$ & $256 = 2^{n-1}$ & $2^8 = 2^{n-1}$

n = 9 (posição do último termo)

Portanto, a PG tem 9 termos.

03| Determine uma PG crescente de três termos cuja soma dos termos é 26 e o produto é 216.

Resolução:

Pode-se escrever termos em PG de razão q na forma:

$$\left(\frac{x}{q}, x, x . q\right)$$

Daí, obtêm-se:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + x . q = 26 \\ \frac{x}{q} . x . x . q = 216 \end{cases}$$

Na 2ª equação, temos que:

$x^3 = 216$ & $x = 6$

Substituindo na 1ª equação, temos que:

$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 26$ & $6q^2 - 20q + 6 = 0$

$q' = 3$ e $q'' = \frac{1}{3}$.

Como a PG é crescente, temos que x = 6 e q = 3. Substituindo em $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ temos:

$\left(\frac{6}{3}, 6, 6 . 3\right) \Rightarrow (2, 6, 18)$

Portanto a PG é (2, 6, 18)

04| Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PG (4, 8, 16, ...).

Resolução:

Fazendo n = 20 em $S_n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1}$, temos:

$$S_{20} = \frac{4 . (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{22} - 4$$

Portanto, a soma dos 20 primeiros termos é $2^{22} - 4$.

05| Calcule o valor da soma mostrada a seguir:

$$S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$$

Resolução:

Trata-se da soma dos termos de uma PG infinita que $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{3}$. Assim, seu valor é dado por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Dada a PG $(6, 2y + 4, y^2 - 4, \ldots)$ com $y \in \mathbb{N}$, determine:

A O valor numérico de y.

B A sua razão.

C O seu quarto termo.

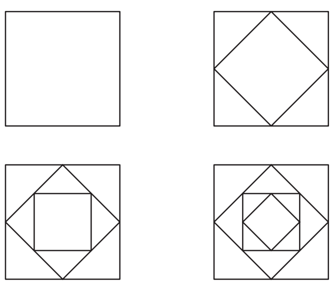
02| PUC-RJ João tem três filhas. A filha mais velha tem oito anos a mais que a do meio que por sua vez tem sete anos mais que a caçula. João observou que as idades delas formam uma progressão geométrica. Quais são as idades delas?

03| Responda os itens a seguir:

A Qual é a razão e o primeiro termo de PG em que $a_3 = 32$ e $a_8 = 1.024$?

B Qual é a razão e o primeiro termo de PG em que $a_4 = 8$ e $a_7 = 128$?

04| Na sequência de quadrados das figuras a seguir, cada novo quadrado tem seus vértices nos pontos médios do quadrado anterior.



Sabendo-se que a área do 1º quadrado é 40 m^2, calcule:

A A área do quarto quadrado.

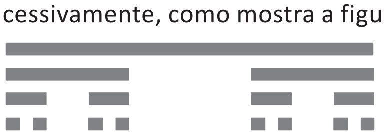
B A área do n-ésimo quadrado.

05| UFGO Ao observar problemas de transmissão de dados via linha telefônica, o matemático Benoit Mandelbrot associou a distribuição dos erros de transmissão com o conjunto de Cantor. Para construir o conjunto de Cantor, a partir de um segmento de comprimento m, utiliza-se o seguinte processo:

No 1º passo, divide-se o segmento em três partes iguais e retira-se a parte central;

No 2º passo, cada segmento restante do 1º passo é dividido em três partes iguais, retirando-se a parte central de cada um deles;

E assim sucessivamente, como mostra a figura abaixo.



Repetindo-se esse processo indefinidamente, obtém-se o conjunto Cantor. Com base nesse processo, calcule a soma dos tamanhos de todos os segmentos restantes no 20º passo.

06| PUC-RJ Três números distintos podem estar simultaneamente em progressão aritmética e geométrica? Justifique a sua resposta.

07| Entre 5 e 20 são inseridos três meios geométricos. A respeito da PG resultante, determine:

A Os possíveis valores da sua razão.

B As possíveis PG assim obtidas.

08| UFBA Um jogador faz uma série de apostas e, na primeira vez, perde R\$ 1,00; na segunda, duplica a aposta e perde R\$ 2,00; na terceira, duplica a aposta anterior e perde R\$ 4,00; e assim, sucessivamente, até ter perdido um total de R\$ 255,00. Calcule quantas vezes o jogador apostou.

09| O filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático. Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um decímetro; Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a:

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots$$

Calcule o valor de d.

10| UFJF-MG Uma bola de borracha cai de uma altura de 30 m. Após o choque com o solo, a bola sobe a uma altura igual a $\frac{1}{3}$ da altura anterior. Se deixarmos a bola subir e descer sem interrupção, qual será a distância total, em metros, percorrida por ela?

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

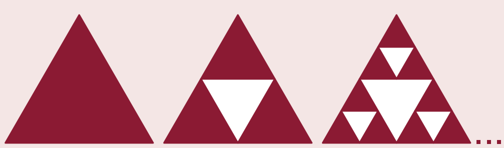
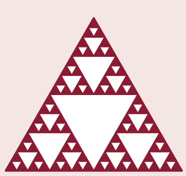


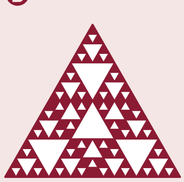
Figura 1 Figura 2 Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:

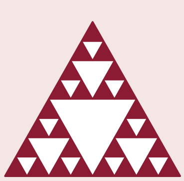
A



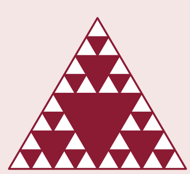
B



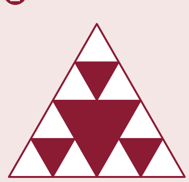
C



D

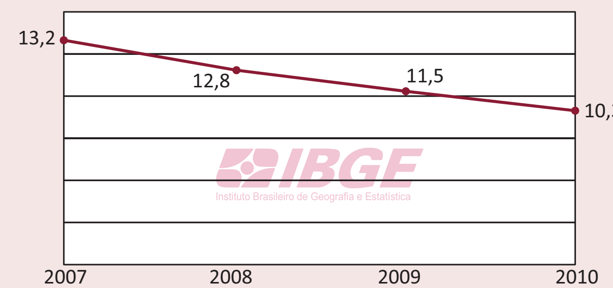


E



02| ENEM O abandono escolar no ensino médio é um dos principais problemas da educação no Brasil. Reduzir as taxas de abandono tem sido uma tarefa que exige persistência e ações continuadas dos organismos responsáveis pela educação no país.

O gráfico apresentado a seguir mostra as taxas percentuais de abandono no ensino médio, para todo o país, no período de 2007 a 2010, em que se percebe uma queda a partir de 2008. Com o objetivo de reduzir de forma mais acentuada a evasão escolar são investidos mais recursos e intensificadas as ações, para se chegar a uma taxa em torno de 5,2% ao final do ano de 2013.



MEC/Inep, Censo Escolar (adaptado)

Qual a taxa de redução anual que deve ser obtida para que se chegue ao patamar desejado para o final de 2013? Considere $(0,8)^3 \cong 0,51$.

A 10%

B 20%

C 41%

D 49%

E 51%

03| PUCRJ A Copa do Mundo, dividida em cinco fases, é disputada por 32 times. Em cada fase, só metade dos times se mantém na disputa pelo título final. Com o mesmo critério em vigor, uma competição com 64 times iria necessitar de quantas fases?

A 5

B 6

C 7

D 8

E 9

04| ENEM Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossemelhança, uma forma de se criar *fractais.* Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o *Carpete de Sierpinski,* criado por um processo recursivo, descrito a seguir:

- Passo 1: Considere um quadrado dividido em nove quadrados idênticos (Figura 1). Inicia-se o processo removendo o quadrado central, restando 8 quadrados pretos (Figura 2).
- Passo 2: Repete-se o processo com cada um dos quadrados restantes, ou seja, divide-se cada um deles em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um, restando apenas os quadrados pretos (Figura 3).
- Passo 3: Repete-se o passo 2.

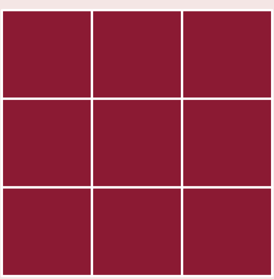


Figura 1

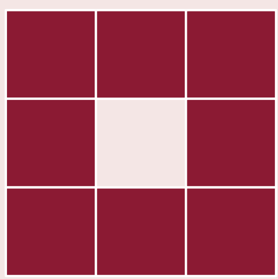


Figura 2

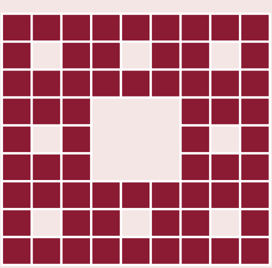


Figura 3

Admita que esse processo seja executado 3 vezes, ou seja, divide-se cada um dos quadrados pretos da Figura 3 em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles.

O número de quadrados pretos restantes nesse momento é :

A) 64

B) 512

C) 568

D) 576

E) 648

05| UEPA Os museus são uma das formas de comunicar as produções científicas entre as gerações. Um exemplo dessa dinâmica é a comunicação da ideia de que "nada que é humano é eterno", sugerida por um sistema composto por um motor e engrenagens exposto num museu de São Francisco, nos EUA. Suponha que esse sistema é composto por um motor elétrico que está ligado a um eixo que o faz girar a 120 rotações por minuto (rpm), e este, por meio de um parafuso sem fim, gira uma engrenagem a uma velocidade 20 vezes menor que a velocidade do próprio eixo e assim sucessivamente.

Texto Adaptado: *Revista Cálculo*, Agosto 2013.

Um sistema similar ao sistema descrito acima contém n engrenagens, todas ligadas umas às outras por meio de eixos e parafusos sem fim, que fazem cada uma das engrenagens girar 20 vezes mais lentamente do que a engrenagem anterior. Nestas condições, o número n de engrenagens necessárias para que a velocidade da última engrenagem seja igual a 0,015 rpm é:

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

06| ESPM Para que a sequência $(-9, -5, 3)$ se transforme numa progressão geométrica, devemos somar a cada um dos seus termos um certo número. Esse número é:

A) par

B) quadrado perfeito

C) primo

D) maior que 15

E) não inteiro

07| UESPI Em outubro de 2011, o preço do dólar aumentou 18%. Se admitirmos o mesmo aumento, mensal e cumulativo, nos meses subsequentes, em quantos meses, a partir de outubro, o preço do dólar ficará multiplicado por doze? **Dado**: use a aproximação $12 \cong 1{,}18^{15}$.

A) 12

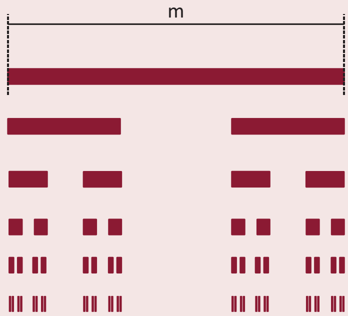
B) 13

C) 14

D) 15

E) 16

08| ESPCEX Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento *m* na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento *m* é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.



Se, partindo de uma faixa de comprimento m, esse procedimento for efetuado infinitas vezes, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é:

Ⓐ 3 m
Ⓑ 4 m
Ⓒ 5 m
Ⓓ 6 m
Ⓔ 7 m

09| ULBRA João percebeu que, ao abrir a torneira ligada ao reservatório de água, por 5 minutos, o volume diminuía para $\frac{1}{5}$ da sua capacidade remanescente. Depois de 20 minutos com a torneira aberta, o volume do reservatório era de 0,12 m^3. Qual é a capacidade total da caixa d'água?

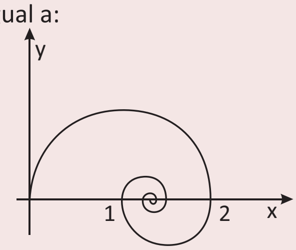
Ⓐ 15 000 litros
Ⓑ 50 000 litros
Ⓒ 30 000 litros
Ⓓ 75 000 litros
Ⓔ 60 000 litros

10| UFRGS A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.

A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é:

Ⓐ 9
Ⓑ 12
Ⓒ 15
Ⓓ 18
Ⓔ 21

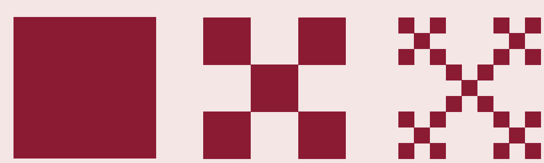
11| ESPCEX Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a:



desenho ilustrativo-fora de escala

Ⓐ π
Ⓑ $2\,\pi$
Ⓒ $3\,\pi$
Ⓓ $4\,\pi$
Ⓔ $5\,\pi$

12| UFRGS Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é:

Ⓐ $\frac{125}{729}$
Ⓑ $\frac{125}{2187}$
Ⓒ $\frac{625}{729}$
Ⓓ $\frac{625}{2187}$
Ⓔ $\frac{625}{6561}$

Você descobriu que um aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto. Qual o número de maneiras que você pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais?

Essa e muitas outras situações que nos desafiam, estudaremos agora na análise combinatória, cujo objetivo principal é estabelecer princípios de contagem.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

Considere o seguinte problema: lançando simultaneamente dois dados, quantos são os resultados possíveis?

Para efetuarmos a contagem, vamos apresentar os resultados possíveis de cada um dos dados: 1, 2, 3, 4, 5 e 6, dispostos abaixo:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Construiremos agora a matriz formada por todos os pares ordenados (x,y), sendo x um resultado de um dos dados e y um resultado do outro:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2,3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

A matriz construída apresenta todos os resultados possíveis do experimento, assim o número de elementos da matriz é igual ao número de resultados possíveis do experimento. Como a matriz possui 6 linhas e 6 colunas, o número de elementos que a constitui é dado pelo produto $6 \cdot 6 = 36$.

Alicerçados no exemplo anterior, podemos enunciar um dos mais importantes princípios da análise combinatória, conhecido como **Princípio Fundamental de Contagem**:

> Se um experimento A apresenta n resultados distintos e um experimento B apresenta m resultados distintos, então o experimento composto de A e B, apresenta n.m resultados distintos.

GENERALIZANDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

Se um experimento ε é composto pelos experimentos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_K$ com número de resultados distintos dados respectivamente por: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, então o experimento ε apresenta $n_1.n_2.n_3. \ldots . n_k$ resultados distintos.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5?

Resolução:

centena	dezena	unidade

Há 5 possibilidades para as centenas, 5 para as dezenas e 5 para as unidades.

Portanto, pelo princípio fundamental de contagem, temos $5.5.5 = 125$ números de três algarismos, usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5.

02| Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5?

Resolução:

centena	dezena	unidade

Há 5 possibilidades para as centenas, 4 para as dezenas e 3 para as unidades, já que os algarismos usados devem ser distintos.

Portanto, pelo princípio fundamental de contagem, temos $5.4.3 = 60$ números de três algarismos distintos, usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5.

03| Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5?

Resolução:

centena	dezena	unidade

Há 2 possibilidades para as unidades (2 ou 4) já que os números devem ser pares, 4 para as centenas e 3 para as dezenas.

Portanto, pelo princípio fundamental de contagem, temos $4.3.2 = 24$ números pares de três algarismos distintos, usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Um experimento consiste no lançamento simultâneo de um dado e uma moeda. Um resultado desse experimento, por exemplo, é 2 no dado e cara na moeda, ou seja, o par (2, cara).

A Escreva todos os resultados possíveis desse experimento.

B Quantos são os resultados possíveis desse experimento? Use o princípio fundamental de contagem.

02| Resolva as seguintes situações-problema:

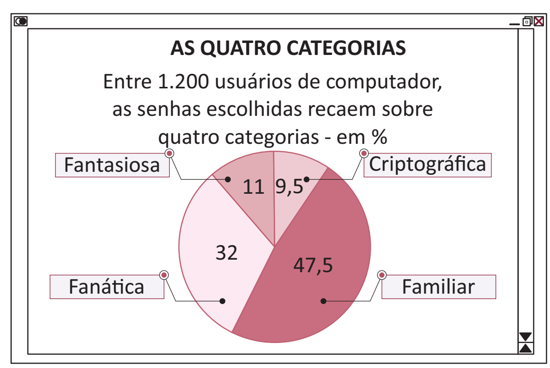
A Uma corrida é disputada por oito cavalos. Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros colocados?

B Seis caminhos conduzem ao topo de uma torre. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode subir e descer por caminhos diferentes?

03| FGV Preparando-se para a sua festa de aniversário de sessenta anos, uma senhora quer usar três anéis de cores diferentes nos dedos das mãos, um anel em cada dedo. De quantos modos diferentes pode colocá-los, se não vai por nenhum anel nos polegares?

04| UFPE De quantas maneiras podemos classificar os 4 empregados de uma micro-empresa nas categorias A ou B, se um mesmo empregado pode pertencer às duas categorias?

05| UERJ Observe o resultado de uma enquete do site britânico CentralNic.



A Determine, dentre os usuários de computador que participaram da enquete, o número daqueles que possuem senha na categoria familiar.

B Admita que, para criar uma senha da categoria criptográfica, o usuário deva utilizar duas vogais seguidas de quatro algarismos distintos. Calcule o número de senhas criptográficas diferentes que podem ser formadas.

06| UNICAMP Em Matemática, um número natural a é chamado palíndromo se seus algarismos, escritos em ordem inversa, produzem o mesmo número. Por exemplo, 8, 22 e 373 são palíndromos. Quantos números naturais palíndromos existem entre 1 e 9.999?

07| Responda:

A Quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

B Quantos números pares de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 2, 3, 5, 6 e 7?

08| UFRJ Quantos números de 4 algarismos podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez?

09| Uma corrida de kart é disputada por 12 corredores, sendo 4 brasileiros e 8 estrangeiros. De quantas maneiras distintas pelo menos um brasileiro ficará entre os três primeiros colocados?

10| UFPE O mapa a seguir representa a divisão do Brasil em suas regiões. O mapa deve ser colorido de maneira que regiões com uma fronteira em comum sejam coloridas com cores distintas. Determine o número (n) de maneiras de se colorir o mapa, usando-se 5 cores. Indique $\frac{n}{10}$.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

A $20.8! + (3!)2$

B $8!.5!.3!$

C $\frac{8!.5!.3!}{2^4}$

D $\frac{8!.5!.3!}{2^2}$

E $\frac{16!}{2^8}$

02| UECE Se X e Y são conjuntos que possuem 6 e 12 elementos respectivamente, então o número de funções injetivas $f: X \rightarrow Y$ que podem ser construídas é:

A 665.280

B 685.820

C 656.820

D 658.280

03| ENEM No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

A 6

B 7

C 8

D 9

E 10

04| ENEM Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é :

A) $\frac{62^6}{10^6}$

B) $\frac{62!}{10!}$

C) $\frac{62!4!}{10!56!}$

D) 62!-10!

