

FRENTE: FÍSICA III

PROFESSOR(A): MARCOS HAROLDO

ASSUNTO: POTENCIAL ELÉTRICO

EAD – ITA/IME

AULAS 17 A 21



Resumo Teórico

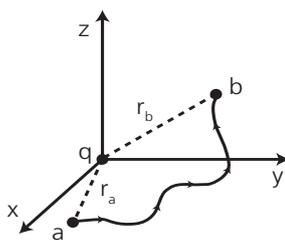
POTENCIAL ELÉTRICO

Introdução

Posso começar esse capítulo atentando você, caro leitor, para não confundir esse termo potencial elétrico com energia potencial elétrica. É óbvio que se você chegou até aqui, já deve ter estudado energia potencial e, embora seja atrativo confundir as duas grandezas, são duas coisas distintas. Existe sim uma ligação entre elas e vamos ver isso mais adiante.

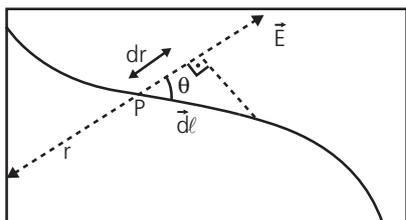
Dada uma distribuição de cargas, queremos encontrar o campo elétrico em um certo ponto no espaço. Bom, aqui temos que encontrar três componentes, pois o campo é uma grandeza vetorial. Dependendo da distribuição de cargas, podemos cair em um problema extremamente complicado (um não, três problemas). O campo elétrico (mais precisamente o campo eletrostático) é uma função vetorial especial. Eis a propriedade especial:

Dada uma carga q fixa na origem, calculemos a integral de linha do campo elétrico sobre a curva que liga os pontos **a** e **b**.



$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{\ell}$$

Atente para o seguinte detalhe:



$$\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = dr$$

Assim, temos:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Isso nos diz que, se tomarmos a integral de linha sobre um caminho fechado, o resultado é sempre zero.

Sempre que uma função vetorial possui essa peculiaridade, podemos escrever tal função como a derivada de uma função escalar. Aqui está uma motivação enorme para estudar a função potencial: Basta resolver um só problema, pois é uma função escalar e depois derivar (que, geralmente, é bem mais fácil de integrar) e encontrar o campo.¹

Trabalho da força elétrica

Como você já viu em mecânica, podemos calcular o trabalho de uma força indo do ponto **a** até um ponto **b**, como:

$$\tau_{ab} = \int_a^b \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$$

Para o caso da força elétrica sobre uma carga $+q$ produzida por uma carga pontual $+Q$ localizada na origem, temos:

$$\tau_{ab} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Definimos o potencial elétrico como:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Obtemos a energia potencial multiplicando o potencial eletrostático pela carga de prova (carga que está sentindo o potencial):

$$U(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

De maneira que podemos relacioná-los da seguinte maneira:

$$U(r) = qV(r)$$

Dessa forma, temos:

$$\tau_{ab} = - [U(r_b) - U(r_a)] = -\Delta U$$

Isso é uma característica de **forças conservativas**². Temos que parar um pouco nesse momento e observar alguns pontos importantes.

¹ De maneira mais formal, existe um teorema que afirma o seguinte: Sempre que o rotacional de um campo vetorial for nulo, tal campo pode ser expresso como o gradiente de um potencial.

² Ver página 114 - Nussenzveig.

H. Moyses. *Curso de Física Básica*, Vol. 1, Ed. Blucher Ltda, 4ª Edição.

Não se consegue medir potencial na natureza, mas sim a diferença de potencial (através da expressão anterior, por exemplo). Entretanto, se a distribuição de carga for local (não se estender ao infinito), podemos dizer que: quanto maior for a distância do ponto em questão à distribuição de cargas, menor será seu termo de potencial. Ou seja, o potencial vai a zero quando $r \rightarrow \infty$. Veja os gráficos:

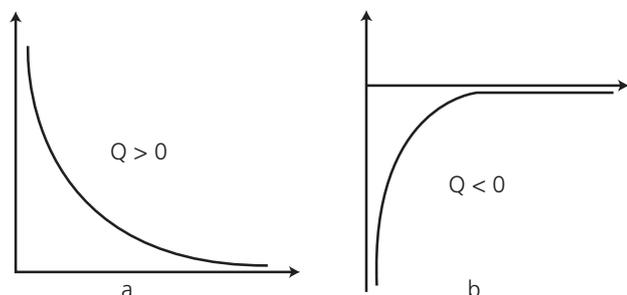


Gráfico representativo do potencial elétrico como função da distância do ponto a uma carga pontual positiva (a) e negativa (b). Observe que o nível zero do potencial elétrico está no infinito.

Adotamos assim, que o potencial é zero no infinito e dessa forma podemos determinar o potencial num certo ponto. Observe que não podemos fazer o mesmo se a distribuição de cargas também se estende até o infinito!

A unidade do potencial

O potencial elétrico, bem como a d.d.p., é medido no SI em volts, tal que:

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

Observação:

Na realidade, o volt é mais apropriadamente definido como sendo a d.d.p. entre as seções transversais de um condutor que, percorrido por uma corrente de 1A (ampère), produz uma potência de 1W (watt).

No CGS, a unidade de potencial elétrico é o stat Volt, tal que:

$$1sV = \frac{1erg}{1sC}$$

Pode-se verificar que o fator de conversão entre estas unidades é:

$$1sV = 300 V$$

A partir do volt, pode-se definir uma unidade de energia: o elétron-volt (eV). O elétron-volt é a energia cinética adquirida por uma partícula que contenha a carga elementar ($e = 1,6 \times 10^{-19} C$) quando acelerada a partir do repouso por uma diferença de potencial de 1V.

Qual a relação existente entre o elétron-volt e o joule?

Superposição

Em geral, o potencial para uma carga pontual Q é:

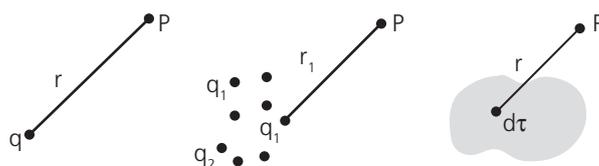
$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Recorrendo ao princípio de superposição para uma distribuição de cargas, temos:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r}$$

Para o caso de uma distribuição contínua no espaço, devemos encontrar:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') d\tau}{r}$$



Adaptando para uma distribuição linear e superficial, é óbvio que devemos ter (como visto anteriormente):

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(r') dl'}{r}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(r') da'}{r}$$

Superfície equipotencial

Percebemos que a função potencial é uma função de ponto, ou seja, não depende do caminho seguido desde o infinito até tal ponto. Com esse raciocínio, podemos observar que existem várias posições que possuem o mesmo potencial. Esse conjunto de pontos que possuem o mesmo potencial leva o nome de superfícies equipotenciais.

