Joamir Souza
Jacqueline Garcia

#contato Matemática

3

Ensino Médio
Componente curricular
Matemática

Manual do Professor

FTD

#contato Matemática

3

Manual do Professor

Ensino Médio

Componente curricular

Matemática

Joamir Roberto de Souza

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Atua como professor de Matemática da rede pública de ensino.

Autor de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Pós-graduada em Psicopedagogia pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Atuou como professora na rede particular em Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no estado do Paraná.

Realiza palestras e assessorias para professores em escolas particulares.

FTD

1ª edição \ São Paulo \ 2016

Diretor editorial	Lauri Cericato
Gerente editorial	Flávia Renata P. A. Fugita
Editora	Cibeli de Oliveira Chibante Bueno
Editor assistente	Marcos Antonio Silva
Gerente de produção editorial	Mariana Milani
Coordenador de produção editorial	Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Coordenadora de arte	Daniela Máximo
Coordenadora de preparação e revisão	Lilian Semenichin
Supervisora de preparacão e revisão	Izabel Rodrigues
Revisão	Dilma Ratto, Iara Soldera, Renato Colombo, Yara Afonso
Coordenador de iconografia e licenciamento de textos	Expedito Arantes
Supervisora de licenciamento de textos	Elaine Bueno
Iconografia	Marcia Trindade
Coordenadora de ilustrações e cartografia	Marcia Berne
Diretor de operações e produção gráfica	Reginaldo Soares Damasceno

Produção editorial	Scriba Projetos Editoriais
Edição	Denise Maria Capozzi
Assistência editorial	Marcela M. Bagagini Cardoso, Sheila C. Molina, Karina T. de Melo
Assessoria	Antonio Carlos Saraiva Branco
Projeto gráfico	Laís Garbelini e Hatadani
Capa	Marcela Pialarissi
Imagem de capa	denniro/Shutterstock.com
Edição de ilustrações	Maryane Vioto e Camila Ferreira
Diagramação	Carlos Cesar Ferreira
Tratamento de imagens	José Vitor Elorza Costa
Ilustrações	Camila Ferreira, Davi Augusto, Desenhorama Estúdio, Guilherme Casagrandi, Kendra Rubio, Laís Garbelini, Maryane Vioto Silva, N. Akira, Ronaldo Lucena, Sergio Lima, Somma Studio
Cartografia	E. Cavalcante
Revisão	Ana Paula Felippe
Assistência de produção	Paulo Ricardo Mercadante, Daiana Melo e Tamires Azevedo
Autorização de recursos	Erick L. Almeida
Pesquisa iconográfica	Tulio Sanches
Editoração eletrônica	Luiz Roberto L. Correa (Beto)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Souza, Joamir Roberto de
#Contato matemática, 3º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2016. – (Coleção #contato matemática)

"Componente curricular: matemática"
ISBN 978-85-96-00312-4 (aluno)
ISBN 978-85-96-00313-1 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Garcia, Jacqueline da Silva Ribeiro. II. Título. III. Série.

16-02548 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

EDITORA FTD S.A.

Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo-SP
CEP 01326-010 – Tel. (0-XX-11) 3598-6000
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
E-mail: central.atendimento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD S.A.
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo a nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossas vidas.

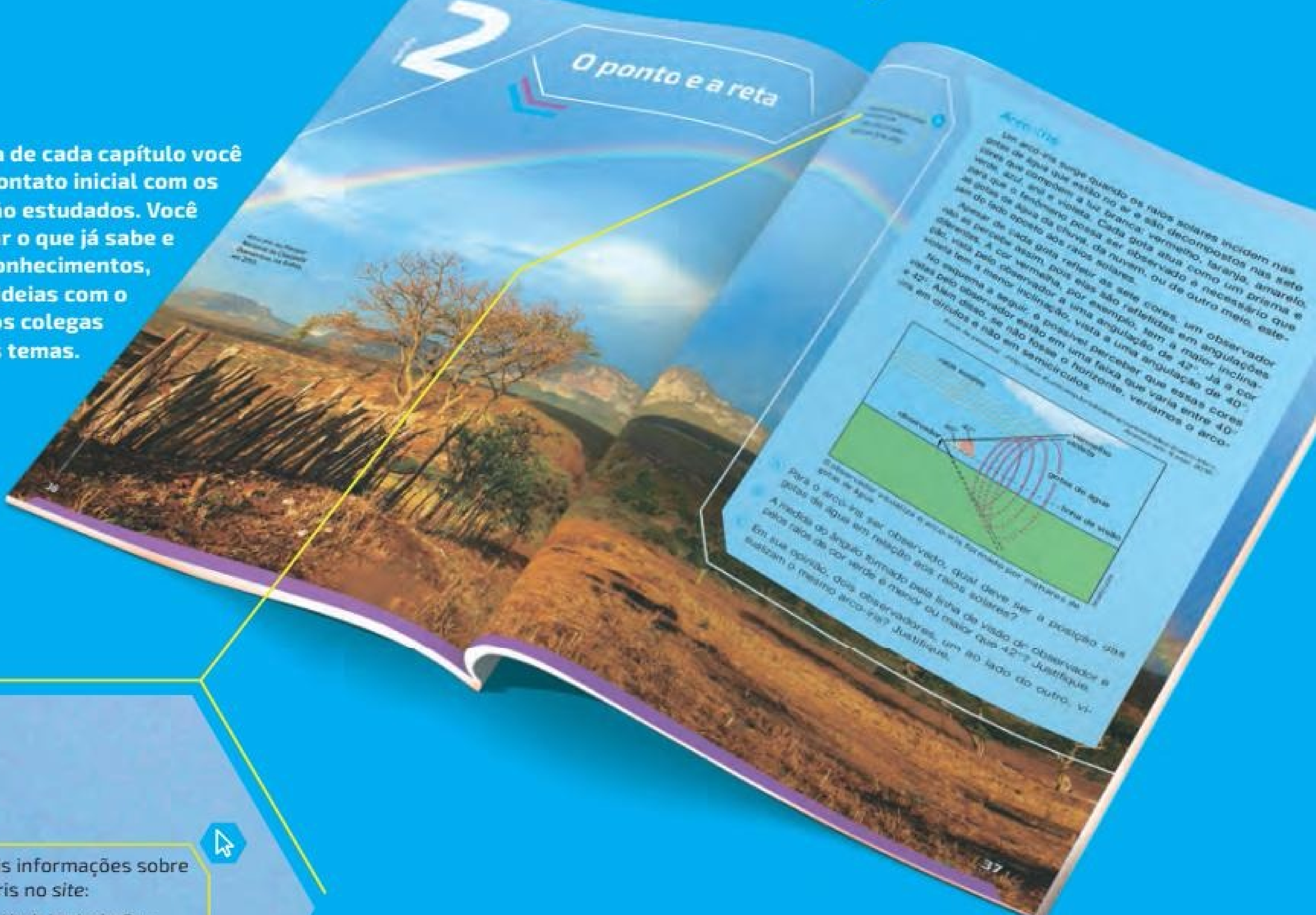
Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos e atividades resolvidas, seguidos de propostas de atividades que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso do computador e da promoção da cidadania.

Por fim, desejamos que você, aluno ou aluna, desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso desse material com dedicação e entusiasmo.

Os autores.

Nas **Orientações para o professor**, há sugestões que complementam o livro do aluno e podem auxiliar na sua condução, além das resoluções das atividades propostas. Sugerimos que essas orientações sejam consultadas antes do trabalho com os conteúdos em sala de aula, para serem julgadas e utilizadas conforme a sua realidade e possam contribuir no processo ensino-aprendizagem.

Abertura



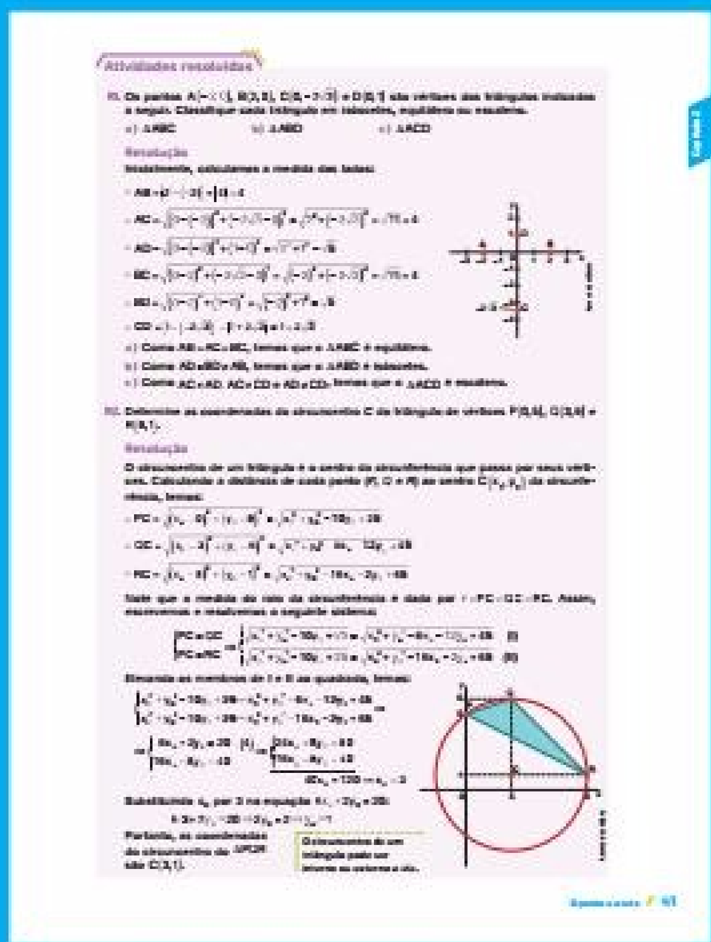
Na abertura de cada capítulo você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversos temas.

Veja mais informações sobre o arco-íris no *site*:

- <http://tub.im/roka8v> (acesso em: 26 fev. 2016)

Este quadro traz sugestões de *sites* para você pesquisar e ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado.

Atividades resolvidas

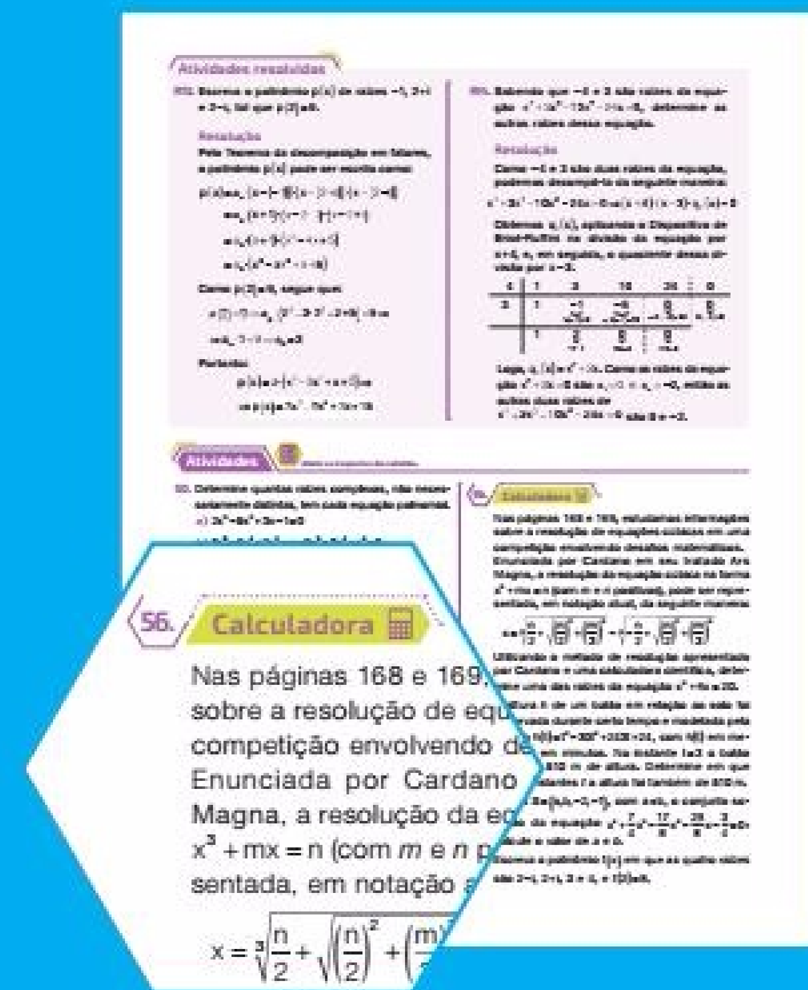


Estas atividades auxiliam a exercitar habilidades e estratégias para resolver todas as outras atividades propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Atividades

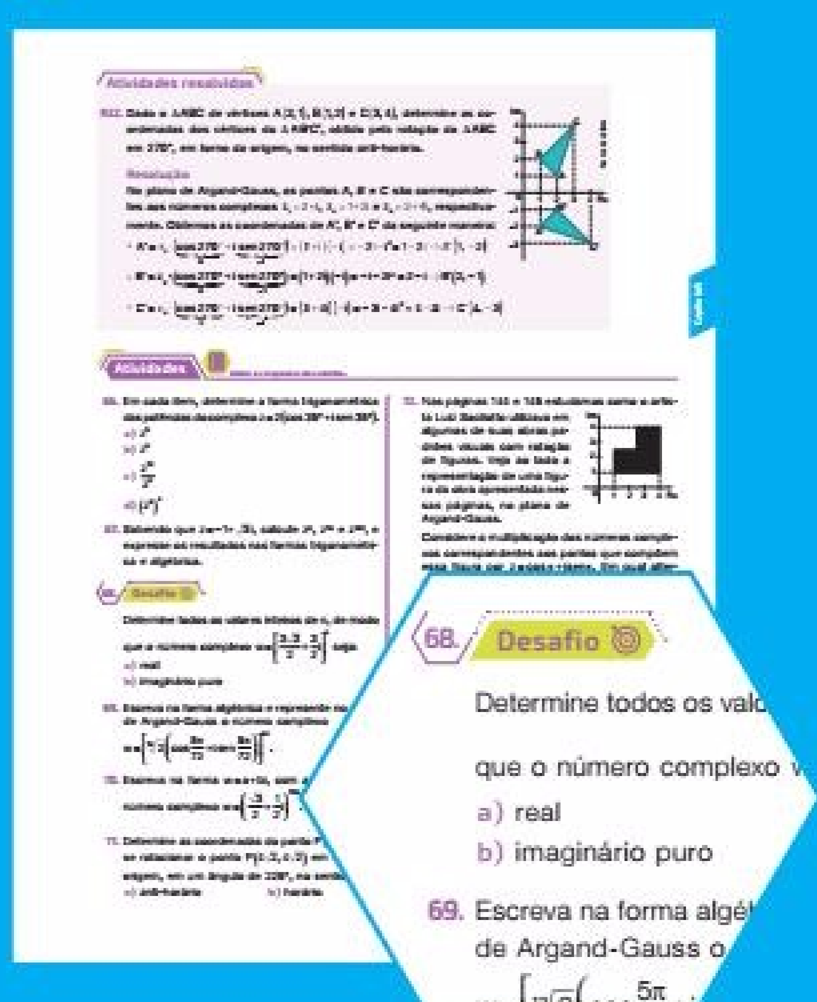
Esta seção apresenta atividades diversificadas para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Várias delas apresentam relações com outras disciplinas e áreas do conhecimento, além de questões aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Calculadora



As atividades com a tarja calculadora exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Desafio

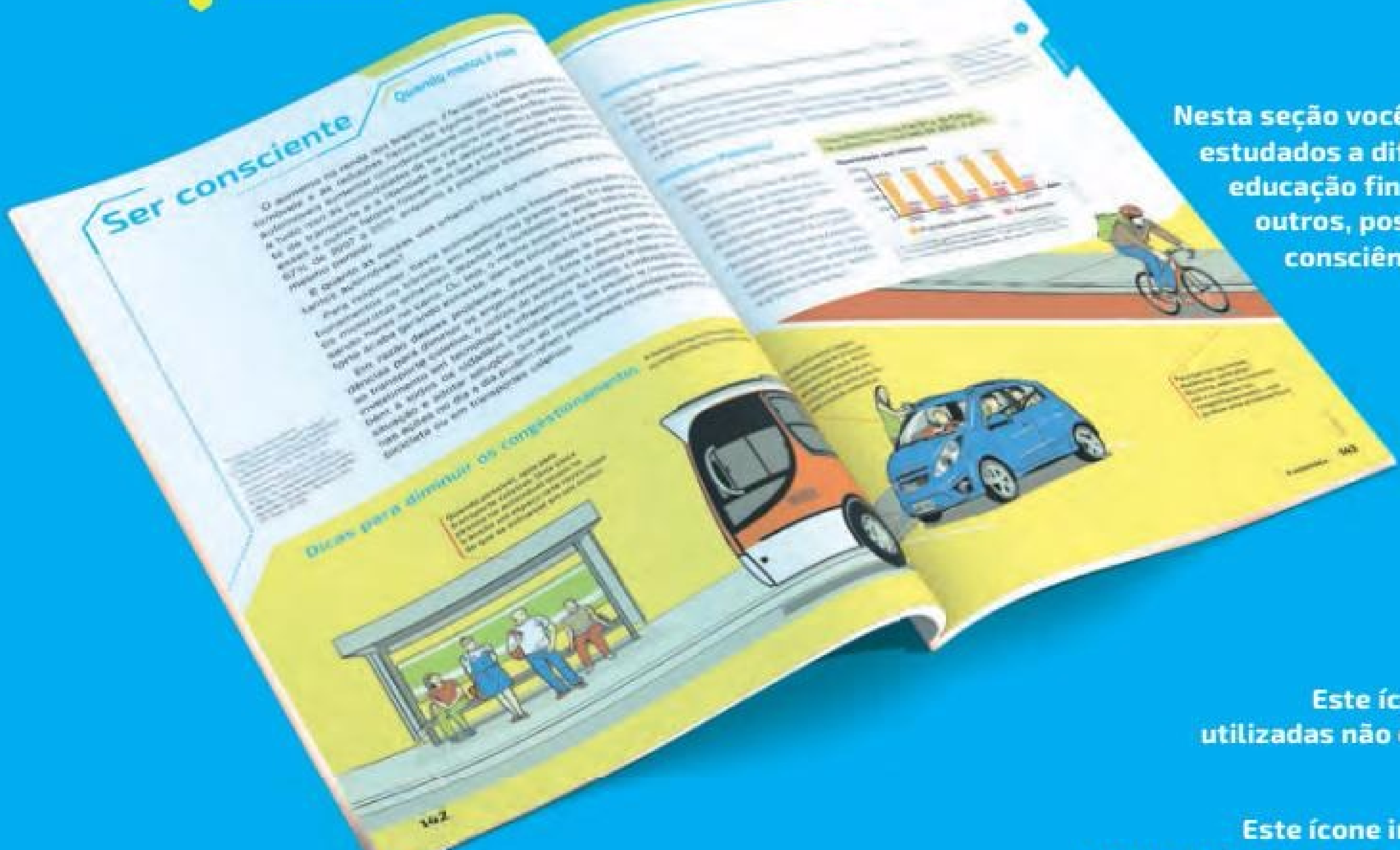


As atividades com a tarja desafio possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Contexto

Esta atividade permite que você relacione, de maneira mais expressiva, o conteúdo matemático em estudo com situações do cotidiano, de outras disciplinas ou áreas do conhecimento.

Ser consciente



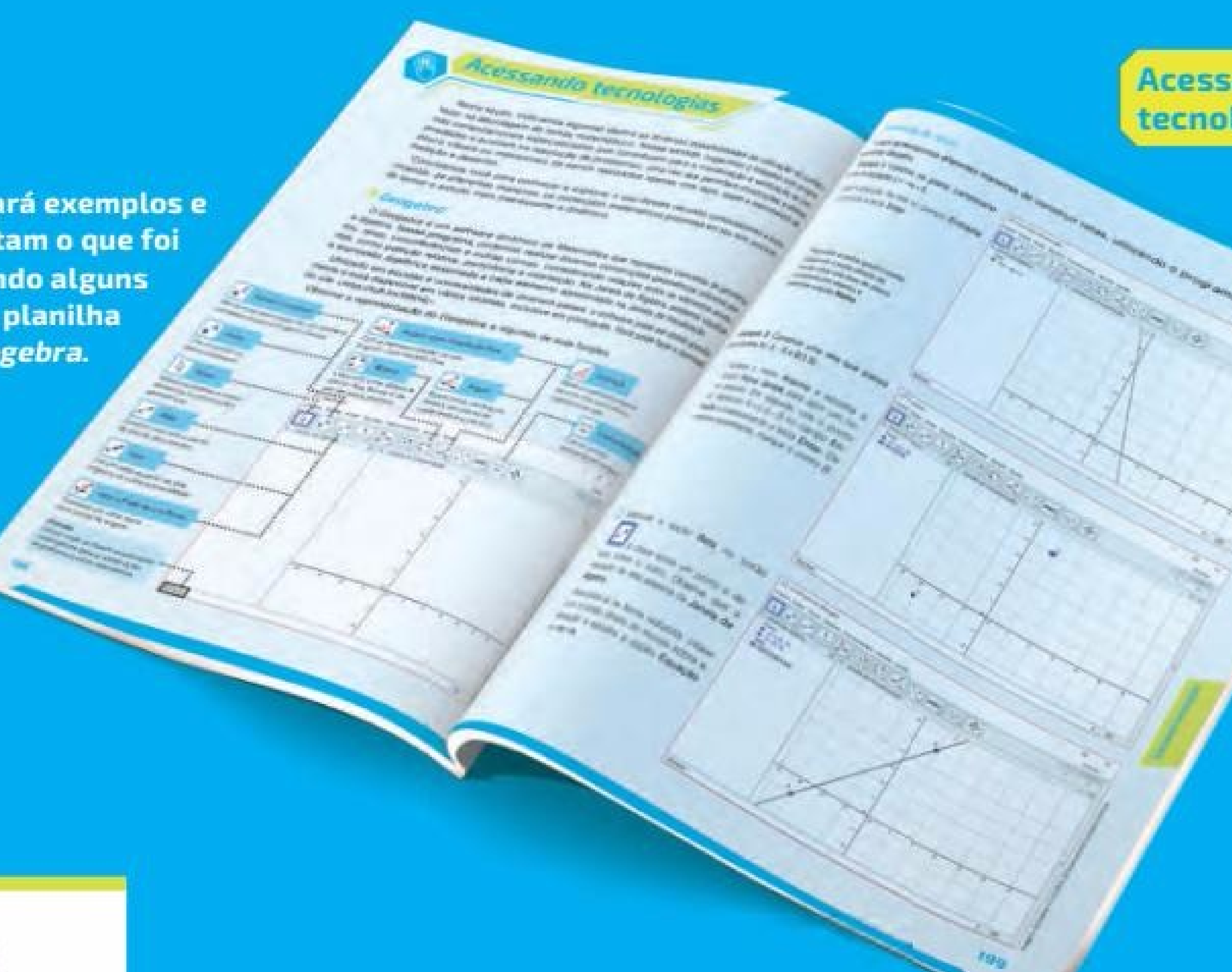
Nesta seção você aplicará os conceitos matemáticos estudados a diferentes assuntos, como ética, educação financeira, cidadania, saúde, entre outros, possibilitando uma reflexão e consciência sobre o tema abordado.

Este ícone indica que as cores utilizadas não correspondem às reais.

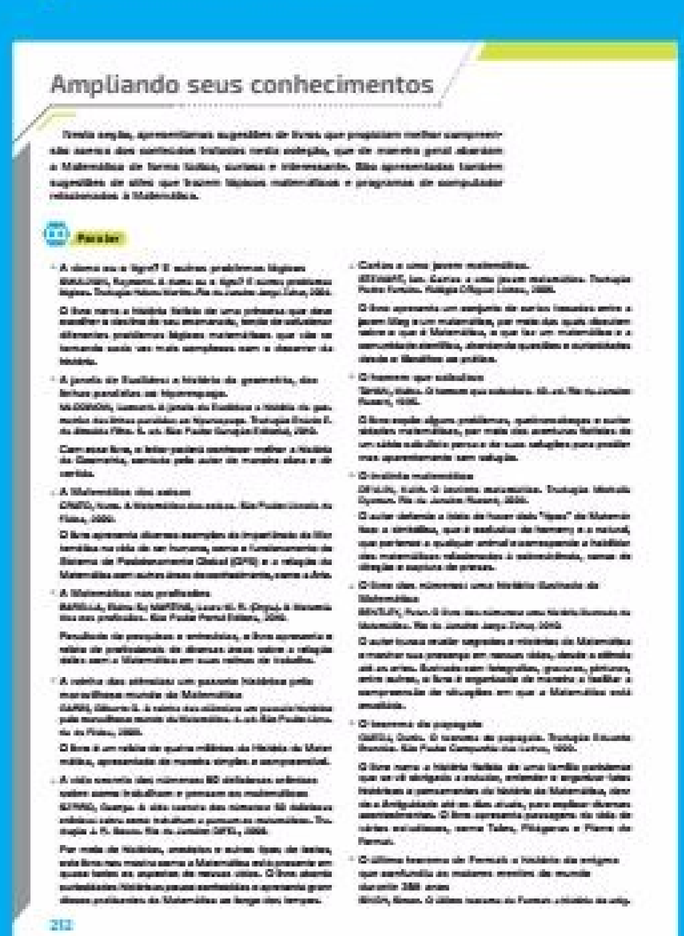
Este ícone indica que os elementos apresentados não estão proporcionais entre si.

