Capítulo 1
Sequências

Para pensar

1. (385.783, 696.472, 274.975, 70.144, 147.039, 258.680, 496.923, 632.680, 406.269, 1.011.548, 764.032, 589.591, 1.452.489)

2. na região Sudeste

Exercícios propostos

1. Na sequência dada, os termos são:
$a_1 = 5$ $a_5 = 6$
$a_2 = -4$ $a_6 = 6$
$a_3 = 8$ $a_7 = 6$
$a_4 = \sqrt{3}$

2. **a)** De acordo com o enunciado, temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$
Portanto, a sequência é (7, 9, 11, 13, ...).

b) De acordo com o enunciado, temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 2 = 6$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 3 = 12$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 4 = 20$
Portanto, a sequência é (2, 6, 12, 20, ...).

c) Do enunciado, temos:
$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$
Portanto, a sequência é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right)$.

d) Dadas as informações da sequência, temos:
$a_1 = 4$
$n = 1 \Rightarrow a_2 = 5 + a_1 = 5 + 4 = 9$
$n = 2 \Rightarrow a_3 = 5 + a_2 = 5 + 9 = 14$
$n = 3 \Rightarrow a_4 = 5 + a_3 = 5 + 14 = 19$
Portanto, a sequência é (4, 9, 14, 19, ...).

e) Do enunciado, temos:
$a_1 = 3$
$a_2 = 7$
$n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$
$n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3 - a_2 = 4 - 7 = -3$
Portanto, a sequência é (3, 7, 4, −3, ...).

3. **a)** Indicando a soma dos dez primeiros termos da sequência dada por S_{10}, temos:
$n = 10 \Rightarrow S_{10} = 10^2 + 10 = 110$

b) O primeiro termo pode ser encontrado atribuindo-se o valor 1 à variável n:
$n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^2 + 1 = 2$
$\therefore a_1 = 2$

c) $a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 5) - (4^2 + 4)$
$\therefore a_5 = 10$

d) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - [(n - 1)^2 + (n - 1)]$
$\therefore a_n = 2n$

4. **a)** Vamos chamar de extremos de uma mesa, ou de uma fileira de mesas, os lados menores do retângulo que podem ser formados com uma ou mais mesas. Assim, observamos que nos extremos temos duas cadeiras e, além delas, temos mais 4 cadeiras em cada mesa. Logo, em uma fileira de 11 mesas, o número de cadeiras será $2 + 11 \cdot 4$, ou seja, 46 cadeiras.

b) De acordo com a observação do item **a**, em uma fileira de n mesas, o número de cadeiras será $2 + 4n$.

c) Devemos ter:
$2 + 4n \geqslant 36 \Rightarrow n \geqslant 8{,}5$
O menor número natural que satisfaz essa desigualdade é 9; logo, devem ser enfileiradas 9 mesas.

5. O resultado da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 7 \\ \hline 5 & 6 \end{array}$$

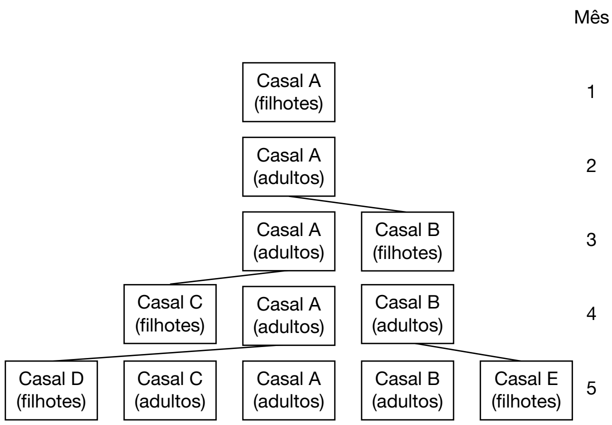
nos informa que a sequência de 7 notas, lá, si, dó, ré, mi, fá, sol, aparece 6 vezes nas 47 teclas; e o resto nos informa que, além dessa repetição, aparecem mais 5 teclas correspondentes à sequência lá, si, dó, ré, mi. Assim, concluímos que a 47ª tecla emite a nota mi.
Alternativa **c**.

6.

1ª dose	2ª dose	3ª dose	4ª dose
250 mg	(25 + 250) mg = = 275 mg	(27,5 + 250) mg = = 277,5 mg	(27,75 + 250) mg = = 277,75 mg

Alternativa **c**.

7. **a)** Fazendo um esquema para representar o número de casais mês a mês, temos:



E assim sucessivamente.
Daí, concluímos:
$a_1 = 1$ (casal A)
$a_2 = 1$ (casal A)
$a_3 = 2$ (casal A mais casal B)

$a_4 = 2 + 1 = 3$ (dois casais mais um casal de filhotes)

$a_5 = 3 + 2 = 5$ (três casais mais dois casais de filhotes)

Continuando a sequência encontramos os 12 primeiros números da sequência de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) Temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 3$

Logo, a lei de formação é:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

c) $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$b_2 = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{2}{1} = 2$

$b_3 = \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$b_4 = \dfrac{a_5}{a_4} = \dfrac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

$b_5 = \dfrac{a_6}{a_5} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$

$b_6 = \dfrac{a_7}{a_6} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$

Logo, os seis primeiros números dessa sequência são: 1; 2; 1,5; $1{,}\overline{6}$; 1,6; 1,625.

8. a) Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.

b) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.

c) Como a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante, a sequência é uma PA.

d) Devemos verificar se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

Temos $a_n = 3n - 5$ e $a_{n+1} = 3(n + 1) - 5$, que são consecutivos da sequência, para qualquer n natural não nulo. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:

$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) - 5 - (3n - 5) = 1$

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.

e) Devemos verificar se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

Temos $a_n = n^2 + 1$ e $a_{n+1} = (n + 1)^2 + 1$, que são consecutivos da sequência, para qualquer n natural não nulo. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:

$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$

Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.

f) Devemos verificar se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

Temos $a_n = \dfrac{3n}{2} + 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{3(n + 1)}{2} + 1$, que são consecutivos da sequência, para qualquer n natural não nulo. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{3(n + 1)}{2} + 1 - \left(\dfrac{3n}{2} + 1\right) = \dfrac{3}{2}$

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.

g) Devemos verificar se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

Temos $a_n = \dfrac{3}{n}$ e $a_{n+1} = \dfrac{3}{n + 1}$, que são consecutivos da sequência, para qualquer n natural não nulo. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{3}{n + 1} - \dfrac{3}{n} = -\dfrac{3}{n^2 + n}$

Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.

9. a) Temos $a_2 = 2$ e $a_1 = 0$; então:

$r = a_2 - a_1 = 2 - 0 = 2$

Logo, a razão é 2.

b) Temos $a_2 = 7$ e $a_1 = 10$; então:

$r = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$

Logo, a razão é -3.

c) Temos $a_2 = \dfrac{17}{12}$ e $a_1 = \dfrac{13}{6}$; então:

$r = a_2 - a_1 = \dfrac{17}{12} - \dfrac{13}{6} = \dfrac{17 - 26}{12} = -\dfrac{3}{4}$

Logo, a razão é $-\dfrac{3}{4}$.

d) Como (7, 7, 7, 7, ...) é uma PA constante, sua razão é nula.

e) Temos que $a_3 = 4$ e $a_2 = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$; então:

$r = a_3 - a_2 = 4 - \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

Logo, a razão é $2 - \sqrt{3}$

10. a) Sabemos que a razão r de uma PA é a diferença entre um termo e seu procedente. Assim:

$r = a_2 - a_1 = \dfrac{k - 2}{k + 1} - \dfrac{k^2 - 5k}{k^2 - 1} =$

$= \dfrac{(k - 2)(k - 1) - (k^2 - 5k)}{(k + 1)(k - 1)} = \dfrac{2k + 2}{(k + 1)(k - 1)} =$

$= \dfrac{2}{k - 1}$

Logo, $r = \dfrac{2}{k - 1}$.

b) Sabemos que o terceiro termo a_3 é a soma do segundo termo a_2 mais uma razão r. Assim:

$a_3 = a_2 + r = \dfrac{k - 2}{k + 1} + \dfrac{2}{k - 1} =$

$= \dfrac{(k - 2)(k - 1) + 1(k + 1)}{(k + 1)(k - 1)} = \dfrac{k^2 - k + 4}{k^2 - 1} =$

Logo, $a_3 = \dfrac{k^2 - k + 4}{k^2 - 1}$.

11. Dado $a_n = 2n + 5$, temos:

$a_{n+1} - a_n = 2(n + 1) + 5 - (2n + 5) = 2$

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, essa sequência é uma PA.

12. Como se trata de uma PA, a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Daí, temos a seguinte equação: $(2x + 2) - y = y - x$

Como o perímetro é 39 cm, temos a seguinte equação: $x + y + (2x + 2) = 39$

Podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases}(2x+2) - y = y - x \\ x + y + (2x+2) = 39\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2y - 3x = 2 \\ y + 3x = 37\end{cases}$$

$\therefore\ y = 13$ e $x = 8$

O triângulo tem lados iguais a 8, 13 e 18 centímetros, respectivamente.

Logo, a medida do maior lado desse triângulo é 18 cm.

13. a) Temos (2,5; 5; 7,5; ...; 247,5)

b) Sim, pois passamos do tempo de um carro para o seguinte adicionando a constante 2,5, ou seja, temos uma razão $r = 2{,}5$. Se a razão é constante, a sequência é uma PA.

c) Temos:

$a_1 = 2{,}5$

$a_2 = 5 = 2 \cdot 2{,}5$

$a_3 = 7{,}5 = 3 \cdot 2{,}5$

$a_4 = 10 = 4 \cdot 2{,}5$

Daí, concluímos que $a_n = n \cdot 2{,}5$

d) O termo a_{49} é o tempo decorrido depois do movimento do primeiro carro até o início do movimento do 50º carro.

$a_{49} = 49 \cdot 2{,}5 = 122{,}5$

Logo, 122,5 segundos depois do início do movimento do 1º carro, o 50º carro inicia o movimento.

14. a) Temos $a_1 = 4$ e $a_2 = 7$; então:

$r = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

Como a razão r é positiva, a PA é crescente.

b) Temos $a_1 = -14$ e $a_2 = -10$; assim:

$r = a_2 - a_1 = -10 - (-14) = 4$

Como a razão r é positiva, PA é crescente.

c) Temos $a_1 = 28$ e $a_2 = 20$; então:

$r = a_2 - a_1 = 20 - 28 = -8$

Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.

d) Temos $a_1 = -30$ e $a_2 = -35$; então:

$r = a_2 - a_1 = -35 + 30 = -5$

Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.

e) Temos que os termos da PA são iguais; logo, a razão é nula.

Portanto, a PA é constante.

f) Temos $a_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $a_2 = 1$; então:

$r = a_2 - a_1 = 1 - \left(2 - \sqrt{2}\right) = -1 + \sqrt{2}$

Como a razão r é positiva, a PA é crescente.

g) Temos $a_n = 8 - 3n$ e $a_{n+1} = 8 - 3(n + 1)$, que são termos consecutivos da sequência, para qualquer natural n natural não nulo. Então:

$r = a_{n+1} - a_n = 8 - 3(n + 1) - (8 - 3n) = -3$

Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.

h) Temos:

$$a_n = \frac{n^2 - 9}{n + 3} - n = \frac{(n + 3)(n - 3)}{n + 3} - n = -3$$

$$a_{n+1} = \frac{(n + 1)^2 - 9}{(n + 1) + 3} - (n + 1) =$$

$$= \frac{(n + 4)(n - 2)}{n + 4} - n - 1 = -3$$

Temos que os termos da PA são iguais; logo, a razão é nula.

Portanto, a PA é constante.

i) Temos $a_1 = 10$ e $a_2 = a_1 + 8 = 18$; então:

$r = a_{n+1} - a_n = 18 - 10 = 8$

Como a razão r é positiva, a PA é crescente.

15. Observando que o coeficiente de r tem uma unidade a menos que o índice do termo (número da posição do termo), concluímos que $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

16. Sendo o menor e o maior raios dessas oito circunferências igual a 5 cm e 40 cm, respectivamente, concluímos que a sequência dos raios, que crescem em PA, são (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40).

a) Calculando as áreas das coroas circulares pintadas de preto, temos a seguinte sequência:

$(100\pi - 25\pi,\ 400\pi - 225\pi,\ 900\pi - 625\pi,\ 1.600\pi - 1.225\pi) = (75\pi, 175\pi, 275\pi, 375\pi)$

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.

b) Temos na sequência $(75\pi, 175\pi, 275\pi, 375\pi)$ que $a_1 = 75\pi$ e $a_2 = 175\pi$; então:

$r = a_2 - a_1 = 175\pi - 75\pi = 100\pi$

Logo, a razão é 100π.

c) A sequência crescente formada pelas áreas, em centímetro quadrado, do círculo central e das coroas circulares pintadas de amarelo é:

$(25\pi, 225\pi - 100\pi, 625\pi - 400\pi, 1.225\pi - 900\pi) =$
$= (25\pi, 125\pi, 225\pi, 325\pi)$

Somando os seus termos encontramos 700π, em centímetro quadrado.

17. Representando a PA por $(x - r, x, x + r)$, temos:

$$\begin{cases}(x - r) + x + (x + r) = 6 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -10\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 2 & \text{(I)} \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -10 & \text{(II)}\end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$4 - r^2 = -5 \Rightarrow r = \pm 3$

Como a PA é crescente, deduzimos que $r = 3$.

Portanto, a PA é $(-1, 2, 5)$.

18. Vamos representar a PA de quatro termos por:

$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

Assim, temos:

$$\begin{cases}x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 4 \\ (x + r)(x + 3r) = 40\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 1 & \text{(I)} \\ (x + r)(x + 3r) = 40 & \text{(II)}\end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$(1 + r)(1 + 3r) = 40 \Rightarrow 3r^2 + 4r - 39 = 0$

$\therefore r = 3$ ou $r = -\dfrac{13}{3}$

Como a PA é crescente, deduzimos que $r = 3$.

Logo, a PA é $(-8, -2, 4, 10)$.

19. Representando a PA dos três ângulos internos desse triângulo por $(x, x + r, x + 2r)$, temos:

$$\begin{cases}(x + 2r) - x = 20 \\ x + (x + r) + (x + 2r) = 180\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r = 10 & \text{(I)} \\ x + r = 60 & \text{(II)}\end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos $x = 50$.
Logo, a medida do menor ângulo interno desse triângulo é 50°.

20. Representando as distâncias entre as cidades A e B, B e C, C e D por uma PA do tipo $(x - r, x, x + r)$, temos:
$x - r + x + x + r = 300 \Rightarrow x = 100$
Portanto, a distância entre as cidades B e C é 100 quilômetros.

21. Dada a PA (2, 13, 24, 35, ...), temos:
$a_1 = 2$ e $a_2 = 13$
Assim, a razão r é dada por:
$r = a_2 - a_1 = 13 - 2 = 11$
Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 40$, concluímos:
$a_{40} = 2 + (40 - 1)11 = 431$
Portanto, o 40º termo da PA é $a_{40} = 431$.

22. Sabendo que a PA é $(2k + 1, 3k, 4k - 1, ...)$, temos:
$a_1 = 2k + 1$ e $a_2 = 3k$
Sendo r a razão da PA, temos:
$r = a_2 - a_1 = 3k - (2k + 1) = k - 1$
Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 21$, concluímos:
$a_{21} = 2k + 1 + (21 - 1)(k - 1) = 2k + 1 + 20k - 20$
$\therefore a_{21} = 22k - 19$

23. Temos a PA (2, 8, 14, 20, ...). Então:
$a_1 = 2$ e $a_2 = 8$
Assim, a razão r da PA é dada por:
$r = a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$
Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos:
$a_n = 2 + (n - 1)6 = 6n - 4$
Portanto, o termo geral da PA é $a_n = 6n - 4$.

24. Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 20$, temos:
$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 131 = a_1 + (20 - 1)7$
$\therefore 131 = a_1 + 133 \Rightarrow a_1 = -2$
Logo, o 1º termo da PA é $a_1 = -2$.

25. Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 11$, temos:
$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow 29k - 18 = a_1 + (11 - 1)(2 - k)$
$\therefore 29k - 18 = a_1 + 20 - 10k$
$\therefore a_1 = 39k - 38$
Logo, o 1º termo da PA é $a_1 = 39k - 38$.

26. Sabemos que $a_n = a_k + (n - k)r$ é a fórmula do termo geral, então:
$$\begin{cases} a_8 = 3a_5 \\ a_8 = a_5 + 3r \end{cases}$$
Logo:
$a_8 = 3(a_8 - 3r) \Rightarrow a_8 = \frac{9}{2}r$
Então:
$\frac{9}{2}(-5) = a_1 + (8 - 1)(-5) \Rightarrow a_1 = \frac{25}{2}$
$a_2 = a_1 + r = \frac{25}{2} - 5 = \frac{15}{2}$
$a_3 = a_2 + r = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$
$a_4 = a_3 + r = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$
Logo, temos a PA:
$\left(\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, ...\right)$

27. Dada a PA (3, 7, 11, ..., 99), temos que a razão r é:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$
Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $a_n = 99$, temos:
$99 = 3 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 25$
Logo, a PA tem 25 termos.

28. Os múltiplos de 12 maiores que 2.000 e menores que 8.000 formam uma PA cujo primeiro termo é 2.004 e razão $r = 12$.
a) Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 30$, concluímos:
$a_{30} = 2.004 + (30 - 1)12 = 2.352$
Portanto, o 30º termo dessa PA é $a_{30} = 2.352$.
b) O último termo da PA é 7.992. Indicando por n o número de termos dessa PA, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 7.992 = 2.004 + (n - 1) \cdot 12$
$\therefore n = 500$
Concluímos, então, que a PA é formada por 500 termos.

29. Sendo r a razão da PA, temos:
$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow \frac{17}{3} = \frac{1}{6} + 11r$
$\therefore 34 = 1 + 66r \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

30. Queremos interpolar 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem. Então teremos uma PA com 8 termos, sendo $a_1 = 2$ e $a_8 = 10$.
Logo:
$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 10 = 2 + 7r$
$\therefore r = \frac{8}{7}$
Logo, a PA é $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$.

31. Do enunciado, temos:
$a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + r + a_1 + 2r = 11$
$a_4 + a_7 = 21 \Rightarrow a_1 + 3r + a_1 + 6r = 21$
Temos, então, o sistema:
$$\begin{cases} 2a_1 + 3r = 11 \quad \text{(I)} \\ 2a_1 + 9r = 21 \quad \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraímos, membro a membro, (I) e (II), obtendo:
$-6r = -10 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$
Portanto, a razão da PA é $r = \frac{5}{3}$.

32. Sabemos que:
$a_{23} = a_{15} + 8r \Rightarrow a_{23} = 18 + 8 \cdot 6$
$\therefore a_{23} = 66$
Logo, o 23º termo é 66.

33. Temos:
$a_{32} = a_{20} + 12r \Rightarrow 8 = 5 + 12r$
$\therefore r = \frac{1}{4}$
Logo, a razão da PA é $r = \frac{1}{4}$.

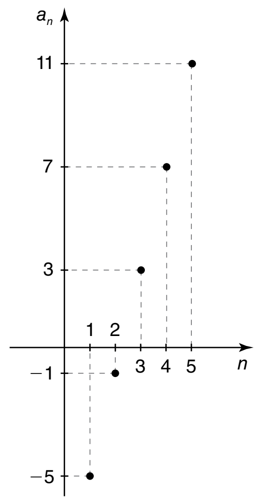
34. Sendo a_n a quantidade de ladrilhos cinzas, e a_1 a quantidade de ladrilhos na 1ª camada cinza, a_2 a quantidade de ladrilhos na 2ª camada cinza e assim sucessivamente, temos:
$a_1 = 4$
$a_2 = 20$
$a_3 = 36$
Concluímos que a sequência (a_n) é uma PA de razão 16; portanto, $a_n = a_1 + (n - 1)16$. Então:
$a_{10} = a_1 + 9 \cdot 16 = 4 + 9 \cdot 16 = 148$
Logo, a 10ª camada de ladrilhos cinza contém 148 ladrilhos.
Alternativa **d**.