E) 626-106

05| UNESP Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número um (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

A) 120

B) 62

C) 60

D) 20

E) 10

06| UNESP Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

A) 9

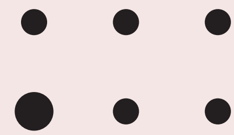
B) 10

C) 12

D) 15

E) 20

07| ENEM A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

A) 12

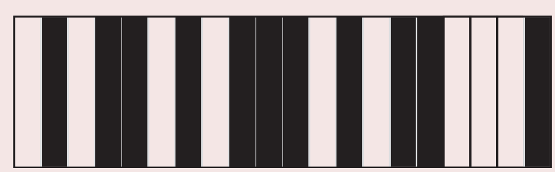
B) 31

C) 36

D) 63

E) 720

08| ENEM O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima. Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

A) 14

B) 12

C) 8

D) 6

E) 4

09| UNESP Um grafo é uma figura constituída de um número finito de arestas ou arcos, cujas extremidades são chamadas vértices. Em um grafo, a "ordem de um vértice" é o número de extremidades de arestas ou arcos que se apoiam naquele vértice.

A figura 1 é um grafo cujos vértices A e C possuem ordem 3 (o vértice A é o apoio de um arco cujas extremidades coincidem) e os demais vértices possuem ordem 2.

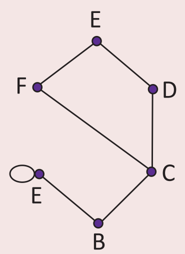
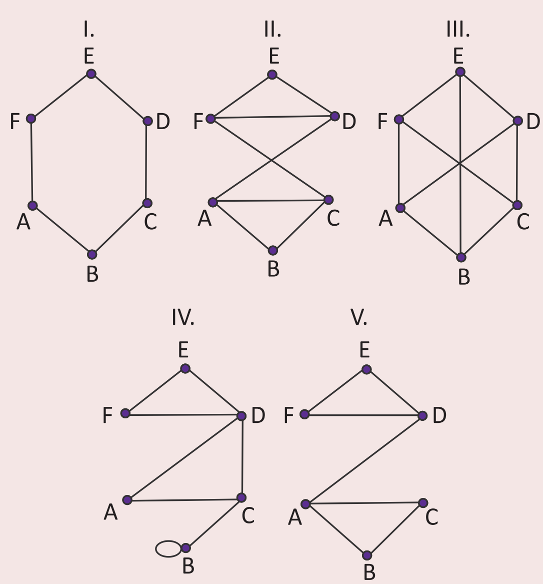


Figura 1

Além disso, dizemos que um grafo admite um "passeio de Euler" se existir um caminho do qual façam parte todas as arestas ou arcos desse grafo, sendo possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e passando-o uma única vez em cada aresta ou arco. Na figura 1 é possível fazer um "passeio de Euler" partindo-se apenas dos vértices "A" ou "C". Por exemplo, um possível "passeio" pode ser representado pela sequência de vértices dada por: AABCDEFC. Considere os grafos:



Os que admitem um "passeio de Euler" são apenas:

- **A** I e III
- **B** I e IV
- **C** I, II e V
- **D** I, III e IV
- **E** I, IV e V

10| ENEM O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

- **A** 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- **B** 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- **C** 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- **D** 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- **E** 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

11| IFTMG Um grupo de amigos, ao planejar suas férias coletivas, listou 12 cidades brasileiras que pretendem conhecer juntos, sendo que seis ficam no litoral e seis no interior do país. O critério estabelecido foi de alternar as férias, em cada ano, ora em cidades litorâneas, ora, em interioranas, definindo-se que, nos próximos 12 anos, será visitada uma cidade diferente por ano. Desse modo, a quantidade de maneiras possíveis para atender a esse critério é

- **A** 2.3.11
- **B** 22.3.11
- **C** 2.32.11
- **D** 28.34.52
- **E** 29.34.52

12| UCS Em uma prova, as seis primeiras questões eram do tipo C/E, em que o candidato devia optar entre certo ou errado para sua resposta. Nas outras quatro questões, o candidato devia escolher, entre três alternativas, a verdadeira. Quantas sequências de respostas são possíveis na resolução da prova?

- **A** $(6.2)^2$
- **B** $(6.2)+(4.3)$
- **C** 62.43
- **D** 102 + 3
- **E** 26.34

13| UNICAMP Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

ABC 1234 **ABCD 123**

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria

A) inferior ao dobro.

B) superior ao dobro e inferior ao triplo.

C) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.

D) mais que o quádruplo.

14| UPF Alice não se recorda da senha que definiu no computador. Sabe apenas que é constituída por quatro letras seguidas, com pelo menos uma consoante.

Usuário
Alice
Senha
••••

Se considerarmos o alfabeto como constituído por 23 letras, bem como que não há diferença para o uso de maiúsculas e minúsculas, quantos códigos dessa forma é possível compor?

A) 23^4

B) $23^3 \cdot 18$

C) $23^3 \cdot 72$

D) $23^4 - 5^4$

E) $18^4 + 5^4$

15| UNISINOS Num restaurante, são oferecidos 4 tipos de carne, 5 tipos de massa, 8 tipos de salada e 6 tipos de sobremesa. De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma refeição composta por 1 carne, 1 massa, 1 salada e 1 sobremesa?

A) 23

B) 24

C) 401

D) 572

E) 960

FATORIAL

A multiplicação de números naturais consecutivos é muito frequente na Análise Combinatória. Para simplificar essas multiplicações, adotaremos o símbolo n! (lê-se n fatorial), que indica o produto dos números naturais consecutivos n, n − 1, n − 2, ..., 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (\ldots) \cdot 1$$

Veja alguns exemplos:

- $5! = 5.4.3.2.1 = 120$
- $3! = 3.2.1 = 6$
- $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

Para $n < 2$, ou seja, $n = 0$ e $n = 1$ temos as seguintes definições:

- $0! = 1$
- $1! = 1$

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS FATORIAIS

Na igualdade $5! = 5.4.3.2.1$, o produto $4.3.2.1$ pode ser substituído por $4!$, logo:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 5.4!$$

Generalizando esse resultado para qualquer $n > 0$, temos:

$$n! = n.(n - 1)!$$

ARRANJO SIMPLES

Uma melodia é uma sequência de notas musicais. Para compor um trecho de três notas musicais sem repeti-las, você pode utilizar as sete notas que existem na escala musical. Para determinarmos o número de melodias diferentes possíveis de serem escritas, utilizaremos um princípio de contagem denominado **Arranjo Simples**.

Note que as melodias possíveis se diferem entre si ou pela **natureza** (Dó, Ré, Mi) e (**Fá**, **Sol**, **Lá**), ou pela ordem (Dó, Ré, Mi) e (Ré, Mi, Dó) de seus elementos e são chamados de **arranjos simples** dos 7 elementos (notas que existem na escala musical), tomados 3 a 3.

O termo **simples** significa que não há repetição de elementos em cada arranjo e o número de arranjos simples (melodias diferentes possíveis) é indicado por $A_{n,k}$ $(n \geq k)$, pelo princípio fundamental de contagem, assim definido:

$$A_{n.k} = \frac{n}{(n-k)!}$$

Portanto, o número de melodias diferentes será igual ao $A_{7,3}$:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7.6.5 = 210$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Simplifique a fração $\frac{7!}{4!}$.

Resolução:

Pela definição de fatorial, temos:

$$\frac{7.6.5.4!}{4!} = \frac{7.6.5}{1} = 210$$

02| Resolva a equação $\frac{(n+2)!}{n!} = 12$.

Resolução:

Pela definição de fatorial, temos:

$$\frac{(n+2).(n+1).n!}{n!} = 12 \Rightarrow \frac{(n+2).(n+1)}{1} = 12$$

$$n^2 + 3n - 10 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos: $n = -5$ ou $n = 2$, como $n!$ só é definido para $n \geq 0$, temos $n = 2$.

03| Quantos anagramas de 5 letras podemos formar com as letras da palavra AVESTRUZ?

Resolução:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = 8.7.6.5.4 = 6.720$$

04| De quantas maneiras 7 crianças podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?

Resolução:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = 7.6.5 = 210$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Calcule:

A $7!$

B $4!$

C $7! - 3!$

D $\frac{5!}{2! + 3!}$

02| Determine a soma dos valores de k na igualdade: $(2k - 3)! = 1$.

03| Determine o número k tal que $k! = 2^7 . 3^2 . 5. 7$.

04| Resolva as equações seguintes:

A $\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 10$

B $\frac{(n+2)!}{n!} = 42$

C $\frac{(n+1)!.(n-2)!}{n!.(n-1)!} = 1,25$

D $\frac{(n-1)!}{(n+1)! - n!} = \frac{1}{36}$

05| Um torneio de futebol foi disputado por seis equipes em turno único, isto é, cada equipe jogou uma única vez com cada uma das outras. Quantas partidas foram disputadas em todo o torneio?

06| Quantas "palavras" com ou sem sentido, de 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do nosso alfabeto?

07| Quantos números de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8?

08| Cinco atletas disputam uma corrida. Supondo que todos terminem a prova, quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?

09| UFPE Seja A um conjunto com 3 elementos e B um conjunto com 5 elementos. Quantas funções injetoras de A em B existem?

10| UFES Três casais devem sentar-se em 8 poltronas de uma fileira de um cinema. Calcule de quantas maneiras eles podem sentar-se nas poltronas de modo arbitrário, sem restrições.

T ENEM E VESTIBULARES

01| FATEC Para mostrar aos seus clientes alguns dos produtos que vende, um comerciante reservou um espaço em uma vitrine, para colocar exatamente 3 latas de refrigerante, lado a lado. Se ele vende 6 tipos diferentes de refrigerante, de quantas maneiras distintas pode expô-los na vitrine?

A 144
B 132
C 120
D 72
E 20

02| PUCMG Em um campeonato de dois turnos, do qual participam dez equipes, que jogam entre si uma vez a cada turno, o número total de jogos previstos é igual a:

A 45
B 90
C 105
D 115

03| CFTMG Em um campeonato de tênis de mesa, com dez participantes, em que todos jogam contra todos, um dos participantes vence todas as partidas, as classificações possíveis para os três primeiros colocados é:

A 72
B 78
C 82
D 90

04| UFMG Duas das cinquenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinquenta cadeiras, para ocupá-las, é:

A 1225
B 2450
C 250
D 49!
E 50!

05| CESGRANRIO Um brinquedo comum em parques de diversões é o “bicho-da-seda”, que consiste em um carro com cinco bancos para duas pessoas cada e que descreve sobre trilhos, em alta velocidade, uma trajetória circular. Suponha que haja cinco adultos, cada um deles acompanhado de uma criança, e que, em cada banco do carro, devam acomodar-se uma criança e o seu responsável. De quantos modos podem as dez pessoas ocupar os cinco bancos?

A 14 400
B 3 840
C 1 680
D 240
E 120

06| MACK Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que pelo menos um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:

A 426
B 444
C 468
D 480
E 504

07| UEL Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2,3,4\}$. O total de funções injetoras de A para B é:

A 10
B 15
C 60
D 120
E 125

08| CESGRANRIO Em um tabuleiro com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas. Podemos afirmar que:

A todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.
B nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.
C alguma coluna não tem casas ocupadas.
D alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.
E todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

09| FUVEST Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é:

A menor que 7%.
B maior que 7%, mas menor que 10%.
C maior que 10%, mas menor que 13%.
D maior que 13%, mas menor que 16%.
E maior que 16%.

10| UFSM Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por 6 algarismos distintos e outra composta por 3 letras, escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos e que as letras são todas vogais distintas, sendo E a primeira delas, o número máximo de tentativas necessárias para acessar sua conta será:

A 210
B 230
C 2.520
D 3.360
E 15.120

RAZÃO

Razão é a divisão de um número por outro, desde que o divisor não seja zero. É escrita, preferencialmente, na forma de fração mais simples.

Exemplo:

a razão entre n e d é $\frac{n}{d}$, com $d \neq 0$.

n: numerador (antecedente)

d: denominador (consequente)

A razão é o quociente entre dois números abstratos que significa a comparação entre duas medidas da mesma espécie. Se numa prova de 50 questões você acertou 30, então a razão entre o número de questões erradas e certas é de $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. Isso significa que para cada 3 questões certas existe 1 questão errada.

São exemplos de razões muito utilizadas:

- Velocidade média $= \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$
- Escala $= \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$
- Densidade de um corpo$= \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}}$
- Densidade demográfica $= \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área}}$

Chamamos a atenção para o estudo de Escalas, conteúdo frequentemente cobrado nas provas do Enem.

A escala de um desenho é a razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real medidos numa mesma unidade.

Exemplos:

- A escala 1 : 1000 significa que os comprimentos verdadeiros são 1.000 vezes maiores que os correspondentes comprimentos do desenho.

Portanto, 5 cm no desenho equivalem a 5.000 cm no terreno, ou seja, 50 metros.

- Num mapa a distância entre duas cidades está representada por 4,5 cm. Se a escala usada é 1 : 10.000.000 qual é, em km, a distância entre as duas cidades?

Resposta: 4,5 x 10.000.000 cm = 45.000.000 cm = 450 km.

PROPORÇÃO

A proporção nada mais é do que a igualdade entre razões.

Os números a, b, c e d, todos diferentes de zero, formam nesta ordem, uma proporção se, e somente se, a razão a : b for igual à razão c : d.

Indicamos esta proporção por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Extremos

Meios

a : b : : c : d

Lê-se: a está para b assim como c está para d

Quando temos uma série de razões iguais, estamos diante de uma proporção múltipla.

Exemplo:

- $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{20}{60} = \frac{40}{120} = \ldots$

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

Se quatro números formam uma proporção, então, obrigatoriamente, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

QUARTA PROPORCIONAL DE TRÊS NÚMEROS

Se quatro números formam uma proporção, como por exemplo: 5, 4, 10 e 8, então dizemos que o quarto número (8) é a quarta proporcional dos três primeiros números: 5, 4 e 10.

PROPORÇÃO CONTÍNUA

Uma proporção que apresenta **meios iguais** é denominada **contínua**.

Exemplo:

- 2 : 4 :: 4 : 8

O meio comum (4, no exemplo) é chamado de **média proporcional** ou média geométrica dos extremos (2 e 8). O último termo (8) chama-se **terceira proporcional** dos outros dois (2 e 4)

Exemplos:

- Calcular a **terceira proporcional** de 24 e 36.

$$\frac{24}{36} = \frac{36}{x} \Rightarrow 24.x = 36.36 \Rightarrow x = \frac{36.36}{24} \Rightarrow x = 54$$

- Calcular a **média proporcional** de 4 e 16.

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x.x = 4.16 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$$

TRANSFORMAÇÕES DE UMA PROPORÇÃO

É possível escrever uma proporção de 8 modos diferentes, com as seguintes transformações:

Vamos utilizar para o nosso estudo, a proporção inicial $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (1ª)

2 . 6 = 3 . 4 (produto dos meios é igual ao produto dos extremos)

2ª) Permutando os meios da 1ª	$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ 2 . 6 = 4 . 3
3ª) Permutando os extremos da 1ª	$\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$ 6 . 2 = 3 . 4
4ª) Invertendo as razões da 1ª	$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ 3 . 4 = 2 . 6
5ª) Transpondo as razões da 1ª	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 4 . 3 = 6 . 2

6ª) Transpondo as razões da 2ª	$\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$ $3 . 4 = 6 . 2$
7ª) Transpondo as razões da 3ª	$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ $4 . 3 = 2 . 6$
8ª) Transpondo as razões da 4ª	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $6 . 2 = 4 . 3$

PRINCIPAIS PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

01| Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ ou $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

02| Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ ou $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

03| Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Essas propriedades também são válidas se as razões iguais forem mais de duas.

Exemplo:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

DIVISÕES PROPORCIONAIS

Quando a variação de uma grandeza ocasiona uma variação em outra grandeza, dizemos que essas grandezas se relacionam. A relação entre essas grandezas pode ser classificada em diretamente ou inversamente proporcional. Os valores numéricos associados a essas grandezas podem ser classificados como números diretamente ou inversamente proporcionais.

NÚMEROS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

$$\frac{5}{10} = \frac{8}{16} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = k \text{ (razões equivalentes)}$$

Note que a razão entre os números dessas sucessões é **sempre a mesma**.

Os números dessas sucessões são **diretamente proporcionais**. A razão igual a $\frac{1}{2}$ entre dois números correspondentes é denominada de **constante, fator ou coeficiente de proporcionalidade**, cuja representação se dá, geralmente, pela letra k.

Se duas grandezas são diretamente proporcionais, a razão entre dois valores de uma delas é igual à razão entre os dois valores correspondentes da outra.

Exemplos:

- Sabendo-se que os números das sucessões $\frac{a}{8}$ e $\frac{3}{d}$ são diretamente proporcionais e que o fator de proporcionalidade é $\frac{1}{4}$ determinar os valores de a e d.

$$\frac{a}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{8.1}{4} \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{3}{d} = \frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{3.4}{1} \Rightarrow d = 12$$

- Vamos dividir o número 180 em três partes diretamente proporcionais a 2, 5 e 11.

  Iremos chamar de x, y e z, respectivamente, cada uma das parcelas. Assim, de acordo com o enunciado, teremos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

Como x, y e z são as parcelas em que dividimos o número 180, devemos ter:

$$x + y + z = 180$$

Utilizando a propriedade da proporção:

$$\frac{x + y + z}{2 + 5 + 11} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

$$\frac{180}{18} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

Como $\frac{180}{18} = 10$, então:

$$\frac{x}{2} = 10 \Rightarrow x = 2.10 \Rightarrow x = 20$$

$$\frac{y}{5} = 10 \Rightarrow y = 5.10 \Rightarrow y = 50$$

$$\frac{z}{11} = 10 \Rightarrow z = 11.10 \Rightarrow z = 110$$

Concluímos que as partes procuradas são : 20, 50 e 110.

NÚMEROS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Dadas duas sucessões de números, quando o produto de dois termos correspondentes for constante, temos números ditos inversamente proporcionais.

Sejam as duas sucessões de números:

4	6	8
12	8	6

O produto do antecedente pelo seu consequente é **sempre o mesmo**.

$$4 . 12 = 6 . 8 = 8 . 6 = 48 = k$$

Nestas condições, dizemos que os números são **inversamente proporcionais** e que o produto comum (48) é a **constante de proporcionalidade (k)**.

Exemplos:

- Determinar a e b na sucessão de números inversamente proporcionais:

52	a	13
1	26	b

Como os números são inversamente proporcionais, temos:

$$52 . 1 = a . 26 = 13 . b$$

$$a . 26 = 52$$

$$a = \frac{52}{26}$$

$$a = 2$$

$$52 . 1 = a . 26 = 13 . b$$

$$b . 13 = 52$$

$$b = \frac{52}{13}$$

$$b = 4$$

- Vamos dividir o número 210 em partes inversamente proporcionais a 3, 5 e 6.

Devemos dividir o número proporcionalmente aos inversos de 3, 5 e 6:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}$$

$$3x = 5y = 6z = k$$

Vamos escrever x, y e z em função de k:

$$x = \frac{k}{3} \qquad y = \frac{k}{5} \qquad z = \frac{k}{6}$$

Portanto temos:

$$x + y + z = 210$$
$$\frac{k}{3} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 210$$
$$10k + 6k + 5k = 210 \,.\, 30$$
$$21k = 210 \,.\, 30$$
$$k = 300$$

$$x = \frac{300}{3} = 100$$
$$y = \frac{300}{5} = 60$$
$$z = \frac{300}{6} = 50$$

Logo as partes são 100, 60 e 50.