$$V(x,y,z) = V(\text{constante})$$

Sabemos que a diferença de potencial entre dois pontos é dada pela integral de linha do campo elétrico. No caso de dois pontos quaisquer pertencentes a uma superfície equipotencial, temos:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 = 0$$

Para que o deslocamento entre os dois pontos de superfície equipotencial se dê ao longo de uma linha contida nesta superfície, devemos ter:

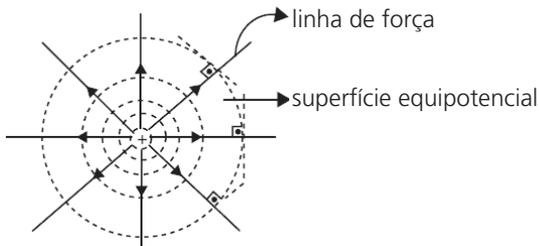
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ou seja, toda contribuição infinitesimal para potencial ao longo de uma linha sobre a superfície equipotencial é nula. Desde que estejamos numa região de campo elétrico não nulo, podemos concluir que:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

O campo elétrico é perpendicular a qualquer deslocamento infinitesimal ao longo da superfície equipotencial. A única maneira de fazermos isto acontecer é tendo a superfície equipotencial como sendo normal às linhas de força do campo elétrico.

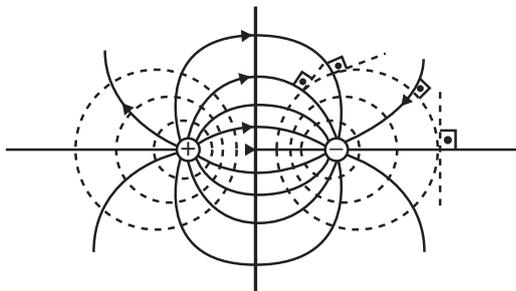
Exemplo 1: Superfície Equipotencial devido a uma carga pontual.



Superfície equipotencial devido a uma carga pontual.

Neste caso, o potencial é dado por $V = \frac{KQ}{r}$. Para V constante, temos r constante, o que corresponde, enquanto lugar geométrico, à superfície da esfera de raio r .

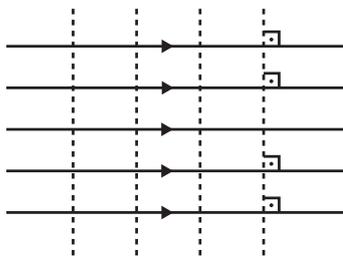
Exemplo 2: Superfícies equipotenciais de um dipolo



Superfície equipotencial de um dipolo elétrico.

Observe que uma das superfícies equipotenciais é o plano equidistante das duas cargas para o qual $V = 0$.

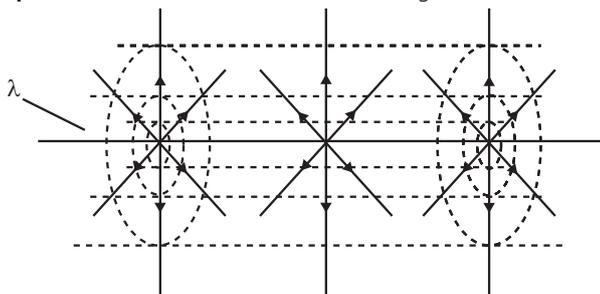
Exemplo 3: Campo elétrico uniforme



Superfície equipotencial numa região de campo elétrico uniforme.

As superfícies equipotenciais são planos normais à direção do vetor campo elétrico.

Exemplo 4: Fio infinito uniformemente carregado



Superfícies equipotenciais devido a um fio infinito uniformemente carregado.

As superfícies equipotenciais são superfícies cilíndricas coaxiais, cujo eixo comum é exatamente o fio.

Movimento de uma partícula provocado por uma diferença de potencial

Para nosso estudo, objetivo e restrito à eletrostática, todos os campos são conservativos e não consideraremos efeitos de radiação. Portanto, se uma partícula possui num certo ponto **a**, energia cinética K_a e já num outro ponto **b**, uma energia cinética K_b , podemos escrever o seguinte:

$$t_{ab} = -\Delta U = \Delta K$$

Ou seja, o trabalho da força elétrica é igual à variação de energia cinética (considerando que só exista essa força). Podemos prosseguir da seguinte maneira:

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

$$U_a + K_a = U_b + K_b$$

Em outras palavras, temos mais uma vez a conservação da energia mecânica para nos tirar de várias situações problemáticas. Essa é uma saída aprimorada para resolver problemas. Observe que não precisamos saber como, ou por onde a partícula evolui de um ponto a outro para saber a sua velocidade. Basta conhecer sua posição e tudo estará resolvido.

Bom, parece simples, mas eu aconselho praticar bastante nos exercícios, pois poderá haver situações onde precisaremos explorar simetrias, além da conservação de energia.

Observação:

É importante perceber que, no caso de um movimento espontâneo de uma carga numa região de campo elétrico, a trajetória pode ser bastante complicada. No caso em que as linhas de campo são retilíneas (como nos casos de um campo uniforme ou de uma carga pontual, por exemplo), uma partícula abandonada em repouso segue as linhas de campo. Entretanto, isto não é verdade para todos os casos.

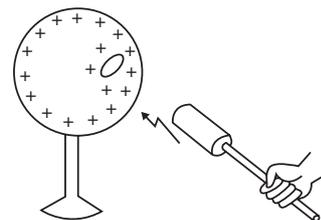
Condutores

Como vimos em nossa primeira nota de aula, os materiais ditos condutores caracterizam-se pela presença, em seu interior, de elétrons livres, ou seja, de elétrons debilmente ligados aos átomos do material, ou de outros portadores de carga, com liberdade de movimento.

Esta característica possibilita que as cargas excedentes em um condutor encontrem uma configuração, em condições de equilíbrio eletrostático, tal que a distância entre elas seja a maior possível devido à repulsão eletrostática.

Graças a essa possibilidade, toda a carga excedente de um condutor localiza-se em sua superfície exterior. A seguir, debateremos algumas experiências que podem evidenciar facilmente este fato:

Exemplo 1: Consideremos uma esfera condutora, oca, eletrizada, dotada de um orifício e posicionada sobre um suporte isolante, e um bastão condutor, neutro (figura seguinte). Se tocarmos a esfera com o bastão na sua parte interna, o bastão permanece neutro. Porém, se o fizermos na parte externa, o bastão adquire carga de mesmo sinal que a carga da esfera.



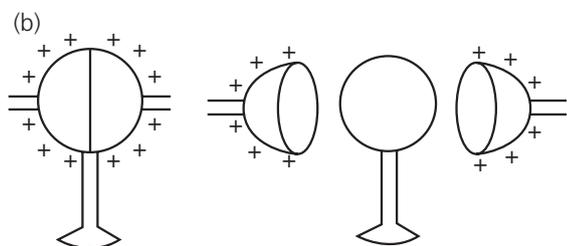
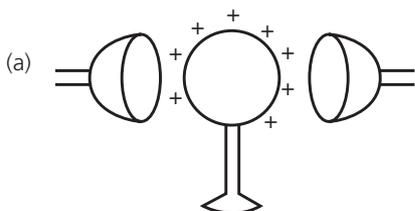
Esfera condutora oca e eletrizada dotada de um orifício e bastão condutor. A carga da esfera localiza-se em sua superfície externa.