35. Na sequência 10.000, 10.500, 11.000, ..., cada termo a_n é a distância, em metro, percorrida pelo atleta no n-ésimo treino. Como essa sequência é uma PA com primeiro termo igual a 10.000 e razão igual a 500, temos:
$a_n = 10.000 + 500(n - 1)$
Devemos ter:
$a_n \geqslant 21.000 \Rightarrow 10.000 + 500(n - 1) \geqslant 21.000$
$\therefore n \geqslant 23$
Concluímos, então, que no 23º treino o atleta atingirá a distância exigida na prova.
Alternativa **b**.

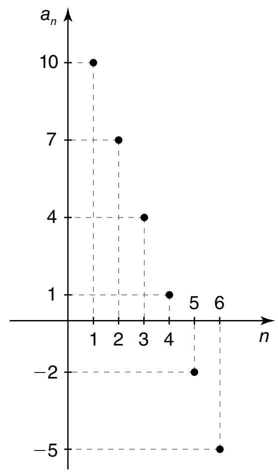
36. a) $1971 + 6 = 1977$
Logo a 1ª obra de conservação ocorreu em 1977.
b) A sequência crescente dos anos em que ocorreram obras de conservação é a PA: 1977, 1983, 1990 , ... Assim, a 7ª obra de conservação ocorreu no ano a_7, dado por: $a_7 = 1977 + 6 \cdot 6$, ou seja, $a_7 = 2013$.
c) Devemos ter:
$a_n > 2050 \Rightarrow 1977 + (n - 1) \cdot 6 > 2050$
$\therefore n > 13,1666...$
O menor número natural n que satisfaz essa desigualdade é 14. Como $a_{14} = 1977 + 13 \cdot 6 = 2055$, concluímos que o primeiro ano, após 2050, em que haverá nova obra de conservação será 2055.

37. Observamos que as doações, mês a mês, das duas empresas formam progressões aritméticas. Na empresa A, o primeiro termo da sequência é $a_1 = 12.000$ e a razão é $r_A = -600$. Assim, sendo a_n seu termo geral, temos $a_n = 12.000 - 600(n - 1)$.
Já na empresa B, o primeiro termo da sequência é $b_1 = 300$ e a razão é $r_B = 300$. Assim, sendo b_n o seu termo geral, temos $b_n = 300 + 300(n - 1)$.
Fazendo $a_n = b_n$:
$12.000 - 600(n - 1) = 300 + 300(n - 1) \Rightarrow n = 14$
Como o ano apresenta 12 meses, concluímos que o valor mensal do depósito da empresa A foi igual ao da empresa B em fevereiro de 2011.

38. a)



b)



39. A representação gráfica da PA está contida no gráfico de uma função afim $y = px + q$.
Como (1, 8) e (2, 13) são pontos dessa representação gráfica, temos:
$$\begin{cases} 8 = p + q \\ 13 = 2p + q \end{cases} \Rightarrow p = 5 \text{ e } q = 3$$
Logo, $y = 3 + 5x$.
Alternativa **a**.

40. A reta s é o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$.
Como os pontos $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ pertencem a s, temos:
$$\begin{cases} 4 = -\frac{a}{2} + b \\ 6 = \frac{a}{2} + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 5$$
Logo, $f(x) = 2x + 5$.
Para $x = 40$, temos:
$f(40) = 2 \cdot 40 + 5 = 85$
Portanto: $a_{40} = 85$
Para $x = 41$, temos:
$a_{41} = f(41) = 2 \cdot 41 + 5 = 82 + 5 = 87$
Assim, a razão r da PA é dada por:
$r = a_{41} - a_{40} = 87 - 85 = 2$
Logo, $r = 2$ e $a_{40} = 85$.

41. De acordo com o gráfico, temos $a_5 = 3p - 12$ (I), $a_7 = p - 1$ (II) e $a_{11} = 2p - 4$ (III).

No entanto, sabemos que $a_7 = a_5 + 2r$. Substituindo (I) e (II) nessa equação, temos:

$p - 1 = 3p - 12 + 2r \Rightarrow 2p + 2r = 11$

Sabemos também que $a_{11} = a_7 + 4r$. Substituindo (II) e (III) nessa equação, temos:

$2p - 4 = p - 1 + 4r \Rightarrow p - 4r = 3$

Daí, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2p + 2r = 11 \\ p - 4r = 3 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ e } p = 5$$

Portanto, a razão numérica dessa PA é $\frac{1}{2}$.

42. a) $a_{10} + a_{56} = a_1 + a_{65} = 56$

b) a_{33} é o termo médio dessa PA; então:

$$a_{33} = \frac{a_1 + a_{65}}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

43. Como 5 é termo médio, temos que $5 = \frac{a_1 + a_{61}}{2}$. Substituindo a_1 por $9a_{61}$:

$$5 = \frac{9a_{61} + a_{61}}{2} \Rightarrow a_{61} = 1$$

Logo,

$a_{61} = a_1 + 60r \Rightarrow 1 = 9 + 60r$

$\therefore r = -\frac{2}{15}$

44. $x + 1 = \frac{(3x - 1) + (x - 3)}{2} \Rightarrow x = 2$

Logo, a sequência é uma PA para x = 2.

45. $2y = \frac{(3y + 5) + (y - 5)}{2} \Rightarrow 0 = 0$

Como a sentença $0 = 0$ é verdadeira para qualquer $y \in \mathbb{R}$, concluímos que essa sequência é uma PA para qualquer valor real de y.

46. A sequência das distâncias ao ponto O formam a PA:

$(x + 20, 3x + 10, 4x + 30)$

Temos: $3x + 10 = \frac{x + 20 + 4x + 30}{2}$

$\therefore 6x + 20 = 5x + 50 \Rightarrow x = 30$

Logo, ao final dos três segundos, a distância, em metro, ao ponto O era de:

$4 \cdot (30) + 30 = 150$, ou seja, 150 m.

47. a) Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ é a fórmula do termo geral da PA, temos:

$a_{40} = 3 + (40 - 1) \cdot 4 = 159$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 40$, temos:

$$S_{40} = \frac{(3 + 159) \cdot 40}{2} = 3.240$$

b) Temos:

$a_{31} = -4 + (31 - 1) \cdot (-3) = -94$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 31$, temos:

$$S_{31} = \frac{(-4 - 94) \cdot 31}{2} = -1.519$$

c) Temos a sequência $(2, 4, 6, \dots, a_{100})$. Descobrindo a_{100}:

$a_{100} = a_1 + 99 \cdot r \Rightarrow a_{100} = 2 + 99 \cdot 2$

$\therefore a_{100} = 200$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 100$, temos:

$$S_{100} = \frac{(2 + 200) \cdot 100}{2} = 10.100$$

d) Temos a sequência $(1, 3, 5, \dots, a_{60})$. Descobrindo a_{60}:

$a_{60} = a_1 + 59 \cdot r \Rightarrow a_{60} = 1 + 59 \cdot 2$

$\therefore a_{60} = 119$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 60$, temos:

$$S_{60} = \frac{(1 + 119) \cdot 60}{2} = 3.600$$

48. Temos uma sequência cujo 1º termo é $a_1 = 12$ e o último termo é $a_n = 192$, ou seja, (12, 24, 36, ..., 192). Descobrindo o número de termos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 192 = 12 + (n - 1) \cdot 12$

$\therefore n = 16$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 16$, temos:

$$S_{15} = \frac{(12 + 192) \cdot 16}{2} = 1.632$$

49. Temos uma sequência cujo 1º termo é $a_1 = 108$ e o último termo é $a_n = 297$, ou seja, (108, 117, 126, ..., 297). Descobrindo o número de termos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 297 = 108 + (n - 1) \cdot 9$

$\therefore n = 22$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 22$, temos:

$$S_{15} = \frac{(108 + 297) \cdot 22}{2} = 4.455$$

50. Os múltiplos de 2 e 3 são, simultaneamente, todos os múltiplos de 6.

Esses múltiplos, compreendidos entre 100 e 700, formam uma PA cuja razão é 6, o 1º termo é $a_1 = 102$ e o último termo é $a_n = 696$.

Temos então a PA:

(102, 108, 114, ..., 696)

O número n de termos dessa PA pode ser calculado por:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow 696 = 102 + (n - 1) \cdot 6$

$\therefore n = 100$

Pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, com $n = 100$, concluímos:

$$S_{100} = \frac{(102 + 696) \cdot 100}{2} = 39.900$$

51. a) $\sum_{j=1}^{50} 2j = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2 \cdot 50 =$
$= 2 + 4 + 6 + ... + 100$
Essa expressão é a soma dos 50 primeiros termos de uma PA tal que $a_1 = 2$, $a_{50} = 100$ e $r = 2$.
Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, obtemos:
$S_{50} = \frac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 2.550$

b) $\sum_{j=1}^{40} (3j - 1) = (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) + (3 \cdot 3 - 1) +$
$+ ... + (3 \cdot 40 - 1) = 2 + 5 + 8 + ... + 119$
Essa expressão é a soma dos 40 primeiros termos de uma PA em que $a_1 = 2$, $a_{40} = 119$ e $r = 3$.
Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, obtemos:
$S_{40} = \frac{(2 + 119) \cdot 40}{2} = 2.420$

c) $\sum_{j=11}^{30} (5j + 2) = (5 \cdot 11 + 2) + (5 \cdot 12 + 2) + (5 \cdot 13 + 2) +$
$+ ... + (5 \cdot 30 + 2) = 57 + 62 + 67 + ... + 152$
Essa soma é a soma dos primeiros $(30 - 11 + 1)$ termos da PA, ou seja, 20 termos tal que $a_1 = 57$, $a_{20} = 152$ e $r = 5$.
Usando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 20$, temos:
$S_{20} = \frac{(57 + 152) \cdot 20}{2} = 2.090$

52. a) Sendo $a_1 = 2$ e $a_2 = 7$, a razão r da PA é dada por:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$
Logo, o n-ésimo termo é:
$a_n = 2 + (n - 1)5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$

b) Sabemos que a soma dos n primeiros termos da PA é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Logo:
$S_n = \frac{(2 + a_n)n}{2} = \frac{(2 + 5n - 3)n}{2} = \frac{5n^2 - n}{2}$

53. Os n primeiros números naturais ímpares formam a PA $(1, 3, 5, ..., 2n - 1)$.
Sabemos que $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, logo:
$S_n = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$
Portanto, a soma dos n primeiros números ímpares naturais é n^2.

54. Sabemos que $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é a soma dos termos da PA.
Do enunciado, temos $S_n = 33$, $a_1 = -7$ e $r = 2$.
Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r = -7 + (n - 1)2 = 2n - 9$
Então:
$33 = \frac{(-7 + 2n - 9)n}{2} \Rightarrow 66 = -16n + 2n^2$
$\therefore n^2 - 8n - 33 = 0$
$\Delta = 64 + 132 = 196$
$\therefore n = \frac{8 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{8 \pm 14}{2} \Rightarrow n = 11$ ou $n = -3$
Como n representa o número de termos da PA, temos $n = 11$.
Logo, essa PA tem 11 termos.

55. Sendo $a_1 = 3$ e $a_2 = 9$, a razão r da PA é dada por:
$r = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$
Logo, o n-ésimo termo é:
$a_n = 3 + (n - 1)6 = 6n - 3$
Sabemos que a soma dos n primeiros termos da PA é $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ e queremos que seja menor que 1.200. Assim:
$S_n < 1.200 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} < 1.200$
$\therefore \frac{(3 + 6n - 3) \cdot n}{2} < 1.200 \Rightarrow n^2 - 400 < 0$
Resolvendo a inequação $n^2 - 400 < 0$, encontramos que $-20 < n < 20$.
Daí concluímos que o maior valor possível de n é 19.

56. Os números das poltronas das fileiras formam uma PA tal que o termo inicial é $a_1 = 20$, a razão é $r = 2$ e o número de termos é $n = 16$.
Para calcular quantas poltronas teremos na última fileira, aplicamos a fórmula do termo geral:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{16} = 20 + (16 - 1)2$
$\therefore a_{16} = 50$
E como $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n termos da PA, temos:
$S_{16} = \frac{(20 + 50) \cdot 16}{2} = 560$
Então, esse cinema terá 560 poltronas.

57. Temos que o primeiro termo dessa sequência é $a_1 = 250.000$ e que a razão é $r = 20.000$. Queremos saber qual é a receita no próximo ano, de janeiro a dezembro. Assim, vamos determinar o último termo da sequência, a_{12}:
$a_{12} = a_1 + 11r = 250.000 + 11 \cdot 20.000 = 470.000$
Assim, temos:
$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(250.000 + 470.000) \cdot 12}{2} =$
$= 4.320.000$
Logo, a receita prevista para o próximo ano é R$ 4.320.000,00.

58. Temos que $a_1 = 100$, $r = 20$ e $S_n = 3.600$. Determinando a_n:
$a_n = 100 + (n - 1)20 = 80 + 20n$
Assim:
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 3.600 = \frac{(100 + 80 + 20n) \cdot n}{2}$
$\therefore n^2 + 9n - 360 = 0 \Rightarrow n = 15$ ou $n = -24$
Como n deve assumir um valor natural, concluímos que $n = 15$, ou seja, há 15 resistores associados.

59. a) A sequência é uma PG, pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, é constante, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 4$.

b) Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, não é constante, a sequência não é uma PG.

c) Essa sequência é uma PG, pois $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{3}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 4$.

d) Temos do enunciado:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 6$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 24$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 48$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 96$
Então, a sequência é:
(3, 6, 12, 24, 48, 96)
Essa sequência é uma PG, pois $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 2$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 6$.

e) Do enunciado:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = (1 - 1)^2 = 0$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = (2 - 1)^2 = 1$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = (3 - 1)^2 = 4$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = (4 - 1)^2 = 9$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = (5 - 1)^2 = 16$
Logo, a sequência é:
(0, 1, 4, 9, 16)
Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, com a_n diferente de 0, não é constante, a sequência não é uma PG.

f) Temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5^{2-1} = 5$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5^{2-2} = 1$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5^{2-3} = \frac{1}{5}$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5^{2-4} = \frac{1}{25}$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5^{2-5} = \frac{1}{125}$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 5^{2-6} = \frac{1}{625}$
Então, a sequência é dada por:
$\left(5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}\right)$
Assim:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{5}$
Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, é constante, a sequência é uma PG.

g) Temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = (-1)^1 \cdot 2^{1-4} = -\frac{1}{8}$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = (-1)^2 \cdot 2^{2-4} = \frac{1}{4}$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = (-1)^3 \cdot 2^{3-4} = -\frac{1}{2}$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = (-1)^4 \cdot 2^{4-4} = 1$
Então, a sequência é:
$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1\right)$
Assim:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = -2$
Logo, essa sequência é uma PG, pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer é constante, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 4$.

60. a) Da sequência, temos: $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$
Como a razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$

b) Da sequência, temos: $a_1 = -3$ e $a_2 = 9$. A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{-3} = -3$

c) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{4}{3}$ e $a_2 = 2$
A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$

d) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{5}{3\sqrt{2}}$ e $a_2 = \frac{5}{9}$
Como a razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

e) Da sequência, temos:
$a_1 = \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$ e $a_2 = \frac{6}{5 - 2\sqrt{5}}$
Sabendo que a razão da PG é dada por
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$$q = \frac{\frac{6}{5 - 2\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{5} - 2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

61. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2^n} \cdot \sqrt{2^1}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{2}$

b) Sim, pois a razão encontrada no item **a**, que é a razão entre dois termos consecutivos é constante; logo, é uma PG.

62. Como $a_{10} = \sqrt{3} + 1$ e $a_{11} = 2$, a razão q pode ser calculada assim:
$q = \frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$
Temos que a razão também pode ser calculada por $q = \frac{a_{10}}{a_9}$ e $q = \frac{a_{12}}{a_{11}}$. Assim:
$q = \frac{a_{10}}{a_9} \Rightarrow a_9 = \frac{a_{10}}{q}$ e $a_{12} = qa_{11}$
E, portanto:
$a_9 = \frac{a_{10}}{q} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$
$a_{12} = qa_{11} = \left(\sqrt{3} - 1\right)2 = 2\sqrt{3} - 2$

63. $\dfrac{k+4}{k} = \dfrac{18}{k+4} \Rightarrow k^2 + 8k + 16 = 18k$

$\therefore\ k^2 - 10k + 16 = 0 \Rightarrow k = 2$ ou $k = 8$

Assim, k pode assumir dois valores, 2 ou 8. E teríamos as sequências:

(2, 6, 18) de razão 3

(8, 12, 18) de razão $\dfrac{3}{2}$

64. **a)** Ao final de cada ano o percentual de crescimento da população pode ser estimada em:

100% + 2% = 102% = 1,02

Logo, a razão dessa PG é 1,02.

b) Temos:

$q = \dfrac{a_{2030}}{a_{2029}} \Rightarrow a_{2029} = \dfrac{a_{2030}}{q}$

$\therefore\ a_{2029} = \dfrac{477.360}{1,02} = 468.000$

Logo, no final de 2029 estima-se que o número de habitantes dessa cidade seja 468.000.

c) Temos:

$a_{2031} = a_{2030}\, q = 477.360 \cdot 1,02 = 486.907,2$

Logo, estima-se que no final de 2031 a população será de aproximadamente 486.907.

65. Na sequência de juro simples, a taxa de 10% é calculada sobre o valor inicial e é fixa para os demais anos. Assim, temos a razão r:

$r = 10\%$

E a sequência ao final de n anos será:

$(1.000, 1.100, 1.200, 1.300, \ldots, a_n)$

Logo, trata-se de uma PA de razão $r = 100$.

Na sequência de juro composto, a taxa de 10% é calculada sobre o valor do ano anterior. Assim, temos a sequência:

$(1.000, 1.100, 1.210, 1.331, \ldots, a_n)$

Logo, trata-se de uma PG de razão $q = 1,10$.

Alternativa **e**.

66. **a)** A razão da PG é dada por $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, logo:

$q = \dfrac{6}{3} = 2$

Como $a_1 > 0$ e $q > 1$, a PG é crescente.

b) $q = \dfrac{-8}{-16} = \dfrac{1}{2}$

Como $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, a PG é crescente.

c) $q = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Como $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, a PG é decrescente.

d) $q = \dfrac{10}{-5} = -2$

Como $a_1 \neq 0$ e $q < 0$, a PG é oscilante.

e) Como todos os termos são nulos, a PG é constante com razão indeterminada.

f) Como todos os termos são iguais e não nulos, a PG é constante com $q = 1$.

g) Como o primeiro termo é não nulo e os demais são nulos, temos $q = 0$, então a PG é quase nula.

h) Temos $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:

$q = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$

Como $a_1 > 0$ e $q > 1$, a PG é crescente.

i) $q = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}} = 1$

Como $q = 1$, a PG é constante.

67. Como a sequência $(k, k-2, 1)$ é uma PG, temos:

$\dfrac{k-2}{k} = \dfrac{1}{k-2} \Rightarrow k^2 - 4k + 4 = k$

$\therefore k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k = 1$ ou $k = 4$

Assim, k pode assumir dois valores, 1 ou 4. E teríamos:

- para $k = 1$, a sequência $(1, -1, 1)$ de razão -1. Trata-se de uma PG oscilante.
- para $k = 4$, a sequência $(4, 2, 1)$ de razão $\dfrac{1}{2}$. Trata-se de uma PG decrescente.

Logo, a sequência é uma PG decrescente para $k = 4$.

68. Sendo $\left(\dfrac{x}{q}, x, xq\right)$ a PG, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 64 \\ \dfrac{x}{q} + x + xq = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 64 \\ \dfrac{x}{q} + x + xq = 14 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 4 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{q} + x + xq = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$\dfrac{4}{q} + 4 + 4q = 14 \Rightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$

$\Delta = 100 - 64 = 36$

$\therefore\ q = \dfrac{10 \pm \sqrt{36}}{8} = \dfrac{10 \pm 6}{8} \Rightarrow q = 2$ ou $q = \dfrac{1}{2}$

Como a PG deve ser crescente, deduzimos que $q = 2$. Logo, a PG é (2, 4, 8).