DIVISÃO PROPORCIONAL COMPOSTA

Veja:

Calcule o valor de a, b, x e y, sabendo que a sequência (12, 10, 20) é diretamente proporcional a série (a, b, 5) e inversamente proporcional a (x, 2, y).

De acordo com as informações do enunciado, temos que:

$$\frac{12}{a} = \frac{10}{b} = \frac{20}{5} \text{ e } \frac{12}{\frac{1}{x}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{1}{y}}$$

Olhando para a primeira proporção, notamos facilmente que a constante de proporcionalidade é 4 $\left(\frac{20}{5}\right)$. Podemos então calcular a e b:

$$\frac{12}{a} = 4 \Rightarrow a = 3 \qquad 4b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

Já na segunda proporção, a constante de proporcionalidade é 20. Podemos então calcular x e y:

$$12x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{12} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$
$$20y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{20} \Rightarrow y = 1$$

Os valores procurados são: $a = 3$, $b = \frac{5}{2}$, $x = \frac{5}{3}$ e $y = 1$.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Um automóvel percorreu 240 km em 3 horas. Qual a velocidade média desse automóvel?

Resolução:

$$V_m = \frac{\text{Distância}}{\text{Tempo}} \Rightarrow V_m = \frac{240 \text{ km}}{3 \text{ horas}} \Rightarrow V_m = 80 \text{ km/h}$$

02| ENEM A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.

Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

A) 2,9 cm × 3,4 cm
B) 3,9 cm × 4,4 cm
C) 20 cm × 25 cm
D) 21 cm × 26 cm
E) 192 cm × 242 cm

Resolução:

A escala significa que para cada 1 cm da medida do desenho, corresponde a 150 cm (1,5 m) da medida real. Assim podemos efetuar os seguintes cálculos:

Real (cm)	Desenho (cm)
150	1
3600	x

$$150x = 3600 \Rightarrow x = \frac{3600}{150} = 24 \text{ cm}$$

Real (cm)	Desenho (cm)
150	1
2850	x

$$150x = 2850 \Rightarrow x = \frac{2820}{150} = 19 \text{ cm}$$

Portanto, as dimensões serão: 21cm x 26cm.

03| Uma mãe recorreu a bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então qual é a massa corporal da criança?

Resolução:

Basta que resolvamos a seguinte proporção:

$$\frac{5 \text{ gotas}}{2 \text{ kg}} = \frac{30 \text{ gotas}}{P}$$

$$P = \frac{30.2}{5}$$

$$P = 6.2 = 12 \text{ kg}$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Qual é a razão igual a $\frac{30}{42}$, cujo antecedente é igual a 5?

02| Quem tem a maior razão de acertos: Fábio, que em 40 exercícios acertou 32 ou Fabrícia que em 36 exercícios acertou 28?

03| A distância entre São Paulo e Brasília é de 1.150 km. Qual a velocidade média de um veículo que faz esse percurso em doze horas e meia?

04| Na planta de uma casa cada 5 cm desenhados estão representando 5 metros. Qual é a escala empregada?

05| Encontre x, y e z:

A) $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}$, sendo $x + y + z = 81$

B) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = z$, sendo $2y + 3z = 11$

06| Faça o que se pede:

A) Divida o número 184 em partes diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

B) Divida o número 340 em partes inversamente proporcionais a 2, 4 e 10.

C) Divida o número 2670 em três partes que sejam diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e inversamente proporcionais a 8, 9 e 12.

07| Resolva as seguintes situações problemas abaixo:

A) Uma determinada substância é composta de ouro e prata, na proporção de 5 partes de ouro para cada 1 de prata. Para fabricar 54 g dessa substância, quantos gramas de ouro e de prata serão necessários?

B) Gilberto tem um retrato com as dimensões de 10 cm de largura por 12 cm de altura. Ele quer ampliar para 25 cm a largura. De que altura ficará retrato?

C) Em dois tanques de combustível há 2200 l de diesel. Calcule o volume dos dois tanques, sabendo que suas capacidades estão na proporção de $\frac{4}{7}$.

D) Três amigos associaram-se numa empresa. Paulo entrou com um capital inicial de R$ 12.000,00, Júlio entrou com R$ 10.000,00 e Augusto com R$ 6.000,00. No 1º ano obtiveram um lucro de R$ 140.000,00. Quanto deve receber cada um dos sócios?

Obs.: *Denominamos REGRA DE SOCIEDADE ao método utilizado para dividir entre os sócios de uma empresa seus lucros e prejuízos.*

E) Uma herança de R$ 300.000,00 deve ser repartida entre Ângelo, Breno e Caio. Cada um deve receber partes diretamente proporcionais a 3, 4 e 6, respectivamente, e inversamente proporcionais às idades. Sabendo que Ângelo tem 12 anos, Breno, 15 anos, e Caio tem 24 anos, qual será a parte recebida por Breno?

08| UNESP Segundo dados de um estudo, 100 g de soja seca contêm 35 g de proteínas e 100 g de lentilha seca contêm 26 g de proteínas. Suponhamos que uma pessoa, objetivando ingerir 70 g de proteínas por dia, se alimentasse apenas com esses dois produtos. Se num certo dia sua alimentação incluísse 140 g de soja seca, calcular a quantidade de lentilha que deveria incluir.

09| Suponha que um carro movido a gasolina consiga, em média, percorrer 10 km por litro, e um carro movido a álcool apenas 8 km por litro. Se o litro de gasolina custa R$ 0,50, quanto deve custar o litro de álcool para que os veículos sejam igualmente econômicos?

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será:

A) 6
B) 600
C) 6.000
D) 60.000
E) 6.000.000

02| ENEM Diariamente, uma residência consome 20.160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

A) Retirar 16 células.
B) Retirar 40 células.
C) Acrescentar 5 células.
D) Acrescentar 20 células.
E) Acrescentar 40 células.

03| ENEM Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A) 1,75
B) 2,00
C) 2,33
D) 4,00
E) 8,00

04| ENEM Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- Recipiente I: 0,125 litro
- Recipiente II: 0,250 litro
- Recipiente III: 0,320 litro
- Recipiente IV: 0,500 litro
- Recipiente V: 0,800 litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

05| ENEM José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

A) 600, 550, 350
B) 300, 300, 150
C) 300, 250, 200
D) 200, 200, 100
E) 100, 100, 50

06| ENEM A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.

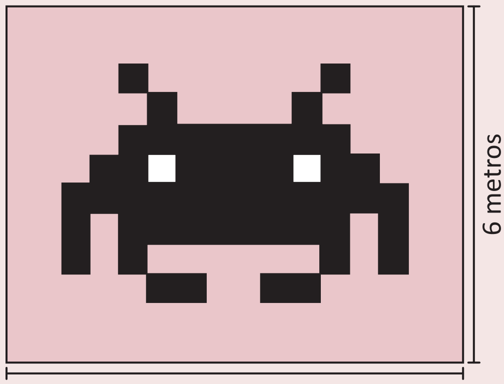


Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.

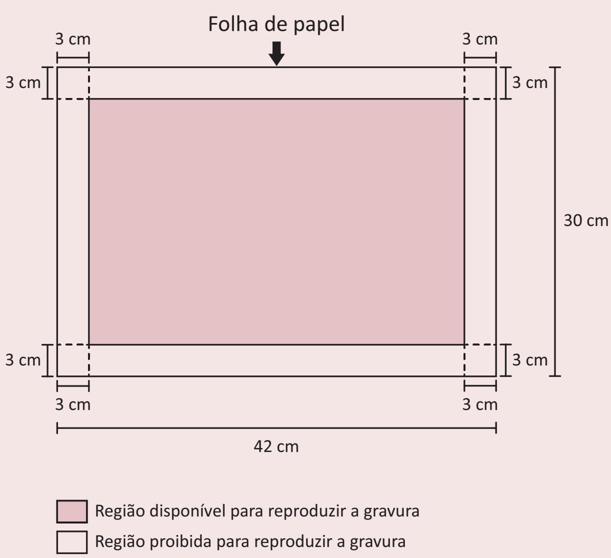


Figura 2

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é:

A 1:3

B 1:4

C 1:20

D 1:25

E 1:32

07| ENEM Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

Jogador I	Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
Jogador II	Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
Jogador III	Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
Jogador IV	Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
Jogador V	Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

A I

B II

C III

D IV

E V

08| MACK Dividindo 70 em partes proporcionais a 2, 3 e 5, a soma entre a menor e a maior parte é:

A 35

B 49

C 56

D 42

E 28

09| UNAERP A proporção entre as medalhas de ouro, prata e bronze de um atleta é 3:4:7, respectivamente. Quantas medalhas de ouro, prata e bronze espera-se que esse atleta obtenha em 70 jogos, se essa proporção se mantiver e ele conquistar medalhas em todos os jogos?

A 20; 30; 40

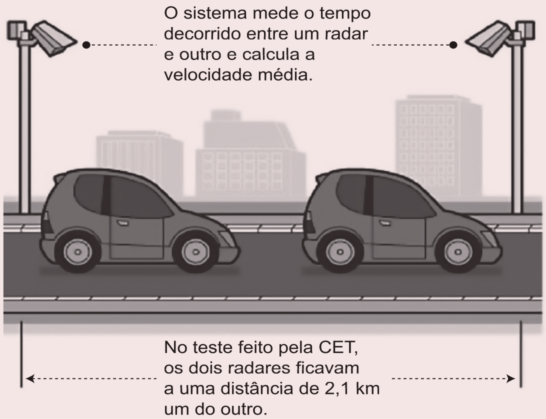
B 30; 25; 15

C 24; 17; 10

D 15; 20; 35

E 10; 20; 40

10| ENEM A Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) de São Paulo testou em 2013 novos radares que permitem o cálculo da velocidade média desenvolvida por um veículo em um trecho da via.



As medições de velocidade deixariam de ocorrer de maneira instantânea, ao se passar pelo radar, e seriam feitas a partir da velocidade média no trecho, considerando o tempo gasto no percurso entre um radar e outro. Sabe-se que a velocidade média é calculada como sendo a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

O teste realizado mostrou que o tempo que permite uma condução segura de deslocamento no percurso entre os dois radares deveria ser de, no mínimo, 1 minuto e 24 segundos. Com isso, a CET precisa instalar uma placa antes do primeiro radar informando a velocidade média máxima permitida nesse trecho da via. O valor a ser exibido na placa deve ser o maior possível, entre os que atendem às condições de condução segura observadas.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 11 jan. 2014 (adaptado).

A placa de sinalização que informa a velocidade que atende a essas condições é:

A

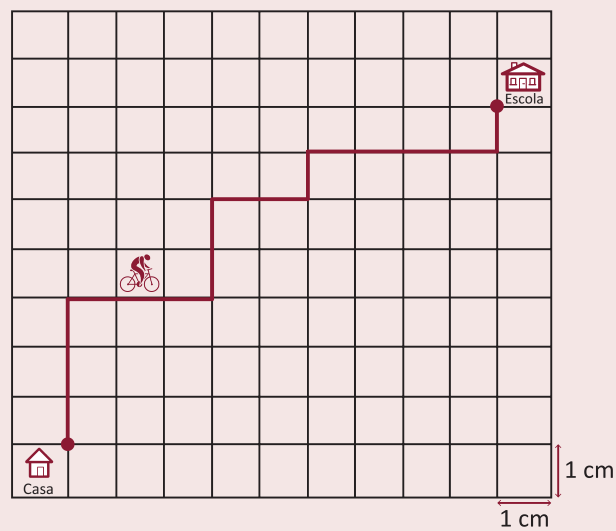

B


C


D


E


11| ENEM A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1:25000, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

A 4

B 8

C 16

D 20

E 40

12| ENEM Um show especial de Natal teve 45.000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

A 1 hora.

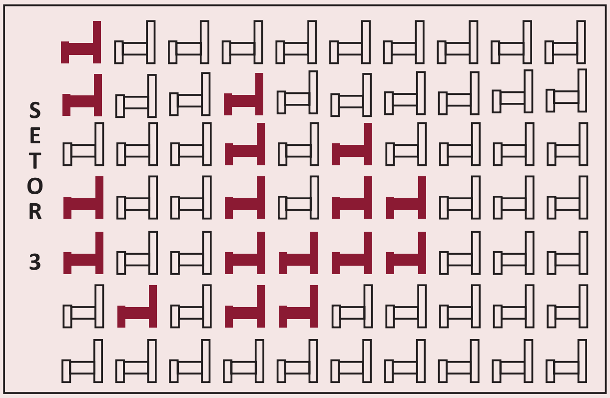
B 1 hora e 15 minutos.

C 5 horas.

D 6 horas.

E 6 horas e 15 minutos.

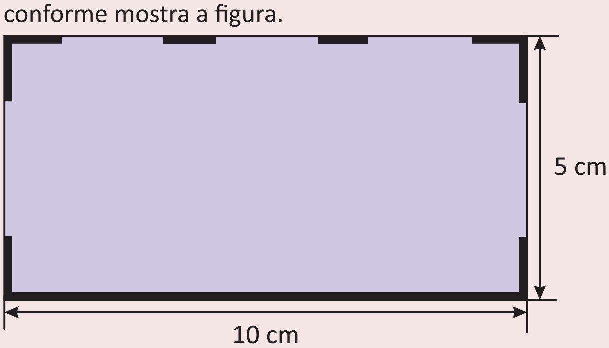
13| ENEM Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

- **A** $\frac{17}{70}$
- **B** $\frac{17}{53}$
- **C** $\frac{53}{70}$
- **D** $\frac{53}{17}$
- **E** $\frac{70}{17}$

14| UNESP Para divulgar a venda de um galpão retangular de $5.000m^2$ uma imobiliária elaborou um anúncio em que constava a planta simplificada do galpão, em escala, conforme mostra a figura.



O maior lado do galpão mede, em metros,

- **A** 200
- **B** 25
- **C** 50
- **D** 80
- **E** 100

15| ENEM Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante k > 0, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

- **A** $S = k.M$
- **B** $S = k.M^{\frac{1}{3}}$
- **C** $S = k^{\frac{1}{3}}.M^{\frac{1}{3}}$
- **D** $S = k^{\frac{1}{3}}.M^{\frac{2}{3}}$
- **E** $S = k^{\frac{1}{3}}.M^2$

16| UERJ Na imagem da etiqueta, informa-se o valor a ser pago por 0,256 kg de peito de peru.

O valor, em reais, de um quilograma desse produto é igual a:

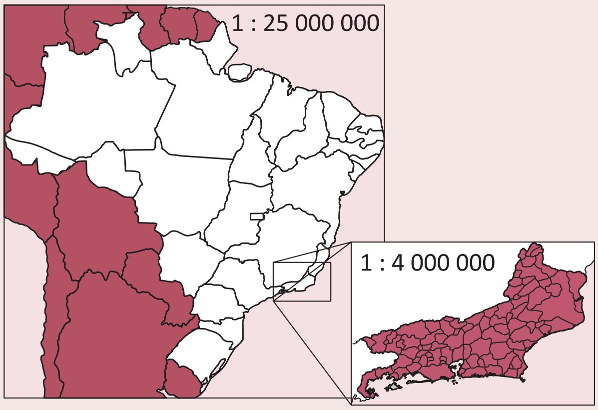
- **A** 25,60
- **B** 32,76
- **C** 40,00
- **D** 50,00

17| UFMG Uma firma é constituída por 2 sócios A e B cujos capitais investidos são 200 e 359 mil reais respectivamente. Todo lucro ou prejuízo é dividido entre os dois, proporcionalmente ao capital investido. A firma acusou um prejuízo de 121 mil reais.

As parcelas do prejuízo correspondentes a cada sócio são respectivamente:

- **A** 20 e 101 mil reais.
- **B** 40 e 70 mil reais.
- **C** 44 e 77 mil reais.
- **D** 79 e 72 mil reais.
- **E** 100 e 21 mil reais.

18| ENEM A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil. Esse número é:

- **A** menor que 10.
- **B** maior que 10 e menor que 20.
- **C** maior que 20 e menor que 30.
- **D** maior que 30 e menor que 40.
- **E** maior que 40.

19| ENEM Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

- **A** 4,8 e 11,2
- **B** 7,0 e 3,0
- **C** 11,2 e 4,8
- **D** 28,0 e 12,0
- **E** 30,0 e 70,0

20| FEI Certo produto de limpeza é obtido misturando-se 4 partes de substância A com 3 partes de uma substância B. Sabe-se que A custa 15,00 por litro e B custa 8,00 por litro. A e B são vendidos em garrafões de 5 litros cada um. Dispondo de 900,00 para compra das substâncias A e B, quantos garrafões (também de 5 litros) do produto podem ser obtidos?

- **A** 12
- **B** 13
- **C** 16
- **D** 15
- **E** 14

Conta-se que, desde a Idade Média, os árabes já dominavam o conteúdo que hoje denominamos de **regra de três**. O matemático italiano Leonardo de Pisa, no século XIII, escreveu o famoso livro *Liber Abaci*, difundindo a técnica que chamou de "Regra de Três Números Conhecidos".

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

As grandezas proporcionais podem ser diretas ou inversas.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

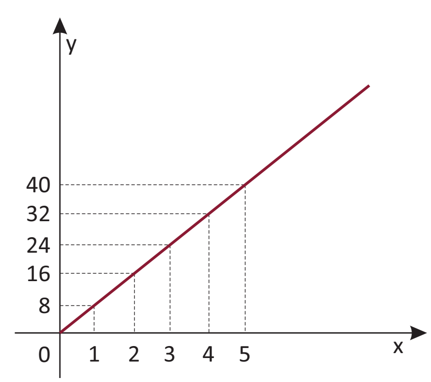
Duas grandezas dizem-se **diretamente proporcionais** ou simplesmente proporcionais quando **aumentando** (ou diminuindo) uma delas, a outra **também aumenta** (ou diminui) na mesma proporção. Por exemplo: Se **3 metros** de um tecido custam **R$ 18,00** então **5 metros** do mesmo tecido custarão **R$ 90,00**.

Propriedade:

Em duas grandezas diretamente proporcionais a razão entre dois valores de uma delas é igual à razão entre os dois valores correspondentes da outra.

Gráfico de duas grandezas (x e y) variando diretamente:

y	8	16	24	32	40
x	1	2	3	4	5



Note que estamos diante de uma variação linear.

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

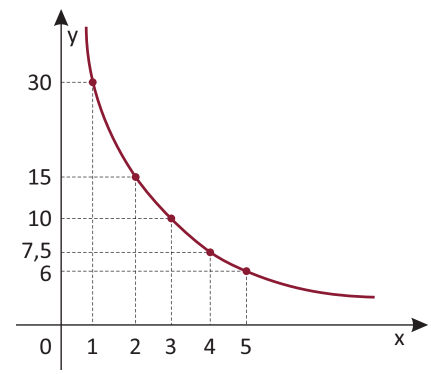
Duas grandezas, são consideradas **inversamente proporcionais** quando **aumentando** (ou diminuindo) uma delas, a outra **diminui** (ou aumenta), na mesma proporção. Por exemplo: Se **5 operários** fazem certo trabalho em **12 dias** então **10 operários** farão o mesmo trabalho em **6 dias**.