Acessando tecnologias

Nesta seção você encontrará exemplos e atividades que complementam o que foi estudado nos capítulos, utilizando alguns programas de computador, como planilha eletrônica e *Geogebra*.



Ampliando seus conhecimentos



Esta seção apresenta sugestões de livros e *sites* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos capítulos e ampliar seus conhecimentos.

Sumário

As cédulas e moedas que aparecem nesta página não estão em tamanho real nem estão proporcionais entre si.

Imagens: Captura via escâner

Ronaldo Almeida/ Shutterstock.com

capítulo 1

Matemática financeira

Fábio Motta/Estadão Conteúdo

Produção de cédulas de real na Casa da Moeda do Brasil, no Rio de Janeiro (RJ), em 2012.

*Ao analisar as respostas do item C, espera-se que os alunos percebam que, mesmo com uma quantidade menor em circulação, quando comparado à de moedas, havia maior valor monetário em cédulas no meio circulante. Isso ocorre por causa dos valores correspondentes de cada cédula e moeda em circulação.

Meio circulante

Você já parou para pensar como eram as relações comerciais quando não existia o dinheiro?

Por muitos séculos, as pessoas utilizavam o **escambo** quando precisavam de alguma mercadoria. Na prática, para conseguir um produto que necessitava, tinha de oferecer algo em troca ao outro negociante, que, por sua vez, tinha de estar interessado naquilo que se estava dispondo. Essa necessidade mútua entre os negociantes tornava, em muitas situações, complicadas as transações. Foi de situações como essas que surgiram as primeiras moedas.

Atualmente, cada país é responsável e tem sua própria moeda, como o real no Brasil, o iene no Japão e o dólar nos Estados Unidos.

No Brasil, a fabricação das cédulas e moedas de real é de responsabilidade da Casa da Moeda do Brasil (CMB), que também controla o meio circulante nacional, que corresponde às cédulas e moedas metálicas que estão em poder público e na rede bancária.

É possível consultar no *site* do Banco Central do Brasil <http://tub.im/8gu5jg> o valor do meio circulante em determinada data. No dia 11 de novembro de 2015, por exemplo, o meio circulante nacional era de R$ 205 883 189 316,04, distribuídos da seguinte maneira:

Cédulas em papel ou polímero

Imagens: Captura via escâner

Quantidade: 5 800 646 829
Valor: R$ 199 975 883 359,00

Moedas metálicas comuns e comemorativas

As cédulas e moedas que aparecem nesta página não estão em tamanho real nem estão proporcionais entre si.

Quantidade: 23 684 398 919
Valor: R$ 5 907 305 957,04

Fonte de pesquisa: <www4.bcb.gov.br/adm/mecir/Resposta.asp>. Acesso em: 13 nov. 2015.

Escambo: troca de mercadorias sem uso de moeda.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A) Antes do surgimento das moedas, em geral, como eram feitas as transações de mercadorias?
Por meio de trocas, também chamadas de escambos.

B) O que é o meio circulante nacional? Resposta esperada: são as cédulas e moedas metálicas que estão em poder público e na rede bancária.

C) Em 11 de novembro de 2015, havia em circulação no Brasil uma quantidade maior de cédulas ou de moedas de real? Em relação a valor monetário, nesse mesmo dia, a quantia em circulação era maior em cédulas ou em moedas? Analise e compare suas respostas. moedas; cédulas
*

Veja mais informações sobre o real nos *sites*:
- <http://tub.im/7oaeq6>
- <http://tub.im/qoi4mv>

(acesso em: 16 mar. 2016)

Estudando Matemática financeira

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados os exemplos e as atividades das páginas **206** e **207** da seção **Acessando tecnologias**.

Utilizar o dinheiro de maneira adequada, sabendo gastar mensalmente uma quantia menor do que a que se ganha, e poupar alguma parte dessa remuneração são importantes para uma vida financeira equilibrada. Nesse sentido, estudar porcentagem, acréscimo, desconto e juro, que são alguns elementos que compõem a chamada Matemática financeira, é fundamental.

Observe algumas situações envolvendo a Matemática financeira.

Quando tomamos um empréstimo, temos de pagar juro e outras despesas.

Quando compramos um produto, podemos obter descontos pagando à vista, ou acréscimos, pagando a prazo.

O não pagamento do valor total da fatura do cartão de crédito pode ocasionar uma grande dívida, uma vez que a taxa de juro, nesse caso, costuma ser alta.

Ao pouparmos e realizarmos aplicações financeiras, costumamos receber juros.

Podemos frequentar um curso universitário em uma instituição particular fazendo um financiamento estudantil.

Ilustrações: Somma Studio

Neste capítulo, iremos estudar várias situações envolvendo Matemática financeira. Antes, porém, vamos relembrar alguns conceitos relacionados à porcentagem.

Porcentagem

Provavelmente você já estudou em anos anteriores assuntos envolvendo porcentagem. Leia a informação a seguir.

> Segundo o Comitê Gestor da Internet no Brasil, entre outubro de 2014 e março de 2015, 50 em cada 100 domicílios brasileiros possuíam computador.
>
> Fonte de pesquisa: <http://cetic.br/tics/usuarios/2014/total-brasil/A1/>. Acesso em: 19 nov. 2015.

A relação "50 em cada 100" pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100, isto é, $\frac{50}{100}$, que também pode ser representada na forma decimal ou em porcentagem.

lê-se: "cinquenta por cento"

$$\frac{50}{100} = 0,5 = 50\,\%$$

> A porcentagem corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Para indicá-la, utilizamos o símbolo %. Toda razão $\frac{x}{100}$ é denominada **taxa percentual**.

Toda fração decimal ou equivalente a ela pode ser escrita na forma de porcentagem.

Exemplo 1

Em uma sala de aula do 3º ano do Ensino Médio há 25 alunos, sendo que, desses, 12 são do sexo masculino. Podemos determinar de diferentes maneiras a taxa percentual de alunos do sexo masculino da sala:

- Como 12 em cada 25 alunos são do sexo masculino, obtemos a fração $\frac{12}{25}$.

  Escrevendo uma fração equivalente a $\frac{12}{25}$ com denominador igual a 100, temos:

$$\frac{12}{25}=\frac{12\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{48}{100}=48\%$$

- Utilizando número decimal:

$$\frac{12}{25}=0{,}48=\frac{48}{100}=48\%$$

- Utilizando regra de três:

$$\frac{12}{25}=\frac{x}{100}\Rightarrow 25x=1\,200\Rightarrow x=48$$

Portanto, a taxa percentual de alunos do sexo masculino dessa sala é 48%.

No 1º caso do exemplo 1, foi simples obter a fração equivalente a $\frac{12}{25}$ com denominador 100. No entanto, isso nem sempre acontece. Dessa maneira, diga aos alunos que o modo mais conveniente para se obter a taxa percentual depende da situação.

Exemplo 2

O tanque de combustível de um carro, que tem capacidade para 45 L, estava cheio. Desse total, foram consumidos 18 L. Podemos determinar a taxa percentual do combustível consumido da seguinte maneira:

Como 18 L de 45 L foram consumidos, escrevemos a fração $\frac{18}{45}$. Assim:

$$\frac{18}{45}=0{,}4=\frac{40}{100}=40\%$$

Portanto, a taxa percentual do combustível consumido é 40%.

Para determinar a taxa percentual nesse caso, também poderíamos utilizar uma das outras maneiras apresentadas no exemplo 1.

Exemplo 3

José irá pagar a taxa de condomínio do prédio onde mora, que nesse mês é R$ 512,00, antes do vencimento, obtendo um desconto de 8% sobre esse valor. Podemos calcular o valor do condomínio que José irá pagar da seguinte maneira:

- Calculamos inicialmente quantos reais correspondem a 8% do valor do condomínio:

$$8\%\text{ de }512\longrightarrow\frac{8}{100}\cdot 512=0{,}08\cdot 512=40{,}96$$

  Subtraindo o valor obtido da taxa de condomínio:

$$512-40{,}96=471{,}04$$

- Outra maneira de obter a taxa de condomínio com desconto é considerar R$ 512,00 como 100%. Com o desconto, o valor passou a ser 100% − 8% = 92%. Realizando o cálculo, temos:

$$92\%\text{ de }512\longrightarrow\frac{92}{100}\cdot 512=0{,}92\cdot 512=471{,}04$$

Portanto, o valor da taxa de condomínio com o desconto é R$ 471,04.

Exemplo 4

Fernanda pagou R$ 375,00 em uma prestação do financiamento de sua motocicleta, o que corresponde a 12% de seu salário. Podemos calcular o valor do salário de Fernanda da seguinte maneira:

Nomeando o salário de Fernanda de *s*, temos:

$$12\%\text{ de }s\longrightarrow\frac{12}{100}\cdot s=375\Rightarrow 12s=37\,500\Rightarrow s=\frac{37\,500}{12}\Rightarrow s=3\,125$$

Portanto, o salário de Fernanda é R$ 3 125,00.

> Exemplo 5

Certo eletrodoméstico teve um reajuste de 3%, passando a custar R$ 590,00. Podemos calcular o valor desse eletrodoméstico antes do reajuste da seguinte maneira:

Nomeando de x o preço do eletrodoméstico antes do reajuste, esse preço era 100% de x. Após o reajuste de 3%, o preço passou a ser 100%+3%=103% de x. Assim, temos:

$$\frac{103}{100}x = 590 \Rightarrow 103x = 59\,000 \Rightarrow x = \frac{59\,000}{103} \Rightarrow x \simeq 572{,}82$$

Portanto, o preço do eletrodoméstico antes do reajuste era de aproximadamente R$ 572,82.

Atividades resolvidas

R1. A mensalidade de um curso de inglês no mês de setembro era de R$ 360,00. No mês seguinte, o valor da mensalidade sofreu um acréscimo de 9%. Qual o valor da mensalidade após o acréscimo?

Resolução

Podemos calcular o valor da mensalidade após o acréscimo de duas maneiras.

- **1ª maneira**: calculamos o valor correspondente a 9% da mensalidade antes do acréscimo e, em seguida, adicionamos o valor obtido ao da mensalidade de setembro:

$$9\% \text{ de } 360 \rightarrow \frac{9}{100} \cdot 360 = 0{,}09 \cdot 360 = 32{,}4$$

$$360 + 32{,}4 = 392{,}4$$

- **2ª maneira**: consideramos o valor da mensalidade antes do acréscimo como 100%, que, então, após o acréscimo passou a ser 100% + 9% = 109%:

$$109\% \text{ de } 360 \rightarrow \frac{109}{100} \cdot 360 = 1{,}09 \cdot 360 = 392{,}4$$

Portanto, o valor da mensalidade após o acréscimo é R$ 392,40.

R2. Márcia paga mensalmente uma prestação correspondente a 5% do seu salário. Em certo mês, a prestação teve um desconto de 4%, e o salário de Márcia, um acréscimo de 8%. Nesse mês, a qual porcentagem do salário correspondeu à prestação?

Resolução

Nomeando de P_0 e S_0 os valores da prestação e do salário, antes do desconto e do acréscimo, respectivamente.

$$P_0 \text{ corresponde a 5\% de } S_0 \rightarrow P_0 = \frac{5}{100} \cdot S_0 \Rightarrow \frac{P_0}{S_0} = \frac{5}{100}$$

Sejam P e S os valores da prestação e do salário, após o desconto e o acréscimo, respectivamente. A prestação diminuiu 4%, e o salário aumentou 8%; logo:

- P corresponde a $\underbrace{96\%}_{100\% - 4\%}$ de $P_0 \rightarrow P = \frac{96}{100} \cdot P_0$
- S corresponde a $\underbrace{108\%}_{100\% + 8\%}$ de $S_0 \rightarrow S = \frac{108}{100} \cdot S_0$

Desse modo, a razão entre o valor da prestação e o do salário é:

$$\frac{P}{S} = \frac{\frac{96}{\cancel{100}} \cdot P_0}{\frac{108}{\cancel{100}} \cdot S_0} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{96}{108} \cdot \underbrace{\frac{P_0}{S_0}}_{\frac{5}{100}} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{96}{108} \cdot \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{2}{45} = 0{,}0\overline{4} = 4{,}\overline{4}\%$$

Portanto, nesse mês, o valor da prestação correspondeu a $4{,}\overline{4}\%$ do salário de Márcia.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva cada fração na forma de porcentagem.

a) $\frac{3}{10}$ 30%
b) $\frac{17}{25}$ 68%
c) $\frac{7}{50}$ 14%
d) $\frac{24}{75}$ 32%
e) $\frac{1}{8}$ 12,5%

2. Escreva cada porcentagem em sua forma decimal.

a) 7% 0,07
b) 48% 0,48
c) 90% 0,9
d) 4,5% 0,045
e) 61,38% 0,6138

3. Alessandra joga basquete pelo time da escola, e em certo jogo arremessou 15 bolas à cesta. Qual foi a taxa de aproveitamento de Alessandra sabendo que foram convertidos 6 desses arremessos? 40%

4. O Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M) é o índice utilizado para o cálculo do reajuste de aluguéis de imóveis. O aluguel do apartamento em que Roberto mora será reajustado de acordo com esse índice, que, no período considerado, foi de 11,32%. Sabendo que Roberto paga R$ 625,00 de aluguel, qual deverá ser o novo valor após o reajuste? R$ 695,75

5. Em certa oferta de um *site* de compras coletivas, foram vendidas 450 unidades de determinado produto, que é normalmente vendido por R$ 59,00, com desconto de 60%, sendo permitida a compra de apenas uma unidade por pessoa. Por algum motivo, 8% das pessoas não retiraram o produto no prazo estabelecido, perdendo o direito ao produto, sem a possibilidade de reaver o valor pago.

a) Com quantos reais de desconto esse produto estava sendo ofertado? R$ 35,40

b) Quantas pessoas deixaram de retirar o produto no estabelecimento? 36 pessoas

6. Vimos nas páginas **8** e **9** que o valor do meio circulante no Brasil no dia 11 de novembro de 2015 era de R$ 205 883 189 316,04. No dia seguinte, o meio circulante brasileiro contabilizou R$ 204 324 679 384,04.

Essa diferença indica que entre esses dois dias ocorreu no valor do meio circulante: c

a) um aumento entre 0,5% e 1%
b) um aumento entre 1% e 2%
c) uma redução entre 0,5% e 1%
d) uma redução entre 1% e 2%

7. Guilherme fez a prova de um concurso público, mas não foi aprovado. Veja a seguir o seu desempenho.

Matéria	Número de questões	Número de acertos
Conhecimentos gerais	12	8
Informática	13	7
Matemática	15	9
Português	10	6

a) Quantos por cento das questões da prova ele acertou? 60%

b) Em qual matéria Guilherme obteve o melhor desempenho? E o pior desempenho? Conhecimentos gerais; Informática

c) Em seus estudos, a qual matéria Guilherme deve se dedicar mais para tentar ser aprovado no próximo concurso? Por quê? Informática; Uma possível resposta: pois nessa matéria ele obteve o pior desempenho.

8. Antes de concluir a compra de um computador, Marisa realizou uma pesquisa de preços de um mesmo modelo em duas lojas.

- Loja **A**: R$ 1 290,00 com desconto de 8% no pagamento à vista.
- Loja **B**: R$ 1 350,00 com desconto de 14% no pagamento à vista.

Em qual das duas lojas é mais vantajoso Marisa realizar a compra à vista? Nessa loja, quantos reais ela irá pagar pelo computador? loja B; R$ 1 161,00

9. Para atrair a atenção dos consumidores, um comerciante, percebendo que certo modelo de tênis em sua loja custava R$ 20,00 mais caro que na loja concorrente, realizou uma promoção oferecendo 8% de desconto, para que o preço na sua loja ficasse R$ 10,00 mais barato que na loja concorrente. Qual é o preço desse tênis na loja concorrente? R$ 355,00

10. O preço de uma motocicleta, que custava R$ 12 000,00, teve aumento de 25%. Devido à queda nas vendas por causa do aumento, o preço dessa motocicleta sofreu uma redução, voltando a custar o mesmo que antes do aumento.

a) Qual foi o preço dessa motocicleta após o aumento? R$ 15 000,00

b) Qual foi a taxa aplicada para que o preço da motocicleta voltasse a ser o mesmo de antes do aumento? 20%

c) As taxas de aumento e redução foram iguais? Justifique. Não, pois R$ 3 000,00 correspondem a uma taxa de 25% referente a R$ 12 000,00 e a uma taxa de 20% referente a R$ 15 000,00 e essas taxas são diferentes.

11. Uma revendedora de automóveis usados tem um lucro de 12% por automóvel vendido, sobre o preço de venda. Supondo que em uma venda ela obtenha lucro de R$ 2 520,00, por quantos reais foi vendido esse automóvel? R$ 21 000,00

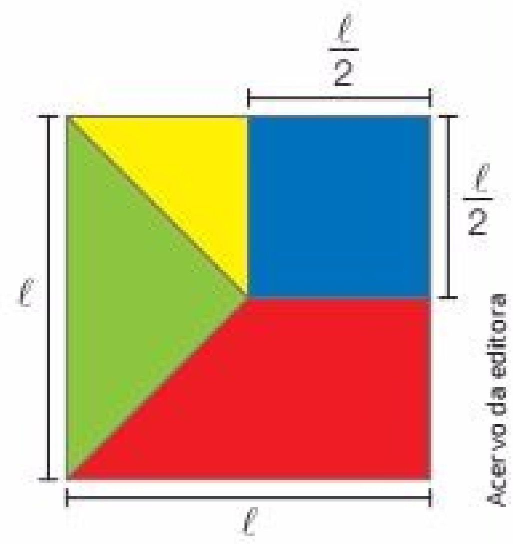
12. Em uma negociação salarial entre o sindicato de uma categoria e as empresas, verificou-se que, se o piso salarial aumentasse 7%, passaria a ser R$ 2 011,60. Mas se o aumento for de 13%, qual será o piso salarial dessa categoria? R$ 2 124,40

13. Em um pequeno município, foram computados 10 300 votos para a eleição de prefeito. O candidato da situação (do mesmo partido político do atual prefeito) obteve 32% dos votos, e o candidato da oposição obteve 41% dos votos.

Quantos votos de diferença houve entre esses dois candidatos? 927

14. A diferença entre dois números naturais é 40. Adicionando 30% do maior número com 60% do menor número obtemos 75. Quais são esses números? 110 e 70

15. O logotipo de uma empresa pode ser formado por um símbolo que representa sua marca, indicando os serviços ou produtos que comercializa. Muito utilizado em anúncios, é um modo de tornar a empresa conhecida. Veja o logotipo, em formato de quadrado, de determinada escola infantil.



a) Quantos por cento do total representa a parte amarela? E a parte verde? 12,5%; 25%

b) Em relação à parte azul, a parte vermelha corresponde a quantos por cento a mais? 50%

16. O gerente de uma loja concedeu um desconto de 10% em certa mercadoria que custava R$ 40,00. Devido ao grande volume de vendas dessa mercadoria, o preço sofreu um acréscimo de 11%. Podemos afirmar que o preço final dessa mercadoria, em relação ao preço inicial: c

a) aumentou R$ 0,40
b) não sofreu alteração
c) diminuiu R$ 0,04
d) aumentou R$ 0,04
e) diminuiu R$ 0,40

17. Lucas comprou um sofá, uma mesa de jantar e uma cama de casal, gastando no total R$ 4 755,00. O sofá custou R$ 1 125,00 a mais que a mesa de jantar, e o preço da cama de casal é 45% do preço do sofá. Qual é o preço de cada mercadoria comprada por Lucas? sofá: R$ 2 400,00; mesa de jantar: R$ 1 275,00; cama de casal: R$ 1 080,00

18. Para produzir uma encomenda de certo tipo de parafuso, uma indústria colocou em funcionamento duas de suas máquinas. Da quantidade total, a máquina **A** produziu 60%, e a **B**, 40%. Sabendo que as máquinas **A** e **B** produzem, respectivamente, 1% e 3% de parafusos defeituosos, determine a porcentagem de parafusos defeituosos dessa encomenda. 1,8%

19. (Enem-MEC) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente: e

a) 740
b) 1 100
c) 1 310
d) 1 620
e) 1 750

Enfisema pulmonar: doença caracterizada pela perda da elasticidade da musculatura pulmonar, geralmente causada por uma irritação prolongada.

20. Nicolo Tartaglia, também conhecido como "o gago", devido a um ferimento no céu da boca, nasceu em Brescia (1499) e faleceu em Veneza (1557), na Itália. Credita-se a Tartaglia o mérito de ser o primeiro a utilizar Matemática na balística de artilharias. Ele também escreveu o que se considera a melhor Aritmética do século XVI, que contém discussões de operações numéricas e Aritmética mercantil de seu tempo.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 307-308.

Resolva o problema a seguir proposto por Tartaglia, que envolve transações financeiras entre moedas distintas.

> [...]
>
> Se 100 liras de Módena equivalem a 115 liras de Veneza, 180 liras de Veneza valem 150 em Corfu, e 240 liras de Corfu montam a 360 liras de Negroponte, por quantas liras de Módena se cambiam 666 de Negroponte?
>
> [...] aproximadamente 463,30 liras de Módena

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 322.

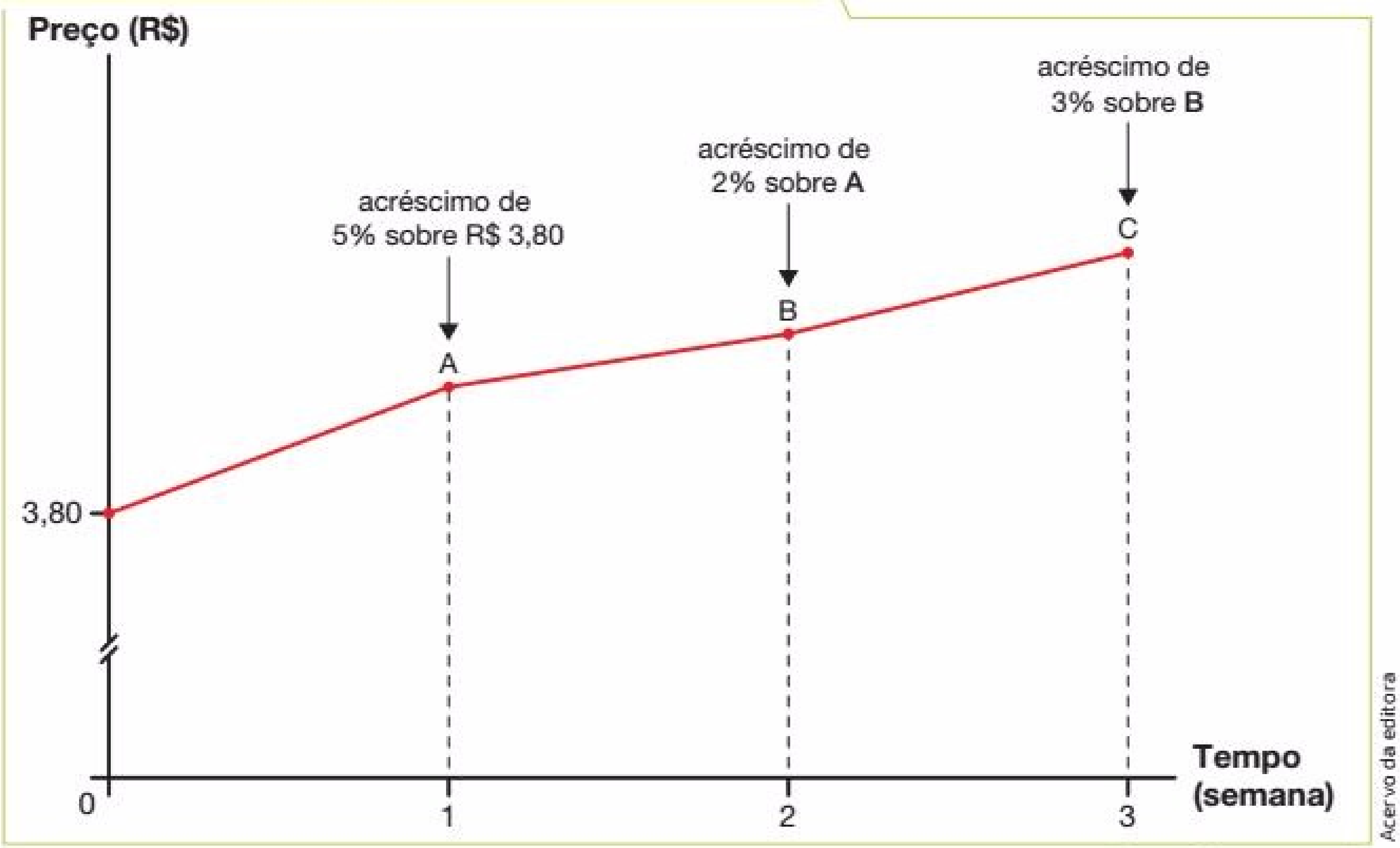
Acréscimos e descontos sucessivos

No tópico anterior, vimos algumas situações envolvendo acréscimos e descontos. Nelas, tanto os acréscimos quanto os descontos incidiam sobre o valor inicial. Agora, iremos estudar algumas situações envolvendo acréscimos e descontos sucessivos. Veja alguns exemplos:

Exemplo 1

Em um supermercado, 1L de leite custava R$ 3,80. Em razão da baixa produtividade na entressafra, o produto teve, durante três semanas, acréscimos de 5%, 2% e 3%, respectivamente.