69. Sendo $\left(\dfrac{x}{q^3}, \dfrac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ a PG, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{q^3} \cdot \dfrac{x}{q} \cdot xq \cdot xq^3 = 81 \\ \dfrac{x}{q} + xq = \dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 81 \\ \dfrac{x}{q} + xq = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \pm 3 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{q} + xq = \dfrac{15}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

- Substituindo x por 3 em (II), temos:

$\dfrac{3}{q} + 3q = \dfrac{15}{2} \Rightarrow 6q^2 - 15q + 6 = 0$

$\Delta = 225 - 144 = 81$

$\therefore\ q = \dfrac{15 \pm \sqrt{81}}{12} = \dfrac{15 \pm 9}{12} \Rightarrow q = 2$ ou $q = \dfrac{1}{2}$

Como a PG deve ser crescente, deduzimos que $q = 2$.

Portanto, nesse caso, a PG é $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.

- Substituindo x por -3 em (II), temos:

$\frac{-3}{q} - 3q = \frac{15}{2} \Rightarrow 6q^2 + 15q + 6 = 0$

$\Delta = 225 - 144 = 81$

$\therefore q = \frac{-15 \pm 9}{12} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$ ou $q = -2$

Para $q = -\frac{1}{2}$, temos a PG $\left(24, 6, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$, que não convém, pois é decrescente.

Para $q = -2$, temos a PG $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.

Logo, a única PG que satisfaz as condições enunciadas é $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.

70. Chamando de R_1, R_2 e R_3 a resistência desses três resistores e sabendo que a razão $q = 2$ e que $R_3 = R$, temos:

$R_3 = R$

$R_2 = \frac{R}{2}$

$R_3 = \frac{R}{4}$

Assim:

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{\frac{R}{4}} + \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{R} = \frac{4}{R} + \frac{2}{R} + \frac{1}{R}$

$\therefore \frac{1}{R_{eq}} = \frac{7}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{7}$

71. Sendo q a razão da PG, temos:

$q = \frac{2.560}{5.120} = \frac{1}{2}$

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 15$, temos:

$a_{15} = 5.120\left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \frac{5.120}{16.384} = \frac{5}{16}$

Portanto, o 15º termo da sequência é $\frac{5}{16}$.

72. Temos para essa situação a seguinte sequência formada pelos lados do quadrado:

$\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$

E as áreas desses quadrados formarão a seguinte sequência:

$\left(64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}, ...\right)$

Assim, temos uma sequência de razão $q = \frac{1}{4}$ e $a_1 = 64$.

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 31$, temos:

$a_{31} = 64\left(\frac{1}{4}\right)^{30} = \frac{2^6}{2^{60}} = \frac{1}{2^{54}}$

Portanto, a área do 31º quadrado sombreado dessa sequência é $\frac{1}{2^{54}}$ cm^2.

Alternativa **d**.

73. Temos que a razão da PG é $q = 2$.

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos:

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

74. $a_{15} = a_1 \cdot q^{14} \Rightarrow 5 = a_1 \cdot \left(\sqrt[7]{3}\right)^{14}$

$\therefore a_1 = \frac{5}{9}$

75. Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$a_6 = a_1 \cdot q^5$ e $a_4 = a_1 \cdot q^3$

Assim:

$a_6 = a_1 \cdot a_4 \Rightarrow a_1 \cdot q^5 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^3$

$\therefore a_1 = q^2$

Como $q = \frac{2}{3}$, obtemos:

$a_1 = \frac{4}{9}$

Portanto, a PG é:

$\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, ...\right)$

76. A razão q da PG é dada por:

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos:

$\frac{1}{3^{10}} = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^{10}} = \frac{3^5}{3^{n-1}}$

$\therefore 3^{n-1} = 3^{15} \Rightarrow n - 1 = 15$

$\therefore n = 16$

Logo, essa PG tem 16 termos.

77. Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é fórmula do termo geral da PG. Então:

$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$

$\therefore 81 = \frac{1}{243} \cdot q^9 \Rightarrow 3^4 \cdot 3^5 = q^9$

$\therefore q^9 = 3^9 \Rightarrow q = 3$

Logo, a razão da PG é 3.

78. Queremos interpolar 4 meios geométricos entre 1 e 7, nessa ordem. Teremos, assim, uma PG com 6 termos, sendo $a_1 = 1$ e $a_6 = 7$.

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, temos:

$a_6 = a_1 \cdot q^5$

$7 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{7}$

Assim, interpolando 4 meios geométricos entre 1 e 7, obtemos a sequência:

$\left(1, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{7^2}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[5]{7^4}, 7\right)$

79. Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$\begin{cases} a_5 + a_8 = 9 \\ a_7 + a_{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^7 = 9 \\ a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^9 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 \cdot q^4(1 + q^3) = 9 \quad \text{(I)} \\ a_1 \cdot q^6(1 + q^3) = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro (II) por (I), obtemos:

$q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}$

Como a PG é oscilante, concluímos que $q = -\frac{1}{3}$.

80. Sabemos que $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$; logo:

$a_{19} = a_7 \cdot q^{12} \Rightarrow a_{19} = 10 \cdot (\sqrt[6]{2})^{12} = 10 \cdot 4 = 40$

81. Sabendo que $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$, temos:

$a_{22} = a_{16} \cdot q^{22-16} \Rightarrow 4 = q^6$

$\therefore\ q = \pm\sqrt[3]{2}$

Logo, a razão dessa PG é $\sqrt[3]{2}$ ou $-\sqrt[3]{2}$.

82. Sendo $(a_1, a_2, \ldots)$ a sequência da altura da bolinha a partir do primeiro toque no chão, temos $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$.

Trata-se de uma sequência de razão $q = \frac{1}{2}$.

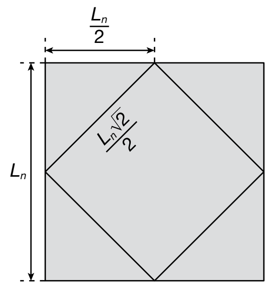
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 10$, temos:

$a_{10} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$

Logo, a altura alcançada pela bolinha, em metro, após o décimo toque no chão é $\frac{1}{256}$.

Alternativa **d**.

83. Sendo $(L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{15})$ as medidas, em centímetro e em ordem decrescente, dos lados dos 15 primeiros quadrados, temos que $L_{n+1} = \frac{L_n\sqrt{2}}{2}$, para todo número natural n, com $1 \leqslant n \leqslant 14$.



Assim, constatamos que a sequência é uma PG de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e primeiro termo 20 cm. Logo:

$P_{15} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14} = 20 \cdot \frac{2^7}{2^{14}} = \frac{20}{2^7} = \frac{20}{128} \Rightarrow P_{15} = \frac{5}{32}$

Ou seja, a medida do lado do 15º quadrado é $\frac{5}{32}$ cm.

84. Indicando por A a área total a ser alagada, temos que daqui a 1 mês a área alagada será $\frac{A}{256}$, daqui a 2 meses será $\frac{A}{128}$, daqui a 3 meses será $\frac{A}{64}$ e assim sucessivamente até que no mês k a área alagada seja A. Assim, o número k de termos da PG$\left(\frac{A}{256}, \frac{A}{128}, \frac{A}{64}, \ldots, A\right)$ é o número de meses necessários para que o alagamento atinja toda a área prevista.

Pela fórmula do termo geral da PG, temos:

$A = \frac{A}{256} \cdot 2^{k-1} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2^8} \cdot 2^{k-1}$

$\therefore\ 1 = 2^{k-9} \Rightarrow k = 9$

Logo, o alagamento atingirá toda a região prevista daqui a 9 meses.

85. a) Destacando os cinco primeiros termos da sequência crescente, temos (300, 600, 1.200, 2.400, 4.800, ...).

Observamos que a sequência é uma PG de primeiro termo 300 e razão 2.

b) Três horas equivalem a 6 períodos de 30 minutos; logo, a população ao final desse tempo é dada pelo termo a_7 da PG do item **a**, isto é:

$a_7 = 300 \cdot 2^6 = 19.200$

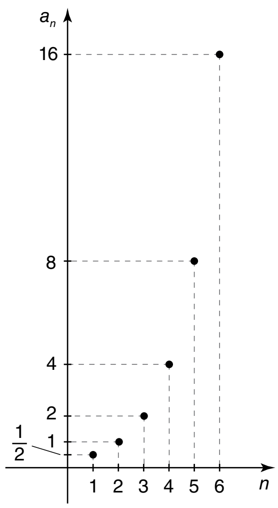
Concluímos, então, que ao final de 3 horas, a partir do instante zero, a população era de 19.200 indivíduos.

c) Como k horas equivalem a $2k$ períodos de 30 minutos, temos que ao final desse tempo a população é dada pelo termo a_{2k+1} da PG do item **a**, isto é:

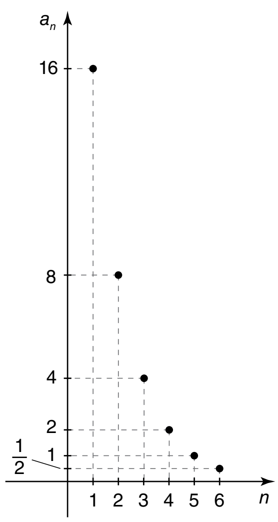
$a_{2k+1} = 300 \cdot 2^{2k}$

Concluímos, então, que ao final de k horas, a partir do instante zero, a população era de $300 \cdot 2^{2k}$ indivíduos.

86. a) Sendo (n, a_n) as coordenadas no plano cartesiano, temos:



b) Sendo (n, a_n) as coordenadas no plano cartesiano, temos:



87. Temos que o termo geral da PG pode ser dado por:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\therefore\ a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Sabemos que esse tipo de termo geral se identifica com uma função exponencial $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Alternativa **b**.

88. Trata-se da função $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

89. O ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f; logo:

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = K^{\frac{1}{2}}$

Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos:

$K = \frac{4}{3}$

Assim: $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.

Para $x = 30$, temos:

$f(30) = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

Concluímos, então, que $a_{30} = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$.

Para $x = 31$, temos:

$f(31) = \left(\frac{4}{3}\right)^{31}$

Logo:

$$\frac{f(31)}{f(30)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{31}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{30}} = \frac{4}{3}$$

$\therefore\ q = \frac{4}{3}$

90. Se existir uma PG nessas condições, então existe uma em que $a_1 = 5$, $a_i = 125$, $a_j = 625$, com $\{i, j\} \subset \mathbb{N}^*$ e $i < j$.

Sabemos que os pontos $(1, 5)$, $(i, 125)$ e $(j, 625)$ pertencem ao gráfico de uma PG se, e somente se, os pontos $(1, \log_5 5)$, $(i, \log_5 125)$ e $(j, \log_5 625)$ — ou seja, $(1, 1)$, $(i, 3)$ e $(j, 4)$ — forem colineares. Supondo que sim, aplicamos o teorema de Tales:

$\frac{4-3}{3-1} = \frac{j-i}{i-1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{j-i}{i-1}$

$\therefore 3i - 2j = 1$ (I)

Observando que $i = 3$ e $j = 4$ satisfazem a igualdade (I), concluímos que existe uma PG com $a_1 = 5$, $a_3 = 125$ e $a_4 = 625$. Assim, uma PG possível seria: $(5, 25, 125, 625)$

91. Se existir uma PG nessas condições, então existe uma em que $a_1 = 2$, $a_i = 4$, $a_j = 5$, com $\{i, j\} \subset \mathbb{N}^*$ e $i < j$.

Sabemos que os pontos $(1, 2)$, $(i, 4)$ e $(j, 5)$ pertencem ao gráfico de uma PG se, e somente se, os pontos $(1, \log_2 2)$, $(i, \log_2 4)$ e $(j, \log_2 5)$ — ou seja, $(1, 1)$, $(i, 2)$ e $(j, \log_2 5)$ — forem colineares. Supondo que sim, aplicamos o teorema de Tales:

$\frac{\log_2 5 - 2}{2-1} = \frac{j-i}{i-1} \Rightarrow \frac{\log_2 5}{1} = \frac{j-i}{i-1}$

$\therefore\ i \log_2 5 - \log_2 5 = j - i \Rightarrow \log_2 \frac{5^i}{5} = j - i$

$\therefore\ 2^{j-i} = 5^{i-1}$

Não existem números naturais i e j, com $i > 1$ e $j > 1$, para os quais ocorra essa última igualdade, uma vez que os logaritmos que encontraríamos para resolver essa equação seriam logaritmos não exatos, o que implicaria em i e j não naturais. Concluímos, então, que não existe PG crescente que contenha os termos 2, 4 e 5.

92. a) Na sequência $(3, 3^2, 3^3, ..., 3^{98}, 3^{99}, 3^{100})$, consideremos os termos 3^k e 3^p, com $k < p \leqslant 100$, tal que $3^k \cdot 3^p = 3^{101}$. O menor valor possível de k é 1, assim:

- para $k = 1$, temos $p = 100$;
- para $k = 2$, temos $p = 99$;
- para $k = 3$, temos $p = 98$;

⋮

- para $k = 50$, temos $p = 51$.

Como k assumiu apenas os valores naturais de 1 a 50, concluímos que há 50 conjuntos com dois elementos distintos da sequência tal que o produto deles é 3^{101}.

b) Na sequência $(3, 3^2, 3^3, ..., 3^{98}, 3^{99}, 3^{100})$, consideremos os termos 3^k e 3^p, com $k < p \leqslant 100$, tal que $3^k \cdot 3^p = 3^{140}$. O menor valor possível de k é 40, assim:

- para $k = 40$, temos $p = 100$;
- para $k = 41$, temos $p = 99$;
- para $k = 42$, temos $p = 98$;

⋮

- para $k = 69$, temos $p = 71$.

Como k assumiu apenas os valores naturais de 40 a 69, concluímos que há 30 conjuntos com dois elementos distintos da sequência tal que o produto deles é 3^{140}.

93. Chamando de x a altura do irmão menor, temos pela propriedade P2:

$(1{,}60)^2 = 1{,}68x \Rightarrow x \approx 1{,}52$

Logo, o irmão menor mede, aproximadamente, 1,52 metros.

Alternativa **c**.

94. Observamos que a sequência (a_n) é uma PG. Como $a_n = 4 \cdot 5^n$, temos:

$a_1 = 4 \cdot 5^1 = 20$

Pela consequência da propriedade P2 da PG, temos que o termo médio ao quadrado é igual ao produto dos extremos. Assim, considerando $a_1 = 20$, $a_n = 4 \cdot 5^n$ e o termo médio $4 \cdot 5^{101}$, temos:

$(4 \cdot 5^{101})^2 = 20 \cdot (4 \cdot 5^n) \Rightarrow 16 \cdot 5^{202} = 80 \cdot 5^n$

$\therefore\ 5^{202} = 5^{n+1} \Rightarrow n + 1 = 202$

$\therefore\ n = 201$

Logo, essa sequência tem 201 termos.

95. Uma sequência de três termos consecutivos com o primeiro não nulo será PG se o quadrado do termo médio for igual ao produto dos outros dois. Então:

$(x - 1)^2 = (-1) \cdot (4x - 1) \Rightarrow x^2 + 2x = 0$

Assim, para que a sequência seja uma PG, devemos ter: $x = 0$ ou $x = -2$.

96. Devemos ter:

$(3x - 2)^2 = 5x(x + 1)$

$\therefore 9x^2 - 12x + 4 = 5x^2 + 5x \Rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$

$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225$

$\therefore x = \dfrac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \dfrac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow x = 4$ ou $x = \dfrac{1}{4}$

- Para $x = 4$, temos a PG (5, 10, 20), que é uma PG crescente.
- Para $x = \dfrac{1}{4}$, temos a PG $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$, que é uma PG oscilante da razão -1.

Logo, para a sequência apresentada ser uma PG crescente devemos ter $x = 4$.

97. Para que uma sequência de três números seja PA, o termo médio deve ser a média aritmética dos outros dois; para ser PG, o termo médio ao quadrado deve ser igual ao produto dos outros dois. Então:

$$\begin{cases} \dfrac{a + c}{2} = 4 \\ (c + 2)a = 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ ac + 2a = 16 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c = 8 - a & \text{(I)} \\ ac + 2a = 16 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$a(8 - a) + 2a = 16$

$\therefore 8a - a^2 + 2a = 16$

$\therefore a^2 - 10a + 16 = 0$

$\Delta = 100 - 64 = 36$

$\therefore a = \dfrac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{10 \pm 6}{2}$

Logo, $a = 8$ ou $a = 2$.

Substituindo a em (I), temos:

$c = 0$ ou $c = 6$

Como, por hipótese, c é positivo, temos $c = 6$. Substituindo c por 6 em (I), concluímos que $a = 2$.

Portanto, $a = 2$ e $c = 6$.

98. Sabemos que:

$(xy)^2 = x \cdot 2x \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Logo, necessariamente y é irracional.

Alternativa **c**.

(Nota: observe que não conseguimos concluir nada a respeito de x. Sendo assim, não é possível afirmar que $\dfrac{y}{x}$ é irracional, uma vez que se x assumisse o valor $\sqrt{2}$, $\dfrac{y}{x}$ seria um número inteiro.)

99. Se a substância tem decaimento percentual constante a cada ano, trata-se de uma PG decrescente.

a) $(2x + 10)^2 = (4x - 60)(x + 41) \Rightarrow x = 40$

Logo, em 2012 a massa dessa substância era:

$4x - 60 = 4 \cdot 40 - 60 = 100$

Ou seja, 100 gramas.

b) De acordo com a tabela e com o valor de x encontrado no item **a**, temos a sequência:

(100, 90, 81)

Determinando a razão q:

$q = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$

Assim, determinando a massa a_{2015}, de 2015:

$a_{2015} = a_{2014} \cdot q = 81 \cdot 0{,}9 = 72{,}9$

Logo, a massa dessa substância no início de 2015 será 72,9 gramas.

100. a) Sendo $a_1 = 3$ e a razão $q = 2$, temos:

$S_{10} = \dfrac{3 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \dfrac{3 \cdot (1 - 1.024)}{-1} = 3.069$

Portanto, a soma dos 10 primeiros termos é 3.069.

b) Sendo $a_1 = 4$ e a razão $q = \dfrac{1}{2}$, temos:

$S_{11} = \dfrac{4 \cdot \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}\right]}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{4 \cdot \left(\dfrac{2.048}{2.048} - \dfrac{1}{2.048}\right)}{\dfrac{1}{2}} =$

$= \left(\dfrac{2.047}{512}\right) \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{2.047}{256}$

Portanto, a soma dos 11 primeiros termos é $\dfrac{2.047}{256}$.

c) Sendo $a_1 = 5$ e a razão $q = -1$, temos:

$S_{50} = \dfrac{5 \cdot \left[1 - (-1)^{50}\right]}{1 - (-1)} = \dfrac{5 \cdot (1 - 1)}{2} = \dfrac{5 \cdot 0}{2} = 0$

Portanto, a soma dos 50 primeiros termos é 0.

d) Sendo $a_1 = 5$ e a razão $q = -1$, temos:

$S_{51} = \dfrac{5 \cdot \left[1 - (-1)^{51}\right]}{1 - (-1)} = \dfrac{5 \cdot (1 + 1)}{2} = 5$

Portanto, a soma dos 51 primeiros termos é 5.

101. Pela fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$765 = \dfrac{a_1(1 - 2^8)}{1 - 2} \Rightarrow -765 = a_1(-255)$

$\therefore a_1 = 3$

Logo, o primeiro termo dessa PG é 3.

102. Temos $a_1 = 5$ e $q = 2$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$S_n = \dfrac{5(1 - 2^n)}{1 - 2} = -5(1 - 2^n) = 5(2^n - 1)$

Alternativa **c**.

103. Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$12.285 = \dfrac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow -4.095 = 1 - 2^n$

$\therefore 2^n = 4.096 \Rightarrow 2^n = 2^{12}$

$\therefore n = 12$

104. Calculando a razão q:

$q = \dfrac{k - \sqrt{k}}{\sqrt{k} - 1} = \dfrac{\sqrt{k} \cdot \left(\sqrt{k} - 1\right)}{\sqrt{k} - 1} = \sqrt{k}$

Temos $q = \sqrt{k}$ e $a_1 = \sqrt{k} - 1$. Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, para $n = 20$, temos:

$S_{20} = \dfrac{\left(\sqrt{k} - 1\right) \cdot \left(1 - \left(\sqrt{k}\right)^{20}\right)}{1 - \sqrt{k}} = \dfrac{-\left(1 - \sqrt{k}\right) \cdot \left(1 - k^{10}\right)}{1 - \sqrt{k}} =$

$= k^{10} - 1$

Alternativa **e**.