É visível que a dependência do potencial com a distância é inversamente proporcional. Isso explica porque a configuração exige maior afastamento das cargas, pois quanto mais afastadas, menor energia acumulada.

Exemplo 2: Hemisférios de Cavendish

Tomemos uma esfera metálica eletrizada sobre um suporte isolante e dois hemisférios perfeitamente adaptáveis à ela.

Quando encaixamos os hemisférios sobre a esfera, toda a carga anteriormente disposta sobre ela passa aos hemisférios. Quando estes são retirados, a esfera fica neutra.



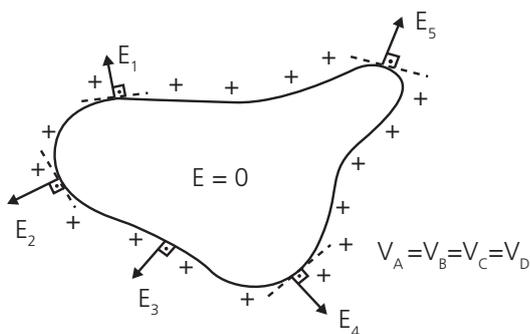
Hemisférios de Cavendish adaptáveis a uma esfera condutora eletrizada (a) são encaixados sobre ela e a carga antes na esfera passa aos hemisférios (b) que, sendo retirados, deixam a esfera neutra (b).

Essa propriedade nos leva, pela Lei de Gauss, a constatar que o campo elétrico, no interior de um condutor, é nulo. Obviamente, se houvesse campo elétrico, as cargas elétricas sofreriam a ação das forças, e não haveria equilíbrio eletrostático.

Da mesma forma não deve haver componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor, pois, neste caso, haveria movimento de cargas sobre a superfície. Conclui-se, portanto, que o campo nas proximidades de um condutor é normal à sua superfície e tem módulo dado, pela Lei de Gauss, como sendo:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

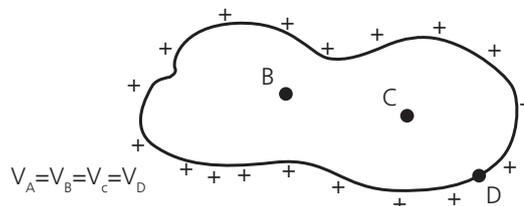
As linhas de campo, portanto, são normais à superfície do condutor, partindo dela ou terminando.



Campo devido a um condutor nulo no interior, e normal à superfície nos pontos externos próximos a ela.

Quanto ao potencial, é fácil verificar que, em um condutor, em equilíbrio eletrostático, não existe diferença de potencial entre quaisquer dois pontos, caso contrário haveria movimento de cargas: Além disso, se o campo no interior do condutor é nulo, anula-se também a sua integral de linha entre dois pontos quaisquer.

Sendo assim, podemos afirmar que a superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático é uma superfície equipotencial.



Potencial devido a um condutor.

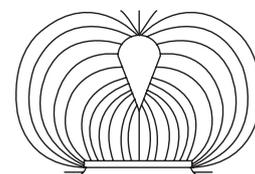
Outra propriedade concernente aos condutores carregados é o chamado **poder das pontas**. A grosso modo, podemos justificar a concentração de cargas nas "pontas" sob dois aspectos: a repulsão eletrostática entre os portadores livres levando-os às regiões mais distantes do condutor (as suas extremidades), e a dependência do potencial que, no caso de distribuições limitadas de carga, varia linearmente com a carga e inversamente com a distância. Neste caso, esperamos que em pontos mais afastados, haja uma maior concentração de carga, de forma a manter o condutor a um potencial constante³.

Graças a essa propriedade, o campo elétrico próximo às regiões pontiagudas de um condutor é mais intenso.

Alguns exemplos ilustrativos do poder das pontas são apresentados a seguir.

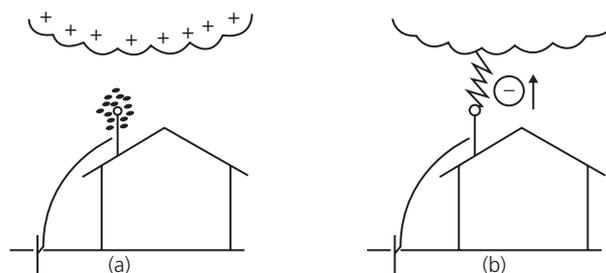
Exemplo 1: Linhas de campo de um ovoide:

Linhas de força devido a um "ovoide" e uma placa, carregadas com cargas de mesmo valor absoluto e sinais contrários. A maior densidade de linhas nas extremidades dos condutores indica um campo elétrico mais intenso.



Exemplo 2:

Os para-raios são dispositivos destinados a proteger aparelhos e construções de danos causados por raios. Um tipo simples é uma haste condutora com uma extremidade no ponto mais alto da construção. Esta haste é ligada por um fio a outra haste, enterrada. Esta montagem permite que o acúmulo de cargas induzidas na construção (por uma nuvem eletrizada, por exemplo) concentre-se na extremidade dos para-raio. Nestas condições, o raio, ou seja, a descarga elétrica entre as nuvens e a Terra, "cai" no para-raio e não na construção.

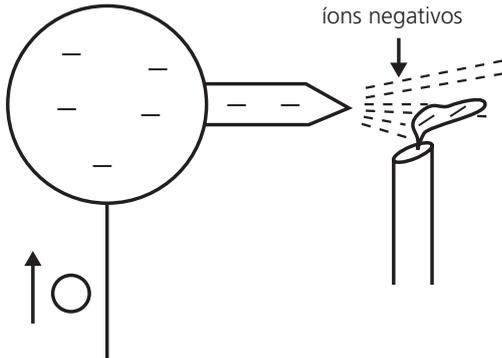


Uma nuvem carregada positivamente induz cargas negativas que se concentram na extremidade do para-raios (a). O raio "cai" sobre os para-raios, não afetando a construção.

³ A rigor, isto só pode ser verificado por meio da resolução da equação de Laplace para o potencial eletrostático.

Exemplo 3:

Consideremos um dispositivo condutor provido de uma extremidade pontiaguda, e continuamente carregado com carga negativa, conforme a figura. A grande concentração de carga negativa atrai moléculas do ar ionizadas positivamente, ou mesmo por simples indução, ao se chocarem com o condutor, estas moléculas adquirem carga negativa, sendo, então, violentamente repelidas. Estas moléculas formam o vento elétrico, que pode ser verificado por meio de uma vela acesa próxima às vizinhanças da extremidade pontiaguda. O mesmo raciocínio pode ser seguido para o condutor carregado positivamente.