Preço de 1 L de leite em um supermercado



Fonte: Supermercado.

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Podemos calcular o preço do litro de leite nesse supermercado após os acréscimos da seguinte maneira:

1º acréscimo: $\overbrace{105\%}^{100\%+5\%}$ de 3,8 $\rightarrow \dfrac{105}{100} \cdot 3,8 = 1,05 \cdot 3,8 = 3,99$

2º acréscimo: $\overbrace{102\%}^{100\%+2\%}$ de 3,99 $\rightarrow \dfrac{102}{100} \cdot 3,99 = 1,02 \cdot 3,99 \simeq 4,07$

3º acréscimo: $\overbrace{103\%}^{100\%+3\%}$ de 4,07 $\rightarrow \dfrac{103}{100} \cdot 4,07 = 1,03 \cdot 4,07 \simeq 4,19$

Outra maneira de calcular o preço do litro do leite é obter uma única porcentagem equivalente aos três acréscimos. Para isso, basta multiplicar os fatores de atualização, isto é:

$$1,05 \cdot 1,02 \cdot 1,03 = 1,10313 = 110,313\%$$

Agora, efetuamos o cálculo:

$$110{,}313\% \text{ de } 3{,}8 \rightarrow \frac{110,313}{100} \cdot 3,8 = 1,10313 \cdot 3,8 \simeq 4,19$$

Note que a porcentagem de acréscimo é calculada sobre o valor obtido anteriormente.
Os valores 1,05; 1,02; 1,03 são chamados **fatores de atualização**.

A porcentagem $\overbrace{10,313\%}^{110,313\%-100\%}$ equivale aos três acréscimos sucessivos.

Portanto, o preço de 1L de leite nesse supermercado após os três acréscimos é R$ 4,19.

Quando os acréscimos são sucessivos, podemos realizar os cálculos da seguinte maneira:

Chamamos de P_0 o valor inicial e de $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ as taxas de acréscimos sucessivos em decimal. Os valores obtidos após cada acréscimo, denominados $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$, respectivamente, podem ser calculados por:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + i_1)$$
$$P_2 = P_1 \cdot (1 + i_2)$$
$$P_3 = P_2 \cdot (1 + i_3)$$
$$\dots$$
$$P_n = P_{n-1} \cdot (1 + i_n) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$$

Assim, o valor final $P_n = P$ é dado por:

$$P = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$$

Exemplo 2

Uma loja de eletrodomésticos está realizando uma liquidação. Um televisor de LED, por exemplo, que inicialmente custava R$ 2 500,00, sofreu um desconto de 20%; se o cliente pagar à vista, há mais 10% de desconto sobre o valor de liquidação do produto. Podemos calcular o preço do televisor pago à vista na liquidação da seguinte maneira:

Calculamos o preço do televisor após cada desconto:

$$\textbf{1º desconto: } \overbrace{80\%}^{100\%-20\%} \text{ de } 2\,500 \rightarrow \frac{80}{100} \cdot 2\,500 = 0,8 \cdot 2\,500 = 2\,000$$

$$\textbf{2º desconto: } \overbrace{90\%}^{100\%-10\%} \text{ de } 2\,000 \rightarrow \frac{90}{100} \cdot 2\,000 = 0,9 \cdot 2\,000 = 1\,800$$

Note que a porcentagem de desconto é calculada sobre o valor obtido anteriormente.

Os valores 0,8 e 0,9 também são chamados **fatores de atualização**.

Outra maneira de calcular o preço do televisor é obter uma única porcentagem, equivalente aos dois descontos. Para isso, basta multiplicar os fatores de atualização, isto é:

$$0,8 \cdot 0,9 = 0,72 = 72\%$$

Agora, efetuamos o seguinte cálculo:

$$72\% \text{ de } 2\,500 \rightarrow \frac{72}{100} \cdot 2\,500 = 0,72 \cdot 2\,500 = 1\,800$$

A porcentagem $\overbrace{28\%}^{100\%-72\%}$ é equivalente aos dois descontos sucessivos.

Portanto, o preço do televisor após os dois descontos é R$ 1 800,00.

Quando os descontos são sucessivos, podemos realizar os cálculos da seguinte maneira:

Chamamos de P_0 o valor inicial e de $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ as taxas de descontos sucessivos em decimal. Os valores obtidos após cada desconto, denominados $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, respectivamente, podem ser calculados por:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 - i_1)$$
$$P_2 = P_1 \cdot (1 - i_2)$$
$$P_3 = P_2 \cdot (1 - i_3)$$
$$\ldots$$
$$P_n = P_{n-1} \cdot (1 - i_n) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$$

Assim, o valor final $P_n = P$ é dado por:

$$P = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$$

Atividades resolvidas

R3. Certa loja concedeu 10% de desconto em um produto e logo após, pelo pagamento à vista, mais 40% de desconto no mesmo produto. Esses descontos correspondem a um único desconto de quantos por cento?

Resolução

Para calcular o desconto único, multiplicamos os fatores de atualização.

$$\underbrace{0,9}_{100\%-10\%=90\%} \cdot \overbrace{0,6}^{100\%-40\%=60\%} = 0,54 = 54\%$$

Portanto, descontos sucessivos de 10% e 40% correspondem a um único desconto de 46%, pois $100\% - 54\% = 46\%$.

R4. Uma loja vende produtos pela internet e, sobre o preço do anúncio, são acrescidos 3% de comissão para o *site*. Quanto um consumidor irá pagar por um produto anunciado por R$ 130,00 se ele receber desconto de 10% sobre o preço já acrescido da comissão do *site*?

Resolução

O valor inicial é $P_0 = 130$, a taxa de acréscimo é $i_1 = \underbrace{0,03}_{3\%}$ e a taxa de desconto é $j_2 = \underbrace{0,1}_{10\%}$. Logo:

$$P = 130 \cdot \underbrace{(1 + 0,03)}_{\text{acréscimo}} \cdot \underbrace{(1 - 0,1)}_{\text{desconto}} = 130 \cdot 1,03 \cdot 0,9 = 120,51$$

Portanto, o consumidor irá pagar R$ 120,51 pelo produto.

> Para *n* acréscimos e *m* descontos aplicados **sucessivamente** a um valor inicial P_0, podemos calcular o valor final *P* utilizando a fórmula:
>
> $$P = P_0 \cdot \underbrace{(1 + i_1) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)}_{\text{acréscimos sucessivos}} \cdot \overbrace{(1 - j_1) \cdot \ldots \cdot (1 - j_m)}^{\text{descontos sucessivos}}$$

R5. Responda e justifique à seguinte questão:

Dado um valor inicial P_0, se aplicarmos, sucessivamente, um acréscimo e um desconto, ambos de 10%, então obteremos o próprio valor P_0?

Resolução

Não, pois $P = P_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 - j) = P_0 \cdot \underbrace{(1 + 0,1)}_{\substack{\text{acréscimo} \\ \text{de 10\%}}} \cdot \underbrace{(1 - 0,1)}_{\substack{\text{desconto} \\ \text{de 10\%}}} = P_0 \cdot 1,1 \cdot 0,9 = P_0 \cdot \underbrace{0,99}_{99\%}$

O valor final é 99% do valor inicial. Portanto, não é o próprio valor P_0.

R6. Sobre uma fatura, é cobrado 0,1% de acréscimo sucessivo por dia de atraso. Por essa fatura foi pago R$ 311,24, com quatro dias de atraso.

Determine o valor dessa fatura caso ela tivesse sido paga:

a) em dia b) com um dia de atraso

Resolução

a) O valor final da fatura é $P = 311,24$. Assim, segue que:

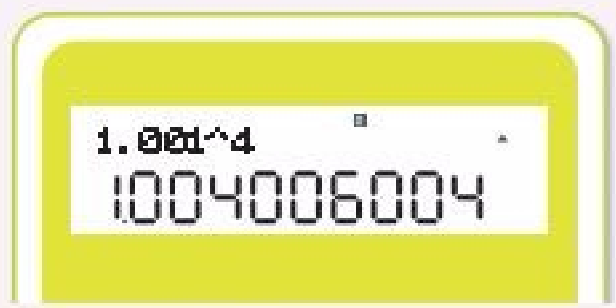
$$311,24 = P_0 \cdot \overbrace{(1+0,001)}^{\substack{\text{acréscimo de 0,1\%} \\ \text{no 1º dia}}} \cdot \underbrace{(1+0,001)}_{\substack{\text{acréscimo de 0,1\%} \\ \text{no 2º dia}}} \cdot \overbrace{(1+0,001)}^{\substack{\text{acréscimo de 0,1\%} \\ \text{no 3º dia}}} \cdot \underbrace{(1+0,001)}_{\substack{\text{acréscimo de 0,1\%} \\ \text{no 4º dia}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 311,24 = P_0 \cdot 1,001^4 \Rightarrow P_0 \simeq \frac{311,24}{1,004} \simeq 310$$

Portanto, o valor da fatura paga em dia seria aproximadamente R$ 310,00.

O cálculo de $1,001^4$ pode ser realizado com uma calculadora científica:

1 → . → 0 → 0 → 1 → ^ → 4 → =



Camila Ferreira

Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

b) Do item **a**, temos que o valor inicial é aproximadamente R$ 310,00. Logo:

$$P = 310 \cdot \overbrace{(1+0,001)}^{\text{acréscimo de 0,1\%}} = 310 \cdot 1,001 = 310,31$$

Portanto, o valor da fatura paga com um dia de atraso seria aproximadamente R$ 310,31.

R7. (Enem-MEC) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	Taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	Taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	Taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	Taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	Taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de:

a) hipoglicemia b) normal c) pré-diabetes d) diabetes melito e) hiperglicemia

Resolução

A taxa de glicose T após as reduçoes é:

$$T = 300 \cdot (1 - 0,3) \cdot (1 - 0,1) = 189 \longrightarrow 189 \text{ mg/dL}$$

Logo, ele está na categoria diabetes melito.

Portanto, a alternativa correta é a **d**.

21. Escreva as taxas acumulativas, de acréscimos ou descontos sucessivos, e represente-as por uma única porcentagem.

a) acréscimos de 4% e 8% acréscimo de 12,32%

b) desconto de 13% e 6% desconto de 18,22%

c) três acréscimos de 5% acréscimo de aproximadamente 15,76%

d) dois descontos de 3% e acréscimo de 7% acréscimo de aproximadamente 0,68%

22. Um pequeno produtor rural vende um quilograma de certa hortaliça por R$ 0,60 a um intermediário, que a revende a uma central de abastecimento com lucro de 30%. A central, por sua vez, vende a um supermercado, lucrando 40%, e o supermercado revende ao consumidor final com lucro de 50%. Quantos reais o consumidor final paga pelo quilograma dessa hortaliça? aproximadamente R$ 1,64

23. Em uma loja, certo modelo de camiseta, que custava R$ 72,00, teve aumento em seu preço de 8%. Como diminuíram as vendas desse modelo, a loja realizou uma promoção na compra à vista, oferecendo 15% de desconto. Qual é o valor a ser pago por um cliente que comprar esse modelo de camiseta efetuando o pagamento à vista? aproximadamente R$ 66,10

24. Ao longo de dois anos, o salário de Roberta foi aumentado em 2%, 6% e 4%. Sabendo que após esses reajustes o salário dela passou a ser R$ 2 102,72, em quantos reais aumentou o salário de Roberta nesse período? aproximadamente R$ 232,72

25. Alex comprou certa mercadoria por R$ 60,00 e a colocou à venda por um preço que vai lhe render 25% de lucro. Como não conseguiu vendê-la, resolveu conceder um desconto de 12%, caso a compra seja feita à vista.

a) Quantos reais um consumidor terá de desembolsar caso efetue a compra à vista? R$ 66,00

b) Qual é a porcentagem que Alex lucrará se a mercadoria for vendida à vista? 10%

26. (Enem-MEC) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de: e

a) 15,00
b) 14,00
c) 10,00
d) 5,00
e) 4,00

27. Em certo ano, em determinada região, no mês de fevereiro, choveu 18% a mais que no mês de janeiro. Em contrapartida, choveu no mês de março 15% a menos que no mês de fevereiro. Em qual mês choveu mais nessa região, em janeiro ou em março? Quantos por cento? março; 0,3%

28. Certa loja promoveu uma liquidação na qual o consumidor poderia escolher entre dois tipos de desconto para pagamento à vista: dois descontos sucessivos de 35% ou um único desconto de 60%. Qual dos tipos de desconto é mais vantajoso para o consumidor? Um único desconto de 60%.

29. Um investidor comprou um terreno por R$ 260 000,00. Supondo que tivesse investido esse capital em um banco, com juro de 1,5% ao mês, durante 4 meses e, em seguida, realizasse a compra do mesmo terreno, que após esse tempo valorizou-se 4%, o investidor teria lucro ou prejuízo? De quantos reais? lucro de aproximadamente R$ 5 554,52

30. A cotação do dólar em certo país aumentou x% em abril, 3,5% em maio e recuou 2,4% em junho. Sabendo que a porcentagem única dos três reajustes é equivalente a 3,04% de aumento, determine a porcentagem de aumento em abril. aproximadamente 2%

31. Para aumentar em 50% a área de um triângulo qualquer, quantos por cento devemos aumentar a medida da altura, se a medida da base for aumentada em 20%? 25%

32. Uma empresa de transporte coletivo municipal reajustou 3 vezes a tarifa do ônibus nos últimos quatro anos. Os reajustes foram de 5%, 4% e 5% respectivamente, sendo que a tarifa passou a ser de R$ 4,65.

Marcio Jose Bastos Silva/Shutterstock.com

Ônibus na cidade de Curitiba, no Paraná, em 2014.

a) Qual será a taxa considerando apenas os dois primeiros reajustes? E os três reajustes? 9,2%; 14,66%

b) Qual era o valor da tarifa antes dos três reajustes? aproximadamente R$ 4,06

33. Determinado produto custava R$ 600,00 e sofreu dois descontos sucessivos, de 7% e x%, e, em seguida, um aumento de 15%. Calcule o valor do desconto de x%, sabendo que o valor atual do produto é de R$ 577,53. 10%

34. O aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços é conhecido como inflação. Altas taxas de juros, desequilíbrio da balança de pagamentos, emissão de moeda para cobrir déficit público, aumento de preço e altos custos de produção são algumas das causas da inflação, que podem gerar um desequilíbrio na economia de um país.*

*Explique aos alunos que quando ocorre baixa persistente e generalizada dos preços, chamamos de deflação.

Entre os anos 1980 e início dos anos 1990 o Brasil passou por um período de hiperinflação, levando os comerciantes a trocarem o preço dos produtos quase que diariamente. Nessa época, a inflação permaneceu acima dos dois dígitos, chegando a 82,39% em março de 1990.

**Explique aos alunos que os produtos que compõem a cesta são identificados em termos de participação na despesa. O arroz, por exemplo, tem peso maior que o macarrão, por ser um dos itens mais consumido.

Como é calculada a inflação?

** Pesquisadores visitam algumas residências e coletam informações referentes aos produtos que essas famílias utilizam e os locais em que elas compram. Desta forma, determinam os produtos e serviços que vão compor a cesta.

Ilustrações: Laís Garbelini

Com os produtos listados, os pesquisadores seguem até os estabelecimentos cadastrados que fornecem as informações de preços a cada mês.

Na tentativa de combater a inflação surgiram alguns planos que alteraram a moeda de circulação no país: o Cruzado (1986), Cruzado Novo (1989), Cruzeiro (1990), Cruzeiro Real (1993) e o Real (1994).

Para garantir que a inflação permanecesse dentro de um patamar máximo preestabelecido, em 1999, o Brasil adotou metas controladas pelo Banco Central por meio da chamada taxa Selic. Além disso, passou a utilizar vários índices para medir a inflação, como o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC).

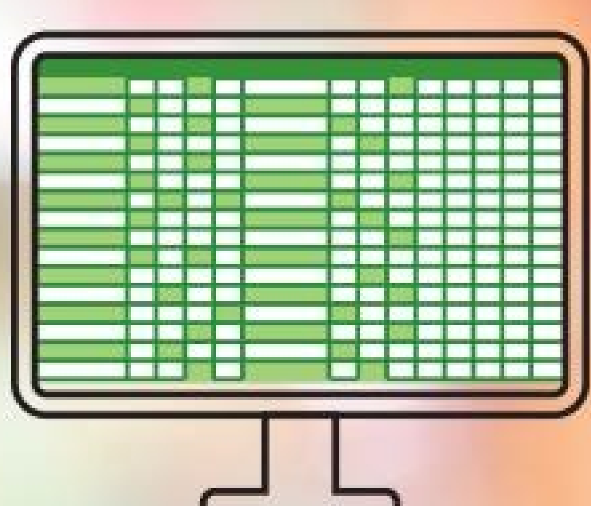
Resumidamente, o INPC, calculado por meio do IPC (Índice de Preços ao Consumidor) regional, abrange as regiões metropolitanas de Belém, Belo Horizonte, Curitiba, Fortaleza, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador, São Paulo e Vitória, além de Brasília e os municípios de Goiânia e Campo Grande. Para determinar o IPC de cada região é realizada a comparação dos valores da cesta padrão (composta de itens referentes à alimentação, à água, à luz, ao aluguel e à saúde) em um determinado período. Por exemplo, se uma família teve o gasto de R$ 1 512,00 com a cesta no mês de janeiro de 2017 e para a mesma cesta teve o gasto de R$ 1 563,00 em janeiro de 2018, temos que o aumento do custo de vida dessa família foi de:

Fontes de pesquisa: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/INPC2006.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2015. <www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2012/04/inflacao>. Acesso em: 13 nov. 2015. <www.bcb.gov.br/?MOEDASBC>. Acesso em: 13 nov. 2015. <www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultinpc.shtm>. Acesso em: 13 nov. 2015.

$$\frac{1593-1512}{1512} \simeq 0{,}054 \longrightarrow \text{aproximadamente } 5{,}4\%$$

a) Uma possível resposta: o aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços.

***Explique aos alunos que a inflação controlada auxilia no desenvolvimento econômico do país, aumentando o potencial de crescimento da economia, a geração de empregos e de renda.



As informações coletadas são repassadas a um grupo técnico especializado em processamento de dados. Caso ocorra uma diferença muito grande no valor, o pesquisador retorna ao estabelecimento para conferir o preço.

A inflação é calculada por meio da variação de um período para o outro por um grupo de especialistas (Coordenação de Índices de Preços - COINP) e depois divulgada ao público.

Ilustrações: Maryane Vioto Silva

gyn9037/Shutterstock.com

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) O que você entende por inflação?

b) Você acha importante o país manter a inflação controlada? Por quê? *** Resposta pessoal.

c) Para compensar a inflação de 8,5% acumulada em certo período, a empresa reajustou o salário de Luiza nesse mesmo percentual, passando a R$ 2 582,30. Qual o valor do salário de Luiza antes desse reajuste? R$ 2 380,00

d) Nos anos de 2012, 2013 e 2014 o IPCA registrado no Brasil foi de 5,84%, 5,91% e 6,41%, respectivamente. Qual é o IPCA único equivalente nesse período? aproximadamente 19,28%

e) Escolha um dos índices de inflação e faça uma pesquisa para verificar os valores medidos nos últimos 12 meses. Registre essas informações em uma tabela. A resposta depende do ano vigente.

Explique aos alunos que existem outros índices que medem a inflação, além daqueles indicados no texto, como o Índice Geral de Preços (IGP). Os valores de alguns desses índices podem ser obtidos no *site* do Banco Central do Brasil: <http://tub.im/5pktv3>.

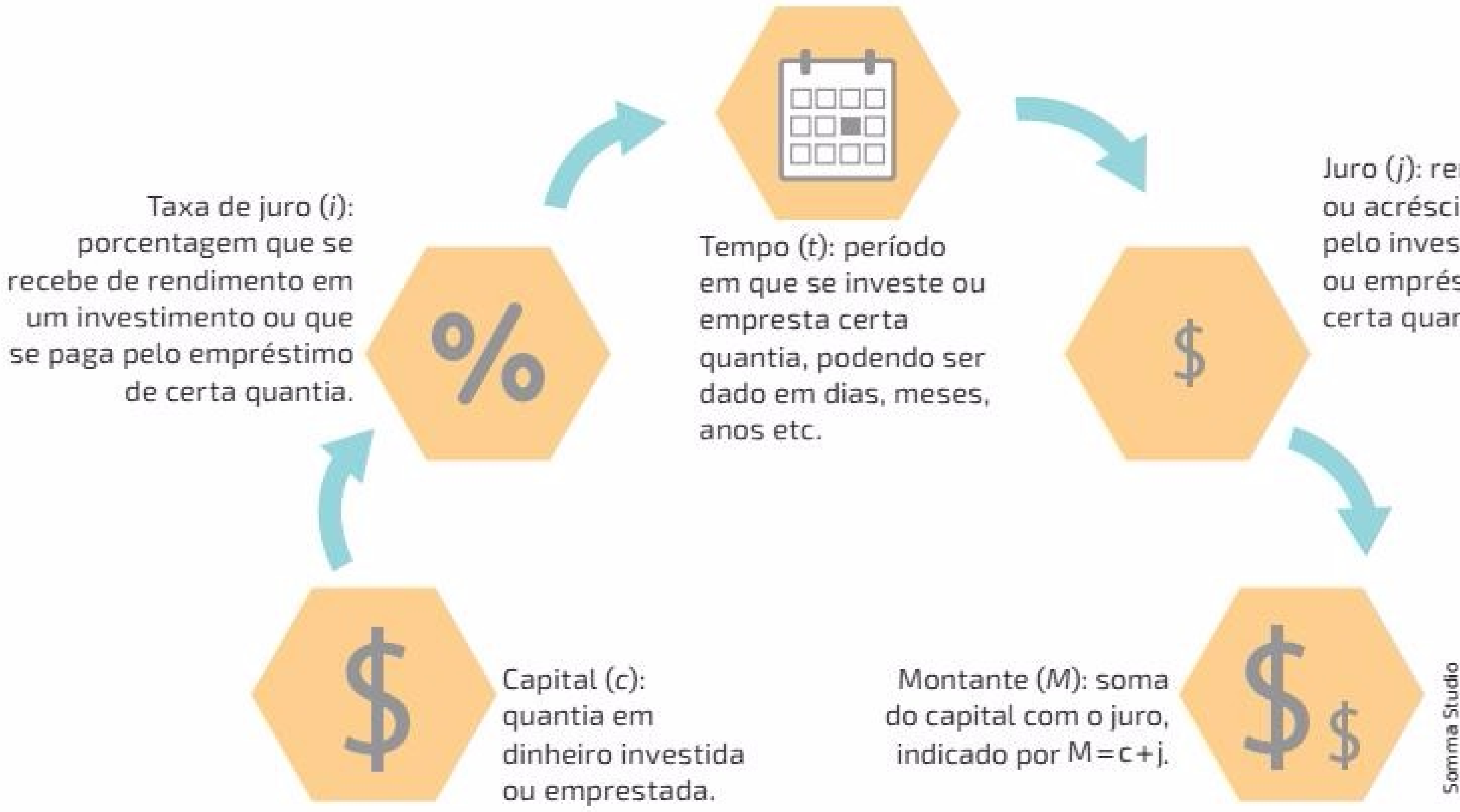
Juro

Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais, correspondente ao juro, isto é, um tipo de "aluguel" pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.

Outra circunstância envolvendo juro acontece quando uma pessoa faz uma aplicação de certa quantia, seja em caderneta de poupança ou em outro investimento. Nesse caso, a pessoa recebe juro de acordo com o período em que essa quantia ficou aplicada.

Quando o pagamento de uma fatura é efetuado com atraso, esta é acrescida de juro correspondente ao tempo de atraso.

A seguir, veja alguns termos utilizados em situações que envolvem juro.



Neste tópico, iremos estudar o **juro simples** e o **juro composto**.

Juro simples

Simone fez uma aplicação no valor de R$ 1000,00 durante 7 meses, à taxa de juro simples de 0,65% a.m. (ao mês). Podemos calcular o montante obtido por Simone ao final da aplicação da seguinte maneira:

- capital (valor da aplicação): R$ 1 000,00 $\rightarrow c = 1\,000$
- tempo (período da aplicação): 7 meses $\rightarrow t = 7$
- taxa de juro: 0,65% a.m. $\rightarrow i = 0{,}65\% = 0{,}0065$

Calculando o juro simples ao final de cada mês, temos:

$$0{,}65\% \text{ de } 1\,000 \rightarrow \frac{0{,}65}{100} \cdot 1\,000 = 0{,}0065 \cdot 1\,000 = 6{,}5 \rightarrow \text{R\$ } 6{,}50$$

Como o capital ficou aplicado por 7 meses, multiplicamos o juro de um mês por 7.

$$6{,}5 \cdot 7 = 45{,}5 \rightarrow \text{R\$ } 45{,}50$$

Note que, para determinar o valor do juro, multiplicamos o valor do investimento pela taxa de juro e pelo tempo da aplicação, ou seja:

$$j = c \cdot i \cdot t$$
$$j = 1\,000 \cdot 0{,}0065 \cdot 7 = 45{,}5$$

Como queremos determinar o montante, adicionamos o capital e o juro.

$$M = c + j$$
$$M = 1\,000 + 45{,}5 = 1\,045{,}5$$

Portanto, o montante obtido por Simone ao final de 7 meses é R$ 1 045,50.