105. a) A sequência crescente das quantidades de canetas, lote a lote, é a PG (10, 30, 90, 270, ...). Assim, o número de canetas do 5º lote é dado pelo termo a_5 dessa PG, isto é, $a_5 = 10 \cdot 3^4 = 810$
Concluímos, então, que o 5º lote era constituído de 810 canetas.

b) O número de canetas vendidas até o sexto lote, inclusive, é a soma S_6 dos seis primeiros termos da PG do item **a**, ou seja,
$$S_6 = \frac{10(1 - 3^6)}{1 - 3} \Rightarrow S_6 = 3.640$$
Concluímos, então, que foram vendidas 3.640 canetas nos seis primeiros lotes.

c) O número de canetas vendidas até o lote de número n, inclusive, é a soma S_n dos n primeiros termos da PG do item **a**, ou seja:
$$S_n = \frac{10(1 - 3^n)}{1 - 3} \Rightarrow S_n = 5(3^n - 1)$$
Concluímos, então, que foram vendidas $5(3^n - 1)$ canetas nos n primeiros lotes.

106. Os números de pessoas das gerações anteriores à minha formam uma PG em que a 1ª geração é o primeiro termo, ou seja, $a_1 = 2$, e a razão é $q = 2$. Assim:
$$S_{20} = \frac{2(1 - 2^{20})}{1 - 2} = -2(1 - 2^{20}) =$$
$$= -2(1 - 1.048.576) = 2.097.150$$
Portanto, o número de meus antepassados até a 20ª geração anterior à minha é maior que 2.000.000.
Alternativa **a**.

107. Temos que $a_1 = 256$ e a razão $q = \frac{1}{2}$.

a) Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, para $S_n = 480$:
$$480 = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{240}{256}$$
$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$\therefore n = 4$
Portanto, são necessárias 4 horas.

b) Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, para $S_n = 500$:
$$500 = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{250}{256}$$
$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{128} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{2^7}$$
$$\therefore \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_2 \frac{3}{2^7} \Rightarrow n(\log_2 1 - \log_2 2) =$$
$$= \log_2 3 - 7 \log_2 2$$
$\therefore n = 7 - \log_2 3$
Como n nessa sequência deve ser um número natural, concluímos que não existe n.
No entanto, nesse contexto, podemos dizer que $5 < n < 6$. Logo, o alpinista levou entre 5 e 6 horas.

c) Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, para $S_n = 600$:
$$600 = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{300}{256}$$
$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{11}{64}$$
Como chegamos a uma base positiva resultando em um valor negativo, concluímos que não existe n. Isso significa que, nas condições enunciadas, o alpinista não chegará a percorrer 600 m.

108. a) Da PG, temos $q = 5^2$ e $a_1 = \frac{1}{5^{20}}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos para $n = 21$:
$$P_{21} = \left(\frac{1}{5^{20}}\right)^{21} \cdot 5^{20 \cdot 21} = 1$$
Portanto, o produto dos 21 primeiros termos da PG é 1.

b) Da PG, temos $q = 2$ e $a_1 = \frac{1}{256}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos para $n = 18$:
$$P_{18} = \left(\frac{1}{256}\right)^{18} \cdot 2^{\frac{17 \cdot 18}{2}} = \left(\frac{1}{2^8}\right)^{18} \cdot 2^{153} = 2^9 = 512$$
Portanto, o produto dos 18 primeiros termos da PG é 512.

c) Da PG, temos $q = \sqrt{2}$ e $a_1 = \sqrt{2}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos para $n = 16$:
$$P_{16} = \left(\sqrt{2}\right)^{16} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{15 \cdot 16}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{136} = 2^{68}$$
Portanto, o produto dos 16 primeiros termos da PG é 2^{68}.

109. Da PG, temos $q = 2k^3$ e $a_1 = \frac{2}{k^{25}}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos para $n = 20$:
$$P_{20} = \left(\frac{2}{k^{25}}\right)^{20} \cdot (2k^3)^{\frac{19 \cdot 20}{2}} = \frac{2^{20}}{k^{500}} \cdot (2k^3)^{190} = \frac{2^{20} \cdot 2^{190} \cdot k^{570}}{k^{500}} =$$
$$= 2^{210} \cdot k^{70} = (2^3)^{70} \cdot k^{70} =$$
$$= (2^3 \cdot k)^{70} = (8k)^{70}$$
Portanto, o produto dos 20 primeiros termos da PG é $(8k)^{70}$.
Alternativa **d**.

110. Aplicando a fórmula $P^n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$ para $a_1 = 1$ e $P_8 = 81$, temos:
$$81 = 1^8 \cdot q^{\frac{7 \cdot 8}{2}} \Rightarrow 81 = q^{28}$$
$$\therefore q = \pm \sqrt[28]{3^4} = \pm \sqrt[7]{3}$$
Como a PG é crescente, deduzimos que $q = \sqrt[7]{3}$; logo, a PG é $\left(1, \sqrt[7]{3}, \sqrt[7]{3^2}, \sqrt[7]{3^3}, \sqrt[7]{3^4}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{3^6}, 3\right)$.

111. Aplicando a fórmula $P^n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$ para $a_1 = 1$, $q = \sqrt{3}$ e $P_n = 3^{14}$, temos:
$$3^{14} = (1)^n \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}} \Rightarrow 3^{\frac{(n-1)n}{4}} = 3^{14}$$
$$\therefore \frac{(n-1)n}{4} = 14 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$$
$\therefore n = 8$ ou $n = -7$
Como n representa o número de termos, concluímos que $n = 8$, ou seja, 8 termos.
Alternativa **a**.

112. a) Temos $a_1 = 25$ e $q = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{25}{1-\frac{1}{5}} \Rightarrow S_\infty = \frac{125}{4}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{125}{4}$.

b) Temos $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{3}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{1}{3}$.

c) Temos $a_1 = 6$ e $q = 0{,}1$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{6}{1-0{,}1} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{3}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{20}{3}$.

d) Não existe, pois a razão da PG é maior que 1.

113. a) Chamando de D a fração geratriz de 2,4444..., temos:

$D = 2 + 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots$

Usando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ para a soma infinita $(0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots)$, que possui primeiro termo $a_1 = 0{,}4$ e razão $q = 0{,}1$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}4}{1-0{,}1} = \frac{0{,}4}{0{,}9} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{9}$$

$$\therefore D = 2 + \frac{4}{9}$$

$$\therefore D = \frac{22}{9}$$

b) Chamando de D a fração geratriz de 3,51111..., temos:

$D = 3{,}5 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots$

Usando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ para a soma infinita $(0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots)$, que possui primeiro termo $a_1 = 0{,}01$ e razão $q = 0{,}1$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}01}{1-0{,}1} = \frac{0{,}01}{0{,}9} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{90}$$

$$\therefore D = 3{,}5 + \frac{1}{90} = \frac{35}{10} + \frac{1}{90}$$

$$\therefore D = \frac{158}{45}$$

114. $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = 5^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = 5$

115. Da PG, temos $q = \frac{1}{10}$.

Sabendo que $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ é a soma dos infinitos termos da PG, temos:

$$200 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{10}} \Rightarrow a_1 = 180$$

Como $a_1 = 10x$, temos que $x = 18$.

116. Nessa sequência, cada lado de um triângulo qualquer, a partir do segundo, é base média do triângulo precedente e, portanto, o perímetro de cada triângulo, a partir do segundo, é metade do perímetro do triângulo precedente. Assim, os perímetros, em centímetro, formam a PG infinita, com $a_1 = 20$ e $q = \frac{1}{2}$:

$$\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$$

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{1-\frac{1}{2}} = 40$$

Logo, a soma dos perímetros dos infinitos triângulos é 40 cm.

117. Nessa sequência, cada área dos quadrados sombreados soma metade do que somam as áreas dos quadrados sombreados da figura anterior. Assim, as áreas, em centímetro quadrado, formam a PG infinita, com $a_1 = 16$ e $q = \frac{1}{2}$:

(16, 8, 4, 2, ...)

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$$

Logo, a soma das áreas dos quadrados sombreados nas infinitas figuras é 32 cm^2.

118. As distâncias, em metro, percorridas em alguns segundos após a freada são os primeiros termos da PG $\left(20, 5, \frac{5}{4}, \ldots\right)$. Como a soma dos infinitos termos dessa PG é $\frac{80}{3} \approx 26{,}66$, que é menor que 100, concluímos que não haverá o choque do caminhão com a pedra.

119. **1º modo**

Sabemos que o barco dos contrabandistas está a 10 km do barco dos policiais.

Como os policiais desenvolvem o dobro da velocidade dos contrabandistas, eles percorrem o dobro da distância percorrida pelos contrabandistas em um mesmo intervalo de tempo.

Então, quando os contrabandistas percorrerem 10 km, os policiais percorrerão o dobro, ou seja, 20 km, alcançando assim o barco dos contrabandistas.

Portanto, o barco da polícia deverá percorrer 20 km para alcançar os contrabandistas.

2º modo

Quando o barco da polícia percorrer a distância inicial $d_1 = 10$ km, o barco dos criminosos terá percorrido 5 km; assim, a distância entre os barcos será $d_2 = 5$ km. Quando o barco da polícia percorrer mais a distância $d_2 = 5$ km, o barco dos criminosos terá percorrido mais 2,5 km; assim, a distância entre os barcos será $d_3 = 2{,}5$ km. Quando o barco da polícia percorrer mais a distância $d_3 = 2{,}5$ km, o barco dos criminosos terá percorrido mais 1,25 km; assim, a distância entre os barcos será $d_4 = 1{,}25$ km. E assim, sucessivamente, temos a PG (10; 5; 2,5; 1,25; ...) formada pelas distâncias d_1, d_2, d_3, d_4, ..., em que $a_1 = 10$ e $q = 0{,}5$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{10}{1 - 0{,}5} = 20.$$

Concluímos, então, que o barco da polícia percorrerá 20 km até alcançar o barco dos criminosos.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. Calculando o valor dos termos da sequência ($f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ...), obtemos a sequência crescente dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...), em que $f(200)$ é o 201º termo. Logo, $f(200) = 200$.
Alternativa **a**.

2. Temos que $a_1 = x$, $a_2 = 2$ e descobrindo os demais elementos até a_{10}:

$a_3 = x + 2$ | $a_7 = 5x + 16$
$a_4 = x + 4$ | $a_8 = 8x + 26$
$a_5 = 2x + 6$ | $a_9 = 13x + 42$
$a_6 = 3x + 10$ | $a_{10} = 21x + 68$

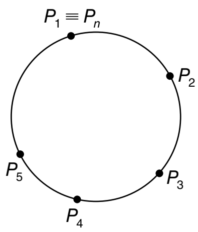
Somando todos os dez elementos, obtemos $S_{10} = 55x + 176$. Queremos $S_{10} = 396$, assim:
$55x + 176 = 396 \Rightarrow x = 4$
Alternativa **e**.

3. Sabendo que $S_n = 3n^2 + 2$, temos que o oitavo termo a_8 pode ser encontrado fazendo $S_8 - S_7$; assim:
$a_8 = S_8 - S_7 = 3 \cdot 8^2 + 2 - (3 \cdot 7^2 + 2) = 45$
Alternativa **e**.

4. Temos:
$a_1 = 1$
$a_2 = f(1) = 1 + 1 = 2$ | $a_7 = f(1) = 2$
$a_3 = f(2) = 2 + 1 = 3$ | $a_8 = f(2) = 3$
$a_4 = f(3) = 3 + 1 = 4$ | $a_9 = f(3) = 4$
$a_5 = f(4) = 4 + 1 = 5$ | $a_{10} = f(4) = 5$
$a_6 = f(5) = \frac{5}{5} = 1$ | $a_{11} = f(5) = 1$

Observamos que a sequência (a_n) é formada apenas pelos números 1, 2, 3, 4 e 5 repetidos seguidamente nessa ordem. Assim, dividindo 123 por 5, temos:
$123 = 24 \cdot 5 + 3$
Portanto:
$a_{123} = a_3 = 3$

5.



Para P_n, a circunferência é dividida em $(n - 1)$ arcos.

a) Para $\alpha = 30°$, temos $\dfrac{360°}{30°} = 12$ arcos.
Logo, $n = 13$.

b) $n - 1 = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow n = \dfrac{360° + \alpha}{\alpha}$

6. Temos que, para uma sequência de n termos, a_i e a_j são equidistantes dos extremos se $i = 1 + m$ e $j = n - m$, para qualquer número natural m, com $m \leqslant n$.
Logo:
$i + j = (1 + m) + (n - m) \Rightarrow i + j = 1 + n$
Alternativa **a**.

7. Como a_k e a_{k+7} são equidistantes dos extremos de uma sequência de 20 termos, temos da questão 6:
$k + k + 7 = 1 + 20 \Rightarrow k = 7$

8. Sabemos que a razão r de uma PA é a diferença entre um termo e seu precedente. Logo:

a) $r = a_{10} - a_9 = 15 - 6 = 9$

b) $r = b_{k+1} - b_k = 5 - 8 = -3$

c) $r = c_2 - c_1 = \dfrac{2k^2}{k^2 - 1} - \dfrac{k}{k - 1} = \dfrac{2k^2 - k(k + 1)}{k^2 - 1} =$
$= \dfrac{2k^2 - k^2 - k}{k^2 - 1} = \dfrac{k^2 - k}{k^2 - 1} = \dfrac{k \cdot (k - 1)}{(k + 1)(k - 1)} = \dfrac{k}{k + 1}$

9. Nessa PA de razão $r = \sqrt{3} - 1$ e $a_8 = \sqrt{3} + 1$, temos:
$a_9 = a_8 + r$ e $a_7 = a_8 - r$
Então:
$a_9 = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1$
$\therefore a_9 = 2\sqrt{3}$
$a_7 = \sqrt{3} + 1 - \left(\sqrt{3} - 1\right)$
$\therefore a_7 = 2$

10. a) Dado $a_n = n^3 - n$, temos:
$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^3 - (n + 1) - (n^3 - n) = 3n^2 + 3n$
Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, essa sequência não é uma PA.

b) Dado $b_n = \dfrac{5n + 2}{4}$, temos:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{5(n + 1) + 2}{4} - \frac{5n + 2}{4} =$$
$$= \frac{5n + 5 + 2 - 5n - 2}{4} = \frac{5}{4}$$

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, essa sequência é uma PA.

11. Como a sequência é uma PA, temos:

$$y = \frac{x + 6}{2} \quad \text{(I)}$$

Como seus elementos representam os lados de um triângulo retângulo e estão em ordem crescente, temos:
$6^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36 \quad$ (II)
Substituindo (I) em (II):

$$x^2 + \left(\frac{x + 6}{2}\right)^2 = 36 \Rightarrow 5x^2 + 12x + 36 = 144$$

$\therefore 5x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow x = -6$ ou $x = 3{,}6$
Como x representa uma medida de comprimento, $x = 3{,}6$. E, portanto, $y = 4{,}8$.
Logo, a medida do menor cateto desse triângulo é 3,6 cm.

12. Sendo a a medida do menor ângulo interno desse quadrilátero e r a razão da PA, podemos representar a PA por $(a, a + r, a + 2r, a + 3r)$.
Como o último elemento é o dobro do primeiro elemento, temos:
$a + 3r = 2a \Rightarrow a = 3r$ (I)
Por ser um quadrilátero convexo, sabemos que os ângulos internos somam 360°. Assim:
$a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) = 360 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 6r = 360$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$4 \cdot (3r) + 6r = 360 \Rightarrow r = 20$
E, portanto, $a = 60$.
Logo, o maior ângulo interno desse quadrilátero mede $2 \cdot 60°$, ou seja, 120°.

13. Sendo x a medida do menor ângulo externo desse quadrilátero e α a razão da PA, podemos representar a PA por $(x, x + \alpha, x + 2\alpha)$.
Sabemos que a soma dos ângulos externos de um triângulo resulta em 360°; assim:
$x + (x + \alpha) + (x + 2\alpha) = 360 \Rightarrow 3x + 3\alpha = 360$
$\therefore x + \alpha = 120$
Sabemos também que a soma de um ângulo interno com seu ângulo externo é 180° e a soma do menor ângulo interno α soma-se com o maior ângulo externo; assim:
$x + 2\alpha + \alpha = 180 \Rightarrow x + 3\alpha = 180$
Temos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} x + \alpha = 120 \\ x + 3\alpha = 180 \end{cases} \Rightarrow x = 90 \text{ e } \alpha = 30$$
Logo, a medida do menor ângulo externo desse triângulo é o triplo de α.
Alternativa **c**.

14. A sequência (1, 3, 5, 7, ...) é uma PA cujo primeiro elemento é $a_1 = 1$ e a razão é $r = 2$. Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$ obtemos a_{95}:
$a_{95} = 1 + 94 \cdot 2 = 189$
Alternativa **d**.

15. Se a razão é $r = 4$ e $a_1 = 2$, aplicando a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 2$
e
$a_{n+1} = 2 + [(n + 1) - 1] \cdot 4 = 4n + 2$
Logo:
$a_{n+1} + a_n = 4n + 2 + (4n - 2) = 8n$
Alternativa **d**.

16. Temos:
$a_1 = 729p + 5$ e $r = 2 - 9p$
Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos:
$$167 = 729p + 5 + (n - 1)(2 - 9p) \Rightarrow n - 1 = \frac{162 - 729p}{2 - 9p}$$
$$\therefore n - 1 = \frac{81(2 - 9p)}{2 - 9p} \Rightarrow n - 1 = 81$$
$\therefore n = 82$
Logo, a PA tem 82 termos.

17. Temos que $a_1 = 18$ e $a_7 = 96$; assim:
$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 96 = 18 + 6r$
$\therefore r = 13$
E, portanto:
$a_3 = a_1 + 2r = 18 + 2 \cdot 13 = 44$
Alternativa **b**.

18. Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$a_1 + a_5 = 9 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 4r) = 9$
$\therefore 2a_1 + 4r = 9$
$a_2 + a_3 = 8 \Rightarrow (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 8$
$\therefore 2a_1 + 3r = 8$
Daí temos o sistema:
$$\begin{cases} 2a_1 + 4r = 9 \\ 2a_1 + 3r = 8 \end{cases} \Rightarrow r = 1 \text{ e } a_1 = 2{,}5$$
Assim, calculando a_{10}:
$$a_{10} = a_1 + 9r = 2{,}5 + 9 = 11{,}5 = \frac{23}{2}$$
Alternativa **b**.

19. Notamos que na 5ª coluna há uma PA de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $r = 6$. Assim:
$a_n = 5 + 6(n - 1)$
Notamos que n representa o número da linha. Assim, calculando a_{143}:
$a_{143} = 5 + 6 \cdot 142 = 857$
Como a cada vez que se atinge o valor de 600 a escrita se repete na mesma disposição, basta subtrair 600 do resultado 857, ou seja, $857 - 600 = 257$.
Logo, o número é 257.
Alternativa **d**.

20. Os números n, com $3 \leqslant n < 1.000$, que resultam da soma de três números inteiros consecutivos são:
$a_1 = 0 + 1 + 2 = 3$
$a_2 = 1 + 2 + 3 = 6$
$a_3 = 2 + 3 + 4 = 9$
$\vdots$
$a_n = 332 + 333 + 334 = 999$
Logo, esses números formam uma PA de razão 3.
Sendo $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$999 = 3 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n = 999$
$\therefore n = 333$
Alternativa **a**.