Propriedade:

Em duas grandezas inversamente proporcionais o produto entre seus elementos é constante.

Gráfico de duas grandezas (x e y) variando inversamente:

y	30	15	10	7,5	6
x	1	2	3	4	5



Note que estamos diante de uma curva chamada hipérbole.

REGRA DE TRÊS

A regra de três é uma técnica de cálculo que permite a resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente e/ou inversamente proporcionais.

REGRA DE TRÊS SIMPLES DIRETA

Se as grandezas são diretamente proporcionais, a regra de três diz-se direta.

Exemplo:

Se 15 m de certo tecido custam R$ 90,00, quanto custarão 32 m desse tecido?

Indicando por x o preço dos 32 m de tecido, temos a seguinte disposição prática:

15	90
32	x
(d)	Fixo

As grandezas **comprimento** e **custo** são diretamente proporcionais (d).

$$\frac{15}{32} = \frac{90}{x} \Rightarrow x = \frac{32.90}{15} \Rightarrow x = 192$$

Obs.: *Nos exercícios de regra de três simples ou composta, sugerimos manter fixa a coluna que possui a variável e, de acordo com a necessidade, manter ou inverter as razões das demais colunas. Use a "coluna do x" como referência.*

REGRA DE TRÊS SIMPLES INVERSA

Se as grandezas são inversamente proporcionais, a regra de três diz-se **inversa**.

Exemplo:

Se 6 operários levam 10 dias para levantar um muro ao redor de um quarteirão. Quantos operários seriam necessários para levantar o muro em 3 dias?

Sabemos que o **tempo** necessário para efetuar uma obra é **inversamente proporcional** ao **número de operários** empregados.

6 operários	10 dias
x operários	3 dias
Fixo	(i)

Invertendo a razão da coluna que não possui a variável, teremos:

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{10}$$

$$x = \frac{6.10}{3} \Rightarrow x = 20$$

Concluímos que são necessários 20 operários para levantar o muro em 3 dias.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

É aquela que envolve mais de duas grandezas.

Exemplo:

Em 6 dias de trabalhos fabrica-se 720 uniformes escolares fazendo funcionar 16 máquinas de costura. Em quantos dias pode-se fabricar 2.160 uniformes escolares, fazendo funcionar 12 máquinas iguais às primeiras?

Dias	Uniformes	Máquinas
6	720	16
x	2.160	12
(Fixo)	(d)	(i)

Invertendo os valores correspondentes à 3ª grandeza (máquinas), teremos:

$$\frac{6}{x} = \frac{720.12}{2160.16} \Rightarrow x = \frac{6.2160.16}{720.12} \Rightarrow x = 24 \text{ dias}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Dez operários realizam um trabalho em 15 dias. Seis operários fariam o mesmo trabalho em quantos dias?

Resolução:

Número de pessoas	Número de dias
10	15
6	x
(i)	Fixo

$$\frac{15}{x} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = 25 \text{ dias}$$

02| Foram empregados 24 kg de fio para tecer 120 m de brim de 0,82 m de largura. Quantos metros de brim de 1,23 m de largura serão tecidos com 30 kg do mesmo fio?

Resolução:

Quilos	Comprimento	Largura
24	120 m	0,82 m
30	x	1,23
(d)	Fixo	(i)

$$\frac{120}{x} = \frac{24.1,23}{30.0,82} \Rightarrow x = \frac{120.30.0,82}{24.1,23}$$

$$x = 100 \text{ m}$$

03| Se $\frac{2}{3}$ de uma obra foram realizados em 5 dias por 8 operários trabalhando 6 horas por dia, o restante da obra será feito agora, com 6 operários trabalhando 10 horas por dia em quantos dias?

Resolução:

Primeiramente precisamos observar que foram realizados $\frac{2}{3}$ da obra, ou seja, 2 das três partes existentes.

Partes da obra (total = 3)	Dias	Operários	Horas/dia
2	5	8	6
1	x	6	10
(d)	Fixo	(i)	(i)

$$\frac{5}{x} = \frac{2.\cancel{6}.10}{1.8.\cancel{6}}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{20}{8}$$

$$20x = 40$$

$$x = 2 \text{ dias}$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Coloque (D) para grandezas diretamente proporcionais e (I) para grandezas inversamente proporcionais.

A Se 20 máquinas produzem 600 peças, quantas peças serão produzidas por 15 dessas mesmas máquinas? ( )

B Um carro percorre 120 km com 15 litros de gasolina. Quantos litros serão necessários para percorrer 200 km? ( )

C Uma certa quantidade de azeite foi colocada em latas de 2 litros cada uma, obtendo assim 60 latas. Se fossem usadas latas de 3 litros, quantas latas seriam necessárias para colocar a mesma quantidade de azeite? ( )

D Com velocidade de 9 km/h, Luís faz uma caminhada em 40 minutos. Se sua velocidade fosse de 6 km/h, quanto tempo ele gastaria nessa caminhada? ( )

E Num mapa, a distância Rio-Bahia, que é de 1600 km, está representada por 24 cm. A quantos centímetros corresponde, nesse mapa, a distância Brasília-Salvador, que é de 1200 km? ( )

F Se uma roldana tem raio de 12 cm e faz 100 rotações por minuto, então uma roldana de raio 8 cm fará quantas rotações por minuto? ( )

02| Numa certa época, 22 l de gasolina estavam custando R$ 12,10. Qual o preço de 27 l ?

03| Gerson está lendo um livro com 352 páginas. Em 3 horas ele já leu 48 páginas. Quanto tempo Gerson vai levar para ler o livro todo?

04| Em 25 ℓ de água, à temperatura ambiente, é possível dissolver até 8.925 g de sal. Qual a quantidade máxima de sal que pode ser dissolvida em 1.400 ℓ de água?

05| Três torneiras idênticas, abertas completamente, enchem um tanque com água em 2h e 24 min. Se, em vez de 3, fossem 5 dessas torneiras, quanto tempo levaríamos para encher o mesmo tanque?

06| Uma montadora de automóveis demora 8 dias para produzir 200 veículos, trabalhando 9 horas por dia. Quantos veículos montará em 15 dias, funcionando 12 horas por dia?

07| Doze operários, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 metros de linho em 27 dias. Quantos dias, 15 operários, trabalhando 6 horas por dia, levarão para fazer 500 metros do mesmo linho com o dobro da largura?

08| Se x máquinas fazem x cópias em x minutos, quantas cópias fazem y máquinas em y minutos?

09| Duas estradas de iguais dimensões começam simultaneamente a ser construídas por 15 operários cada uma delas. Mas, exclusivamente devido à dificuldade no terreno, percebe-se que enquanto uma turma avançou $\frac{2}{3}$ na sua obra, a outra avançou $\frac{4}{5}$ da sua. Quantos operários deve-se retirar de uma para por na outra, para que as duas obras fiquem prontas no mesmo tempo?

T ENEM E VESTIBULARES

01| FGV Um poço cilíndrico circular reto, de profundidade 15 m e diâmetro 6 m, foi escavado por 18 trabalhadores em 25 dias. Admitindo-se sempre proporcionalidade direta ou inversa entre duas das três grandezas envolvidas no problema (volume escavado, número de trabalhadores e dias necessários para o serviço), para aumentar o diâmetro do poço já escavado em mais 2 m, e com 4 trabalhadores a menos, serão necessários e suficientes mais:

A 20 dias

B 21 dias

C 23 dias

D 24 dias

E 25 dias

02| ENEM Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

A 2

B 4

C 5

D 8

E 9

03| ENEM Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção. De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a:

A 4 mil
B 9 mil
C 21 mil
D 35 mil
E 39 mil

04| ENEM Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4800 kWh consome 4,8 kW por hora. Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

A 0,8
B 1,6
C 5,6
D 11,2
E 33,6

05| ENEM Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (107) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas Veja (ed. 2055), Cláudia (ed. 555), National Geographic (ed. 93) e Nova Escola (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana.

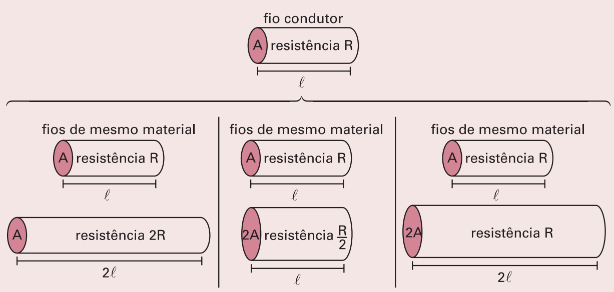
Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

A 102
B 103
C 104
D 105
E 109

06| ENEM A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



Disponível em: http://www.efeitojoule.com. Acesso em : abr. 2010 (adaptado)

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

A direta, direta e direta.
B direta, direta e inversa.
C direta, inversa e direta.
D inversa, direta e direta.
E inversa, direta e inversa.

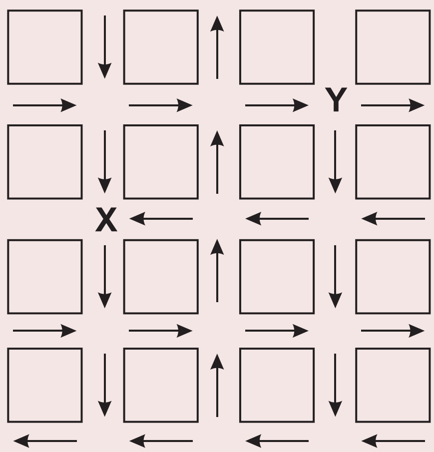
07| ENEM Já são comercializados no Brasil veículos com motores que podem funcionar com o chamado combustível flexível, ou seja, com gasolina ou álcool em qualquer proporção. Uma orientação prática para o abastecimento mais econômico é que o motorista multiplique o preço do litro da gasolina por 0,7 e compare o resultado com o preço do litro de álcool. Se for maior, deve optar pelo álcool. A razão dessa orientação deve-se ao fato de que, em média, se com um certo volume de álcool o veículo roda dez quilômetros, com igual volume de gasolina rodaria cerca de:

A 7 km
B 10 km
C 14 km
D 17 km
E 20 km

08| **ENEM** O mapa a seguir representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego.

Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.

Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y?



A) 25 min.

B) 15 min.

C) 2,5 min.

D) 1,5 min.

E) 0,15 min.

09| **ENEM** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região.

Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

A) 920 kg

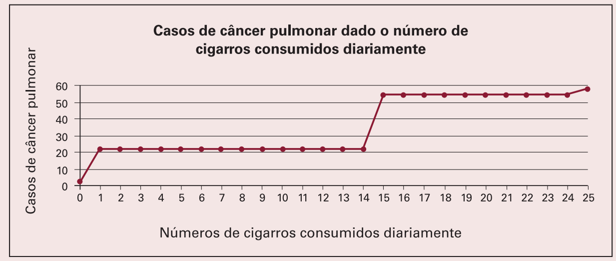
B) 800 kg

C) 720 kg

D) 600 kg

E) 570 kg

10| **ENEM** A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



Centers for Disease Control and Prevention CDC-EIS Summer Course – 1992 (adaptado).

De acordo com as informações do gráfico,

A) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

B) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

C) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

D) uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

E) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

11| **ENEM** Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é Spa-Francorchamps, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km.

Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de Spa-Francorchamps, parado no box para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo,

A) 617 kg

B) 668 kg

C) 680 kg

D) 689 kg

E) 717 kg

12| **ENEM** Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos.

A exigência é que, a partir de 1.º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodísel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodísel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final dísel/biodísel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?

A) 27,75 milhões de litros.

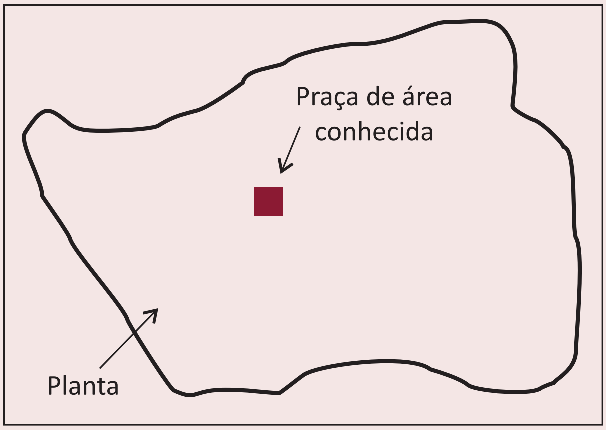
B) 37,00 milhões de litros.

C) 231,25 milhões de litros.

D) 693,75 milhões de litros.

E) 888,00 milhões de litros.

13| **ENEM** Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m × 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente,



A) 800

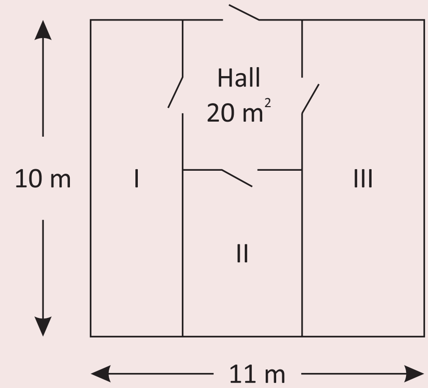
B) 10 000

C) 320 000

D) 400 000

E) 5 000 000

14| **ENEM** Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um hall de entrada de $20 m^2$, conforme a figura abaixo. Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades.



A largura do depósito III dever ser, em metros, igual a:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

15| **ENEM** Se compararmos a idade do planeta Terra, avaliada em quatro e meio bilhões de anos ($4,5 \cdot 10^9$ anos), com a de uma pessoa de 45 anos, então quando começaram a florescer os primeiros vegetais, a Terra já teria 42 anos. Ela só conviveu com o homem moderno nas últimas quatro horas e, há cerca de uma hora, viu-o começar a plantar e a colher. Há menos de um minuto percebeu o ruído de máquinas e de indústrias e, como denuncia uma ONG de defesa do meio ambiente, foi nesses últimos sessenta segundos que se produziu todo o lixo do planeta!

Na teoria do Big Bang, o Universo surgiu há cerca de 15 bilhões de anos, a partir da explosão e expansão de uma densíssima gota. De acordo com a escala proposta no texto, essa teoria situaria o início do Universo há cerca de:

A) 100 anos

B) 150 anos

C) 1000 anos

D) 1500 anos

E) 2000 anos

16| CFTMG Seu Wagner, personagem do livro A mocinha do Mercado Central, contratou uma equipe de artesãos para fazer um lote de bijuterias num prazo de 10 horas. Entretanto, 4 integrantes dessa equipe não puderam comparecer e o serviço demorou 5 horas a mais. Nessa situação, o número inicial de artesãos contratados era igual a:

A 8

B 12

C 16

D 20

17| ENEM A estimativa do número de indivíduos de uma população de animais frequentemente envolve a captura, a marcação e, então, a liberação de alguns desses indivíduos. Depois de um período, após os indivíduos marcados se misturarem com os não marcados, realiza-se outra amostragem. A proporção de indivíduos desta segunda amostragem que já estava marcada pode ser utilizada para estimar o tamanho da população, aplicando-se a fórmula:

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{n_1}{N}$$

Onde:

- n_1 = número de indivíduos marcados na primeira amostragem;
- n_2 = número de indivíduos marcados na segunda amostragem;
- m_2 = número de indivíduos da segunda amostragem que foram marcados na primeira amostragem;
- N = tamanho estimado da população total.

SADAVA, D. et al. Vida: a ciência da biologia. Porto Alegre: Artmed, 2010 (adaptado).

Durante uma contagem de indivíduos de uma população, na primeira amostragem foram marcados 120; na segunda amostragem foram marcados 150, dos quais 100 já possuíam a marcação.

O número estimado de indivíduos dessa população é:

A 188

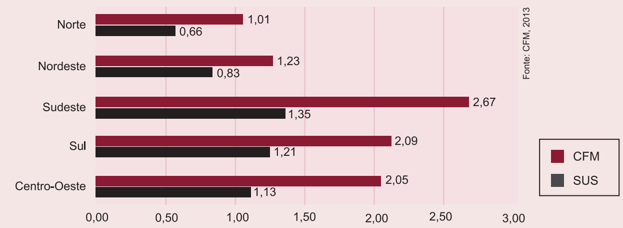
B 180

C 125

D 96

E 80

18| UERJ Observe no gráfico o número de médicos ativos registrados no Conselho Federal de Medicina (CFM) e o número de médicos atuantes no Sistema Único de Saúde (SUS), para cada mil habitantes, nas cinco regiões do Brasil.



O SUS oferece 1,0 médico para cada grupo de x habitantes.

Na região Norte, o valor de x é aproximadamente igual a:

A 660

B 1000

C 1334

D 1515

19| UEA A Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) aprovou o pedido de elevação da cota do reservatório da Usina de Santo Antônio, no Rio Madeira (RO), de 70,5 metros para 71,3 metros. Na prática, isso significa que a usina terá direito de alagar uma área maior do que a inicialmente prevista, de 350 km^2 para 430 km^2.

(O Estado de S. Paulo, 03.07.2013)

Admita que a área alagada seja proporcional à altura da cota. Nesse caso, se a cota desse reservatório for elevada para 71 metros, a área total alagada, em metros quadrados, será corretamente expressa por

A $4 . 10^9$

B $5 . 10^8$

C $4 . 10^7$

D $5 . 10^9$

E $4 . 10^8$

C

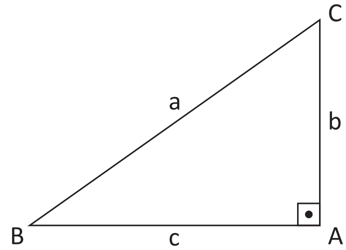
TRIGONOMETRIA 1

A trigonometria é um dos ramos da matemática cuja origem é impossível precisar. Sabe-se que, no passado, esteve vinculada à Astronomia, Agrimensura e Navegação e que povos como os egípcios e os babilônios deram importantes contribuições para o seu desenvolvimento. Da antiguidade até os dias de hoje, o estudo da trigonometria permanece com fundamental importância.

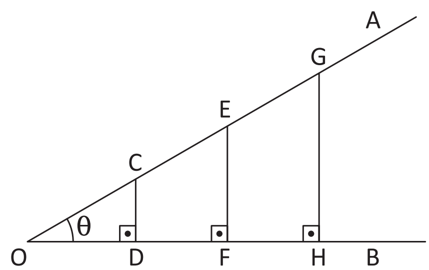
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Se ABC é um triângulo retângulo em A, temos:

- a é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- b e c são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos;
- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.



Consideremos agora um ângulo $A\hat{O}B = \theta, 0^\circ < \theta < 90^\circ$ e tracemos, a partir dos pontos C, E, G, etc. da semirreta $\overline{OA}$, as perpendiculares $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, etc., à semirreta $\overline{OB}$.