Dispositivo condutor carregado (a) negativamente, produzindo um vento elétrico de íons negativos.

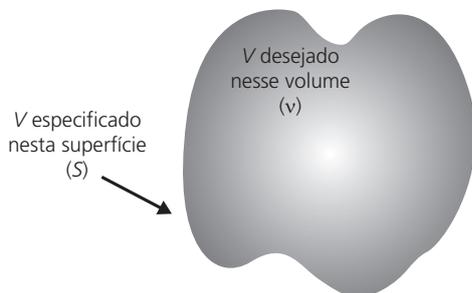
Métodos das imagens (opcional)

O método das imagens, proposto por Lord Kelvin tem como objetivo simplificar alguns problemas, em que distribuições de cargas podem ser substituídas por uma única carga ou um sistema de cargas bem mais simples.

Antes de começar a descrever o método, vou enunciar dois teoremas de unicidade sobre potencial eletrostático. Não cabe nesse momento a demonstração destes, mas serão de extrema importância para o entendimento do método das imagens.

Primeiro Teorema de Unicidade:

A solução da equação de Laplace em um volume **v** é exclusivamente determinada se **V** for especificado na superfície de contorno **S**.

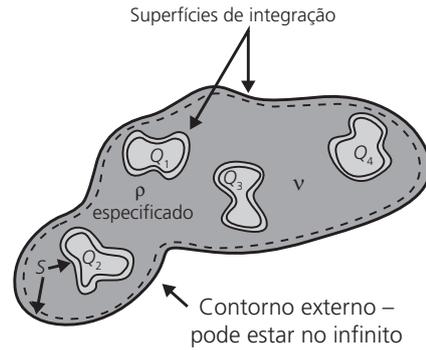


O que este teorema quer dizer é que, se for fornecido o potencial no contorno, é possível calcular o potencial dentro da região e esta solução será única (por isso se chama Teorema da Unicidade).

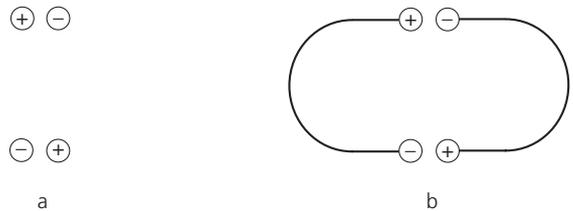
Segundo Teorema de Unicidade:

Em um volume **v** cercado por condutores e contendo uma densidade de carga especificada ρ , o campo elétrico é determinado univocamente se a carga total de cada condutor for dada.⁴

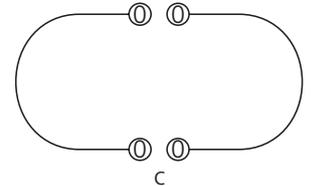
⁴ As demonstrações podem ser encontradas na página 82 de D. Griffiths. *Eletrodinâmica*. 3ª Edição



Caso você ache que o segundo teorema é óbvio, analisemos a seguinte situação do Purcell: A figura (a) seguinte mostra uma configuração eletrostática confortável que consiste de quatro condutores com cargas $\pm Q$, situados de forma que os positivos estejam próximos dos negativos. Parece bem estável, concordam? Agora, o que acontece quando juntamos em pares através de fios minúsculos, como mostra a figura (b)? Como as cargas positivas estão muito próximas das negativas (que é onde elas preferem ficar), podemos muito bem supor que nada irá acontecer. Certo?

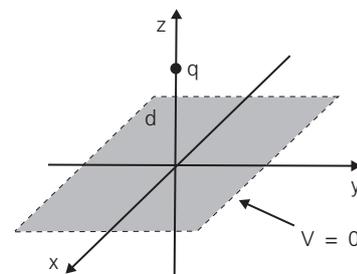


Errado! A configuração da figura (b) é impossível, já que existem agora, de fato, dois condutores e a carga total de cada um deles é zero. Uma das maneiras de rearranjar as cargas nesses condutores é não tendo carga em lugar algum e, portanto, campo zero em toda parte (figura c). Pelo Segundo Teorema de Unicidade, essa deve ser a solução: a carga irá fluir pelos fios minúsculos, cancelando-se.



Agora estamos prontos para entender o método das imagens. Suponha que uma carga pontual **q** seja mantida a uma distância **d** acima de um plano condutor infinito e aterrado (figura seguinte). Pergunta: qual é o potencial na região acima do plano?

Se você respondeu $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$, errou, pois o condutor terá cargas induzidas e isso irá alterar o potencial.

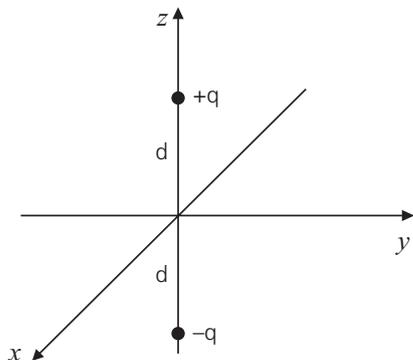


Agora como podemos calcular esse potencial? De um ponto de vista matemático, nosso problema é resolver a equação de Poisson na região $z > 0$, com uma única carga pontual **q** em $(0,0,d)$, sujeita às seguintes condições de contorno:

1. $V = 0$, quando $z = 0$ (plano aterrado);
2. $V \rightarrow 0$ no infinito.

O primeiro teorema de unicidade (na verdade seu corolário) garante que só existe uma função que satisfaz esses requisitos. Se por um truque ou suposição inteligente, conseguirmos descobrir tal função, ela tem de ser a resposta certa.

Vamos ao truque: esqueça o problema real; vamos estudar uma situação completamente diferente. Este novo problema consiste em duas cargas pontuais $+q$ $(0,0,d)$ e uma $-q$ $(0,0,-d)$, sem o plano condutor (ver figura).



Para esta configuração, posso facilmente expressar o potencial:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

Perceba que temos:

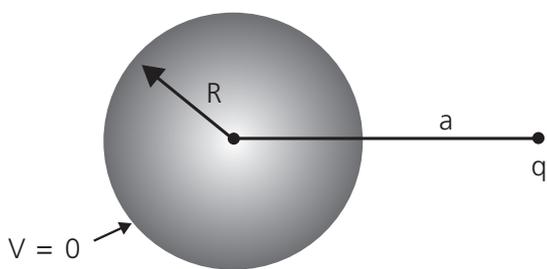
1. $V = 0$, quando $z = 0$, e
2. $V \rightarrow 0$ no infinito.

E a única carga na região $z > 0$ é a carga pontual em $(0,0,d)$. Mas estas são precisamente as condições do problema original. Evidentemente, a segunda configuração produz exatamente o mesmo potencial que a primeira configuração, na região superior. Conclusão: o potencial de uma carga pontual acima de um condutor infinito aterrado é dado pela equação anterior.