21. Sabemos que $a_m = a_k + (m - k) \cdot r$; então:
$a_{18} = a_7 + (18 - 7) \cdot r \Rightarrow k - 1 = 2k - 6 + 11 \cdot r$
$$\therefore r = \frac{5 - k}{11}$$

22. Pela fórmula do termo geral da PA, temos $a_k = 37 + (k - 1) \cdot 2$, em que k é um número natural não nulo. Para que a_k seja um múltiplo de k, deve existir um número natural n tal que $a_k = nk$, ou seja:
$37 + (k - 1) \cdot 2 = nk \Rightarrow 35 + 2k = nk$
$$\therefore n = \frac{35}{k} + 2$$
O maior número natural k tal que n também seja natural é 35.
Assim, concluímos que o maior valor possível de a_k é:
$a_{35} = 37 + 34 \cdot 2 \Rightarrow a_{35} = 105$

23. Supondo o primeiro termo $a_1 = 100$, podemos dizer que há uma PA de razão 4 se conseguirmos escrever 600 como elemento a_n dessa PA, ou seja:
$600 = 100 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = 126$
Portanto, uma PA possível seria uma de 126 termos, com primeiro termo 100 e último termo 600.

24. A diferença entre 62 e 46 é 16 e a diferença entre 326 e 62 é 264. Desse modo, a maior razão possível será o maior divisor comum entre 16 e 264, ou seja, $r = 8$.

Sabendo que $a_{21} = 46$ e que $a_{21} = a_1 + 20r$, temos:

$46 = a_1 + 20 \cdot 8 \Rightarrow a_1 = -114$

Aplicando a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$ para $a_n = 326$:

$326 = -114 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 56$

Logo, 326 é o quinquagésimo sexto termo dessa PA.

Alternativa **b**.

25. **a)** Temos que:

$a_n = f(n) = 7n - 10$

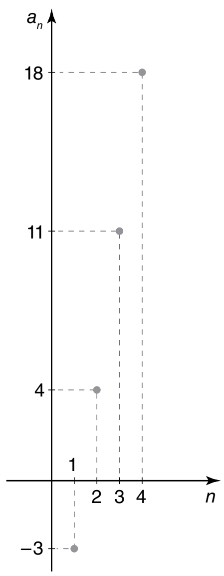
$a_{n+1} = f(n + 1) = 7(n + 1) - 10 \Rightarrow a_{n+1} = 7n - 3$

Logo:

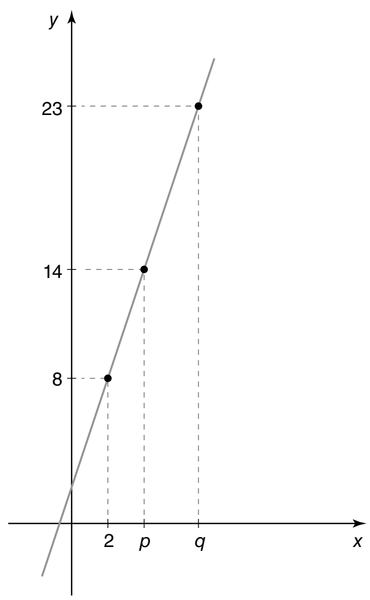
$a_{n+1} - a_n = 7n - 3 - (7n - 10) = 7$

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, essa sequência é uma PA.

b) A representação da PA $(-3, 4, 11, 18, \ldots)$ é:



26. Representando graficamente a PA(a_n), temos que os pontos (2, 8), (p, 14) e (q, 23) são colineares:



Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{p - 2}{6} = \frac{q - 2}{15} \Rightarrow q = \frac{5p}{2} - 3$$

Como p e q são números naturais, com $2 < p < q$, temos que o menor valor possível de p é 4, com o que obtemos $q = 7$. Logo, a PA de maior razão possível é aquela em que $p = 4$ e $q = 7$.

b) Pelo item **a**, temos que: $a_2 = 8$ e $a_4 = 14$. Assim, indicando por r a razão da PA, temos:

$a_4 = a_2 + 2r \Rightarrow 14 = 8 + 2r$

$\therefore r = 3$

27. Supondo que exista uma PA(a_n) de razão r nessas condições, isto é, $a_1 = 0$, $a_p = \sqrt{2}$ e $a_q = 2$, temos:

$$\begin{cases} a_p = a_1 + (p - 1)r \\ a_q = a_1 + (q - 1)r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = 0 + (p - 1)r \\ 2 = 0 + (q - 1)r \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r = \dfrac{\sqrt{2}}{p - 1} \\ r = \dfrac{2}{q - 1} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{p - 1} = \frac{2}{q - 1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{p - 1}{q - 1} \quad \text{(Absurdo)}$$

Essa última igualdade é impossível, pois p e q são números naturais maiores que 1; logo $p - 1$ e $q - 1$ são números naturais e, portanto, o segundo membro da igualdade é um número racional, enquanto que o primeiro membro é um número irracional.

Como o fato de admitirmos a existência da PA nos conduziu a um absurdo, concluímos que não existe tal PA.

28. O termo médio a_{49} é tal que:

$$49 = \frac{1 + n}{2} \Rightarrow n = 97$$

Alternativa **b**.

29. Sabemos que o termo médio a_k é a média aritmética entre o primeiro termo a_1 e o último, a_n. Então:

$$a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow 4a_1 = \frac{a_1 + 42}{2}$$

$\therefore a_1 = 6$

30. Sabemos que em três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a média aritmética dos outros dois.

a) $2x^2 - 1 = \dfrac{(x - 1) + (1 - 3x)}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\therefore x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -1$

- Para $x = \dfrac{1}{2}$, temos:

  $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

- Para $x = -1$, temos:

  $(-2, 1, 4)$

Como a PA deve ser crescente, concluímos que $x = -1$.

b) $y + 8 = \dfrac{(4y + 7) + (9 - 2y)}{2} \Rightarrow 2y + 16 = 2y + 16$

$\therefore 0 = 0$ (Verdadeiro)

Logo, para qualquer valor de y a sequência é uma PA.

c) $3z + 6 = \dfrac{(5z - 1) + (z + 9)}{2} \Rightarrow 6z + 12 = 6z + 8$

$\therefore 12 = 8$ (Falso)

Logo, não existe valor real de y para a sequência ser uma PA.

31. Sabendo que a PA é $\left(3 - x,\ x,\ \sqrt{9 - x},\ ...\right)$, temos:
$a_1 = 3 - x$, $a_2 = x$ e $a_3 = \sqrt{9 - x}$
Como na PA a razão é constante, temos:
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow x - (3 - x) = \sqrt{9 - x} - x$
$\therefore x - 3 + x = \sqrt{9 - x} - x \Rightarrow 3x - 3 = \sqrt{9 - x}$
Para resolver a equação $3x - 3 = \sqrt{9 - x}$, elevamos a equação ao quadrado nos dois membros:
$9x^2 - 18x + 9 = 9 - x \Rightarrow 9x^2 - 17x = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = \dfrac{17}{9}$
Verificando o resultado:
- Para $x = 0$:
  $3 \cdot 0 - 3 = \sqrt{9 - 0} \Rightarrow -3 = 3$ (Falso)
- Para $x = \dfrac{17}{9}$:
  $3 \cdot \dfrac{17}{9} - 3 = \sqrt{9 - \dfrac{17}{9}} \Rightarrow \dfrac{8}{3} = \sqrt{\dfrac{64}{9}}$ (Verdadeiro)
  Logo, $x = \dfrac{17}{9}$.

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 6$, concluímos:
$a_6 = 3 - x + (6 - 1)(2x - 3) = 9x - 12$
Substituindo x por $\dfrac{17}{9}$:
$a_6 = 9 \cdot \dfrac{17}{9} - 12 = 5$
Alternativa **a**.

32. Temos:
$a_1 = \log_2 x$
$a_2 = \log_4 4x = \log_4 4 + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1 + \dfrac{\log_2 x}{2}$
$a_3 = \log_8 8x = \log_8 8 + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = 1 + \dfrac{\log_2 x}{3}$
Sabemos que em três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a média aritmética dos outros dois. Assim:
$$1 + \frac{\log_2 x}{2} = \frac{\log_2 x + \left(1 + \frac{\log_2 x}{3}\right)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 + \log_2 x = \log_2 x + 1 + \frac{\log_2 x}{3}$$
$\therefore \dfrac{\log_2 x}{3} = 1 \Rightarrow \log_2 x = 3$
$\therefore x = 8$
Logo:
$a_1 = \log_2 x = \log_2 8 = 3$
$a_2 = 1 + \dfrac{\log_2 x}{2} = 1 + \dfrac{\log_2 8}{2} = \dfrac{5}{2}$
$a_3 = 1 + \dfrac{\log_2 x}{3} = 1 + \dfrac{\log_2 8}{3} = 2$
E, portanto:
$a_1 + a_2 + a_3 = 3 + \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{15}{2}$
Alternativa **b**.

33. Sendo $r = a_{n+1} - a_n$, temos:
$r = \dfrac{11}{4} - 2 = \dfrac{3}{4}$
Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$a_{20} = 2 + 19 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{65}{4}$
Sabemos que a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.
Logo:
$$S_{20} = \frac{\left(2 + \frac{65}{4}\right) \cdot 20}{2} = \frac{365}{2}$$

34. Temos que $n = 100$, $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$. Assim:
$a_{98} = a_3 + 95r \Rightarrow r = \dfrac{80}{95}$
$\therefore r = \dfrac{16}{19}$
Para determinar a_1 podemos fazer:
$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 10 = a_1 + 2 \cdot \dfrac{16}{19}$
$\therefore a_1 = \dfrac{158}{19}$
Para determinar a_{100} podemos fazer:
$a_{100} = a_{98} + 2r = 90 + 2 \cdot \dfrac{16}{19}$
$\therefore a_{100} = \dfrac{1.742}{19}$
Logo, aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ para $n = 100$:
$$S_{100} = \frac{\left(\frac{158}{19} + \frac{1.742}{19}\right)100}{2} = 5.000$$
Alternativa **d**.

35. Temos a seguinte sequência: (1, 2, 3, 4, ...)
Observamos que se trata de uma PA de primeiro termo 1 e razão 1. Logo, o último termo será 100. Calculando a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência:
$S_{100} = \dfrac{(1 + 100)100}{2} = 5.050$
Determinando a média aritmética m desses termos:
$m = \dfrac{S_{100}}{100} = \dfrac{5.050}{100} = 50,5$
Alternativa **b**.

36. Temos:
$a_{30} = 12 + 29 \cdot 7 = 215$ e $a_{42} = 12 + 41 \cdot 7 = 299$
Assim, a soma S pedida é a soma dos 13 termos da PA (215, 222, 229, ..., 299), ou seja:
$S = \dfrac{(215 + 299) \cdot 13}{2} = 3.341$

37. Os múltiplos de 13 entre 100 e 1.000 formam uma PA de razão 13, com termo inicial $a_1 = 13 \cdot 8 = 104$ e último termo $a_n = 13 \cdot 76 = 988$.
Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$988 = 104 + (n - 1) \cdot 13 \Rightarrow n = 69$
Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$S_{69} = \dfrac{(104 + 988) \cdot 69}{2} = 37.674$

38. A sequência entre 100 e 1.000 que tem o dígito das unidades igual a 7 é:
(107, 117, 127, ..., 997)
Logo, é uma sequência cujo primeiro termo é $a_1 = 107$, último termo $a_n = 997$ e razão $r = 10$.
Assim, aplicando a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$997 = 107 + (n - 1)10 \Rightarrow n = 90$
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, para $n = 90$:
$S_{90} = \dfrac{(107 + 997)90}{2} = 49.680$
Alternativa **a**.

39. A lei de formação $a_j = 2j + 1$, com $j \in \mathbb{N}^*$ e $j \leqslant n$, determina a PA:
$(3, 5, 7, ..., 2n + 1)$

Sabendo que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, temos:

$143 = \dfrac{(3 + 2n + 1) \cdot n}{2} \Rightarrow 286 = 4n + 2n^2$

$\therefore\ n^2 + 2n - 143 = 0 \Rightarrow n = 11$ ou $n = -13$

Como n deve ser natural não nulo, concluímos que $n = 11$.

40. **a)** Temos:
$(0, 2, 4, ..., 2n - 2)$

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ para $a_1 = 0$ e $a_n = 2n - 2$:

$S_n = \dfrac{(0 + 2n - 2)n}{2} \Rightarrow S_n = n^2 - n$

b) Temos:
$(2, 4, 6, ..., 2n)$

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ para $a_1 = 2$ e $a_n = 2n$:

$S_n = \dfrac{(2 + 2n)n}{2} \Rightarrow S_n = n^2 + n$

41. Temos que $a_1 = k + 3$, $a_{20} = 20k + 3$ e $S_{20} = 165$.

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$:

$165 = \dfrac{(k + 3 + 20k + 3)20}{2} \Rightarrow 210k + 60 = 165$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{2}$

Alternativa **a**.

42. **a)** Como na PA a razão é constante, temos:
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 6x - (1 + x) = 2x^2 + 4 - 6x$
$\therefore\ 5x - 1 = 2x^2 + 4 - 6x \Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0$
$\therefore\ x = 5$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

b) Adotando $x = \dfrac{1}{2}$, temos:

$a_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$a_2 = 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$

Calculando a razão r:

$r = a_2 - a_1 = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

Assim, calculando a_{100}:

$a_{100} = a_1 + 99r = \dfrac{3}{2} + 99 \cdot \dfrac{3}{2} = 150$

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, para $n = 100$:

$S_{100} = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2} + 150\right)100}{2} = 7.575$

Logo, a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de x encontrado no item **a** é 7.575.

43. **a)** Chamando de S essa soma, temos:
$S = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_n$
Observamos que é uma soma de $\dfrac{n}{2}$ termos.
Escrevendo os termos dessa soma em função de a_1 e r:
$S = (a_1 + r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 5r) + ... +$
$+ [a_1 + (n - 1)r] =$
$= a_1 \cdot \dfrac{n}{2} + [r + 3r + 5r + ... (n - 1)r]$

Notamos que a segunda parcela dessa soma é formada pela soma dos termos finitos de uma PA cujo primeiro termo é r e último termo é $(n - 1)r$, também com $\dfrac{n}{2}$ termos.

Assim:

$S = \dfrac{a_1 n}{2} + \dfrac{\left[r + (n - 1)r\right] \cdot \dfrac{n}{2}}{2} = \dfrac{a_1 n}{2} + \dfrac{nr \cdot \dfrac{n}{2}}{2} =$

$= \dfrac{a_1 n}{2} + \dfrac{n^2 r}{4}$

$\therefore\ S = \dfrac{(2a_1 + nr)n}{4}$

b) Para a sequência dada, temos $a_1 = -224$ e $r = 4$.
Determinando a_n:
$a_n = -224 + (n - 1)4 \Rightarrow a_n = 4n - 228$
Chamando de S a soma dos termos da PA dada, queremos $S > 0$. Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$:

$S > 0 \Rightarrow \dfrac{(-224 + 4n - 228)n}{2} > 0$

$\therefore\ (4n - 452)n > 0$

Resolvendo essa inequação, temos $n < 0$ ou $n > 113$.

Sabemos que $n > 0$. Então, concluímos que o valor mínimo que satisfaz essa condição é $n = 114$.
Logo, são 114 termos.

44. Temos que $S_{100} = 100$ e $S_{200} - S_{100} = 200 \Rightarrow S_{200} = 300$.

Assim: $S_{100} = 100 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = 100$

$\therefore\ a_1 + a_{100} = 2 \quad \text{(I)}$

$S_{200} = 300 \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_{200}) \cdot 200}{2} = 300$

$\therefore\ a_1 + a_{200} = 3 \quad \text{(II)}$

Substituindo a_{100} por $a_1 + 99r$ em (I) e a_{200} por $a_1 + 199r$ em (II), temos:

$\begin{cases} a_1 + a_1 + 99r = 2 \\ a_1 + a_1 + 199r = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 99r = 2 \\ 2a_1 + 199r = 3 \end{cases}$

$\therefore\ r = \dfrac{1}{100} = 10^{-2}$ e $a_1 = \dfrac{101}{200}$

Sabemos que a diferença entre o segundo e o primeiro termos dessa progressão, nessa ordem, é a própria razão r, ou seja, 10^{-2}.
Alternativa **c**.

45. Observamos que a sequência do triângulo é formada pelos números naturais ímpares. Notamos também que na 1ª linha temos um elemento, na 2ª linha, temos dois elementos e assim por diante. Logo, na 30ª linha teremos os trinta últimos elementos dessa PA de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 2$.
Para calcular o número de termos colocados até a 30ª linha, podemos considerar a seguinte sequência:
$(1, 2, 3, ..., 30)$

Assim:

$S_{30} = \dfrac{(1 + 30) \cdot 30}{2} = 465$

Ou seja, foram colocados 465 termos. Queremos descobrir qual é o 466º termo da sequência dos números naturais ímpares. Assim:

$a_{466} = a_1 + 465 \cdot r \Rightarrow a_{466} = 1 + 465 \cdot 2$

$\therefore\ a_{466} = 931$

Alternativa **c**.

46. Temos que:

$S_{10} = 10 + 25d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ para $n = 10$:

$S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_1 + 9d)10}{2} \Rightarrow (2a_1 + 9d)5 = 10 + 25d$

$\therefore\ a_1 + 2d = 1 \quad \text{(I)}$

Temos também que:

$S_{50} = 4.550$

$a_{50} = a_1 + 49d$

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ para $n = 50$:

$S_{50} = \dfrac{(a_1 + a_1 + 49d)50}{2} \Rightarrow (2a_1 + 49d)25 = 4.550$

$\therefore\ 2a_1 + 49d = 182 \quad \text{(II)}$

Logo, temos o sistema formado por (I) e (II):

$\begin{cases} a_1 + 2d = 1 \\ 2a_1 + 49d = 182 \end{cases} \Rightarrow d = 4 \text{ e } a_1 = -7$

Assim, calculando $d - a_1$ encontramos 11.

Alternativa **d**.

47. **a)** Temos que $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG; então:

$q = \dfrac{4}{\frac{8}{3}} \Rightarrow q = \dfrac{3}{2}$

b) Sendo $q = \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$, obtemos:

$q = \dfrac{\frac{2}{5}}{3} \Rightarrow q = \dfrac{2}{15}$

c) Sendo $q = \dfrac{c_{k+1}}{c_k}$, obtemos:

$q = \dfrac{k^2 - 1}{k - 1} \Rightarrow q = k + 1 \text{ para } k \neq 1$

48. $a_{15} = a_{14} \cdot q \Rightarrow a_{14} = \dfrac{a_{15}}{q} = \dfrac{k^3 + 1}{k + 1}$

$\therefore\ a_{14} = \dfrac{(k + 1)(k^2 - k + 1)}{(k + 1)} \Rightarrow a_{14} = k^2 - k + 1$

49. **a)** Temos que $q = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ é razão da PG. Então:

$q = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{k}} \Rightarrow q = \dfrac{k}{3}$

Como $k > 3$, temos que $q > 1$ e $a_1 > 0$. Logo, a PG é crescente.

b) Sendo $q = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, temos:

$q = \dfrac{a^2}{a} = a$

Como $a > 1$, temos que o primeiro termo da PG é positivo e a razão é maior que 1. Logo, a PG é crescente.

c) Sendo $q = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, temos:

$q = \dfrac{\frac{t^2 - 9}{t + 3}}{t - 3} = 1$

Como $q = 1$, temos que a PG é constante.

d) Temos que $q = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$; então:

$q = \dfrac{5a^5}{5a^2} = a^3$

Como $a < 0$, temos que $q < 0$. Logo, a PG é oscilante.

50. **a)** (8; 4; 2; 1; 0,5)

b) Sim, pois cada termo, a partir do segundo, é encontrado multiplicando-se o termo anterior pela constante $q = \dfrac{1}{2}$.

51. Sabemos que em três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a média aritmética dos outros dois; assim:

$1 = \dfrac{m + n}{2} \Rightarrow m + n = 2$

Sabemos que em três termos consecutivos de uma PG o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos; assim:

$n^2 = -8m$

Temos:

$\begin{cases} m + n = 2 \Rightarrow n = 2 - m \quad \text{(I)} \\ n^2 = -8m \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II):

$(2 - m)^2 = -8m \Rightarrow 4 - 4m + m^2 + 8m = 0$

$\therefore\ m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2$

Substituindo m por -2 em (I):

$n = 2 - (-2) \Rightarrow n = 4$

Logo, $n = 4$.