Calculamos o juro simples por meio da fórmula:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Nessa fórmula:

- j: juro
- c: capital
- i: taxa de juro simples
- t: período de tempo

Para calcular o montante, utilizamos a seguinte fórmula:

$$M = c + \overbrace{j}^{c \cdot i \cdot t} \Rightarrow M = c + c \cdot i \cdot t \Rightarrow M = c(1 + i \cdot t)$$

Nessas fórmulas, ao substituir a taxa de juro, devemos escrevê-la na forma decimal.

Ao utilizar as fórmulas apresentadas anteriormente, temos que verificar se a taxa de juro e o período de tempo estão em uma mesma unidade de tempo. Por exemplo, se a taxa de juro é dada ao ano, o período de tempo também deve estar em anos. Em casos em que isso não ocorra, devemos transformar a taxa ou o período à mesma unidade de tempo.

No juro simples, uma taxa de 2,1% a.m., por exemplo, é equivalente a 25,2% a.a., pois $\underbrace{0,021}_{2,1\%} \cdot 12 = \underbrace{0,252}_{25,2\%}$.

De maneira semelhante, uma taxa de 36% a.a. é equivalente a 3% a.m., pois $\underbrace{0,36}_{36\%} : 12 = \underbrace{0,03}_{3\%}$.

Duas taxas são equivalentes quando, se aplicadas em um mesmo capital e durante um mesmo período de tempo, produzem montantes iguais.

Atividades resolvidas

R8. Sérgio aplicou R$ 12 000,00 no sistema de juro simples e, após 10 meses, retirou o montante de R$ 12 900,00. Qual foi a taxa mensal de juro que rendeu o investimento de Sérgio?

Resolução

Utilizando a fórmula $M = c \cdot (1 + i \cdot t)$, para $M = 12\,900$, $c = 12\,000$ e $t = 10$, temos:

$$12\,900 = 12\,000 \cdot (1 + i \cdot 10) \Rightarrow \frac{12\,900}{12\,000} = 1 + 10 \cdot i \Rightarrow 1,075 - 1 = 10 \cdot i \Rightarrow i = \frac{0,075}{10} \Rightarrow i = 0,0075 = 0,75\%$$

Portanto, a taxa de juro foi 0,75% a.m.

R9. Qual é o prazo necessário para que um capital de R$ 450,00 dobre de valor, a juro simples de 1% a.m.?

Resolução

Se o capital dobrar de valor, então $M = \underbrace{900}_{2 \cdot 450}$. Substituindo $c = 450$ e $i = 0,01$ em $M = c \cdot (1 + i \cdot t)$, temos:

$$900 = 450 \cdot (1 + 0,01 \cdot t) \Rightarrow \frac{900}{450} = 1 + 0,01 \cdot t \Rightarrow 2 - 1 = 0,01 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1}{0,01} \Rightarrow t = 100$$

Portanto, são necessários 100 meses ou 8 anos e 4 meses.

R10. Para o cliente que atrasa o pagamento da fatura mensal, uma companhia de abastecimento de água cobra multa diária de 0,4% sobre o valor da fatura do mês. O fornecimento de água é interrompido quando o valor da multa torna-se maior que 20% do valor da fatura sobre o qual incide a multa. Considerando o mês com 30 dias, determine o número de meses e dias de atraso até que a companhia faça o corte do fornecimento de água por falta de pagamento.

Resolução

Temos que 20% do valor de *c* da fatura é dado por:

$$\frac{20}{100} \cdot c = 0,2c$$

Assim, segue que:

$$j > 0,2c \Rightarrow c \cdot i \cdot t > 0,2c \Rightarrow c \cdot 0,004 \cdot t > 0,2c \Rightarrow 0,004t > 0,2 \Rightarrow t > \frac{0,2}{0,004} \Rightarrow t > 50$$

Logo, o corte no fornecimento de água será feito após 50 dias de atraso.

35. Calcule quanto um capital de R$ 550,00 rende, quando aplicado a regime de juro simples a uma taxa de:

a) 3% a.m., durante 4 meses R$ 66,00

b) 4,5% a.m., durante 1 ano R$ 297,00

c) 6% a.a., durante 7 meses R$ 19,25

d) 0,05% a.d. (ao dia), durante 2 meses R$ 16,50

36. Qual é o juro que um capital de R$ 140,00 rende se aplicado no regime de juro simples com taxa de 0,8% a.m., durante 9 meses? R$ 10,08

37. Sabendo que um capital *c*, aplicado a juro simples, rende em 4 meses o equivalente a $\frac{1}{5}$ de seu valor, determine a taxa de juro mensal. 5%

38. Júlio aplicou, sob regime de juro simples, a importância de R$ 7 500,00, com taxa de 2,5% a.m., por um período de dois trimestres.

a) Qual era o montante ao fim desse período? R$ 8 625,00

b) Devido a pagamentos de impostos, o montante a ser retirado por Júlio sofrerá uma redução de 3%. Qual será o valor líquido retirado após esse investimento? R$ 8 366,25

39. Ao ser aplicado no regime de juro simples, um capital rende, após 14 meses, juro de R$ 566,44 a uma taxa de 17% a.m.

a) Qual é o montante obtido após um semestre? R$ 480,76

b) Quantos reais de juro esse capital renderá se aplicado durante 2 anos? R$ 971,04

40. Um capital de R$ 860,00, aplicado a juro simples com taxa anual de 30%, após certo período de tempo resulta em um montante de R$ 989,00. Determine quantos meses esse capital ficou aplicado para obtenção desse montante. 6 meses

41. De quanto tempo um capital necessita para ser triplicado, se aplicado a uma taxa de juro simples de 8% ao mês? 25 meses

42. Certa loja de informática vende uma impressora à vista por R$ 270,00, ou em parcela única de R$ 298,35, paga 90 dias após a compra. Caso um consumidor deseje comprar pagando após os 90 dias, qual será a taxa mensal de juro simples paga? 3,5%

43. Um agente financeiro aplicou R$ 30 000,00 em um fundo de investimentos que rende juro simples de 2,1% a.m. Se a retirada total aconteceu 56 dias após a aplicação, calcule o rendimento, admitindo que um mês tenha 30 dias. R$ 1 176,00

44. Certo investidor aplicou simultaneamente, em regime de juro simples, durante 8 meses, dois capitais da seguinte maneira:

- investimento A: R$ 5 000,00 com taxa de juro de 3% a.m.
- investimento B: R$ 4 500,00 com taxa de juro de 42% a.a.

a) Qual dos investimentos gerou o maior rendimento? investimento B

b) Se o investidor fizesse apenas uma aplicação, com todo o capital, qual deveria ser a taxa de juro simples mensal para obter a mesma rentabilidade? aproximadamente 3,24%

45. Considere o investimento de certo capital durante um período de tempo no regime de juro simples. Qual das taxas de juro oferece a maior rentabilidade após esse período de tempo: 0,06% a.d., 1,4% a.m. ou 18% a.a.? 0,06% a.d.

46. Uma dívida de R$ 350,00 foi paga integralmente após *t* meses com juro de R$ 105,00, a uma taxa mensal de juro simples *i*. Determine possíveis valores para *t* e *i*. Algumas possíveis respostas: t=5 e i=6%; t=4 e i=7,5%.

47. Um cliente tomou como empréstimo a importância de R$ 3 500,00 de uma instituição financeira, por determinado período, com taxa de juro simples de 88,8% a.a., pagando ao final R$ 5 313,00. Quantos meses durou esse empréstimo, considerando que cada mês tem 30 dias? 7 meses

48. Em certa loja, Daniele comprou o refrigerador indicado no cartaz em duas parcelas iguais a R$ 1 100,00: a 1ª no ato da compra, e a 2ª após 30 dias, acrescida de juro.

Fotomontagem de Desenhorama Estúdio formada pela imagem Customdesigner/ Shutterstock.com

a) Qual é a taxa de juro mensal cobrada por essa loja? 10%

b) Quantos reais Daniele economizaria se pagasse o valor total à vista, sabendo que no pagamento à vista o consumidor tem 8% de desconto? R$ 268,00

Juro composto

A Matemática primitiva começou a ser desenvolvida a partir de embasamentos práticos, quando, ao longo dos rios Nilo, Tigre, Eufrates, entre outros, surgiram sociedades desenvolvidas, como os babilônios e os egípcios. A partir de tarefas como o controle de inundações desses rios e da drenagem de pântanos, possibilitou-se o desenvolvimento de tecnologias e da Matemática, originando-se a chamada Matemática primitiva. Essas práticas requeriam o cálculo de calendários funcionais, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas, a criação de métodos de agrimensura, a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas etc. Alguns dos documentos, registrados em tábulas, mostram que os sumérios, antiga civilização que viveu na região da Mesopotâmia por volta de 2100 a.C., já utilizavam vários tipos de conhecimentos financeiros, como os atualmente denominados juro simples e juro composto.

c. 2400 a.C. Museu do Louvre, Paris (França). Foto: Bridgeman Images/Easypix

Tábula mesopotâmica que apresenta cálculos financeiros, exposta no Museu do Louvre, na França.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Para iniciarmos o estudo com juro composto, considere.

Exemplo

Talita aplicou R$ 2 580,00 a uma taxa de juro composto de 3% a.m. durante 3 meses. Podemos calcular o montante obtido ao final dessa aplicação da seguinte maneira:

O sistema de juro composto corresponde a um caso particular de acréscimos sucessivos, cujas taxas de acréscimo são todas iguais. Para calcular os acréscimos sucessivos, utilizamos a seguinte fórmula:

$$P = P_0 \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)$$

Fazendo $P = M$ e $P_0 = c$, temos:

$$M = c \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)$$

Substituindo na fórmula *c* por 2 580 e $i_1 = i_2 = i_3$ por 0,03:

$$M = 2\,580 \cdot (1+0{,}03) \cdot (1+0{,}03) \cdot (1+0{,}03) \simeq 2\,819{,}24$$

Portanto, o montante obtido ao final da aplicação foi aproximadamente R$ 2 819,24.

Calculamos o montante obtido ao aplicar um capital a juro composto da seguinte forma:

$$M = c \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n), \text{ em que } i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_n = i$$

Como as taxas de acréscimos estão associadas a um período de tempo, temos que $n = t$. Logo:

$$M = c \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot \ldots \cdot (1+i)}_{t \text{ fatores iguais}}$$

$$M = c \cdot (1+i)^t$$

No juro composto, não podemos multiplicar ou dividir uma taxa dada em certo período e obter uma equivalente em outro período, como ocorre no juro simples. No caso do juro composto, é necessário realizar outros cálculos.

Utilizando essa fórmula para obter o montante da situação apresentada anteriormente, temos:

$$M = c \cdot (1+i)^t$$

$$M = 2\,580 \cdot (1+0{,}03)^3 = 2\,580 \cdot 1{,}03^3 \simeq 2\,819{,}24$$

Atividades resolvidas

R11. Utilizando uma calculadora, determine o montante obtido ao final de cada um dos três primeiros meses, ao investir um capital de R$ 235,00 a juro composto de 5% ao mês.

Resolução

O montante, ao final do 1º mês, é obtido acrescentando-se 5% ao capital, ou seja, em uma calculadora comum, multiplicamos 1+0,05=1,05 por 235, nesta ordem. Para determinar o montante do mês seguinte, digitamos novamente a tecla (=).

As etapas de cálculos necessários na resolução dessa atividade podem variar de acordo com o modelo da calculadora.

(1) → (·) → (0) → (5) → (×) → → (×) → (3) → (5) → (=)   (=)   (=)

Ilustrações: Camila Ferreira

Ao digitar novamente a tecla (=), a calculadora repete a operação (1)(·)(0)(5)(×), isto é, multiplica o resultado anterior por 1,05. Desse modo, obtemos o montante do mês seguinte no sistema de juro composto.

Portanto, os montantes obtidos ao final dos três meses são, aproximadamente, na ordem: R$ 246,75, R$ 259,09 e R$ 272,04.

R12. Um investidor percebeu que, a partir de determinado capital, uma aplicação, a juro simples, por dois meses, a uma taxa mensal de 4%, forma um montante de R$ 32,00 a menos que uma outra aplicação, a juro composto, na mesma taxa e pelo mesmo período de tempo. Qual o valor desse capital?

Resolução

Chamamos de M_s o montante obtido a juro simples. Para $i=0,04$ e $t=2$, temos:

$$M_s = c\cdot(1+i\cdot t) \Rightarrow M_s = c\cdot(1+0,04\cdot 2) = 1,08\cdot c$$

Seja M_c o montante obtido no sistema de juro composto, nas mesmas condições. Logo:

$$M_c = c\cdot(1+i)^t \Rightarrow M_c = c\cdot(1+0,04)^2 = 1,0816$$

Como o montante M_c é R$ 32,00 maior que o M_s, segue que:

$$M_c = M_s + 32 \Rightarrow 1,0816\cdot c = 1,08\cdot c + 32 \Rightarrow 0,0016\cdot c = 32 \Rightarrow c = 20\,000$$

Portanto, o valor do capital é R$ 20 000,00.

R13. Resolva o item a da atividade **R6**, da página **18**, utilizando a fórmula $M = c\cdot(1+i)^t$.

Resolução

No item a da atividade **R6**, utilizamos acréscimos sucessivos para calcular o valor inicial de uma fatura, ou seja, o valor sem acréscimos.

Utilizando a fórmula $M=c(1+i)^t$, para $M=311,24$, $i=0,001$ e $t=4$, temos:

$$311,24 = c\cdot(1+0,001)^4 \Rightarrow 311,24 = c\cdot 1,001^4 \Rightarrow c \simeq \frac{311,24}{1,004} \Rightarrow c \simeq 310$$

Portanto, como concluímos na atividade **R6**, o valor da fatura paga em dia seria aproximadamente R$ 310,00.

49. Luís aplicou R$ 2 600,00 em um fundo de investimento que lhe rende juro composto de 18% a.a. Qual será o montante obtido por Luís após três anos de investimento?
aproximadamente R$ 4 271,88

50. Fabiana tomou como empréstimo a importância de R$ 3 500,00 de certa instituição financeira que cobra uma taxa fixa de 4% a.m., no regime de juro composto. Sabendo que ela pretende pagar essa dívida em parcela única após 4 meses, quantos reais de juro, aproximadamente, Fabiana pagará por esse empréstimo? aproximadamente R$ 595,00

51. Certo capital foi aplicado à taxa de juro composto de 1,8% a.m. durante 1 ano e 2 meses, gerando um montante de R$ 729,15.

a) Qual foi o capital investido nessa aplicação?
aproximadamente R$ 568,00

b) Ao final do período, qual foi o percentual de aumento dessa aplicação?
aproximadamente 28,37%

52. Uma pessoa aplicou R$ 15 000,00 em um fundo de investimento que rende certa taxa de juro composto. Sabendo que após 2 anos o montante é de R$ 17 496,00, determine a taxa de juro anual dessa aplicação. 8%

53. Quanto tempo seria necessário para um capital quadruplicar, se investido à taxa de juro composto de 2% a.m.? Utilize $\log 102 = 2{,}0086$ e $\log 2 = 0{,}301$.
70 meses *

54. Em certa loja, uma bola de futsal que custa R$ 120,00 à vista pode ser paga em duas parcelas, sendo uma de entrada, no ato da compra, no valor de R$ 70,00, e outra dois meses após a compra, no valor de R$ 54,08, capitalizada a juro composto. Qual é a taxa mensal de juro cobrada por essa loja? 4%

55. (Enem-MEC) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21 000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20 000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deve esperar: c

a) dois meses, e terá a quantia exata

b) três meses, e terá a quantia exata

c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00

d) quatro meses, e terá a quantia exata

e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00

*Caso os alunos apresentem dificuldades em resolver a atividade 53, lembre-os das propriedades de logaritmo.

56. (Enem-MEC) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: c

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

57. Desafio

Um investidor aplicou R$ 2 300,00 em um fundo monetário que rende juro composto de 1,7% a.m. Passados 3 meses, ele aplicou mais R$ 1 100,00 nesse mesmo fundo.

a) Aproximadamente, quantos reais de juro esses investimentos renderam juntos após a 1ª aplicação completar 1 ano?
aproximadamente R$ 695,84

b) Se 6 meses após a 1ª aplicação esse investidor retirasse R$ 3 000,00, qual seria o montante 2 anos após a 2ª aplicação?
aproximadamente R$ 1 000,25

Juro e funções

Neste tópico, vamos relacionar o juro (simples e composto) e as funções. Para isso, considere uma aplicação de R$ 1 200,00 a uma taxa de juro de 15% a.a.

Vamos analisar essa aplicação nos regimes de juro simples e de juro composto no decorrer do tempo.

Inicialmente, substituímos as informações apresentadas na fórmula do juro para o regime de juro simples:

$$c = 1\,200;\ i = 15\% = 0{,}15$$

$$j = c \cdot i \cdot t$$

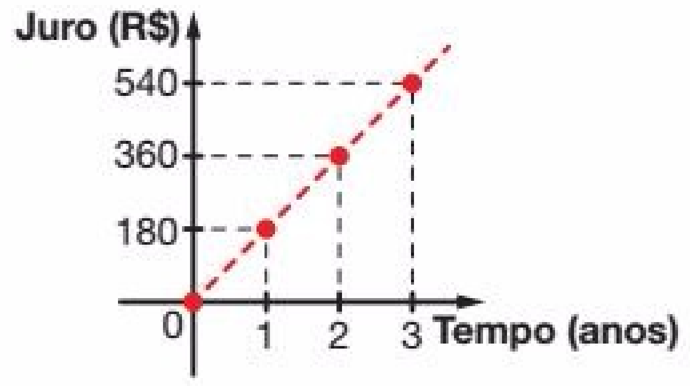
$$j = 1\,200 \cdot 0{,}15 \cdot t$$

$$j = 180t \quad (\mathrm{I})$$

O juro *j* está em função do tempo *t* e (I) corresponde a uma **função linear**. Podemos representar essa função da seguinte maneira:

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } f(t) = 180t$$

t	j = f(t)
0	0
1	180
2	360
3	540



Agora, vamos substituir as informações apresentadas na fórmula do montante para o regime de juro simples:

$$M = c \cdot (1 + i \cdot t)$$

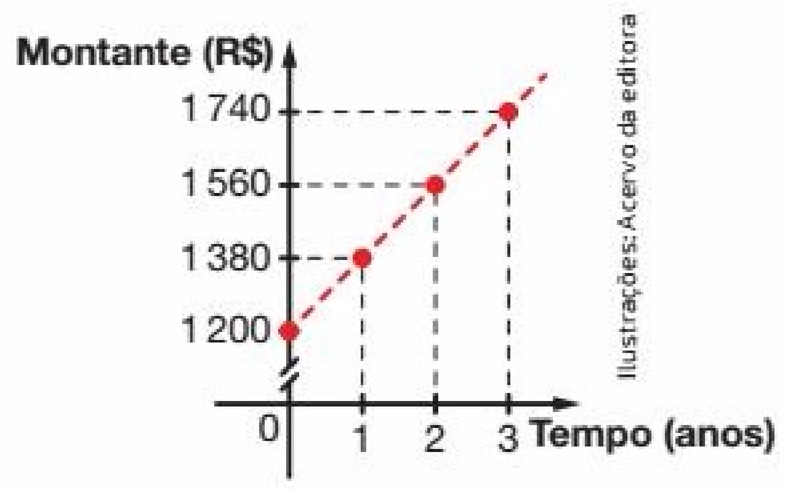
$$M = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot t)$$

$$M = 1\,200 + 180t \quad (\mathrm{II})$$

O montante *M* está em função do tempo *t* e (II) corresponde a uma **função afim**. Podemos representar essa função da seguinte maneira:

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g(t) = 1\,200 + 180t$$

t	M = g(t)
0	1 200
1	1 380
2	1 560
3	1 740



Ilustrações: Acervo da editora

De maneira semelhante, vamos substituir as informações apresentadas na fórmula do montante para o regime de juro composto:

$$M = c \cdot (1 + i)^t$$

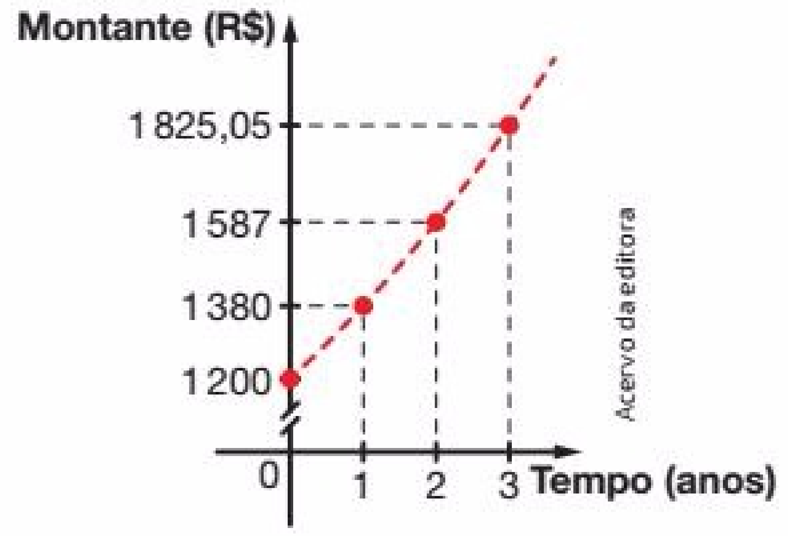
$$M = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}15)^t$$

$$M = 1\,200 \cdot (1{,}15)^t \quad (\mathrm{III})$$

O montante M está em função do tempo t e (III) corresponde a uma **função do tipo exponencial**. Podemos representar essa função da seguinte maneira:

$$h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } h(t) = 1\,200 \cdot (1{,}15)^t$$

t	M = h(t)
0	1 200
1	1 380
2	1 587
3	1 825,05



Atividades resolvidas

R14. Paulo aplicou R$ 2 900,00 a juro simples de 11% a.a. e, no mesmo dia, Roberto investiu R$ 2 800,00 a juro composto de 10% a.a. Represente graficamente, num mesmo plano cartesiano, os montantes em cada aplicação e verifique qual terá o maior montante ao final de 4 anos e ao final de 6 anos.