Atente ao papel crucial desempenhado pelo Teorema de Unicidade neste argumento, sem ele ninguém acreditaria nesta solução, já que ela foi obtida para uma distribuição completamente diferente.

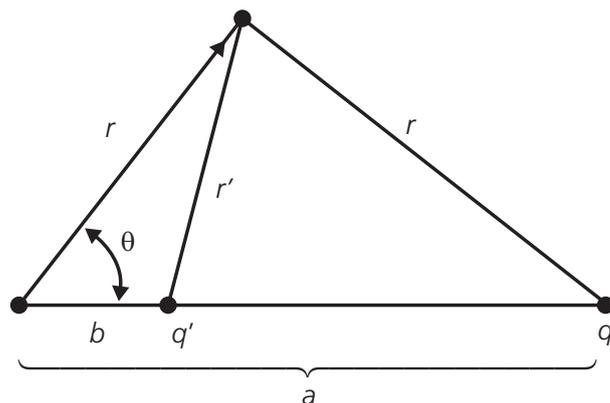
Outra aplicação desse método é a seguinte:

Uma carga q está a uma distância a do centro de uma esfera condutora aterrada de raio R . Encontre o potencial fora da esfera.



Analisemos o seguinte problema: uma carga pontual $q' = -q \frac{R}{a}$ localizada a uma distância $b = \frac{R^2}{a}$ do centro da esfera. O potencial da configuração é:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right]$$



Perceba que o potencial se anula em todos os pontos da esfera e, portanto, encaixa-se nas condições de contorno do nosso problema anterior.

Observação:

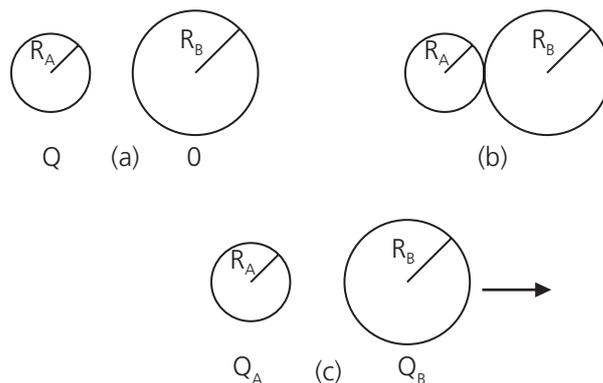
Não se pode colocar a carga imagem na região onde você deseja calcular o potencial. Isso alteraria ρ e mudaria sua equação de Poisson.

Entendendo melhor a eletrização

Eletrização por contato

Analisamos anteriormente o caso do contato entre duas ou mais esferas idênticas. Agora, veremos como se distribuem as cargas quando o contato se dá entre condutores esféricos de dimensões quaisquer.

Sejam as esferas **A** e **B** de raios R_A e R_B , respectivamente, a primeira está carregada com uma carga Q e a segunda está neutra:



Nas condições de equilíbrio eletrostático, ambas as esferas adquirem o mesmo potencial V :

$$V = K \frac{R_A}{R_B} = K \frac{Q_B}{R_B}$$

Além disso, $Q_A + Q_B = Q$, pela Conservação da Carga Elétrica.

Daí temos:

$$Q_B \frac{R_A}{R_B} + Q_B = Q$$

$$Q_B = \frac{Q}{1 + \frac{R_A}{R_B}} \text{ e } Q_A = \frac{Q}{1 + \frac{R_B}{R_A}}$$

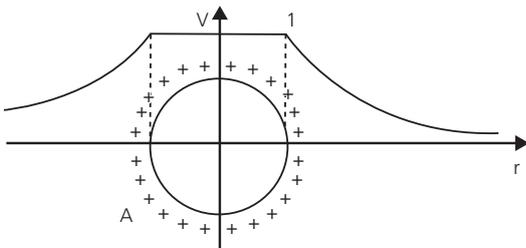
No caso de condutores quaisquer, interferirá a geometria de cada um deles. Mais adiante, quando estudarmos capacitância, poderemos resolver esse problema.

Eletrização por indução

Vimos que a indução eletrostática corresponde à redistribuição de carga em um condutor (induzido devido à influência do campo elétrico criado pelas cargas de outro 'indutor').

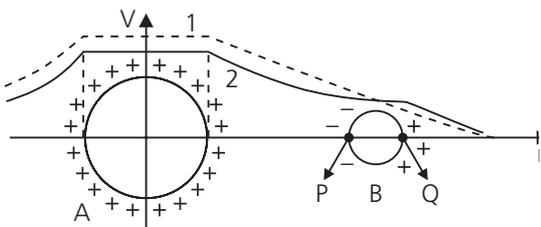
Essa redistribuição se dá de modo tal que, no equilíbrio eletrostático, o potencial seja uniforme no condutor.

Para ilustrar a situação, façamos o seguinte: tomemos um indutor **A**, carregado com uma carga elétrica **q**, positiva. **A** tem o formato de uma esfera condutora e está em equilíbrio eletrostático. O potencial, como função da distância ao centro da esfera, está representado a seguir pela curva 1.



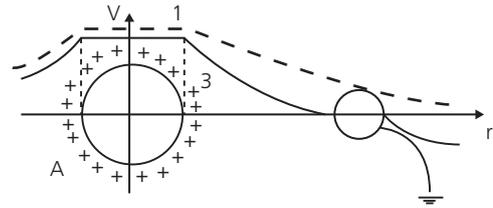
Potencial devido a um condutor esférico.

Ao aproximarmos outro condutor, **B**, de **A**, a situação se modifica. Antes do equilíbrio eletrostático se estabelecer, **B** não tem um potencial uniforme, o que provoca o movimento das cargas livres, que se redistribuem. Como o potencial inicial no ponto **P** é maior que no ponto **Q** (ver figura), as cargas livres (negativas) deslocam-se das proximidades de **Q** (menor potencial) para as proximidades de **P** (maior potencial), até que o acúmulo de cargas negativas em torno de **P** forneça uma contribuição negativa ao potencial desta região, e que o déficit de cargas negativas em torno de **Q** forneça uma contribuição positiva ao potencial desta região. Estes novos "potenciais" são tais que, ao se superporem ao potencial original, tornam **B** uma região equipotencial. O efeito sobre o condutor **A** é o de redução do potencial e também o de redistribuição de suas cargas. O potencial final é ilustrado pela curva 2, como vemos a seguir.



Potencial devido à indução eletrostática.

Caso o induzido seja ligado à Terra, seu potencial se reduzirá até que, no equilíbrio eletrostático, ele seja igual ao potencial da Terra, que adotamos $V = 0$. Neste caso, temos a situação ilustrada pela curva 3, na figura a seguir:

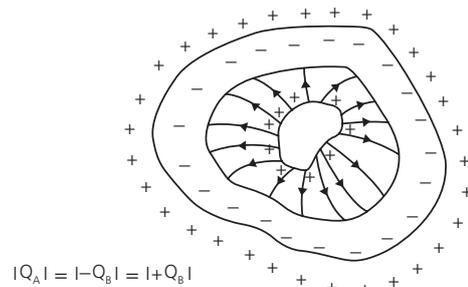


Potencial devido à indução eletrostática, com o induzido ligado à Terra.