Os triângulos OCD, OEF, OGH, etc. são semelhantes por terem os ângulos correspondentes congruentes. Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OG}} = \text{...(constante)}$$

Essa relação depende apenas do ângulo θ (e não do tamanho do triângulo retângulo do qual θ é um dos ângulos agudos). Ela é chamada de seno de θ e escrevemos:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo }\theta}{\text{medida da hipotenusa}} \; (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

De modo análogo, da semelhança de triângulos obtemos as relações:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \text{...(constante)}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OH}} = \text{...(constante)}$$

Tais razões também dependem apenas do ângulo θ e as definimos, respectivamente, como cosseno do ângulo θ e tangente do ângulo θ:

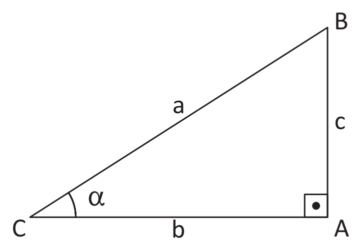
$$\cos\theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo }\theta}{\text{medida da hipotenusa}}\ (0° < \theta < 90°)$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo }\theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo }\theta}\ (0° < \theta < 90°)$$

As razões $\text{sen}\ \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$, $\cos\theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$ e $\text{tg}\ \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ são chamadas razões trigonométricas em relação ao ângulo θ.

RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dado um triângulo retângulo ABC, podemos chegar a algumas relações com base nas definições das razões trigonométricas:



1ª relação: $\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\ \alpha$

Veja:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \text{tg}\ \alpha$$

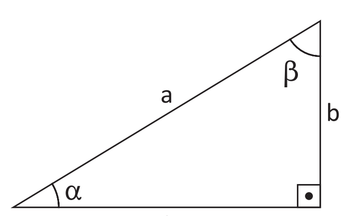
2ª relação: $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria)

Veja:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$$

ÂNGULOS COMPLEMENTARES E AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Se α e β são ângulos complementares, ou seja, admitem soma igual a 90°, então:



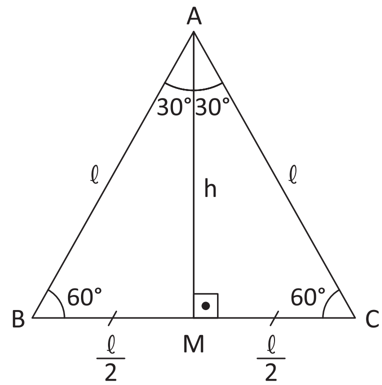
$\text{sen}\ \alpha = \cos\beta = \frac{b}{a}$ $\cos\alpha = \text{sen}\ \beta = \frac{c}{a}$ $\text{tg}\ \alpha\ .\ \text{tg}\ \beta = \frac{b}{c}.\frac{c}{b} = 1$

ÂNGULOS NOTÁVEIS E AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Os ângulos de 30°, 45° e 60° são chamados de ângulos notáveis. As razões trigonométricas para esses ângulos serão obtidas a partir de observações feitas no triângulo equilátero e no quadrado.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Em todo triângulo equilátero a mediana, a altura e a bissetriz são coincidentes. Na figura seguinte, se M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, o segmento $\overline{AM}$ é também altura e bissetriz do ângulo Â. Logo, os triângulos ABM e ACM são retângulos.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABM, vem:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow \ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2 \Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell.\sqrt{3}}{2}$$

Assim, temos:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell.\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell.\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2}.\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

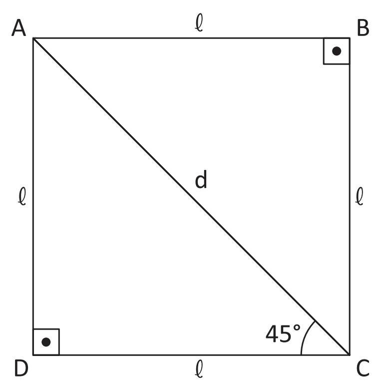
$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell.\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell.\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{\ell} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

Como sen 30° = cos 60°, cos 30° = sen 60° e $\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\text{tg } 60^\circ}$, pois 30° e 60° são ângulos complementares, temos:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DO QUADRADO

Em todo quadrado a diagonal o divide em dois triângulos retângulos congruentes.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC, vem:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell\sqrt{2}$$

Assim, temos:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

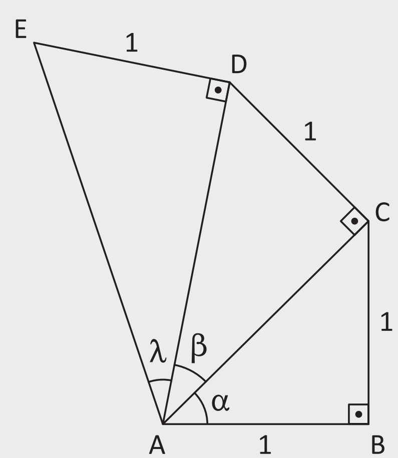
$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = 1 \Rightarrow \text{tg } 45^\circ = 1$$

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS PARA OS ÂNGULOS NOTÁVEIS

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| **UFRN** A figura a seguir é formada por três triângulos retângulos. As medidas dos catetos do primeiro triângulo são iguais a 1. Nos demais triângulos, um dos catetos é igual à hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto tem medida igual a 1. Considerando os ângulos α, β e λ na figura abaixo, atenda às solicitações seguintes. Calcule tg α, tg β e tg λ.



Resolução:

Aplicando sucessivamente o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABC e ACD, respectivamente, temos:

$$(\overline{AC})^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}$$

$$(\overline{AD})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = \overline{AD} = \sqrt{3}$$

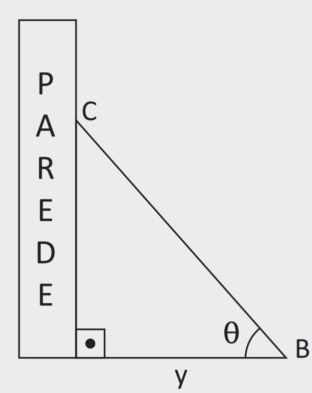
Portanto:

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{tg } \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

02| Um pintor utiliza uma escada BC de 5 m de comprimento para pintar a área externa de uma casa. Ao apoiar a escada, o pintor deixa uma das extremidades afastada y m da parede e $\theta = 60°$. Nessas condições, determine y.

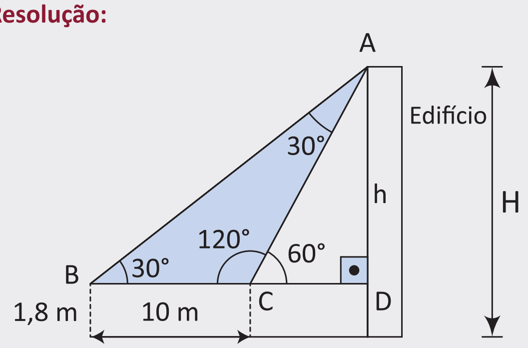


Resolução:

$$\cos\theta = \frac{y}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}\,\text{m} \Rightarrow y = 2{,}5\,\text{m}$$

03| Um homem de 1,80 m de altura avista o topo de um edifício sob um ângulo de 30° em relação à horizontal. Quando ele se aproxima 10 m do edifício, esse ângulo aumenta para 60°. Qual a altura do edifício?

Resolução:



O triângulo sombreado é isósceles, logo, a hipotenusa do triângulo ACD mede 10 m (dois lados congruentes do triângulo sombreado). Portanto, temos:

$$\text{sen}\,60^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10.\text{sen}\,60^\circ = 5\sqrt{3}\text{ m}$$

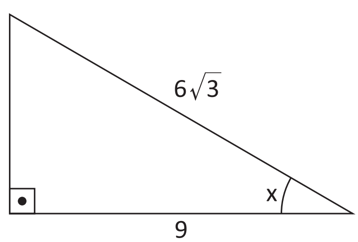
Então:

A altura do edifício $H = (1{,}8 + 5\sqrt{3})\text{m}$

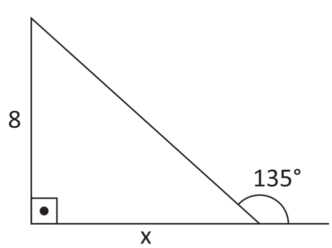
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Nas figuras seguintes, determine o valor de x:

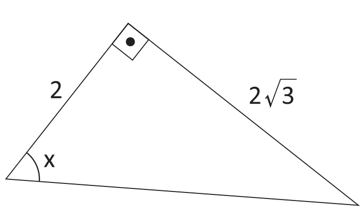
A



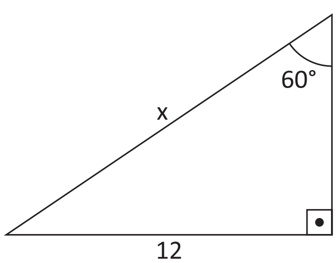
B



C



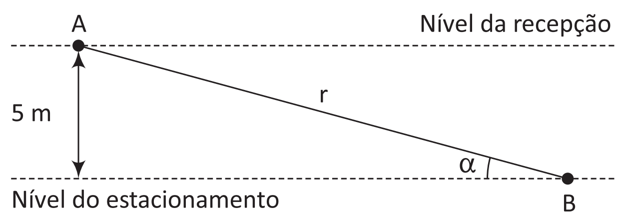
D



02| Um papagaio, ou pipa, é preso a um fio esticado que forma um ângulo de 45° com o solo. O comprimento do fio é de 100 m. Determine a altura do papagaio em relação ao solo.

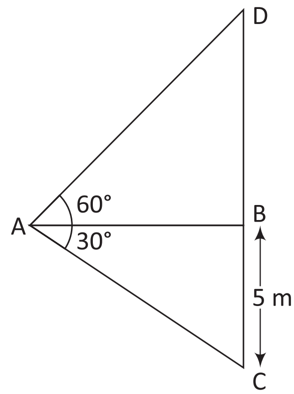
03| IFCE Queremos encostar uma escada de 8m de comprimento numa parede, de modo que ela forme um ângulo de 60° com o solo. A que distância da parede devemos apoiar a escada no solo?

04| UNESP Um prédio hospitalar está sendo construído em um terreno declivoso. Para otimizar a construção, o arquiteto responsável idealizou o estacionamento no subsolo do prédio, com entrada pela rua dos fundos do terreno. A recepção do hospital está 5 metros acima do nível do estacionamento, sendo necessária a construção de uma rampa retilínea de acesso para os pacientes com dificuldades de locomoção. A figura representa esquematicamente esta rampa (r), ligando o ponto A, no piso da recepção, ao ponto B, no piso do estacionamento, a qual deve ter uma inclinação mínima de 30° e máxima de 45°.

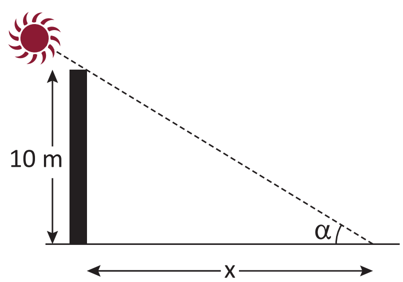


Nestas condições e considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, quais deverão ser os valores máximo e mínimo, em metros, do comprimento desta rampa de acesso?

05| UEM Para obter a altura CD de uma torre, um matemático, utilizando um aparelho, estabeleceu a horizontal AB e determinou as medidas dos ângulos $\alpha = 30°$ e $\beta = 60°$ e a medida do segmento BC = 5 m, conforme especificado na figura. Nessas condições, determine a altura da torre, em metros.

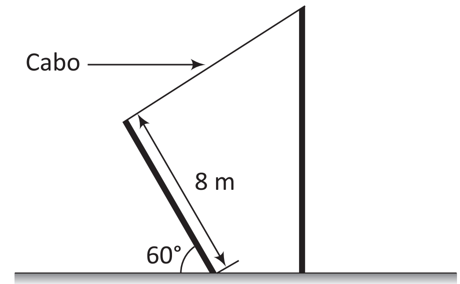


06| UFRJ Milena, diante da configuração representada a seguir, pede ajuda aos vestibulandos para calcular o comprimento da sombra x do poste, mas, para isso, ela informa que o sen $\alpha = 0{,}6$.



Calcule o comprimento da sombra x.

07| UFG Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura a seguir.



Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo.

08| UNICAMP Os pontos A e B estão, ambos, localizados na superfície terrestre a 60° de latitude norte; o ponto A está a 15°45' de longitude leste e o ponto B a 56°15' de longitude oeste. Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6.400 km qual é o raio do paralelo de 60°?

09| UNICAMP Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância AB = 1200 metros. Quando em A ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo NÂB é de 60°; e quando em B, verifica que o ângulo NBA é de 45°.

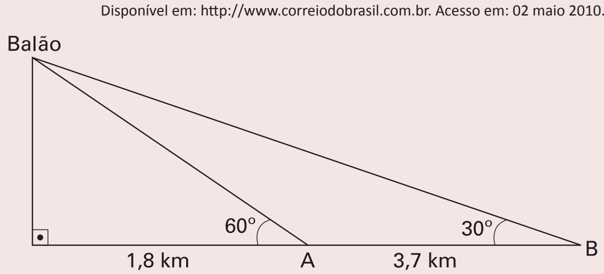
A) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

B) Calcule a distância a que se encontra o navio da praia.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, Franca, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

A) 1,8 km.

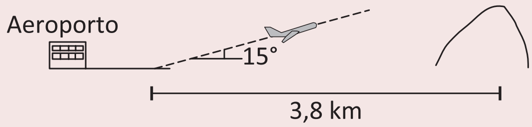
B) 1,9 km.

C) 3,1 km.

D) 3,7 km.

E) 5,5 km.

02| UNICAMP Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala.



Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de:

A) 3,8 tg (15°) km
B) 3,8 sen (15°) km
C) 3,8 cos (15°) km
D) 3,8 sec (15°) km

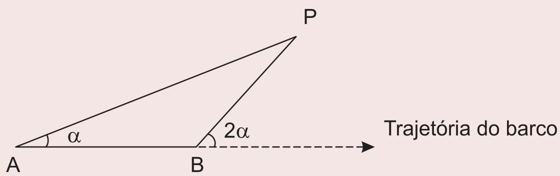
03| ENEM As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

A) menor que 100 m^2.
B) entre 100 m^2 e 300 m^2.
C) entre 300 m^2 e 500 m^2.
D) entre 500 m^2 e 700 m^2.
E) maior que 700 m^2.

04| ENEM Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

A) 1000 m.
B) $1000\sqrt{3}$ m.
C) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.
D) 2000 m.
E) $2000\sqrt{3}$ m.

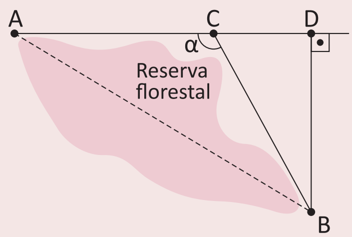
05| UNEB A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerado um esporte radical.

Em certo ecoparque, aproveitando a geografia do local, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam estão a cerca de 52m e 8m, cada uma, em relação ao nível do solo, e o ângulo de descida formado com a vertical é de 80°.

Nessas condições, considerando-se o cabo esticado e que tg 10° = 0,176, pode-se afirmar que a distância horizontal percorrida, em metros, ao final do percurso, é aproximadamente igual a:

A) 250
B) 252
C) 254
D) 256
E) 258

06| UFG Uma empresa de engenharia deseja construir uma estrada ligando os pontos A e B, que estão situados em lados opostos de uma reserva florestal, como mostra a figura a seguir.



A empresa optou por construir dois trechos retilíneos, denotados pelos segmentos AC e CB, ambos com o mesmo comprimento. Considerando que a distância de A até B, em linha reta, é igual ao dobro da distância de B a D, o ângulo α, formado pelos dois trechos retilíneos da estrada, mede:

A 110°

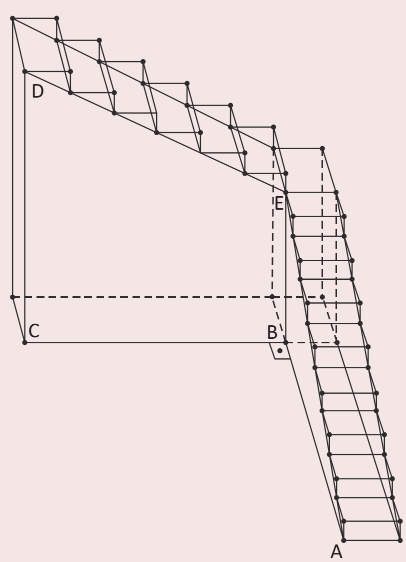
B 120°

C 130°

D 140°

E 150°

07| UFRN A escadaria a seguir tem oito batentes no primeiro lance e seis, no segundo lance de escada.



Sabendo que cada batente tem 20 cm de altura e 30 cm de comprimento (profundidade), a tangente do ângulo   mede:

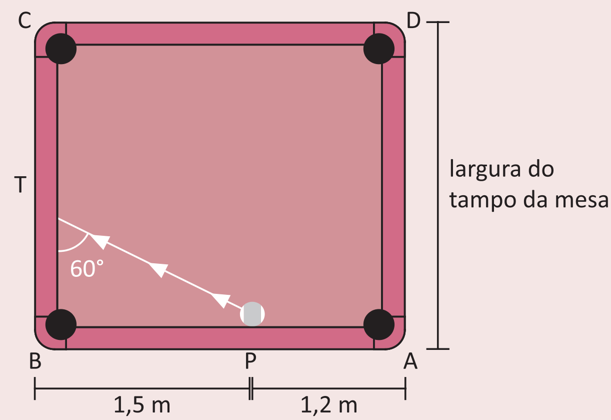
A $\frac{9}{10}$

B $\frac{14}{15}$

C $\frac{29}{30}$

D 1

08| UNESP A figura representa a vista superior do tampo plano e horizontal de uma mesa de bilhar retangular ABCD com caçapas em A, B, C, e D. O ponto P localizado em AB representa a posição de uma bola de bilhar, sendo $\overline{PB} = 1,5$ m e $\overline{PA} = 1,2$ m. Após uma tacada na bola, ela se desloca em linha reta colidindo com BC no ponto T, sendo a medida do ângulo PTB igual 60°. Após essa colisão, a bola segue, em trajetória reta, diretamente até a caçapa D.



Nas condições descritas e adotando $\sqrt{3} \cong 1,73$ a largura do tampo da mesa, em metros, é próxima de:

A 2,42

B 2,08

C 2,28

D 2,00

E 2,56

09| ESPCEX Um tenente do Exército está fazendo um levantamento topográfico da região onde será realizado um exercício de campo. Ele quer determinar a largura do rio que corta a região e por isso adotou os seguintes procedimentos: marcou dois pontos, A (uma árvore que ele observou na outra margem) e B (uma estaca que ele fincou no chão na margem onde ele se encontra); marcou um ponto C distante 9 metros de B, fixou um aparelho de medir ângulo (teodolito) de tal modo que o ângulo no ponto B seja reto e obteve uma medida de $\frac{\pi}{3}$ rad para o ângulo $A\hat{C}B$.

Qual foi a largura do rio que ele encontrou?

A $9\sqrt{3}$ metros

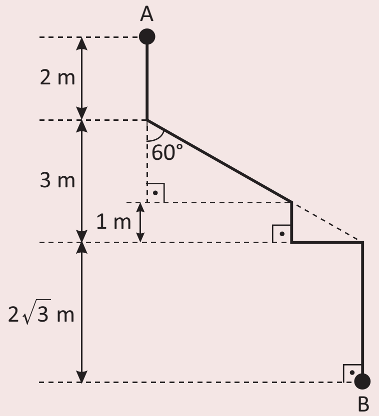
B $3\sqrt{3}$ metros

C $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros

D $\sqrt{3}$ metros

E 4,5 metros

10| IFTMG Uma formiga sai do ponto A e segue por uma trilha, representada pela linha contínua, até chegar ao ponto B, como mostra a figura.