Resolução

- Para $c = 2\,900$, $i = 0{,}11$, temos a função afim que representa o montante da aplicação de Paulo:

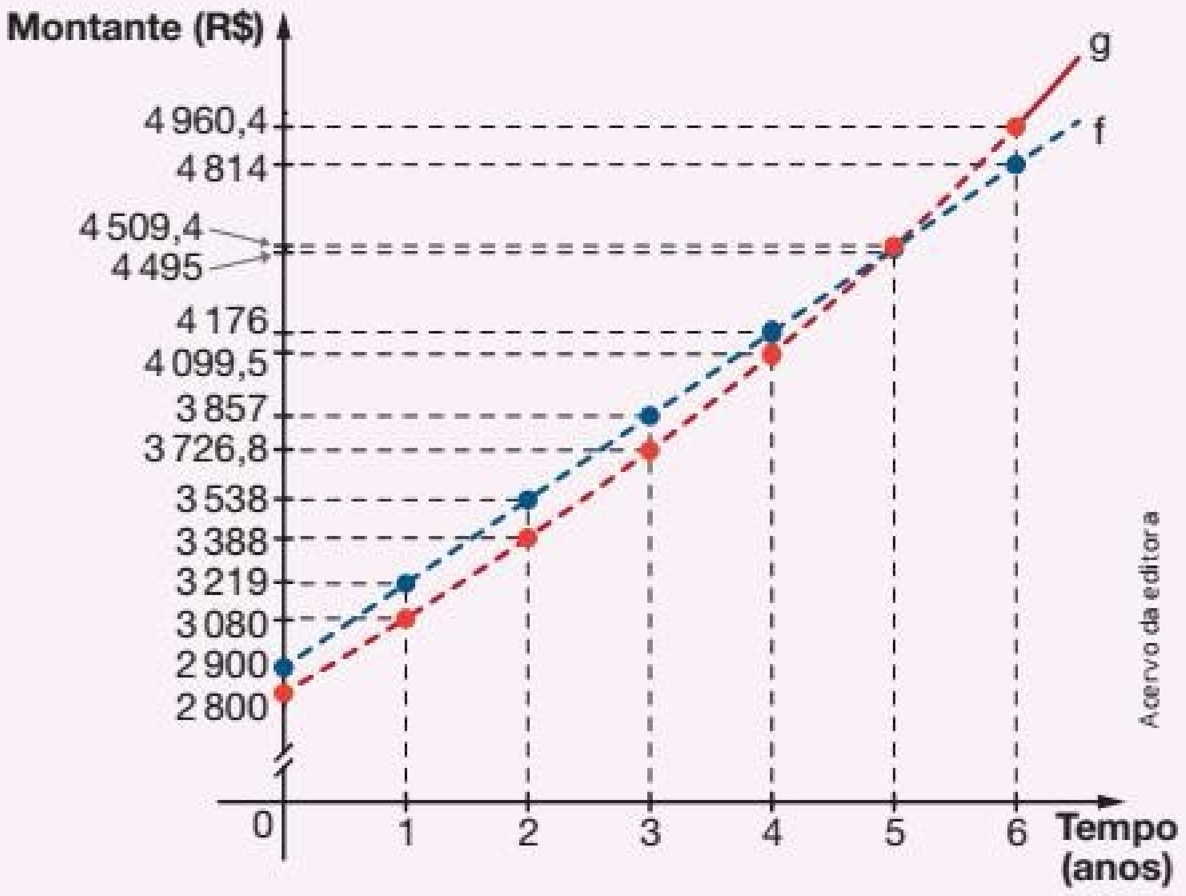
$$M = 2\,900 \cdot (1 + 0{,}11 \cdot t) = 2\,900 + 319 \cdot t \Rightarrow f(t) = 2\,900 + 319t$$

- Para $c = 2\,800$, $i = 0{,}1$, temos a função do tipo exponencial que representa o montante da aplicação de Roberto:

$$M = 2\,800 \cdot (1 + 0{,}1)^t = 2\,800 \cdot (1{,}1)^t \qquad g(t) = 2\,800 \cdot (1{,}1)^t$$

Representando graficamente as duas funções, temos:

t	M = f(t)	M = g(t)
0	2 900	2 800
1	3 219	3 080
2	3 538	3 388
3	3 857	3 726,8
4	4 176	4 099,5
5	4 495	4 509,4
6	4 814	4 960,4



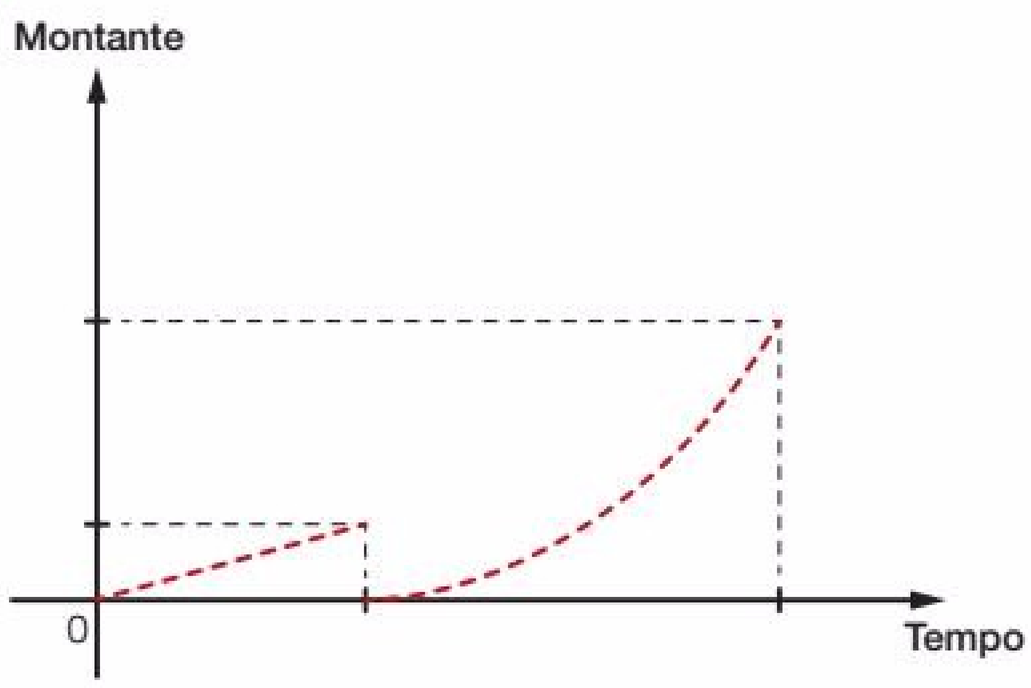
Os valores obtidos para $g(t)$ ao final dos 4º, 5º e 6º anos são aproximados considerando uma casa decimal.

Observando o gráfico, podemos notar que, ao final de 4 anos, o montante da aplicação de Paulo será maior que o de Roberto, ou seja, $f(4) > g(4)$. Já ao final de 6 anos, o montante da aplicação de Roberto será maior que o de Paulo, ou seja, $g(6) > f(6)$.

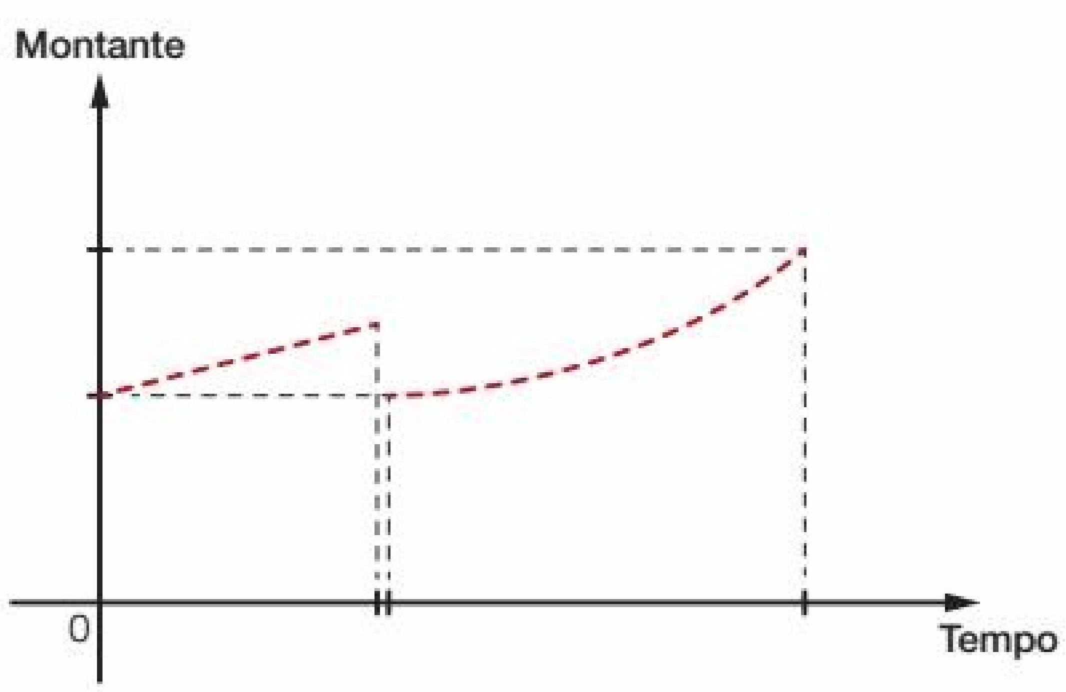
58. Joice aplicou certa quantia em um investimento a juro simples. Após dois anos, para a compra de um eletrodoméstico, cujo valor era igual ao juro obtido nesse período, ela resgatou todo o montante e subtraiu o valor de que precisava. Depois de um mês, investiu o dinheiro que sobrou em outra aplicação, agora no regime de juro composto. Com esse novo investimento, o juro obtido em 3 anos foi o dobro daquele do primeiro investimento.

Se f é a função que representa o montante nas aplicações de acordo com o tempo, contado a partir do início do primeiro investimento, o gráfico que melhor representa f é: b

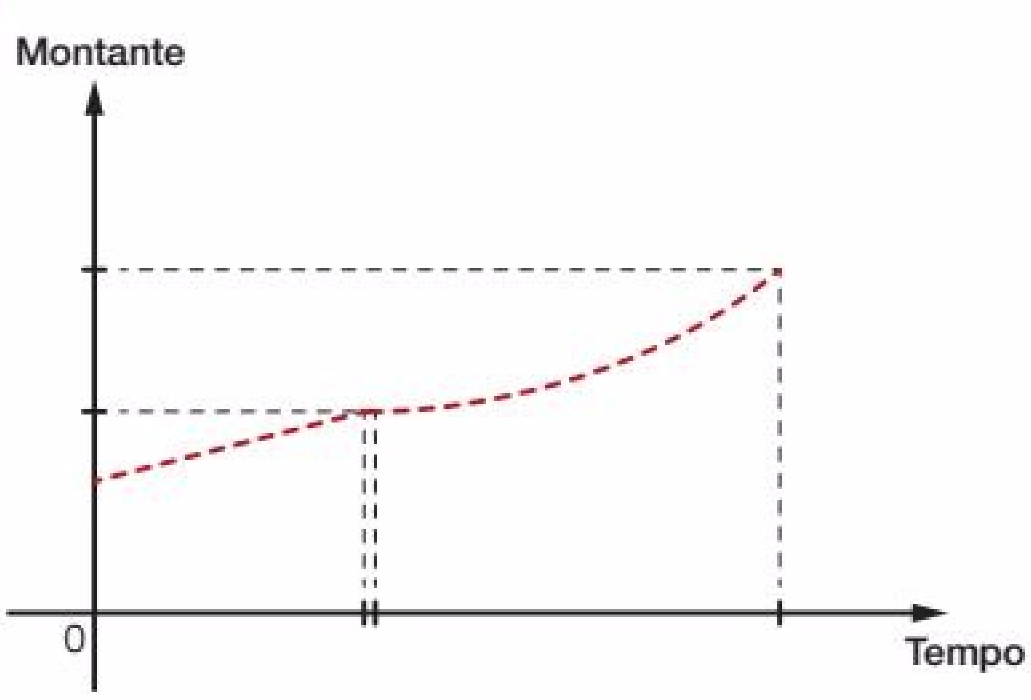
a)



b)



c)



Ilustrações: Acervo da editora

59. Um investidor efetuou uma aplicação de R$ 4 000,00 durante um semestre em um fundo que rende 2,5% a.m. no regime de juro composto.

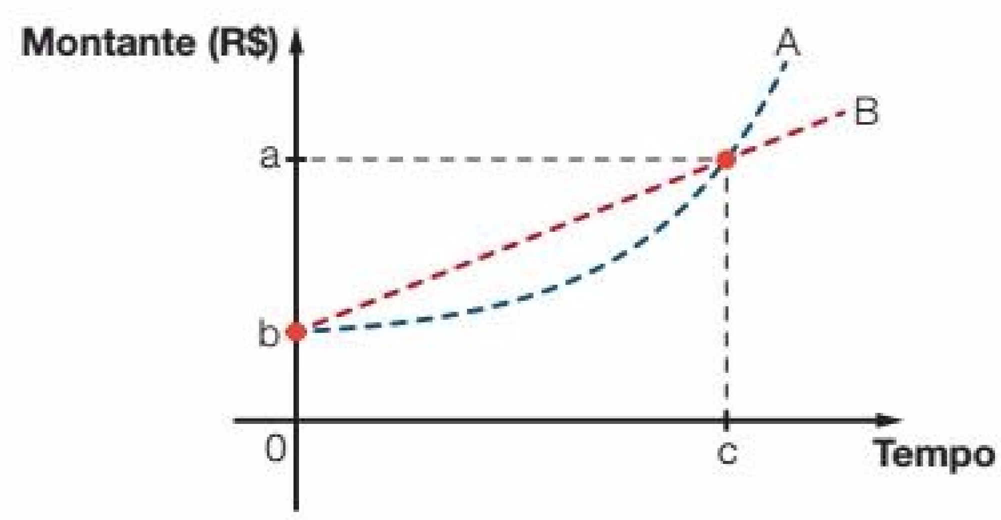
a) Escreva a lei de formação da função f que representa o montante em função do tempo t, em meses. $f(t)=4\,000\cdot(1{,}025)^t$

b) Esboce o gráfico de f e determine seu domínio. Resposta no final do livro.

60. Considere uma aplicação de certo capital c à taxa constante de juro simples de 7% a.a.

Escreva a lei de formação das funções f e g que determinam, respectivamente, o juro e o montante em função do tempo t.
$f(t)=0{,}07ct$; $g(t)=c\cdot(1+0{,}07t)$

61. O gráfico apresenta duas modalidades de investimentos oferecidos por determinada instituição financeira, um com taxa de juro simples e outro com taxa de juro composto.



Acervo da editora

a) Para um investimento com período de tempo menor que c, qual é mais vantajoso? investimento B

b) Qual investimento terá maior rentabilidade após o período de tempo c? investimento A

c) Qual foi o capital investido inicialmente? *b* reais

62. Ao comprar certo produto que custa R$ 100,00, um cliente poderia escolher entre duas formas de pagamento:

I) Uma entrada de R$ 20,00 no ato da compra, e o restante em parcela única acrescida a taxa de juro composto de 4% a.m.

II) Uma entrada de R$ 30,00 no ato da compra, e o restante em parcela única acrescida a taxa de juro simples de 5% a.m.

a) Escreva as funções $M_I=f(t)$ e $M_{II}=g(t)$, que representam o valor pago pelo produto em função do tempo, em meses. $f(t)=20+80\cdot(1{,}04)^t$ e $g(t)=30+70\cdot(1+0{,}05t)$

b) Qual opção de pagamento será mais vantajosa para o consumidor, se o restante da dívida for pago após 3 meses? E após 6 meses? I; II

63. Considerando as funções $f(t)=2\,000\cdot(1+0{,}01t)$ e $g(t)=17\,500\cdot(1{,}018)^t$, elabore o enunciado de uma atividade e troque-a com um colega. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.

Sistema de amortização

Em algumas situações, a indisponibilidade de capital para adquirir um bem pode levar um indivíduo a realizar um empréstimo; para sanar o compromisso, ele pode optar por diversas formas de pagamento. Ao efetuar os pagamentos parciais para saldar a dívida, ocorre sua amortização.

Amortização é o processo de redução de uma dívida por meio de pagamentos parciais, que podem ser mensais, bimestrais, anuais, entre outros. Cada pagamento (ou prestação) realizado corresponde ao juro e parte do capital (valor da dívida), sendo o juro calculado sobre o saldo devedor.

O saldo devedor corresponde à diferença entre o valor da dívida e o que já foi pago.

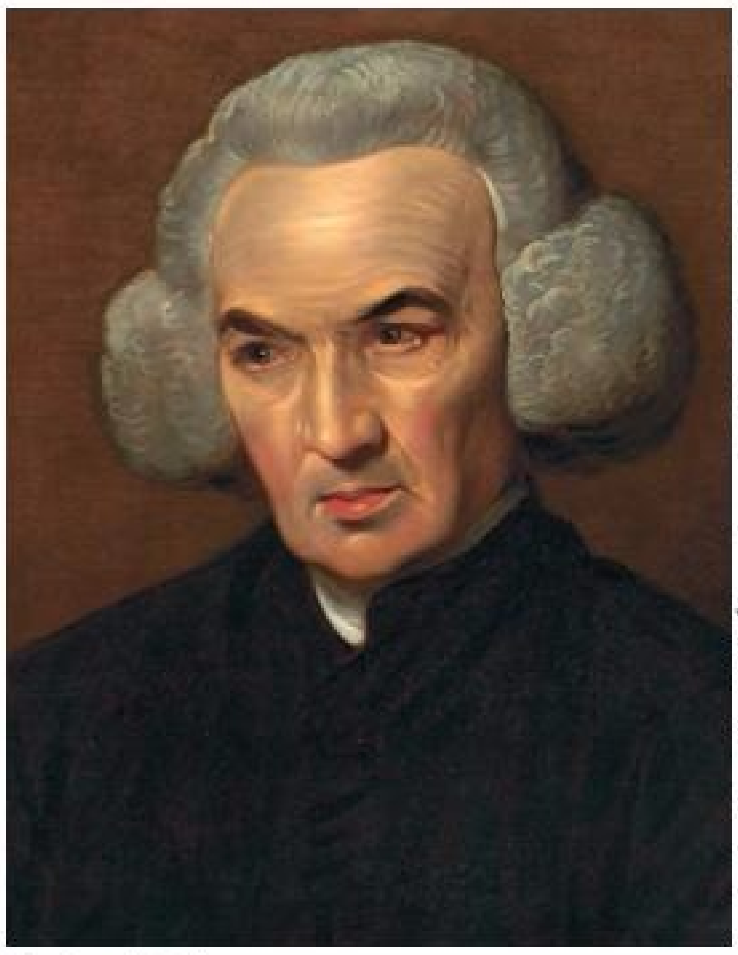
De maneira resumida, a prestação é dada por:

Prestação = Amortização + Juro

As maneiras de pagamento de uma dívida estão associadas a diferentes **sistemas de amortização**, sendo dois dos principais o Sistema de Amortização Constante (SAC), em que a amortização da dívida é constante, igual em cada período, e o sistema Price ou Francês, com prestações fixas.

Neste tópico iremos estudar o sistema Price, em que o devedor paga o empréstimo em prestações fixas, sendo o número de prestações variável, de acordo com o contrato entre as partes (devedor e credor).

Esse sistema foi desenvolvido e utilizado pela primeira vez na França, no século XIX. No entanto, foi concebido pelo economista e matemático inglês Richard Price (1723-1791), que incorporou a teoria de juro composto às amortizações de empréstimos. Dessa maneira, recebeu a denominação de sistema Price ou, ainda, “Tabela Price”.



Benjamin West. Séc. XVIII. Óleo sobre tela. 92,8 × 72,4 cm. Coleção particular. Foto: Christie's Images/Bridgeman Images/Easypix

Richard Price

Fonte de pesquisa: DI AGUSTINI, Carlos Alberto; ZELMANOVITS, Nei Schilling. **Matemática aplicada à gestão de negócios**. 1. ed. Rio de Janeiro: FGV, 2005. p.87-89.

Para calcular o valor de cada prestação de um empréstimo no sistema Price, utilizamos a fórmula:

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

A fórmula apresentada não será demonstrada, visto que o mais importante neste momento é que o aluno perceba a relação entre as variáveis e sua aplicação.

Nessa fórmula:

- *P*: valor da prestação
- *c*: valor do bem ou do empréstimo
- *i*: taxa de juro
- *n*: número de prestações

Exemplo

Paula fez um empréstimo de R$ 3 000,00, que deve ser pago em 5 prestações mensais à taxa de juro de 2,5% a.m., no sistema Price. Utilizando a fórmula apresentada acima, podemos calcular o valor de cada prestação:

$$c = 3\,000;\ i = 2{,}5\% = 0{,}025;\ n = 5$$

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{3\,000 \cdot 0{,}025}{1 - (1+0{,}025)^{-5}} \simeq 645{,}74$$

Diga aos alunos que os cálculos podem ser realizados em uma calculadora científica. Os procedimentos para isso serão trabalhados na atividade resolvida R15 da página 32.

Portanto, o valor de cada prestação é aproximadamente R$ 645,74.

No demonstrativo, os cálculos para obter os valores para $n=1$ e $n=2$ estão indicados. Nas demais linhas, os resultados são obtidos de maneira semelhante.

Observando o demonstrativo, nota-se que a quantia correspondente ao juro é cada vez menor, pois é calculada sobre o saldo devedor, que também é cada vez menor.

Como no sistema Price os pagamentos são parcelados, é conveniente construir um demonstrativo indicando a situação da dívida em cada período de tempo. Veja como ficaria o demonstrativo em relação ao empréstimo feito por Paula.

n	Pagamento	Juro	Amortização	Saldo devedor
0	–	–	–	3 000,00
1	645,74	$\underbrace{75{,}00}_{3000\cdot 0{,}025}$	$\underbrace{570{,}74}_{645{,}74-75}$	$\underbrace{2\,429{,}26}_{3\,000-570{,}74}$
2	645,74	$\underbrace{60{,}73}_{2\,429{,}26\cdot 0{,}025}$	$\underbrace{585{,}01}_{645{,}74-60{,}73}$	$\underbrace{1\,844{,}25}_{2\,429{,}26-585{,}01}$
3	645,74	46,11	599,63	1 244,62
4	645,74	31,11	614,63	629,99
5	645,74	15,75	629,99	0

Atividades resolvidas

R15. Construa um demonstrativo do sistema Price de acordo com as informações apresentadas no anúncio.

Fotomontagem de Desenhorama Estúdio formada pela imagem Roman Samokhin/ Shutterstock.com

Resolução

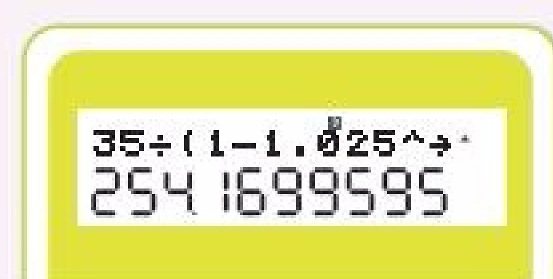
Inicialmente, calculamos o valor de cada parcela utilizando a fórmula $P=\dfrac{c\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$:

$c=1\,400$; $i=2{,}5\%=0{,}025$; $n=6$

$$P=\frac{1\,400\cdot 0{,}025}{1-(1+0{,}025)^{-6}}=\frac{35}{1-(1{,}025)^{-6}}\simeq 254{,}17$$

Utilizando uma calculadora científica, temos:

3 → 5 → ÷ → (→ 1 → − → 1 → . → 0 → 2 → 5 → ^ → − → 6 →) → =



Camila Ferreira

Logo, o valor de cada parcela é aproximadamente R$ 254,17.

Em seguida, construímos o demonstrativo.

n	Pagamento	Juro	Amortização	Saldo devedor
0	–	–	–	1 400,00
1	254,17	$\underbrace{35{,}00}_{1400\cdot 0{,}025}$	$\underbrace{219{,}17}_{254{,}17-35}$	$\underbrace{1\,180{,}83}_{1400-219{,}17}$
2	254,17	29,52	224,65	956,18
3	254,17	23,90	230,27	725,91
4	254,17	18,15	236,02	489,89
5	254,17	12,25	241,92	247,97
6	254,17	6,20	247,97	0

64. Para realizar empréstimos em certo banco que cobra juro no sistema Price, é exigido que o valor da prestação não ultrapasse 25% do salário líquido do cliente. É possível que uma pessoa que recebe R$ 1 150,00 de salário líquido mensal empreste R$ 3 000,00 desse banco, para serem pagos em um ano com prestações fixas e juro de 1,9% a.m.? Justifique. Sim, pois o valor da prestação (R$ 281,90) é menor que 25% do salário líquido (R$ 287,50).

65. Certo cliente de um banco realizou um empréstimo que será pago em 9 prestações mensais de R$ 928,46 sem entrada, com juro de 1,4% a.m. no sistema Price. Quantos reais esse cliente emprestou do banco? aproximadamente R$ 7 800,00

66. Felipe trocará seu automóvel usado por um novo, que custa R$ 48 000,00. Ele dará seu automóvel como entrada, no valor de R$ 25 000,00, e pagará o restante em 48 parcelas mensais com juro de 1% a.m. no sistema Price.


risteski goce/Shutterstock.com
automóvel

a) Calcule o valor de cada parcela paga por Felipe. aproximadamente R$ 605,74
b) Quantos reais de juro Felipe pagará? R$ 6 075,52

67. Veja parte de um demonstrativo de amortização do sistema Price.

n	Pagamento	Juro	Amortização	Saldo devedor
0	–	–	–	2 000,00
1	234,46	60	174,46	1 825,54

Com base nos dados acima, determine a quantidade de prestações necessárias para pagar a dívida. Se necessário, utilize $\log 103 = 2{,}0128$ e $\log 744 = 2{,}8716$. 10 prestações

68. Uma empresa tomou emprestado uma quantia de R$ 75 000,00, a ser paga em 8 parcelas mensais no sistema Price. Admitindo que a taxa de juro é de 2% ao mês, determine o valor aproximado:
a) do juro embutido na 4ª parcela R$ 965,11
b) da amortização da 5ª parcela R$ 9 459,28
c) do saldo devedor da 6ª parcela R$ 19 873,90

69. Poupar é adiar o consumo no momento presente, a fim de consumir mais no futuro. Tal ação garante um acúmulo de reservas a serem utilizadas posteriormente e um consumo que não ultrapasse a renda.

Contudo, as pessoas costumam poupar e investir pouco. Na prática, quando se compra a prazo, paga-se muito mais pelo produto, porque existem acréscimos de juro e outros custos adicionais. Comprando à vista, essas despesas são evitadas, o que deixa o produto mais barato.

A questão não está entre comprar e não comprar, mas entre receber a mercadoria pagando prestações e juro, ou poupar e comprar a mercadoria com desconto no futuro.

Portanto, a melhor solução nem sempre é alongar o prazo de pagamento, porque o consumidor passa mais tempo pagando juro e amortizando pouco. O segredo para a melhor compra, muitas vezes, consiste na pesquisa de preços e em pagamentos à vista.

a) Com juro de 2% a.m., quando o consumidor compra um televisor por R$ 2 522,85, para pagar em 5 prestações fixas, poderia pagar pelo mesmo produto R$ 2 378,27 à vista. Você concorda com essa afirmação? Justifique sua resposta com o auxílio do demonstrativo de amortização Price. Resposta nas **Orientações para o professor**.