Observe que, neste caso, o induzido adquire uma carga $-q$ denominada carga induzida. Quando $|q| = |q'|$, dizemos que a indução é total e, quando $|q| > |q'|$, a indução é parcial. Isto significa que na indução total todas as linhas de força que nascem no indutor terminam no induzido, ou vice-versa. Na indução parcial nem todas as linhas de força que saem do indutor terminam no induzido, ou o contrário.

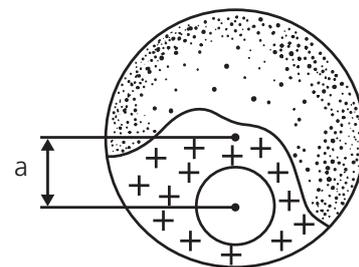
Observação:

É importante lembrar que, quando todas as linhas de campo que saem de uma superfície carregada chegam à outra superfície, a carga induzida é igual à carga indutora. Chamamos isso de indução total.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Determine a diferença de potencial entre o centro da esfera, uniformemente carregada com densidade ρ e raio R , e o centro do buraco, de raio r . A distância entre os centros vale a .



- A) $\frac{\rho}{6\epsilon_0 a} \{a^3 - 2r^3 + 3r^2a\}$
- B) $\frac{\rho}{6\epsilon_0 a} \{a^3 - r^3 + r^2a\}$
- C) $\frac{\rho}{3\epsilon_0 a} \{a^3 - 2r^3 + r^2a\}$
- D) $\frac{\rho}{3a} \{a^3 - 3r^3 + 3r^2a\}$
- E) $\frac{\rho}{6\epsilon_0 a} \{3a^3 - 2r^3 + 3r^2a\}$

Solução:

O potencial em um ponto genérico da esfera (no interior) uniformemente preenchida é dado por:

$$V = \frac{k_0 Q}{2R^3} (3R^2 - r^2)$$

Por superposição de potenciais, temos:

I. Potencial no centro da esfera: V_A

$$V_A = \frac{3k_0 \rho \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}{2R} - \frac{k_0 \rho \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}{a}$$

II. Potencial no centro do buraco: V_B

$$V_B = -\frac{3k_0 \rho \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)}{2R} + \frac{k_0 \rho \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)}{2R^3} (3R^2 - a^2)$$

Assim,

$$V_A - V_B = \frac{3k_0 \rho \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}{2R} - \frac{k_0 \rho \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)}{a} + \frac{3k_0 \rho \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)}{2r}$$

$$- \frac{k_0 \rho \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}{2R^3} (3R^2 - a^2)$$

$$= \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{3 \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}{2} - \frac{\left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)}{a} + \frac{3 \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)}{2r} - \frac{\left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)}{2R^3} (3R^2 - a^2) \right\}$$

$$= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \left\{ 2R^2 - \frac{4r^3}{3a} + 2r^2 - \frac{2}{3} (3R^2 - a^2) \right\}$$

$$= \frac{\rho}{6\epsilon_0 a} \{ a^3 - 2r^3 + 3r^2 a \}$$

02. Do conta-gotas 1 até a esfera metálica 2, de raio R, caem gotas de água, a cada gota é comunicada uma carga q . Qual deve ser a altura mínima de queda das gotas para que a esfera se preencha completamente. Assuma que o raio da gota é muito menor que o raio da esfera ($r \ll R$).

Obs: A altura é a medida entre o conta-gotas e o orifício. Considere que esta altura é muito maior que R.

Dados:

- Permissividade do meio: ϵ_0 ;
- Densidade da água: ρ ;
- Aceleração da gravidade: g .

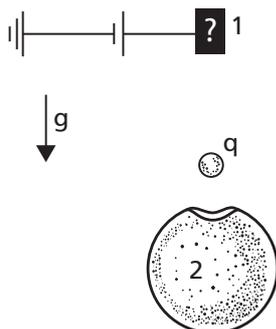
A) $\frac{3q^2 R^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho g r^6}$

B) $\frac{q^2 R^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \rho g r^6}$

C) $\frac{2q^2 R^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \rho g r^6}$

D) $\frac{9q^2 R^2}{16 \epsilon_0 \rho g r^6}$

E) $\frac{3q^2 R^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \rho g r^6}$



Solução:

Após preenchida, a esfera não deixará mais nenhuma gota penetrar. Podemos dizer, para a próxima gota, que:

$$mgh + \frac{k_0 Qq}{R+h} = \frac{k_0 Qq}{R}$$

$$mgh = -\frac{k_0 Qq}{R+h} + \frac{k_0 Qq}{R} = k_0 Qq \cdot \frac{h}{R(R+h)}$$

$$\frac{Qq}{4\pi \epsilon_0 mgR} - R = h \approx \frac{Qq}{4\pi \epsilon_0 mgR}$$

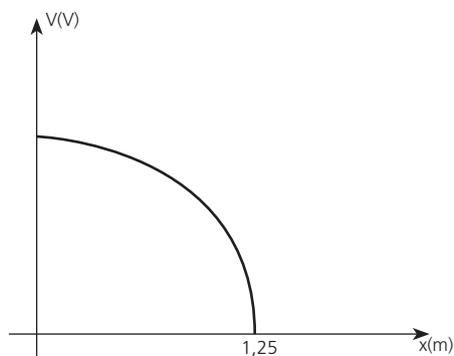
A carga de cada gota é dada por:

$$Q = nq = \frac{4\pi R^3}{\frac{3}{4\pi r^3}} q = \left(\frac{R}{r} \right)^3 q$$

Substituindo, temos:

$$h = \frac{\left(\frac{R}{r} \right)^3 q^2}{4\pi \epsilon_0 \rho \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) gR} = \frac{3q^2 R^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \rho g r^6}$$

03. Uma certa região do espaço varia o potencial com a posição da seguinte maneira (ver gráfico). Determine o módulo da intensidade do campo elétrico para $x = 1$ m. A curva representa um quarto de circunferência.