Alternativa **d**.

52. Sabemos que, em um triângulo isósceles, a altura correspondente ao lado diferente divide a base em dois segmentos iguais. Assim, ficamos com dois triângulos retângulos de hipotenusa L, altura h e base $\dfrac{L}{4}$. Assim:

$L^2 = h^2 + \left(\dfrac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \dfrac{15L^2}{16}$

$\therefore\ h = \dfrac{L\sqrt{15}}{4}$

Determinando a área A do triângulo:

$A = \dfrac{\frac{L}{2} \cdot \frac{L\sqrt{15}}{4}}{2} \Rightarrow A = \dfrac{L^2\sqrt{15}}{16}$

Pelo problema, temos que (L, h, A) formam uma PG, ou seja, $\left(L, \dfrac{L\sqrt{15}}{4}, \dfrac{L^2\sqrt{15}}{16}\right)$.

Assim, temos:

$\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_1} \Rightarrow \dfrac{\frac{L^2\sqrt{15}}{16}}{\frac{L\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{\frac{L\sqrt{15}}{4}}{L}$

$\therefore\ \dfrac{L}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow L = \sqrt{15}$

53. Sendo x, xq, xq^2 as medidas do cateto menor, do cateto maior e da hipotenusa, respectivamente, temos, pelo teorema de Pitágoras:
$(xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$
Resolvendo essa equação para $q > 0$, obtemos:
$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}2$
$\therefore 1 < q < 2$
Alternativa **c**.

54. Seja a PG (a_1, a_2, a_3, a_4). Sabemos que:
$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 4 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \Rightarrow a_4 = 4a_1$
No entanto, $a_4 = a_1 \cdot q^3$. Logo:
$a_1 \cdot q^3 = 4a_1 \Rightarrow q^3 = 4$
$q = \sqrt[3]{4}$

55. Queremos descobrir o seu termo médio, ou seja, a_{51}.
Da sequência dada, temos que $a_1 = \frac{1}{a}$. Para determinar a razão q, podemos fazer:
$q = \frac{\frac{1}{2a}}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n = 51$:
$a_{51} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{51-1} = \frac{1}{2^{50}a}$
Alternativa **d**.

56. Temos que $a_{15} = a_1 \cdot q^{14}$. Assim:
$\frac{6}{k} = a_1 \cdot (k\sqrt{k})^{14} \Rightarrow \frac{6}{k} = a_1 \cdot k^{14} \cdot k^7$
$\therefore a_1 = \frac{6}{k^{22}}$

57. Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = 3^2$ a razão da PG e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:
$81 = \frac{1}{3^{50}} \cdot (3^2)^{n-1} \Rightarrow 3^{2n-2} = 3^4 \cdot 3^{50}$
$\therefore 3^{2n-2} = 3^{54} \Rightarrow 2n - 2 = 54$
$\therefore n = 28$
Logo, a PG tem 28 termos.

58. Sendo $q = \frac{2}{9} = \frac{2}{3^2}$ a razão da PG e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:
$\frac{2^{32}}{3^{114}} = \frac{1}{3^{50}} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{2^{32} \cdot 3^{50}}{3^{114}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$
$\therefore \frac{2^{32}}{3^{64}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{2^{32}}{9^{32}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$
$\therefore n - 1 = 32 \Rightarrow n = 33$
Logo, a PG tem 33 termos.

59. Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:
$\frac{1}{1.024} = 512 \cdot q^{19} \Rightarrow \frac{1}{2^{10}} = 2^9 \cdot q^{19}$
$\therefore q^{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$
Portanto, a razão da PG é $\frac{1}{2}$.

60. a) Temos que $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$; então:
$a_{15} = a_9 \cdot q^6 \Rightarrow 54 = 2q^6$
$\therefore q^6 = 27 \Rightarrow q = \pm\sqrt[6]{27} = \pm\sqrt{3}$
Como a PG é oscilante, a razão é $-\sqrt{3}$.

b) Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$a_9 = a_1 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^8 \Rightarrow 2 = 81a_1$
$\therefore a_1 = \frac{2}{81}$
Logo, o primeiro termo é $\frac{2}{81}$.

c) Temos que $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$; então:
$a_{10} = a_9 \cdot q^1 = 2 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)$
$\therefore a_{10} = -2\sqrt{3}$
Logo, o décimo termo é $-2\sqrt{3}$.

d) Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$a_n = \frac{2}{81} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^{n-1}$
Logo, o n-ésimo termo é $\frac{2}{81} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^{n-1}$.

61. Ao inserir 5 meios geométricos entre 10 e 20, formamos uma PG com 7 termos, em que $a_1 = 10$ e $a_7 = 20$.
Assim, temos:
$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 20 = 10 \cdot q^6$
$\therefore q = \pm\sqrt[6]{2}$
Logo, temos duas interpolações possíveis:
$\left(10, 10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, 10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, 10\sqrt[6]{2^5}, 20\right)$ e
$\left(10, -10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, -10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, -10\sqrt[6]{2^5}, 20\right)$

62. Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 3 \\ a_5 \cdot a_6 = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 = 3 \\ a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^5 = 96 \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} (a_1)^2 \cdot q^4 = 3 & \text{(I)} \\ (a_1)^2 \cdot q^9 = 96 & \text{(II)} \end{cases}$
Dividindo membro a membro, (II) por (I), obtemos:
$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$
Substituindo q por 2 na equação (I), temos:
$(a_1)^2 \cdot 2^4 = 3 \Rightarrow (a_1)^2 = \frac{3}{16}$
$\therefore a_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$
Como a PG é crescente, concluímos que o primeiro termo é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

63. Temos que $a_1 + a_2 = 1$ e $a_3 + a_4 = 9$.
Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_3 + a_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q = 1 \\ a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 9 \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} a_1 (1 + q) = 1 \\ a_1 q^2 (1 + q) = 9 \end{cases}$
Dividindo, membro a membro, as duas igualdades anteriores, obtemos:
$q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$
Substituindo q por 3 em $a_1(1 + q) = 1$:
$a_1(1 + 3) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$
Substituindo q por -3 em $a_1(1 + q) = 1$:
$a_1(1 - 3) = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$
Como são 4 termos positivos, concluímos que a razão tem de ser $q = 3$.

64. Temos que $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$; então:
$a_{19} = a_9 . q^{10} \Rightarrow p^6 = \frac{p}{2} \cdot \left(p^{\frac{2}{5}}\right)^{10}$
$\therefore p^6 = \frac{p \cdot p^4}{2}$
Como p é diferente de 0, pois a PG é crescente, temos: $\frac{p^6}{p^5} = \frac{1}{2}$, ou seja, $p = \frac{1}{2}$

65. Se existe uma PG nas condições enunciadas, então existe uma tal que $a_1 = \frac{1}{9}$, $a_i = 27$, $a_j = 729$, com $\{i, j\} \subset \mathbb{N}^*$ e $1 < i < j$. Assim, temos que os pontos $\left(1, \frac{1}{9}\right)$, $(i, 27)$ e $(j, 729)$ pertencem ao gráfico da PG; logo, os pontos $\left(1, \log_3 \frac{1}{9}\right)$, $(i, \log_3 27,)$ e $(j, \log_3 729)$, ou seja, $(1, -2)$, $(i, 3)$ e $(j, 6)$, pertencem a uma mesma reta. (Escolhemos a base 3 por conveniência, poderíamos ter escolhido qualquer outra base para os logaritmos.)
Assim pelo teorema de Tales, temos:
$$\frac{3-(-2)}{6-3} = \frac{i-1}{j-i} \Rightarrow j = \frac{8i-3}{5}$$
Como i e j são números naturais, com $1 < i < j$, temos que o menor valor possível de i é 6, com o que obtemos $j = 9$. Logo, uma PG de maior razão possível, nas condições enunciadas, é tal que $a_1 = \frac{1}{9}$, $a_6 = 27$, $a_9 = 729$.
Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, concluímos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 27 = \frac{1}{9} \cdot q^5$
$\therefore q^5 = 243 \Rightarrow q = 3$
Logo, a maior razão possível da PG, nas condições enunciadas, é 3.

66. Temos que $a_n = 4 \cdot 3^n$; logo:
$a_n > 36 \Rightarrow 4 \cdot 3^n > 36$
$\therefore 3^n > 3^2 \Rightarrow n > 2$
Como n representa um número natural, concluímos que o menor valor possível de n é 3.

67. Sendo a_2, $\sqrt{a_2}$ e a_{n-1} o segundo, o termo médio e o penúltimo termo da PG, respectivamente, temos:
$\left(\sqrt{a_2}\right)^2 = a_2 \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_2 = a_2 \cdot a_{n-1}$
$\therefore a_{n-1} = 1$
Logo, o penúltimo termo da PG é 1.

68. Observamos que para $x - 1 = 0$, ou seja, $x = 1$, a sequência não é PG.
Assim, devemos ter $x - 1 \neq 0$. Sob essa condição, a sequência é PG se, e somente se,
$$(x + 1)^2 = (x - 1)\,(3x - 1)$$
ou seja,
$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - x - 3x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = 3$
- Para $x = 0$, temos a PG oscilante: $(-1, 1, -1)$
- Para $x = 3$, temos a PG crescente: $(2, 4, 8)$

Logo, a sequência é uma PG crescente para $x = 3$.

69. Para que três termos consecutivos com o primeiro não nulo formem uma PG, basta que o produto dos extremos seja igual ao quadrado do termo médio. Então:
$(x - 2) \cdot \frac{25}{(x-2)} = 5^2 \Rightarrow 25 = 25$
Portanto, para qualquer valor de x, com $x \neq 2$, a sequência $\left(x - 2, 5, \frac{25}{x-2}\right)$ é uma PG.

70. A sequência só será uma PG se o quadrado do termo médio for o produto dos extremos. Então:
$(x - 1)^2 = -4 \cdot (x + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4x - 4$
$\therefore x^2 + 2x + 5 = 0$
Como $\Delta = -16 < 0$, então não existe x real que satisfaça a equação.
Portanto, não existe valor real de x para que a sequência seja uma PG.

71. Temos que a_1, 2, a_3 formam uma PA. Sabemos que na PA o termo médio é igual a média aritmética dos extremos; assim:
$\frac{a_1 + a_3}{2} = 2 \Rightarrow a_1 + a_3 = 4$
$\therefore a_3 = 4 - a_1$ (I)
Temos que $a_1 + 3$, $a_2 - 3$ e $a_3 - 3$ estão em PG e que $a_2 = 2$, ou seja, $a_1 + 3$, -1, $a_3 - 3$ estão em PG. Sabemos que na PG o produto dos extremos deve ser igual ao quadrado do termo médio; assim:
$(a_1 + 3)(a_3 - 3) = (-1)^2 \Rightarrow (a_1 + 3)(a_3 - 3) = 1$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$(a_1 + 3)(4 - a_1 - 3) = 1 \Rightarrow (a_1 + 3)(1 - a_1) = 1$
$\therefore a_1^2 + 2a_1 - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1 + \sqrt{3}$ ou $a_1 = -1 - \sqrt{3}$
Como $a_1 > 0$, concluímos que $a_1 = -1 + \sqrt{3}$.
Calculando a razão r da progressão aritmética:
$r = a_2 - a_1 = 2 - (-1 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$
Alternativa **e**.

72. Sabemos que na PG o produto dos extremos deve ser igual ao quadrado do termo médio; assim:
$x^2 \cdot \log(10x) = (2x)^2 \Rightarrow x^2 \cdot \log(10x) = 4x^2$
$\therefore \log(10x) = 4 \Rightarrow 10x = 10^4$
$\therefore x = 10^3$
Logo, o valor de x é 1.000.
Alternativa **e**.

73. Como a_1, a_4 e a_{10} são termos de uma PA de razão r e primeiro termo 2, temos:
$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 2 + 3r$
$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 2 + 9r$
Além disso, a_1, a_4 e a_{10} estão em PG, logo:
$(a_4)^2 = a_1 \cdot a_{10} \Rightarrow (2 + 3r)^2 = 2 \cdot (2 + 9r)$
$\therefore 4 + 12r + 9r^2 = 4 + 18r \Rightarrow 3r^2 - 2r = 0$
$\therefore r = 0$ ou $r = \frac{2}{3}$
Como a progressão aritmética é crescente, $r > 0$; logo $r = \frac{2}{3}$.

74. Nessa sequência $a_2 = 6$ e $a_5 = 162$. Temos que $a_5 = a_2 q^3$; assim:
$162 = 6 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 27$
$\therefore q = 3$
Temos que $a_2 = a_1 q$; assim:
$6 = x \cdot 3 \Rightarrow x = 2$
Temos que $a_5 = a_4 q$; assim:
$162 = z \cdot 3 \Rightarrow z = 54$
Logo, calculando o produto de x por z, temos:
$xz = 2 \cdot 54 = 108$
Alternativa **c**.

75. A soma dos termos de uma PG de n termos, com $q \neq 1$, é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Sendo $a_1 = 3$ e $q = 3$, temos:

$$S_{15} = \frac{3 \cdot (1 - 3^{15})}{1 - 3} = \frac{3 - 3^{16}}{-2} = \frac{3^{16} - 3}{2}$$

Alternativa **c**.

76. **a)** $\sum_{j=1}^{40} 5^j = 5^1 + 5^2 + \ldots + 5^{40}$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de 40 termos, com $a_1 = 5$ e $q = 5$.

Logo:

$$S_{40} = \frac{5\,(1 - 5^{40})}{1 - 5} = \frac{5 - 5^{41}}{-4} = \frac{5^{41} - 5}{4}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{40} 5^j = \frac{5^{41} - 5}{4}$$

b) $\sum_{j=21}^{40} 5^j = 5^{21} + 5^{22} + \ldots + 5^{40}$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de $(40 - 20)$ termos, ou seja, 20 termos, com $a_1 = 5^{21}$ e $q = 5$. Logo:

$$S_{20} = \frac{5^{21}(1 - 5^{20})}{1 - 5} = \frac{5^{21} - 5^{41}}{-4} = \frac{5^{41} - 5^{21}}{4}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{40} 5^j = \frac{5^{41} - 5^{21}}{4}$$

c) $\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + 2 \cdot 3^n =$

$= 6 + 18 + 54 + \ldots + 2 \cdot 3^n$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de n termos, com $a_1 = 6$ e $q = 3$. Então:

$$S_n = \frac{6\,(1 - 3^n)}{1 - 3} = \frac{6\,(1 - 3^n)}{-2} = -3(1 - 3^n) = 3^{n+1} - 3$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j = 3^{n+1} - 3$$

77. Temos:

$$\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 4.094$$

Pela fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$$4.094 = \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow 4.094 = 2^{n+1} - 2$$

$$2^{n+1} = 4.096 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{12}$$

$$\therefore n = 11$$

78. **a)** De $S_5 = \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{1}{2} \quad \text{(I)}$$

De $a_7 - a_2 = 3$, temos:

$$a_2 \cdot q^5 - a_2 = 3 \Rightarrow a_2\,(q^5 - 1) = 3$$

$$\therefore 1 - q^5 = -\frac{3}{a_2} \Rightarrow 1 - q^5 = -\frac{3}{a_1 q} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\frac{a_1 \cdot \left(-\frac{3}{a_1 q}\right)}{1 - q} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\frac{3}{q}}{1 - q} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore q^2 - q - 6 = 0 \Rightarrow q = 3 \text{ ou } q = -2$$

Como pelo enunciado a razão é negativa, concluímos que $q = -2$.

b) Substituindo q por -2 em (II), temos:

$$1 - (-2)^5 = -\frac{3}{a_1(-2)} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{22}$$

Assim:

$$S_3 = \frac{a_1(1 - q^3)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{22}[1 - (-2)^3]}{1 - (-2)} = \frac{3}{22}$$

Logo, a soma dos três primeiros termos dessa PG é $\frac{3}{22}$.

79. $S_n > \frac{8.191}{4.096} \Rightarrow \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{8.191}{4.096}$

$$\therefore 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{8.191}{8.192} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{8.192}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \Rightarrow n > 13$$

Como n representa um número natural, concluímos que o menor valor possível de n é 14.

80. A sequência é a seguinte PG de 30 termos:

$$\left(\frac{1}{5^9}, \frac{1}{5^8}, \frac{1}{5^7}, \ldots, 5^{19}, 5^{20}\right)$$

Aplicando a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, para $n = 30$, concluímos:

$$P_{30} = \left(\frac{1}{5^9}\right)^{30} \cdot 5^{\frac{(30-1)30}{2}} \Rightarrow P_{30} = \frac{1}{5^{270}} \cdot 5^{435} = 5^{165}$$

Logo, o produto dos 30 termos da sequência é 5^{165}.

Alternativa **a**.

81. Sabemos que $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ é o produto dos n termos da PG; então:

$$7^{630} = 7^n \cdot 7^{\frac{(n-1)n}{2}} \Rightarrow 630 = n + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\therefore 1.260 = 2n + n^2 - n \Rightarrow n^2 + n - 1.260 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:

$n = 35$ ou $n = -36$ (não convém)

Assim, $n = 35$.

82. O produto dos n termos da PG é dado por $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$. Sabendo que para $n = 9$, o produto da PG é 512, temos:

$$512 = (a_1)^9 \cdot (\sqrt[4]{2})^{\left[\frac{(9-1) \cdot 9}{2}\right]} \Rightarrow (a_1)^9 = \frac{512}{2^9}$$

$$\therefore a_1 = 1$$

Logo, o primeiro termo da PG é 1.

83. Sabemos que $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ é o produto dos n termos da PG; então:

$$P_{10} = \left(\frac{1}{64}\right)^{10} \cdot (2^k)^{\frac{(10-1) \cdot 10}{2}} \Rightarrow 2^{75} = \frac{1}{2^{60}} \cdot (2^k)^{45}$$

$$\therefore 2^{135} = 2^{45k} \Rightarrow k = 3$$

Logo, a constante k vale 3.

84. **a)** Sabemos que $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$ é a soma dos infinitos termos de uma PG com $-1 < q < 1$. Então, para $q = \frac{2}{5}$ e $a_1 = 1$, temos:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

b) Para $q = -\frac{2}{3}$ e $a_1 = -4$, temos:

$$S_\infty = \frac{-4}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{12}{5}$$

c) Para $q = 0{,}2$ e $a_1 = 1$, temos:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - 0{,}2} = \frac{1}{0{,}8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

85. a) Temos:

$7{,}484848... = 7 + 0{,}48 + 0{,}0048 + 0{,}000048 + ...$
em que $(0{,}48 + 0{,}0048 + 0{,}000048 + ...)$ é a soma dos infinitos termos da PG de razão $q = 0{,}01$ e $a_1 = 0{,}48$.

Aplicando $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}48}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}48}{0{,}99} = \frac{48}{99}$$

$$\therefore\ 7{,}484848... = 7 + \frac{48}{99} = \frac{741}{99} = \frac{247}{33}$$

b) Temos:

$2{,}54666... = 2{,}54 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + ...$
Observando que $(0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + ...)$ é a soma dos infinitos termos da PG de razão $q = 0{,}1$ e $a_1 = 0{,}006$, temos:

$$S_\infty = \frac{0{,}006}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}006}{0{,}9} = \frac{6}{900}$$

$$\therefore\ 2{,}54666... = \frac{254}{100} + \frac{6}{900} = \frac{2.292}{900} = \frac{191}{75}$$

86. $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{16}{27} = 3 \cdot q^4$

$$\therefore\ q = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3}$$

Como a PG é oscilante, deduzimos que $q = -\frac{2}{3}$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, concluímos:

$$S_\infty = \frac{3}{1 + \frac{2}{3}} \Rightarrow S_\infty = \frac{9}{5}$$

87. Como a figura 1 é um quadrado de lado medindo x, sua área será x^2; assim, temos a seguinte sequência de áreas:

$$\left(x^2, \frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{4}, ...\right)$$

Notamos que a sequência possui razão $q = \frac{1}{2}$ e sabemos que $S_\infty = 64\sqrt{2}$; assim:

$$64\sqrt{2} = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow a_1 = 32\sqrt{2}$$

Calculando o valor do décimo termo a_{10}:

$$a_{10} = a_1 q^9 = 32\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{\sqrt{2}}{2^4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Alternativa **a**.