Fotomontagem de Desenhorama Estúdio formada pela imagem Piotr Adamowicz/Shutterstock.com

b) Suponha que o consumidor queira comprar um televisor que custa à vista R$ 2 378,27, em 12 parcelas iguais, com juro de 2% a.m. Calcule o valor de cada parcela e o valor total a ser pago. aproximadamente R$ 224,92; aproximadamente R$ 2 699,04
c) É verdade que, quanto maior a quantidade de parcelas, maior é o valor pago pelo produto? Justifique. Resposta no final do livro.
d) Faça uma pesquisa sobre o preço à vista e a prazo de um produto, e o juro correspondente ao preço a prazo. Construa uma tabela indicando a situação da dívida em cada período de tempo. Resposta pessoal.

Ser consciente

Consumista ou consumidor?

Pelo menos uma vez na vida, as pessoas já pagaram mais caro por uma roupa apenas porque estava na moda. Ou ainda compraram um produto por impulso que teve uso poucas vezes.

Situações como estas são mais comuns do que se imagina. A grande variedade de produtos, as facilidades nas formas de pagamento, a publicidade excessiva são alguns elementos que costumam impulsionar as pessoas a comprarem de maneira impulsiva e exagerada, muitas vezes sem avaliar as consequências. Isso é o que chamamos de consumismo.

Uma ideia básica para um consumidor consciente – o oposto do consumista – é, antes de comprar, fazer uma distinção entre necessidade e desejo. Por exemplo: você precisa se vestir; logo, comprar roupas é uma necessidade. Contudo, pagar muito mais caro por uma determinada marca de qualidade similar a outra de preço mais acessível apenas porque é famosa ou está na moda é um desejo, o que nem sempre pode ser atendido. Não é que nunca podemos comprar algo que desejamos, mas temos de fazer isso com consciência, sem desequilibrar nosso orçamento.

O consumista compra de forma exagerada e impulsiva. A felicidade momentânea é substituída por tristeza quando percebe que o orçamento para comprar itens essenciais foi comprometido. Normalmente, ele é imediatista e compra um produto no momento que deseja, para pagar depois (algo que poderia esperar). Muitas vezes, isso faz que não valorize o bem adquirido e fique com muitas dívidas, tendo dificuldade para economizar e, assim, comprar itens mais caros ou realizar sonhos que demoram mais tempo para serem conquistados.

Fonte de pesquisa: GARCIA, Edson Gabriel. No mundo do consumo: o bom uso do dinheiro. 1. ed. São Paulo: FTD, 2014.

O consumidor consciente

Atitudes simples podem ser tomadas para consumir de forma consciente.

É importante manter o objetivo da compra a fim de evitar comprar além do necessário.

Analisando com cidadania

a) Você se considera uma pessoa consumista ou um consumidor consciente? Por quê?
Resposta pessoal.

b) Já conseguiu economizar dinheiro para comprar algo que desejava muito? Conte sua experiência. Resposta pessoal.

Analisando com Matemática

c) Uma família, com o objetivo de comprar um televisor novo, verificou que o preço do modelo desejado em uma loja podia ser pago em seis parcelas fixas de R$ 309,90. Na compra à vista, havia um desconto de 10% sobre o valor total do parcelamento. Calcule o preço a prazo e à vista do televisor.
a prazo R$ 1 859,40; a vista R$ 1 673,46

d) Considere que o preço à vista da televisão, calculado no item **c**, aumente mensalmente 1%. Qual o preço à vista do televisor após seis meses?

Esse valor é menor ou maior que o atual preço a prazo? aproximadamente R$ 1 776,41; menor

e) Com a finalidade de não endividar-se e obter vantagens no momento da compra, uma boa opção é poupar e comprar à vista. Suponha que uma pessoa tenha pago R$ 1 189,00 à vista por um *smartphone* cujo preço a prazo é de R$ 1 450,00. Qual foi o percentual de desconto obtido nessa compra? 18%

Veja mais informações sobre o consumo consciente no *site*:
- <http://tub.im/vwvrf4>

(acesso em: 18 jan. 2016)

Davi Augusto

capítulo 2

O ponto e a reta

Arco-íris no Parque Nacional da Chapada Diamantina, na Bahia, em 2013.

Frédéric SOREAU/Photononstop/Corbis/Latinstock

Arco-íris

Veja mais informações sobre o arco-íris no *site*:

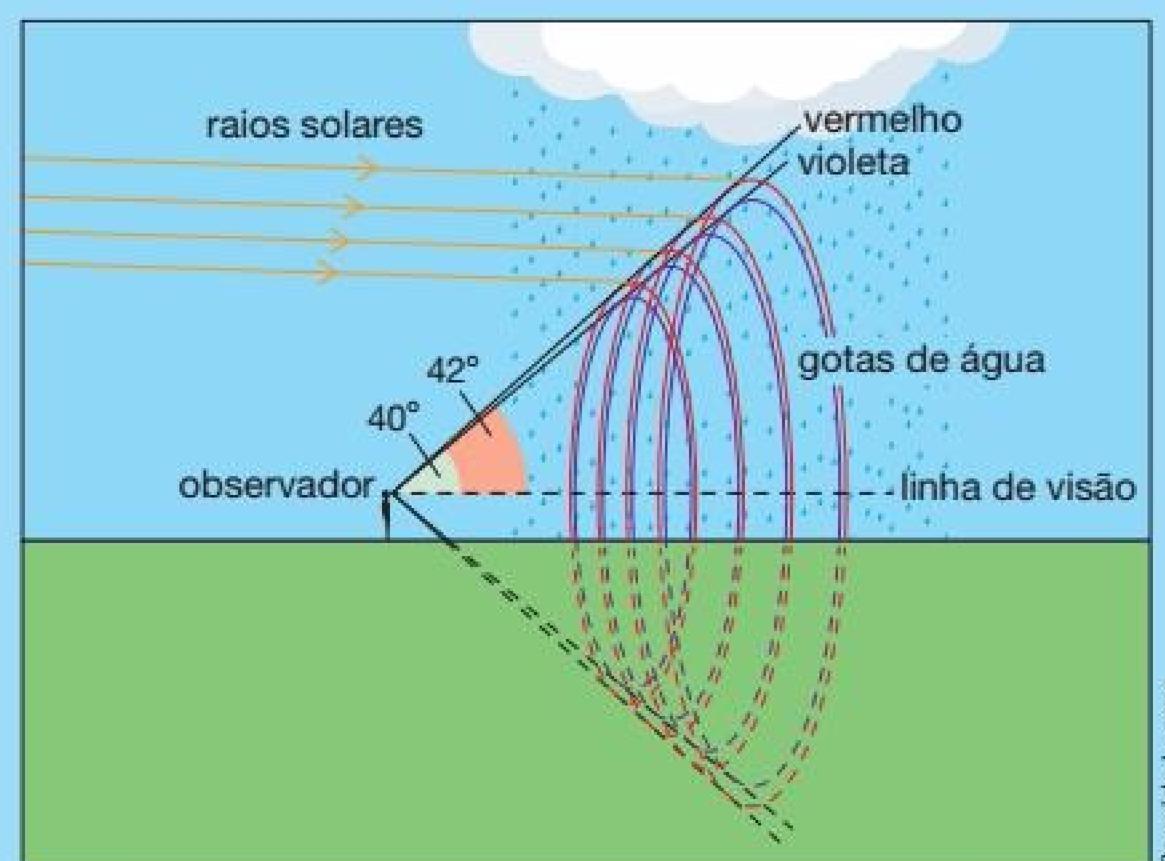
- <http://tub.im/roka8v> (acesso em: 26 fev. 2016)

Um arco-íris surge quando os raios solares incidem nas gotas de água que estão no ar e são decompostos nas sete cores que compõem a luz branca: vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, anil e violeta. Cada gota atua como um prisma e para que o fenômeno possa ser observado é necessário que as gotas de água da chuva, da nuvem, ou de outro meio, estejam do lado oposto aos raios solares.

Apesar de cada gota refletir as sete cores, um observador não as percebe assim, pois elas são refletidas em angulações diferentes. A cor vermelha, por exemplo, tem a maior inclinação, vista pelo observador a uma angulação de 42°. Já a cor violeta tem a menor inclinação, vista a uma angulação de 40°.

No esquema a seguir, é possível perceber que essas cores vistas pelo observador estão em uma faixa que varia entre 40° e 42°. Além disso, se não fosse o horizonte, veríamos o arco-íris em círculos e não em semicírculos.

Fonte de pesquisa: <http://sites.ifi.unicamp.br/laboptica/curiosidades-2/arco-iris/>. Acesso em: 8 mar. 2016.



O observador visualiza o arco-íris formado por milhares de gotas de água.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Para o arco-íris ser observado, qual deve ser a posição das gotas de água em relação aos raios solares?

As gotas de água devem estar do lado oposto aos raios solares.

B A medida do ângulo formado pela linha de visão do observador e pelos raios de cor verde é menor ou maior que 42°? Justifique.

Menor, pois a cor de maior inclinação vista pelo observador é a vermelha, cuja angulação é de 42°.

C Em sua opinião, dois observadores, um ao lado do outro, visualizam o mesmo arco-íris? Justifique.

Resposta esperada: não, pois os observadores visualizam o arco-íris cujas cores provêm de gotas diferentes.

Estudando geometria analítica

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados os exemplos e a atividade das páginas 199 e 200 da seção **Acessando tecnologias**.

William Holl. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

De acordo com uma lenda, Descartes teve a ideia que originou o sistema de coordenadas cartesianas ao observar uma mosca no forro de seu quarto, e supor que o caminho dela poderia ser descrito relacionando as distâncias dela às paredes adjacentes.

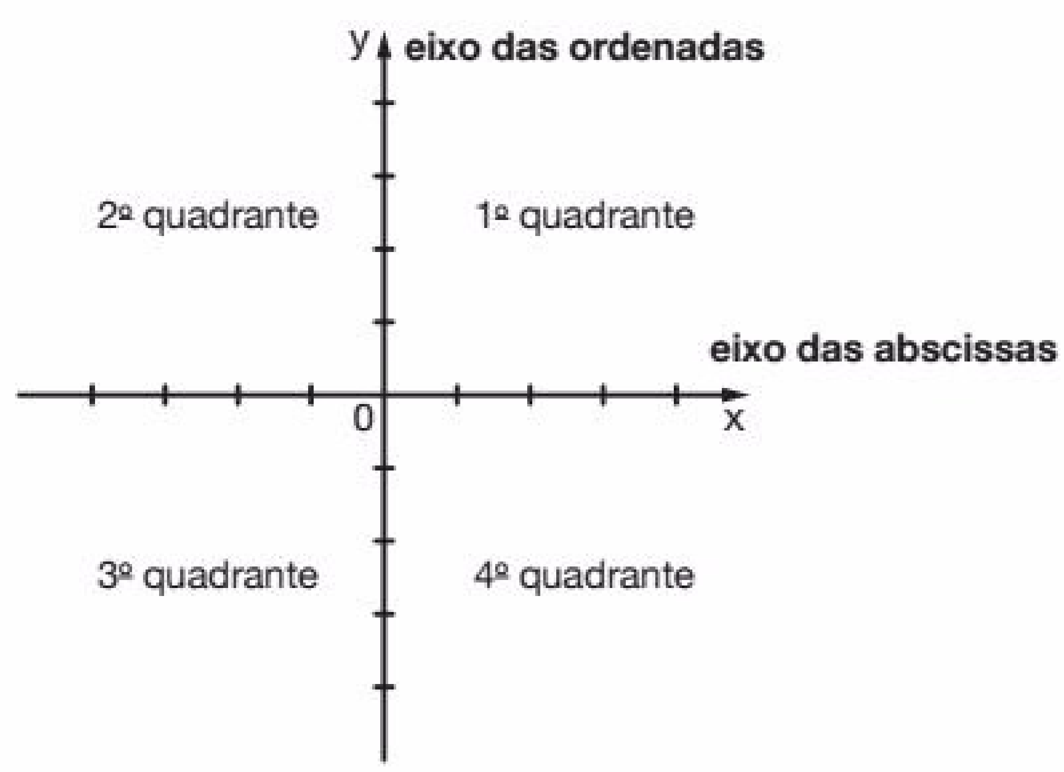
Muitos estudiosos consideram o início do estudo do que hoje denominamos **geometria analítica** como um dos maiores progressos da Matemática.

A geometria analítica tem entre suas características a realização de conexões entre a Geometria e a Álgebra, pois, por exemplo, permite compreender as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas em um plano, ou, então, representar por meio de uma equação uma figura bidimensional ou tridimensional.

Não há consenso sobre quando se deu início ao estudo da geometria analítica. Enquanto alguns historiadores defendem que práticas que levam a esse ramo da Matemática já eram do conhecimento de gregos, egípcios e romanos, outros creditam aos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) o início do estudo sistemático dessa ciência. A maior contribuição de Descartes foi publicada em sua famosa obra **Discurso sobre o método**. Essa obra era acompanhada de três apêndices, sendo que o último deles, intitulado **La géométrie**, apresenta as ideias que fundamentaram o estudo da geometria analítica. Já Fermat, que trabalhava paralelamente e independentemente de Descartes, realizou estudos relacionados a equações que representavam curvas matemáticas em um plano.

Neste capítulo, estudaremos os conceitos de ponto e reta na geometria analítica. Para isso, é importante lembrar alguns conceitos sobre **plano cartesiano ortogonal**, que consiste em um plano com dois eixos perpendiculares, x e y, que o dividem em quatro regiões. O horizontal x é denominado **eixo das abscissas**, e o vertical y, **eixo das ordenadas**. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado **origem**.

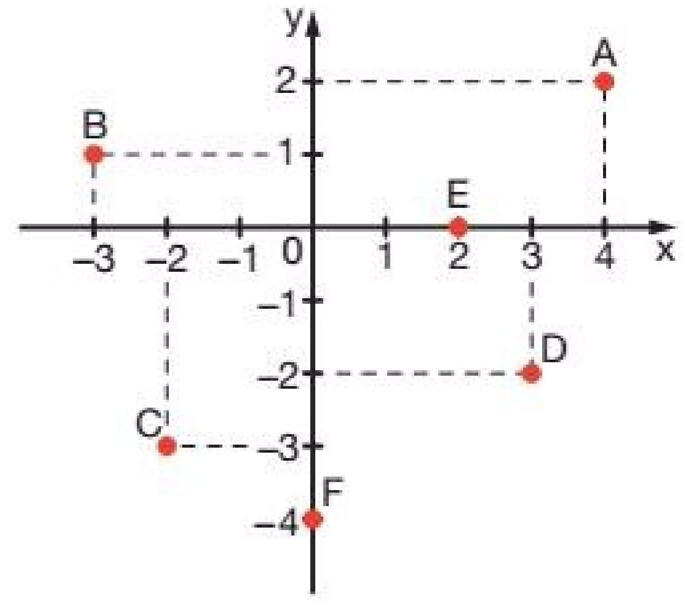
Explique aos alunos que, na linguagem comum, quando dizemos que uma pessoa é cartesiana, significa que ela apresenta uma racionalidade rigorosa e um pensamento sistemático, semelhante ao defendido por René Descartes.



Se um ponto P pertence ao eixo x, então a ordenada de P é zero. De maneira semelhante, se P pertence ao eixo y, a abscissa de P é zero. Veja no exemplo ao lado os pontos E e F.

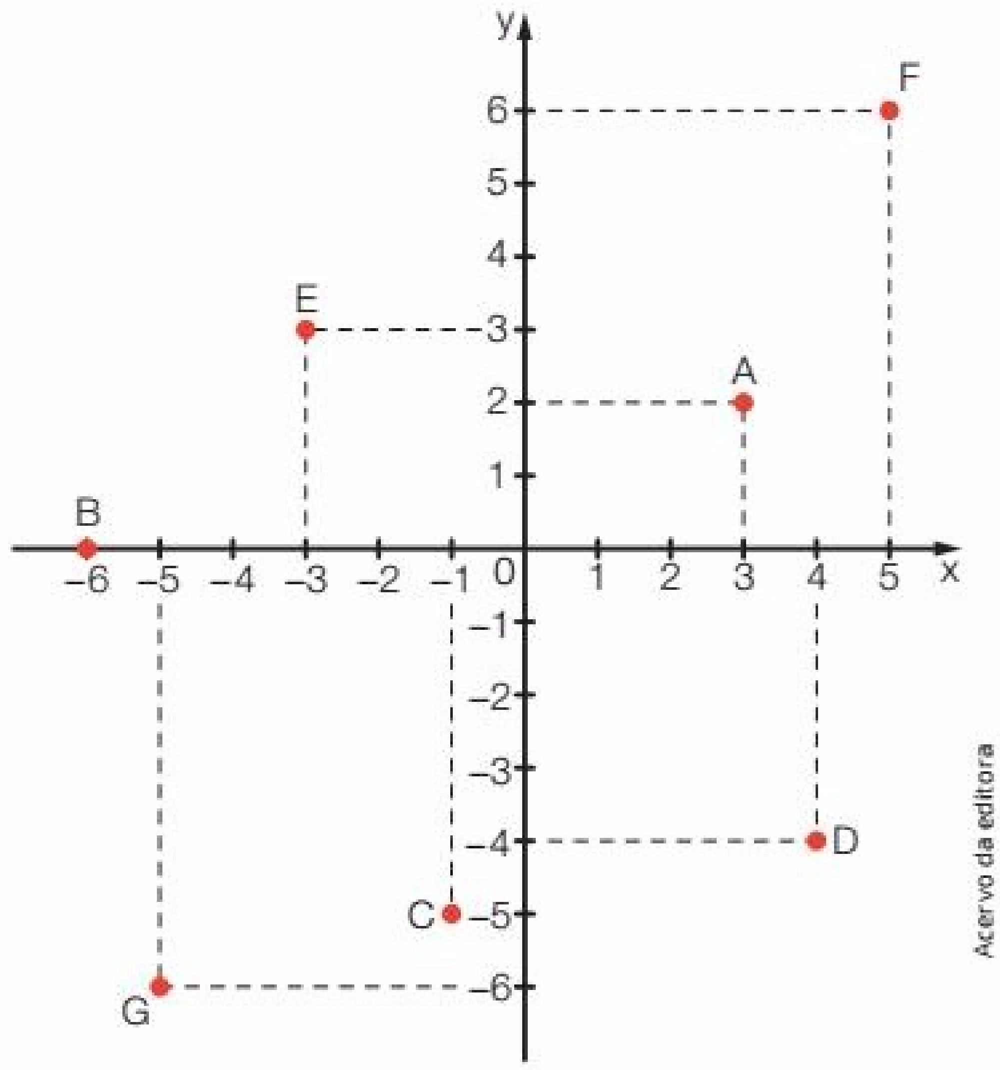
Para representar um ponto P em um plano cartesiano, utilizamos as **coordenadas cartesianas**, que consistem em um par ordenado (a, b), com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, em que a é abscissa, e b, a ordenada do ponto.

No plano cartesiano a seguir, estão indicados os pontos $A(4, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(3, -2)$, $E(2, 0)$ e $F(0, -4)$.

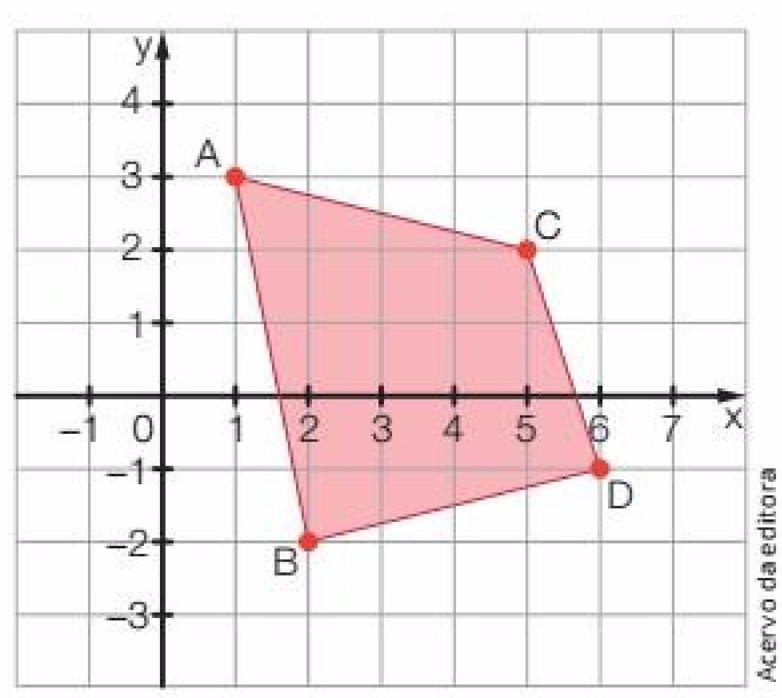


Ilustrações: Acervo da editora

1. Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.
$A(3,2)$; $B(-6,0)$; $C(-1,-5)$; $D(4,-4)$; $E(-3,3)$; $F(5,6)$; $G(-6,-5)$



2. Observe o quadrilátero ABCD representado no plano cartesiano.



2. b) Uma possível resposta: $(3,1)$, $(4,1)$ e $(5,1)$.

a) Quais são as coordenadas dos vértices desse quadrilátero? $A(1,3)$, $B(2,-2)$, $C(5,2)$ e $D(6,-1)$

b) Escreva as coordenadas de três pontos do plano, internos a esse quadrilátero.

c) Quais devem ser as coordenadas dos vértices de um quadrilátero A'B'C'D' para que ele seja simétrico ao quadrilátero ABCD em relação ao eixo *y*?
$A'(-1,3)$, $B'(-2,-2)$, $C'(-5,2)$ e $D'(-6,-1)$

3. Em um plano cartesiano, em qual quadrante os pontos têm:

a) abscissa positiva? 1º e 4º quadrantes

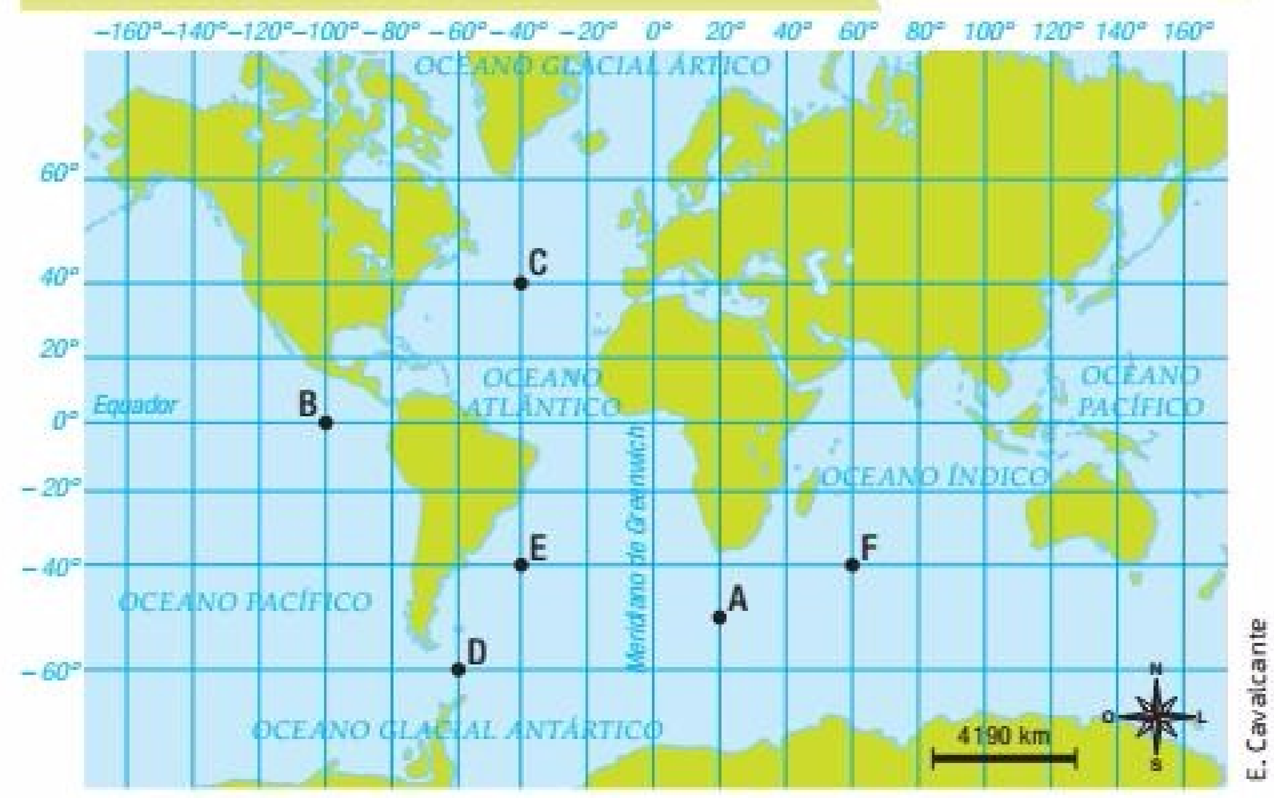
b) ordenada negativa? 3º e 4º quadrantes

c) abscissa negativa e ordenada positiva? 2º quadrante

d) abscissa positiva e ordenada negativa? 4º quadrante

4. No sistema de mapeamento da Terra, as linhas horizontais são os paralelos, que indicam a latitude, sendo o Equador a referência, equivalendo ao eixo das abscissas. As linhas verticais são os meridianos, que indicam a longitude, com o Meridiano de Greenwich sendo o eixo das ordenadas.