- A) 4 N/C
- B) 1/3 N/C
- C) 4/3 N/C
- D) 3/2 N/C
- E) 1 N/C

Solução:

Como o gráfico é uma circunferência, podemos escrever:

$$V^2 + x^2 = 1,25^2$$

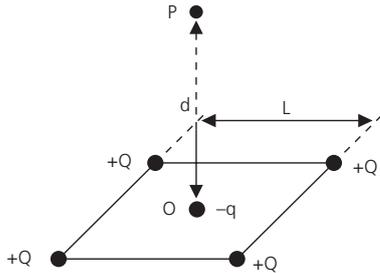
Para determinarmos o campo elétrico na posição $x = 1$ m, devemos fazer:

$$E(x = 1) = -\frac{dV}{dx_{(x=1)}} = \frac{1}{2\sqrt{1,25^2 - 1^2}} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3} \text{ N/C}$$



Exercícios

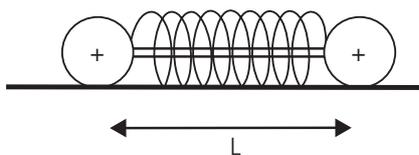
01. (OBF/2001) Um quadrado de lado L tem uma carga puntiforme $+Q$ fixa em cada um de seus vértices, como indicado na figura a seguir. No centro O do quadrado é fixada uma carga puntiforme $-q$. O ponto P , localizado ao longo do eixo perpendicular ao plano do quadrado e que passa pelo seu centro, dista d do ponto O . Considere que todo o sistema se encontra no vácuo, e que a constante eletrostática do vácuo é denotada por K .



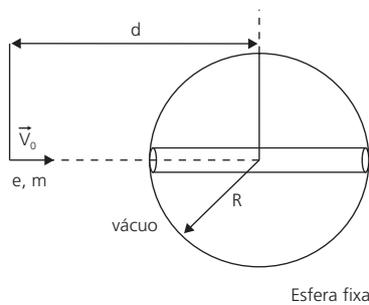
- A) Calcule o valor da carga localizada no centro, para que o campo elétrico resultante em P seja nulo.
- B) Calcule o valor da carga localizada no centro para que o potencial elétrico total em P seja nulo. Nesta situação, determine o trabalho total realizado pelas forças elétricas sobre uma carga de prova qualquer para trazê-la do infinito até o ponto P , segundo uma trajetória arbitrária.

02. Na figura, temos um sistema massa-mola-massa composto por 2 esferas metálicas de carga Q e massa m , e por uma mola de constante elástica K_m , comprimento L , inicialmente não alongada. O sistema é mantido em equilíbrio pela ação de um fio de nylon não elástico, preso às esferas. Rompendo-se este fio, qual a distância máxima entre as esferas?

Dados: $K_m = 1 \text{ N/m}$; $L = 1 \text{ m}$; $Q = 10 \mu\text{C}$
 $K = 1 \cdot 10^{10}$ (ct. eletrostática)

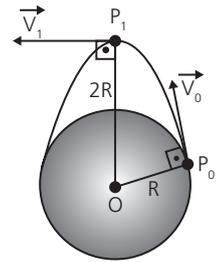


03. Um pósitron (elétron positivo) é lançado a partir de uma distância d com uma velocidade inicial v_0 , em direção ao centro de uma esfera condutora de raio R carregada positivamente com carga $+Q$, conforme a figura. A esfera é dotada de um furo diametral, que possibilita ao pósitron atravessar a esfera. Determine a velocidade inicial mínima que possibilita ao pósitron atravessar a esfera.



Observação: Despreze o campo gravitacional e considere a esfera fixa.

04. Um elétron é lançado da superfície de um condutor esférico com velocidade inicial tangente ao condutor. A energia cinética de lançamento é 200 eV e o condutor está eletrizado com uma carga $Q = 0,01 \mu\text{C}$. A influência do elétron sobre a distribuição de cargas do condutor é desprezível. Qual deve ser o raio do condutor para que o máximo afastamento do elétron de sua superfície seja igual ao raio? (Despreze dissipações de energia).



Dado: $k_0 = 9 \cdot 10^9$ (SI) \rightarrow constante eletrostática.

- A) 10 cm
- B) 20 cm
- C) 30 cm
- D) 40 cm
- E) 50 cm

05. Nos ângulos de um quadrado regular com lado a , localizam-se, em cada ângulo, um elétron (carga $-e$, massa m). Devido à ação das forças elétricas, os elétrons sofrem dispersão. Determine a velocidade de cada elétron no infinito.

Dado: $\epsilon_0 =$ permissividade elétrica.

- A) $V = \sqrt{\frac{e^2(4 + \sqrt{2})}{8\pi\epsilon_0 m a}}$
- B) $V = \sqrt{\frac{e^2(4 + 3\sqrt{2})}{8\pi\epsilon_0 m a}}$
- C) $V = \sqrt{\frac{e^2(4 + 2\sqrt{2})}{8\pi\epsilon_0 m a}}$
- D) $V = \sqrt{\frac{e^2(1 + \sqrt{2})}{4\pi\epsilon_0 m a}}$
- E) $V = \sqrt{\frac{e^2\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 m a}}$

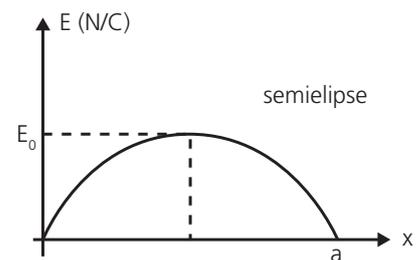
06. Determine as velocidades que terão dois elétrons (massa m , carga $-e$) quando estiverem distanciados λr ($\lambda > 1$), se os mesmos começam a movimentar-se a partir de uma distância r .

Dado: $\epsilon_0 =$ permissividade elétrica.

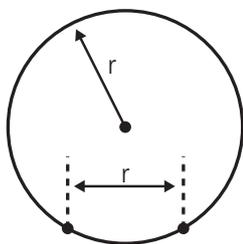
- A) $\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}} \frac{(\lambda - 1)}{\lambda^2}$
- B) $\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}} \sqrt{\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2}}$
- C) $\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}} \sqrt{\frac{(\lambda - 1)}{\lambda}}$
- D) $\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}} \sqrt{\frac{(\lambda + 1)}{\lambda}}$
- E) $\frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}} \sqrt{\frac{(\lambda - 1)^3}{\lambda^2}}$

07. Um campo elétrico variável tem seu módulo mudado com a posição x de acordo com o gráfico seguinte. Uma carga Q , devido ao citado campo, desloca-se da origem $x = 0$ até a posição $x = a$. O gráfico tem suas unidades no M.K.S. O trabalho realizado pela força elétrica sobre a carga Q no deslocamento de $x = 0$ até $x = a$ vale:

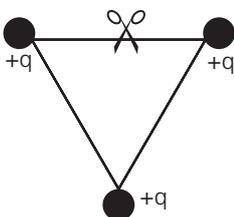
- A) $\frac{QE_a}{2}$
- B) $\frac{\pi QE_0 a}{2}$
- C) $\frac{\pi QE_0 a}{4}$
- D) $2\pi QE_0 a$
- E) $\pi QE_0 a$



08. Duas pequenas esferas de metal (pontiformes), de massas m e cargas $+q$ cada, estão mantidas encostadas na superfície interna de um anel, feito de acrílico, de raio r e massa $4m$. Todo o conjunto está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal liso, com as esferas separadas pela distância r . Sendo k a constante eletrostática do meio, determine a velocidade máxima atingida pelo anel, após as esferas serem liberadas.