88. Sendo $(A_1, A_2, ...)$ a sequência infinita formada pelas áreas dos círculos, temos que A_n é um círculo de raio r_n cuja medida é metade da diagonal d_n do quadrado inscrito. Sendo l_n a medida do lado desse quadrado, temos:

$$A_n = \pi(r_n)^2 = \pi\left(\frac{l_n\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi(l_n)^2}{2}$$

Sabemos que $l^{n+1} = \frac{l_n}{2}$. Calculando a razão q da sequência das áreas:

$$q = \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{\pi(l_{n+1})^2}{2}}{\frac{\pi(l_n)^2}{2}} = \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 = \left(\frac{\frac{l_n}{2}}{l_n}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Determinando o primeiro termo A_1 da sequência das áreas das circunferências, temos:

$$A_1 = \frac{\pi 4^2}{2} = 8\pi$$

Logo, aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$ para $a_1 = A_1 = 8\pi$ e $q = \frac{1}{4}$:

$$S_\infty = \frac{8\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{32\pi}{3}$$

Alternativa **b**.

89. Na sequência $(a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...)$, temos primeiro termo a_1, razão r^5 e a soma de seus infinitos termos 8; assim:

$$\frac{a_1}{1 - r^5} = 8 \Rightarrow a_1 = 8(1 - r^5) \quad \text{(I)}$$

Na sequência $(a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...)$, temos primeiro termo $a_5 = a_1 r^4$, razão r^5 e a soma de seus infinitos termos 2; assim:

$$\frac{a_1 r^4}{1 - r^5} = 2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\frac{8(1 - r^5)r^4}{1 - r^5} = 2 \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como pelo enunciado temos $r < 0$, concluímos que $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Substituindo r por $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ em (I):

$$a_1 = 8\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5\right] = 8\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

Assim:

$$S_\infty = \frac{8\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{8 + \frac{2}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Racionalizando, temos:

$$S_\infty = \frac{\left(8 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 14 - 6\sqrt{2}$$

Logo, a soma dessa progressão infinita é $14 - 6\sqrt{2}$.

Exercícios contextualizados

90. Temos a seguinte sequência:

$(5, 9, 13, ..., a_n)$

Percebemos que se trata de uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $r = 4$; assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$

Alternativa **d**.

91. a) Como os mosaicos são formados por quadrados, no 15º mosaico teremos um quadrado de 15×15 azulejos brancos.

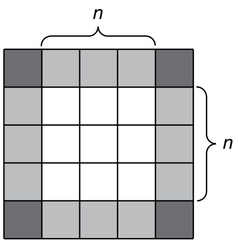
Logo, sendo a_{15} o número de azulejos brancos no 15º mosaico, temos:

$a_{15} = 15^2 = 225$

Portanto, o 15º mosaico terá 225 azulejos brancos.

b) Raciocinando como no item **a**, temos: $a_n = n^2$

c) Como o quadrado branco é composto de $n \times n$ azulejos brancos, o número de azulejos pretos varia de acordo com os n azulejos brancos. Como o quadrado é formado por 4 lados, teremos $4n + 4$ azulejos pretos, de acordo com o esquema:



Somamos 4 azulejos, referentes aos vértices do quadrado preto.

Logo, para $n = 20$, temos que o total p_n de azulejos pretos é dado por:

$p_{20} = 20 \cdot 4 + 4 = 84$

Portanto, o 20º mosaico dessa sequência terá 84 azulejos pretos.

d) Raciocinando como no item **c**, temos: $p_n = 4n + 4$

92. **a)** Do enunciado, temos a sequência:

(48, 58, 68, 78, ..., 2.848)

b) A lei de formação dessa sequência é:

$a_n = a_1 + (n - 1)10$

$a_n = 48 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow a_n = 38 + 10n$

93. **a)** Do enunciado, temos:

$(10.000, 10.200, 10.404, ..., 10.000(1,02)^{20})$

b) A lei de formação da sequência é dada por:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 10.000 \cdot 1,02^{n-1}$

94. Percebemos que a cada 5 dias essa pessoa depositou (1 + 5 + 10 + 25 + 50) centavos, ou seja, 91 centavos. Dividindo-se 95,05 por 0,91, encontramos quociente 104 e resto 41, ou seja, ocorreu depósito por 104 · 5 dias e restou 41 centavos. Concluímos que o último depósito ocorreu ao depositar a moeda de 25 centavos.

No entanto, 41 centavos é a soma de 1 + 5 + 10 + 25, ou seja, além dos 104 · 5 dias de depósito mais 4 dias. Portanto, foram 524 dias depositando.

Dividindo-se 524 por 7, encontramos quociente 74 e resto 6, ou seja, foram 74 semanas completas e 6 dias. O 6º dia na semana é o sábado.

Portanto, essa pessoa conseguiu a quantia exata de R$ 95,05 após depositar a moeda de 25 centavos no 524º dia, que caiu em um sábado.

Alternativa **d**.

95. Fazendo 118 dividido por 8, encontramos quociente 14 e resto 6, ou seja, serão 14 ciclos completos dos fios e mais 6 segmentos, ou seja, o número 118 estará no fio G de apoio.

96. (33.000, 34.500, 36.000, ...)

Trata-se de uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 33.000$ e razão $r = 1.500$. Assim:

$a_7 = a_1 + 6r = 33.000 + 6 \cdot 1.500 = 42.000$

Logo, em julho do ano passado foram vendidas 42.000 passagens.

Alternativa **d**.

97. Podemos dizer que, no intervalo de 0 a 2 segundos, o objeto percorreu uma distância d, em metro; de 2 a 4 segundos, uma distância $d + 0,4$ metros e assim sucessivamente.

Assim, para $t = 2$, temos:

$S = S_0 + V_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}a2^2$

$\therefore d = 2a \quad \text{(I)}$

Para $t = 4$, temos:

$S = S_0 + V_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d + d + 0,4 = \frac{1}{2}a4^2$

$\therefore 4d + 0,8 = 16a \text{ (II)}$

Substituindo (I) em (II):

$4 \cdot 2a + 0,8 = 16a \Rightarrow a = 0,1$

Logo, a aceleração do objeto será de 0,1 m/s².

Alternativa **e**.

98. Sendo a_n a distância percorrida pelo ciclista 1 no dia n, temos:

$(4, 7, 10, ..., a_n)$

Sendo b_n a distância percorrida pelo ciclista 2 no dia n, temos:

$(25, 27, 29, ..., b_n)$

Percebemos que ambas as sequências são progressões aritméticas. Fazendo $a_n = b_n$:

$4 + (n - 1) \cdot 3 = 25 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 22$

Logo, no 22º dia ambos os ciclistas percorrem a mesma distância. Calculando a distância a_{22} percorrida, temos:

$a_{22} = 4 + 21 \cdot 3 = 67$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 22$, $a_1 = 4$ e $a_{22} = 67$:

$S_{22} = \frac{(4 + 67)22}{2} = 781$

Portanto, ao final do treinamento, o ciclista 1 percorre uma distância total de 781 quilômetros.

Alternativa **a**.

99. O primeiro telefone SOS está no quilômetro 40, o segundo no quilômetro 43 e assim por diante. Ou seja, formamos a PA de razão $r = 3$:

(40, 43, 46, 49, ...)

Aplicando a fórmula do termo geral da PA

$a_n = a_1 + (n - 1)r$ para $a_1 = 40$, $r = 3$ e $a_n = 750$:

$750 = 40 + (n - 1)3 \Rightarrow n = 237,\overline{6}$

Como n representa um número inteiro, concluímos que o valor mais próximo de $237,\overline{6}$, inteiro, é 238. Calculando a_{238}:

$a_{238} = 40 + 237 \cdot 3 = 751$

Logo, o posto de telefone SOS mais próximo do quilômetro 750 está no quilômetro 751. Portanto, a uma distância de 1 quilômetro.

Alternativa **c**.

100. Fazendo o produto de 400 por 4 e 400 por 5, encontramos os valores 1.600 e 2.000. Como somente o ano 2000 pertence ao intervalo de anos de 1901 a 2000, concluímos que pela condição (I) somente o ano 2000 é bissexto.

No intervalo de 1.901 a 2.000 não temos nenhum múltiplo de 100 além do 2.000. Logo, só precisamos encontrar quantos múltiplos de 4 há nesse intervalo. Encontrando o primeiro e o último elemento de uma PA de razão $r = 4$, cujo primeiro termo e último termo sejam múltiplos de 4, temos (excluímos o 2.000 porque ele já satisfez a condição I):

(1.904, 1.908, ..., 1.996)

Aplicando a fórmula do termo geral da PA

$a_n = a_1 + (n - 1)r$ para $a_1 = 1.904$, $r = 4$ e $a_n = 1.996$:

$1.996 = 1.904 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 24$

Logo, pela condição (II) há 24 anos bissextos.

Concluímos então que no século XX houve um total de 24 + 1 anos bissextos, ou seja, 25 anos bissextos.

101. a) 6h 15min = 375min
20h 39min = 1.239min
Temos uma progressão aritmética de número de elementos $n = 25$, com primeiro termo $a_1 = 375$ e último termo $a_{25} = 1.239$; assim:
$a_{25} = a_1 + (25 - 1)r \Rightarrow 1.239 = 375 + 24r$
$\therefore r = 36$
Logo, o intervalo de tempo entre dois voos consecutivos é 36 minutos.

b) Determinando o 23º elemento dessa PA, a_{23}:
$a_{23} = a_1 + 22r = 375 + 22 \cdot 36$
$\therefore a_{23} = 1.167$
Logo, o horário em que decola o 23º voo é aos 1.167 minutos, ou às 19h 27min.

c) 16h = 960min
Queremos n tal que $a_n > 960$; assim:
$375 + (n - 1) \cdot 36 > 960 \Rightarrow n > 17{,}25$
O primeiro número inteiro que satisfaz a inequação é $n = 18$. Logo:
$a_{18} = a_1 + 17r = 375 + 17 \cdot 36$
$\therefore a_{18} = 987$
Logo, o horário do primeiro voo, após às 16h é aos 987min, ou seja, 16h 27min.

102. Como a diferença entre as frequências de duas emissoras consecutivas deve ser 0,2 MHz, todas as frequências de uma determinada região formam uma PA de razão $r = 0{,}2$, com $a_1 = 87{,}9$ e $a_n = 107{,}9$.
Para saber o número máximo de emissoras, basta determinar o número de elementos dessa PA, ou seja, determinar n tal que $a_n = 107{,}9$.
A fórmula do termo geral é dada por $a_n = a_1 + (n - 1)r$; assim:
$107{,}9 = 87{,}9 + (n - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow n = 101$
Alternativa **c**.

103. a) Supondo uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 1.861$, 18º termo $a_{18} = 2.014$, temos:
$a_{18} = a_1 + 17r \Rightarrow 2.014 = 1.861 + 17r$
$\therefore r = 9$
Logo, o período orbital desse cometa é 9 anos.

b) $a_{30} = a_1 + 29r = 1.861 + 29 \cdot 9$
$\therefore a_{30} = 2.122$
Logo, o cometa passará pelo periélio pela 30ª vez dia 22 de julho de 2122.

c) Queremos n tal que $a_n > 2.030$; assim:
$1.861 + (n - 1) \cdot 9 > 2.030 \Rightarrow n > 19{,}\overline{7}$
O primeiro número inteiro que satisfaz a inequação é $n = 20$. Logo:
$a_{20} = a_1 + 19r = 1.861 + 19 \cdot 9$
$\therefore a_{20} = 2.032$
Logo, a primeira data, após 2030, em que esse cometa passará pelo periélio é 22 de julho de 2032.

104. a) Temos que a 58ª vez que o satélite passou sobre o observatório foi após $(14 \cdot 24 + 6)$ horas em relação a primeira vez, ou seja, após 342 horas.
Supondo uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 2$ e 58º termo $a_{58} = 342 + 2 = 344$, temos:
$a_{58} = a_1 + 57r \Rightarrow 344 = 2 + 57r$
$\therefore r = 6$
Logo, o período orbital desse satélite é 6 horas.

b) $a_{45} = a_1 + 44r = 2 + 44 \cdot 6$
$\therefore a_{45} = 266$
Convertendo para dias encontramos 11 dias e 2 horas.
Logo, o satélite passou sobre o observatório pela 45ª vez às 4h do dia 12 de janeiro.

c) 9 horas do dia 20 de janeiro corresponde a $(19 \cdot 24 + 7)$ horas, ou seja, 463 horas.
Queremos n tal que $a_n > 463 + 2$, ou seja, $a_n > 465$; assim:
$2 + (n - 1) \cdot 6 > 465 \Rightarrow n > 78{,}1\overline{6}$
O primeiro número inteiro que satisfaz a inequação é $n = 79$. Logo:
$a_{79} = a_1 + 78r = 2 + 78 \cdot 6$
$\therefore a_{79} = 470$
Convertendo para dias encontramos 19 dias e 14 horas.
Logo, o primeiro horário, após as 9h do dia 20 desse mês de janeiro, em que esse satélite passou sobre o observatório foi às (14 + 2) horas, ou seja, às 16 horas.

105. De 1931 a 1959 passaram 28 anos e de 1959 a 1994 passaram 35 anos. Desse modo, o período t em que essa competição ocorre deve ser um divisor comum de 28 e 35 anos. Os divisores comuns são 1 e 7. Como pelo enunciado temos que $t > 1$, concluímos que $t = 7$.
Logo, após 1994, teríamos competição em 2001, 2008, 2015, ...
Dentre os valores das alternativas teríamos o ano de 2008.
Alternativa **d**.

106. Queremos que a soma dos números das duas fichas seja 1.533, ou seja, 1.000 + 533, 999 + 534, 998 + 535, ...
Assim, podemos formar uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 533$, $a_n = 1.000$ e razão $r = 1$:
(533, 534, 535, ..., 1.000)
A quantidade de conjuntos diferentes de duas fichas cuja soma resulta em 1.533 é o número x que corresponde à metade de elementos da PA acima. Assim:
$1.000 = 533 + (n - 1)1 \Rightarrow n = 468$
Logo, $x = 468 : 2 = 234$. Ou seja, temos 234 conjuntos.

107. a) As distâncias percorridas pela pedra em cada segundo da queda formam uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 10$, $r = 10$ e cujo último termo é $a_n = 10n$.
$(10, 20, 30, ..., 10n)$
Logo, a soma dos n termos da PA será a altura do prédio.
Sabendo que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:
$$S_n = \frac{(10 + 10n)n}{2} \Rightarrow S_n = 5n^2 + 5n$$
Portanto, a altura do prédio é $(5n^2 + 5n)$ metros.

b) Sabemos que no n-ésimo segundo a distância, em metro, percorrida pela pedra foi $10n$.
Logo, a velocidade da pedra nesse último segundo foi $10n$ m/s.

108. Quando a base da figura chegar a 100 m teremos na primeira coluna 1 quadradinho, na segunda dois quadradinhos, na terceira 3 quadradinhos e assim por diante, na centésima coluna 100 quadradinhos. Assim, o número de quadradinhos que formam a figura de base 100 m é a soma S_{100} dos termos da PA(1, 2, 3, ..., 100), isto é:

$$S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5.050$$

Como a área de cada quadradinho é 1 m^2, concluímos que a figura tem 5.050 m^2 de área.
Alternativa **b**.

109. Considerando o juro pago, temos uma PA de 100 termos cujo primeiro termo $a_1 = 2.000$ e razão $r = -20$. Calculando o último termo a_{100}:
$a_{100} = 2.000 + 99 \cdot (-20) = 20$
Determinando a soma dos termos dessa PA:

$$S_{100} = \frac{(2.000 + 20) \cdot 100}{2} = 101.000$$

Logo, a soma dos juros pagos desde a 1ª até a 100ª prestação vale R$ 101.000,00.
Alternativa **b**.

110. a) Temos uma PA de primeiro termo $a_1 = 430$ e razão $r = 20$.
$a_{16} = a_1 + 15r = 430 + 15 \cdot 20 = 730$
Logo, o número de atendimentos realizados nesse posto durante o 16º mês de funcionamento foi 730.

b) $S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2} = \frac{(430 + 730)16}{2} = 9.280$

Logo, o número total de atendimentos desde a inauguração do posto até o final do 16º mês de funcionamento foi 9.280.

c) Temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r = 430 + (n - 1)20$
$\therefore\ a_n = 410 + 20n$
Assim:

$$S_n = \frac{(430 + 410 + 20n)n}{2} = 10n^2 + 420n$$

d) $S_n = 10n^2 + 420n \Rightarrow 13.230 = 10n^2 + 420n$
$\therefore\ n^2 + 42n - 1.323 = 0$
Assim:
$n = 21$ ou $n = -63$ (não convém)
Logo, em 21 meses de funcionamento o posto completou 13.230 atendimentos.

111. a) Os números de acessos ao *site* no mês de janeiro, em ordem crescente, formam a PA de primeiro termo $a_1 = 1.800$ e razão $r = 100$. Assim, o número n do dia de janeiro em que houve 3.700 acessos é obtido por:
$3.700 = 1.800 + (n - 1) \cdot 100 \Rightarrow n = 20$
Logo, o *site* foi acessado por 3.700 pessoas no dia 20 de janeiro.

b) O número de acessos no mês de janeiro até o dia 20 é a soma S_{20} dos 20 primeiros termos da PA (a_n), com $a_1 = 1.800$ e $a_{20} = 3.700$, ou seja:

$$S_{20} = \frac{(1.800 + 3.700)20}{2} = 55.000$$

Logo, no mês de janeiro, até o dia 20, o *site* foi acessado por 55.000 internautas.

112. As áreas desmatadas nos dias desse mês formam uma P.A. em que o primeiro termo é $a_1 = 50$ e a razão é $r = 4$.

a) Para $n = 20$, temos:
$a_{20} = 50 + (20 - 1)4 = 126$
Logo, no 20º dia do mês foram desmatados 126 ha.

b) Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:

$$S_{20} = \frac{(50 + 126) \cdot 20}{2} = 1.760$$

Logo, nos primeiros 20 dias desse mês foram desmatados 1.760 ha.

c) O termo a_n da PA é $a_n = 50 + (n - 1) \cdot 4$, ou seja, $a_n = 46 + 4n$; assim:

$$S_n = \frac{(50 + 46 + 4n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = 2n^2 + 48n$$

Devemos determinar o número natural n tal que $S_n = 512$; logo:
$2n^2 + 48n = 512 \Rightarrow 2n^2 + 48n - 512 = 0$
$\therefore\ n^2 + 24n - 256 = 0 \Rightarrow n = 8$ ou $n = -32$
Convém apenas $n = 8$.
Concluímos, então, que nos 8 primeiros dias do mês foram desmatados 512 ha.

113. Observando o caminho da partícula, notamos que ela demora 2 minutos para ir da origem ao ponto (1, 1), 4 minutos para ir do ponto (1, 1) ao (2, 2), 6 minutos para ir do ponto (2, 2) ao (3, 3) e assim por diante. Logo, sendo (2, 4, 6,...) a sequência do deslocamento da partícula até o ponto (1, 1), (2, 2), (3, 3) etc., queremos saber o total percorrido do início do trajeto até o ponto (50, 50). Determinando primeiramente o termo a_{50}:
$a_{50} = 2 + 49 \cdot 2 = 100$
Assim:

$$S_{50} = \frac{(2 + 100)50}{2} = 2.550$$

Convertendo esses 2.550 minutos para horas, encontramos 42h 30min ou 42 horas e meia.
Alternativa **a**.

114. Sendo $(P_1, P_2, P_3, ..., P_{30})$ a PG crescente dos PIBs chineses dos últimos 30 anos, temos que $P_n = 1{,}1 \cdot P_{n-1}$, para qualquer número natural n, com $2 \leqslant n \leqslant 30$. Logo, a razão da PG é 1,1.