Paralelos e meridianos



Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

De acordo com o mapa, escreva:

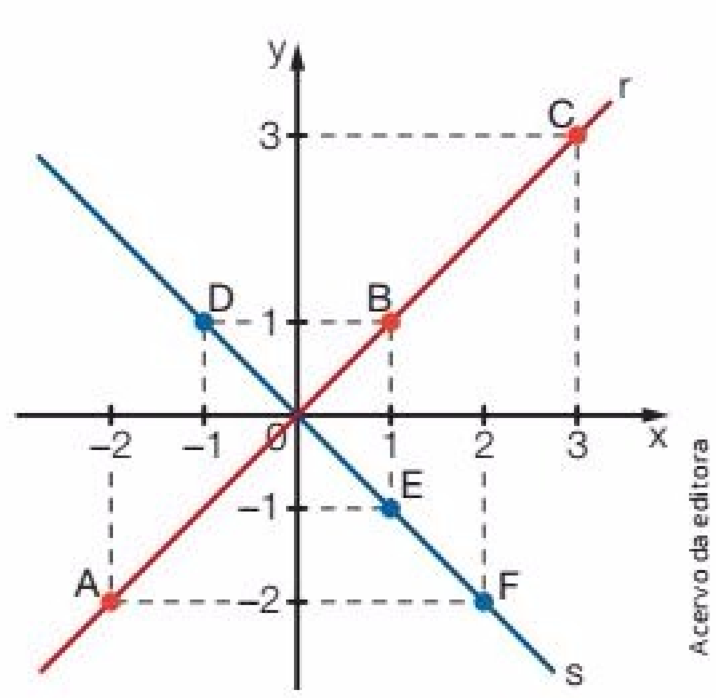
a) a longitude do ponto *A* 20°

b) a latitude do ponto *C* 40°

c) as coordenadas geográficas, longitude e latitude, dos pontos *B* e *E* $B(-100°, 0°)$; $E(-40°, -40°)$

5. Construa um plano cartesiano e indique os pontos $A(3,-1)$, $B(0,4)$, $C(-3,2)$, $D(3,4)$, $E(-2,-4)$ e $F(-1,0)$. Resposta no final do livro.

6. As retas *r* e *s* são, respectivamente, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e do 2º e do 4º quadrantes.



a) Escreva as coordenadas dos pontos:

- A $A(-2,-2)$
- C $C(3,3)$
- E $E(1,-1)$
- B $B(1,1)$
- D $D(-1,1)$
- F $F(2,-2)$

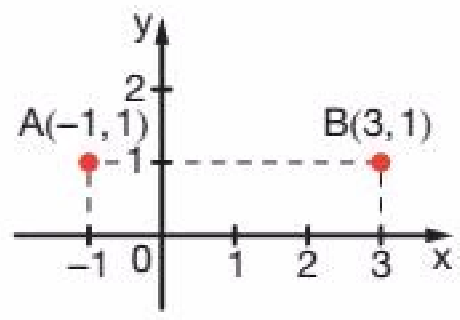
b) Considerando os pontos $P(7,y)$ e $Q(x,9)$, determine *x* e *y* para que *P* pertença à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, e *Q*, à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes. $x=-9$; $y=7$

Distância entre dois pontos

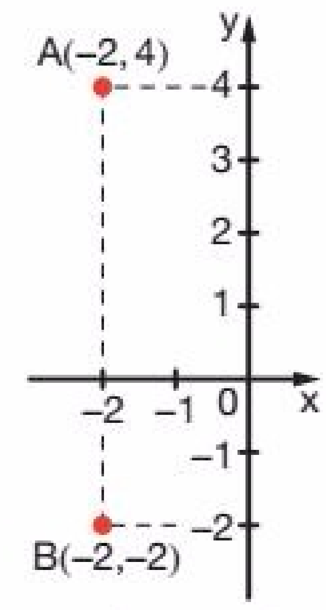
Fixando uma unidade de medida de comprimento, indicamos a distância entre dois pontos *A* e *B* por AB.

Veja, por exemplo, como podemos determinar AB quando a reta que contém *A* e *B* é paralela ao eixo *x* ou ao eixo *y*.

Lembre-se de que na reta real a distância entre dois pontos *M* e *N* de abscissas x_M e x_N, respectivamente, é $|x_N - x_M|$.

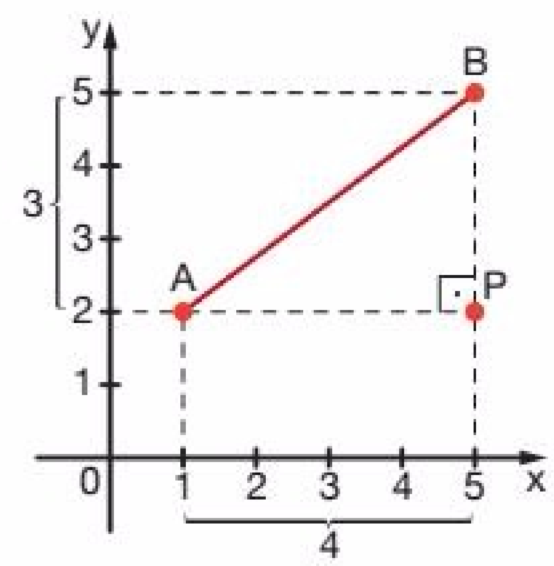


$$AB = |3-(-1)| = 4$$



$$AB = |4-(-2)| = 6$$

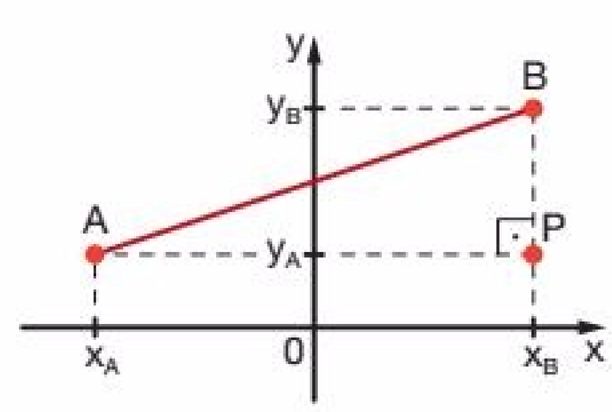
Para determinar a distância entre dois pontos cuja reta que os contém não é paralela ao eixo *x* ou ao eixo *y*, utilizaremos o Teorema de Pitágoras. Observe, por exemplo, como determinar a distância entre os pontos $A(1, 2)$ e $B(5, 5)$.



Note que o $\triangle ABP$ é retângulo em *P*, $AP = |5-1| = 4$ e $BP = |5-2| = 3$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABP$, temos:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

Deduziremos uma fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano.



Ilustrações: Acervo da editora

Como $\overleftrightarrow{AP}$ é paralela ao eixo *x* e $\overleftrightarrow{BP}$ é paralela ao eixo *y*, temos que $AP = |x_B - x_A|$ e $BP = |y_B - y_A|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABP$, temos:

Denotaremos a reta AB por $\overleftrightarrow{AB}$

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemplos

- Distância entre os pontos $A(-3, 1)$ e $B(4, -2)$:

$$AB = \sqrt{[4-(-3)]^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

- Distância entre os pontos $C(7, -3)$ e $D(-5, 2)$:

$$CD = \sqrt{(-5-7)^2 + [2-(-3)]^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

Atividades resolvidas

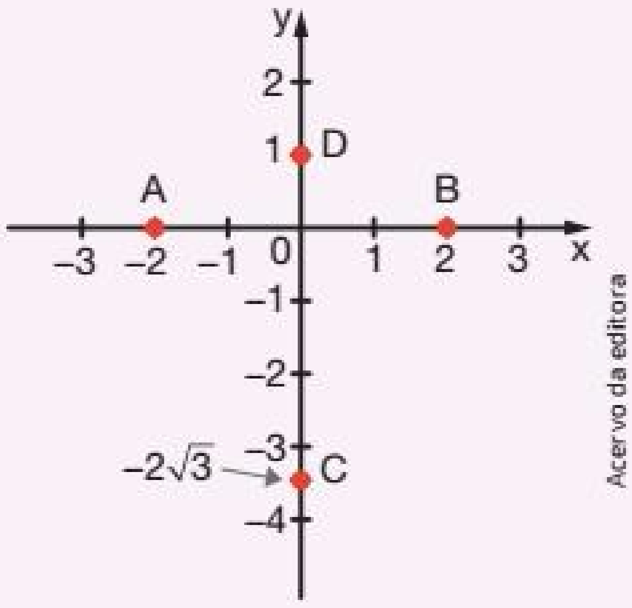
R1. Os pontos $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -2\sqrt{3})$ e $D(0, 1)$ são vértices dos triângulos indicados a seguir. Classifique cada triângulo em isósceles, equilátero ou escaleno.

a) $\triangle ABC$ b) $\triangle ABD$ c) $\triangle ACD$

Resolução

Inicialmente, calculamos a medida dos lados:

- $AB = |2-(-2)| = |4| = 4$
- $AC = \sqrt{[0-(-2)]^2 + (-2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$
- $AD = \sqrt{[0-(-2)]^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $BC = \sqrt{(0-2)^2 + (-2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$
- $BD = \sqrt{(0-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $CD = |1-(-2\sqrt{3})| = |1+2\sqrt{3}| = 1+2\sqrt{3}$



a) Como $AB = AC = BC$, temos que o $\triangle ABC$ é equilátero.

b) Como $AD = BD \neq AB$, temos que o $\triangle ABD$ é isósceles.

c) Como $AC \neq AD$, $AC \neq CD$ e $AD \neq CD$, temos que o $\triangle ACD$ é escaleno.

R2. Determine as coordenadas do circuncentro *C* do triângulo de vértices $P(0, 5)$, $Q(3, 6)$ e $R(8, 1)$.

Resolução

O circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência que passa por seus vértices. Calculando a distância de cada ponto (*P*, *Q* e *R*) ao centro $C(x_C, y_C)$ da circunferência, temos:

- $PC = \sqrt{(x_C-0)^2 + (y_C-5)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25}$
- $QC = \sqrt{(x_C-3)^2 + (y_C-6)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45}$
- $RC = \sqrt{(x_C-8)^2 + (y_C-1)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65}$

Note que a medida do raio da circunferência é dada por $r = PC = QC = RC$. Assim, escrevemos e resolvemos o seguinte sistema:

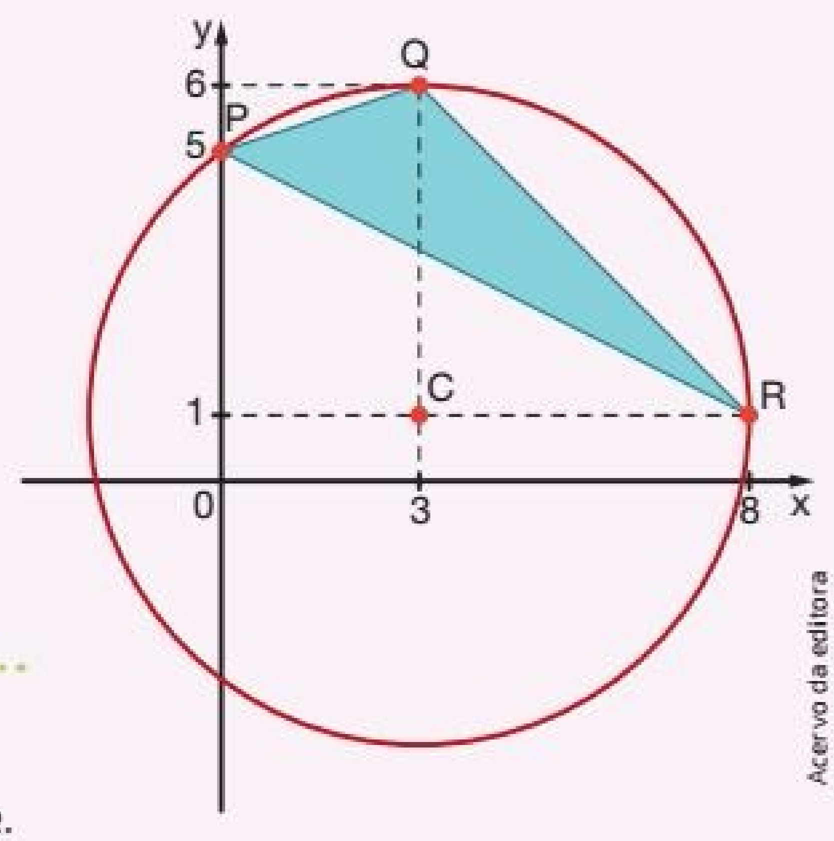
$$\begin{cases} PC = QC \\ PC = RC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45} & \text{(I)} \\ \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65} & \text{(II)} \end{cases}$$

Elevando os membros de I e II ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25 = x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45 \\ x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25 = x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_C + 2y_C = 20 \quad \cdot(4) \\ 16x_C - 8y_C = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x_C + 8y_C = 80 \\ 16x_C - 8y_C = 40 \end{cases}$$

$$40x_C = 120 \Rightarrow x_C = 3$$



Substituindo x_C por 3 na equação $6x_C + 2y_C = 20$:

$$6 \cdot 3 + 2y_C = 20 \Rightarrow 2y_C = 2 \Rightarrow y_C = 1$$

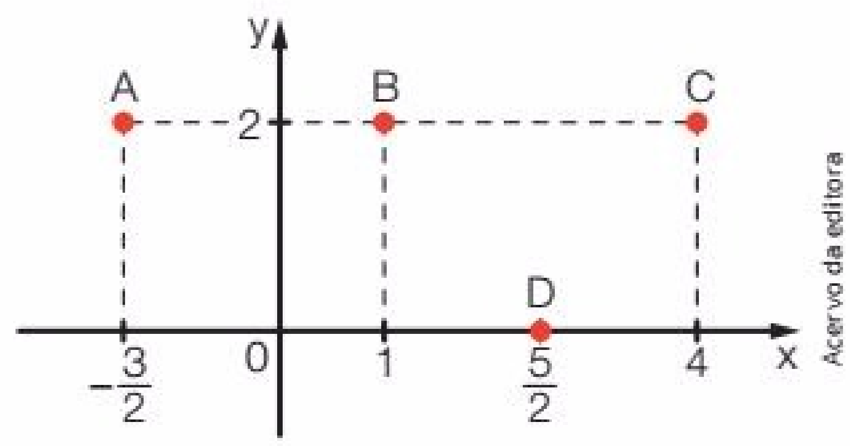
Portanto, as coordenadas do circuncentro do $\triangle PQR$ são $C(3, 1)$.

O circuncentro de um triângulo pode ser interno ou externo a ele.

7. Calcule a distância entre os pontos:

- $A(1, 9)$ e $B(2, 8)$ $\sqrt{2}$
- $P(-5, 4)$ e $Q(-2, 7)$ $3\sqrt{2}$
- $C(-3, 5)$ e $D(-3, 12)$ 7
- $M(0, 12)$ e $N(9, 0)$ 15

8. De acordo com os pontos indicados no plano cartesiano, resolva:



a) Quantos triângulos podem ser formados? 3 triângulos

b) Nomeie e classifique cada triângulo em escaleno, isósceles ou equilátero. △ABD: isósceles; △ACD: escaleno; △BCD: isósceles

9. Sabendo que $Q(1, x)$ é um ponto do 4º quadrante e que a distância de Q ao ponto $P(0, 4)$ é $5\sqrt{2}$, calcule o valor de x. $x = -3$

10. Em quais itens os pontos dados formam um triângulo? b; c

a) $A(0, -1)$, $B(12, 4)$ e $C\left(6, \frac{3}{2}\right)$

b) $F(2, 3\sqrt{3})$, $G(5, 0)$ e $H(-1, 0)$

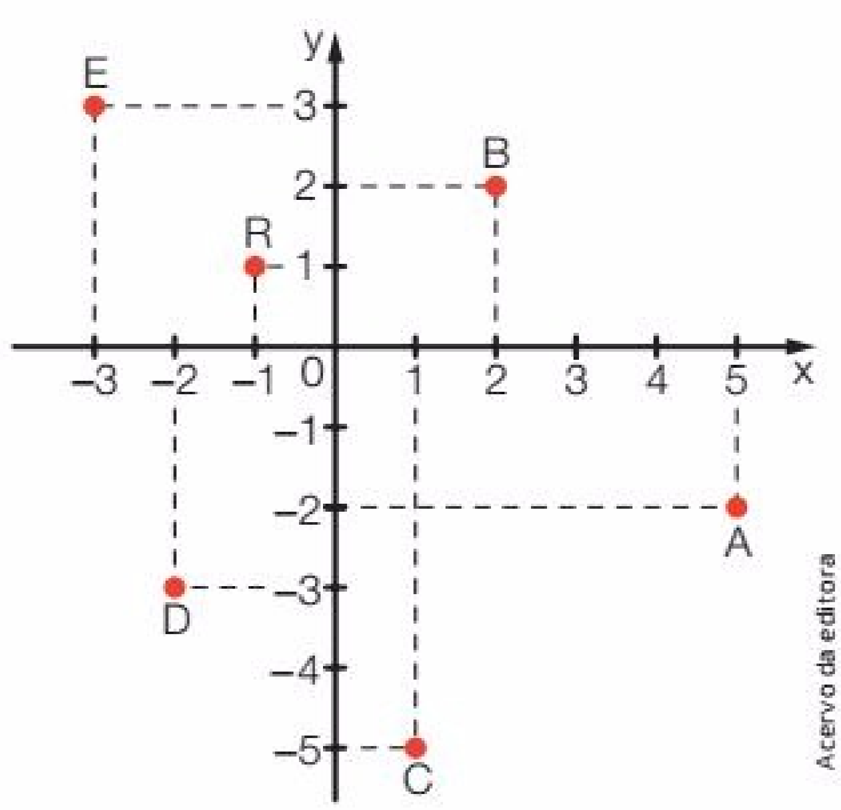
c) $L(4, 6)$, $M(3, 1)$ e $N(9, 2)$

d) $P(1, 3)$, $Q(5, 6)$ e $R(9, 9)$

Lembre os alunos de que, se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são lados de um triângulo, então a soma das medidas de quaisquer dois desses lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.

11. Calcule o perímetro e a área de um triângulo cujos vértices são $A(-1, 2)$, $B(2, 6)$ e $C(5, 2)$.
perímetro: 16 u.c.; área: 12 u.a.

12. Observe o esquema que representa a localização das cidades *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, e de uma antena de transmissão de sinal de rádio, *R*.



Sabendo que o raio de transmissão dessa antena é de 220 km e que cada unidade representada no esquema corresponde a 50 km, quais cidades recebem o sinal transmitido? *B*, *D* e *E*

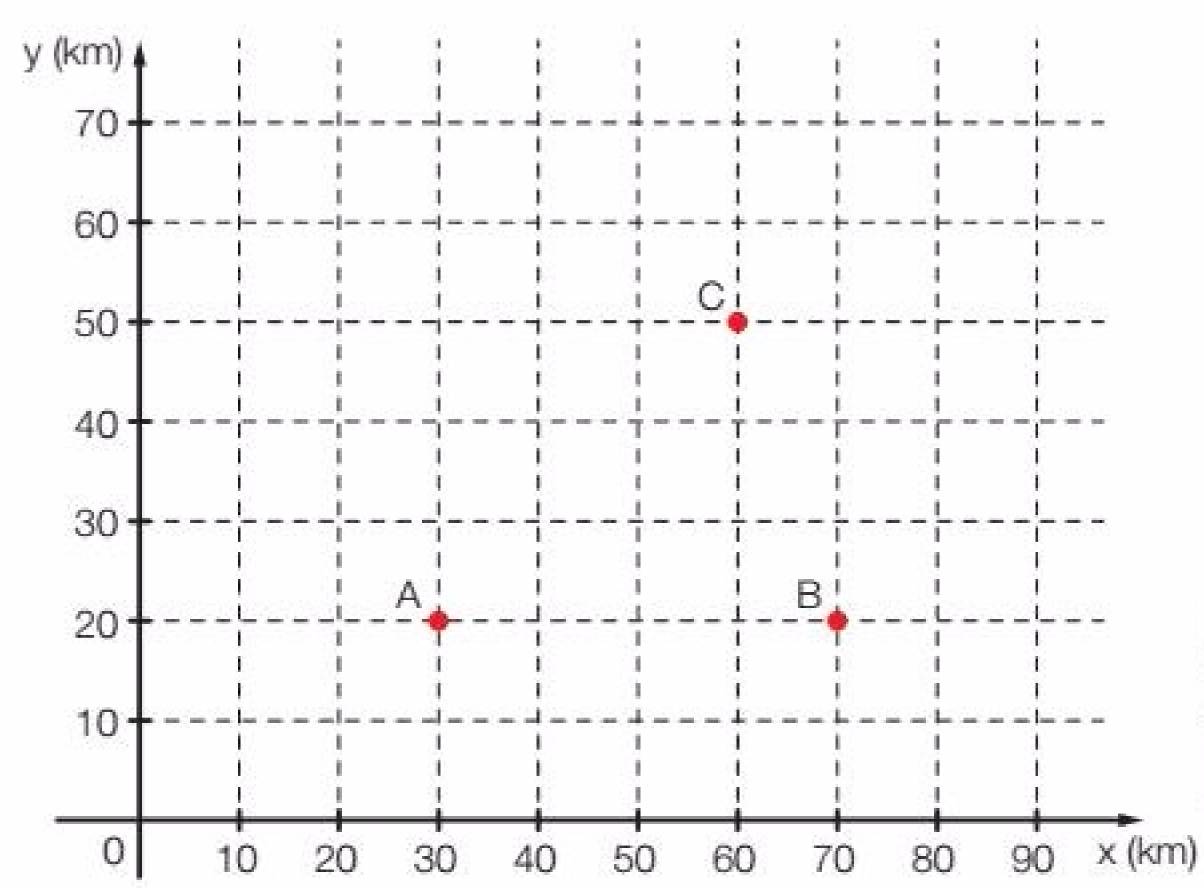
13. Considerando o triângulo de vértices $A(4, 5)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 5)$, retângulo em *A*, calcule $\text{sen}\,\hat{C}$. $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Dados os pontos $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ e $C(-7, -6)$, determine as coordenadas do ponto *D*, para que esses pontos sejam vértices de um retângulo. $D(-9, -3)$

15. Determine as coordenadas de $P(x, y)$, sabendo que ele é equidistante aos pontos $M(3, 6)$, $N(4, 3)$ e $O(0, 0)$. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{6}\right)$

16. Desafio

(Enem-MEC) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas *A*, *B* e *C*, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas: e

a) (65; 35)

b) (53; 30)

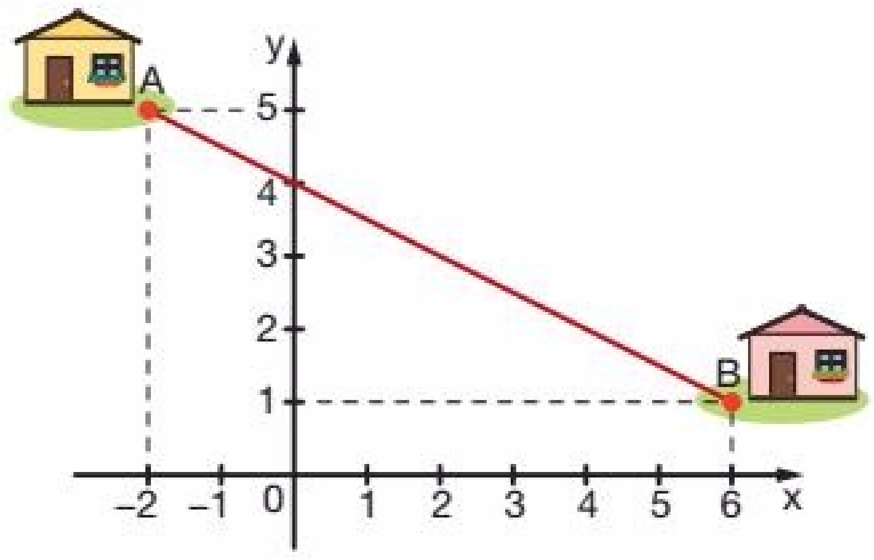
c) (45; 35)

d) (50; 20)

e) (50; 30)

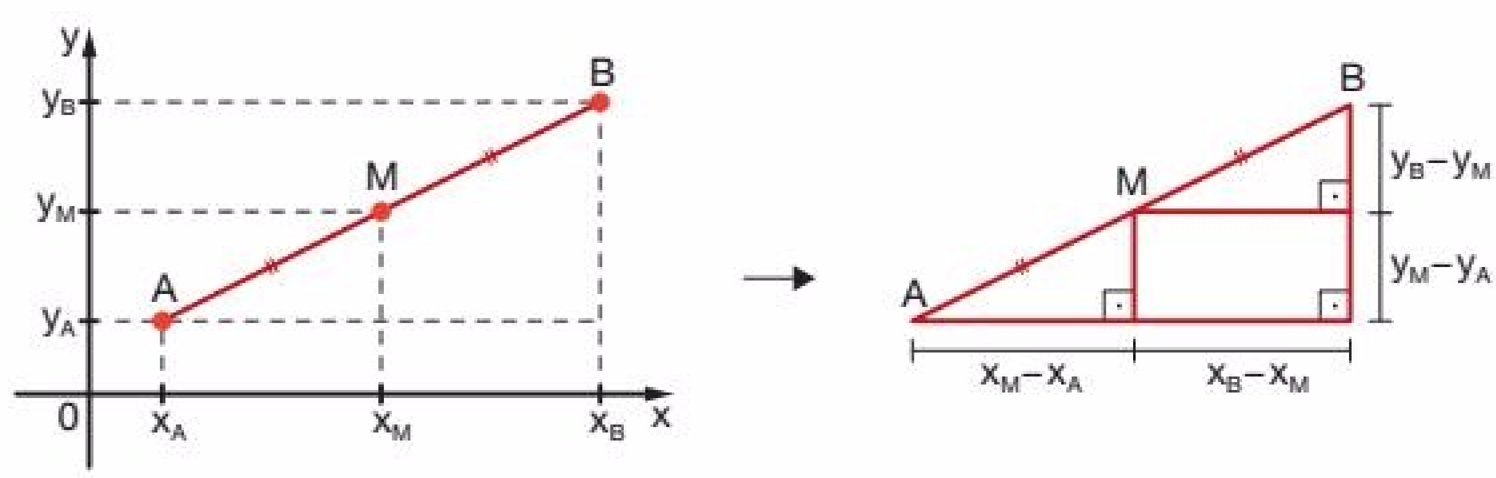
Coordenadas do ponto médio de um segmento

No plano cartesiano, os pontos *A* e *B* representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto *M* onde o poço deve ser construído?