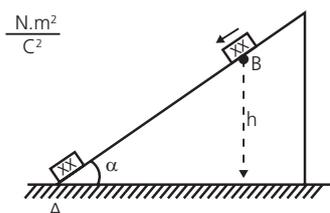
09. Três pequenas esferas idênticas de mesma carga $+q$ e massa m estão apoiadas sobre um plano horizontal liso, conectadas entre si através de fios de nylon, formando um triângulo equilátero de lado L . Em seguida, corta-se um dos fios. Determine a máxima velocidade v atingida pela carga elétrica do vértice ao fio que foi cortado, sabendo-se que a constante eletrostática do meio vale k .



10. Sobre um plano inclinado e com ângulo $\alpha = 30^\circ$, ilustrado na figura seguinte, encontraram-se dois blocos carregados eletricamente com cargas $q_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ e $q_2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-4} \text{ C}$.

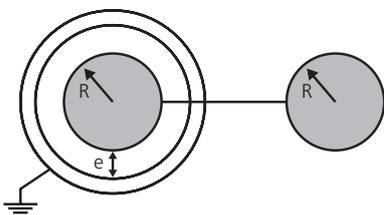
Sabe-se que o bloco 1 está fixado na posição A e que o bloco 2 é móvel e possui massa $m_2 = 0,1 \text{ kg}$. Num certo instante, o bloco 2 encontra-se a uma altura $h = 8 \text{ m}$ e desloca-se com velocidade linear $V = \sqrt{90} \approx 9,49 \text{ m/s}$, como mostra a figura a seguir.

Dados: $K = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$; considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

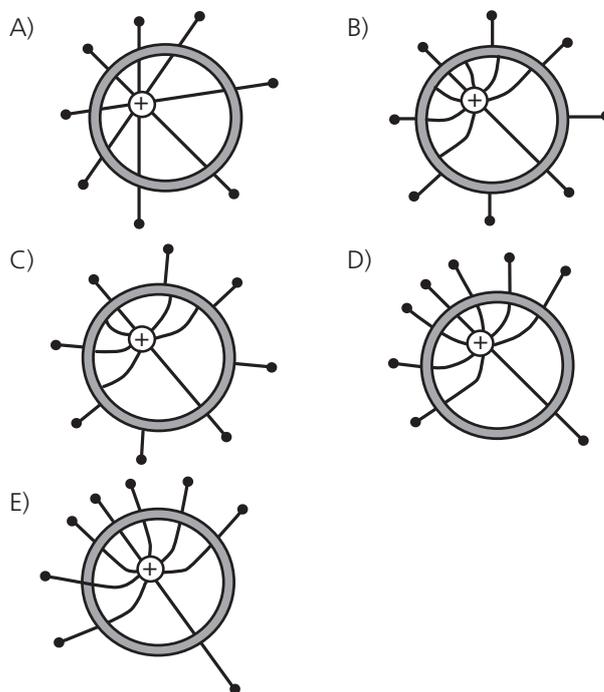


Determine:

- A) as distâncias mínima e máxima entre os dois blocos.
 B) a máxima velocidade linear que o bloco 2 atinge.
11. A figura mostra, em corte, dois condutores esféricos muito afastados, interligados por um fio condutor fino. O condutor da esquerda está no centro de uma cavidade esférica condutora ligada à Terra. Antes da esfera esquerda ser colocada na cavidade, o conjunto das duas esferas interligadas estava a um potencial V_0 . Determine a carga na superfície interna da cavidade.



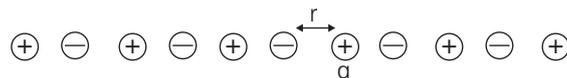
12. Uma esfera condutora sólida com carga positiva está localizada dentro de uma casca condutora neutra. Qual das figuras seguintes representa corretamente as linhas de campo elétrico do sistema?



13. Acompanhando uma linha reta, existe um número infinito de cargas alternadamente positivas e negativas $\pm q$, sendo todas as cargas adjacentes separadas pela mesma distância r , conforme figura a seguir. Determine a energia potencial de uma carga.

Sugestão: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

Dado: $\epsilon_0 \rightarrow$ permissividade elétrica.

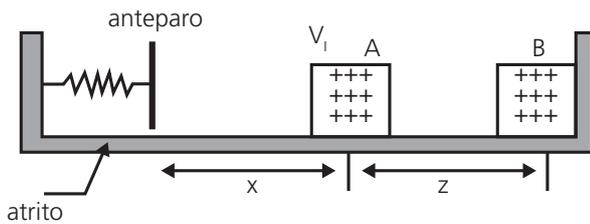


14. Uma carga pontual $+q$ posicionada a uma distância d de uma lâmina metálica plana e muito extensa. Determine a energia de interação entre elas.

Observação: A lâmina está aterrada.

15. A figura ilustra a situação inicial em que dois blocos, considerados pontiformes e carregados eletricamente com cargas $Q_A = +5 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ e $Q_B = +4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$, encontram-se afastados pela distância z . O bloco A desloca-se com velocidade $v_i = 5 \text{ m/s}$ e dista x do anteparo. O bloco B encontra-se afixado na parede e o conjunto mola-anteparo possui massa desprezível. Sabendo que a superfície entre o bloco B e o anteparo não possui atrito, e que na região à esquerda do anteparo o coeficiente de atrito dinâmico da superfície é $\mu_c = 0,5$, determine:

Dados: Constante eletrostática $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
 Constante de elasticidade da mola = 52 N/m
 Distância z entre os dois blocos = 9 m
 Distância x entre o bloco A e o anteparo = 11 m
 Massa do bloco A = 2 kg
 A aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$



- A) A velocidade com que o bloco A atinge o anteparo.
- B) A compressão máxima y da mola, considerando para efeito de cálculo que $z + x + y \cong z + x$.
- C) A energia dissipada até o momento em que a mola atinge sua deformação máxima.

Gabarito

01	02	03	04	05
*	2 m	*	C	A
06	07	08	09	10
C	C	*	*	*
11	12	13	14	15
*	B	*	*	*

* 01: A) $\frac{4Qd^3}{\left(\frac{L^2}{2} + d^2\right)^{3/2}}$ B) $\frac{4Qd}{\left(\frac{L^2}{2} + d^2\right)^{1/2}}$ e $\tau = 0$

03: $v = \sqrt{\frac{2kQq}{Rd} \left(\frac{d-R}{m}\right)}$

08: $\sqrt{\frac{k_0q^2}{12mr}}$

09: $\sqrt{\frac{2kq^2}{3mL}}$

10: A) 10 m e 40 m B) 10 m/s

11: $Q = \frac{-8\pi\epsilon_0RV_0(R+e)}{R+2e}$

13: $\frac{-q^2}{2\pi\epsilon_0r} \ln 2$

14: $\frac{-Kq^2}{4d}$

15: A) 6 m/s B) 1 m C) 10 J.



Anotações



Anotações