115. Indicando, respectivamente, a altura, a largura e o comprimento da sala por $\frac{x}{q}$, x e xq, temos:

$$\begin{cases} x \cdot xq = 128 \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 512 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot q = 128 \\ x^3 = 512 \end{cases}$$

$\therefore\ x = 8$ e $q = 2$
Logo, a soma S das áreas das paredes é dada por:
$S = 2 \cdot (16 \cdot 4 + 8 \cdot 4)\ m^2 = 192\ m^2$

116. a) $y = 800 \cdot 3^{x-1}$

b) Para $x = 5$, temos:
$y = 800 \cdot 3^{5-1} = 800 \cdot 3^4$
$\therefore\ y = 64.800$
Logo, ao final do quinto dia do mês citado teremos 64.800 indivíduos.

117. Os números de lados dos polígonos obtidos nesse processo são multiplicados por 4 a cada figura; assim, temos que os números de lados formam uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e $q = 4$.
Então, para $n = 6$, temos:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^5$
$\therefore a_6 = 3 \cdot 4^5 \Rightarrow a_6 = 3.072$
Portanto, o 6º polígono tem 3.072 lados.
Alternativa **e**.

118. A cada 10 minutos cai pela metade a quantidade de massa desse elemento radioativo; assim, temos a sequência da massa:
(64, 32, 16, 8, 4, ...)
No período de 1 hora, temos 6 intervalos de 10 minutos. Desse modo, a massa m desse elemento após 1 hora será:
$m = 64 \cdot 2^{-6} = 1$
Logo, após uma hora haverá 1 mg desse elemento.
Alternativa **b**.

119. Sendo n o número de habitantes daqui a 17 anos, temos:
$n = 358.000(1 + 0{,}018)^{17} \Rightarrow n \approx 484.836$
Logo, em 2030 a população será de 484.836 habitantes, aproximadamente.

120. Para a população humana, vamos encontrar a razão q de crescimento anual. Para isso, vamos considerar uma PG de 21 termos cujo primeiro termo é $a_1 = 10.000.000$ e o vigésimo primeiro termo é o seu dobro, ou seja, $a_{21} = 2 \cdot 10.000.000 = 20.000.000$.
Assim:
$a_{21} = a_1 . q^{20} \Rightarrow 20.000.000 = 10.000.000q^{20}$
$\therefore q^{20} = 2 \Rightarrow q = 2^{\frac{1}{20}}$
Logo, após dez anos, a população humana p_H será:
$p_H = 10.000.000 \cdot q^{10} = 10.000.000 \cdot \left(2^{\frac{1}{20}}\right)^{10}$
$\therefore p_H = 10.000.000 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
Para a população de ratos p_R após dez anos, podemos fazer:
$p_R = 200.000.000 \cdot 2^{10}$
Determinando a razão da população de ratos pela população humana:
$$\frac{p_H}{p_R} = \frac{200.000.000 \cdot 2^{10}}{10.000.000 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot 2^{\frac{23}{2}}$$
$$\therefore \frac{p_H}{p_R} = 5 \cdot 2^{11} \cdot \sqrt{2}$$
Aproximando $\sqrt{2}$ para 1, 41, concluímos:
$$\frac{p_H}{p_R} \approx 14.481$$
Logo, daqui a 10 anos haverá 14.481 ratos por habitante, aproximadamente.

121. Chamando de x a população desse país em 1990, em 2009 essa população foi de $1{,}28x$ e em 2020 queremos que seja de $0{,}8x$. Chamando de q a razão anual de redução de 2009 a 2020, ou seja, em 11 anos, podemos fazer:
$0{,}8x = 1{,}28x \cdot q^{11} \Rightarrow q^{11} = 0{,}625$
$\therefore \log q^{11} = \log 0{,}625 \Rightarrow 11 \log q = 4 \log 5 - 3$
$\therefore \log q = -0{,}02 \Rightarrow q = 10^{-0{,}02}$
Alternativa **b**.

122. Como os pontos $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $(i, 2)$ e $(j, 4)$ pertencem ao gráfico de uma PG, deduzimos que os pontos $\left(1, \log_2 \frac{1}{4}\right)$, $(i, \log_2 2)$ e $(j, \log_2 4)$, isto é, $(1, -2)$, $(i, 1)$ e $(j, 2)$ pertencem a uma reta.
Assim, pelo teorema de Tales temos:
$$\frac{1 - (-2)}{i - 1} = \frac{2 - 1}{j - i} \Rightarrow j = \frac{4i - 1}{3}$$
Os menores valores naturais de i e j, com $1 < i < j$, que satisfazem essa equação são $i = 4$ e $j = 5$. Assim, temos: $a_4 = 2$ e $a_5 = 4$, com o que concluímos que a razão da PG é 2. Isto significa que a maior taxa possível da aplicação é 100%.

123. Se houve um aumento percentual constante, podemos dizer que estamos diante de uma PG. Assim, temos:
$(x + 12)^2 = (x + 10)(x + 14{,}1) \Rightarrow 0{,}1x = 3$
$\therefore x = 30$
Assim, o número de turistas em março foi de $x + 14{,}1$, ou seja, 44,1 mil.
Logo, em março houve 44.100 turistas.

124. A sequência de valores do imóvel forma a PG:
$(100, x + 30, 2x - 39)$
Então:
$(x + 30)^2 = 100(2x - 39) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 60x + 900 = 200x - 3.900$
$\therefore x^2 - 140x + 4.800 = 0$
$\Delta = (140)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4.800 = 400$
$$\therefore x = \frac{140 \pm \sqrt{400}}{2} \Rightarrow x = 80 \text{ ou } x = 60$$
Para essa PG ser crescente, pois o imóvel se valorizou, devemos ter: $x = 80$
Logo, ao final desse período o apartamento valia R$ 121.000,00.

125. **a)** Em relação às bases dos triângulos, formamos uma PG de 30 elementos, cujo primeiro elemento é $a_1 = 1$ e a razão é $q = 1{,}1$; Assim:
$$S_{30} = \frac{a_1 \cdot \left(1 - q^{30}\right)}{1 - q} = \frac{1 \cdot \left(1 - 1{,}1^{30}\right)}{1 - 1{,}1} = \frac{1 - \frac{11^{30}}{10^{30}}}{-0{,}1}$$
$$\therefore S_{30} = \frac{1 - \frac{1{,}745 \cdot 10^{31}}{10^{30}}}{-0{,}1} = 164{,}5$$
Logo, o comprimento do muro é 164,5 m.

b) A área pintada do muro é:
$$\frac{164{,}5 \cdot 1}{2} = 82{,}25$$
Como o rendimento é de 1 litro para cada 10 m², então são necessários 8,225 litros de tinta para pintar o muro.

126. Temos uma PG de n termos cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e razão $q = 2$; assim o número de baratas infectadas, que é o número de indivíduos da colônia, é o termo a_n da PG, isto é:
$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

127. **a)** Como a sequência dos acréscimos do diâmetro da bola está relacionada a cada intervalo de temperatura de 5°C, temos, no intervalo de 10 °C a 70 °C, 60 : 5 intervalos de 5°C, ou seja, 12 intervalos.
Logo, na PG há 12 elementos, ou seja, $n = 12$.

b) A razão q da PG é dada por:

$a_{12} = a_1 \cdot q^{11} \Rightarrow \dfrac{1}{4.096} = \dfrac{1}{2} \cdot q^{11}$

$\therefore q^{11} = \dfrac{1}{2.048} \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$

Assim, o acréscimo total do diâmetro é a soma S_{12} dos termos da PG, isto é:

$$S_{12} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4.095}{4.096}$$

Como $S_{12} < 1$, concluímos que o acréscimo total do diâmetro é menor que 1 cm.

128. Na primeira batida a estaca é enterrada 20 cm no solo; na segunda ela é enterrada mais 22 cm, na terceira ela é enterrada mais 24,2 cm e assim por diante até que na 18ª batida ela é cravada totalmente no solo. Indicando por a_{18} a medida, em centímetro, da parte enterrada da estaca na 18ª batida, observamos que a sequência de medidas em centímetro, (20; 22; 24,2; ...; a_{18}) é uma PG de razão 1,1. Assim, o comprimento da estaca, em centímetro, é a soma dos termos dessa PG, isto é:

$$S_{18} = \frac{20 \cdot [1 - 1{,}1^{18}]}{1 - 1{,}1} = 911{,}9834627$$

Concluímos, então, que o comprimento da estaca é de, aproximadamente, 9,12 m.

129. **a)** (100, 200, 400, ...)

$a_6 = 100 \cdot 2^5 = 3.200$

Logo, daqui a 6 semanas o *site* A pretende atrair 3.200 membros.

$$S_6 = \frac{100\,(1 - 2^6)}{1 - 2} = 6.300$$

Como no *site* A já havia 150 participantes, daqui a 6 semanas o *site* A espera ter 6.300 + 150 associados, ou seja, 6.450.

b) No *site* B já temos 2.200 membros; logo, queremos conseguir mais 7.800. Temos:

(100, 200, 300, ...)

$a_n = 100 + (n - 1)100 = 100n$

Fazendo $S_n = 7.800$:

$\dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = 7.800 \Rightarrow \dfrac{(100 + 100n)n}{2} = 7.800$

$\therefore n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow n = -13$ (não convém) ou $n = 12$

Logo, em 12 semanas o site B espera chegar à marca dos 10.000 membros.

130. **a)** Em relação à despesa, em milhar, temos a seguinte PA:

(800, 755, 710, ...)

Assim, temos:

$D(n) = 800 - 45n$

Queremos $D(n) < 600$:

$800 - 45n < 600 \Rightarrow n > \dfrac{200}{45}$

$\therefore n > \dfrac{40}{9}$

Como n é um número natural, concluímos que $n = 5$. Logo, em 5 meses a despesa será menor que a receita.

b) Em relação à receita, em milhar, temos a seguinte PG:

(600, 660, 726, ...)

Assim, temos:

$R(n) = 600 \cdot (1{,}1)^n$

No entanto, nessa PG, transcorrido o primeiro mês, o valor será 660, ou seja, $a_1 = 660$.

Queremos a receita acumulada em 10 meses, ou seja, S_{10}:

$$S_{10} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{660\,(1 - (1{,}1)^{10})}{1 - 1{,}1}$$

$$\therefore S_{10} = \frac{600\,(1 - 1{,}61 \cdot 1{,}61)}{-0{,}1} = 10.507{,}86$$

Logo, a receita acumulada em 10 meses será R$ 10.507.860,00.

131. Para a sequência (1, 2, 4, ... 2.048), notamos que é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$, razão $q = 2$ e $a_n = 2.048$; assim, vamos descobrir quantos elementos essa PG possui:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2.048 = 2^{n-1}$

$\therefore 2^{n-1} = 2^{11} \Rightarrow n = 12$

Assim, a cada 12 meses o pai recomeçaria o depósito, ou seja, a cada ano. Em cada período de 12 meses o acumulado será S_{12}:

$$S_{12} = \frac{1(1 - 2^{12})}{1 - 2} = 4.095$$

Ao final de 20 anos, teria 21 · 4.095 reais, ou seja, 85.995 reais.

Alternativa **d**.

132. Temos:

$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot ... \cdot 2^{20} = 2^{1 + 2 + ... + 20}$

Temos no expoente a soma dos 20 termos da PA de razão $r = 1$ e $a_1 = 1$.

Sendo S_{20} a soma dos 20 termos dessa PA, temos:

$$S_{20} = \frac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$$

$\therefore 2^{210} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot ... \cdot 2^{20}$

Portanto, devem ser acionadas as teclas:

$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

Alternativa **c**.

133. **a)** $P_E = \dfrac{8}{1{,}1} + \dfrac{8}{(1{,}1)^2} + ... + \dfrac{8}{(1{,}1)^n} + ... =$

$= 8\left[\dfrac{1}{1{,}1} + \dfrac{1}{(1{,}1)^2} + ... + \dfrac{1}{(1{,}1)^n} + ...\right]$

Notamos que $\left[\dfrac{1}{1{,}1} + \dfrac{1}{(1{,}1)^2} + ... + \dfrac{1}{(1{,}1)^n} + ...\right]$ é uma soma infinita de PG, de razão $q = \dfrac{1}{1{,}1}$; assim:

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{1{,}1}}{1 - \frac{1}{1{,}1}} = 10$$

Logo:

$P_E = 8 \cdot 10 = 80$

Portanto, o preço justo é R$ 80,00.

b) $P_E = \dfrac{4}{1,1} + ... + \dfrac{D_n}{(1,1)^n} + \dfrac{1,06 \cdot D_n}{(1,1)^{n+1}} + ...$

Trata-se de uma PG infinita de primeiro termo $a_1 = \dfrac{4}{1,1}$ e razão $q = \dfrac{1,06}{1,1}$; assim:

$$S_\infty = \dfrac{\dfrac{4}{1,1}}{1 - \dfrac{1,06}{1,1}} = \dfrac{4}{1,1} : \dfrac{0,04}{1,1} = 100$$

Logo, o preço justo nestas condições é R$ 100,00.

134. **a)** O automóvel A se desloca segundo a equação horária $S_A = 100t$, e o automóvel B se desloca segundo a equação horária $S_B = 16 + 80t$. A distância d entre os automóveis pode ser dada por $d = S_B - S_A$, ou seja $d_n = 16 - 20t_n$; assim:

- para $d_1 = 8$, temos:
  $16 - 20t_1 = 8 \Rightarrow t_1 = 0,4$
- para $d_2 = 4$, temos:
  $16 - 20t_2 = 4 \Rightarrow t_2 = 0,6$
- para $d_3 = 2$, temos:
  $16 - 20t_3 = 2 \Rightarrow t_3 = 0,7$

Logo, temos a sequência:
$(0,4; 0,6; 0,7; ...)$

b) A sequência dos intervalos de tempo decorrido entre cada instante é dada por:
$(t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3, ...) = (0,4; 0,2; 0,1; ...)$
Vamos verificar que essa sequência é uma PG:
Temos do enunciado que:
$d_{n+1} = \dfrac{d_n}{2} \Rightarrow d_n = 2d_{n+1}$ (I)
Substituindo d_n por $16 - 20t_n$ e d_{n+1} por $16 - 20t_{n+1}$ em (I):
$16 - 20t_n = 2(16 - 20t_{n+1}) \Rightarrow 40t_{n+1} = 16 + 20t_n$
$\therefore t_{n+1} = 0,4 + 0,5t_n$
Calculando a razão $q = \dfrac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n}$:

$$q = \dfrac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = \dfrac{0,4 + 0,5t_{n+1} - (0,4 + 0,5t_n)}{0,4 + 0,5t_n - t_n}$$

$$\therefore q = \dfrac{0,5t_{n+1} - 0,5t_n}{0,4 - 0,5t_n} = \dfrac{0,5(0,4 + 0,5t_n) - 0,5t_n}{0,4 - 0,5t_n}$$

$$\therefore q = \dfrac{0,2 + 0,25t_n - 0,5t_n}{0,4 - 0,5t_n} = \dfrac{0,2 - 0,25t_n}{0,4 - 0,5t_n} =$$

$$= \dfrac{0,2 - 0,25t_n}{2(0,2 - 0,25t_n)}$$

$$\therefore q = \dfrac{1}{2}$$

Logo, a razão entre os intervalos de tempo é constante e, portanto, é uma PG.

c) $(0,4; 0,2; 0,1; ...)$

$$S_\infty = \dfrac{0,4}{1 - 0,5} = 0,8$$

Essa soma representa o tempo decorrido do instante inicial até o encontro dos dois automóveis, o que no caso é 0,8 hora.

135. A afirmação é falsa, pois a velocidade de Aquiles é dez vezes a velocidade da tartaruga; assim, enquanto Aquiles percorre uma distância d, a tartaruga percorre uma distância $\dfrac{d}{10}$.
Portanto, as distâncias entre Aquiles e a tartaruga, a cada vez que Aquiles cobre a distância $A_0 J_{n-1}$, formam uma PG tal que o primeiro termo é $a_1 = d_0$ e a razão é $q = \dfrac{1}{10}$.

$$\left(d_0, \dfrac{d_0}{10}, \dfrac{d_0}{10^2}, \dfrac{d_0}{10^3}, \dfrac{d_0}{10^4}, ...\right)$$

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

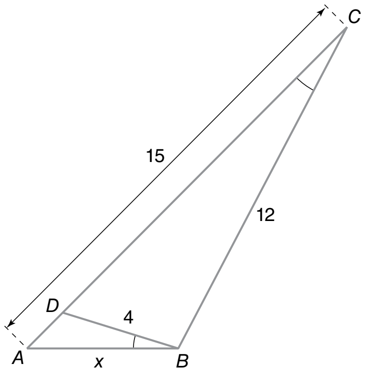
$$S_\infty = \dfrac{d_0}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{10d_0}{9}$$

Assim, Aquiles alcançará a tartaruga após percorrer a distância $\dfrac{10d_0}{9}$ no tempo $\dfrac{10t_0}{9}$.

Pré-requisitos para o capítulo 2

1. a) V b) V c) F d) V

2.



Pelo enunciado, temos que med $(A\hat{B}D)$ = med $(A\hat{C}B)$ e, para os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$, temos o ângulo $\hat{A}$ comum. Assim, pelo caso AA, $\triangle ABD \sim \triangle ABC$. Logo:

$\frac{4}{12} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 5$

3. a) 90°
b) 90°
c) hipotenusa
d) soma dos quadrados das medidas dos catetos

4. $x^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow x = 20$
Logo, a distância ente os pontos P e Q é 20 mm.

5. a) base
b) altura
c) mediana
d) congruentes
e) congruentes

6. $17^2 = (AM)^2 + 8^2 \Rightarrow AM = 15$

7. a) raio
b) 90°
c) igual
d) $B\hat{A}C$

Matemática sem fronteiras

1. Os resultados com mais de uma casa decimal foram aproximados para uma casa decimal.

Cargo: Gerência		Matriz para a conversão de graus em pontos Total mínimo de pontos = 100 Total máximo de pontos = 500					
Fatores de avaliação	**Ponderação (pesos)**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
Escolaridade	19	19	38	57	76	95	—
Conhecimento específico	13	13	30,3	47,6	65	—	—
Responsabilidade pelo patrimônio	13	13	23,4	33,8	44,2	54,6	65
Experiência	18	18	54	90	—	—	—
Responsabilidade por contatos	14	14	28	42	56	70	—
Responsabilidade por supervisão	11	11	22	33	44	55	—
Complexidade	12	12	24	36	48	60	—

2. Os resultados com mais de uma casa decimal foram aproximados para uma casa decimal.

Cargo: Gerência		Matriz para a conversão de graus em pontos Total mínimo de pontos = 100 Total máximo de pontos = 500					
Fatores de avaliação	**Ponderação (pesos)**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
Escolaridade	19	19	28,4	42,5	63,5	95	—
Conhecimento específico	13	13	22,2	38,0	65	—	—
Responsabilidade pelo patrimônio	13	13	17,9	24,7	34,1	47,1	65
Experiência	18	18	40,2	90	—	—	—
Responsabilidade por contatos	14	14	20,9	31,3	46,8	70	—
Responsabilidade por supervisão	11	11	16,4	24,6	36,8	55	—
Complexidade	12	12	17,9	26,8	40,1	60	—

3. Resposta pessoal. Por exemplo, no endereço http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/4.pdf, há o trabalho "Um modelo matemático de gestão de Recursos Humanos", que trata de otimização de custos.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno não verificou a condição de existência da soma dos termos da PG, que é $-1 < \frac{x}{2} < 1$.

Resolução correta:

O primeiro membro da equação representa a soma dos infinitos termos da PG em que o primeiro termo a_1 e a razão q são x e $\frac{x}{2}$, respectivamente. A condição para que exista essa soma é que $-1 < \frac{x}{2} < 1$, ou seja, $-2 < x < 2$.

Sob essa condição, aplicamos a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$:

$$6 - 4x = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \Rightarrow 6 - 4x = \frac{x}{\frac{2 - x}{2}}$$

$$\therefore\ 6 - 4x = \frac{2x}{2 - x} \Rightarrow 12 - 6x - 8x + 4x^2 = 2x$$

$$\therefore\ 4x^2 - 16x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Calculando o discriminante da equação, temos:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

Logo:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Apenas $x = 1$ satisfaz a condição de existência; portanto, o conjunto solução é $S = \{1\}$.