A distância, em metros, percorrida pela formiga é:

A $1 + 2\sqrt{3}$

B $3 + 3\sqrt{3}$

C $5 + 2\sqrt{3}$

D $7 + 3\sqrt{3}$

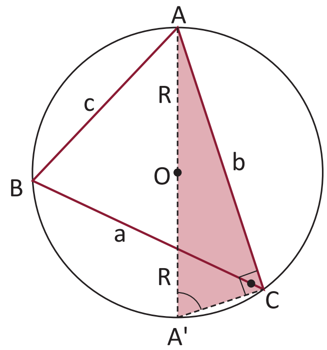
TRIGONOMETRIA EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

LEI DOS SENOS

Em qualquer triângulo, a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto a este lado é constante e o valor desta constante é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:

Consideremos um triângulo ABC qualquer, inscrito na circunferência de centro O e raio R.



Tracemos, a partir do vértice A, o diâmetro $\overline{AA'}$.

Sabemos que $\hat{A}' = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ e $\hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ (ângulos inscritos), portanto, $\hat{A}' \equiv \hat{B}$ e sen $\hat{B}$ = sen $\hat{A}'$.

O triângulo $AA'C$ é retângulo, pois $\hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{ABA'}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Logo, sen $\hat{A}' = \dfrac{b}{2R}$.

Como sen $\hat{A}'$ = sen $\hat{B}$, então, sen $\hat{B} = \dfrac{b}{2R}$ ou $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$.

Analogamente, deduzimos que $\dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen}\,C} = 2R$.

Logo, podemos concluir:

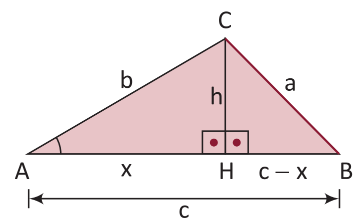
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

LEI DOS COSSENOS

O quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

DEMONSTRAÇÃO:

1° caso: $\hat{A}$ é agudo $(0^\circ < \hat{A} < 90^\circ)$



Seja h a altura em relação ao lado $\overline{AB}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AHC e BHC:

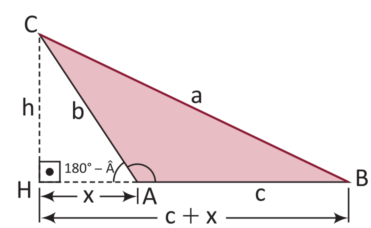
$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c - x)^2 \Rightarrow a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$$

Como $h^2 + x^2 = b^2$, temos $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$.

O ΔAHC é retângulo, logo, $x = b \cdot \cos \hat{A}$.

Substituindo, temos: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}$.

2° caso: $\hat{A}$ é obtuso $(90^\circ < \hat{A} < 180^\circ)$



Seja h a altura em relação ao lado $\overline{AB}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos AHC e BHC:

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c + x)^2 \Rightarrow a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 + 2 \cdot c \cdot x$$

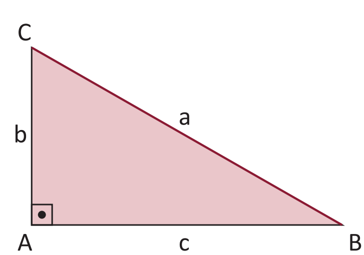
Como $h^2 + x^2 = b^2$, temos $a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x$.

Como o ΔAHC é retângulo, $x = b \cdot \cos (180° - \hat{A})$.

Porém, $\cos (180° - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$, logo, $x = -b \cdot \cos \hat{A}$.

Substituindo, temos: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}$.

3° caso: $\hat{A}$ é reto $(\hat{A} = 90^\circ)$

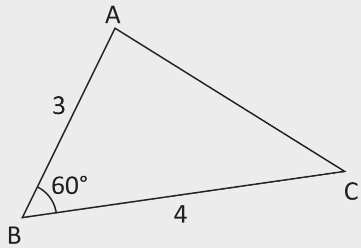


No ΔABC, temos $\cos \hat{A} = \cos 90^\circ = 0$. Então, a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ pode ser escrita como $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0$, que equivale a $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras). Daí concluímos: a lei dos cossenos é válida para todo e qualquer tipo de triângulo.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Nas figuras seguintes, determine:

A A medida do segmento $\overline{AC}$.



Resolução:

Pela Lei dos Cossenos, temos:

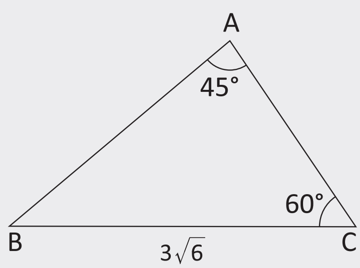
$(\overline{AC})^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$

$\Rightarrow (\overline{AC})^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\overline{AC})^2 = 25 - 12$

$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{13}$

B A medida do segmento $\overline{AB}$.



Resolução:

Pela Lei dos Senos, temos:

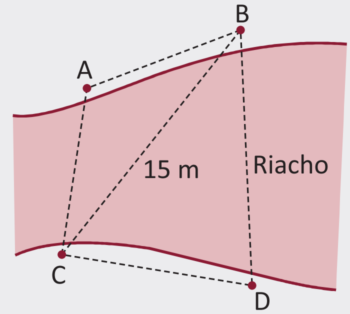
$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{3\sqrt{6}}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 9$$

02| UNICAMP Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito.



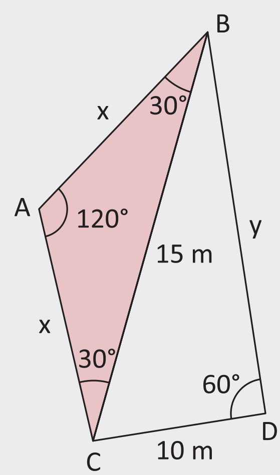
VISADA	ÂNGULO
$A\hat{C}B$	$\frac{\pi}{6}$
$B\hat{C}D$	$\frac{\pi}{3}$
$A\hat{B}C$	$\frac{\pi}{6}$

A Calcule a distância entre A e B.

B Calcule a distância entre B e D.

Resolução:

A



No triângulo ABC assinalado, temos:

$15^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120^\circ$

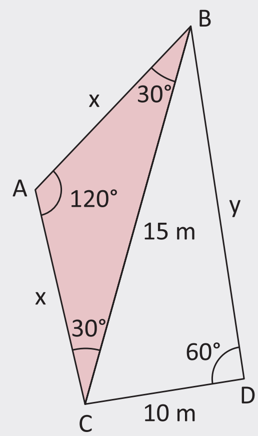
$225 = 2x^2 - 2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$225 = 3x^2$

$x^2 = 75$

$x = 5\sqrt{3}\text{ m}$

B



No triângulo BDC, temos:

$y^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \,.\, 15 \,.\, 10 \,.\, \cos 60°$

$y^2 = 225 + 100 - 150$

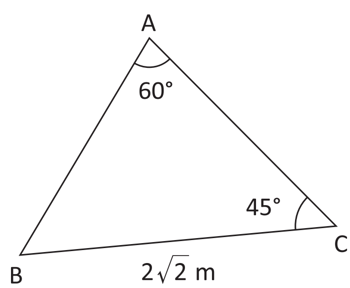
$y = \sqrt{175}$

$y = 5\sqrt{7}\,\text{m}$

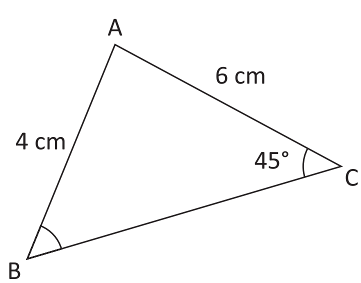
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Nas figuras seguintes, determine:

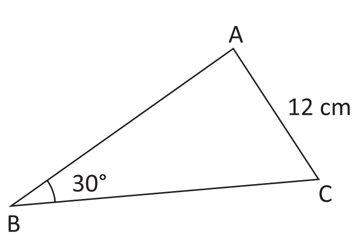
A A medida do segmento $\overline{AB}$.



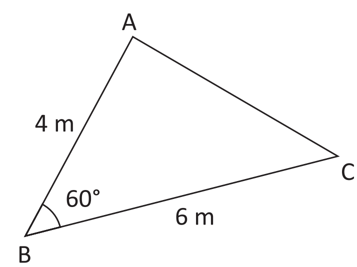
B O seno do ângulo $\hat{B}$.



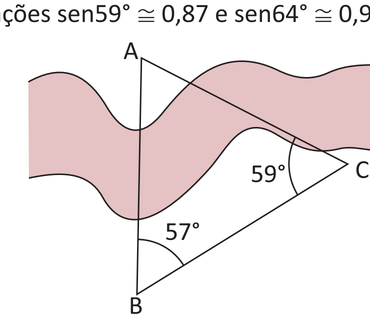
C O raio da circunferência que circunscreve o ΔABC.



D A medida do segmento $\overline{AC}$.



02| UFPE Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustrado na figura a seguir. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos CBA = 57° e ACB = 59°. Sabendo que BC mede 30m, indique, em metros, a distância AB. Dado: use as aproximações sen59° ≅ 0,87 e sen64° ≅ 0,90.



03| UNICAMP Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.

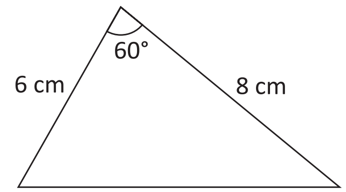
A Quais são esses números?

B Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.

04| UNICAMP Sejam A, B e C pontos de uma circunferência tais que, $\overline{AB} = 2\text{km}$, $\overline{BC} = 1\text{km}$ e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja de 135°. Calcule o raio dessa circunferência.

05| FGV

A Determine o perímetro do triângulo na forma decimal aproximada, até os décimos. Se quiser, use algum destes dados: $35^2 = 1225$; $36^2 = 1296$; $37^2 = 1369$.

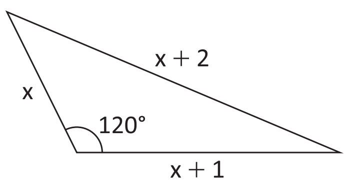


B Um aluno tinha de fazer um cartaz triangular, em cartolina. Decidiu construir o triângulo com as seguintes medidas dos lados: 6 cm, 8 cm e 16 cm. Ele conseguirá fazer o cartaz? Por quê?

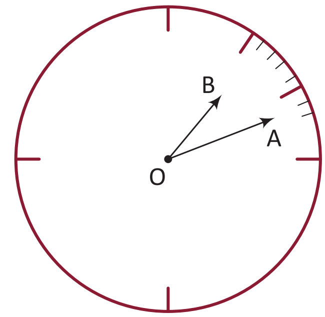
06| UFRJ Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 metros, o dos minutos, e 1 metro, o das horas. Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca 4 horas.

07| UNESP Os lados de um triângulo medem $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $3+\sqrt{3}$. Determine o ângulo oposto ao lado que mede $\sqrt{6}$.

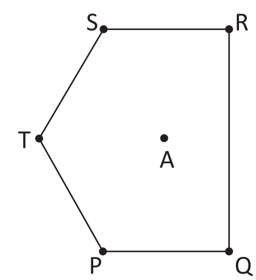
08| IFCE Na figura a seguir, determine o valor de x e o perímetro do triângulo.



09| UFG O mostrador do relógio de uma torre é dividido em 12 partes iguais (horas), cada uma das quais é subdividida em outras 5 partes iguais (minutos). Se o ponteiro das horas (OB) mede 70 cm e o ponteiro dos minutos (OA) mede 1 m, qual será a distância AB, em função do ângulo entre os ponteiros, quando o relógio marcar 1 hora e 12 minutos?



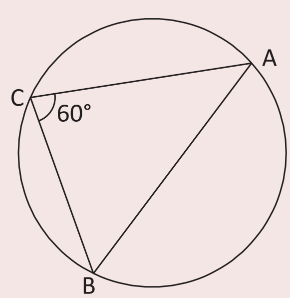
10| UFG Uma empresa de vigilância irá instalar um sistema de segurança em um condomínio fechado, representado pelo polígono da figura a seguir.



A empresa pretende colocar uma torre de comunicação, localizada no ponto A, indicado na figura, que seja equidistante dos vértices do polígono, indicados por P, Q, R, S e T, onde serão instalados os equipamentos de segurança. Sabe-se que o lado RQ desse polígono mede 3000 m e as medidas dos outros lados são todas iguais à distância do ponto A aos vértices do polígono. Calcule a distância do ponto A, onde será instalada a torre, aos vértices do polígono.

T ENEM E VESTIBULARES

01| UFJF Uma praça circular de raio R foi construída a partir da planta a seguir:



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que $\overline{AB} = 80$ m. De acordo com a planta e as informações dadas, é CORRETO afirmar que a medida de R é igual a:

A $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}$ m

B $\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$ m

C $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ m

D $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ m

E $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

02| **FUVEST** Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é:

A $\frac{5}{6}$

B $\frac{4}{5}$

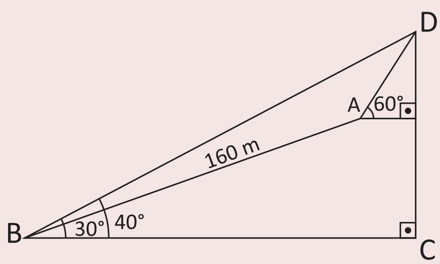
C $\frac{3}{4}$

D $\frac{2}{3}$

E $\frac{1}{8}$

03| **IFMG** Um grupo de escoteiros pretende escalar uma montanha ate o topo, representado na figura abaixo pelo ponto D, visto sob ângulos de 40° do acampamento B e de 60° do acampamento A.

Dado: sen 20° = 0,342



Considerando que o percurso de 160 m entre A e B e realizado segundo um angulo de 30° em relação a base da montanha, então, a distância entre B e D, em m, e de, aproximadamente:

A 190

B 234

C 260

D 320

04| **CESGRANRIO** No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°. O seno do ângulo B vale:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{3}{4}$

D $\frac{4}{5}$

E $\frac{5}{6}$

05| **UFPA** Considere as seguintes informações:

- De dois pontos A e B, localizados na mesma margem de um rio, avista-se um ponto C, de difícil acesso, localizado na margem oposta;
- Sabe-se que B está distante 1000 metros de A;
- Com o auxílio de um teodolito (aparelho usado para medir ângulos) foram obtidas as seguintes medidas: $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 80°$.

Deseja-se construir uma ponte sobre o rio, unindo o ponto C a um ponto D entre A e B, de modo que seu comprimento seja mínimo. Podemos afirmar que o comprimento da ponte será de aproximadamente.

Considere: sen 80° = 0,985, sen 70° = 0,940, cos 80° = 0,174 e cos 70° = 0,340

A 524 metros

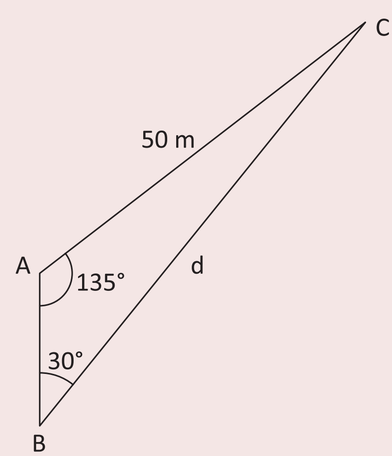
B 532 metros

C 1048 metros

D 500 metros

E 477 metros

06| **UFSM** Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura. Assim, a distância "d" é:



A $50\sqrt{2}$ m

B $50\frac{(\sqrt{6})}{3}$ m

C $50\sqrt{3}$ m

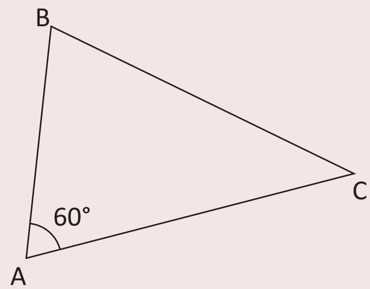
D $25\sqrt{6}$ m

E $50\sqrt{6}$ m

07| UFPI Em um triângulo, um dos ângulos mede 60° e os lados adjacentes a este ângulo medem 1 cm e 2 cm. O valor do perímetro deste triângulo, em centímetros, é:

- **A** $3 + \sqrt{5}$
- **B** $5 + \sqrt{3}$
- **C** $3 + \sqrt{3}$
- **D** $3 + \sqrt{7}$
- **E** $5 + \sqrt{7}$

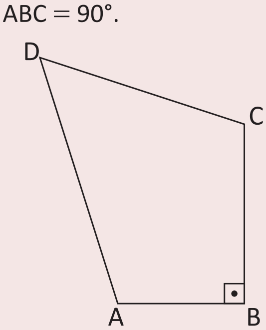
08| UNIRIO



Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura anterior. Logo, a distância entre B e C, em km, é:

- **A** menor que 90
- **B** maior que 90 e menor que 100
- **C** maior que 100 e menor que 110
- **D** maior que 110 e menor que 120
- **E** maior que 120

09| FUVEST No quadrilátero, BC = CD = 3 cm, AB = 2 cm, ADC = 60° e ABC = 90°.



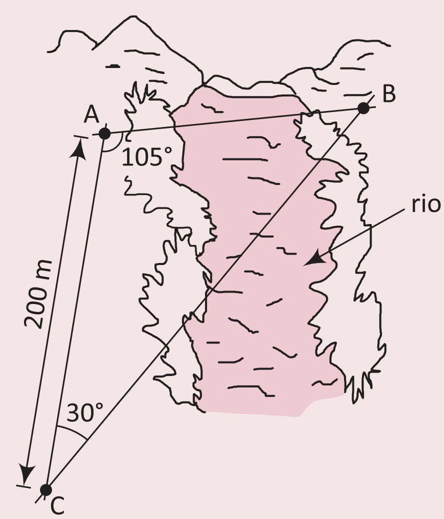
A medida, em cm, do perímetro do quadrilátero é:

- **A** 11
- **B** 12
- **C** 13
- **D** 14
- **E** 15

10| CESGRANRIO Um navegador devia viajar durante duas horas, no rumo nordeste, para chegar a certa ilha. Enganou-se, e navegou duas horas no rumo norte. Tomando, a partir daí, o rumo correto, em quanto tempo, aproximadamente, chegará à ilha?

- **A** 30 min
- **B** 1 h
- **C** 1 h 30 min
- **D** 2 h
- **E** 2 h 15 min

11| UFPB A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200 m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

- **A** $200\sqrt{2}$
- **B** $180\sqrt{2}$
- **C** $150\sqrt{2}$
- **D** $100\sqrt{2}$
- **E** $50\sqrt{2}$

MÚLTIPLOS E DIVISORES

O estudo dos múltiplos e divisores não está limitado aos dispositivos práticos que nos ajudam a calcular o **MMC** e o **MDC** entre números naturais.

É preciso compreender em que situações-problema esses conceitos podem ser empregados. Nos problemas contextualizados, devemos perceber padrões e regularidades de sequências, para assim, buscarmos as generalizações. Vejamos o exemplo a seguir:

Queremos plantar 6000 árvores dispostas em linhas e colunas. As árvores deverão ser numeradas segundo o seguinte modelo:

	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
Linha 1	Árvore 1	Árvore 2	Árvore 3	Árvore 4	Árvore 5	Árvore 6
Linha 2	Árvore 7	Árvore 8	Árvore 9	Árvore 10	Árvore 11	Árvore 12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Pergunta-se: *Qual é o número da árvore plantada na 4ª coluna e na 135ª coluna?*

A solução para este problema você verá logo mais!

DEFINIÇÕES

- **Múltiplo** de um número é todo número que se obtém multiplicando o número dado por um número inteiro qualquer.

Exemplo: Conjunto dos múltiplos naturais de 3.

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$$

- **Divisor** de um número é qualquer número inteiro que o divide um número exato de vezes.

Exemplo: Conjunto dos divisores positivos de 18.

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

PROPRIEDADES

O número zero é múltiplo de qualquer número;
O número 1 é o divisor universal, ou seja, divide qualquer número;
Todo número, à exceção do zero, é divisor e múltiplo dele mesmo;
O número zero não divide nenhum número inteiro;
Se um número é múltiplo de outro, significa que ele também é divisor desse mesmo número;
O conjunto dos múltiplos dos números naturais não nulos é infinito;
O conjunto dos divisores de zero é infinito;
O conjunto dos divisores dos números naturais não nulos é finito;
Para que um número seja múltiplo de outro, é necessário que os dois possuam os mesmos fatores, sendo que um deles pode possuir expoentes iguais ou maiores;
Para que um número seja divisor de outro, é necessário que os dois possuam os mesmos fatores, sendo que o número divisor deverá possuir expoentes iguais ou menores do que o dividendo;
O produto de uma sequência de “x” números inteiros consecutivos é divisível por “x”.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

DIVISIBILIDADE POR 2

Um número natural é divisível por 2 quando ele termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, quando ele é par.

Exemplos:

- **8.040** é divisível por 2, pois termina em 0.
- **2.175** não é divisível por 2, pois não é um número par.

DIVISIBILIDADE POR 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 3.

Exemplos:

- **2.367** é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é igual a $2 + 3 + 6 + 7 = 18$, e como 18 é divisível por 3, então 2.367 é divisível por 3.
- **617** não é divisível por 3, pois 14 $(6 + 1 + 7)$ não é divisível por 3.

DIVISIBILIDADE POR 4

Um número é divisível por 4 quando termina em 00 ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos da direita for divisível por 4.

Exemplos:

- **2.500** é divisível por 4, pois termina em 00.
- **5.316** é divisível por 4, pois 16 é divisível por 4.
- **6.124** é divisível por 4, pois 24 é divisível por 4.
- **9.227** não é divisível por 4, pois não termina em 00 e 27 não é divisível por 4.

DIVISIBILIDADE POR 5

Um número natural é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.

Exemplos:

- **85** é divisível por 5, pois termina em 5.
- **200** é divisível por 5, pois termina em 0.
- **57** não é divisível por 5, pois não termina em 0 nem em 5.

DIVISIBILIDADE POR 6

Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.

Exemplos:

- **612** é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma: 9).
- **7.314** é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma: 15).
- **416** não é divisível por 6, (é divisível por 2, mas não é divisível por 3).
- **6.405** não é divisível por 6 (é divisível por 3, mas não é divisível por 2).

DIVISIBILIDADE POR 7

Um número é divisível por 7, quando dobramos o número da unidade e subtraímos do número restante. Se o resultado for um número múltiplo de 7, então, o número inicial será divisível por 7.

Exemplos:

- **245** é divisível por 7.

Observe:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 5 \Rightarrow \text{dobra-se o algarismo das unidades.} \\ -10 & \Rightarrow \text{subtrai-se do número restante.} \\ \hline \mathbf{14} & \Rightarrow \text{é múltiplo de 7, portanto, 245 é divisível por 7.} \end{array}$$

Vamos resolver para verificar:

$$\begin{array}{r|l} 245 & 7 \\ \cline{2-2} -21\downarrow & 35 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

Divisão exata

DIVISIBILIDADE POR 8

Um número é divisível por 8 quando termina em 000, ou quando o número formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8.

Exemplos:

- **3.000** é divisível por 8, pois termina em 000.
- **287.104** é divisível por 8, pois 104 é divisível por 8.
- **224.224** é divisível por 8, pois 112 é divisível por 8.
- **451.645** não é divisível por 8, pois 645 não é divisível por 8.

DIVISIBILIDADE POR 9

Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 9.

Exemplos:

- **20.871** é divisível por 9, pois a soma de seus algarismos é igual a $2+0+8+7+1=18$, e como 18 é divisível por 9, então 20.871 é divisível por 9.
- **7.819** não é divisível por 9, pois 25 $(7+8+1+9)$ não é divisível por 9.

DIVISIBILIDADE POR 10

Um número natural é divisível por 10 quando ele termina em 0.

Exemplos:

- **8.150** é divisível por 10, pois termina em 0.
- **67.806** não é divisível por 10, pois não termina em 0.

DIVISIBILIDADE POR 11

Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par é divisível por 11.

O algarismo das unidades é de 1ª ordem, o das dezenas de 2ª ordem, o das centenas de 3ª ordem, e assim sucessivamente.

Exemplos:

- **62.579**

  Si (soma das ordens ímpares) $= 9+5+6=20$

  Sp (soma das ordens pares) $= 7+2=9$

  $Si - Sp = 20 - 9 = \mathbf{11}$

  Como 11 é divisível por 11, então o número 62.579 é divisível por 11.

- **35.411**

  $Si = 1+4+3=8$

  $Sp = 1+5=6$

  $Si - Sp = 8 - 6 = \mathbf{2}$

  Como 2 não é divisível por 11, então o número 35.411 não é divisível por 11.

DIVISIBILIDADE POR 12

Um número é divisível por 12 quando é divisível por 3 e por 4.

Exemplos:

- **1.008** é divisível por 12, porque é divisível por 3 (soma $=9$) e por 4 (dois últimos algarismos é divisível por 4).
- **570** não é divisível por 12 (é divisível por 3, mas não é divisível por 4).
- **640** não é divisível por 12 (é divisível por 4, mas não é divisível por 3).

DIVISIBILIDADE POR 15

Um número é divisível por 15 quando é divisível por 3 e por 5.

Exemplos:

- **405** é divisível por 15, porque é divisível por 3 (soma = 9) e por 5 (termina em 5).
- **1.824** não é divisível por 15 (é divisível por 3, mas não é divisível por 5).
- **430** não é divisível por 15 (é divisível por 5, mas não é divisível por 3).

DIVISIBILIDADE POR 25

Um número é divisível por 25 quando os dois algarismos finais forem 00, 25, 50 ou 75.

Exemplos:

- **9.000**, **725**, **34.650** e **67.975** são divisíveis por 25.

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Todo número que não é primo pode ser escrito como um produto de fatores primos (Exceção: os números "0" e "1"). Vejamos o seguinte dispositivo prático que nos permite escrever um número natural na forma canônica:

Divisores primos ↓

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ \mathbf{1} & \end{array}$$

Quociente → 315

1º) Dividimos o número pelo seu menor divisor primo;

2º) A seguir, dividimos o quociente obtido pelo menor divisor primo desse quociente e assim sucessivamente até obter o quociente 1.

Então $630 = 2 . 3 . 3 . 5 . 7$

$\mathbf{630 = 2 . 3^2 . 5 . 7}$ → **Decomposição canônica ou em fatores primos.**

QUANTIDADES DE MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO EM UM INTERVALO

Exemplo: Quantos múltiplos de 5 possuem 3 algarismos?

Resolução: Devemos primeiramente encontrar o primeiro e o último número de 3 algarismos que são divisíveis por 5.

Primeiro número: 100 (Repare que 100 dividido por 5 resulta em 20, ou seja, existem 20 números iguais ou menores a 100 que são divisíveis por 5).

Último número: 995 (Repare que 999 dividido por 5 dá quociente 199 e resto 4. Devemos então fazer 999 – 4 = 995. Existem 199 números compreendidos entre 0 e 999 que são divisíveis por 5).

Cálculo final: 199 – 20 + 1 = 180 múltiplos de 5 que possuem 3 algarismos.

QUANTIDADE DE DIVISORES NATURAIS

A quantidade (N) de divisores de um número natural é facilmente calculável, bastando, primeiramente, escrevê-lo na forma canônica, ou seja, decompô-lo em fatores primos. Vamos utilizar como exemplo o número 72:

$$72 = 2^3 . 3^2$$

O próximo passo é somar a cada expoente uma unidade e multiplicar os resultados obtidos. Assim teremos o número de divisores naturais de 72.

$$N = (3 + 1) . (2 + 1) = 4 . 3 = 12 \text{ divisores}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Qual é a quantidade de divisores do número 600?

Resolução:

Vamos escrever o número 600 em sua forma canônica: $2^3 \times 3 \times 5^2$

Somando uma unidade a cada um dos expoentes e multiplicando o resultado, teremos:

$(3 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$ divisores.

02| ENEM Nosso calendário atual é embasado no antigo calendário romano, que, por sua vez, tinha como base as fases da lua. Os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro possuem 31 dias, e os demais, com exceção de fevereiro, possuem 30 dias. O dia 31 de março de certo ano ocorreu em uma terça-feira. Nesse mesmo ano, qual dia da semana será o dia 12 de outubro?

Ⓐ Domingo
Ⓑ Segunda-feira
Ⓒ Terça-feira
Ⓓ Quinta-feira
Ⓔ Sexta-feira

Resolução:

O número de dias decorridos entre 31 de março e 12 de outubro: $30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 12 = 195$.

Número de semanas compreendidas no intervalo:

$195 = 7 \cdot 27 + 6$.

Sabemos que uma semana tem sete dias, assim, se 31 de março ocorreu em uma terça-feira, temos que 12 de outubro será segunda-feira (letra B).

03| Lembra-se do exercício introdutório deste capítulo? Vamos resolvê-lo agora!

Resolução:

Retomando: Queremos plantar 6000 árvores dispostas em linhas e colunas. As árvores deverão ser numeradas segundo o seguinte modelo:

	Coluna 1	**Coluna 2**	**Coluna 3**	**Coluna 4**	**Coluna 5**	**Coluna 6**
Linha 1	Árvore 1	Árvore 2	Árvore 3	Árvore 4	Árvore 5	Árvore 6
Linha 2	Árvore 7	Árvore 8	Árvore 9	Árvore 10	Árvore 11	Árvore 12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Pergunta-se: *Qual é o número da árvore plantada na 4ª coluna e na 135ª coluna?*

Se observarmos a última coluna, identificaremos uma sequência numérica com os múltiplos de 6.

$$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$$

Logo, na 135ª linha, 6ª coluna, encontraremos o número $135 \times 6 = 810$. Então, na 4ª coluna da mesma linha teremos $810 - 2 = 808$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Qual é o número de divisores naturais que possui o número 18.900?

02| Sabendo-se que $2^x \cdot 3^2 \cdot 5^3$ possui 60 divisores, qual é o valor de x?

03| Seja a expressão 1200 n onde n é um número natural não nulo. Qual é o menor valor de n, de modo que essa expressão seja um cubo perfeito?

04| Calcule os dois menores números naturais não nulos pelos quais devemos dividir os números 150 e 180, respectivamente, para obtermos quocientes iguais.

05| Seja **a** o maior número inteiro de 4 algarismos que é divisível por 13 e **b** o menor número inteiro positivo de 4 algarismos que é divisível por 17. Podemos afirmar que a diferença **a – b** resulta em um número menor, maior ou igual a 5000?

06| A distância entre duas cidades A e B em Belo Horizonte é de 265 quilômetros e o único posto de gasolina entre elas encontra-se a $\frac{3}{5}$ desta distância, partindo de A. Determine o total de quilômetros a serem percorridos da cidade B até este posto.

07| Uma rifa, em que apenas um número será sorteado, contém todos os números de 1 a 100. Os funcionários de um cartório compraram todos os números múltiplos de 8 ou 10. Pergunta-se: *Quantos bilhetes os funcionários não compraram?*

08| Em um jogo de palitos onde disputam duas pessoas, a regra é: os jogadores devem tirar, alternadamente, 1, 2, 3 ou 4 palitos de uma pilha que possui, inicialmente, 1239 palitos. O vencedor é aquele que retira o(s) último(s) palito(s). Alexandre, um dos jogadores, percebe que, se for ele o jogador a começar, deve retirar, logo na primeira jogada, uma quantidade x de palitos para, com certeza, ganhar a partida . Qual é essa quantidade x?

T ENEM E VESTIBULARES

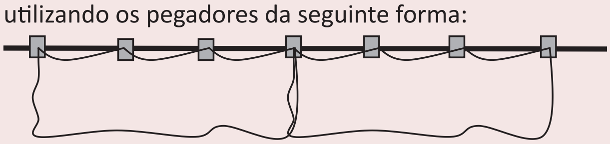
01| UTFPR Tenho 24 jogos de computador. Quantas são as possibilidades existentes (número máximo) para se dividir esses jogos em grupos com quantidades iguais de jogos?

A 2
B 4
C 6
D 8
E 12

02| IFCE Se p e q são números primos, tais que $p - q = 41$, então o valor de $p + q$ é:

A 91
B 79
C 73
D 45
E 43

03| UPE Uma lavadeira costuma estender os lençóis no varal utilizando os pegadores da seguinte forma:



Se ela dispõe de 10 varais que comportam 9 lençóis cada, quantos pegadores ela deverá utilizar para estender 84 lençóis?

A 253
B 262
C 274
D 256
E 280

04| ENEM O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

A 32
B 34
C 33
D 35
E 31

05| ENEM Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias. Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

A 37
B 51
C 88
D 89
E 91

06| ENEM Os números de identificação utilizados no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade etc) usualmente possuem um dígito de verificação, normalmente representado após o hífen, como em 17326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade de evitar erros no preenchimento ou digitação de documentos. Um dos métodos usados para gerar esse dígito utiliza os seguintes passos:

- multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1, e assim por diante, sempre alternando multiplicações por 1 e por 2
- soma-se 1 a cada um dos resultados dessas multiplicações que for maior do que ou igual a 10.
- somam-se os resultados obtidos.
- calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se assim o dígito verificador.

O dígito de verificação fornecido pelo processo acima para o número 24685 é:

A 1
B 2
C 4
D 6
E 8

07| UFSJ Assinale a alternativa que indica quantos são os números inteiros de 1 a 21.000, que não são divisíveis por 2, por 3 e nem por 5.

A 6.300
B 5.600
C 7.000
D 700

08| EPCAR A quantidade de suco existente na cantina de uma escola é suficiente para atender o consumo de 30 crianças durante 30 dias. Sabe-se que cada criança consome, por dia, a mesma quantidade de suco que qualquer outra criança desta escola. Passados 18 dias, 6 crianças tiveram que se ausentar desta escola por motivo de saúde. É correto afirmar que, se não houver mais ausências nem retornos, a quantidade de suco restante atenderá o grupo remanescente por um período de tempo que somado aos 18 dias já passados, ultrapassa os 30 dias inicialmente previstos em:

A 10%

B 20%

C 5%

D 15%

09| CFTMG Se o número $2^3 . 3^2 . 5^x$ tem exatamente 24 divisores positivos, então esse número é:

A 180

B 270

C 360

D 420

10| ENEM Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x . 5^y . 7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos. Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7. O número de divisores de N, diferentes de N, é:

A $x . y . z$

B $(x + 1).(y + 1)$

C $x . y . z - 1$

D $(x + 1).(y + 1) . z$

E $(x + 1).(y + 1).(z + 1) - 1$

11| FUVEST Na cidade de São Paulo, as tarifas de transporte urbano podem ser pagas usando o bilhete único. A tarifa é de R$ 3,00 para uma viagem simples (ônibus ou metrô/trem) e de R$ 3,00 para uma viagem de integração (ônibus e metrô/trem). Um usuário vai recarregar seu bilhete único, que está com um saldo de R$ 12,50. O menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é:

A R$ 0,85

B R$ 1,15

C R$ 1,45

D R$ 2,50

E R$ 2,80

12| ESPM Os números naturais M e N são escritos, na base 10, com os mesmos dois algarismos, porém em posições invertidas. A diferença entre o maior e o menor é uma unidade a menos que o menor deles. Podemos afirmar que o valor de M + N é:

A 102

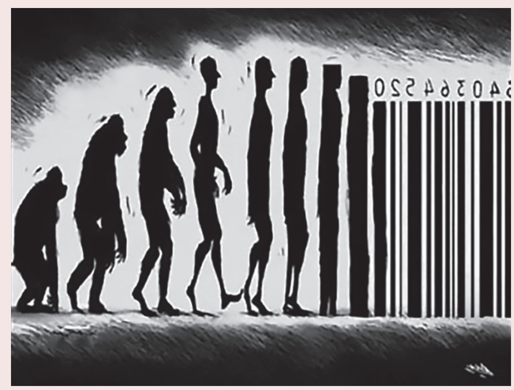
B 67

C 125

D 98

E 110

13| UEL



Assim Caminha a Humanidade – Sociedade de Consumo.

(Disponível em: <http://blogdopedronelito.blogspot.com.br/2012/02/assim-caminha-humanidade.html>. Acesso em: 29 maio 2012.)

Uma das características da sociedade moderna é a identificação cada vez mais precisa dos indivíduos. Um exemplo é o CPF (Cadastro de Pessoa Física), um registro na Receita Federal composto por 11 dígitos, sendo os dois últimos verificadores, para se evitar erros de digitação. O número do CPF tem a seguinte configuração:

$$N_1N_2N_3N_4N_5N_6N_7N_8N_9 - N_{10}N_{11}$$

N_1 a N_8 são os números-base e N_9 define a região fiscal, por exemplo, $N_9 = 9$ para Paraná e Santa Catarina.

N_{10} e N_{11} verificam os números anteriores. O algoritmo para obter o dígito verificador N11 é calculado a partir da soma:

$$S_{10} = 11N_1 + 10N_2 + 9N_3 + 8N_4 + 7N_5 + 6N_6 + 5N_7 + 4N_8 + 3N_9 + 2N_{10}$$

Dividindo S10 por 11, obtém-se o resto R desta divisão. Se $R = 0$ ou $R = 1$ então $N_{11} = 0$; caso contrário $N_{11} = 11 - R$.

Considerando o número de CPF 094.610.079–9X, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor de X.

A 0

B 3

C 6

D 8

E 10

MMC (Mínimo Múltiplo Comum) e MDC (Máximo Divisor Comum)

O estudo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum é de extrema importância para a matemática do dia a dia. Com ele podemos resolver inúmeras situações práticas aplicadas, por exemplo, à produção das empresas.

- O mínimo múltiplo comum **(MMC)** de dois ou mais números naturais é o menor número (não-nulo) que é, concomitantemente, múltiplo de todos eles.
- O máximo divisor comum **(MDC)** de dois ou mais números naturais é o maior número (não-nulo) que é, concomitantemente, divisor de todos eles.

MÉTODOS PRÁTICOS PARA OBTENÇÃO DO MMC E DO MDC

Vamos encontrar, através do método da decomposição simultânea, o **MDC** e o **MMC** dos números 360 e 84.

$$\begin{array}{r|l} 360,84 & 2^{\bullet} \\ 180,42 & 2^{\bullet} \\ 90,21 & 2 \\ 45,21 & 3^{\bullet} \\ 15,7 & 3 \\ 5,7 & 5 \\ 1,7 & 7 \\ 1,1 & \end{array}$$

MDC (360,84) = $2^2 . 3 = 12$

(é o produto dos divisores comuns•)

MMC (360,84) = $2^3 . 3^2 . 5 . 7 = 2520$

(é o produto de todos os divisores)

Para o caso de decompormos os números separadamente, devemos considerar:

MMC	Produto dos fatores comuns e não comuns com o maior expoente
MDC	Produto dos fatores comuns com o menor expoente

Exemplo:

Sendo A = 600, B = 140 e C = 18.000, calcule o **MMC** e o **MDC** de A, B e C.

$A = 2^3 . 3 . 5^2$
$B = 2^2 . 5 . 7$
$C = 2^4 . 3^2 . 5^3$

MDC (A, B, C) = $2^2 . 5$

MMC (A, B, C) = $2^4 . 3^2 . 5^3 . 7$

Observações importantes!

Quando os números forem	O MDC será	O MMC sera
CONSECUTIVOS Exemplo: 5 e 6	1	O produto deles: 5 . 6 = 30
PRIMOS ENTRE SI Exemplo: 5 e 8	1	O produto deles 5 . 8 = 40
MÚLTIPLOS ENTRE SI Exemplo: 32 e 16	O menor deles: 16	O maior deles: 32

RELAÇÃO IMPORTANTE ENTRE MMC E MDC

Dados dois números naturais não nulos (a e b), o produto do máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum deles é igual ao produto dos dois números, ou seja:

MMC(a,b) . MDC(a,b) = a.b

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Uma empresa de logística é composta de três áreas: administrativa, operacional e vendas. A área administrativa é composta de 30 funcionários, a operacional de 48 e a de vendas por 36 vendedores. Ao final do ano, a empresa realiza uma integração entre as três áreas, de modo que todos os funcionários participem ativamente. As equipes devem conter o mesmo número de funcionários com o maior número possível. Determine quantos funcionários devem participar de cada equipe e o número possível de equipes.

Resolução:

O primeiro passo é encontrar o MDC entre os números 48, 36 e 30. Vamos decompor cada um desses números isoladamente.

Temos, portanto, as seguintes decomposições em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$48 = 2^4 . 3$

$36 = 2^2 . 3^2$

$30 = 2 . 3 . 5$

MDC (30, 36, 48) = 2 . 3 = 6 (Número de integrantes de cada equipe)

O segundo passo é determinar o número total de equipes:

48 + 36 + 30 = 114 (Total de pessoas)

114 : 6 = 19 (Total de equipes)

É importante observar que o número de equipes é 19. Cada uma dessas equipes possui 6 participantes.

02| PUC-SP Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feita na máquina A a cada 3 dias, na máquina B, a cada 4 dias, e na máquina C, a cada 6 dias. Se no dia 2 de dezembro foi feita a manutenção nas três máquinas, após quantos dias as máquinas receberão manutenção no mesmo dia.

Resolução:

Primeiramente temos que calcular o MMC entre os números 3, 4 e 6.

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

MMC (3, 4, 6) = $2^2 . 3 = 12$

Portanto, após 12 dias a manutenção será feita nas três máquinas conjuntamente. Assim, a data procurada é 14 de dezembro, pois 2 + 12 = 14.

03| Dois números têm como MMC e MDC, 240 e 20 respectivamente. Calcule a soma desses números, sabendo-se que um deles é 60.

Resolução:

Sabemos que o produto entre dois números naturais é igual ao produto entre o seu MMC e MDC. Vejamos:

a . b = MMC (a, b) . MDC (a,b).

Assim, de acordo com o enunciado, temos:

60 . x = MMC (60,x) . MDC (60, x)

60 . x = 240 . 20

$$x = \frac{4800}{60}$$

x = 80.

Portanto, a resposta do problema será dada por:

80 + 60 = 140.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Calcule o MDC entre 420, 480 e 600.

02| Determine o MMC dos números 48 e 72.

03| Em uma sala retangular de piso plano nas dimensões 8,80 m por 7,60 m deseja-se colocar ladrilhos quadrados iguais, sem necessidade de recortar nenhuma peça. Calcule a medida máxima do lado de cada ladrilho.

04| Sendo 14 o MDC entre dois números naturais x e y, qual é o número de divisores comuns a x e y?

05| Considere dois rolos de barbante, um com 96 m e outro com 150 m de comprimento. Pretende-se cortar todo o barbante dos dois rolos em pedaços de mesmo comprimento. Determine o menor número de pedaços que poderá ser obtido.

06| Uma abelha-rainha dividiu as abelhas de sua colmeia nos seguintes grupos para exploração ambiental: um composto de 288 batedoras e outro de 360 engenheiras. Sendo você a abelha rainha e sabendo que cada grupo deve ser dividido em equipes constituídas de um mesmo e maior número de abelhas possíveis, como você redistribuiria suas abelhas?

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Em uma floresta, existem 4 espécies de insetos, A, B, C e P, que têm um ciclo de vida semelhante. Essas espécies passam por um período, em anos, de desenvolvimento dentro de seus casulos. Durante uma primavera, elas saem, põem seus ovos para o desenvolvimento da próxima geração e morrem.

Sabe-se que as espécies A, B e C se alimentam de vegetais e a espécie P é predadora das outras 3. Além disso, a espécie P passa 4 anos em desenvolvimento dentro dos casulos, já a espécie A passa 8 anos, a espécie B passa 7 anos e a espécie C passa 6 anos.

As espécies A, B e C só serão ameaçadas de extinção durante uma primavera pela espécie P, se apenas uma delas surgir na primavera junto com a espécie P.

Nessa primavera atual, todas as 4 espécies saíram dos casulos juntas.

Qual será a primeira e a segunda espécies a serem ameaçadas de extinção por surgirem sozinhas com a espécie predadora numa próxima primavera?

A A primeira a ser ameaçada é a espécie C e a segunda é a espécie B.

B A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie B.

C A primeira a ser ameaçada é a espécie C e a segunda é a espécie A.

D A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie C.

E A primeira a ser ameaçada é a espécie B e a segunda é a espécie C.

02| UERJ Na tabela abaixo, estão indicadas três possibilidades de arrumar n cadernos em pacotes:

Nº de pacotes	Nº de cadernos por pacotes	Nº de cadernos que sobram
X	12	11
Y	20	19
Z	18	17

Se n é menor do que 1200, a soma dos algarismos do maior valor de n é:

A 12

B 17

C 21

D 26

03| ESPM As moedas de 10 e 25 centavos de real tem, praticamente, a mesma espessura. 162 moedas de 10 centavos e 90 moedas de 25 centavos serão empilhadas de modo que, em cada pilha, as moedas sejam do mesmo tipo e todas as pilhas tenham a mesma altura. O menor número possível de pilhas é:

A 12

B 13

C 14

D 15

E 16

04| CFTMG Em um campeonato esportivo, todos os jogos iniciarão em 15 de março de 2014. Os jogos de futebol acontecerão a cada 30 dias, os de basquete a cada 45 dias e os de vôlei, a cada 60 dias. Após o início das competições, o primeiro mês em que os jogos das três modalidades voltarão a coincidir é:

A agosto

B setembro

C novembro

D dezembro

05| UEPB Com relação ao movimento dos cometas no universo, sabemos que muitos deles passam pelo planeta Terra em períodos de anos definidos. Os cometas A e B passam de 20 em 20 anos e 35 em 35 anos respectivamente, e suas últimas aparições na Terra ocorreram em 1930. A próxima passagem dos dois pela Terra ocorrerá no ano de:

A 2072

B 2.060

C 2.075

D 2.070

E 2.065

06| UDESC A quantidade de números naturais que são divisores do mínimo múltiplo comum entre os números $a = 540$, $b = 720$ e $c = 1800$ é igual a:

A 75

B 18

C 30

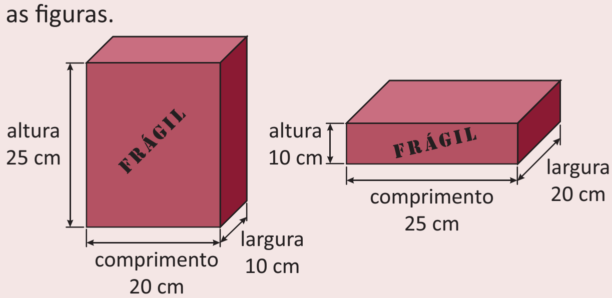
D 24

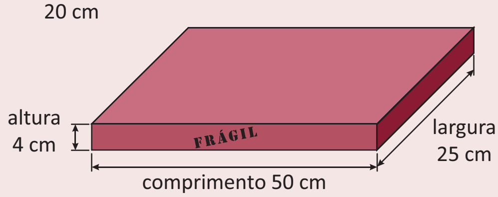
E 60

07| IFSP Miro ganhou um prêmio em dinheiro que é superior a R$ 2.000,00 e inferior a R$ 2.500,00. Se ele contá-lo de 30 em 30 reais, ou de 40 em 40 reais, ou ainda de 50 em 50 reais, sempre sobrarão 25 reais. O valor do prêmio foi:

- **A** R$2.185,00
- **B** R$2.275,00
- **C** R$2.305,00
- **D** R$2.375,00
- **E** R$2.425,00

08| UNESP Uma empresa de cerâmica utiliza três tipos de caixas para embalar seus produtos, conforme mostram as figuras.





Essa empresa fornece seus produtos para grandes cidades, que, por sua vez, proíbem o tráfego de caminhões de grande porte em suas áreas centrais. Para garantir a entrega nessas regiões, o proprietário da empresa decidiu adquirir caminhões com caçambas menores.

A tabela apresenta as dimensões de cinco tipos de caçambas encontradas no mercado pelo proprietário.

Tipo de caçamba	Comprimento (m)	Largura (m)	Altura (m)
I	3,5	2,5	1,2
II	3,5	2,0	1,0
III	3,0	2,2	1,0
IV	3,0	2,0	1,5
V	3,0	2,0	1,0

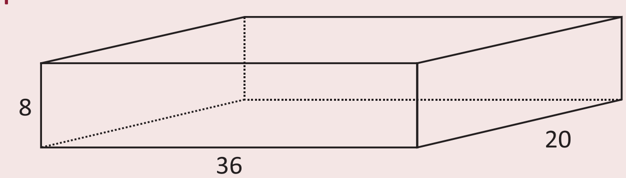
Sabe-se que:

- a empresa transporta somente um tipo de caixa por entrega.
- a empresa deverá adquirir somente um tipo de caçamba.
- a caçamba adquirida deverá transportar qualquer tipo de caixa.
- as caixas, ao serem acomodadas, deverão ter seus "comprimento, largura e altura" coincidindo com os mesmos sentidos dos "comprimento, largura e altura" da caçamba.
- para cada entrega, o volume da caçamba deverá estar totalmente ocupado pelo tipo de caixa transportado.

Atendendo a essas condições, o proprietário optou pela compra de caminhões com caçamba do tipo

- **A** II
- **B** IV
- **C** III
- **D** I
- **E** V

09| MACK



O número mínimo de cubos de mesmo volume e dimensões inteiras, que preenchem completamente o paralelepípedo retângulo da figura, é:

- **A** 64
- **B** 90
- **C** 48
- **D** 125
- **E** 100

10| ESPM Uma parede retangular pode ser totalmente revestida com ladrilhos retangulares de 30 cm por 40 cm ou com ladrilhos quadrados de 50 cm de lado, inteiros, sem que haja espaço ou superposição entre eles. A menor área que essa parede pode ter é igual a:

- **A** 4,5 m^2
- **B** 2,5 m^2
- **C** 3,0 m^2
- **D** 4,0 m^2
- **E** 3,5 m^2

11| EPCAR Considere os algarismos zero e 4 e os números formados apenas com os mesmos. O número x representa o menor múltiplo positivo de 15, dentre os descritos acima. Se $\frac{x}{30}$ possui um número α de divisores positivos, então α é igual a:

- **A** 4
- **B** 6
- **C** 8
- **D** 10

GABARITOS

FRENTE A
SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS (PROGRESSÃO ARITMÉTICA)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. 4ª posição

02.
a) {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...}
b) 144

03.
a) $x = 3 - r$, $y = 3 + r$ e $z = 3 + 2r$
b) $x = -4$, $y = 10$, $z = 17$ e $r = 7$

04. 481

05.
a) 133 b) 100

06.
a) 79 b) 78 c) -3

07. 18 km

08.
a) 4.100 b) 34.950

09.
a) 440 b) 1.175

10. 64

ENEM E VESTIBULARES

01. B	**03.** B	**05.** B	**07.** C	**09.** D
02. D	**04.** D	**06.** A	**08.** A	**10.** C

FRENTE A
SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS (PROGRESSÃO GEOMÉTRICA)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.
a) 10 b) 4 c) 384

02. 49 anos, 56 anos e 64 anos

03.
a) $a_1 = 8$ e $q = 2$
b) $a_1 = \frac{64}{125}$ e $q = \frac{5}{2}$

04.
a) $5m^2$ b) $40.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} m^2$

05. $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$

06. Sim, se os três forem iguais.

07.
a) $\pm\sqrt{2}$
b) $(5, 5\sqrt{2}, 10, 10\sqrt{2}, 20)$ ou $(5, -5\sqrt{2}, 10, -10\sqrt{2}, 20)$

08. 8 vezes

09. $\frac{100}{9}$ m

10. 60 m

ENEM E VESTIBULARES

01. C	**04.** B	**07.** D	**10.** A
02. B	**05.** A	**08.** A	**11.** B
03. B	**06.** C	**09.** D	**12.** E

FRENTE A
ANÁLISE COMBINATÓRIA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.
a) (1, cara); (2, cara); (3, cara); (4, cara); (5, cara); (6, cara); (1, coroa); (2, coroa); (3, coroa); (4, coroa); (5, coroa); (6, coroa)
b) 12

02.
a) 336 b) 30

03. 336

04. 81

05.
a) 570 b) 126.000

06. 198

07.
a) 144 b) 52

08. 3.168

09. 984

10. 54

ENEM E VESTIBULARES

01. B	**04.** A	**07.** D	**10.** A	**13.** A
02. A	**05.** B	**08.** D	**11.** E	**14.** D
03. B	**06.** B	**09.** E	**12.** E	**15.** E

FRENTE A
FATORIAL E ARRANJO SIMPLES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.
a) 5.040 c) 5.034
b) 24 d) 15

02. $\frac{7}{2}$

03. 8

04.
a) S = {5} c) S = {9}
b) S = {5} d) S = {6}

05. 30

06. 5.040

07. 2.520

08. 60

09. 60

10. 20.160

ENEM E VESTIBULARES

01. C	**03.** A	**05.** B	**07.** C	**09.** B
02. B	**04.** B	**06.** B	**08.** D	**10.** E

FRENTE B
MATEMÁTICA BÁSICA (RAZÃO, PROPORÇÃO E DIVISÃO PROPORCIONAL)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. $\frac{5}{7}$

02. Fábio

03. 92 km/h

04. 1:100

05.
a) $x = 18$, $y = 36$ e $z = 27$
b) $x = 3$, $y = 4$ e $z = 1$

06.
a) 48, 64 e 72
b) 200, 100 e 40
c) 810, 960 e 900

07.
a) Ouro = 45g e prata = 9g
b) 30 cm de altura
c) 800 litros e 1400 litros
d) Paulo = R$ 60.000,00;
Júlio = R$ 50.000,00 e
Augusto = R$ 30.000,00
e) R$ 120.000,00

08. 80,76 g de lentilha

09. R$ 0,40

ENEM E VESTIBULARES

01. E	**05.** B	**09.** D	**13.** A	**17.** C
02. A	**06.** D	**10.** C	**14.** E	**18.** D
03. B	**07.** D	**11.** E	**15.** D	**19.** C
04. C	**08.** B	**12.** B	**16.** D	**20.** D

FRENTE B
MATEMÁTICA BÁSICA (REGRA DE TRÊS)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.
a) D c) I e) D
b) D d) I f) I

02. R$ 8,45

03. 22 horas

04. 499,8 kg

05. 1 h 26 min 24 s

06. 500 veículos

07. 80 dias

08. $\frac{y^2}{x}$

09. 5

ENEM E VESTIBULARES

01. E	**04.** D	**08.** D	**12.** D	**16.** B
	05. E	**09.** A	**13.** E	**17.** B
02. C	**06.** C	**10.** E	**14.** D	**18.** D
03. D	**07.** C	**11.** B	**15.** B	**19.** E

FRENTE C
TRIGONOMETRIA 1 (TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.
a) $x = 30°$ c) $x = 60°$
b) $x = 8$ d) $x = 8\sqrt{3}$

02. $50\sqrt{2}$ m

03. 4 m

04. Mínimo de 7 m e máximo de 10 m

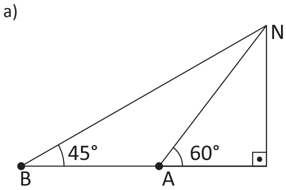
05. 20 m

06. 13,33 m

07. $6 + 4\sqrt{3}$ m

08. 3.200 km

09.
a)



b) $600(\sqrt{3} + 3)$ m

ENEM E VESTIBULARES

01. A	**03.** E	**05.** A	**07.** B	**09.** A
02. C	**04.** B	**06.** B	**08.** A	**10.** D

FRENTE C
TRIGONOMETRIA 1 (TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.
a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $R = 2$
b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ d) $2\sqrt{7}$

02. 29 m

03.
a) 3,5 e 7 b) 120°

04. $R = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}{2}$ km

05.
a) 21,2
b) Não, pois $16 > 6 + 8$

06. $\sqrt{7}$ m

07. 30°

08. $x = \frac{3}{2}$ e $2P = 7{,}5$ cm

09. $AB = \sqrt{1{,}49 - 1{,}4 . \cos 36°}$

10. $100\sqrt{3}$ m

ENEM E VESTIBULARES

01. B	**04.** B	**07.** C	**10.** C
02. E	**05.** A	**08.** C	**11.** D
03. B	**06.** A	**09.** B	

FRENTE D
MATEMÁTICA BÁSICA 2 (MÚLTIPLOS E DIVISORES)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. 72

02. 4

03. 180

04. 27 E 30

05. Menor que 5.000

06. 106

07. 78

08. 4

ENEM E VESTIBULARES

01. D	**04.** A	**07.** B	**10.** E	**13.** A
02. D	**05.** C	**08.** A	**11.** B	
03. B	**06.** E	**09.** C	**12.** E	

FRENTE D
MATEMÁTICA BÁSICA 2 (MMC E MDC)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. 60

02. 144

03. 40 cm

04. 8

05. 41

06. 9 grupos com 72 abelhas cada

ENEM E VESTIBULARES

01. D	**04.** B	**07.** E	**10.** C
02. B	**05.** D	**08.** E	**11.** B
03. C	**06.** E	**09.** B	