Para resolver esse problema, temos de determinar o ponto médio de $\overline{AB}$.

Vamos deduzir as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ de $\overline{AB}$, sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



Por semelhança de triângulos, temos:

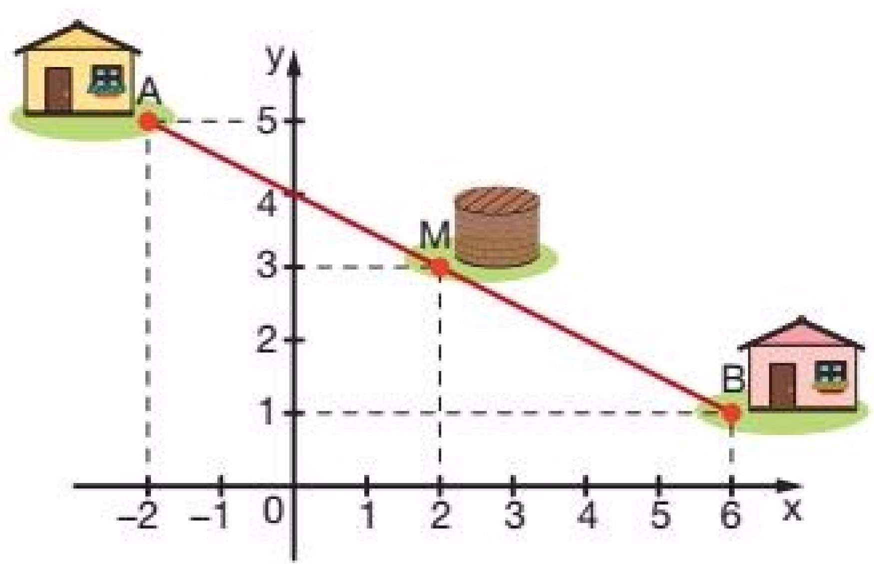
- $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow 1 = \dfrac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow x_B - x_M = x_M - x_A \Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$
- $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \Rightarrow 1 = \dfrac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \Rightarrow y_B - y_M = y_M - y_A \Rightarrow y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, as coordenadas do ponto médio *M* de $\overline{AB}$, em que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, são $\boxed{M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)}$.

Note que as coordenadas do ponto médio de um segmento AB correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de *A* e *B*.

Em relação ao problema apresentado, as coordenadas do ponto em que o poço deve ser perfurado são dadas por:

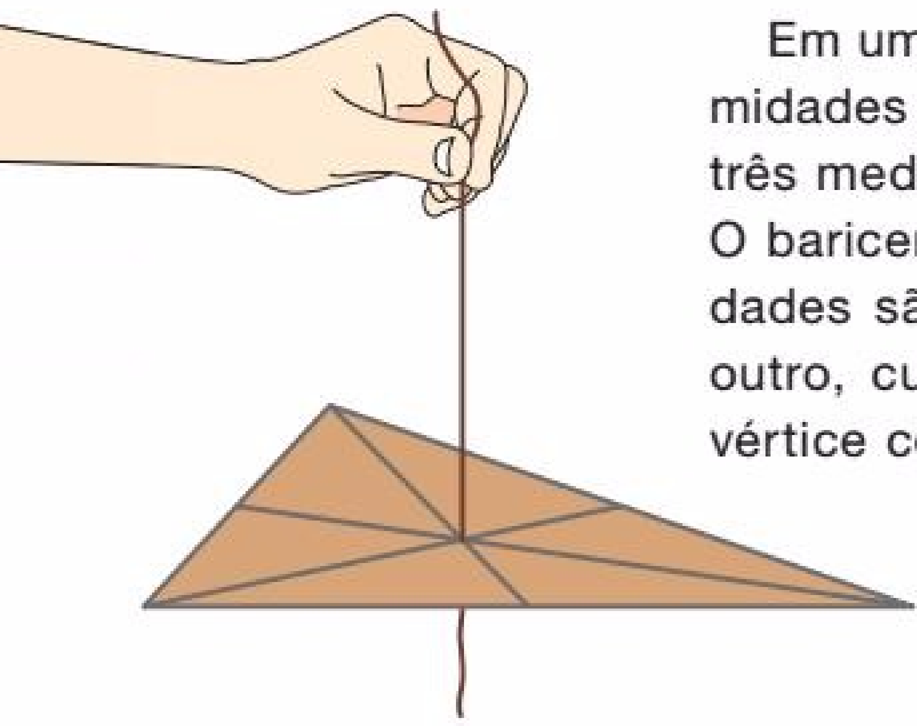
- $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2$
- $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3$



Ilustrações: Acervo da editora

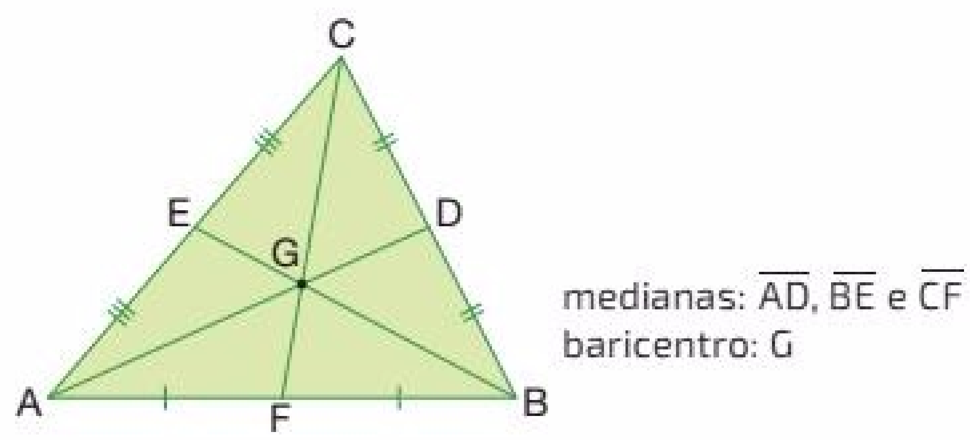
Assim, o poço deve ser construído no ponto de coordenadas $M(2, 3)$.

Baricentro de um triângulo

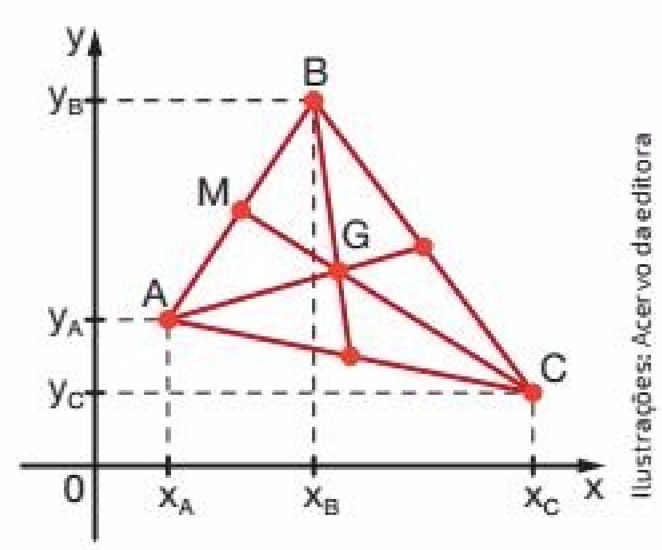


O baricentro corresponde ao centro de equilíbrio de um triângulo. Ao desenharmos um triângulo em uma cartolina e determinarmos seu baricentro, podemos recortá-lo e, pelo baricentro, passar um barbante como mostra a figura. Ao suspender o triângulo pelo baricentro, ele se manterá em equilíbrio.

Em um triângulo, as medianas correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. As três medianas do triângulo se cruzam em um único ponto denominado **baricentro**. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos. O segmento cujas extremidades são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do outro, cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice considerado. No exemplo apresentado, $AG=2\cdot GD$, $BG=2\cdot GE$ e $CG=2\cdot GF$.



Dados três pontos não colineares $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, determinaremos as coordenadas do baricentro *G* do $\triangle ABC$.



Se *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$, ou seja, $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ e $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$. Além disso, da propriedade apresentada, temos que $CG=2\cdot GM$, ou seja, $x_C-x_G=2\cdot(x_G-x_M)$ e $y_C-y_G=2\cdot(y_G-y_M)$.

Assim, segue que:

- $x_C-x_G=2\cdot(x_G-x_M) \Rightarrow x_C-x_G=2x_G-2x_M \Rightarrow 3x_G=2x_M+x_C \Rightarrow 3x_G=2\cdot\dfrac{x_A+x_B}{2}+x_C \Rightarrow$
  $\Rightarrow x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$
- $y_C-y_G=2\cdot(y_G-y_M) \Rightarrow y_C-y_G=2y_G-2y_M \Rightarrow 3y_G=2y_M+y_C \Rightarrow 3y_G=2\cdot\dfrac{y_A+y_B}{2}+y_C \Rightarrow$
  $\Rightarrow y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$

Portanto, as coordenadas do baricentro do $\triangle ABC$, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são $\boxed{G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}, \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)}$.

Exemplo

Dado o $\triangle ABC$, cujas coordenadas dos vértices são $A(7,-2)$, $B(-1,5)$ e $C(9,-4)$, vamos determinar as coordenadas do baricentro *G*.

- $x_G=\dfrac{7+(-1)+9}{3}=\dfrac{15}{3}=5$
- $y_G=\dfrac{-2+5+(-4)}{3}=-\dfrac{1}{3}$

Portanto, as coordenadas do baricentro do $\triangle ABC$ são $G\left(5, -\dfrac{1}{3}\right)$.

Note que as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de *A*, *B* e *C*.

Atividades resolvidas

R3. Dados os pontos $A(3,4)$ e $C(15,20)$, determine as coordenadas do ponto *B* que divide $\overline{AC}$ na proporção $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}$.

Resolução

Calculando a abscissa do ponto *B*, temos:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_B-x_A}{x_C-x_B}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_B-3}{15-x_B}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_B-9=15-x_B \Rightarrow 4x_B=24 \Rightarrow x_B=6$$

A ordenada do ponto *B* é dada por:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_B-y_A}{y_C-y_B}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_B-4}{20-y_B}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y_B-12=20-y_B \Rightarrow 4y_B=32 \Rightarrow y_B=8$$

Portanto, $B(6,8)$.

R4. Qual o comprimento de cada mediana do triângulo de vértices $A(-4,4)$, $B(6,-2)$ e $C(8,8)$.

Resolução

Sejam $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{AC}}$ e $M_{\overline{BC}}$ os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Logo:

- coordenadas de $M_{\overline{AB}}$:

$$x_{M_{\overline{AB}}}=\frac{-4+6}{2}=1 \qquad y_{M_{\overline{AB}}}=\frac{4+(-2)}{2}=1$$

- coordenadas de $M_{\overline{AC}}$:

$$x_{M_{\overline{AC}}}=\frac{-4+8}{2}=2 \qquad y_{M_{\overline{AC}}}=\frac{4+8}{2}=6$$

- coordenadas de $M_{\overline{BC}}$:

$$x_{M_{\overline{BC}}}=\frac{6+8}{2}=7 \qquad y_{M_{\overline{BC}}}=\frac{-2+8}{2}=3$$

Portanto, $M_{\overline{AB}}(1,1)$, $M_{\overline{AC}}(2,6)$ e $M_{\overline{BC}}(7,3)$.

Calculamos o comprimento de cada mediana:

- Mediana $\overline{CM_{\overline{AB}}}$:

$$CM_{\overline{AB}}=\sqrt{(1-8)^2+(1-8)^2}=\sqrt{(-7)^2+(-7)^2}=\boxed{7\sqrt{2}}$$

- Mediana $\overline{BM_{\overline{AC}}}$:

$$BM_{\overline{AC}}=\sqrt{(2-6)^2+[6-(-2)]^2}=\sqrt{(-4)^2+8^2}=\boxed{4\sqrt{5}}$$

- Mediana $\overline{AM_{\overline{BC}}}$:

$$AM_{\overline{BC}}=\sqrt{[7-(-4)]^2+(3-4)^2}=\sqrt{11^2+(-1)^2}=\boxed{\sqrt{122}}$$

R5. Determine as coordenadas do vértice *B* do $\triangle ABC$, em que $A(4,9)$ e $C(-2,6)$, sabendo que $G(2,3)$ é o baricentro do triângulo.

Resolução

Como *G* é o baricentro do $\triangle ABC$, temos:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \Rightarrow 2=\frac{4+x_B+(-2)}{3} \Rightarrow$$

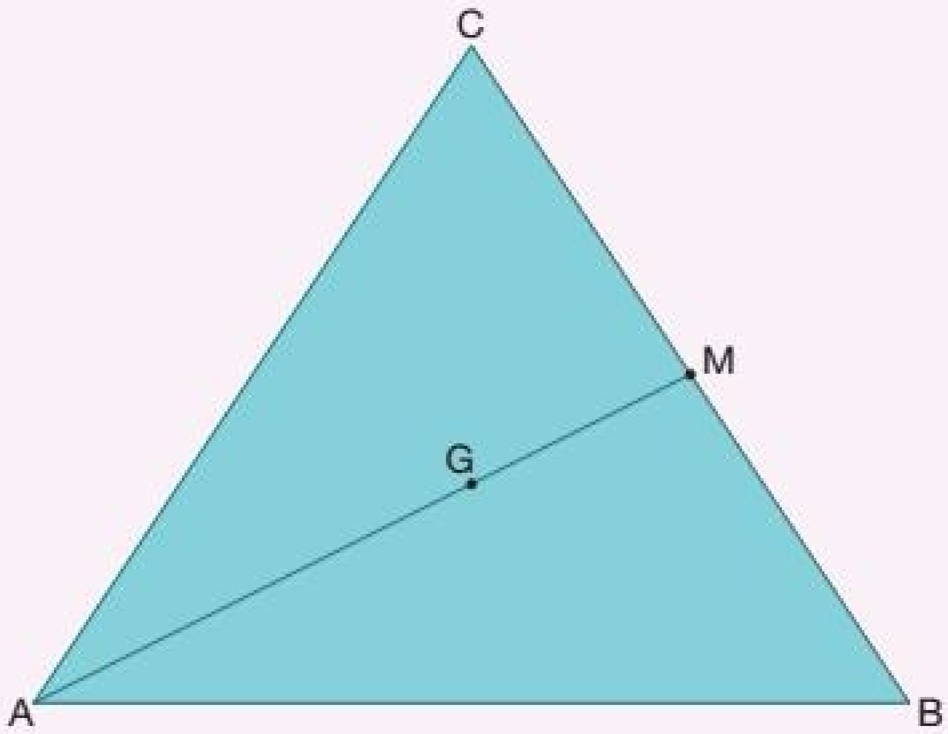
$$\Rightarrow 2+x_B=6 \Rightarrow x_B=4$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} \Rightarrow 3=\frac{9+y_B+6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15+y_B=9 \Rightarrow y_B=-6$$

Portanto, $B(4,-6)$.

R6. No $\triangle ABC$, *M* é ponto médio do lado $\overline{BC}$ e *G* é o baricentro do triângulo. Sabendo que as coordenadas dos pontos *B*, *G* e *M* são, respectivamente, $(5,1)$, $(3,2)$ e $\left(4,\frac{5}{2}\right)$, determine as coordenadas dos vértices *A* e *C*.



Acervo da editora

Resolução

Como *M* é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, temos:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2} \Rightarrow 4=\frac{5+x_C}{2} \Rightarrow 5+x_C=8 \Rightarrow \boxed{x_C=3}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}=\frac{1+y_C}{2} \Rightarrow 2+2y_C=10 \Rightarrow \boxed{y_C=4}$$

Como *G* é o baricentro do $\triangle ABC$, temos:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \Rightarrow 3=\frac{x_A+5+3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_A+8=9 \Rightarrow \boxed{x_A=1}$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} \Rightarrow 2=\frac{y_A+1+4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A+5=6 \Rightarrow \boxed{y_A=1}$$

Portanto, $A(1,1)$ e $C(3,4)$.

17. Dados os pontos A e B, para cada item, determine as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$.

a) $A(4,3)$ e $B(1,7)$ $\left(\frac{5}{2},5\right)$

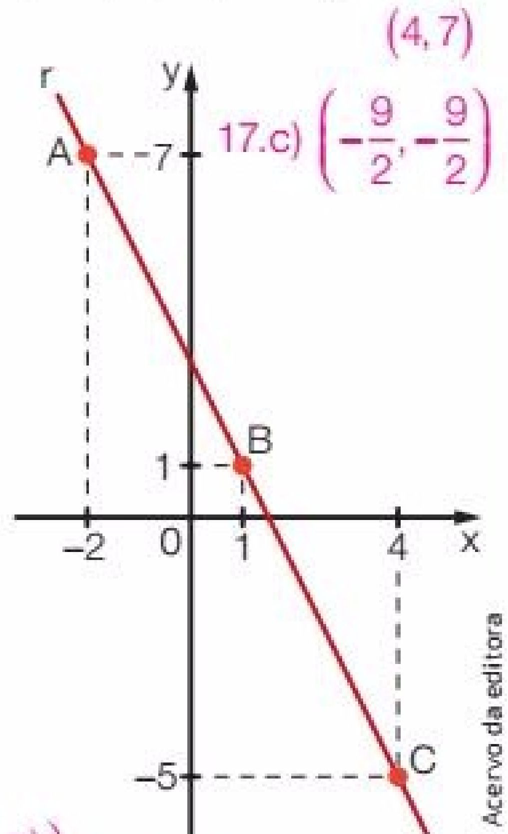
b) $A(2,-1)$ e $B(-4,5)$ $(-1,2)$

c) $A(-7,-9)$ e $B(-2,0)$

d) $A(15,6)$ e $B(-7,8)$ $(4,7)$

17.c) $\left(-\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)$

18. Observe a reta r em um plano cartesiano e responda.



Acervo da editora

a) O ponto B é ponto médio de $\overline{AC}$? Justifique.

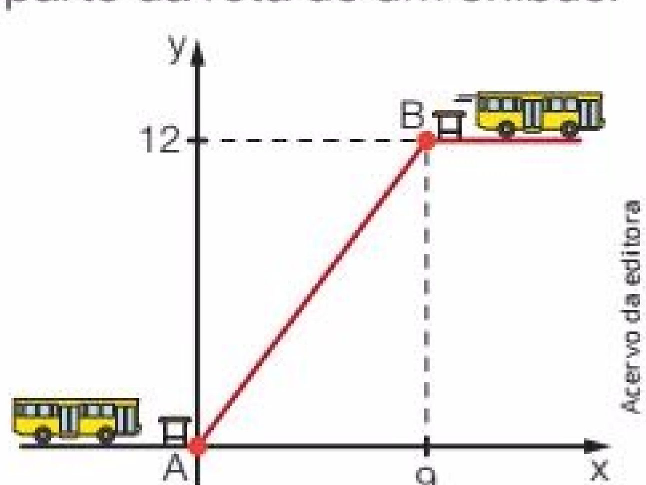
b) Determine as coordenadas do ponto médio de:

- $\overline{AB}$ $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2},4\right)$
- $\overline{BC}$ $M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2},-2\right)$

18. a) Sim, pois $M_{\overline{AC}}=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{7+(-5)}{2}\right)=M_{\overline{AC}}(1,1)$

19. Sabendo que $P(0,1)$, $Q(4,-3)$ e $R(5,3)$ são vértices de um triângulo, determine o comprimento da mediana em relação ao lado $\overline{PQ}$. 5 u.c.

20. Observe no esquema parte da rota de um ônibus. Entre os pontos de parada A e B, deseja-se instalar outros dois pontos, C e D, tal que a distância entre pontos adjacentes seja a mesma.



Acervo da editora

a) Determine as coordenadas dos pontos C e D. $C(3,4)$; $D(6,8)$

b) Sabendo que cada unidade do esquema representa 120 m, qual é a distância, em metros, entre os pontos A e B? 1 800 m

21. Seja $M(3,4)$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Sabendo que A está sobre o eixo das abscissas, e B, sobre o eixo das ordenadas, determine as coordenadas de A e B. $A(6,0)$; $B(0,8)$

22. Determine x e y, sabendo que $M(-3,-2)$ é ponto médio do segmento com extremidades $A(-6,y)$ e $B(x,-8)$. $x=0$; $y=4$

23. Obtenha as coordenadas do ponto Q que divide o segmento de extremos $P(-3,5)$ e $R(1,3)$ na proporção $\frac{PQ}{QR}=\frac{2}{5}$. $Q\left(-\frac{13}{7},\frac{31}{7}\right)$

24. Dado o triângulo de vértices $A(0,-1)$, $B(-5,-5)$ e $C(-3,1)$, determine:

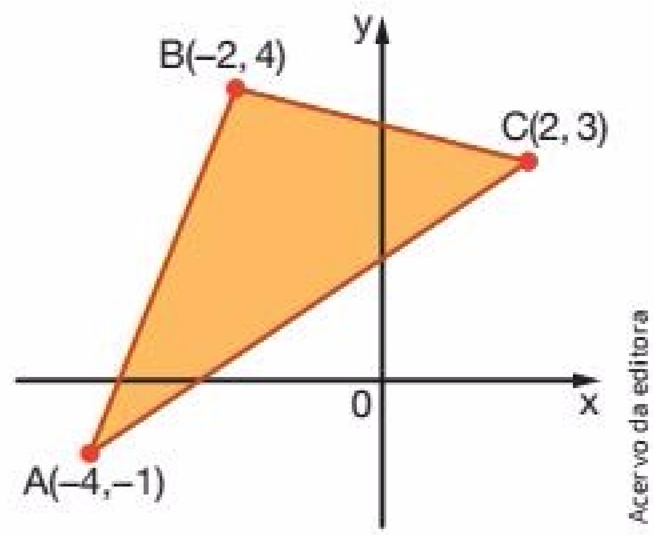
a) o comprimento das medianas Resposta no final do livro.

b) as coordenadas do baricentro $\left(-\frac{8}{3},-\frac{5}{3}\right)$

25. Sabendo que $G(2,-4)$ é o baricentro do triângulo de vértices $P(-2,1)$, $Q(5,-6)$ e $R(x,y)$, calcule x e y. $x=3$; $y=-7$

26. Seja $A(-5,2)$ um dos vértices do $\triangle ABC$. Sabendo que $M(2,3)$ e $N\left(\frac{3}{2},1\right)$ são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo, determine as coordenadas de B e C. $B(9,4)$; $C(8,0)$

27. Observe o $\triangle ABC$ em um plano cartesiano.



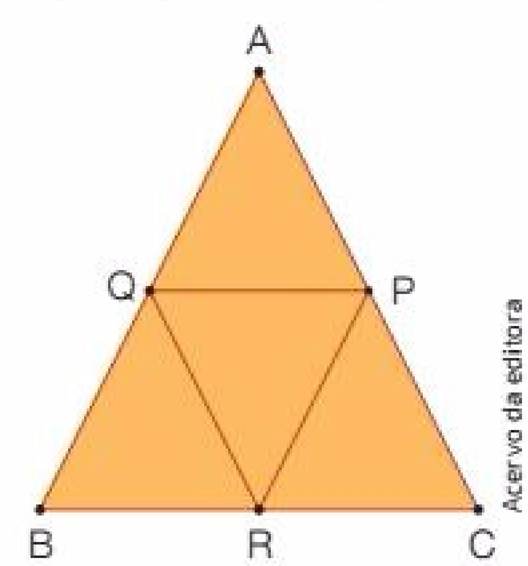
Acervo da editora

a) Determine as coordenadas do baricentro desse triângulo. $\left(-\frac{4}{3},2\right)$

b) Calcule a distância entre o baricentro e C. $\frac{\sqrt{109}}{3}$

28. No $\triangle ABC$, de vértices $A(4,10)$, $B(1,4)$ e $C(7,4)$, foi inscrito o triângulo PQR, tal que P, Q e R são os pontos médios de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

28. a) $P\left(\frac{11}{2},7\right)$; $Q\left(\frac{5}{2},7\right)$; $R(4,4)$

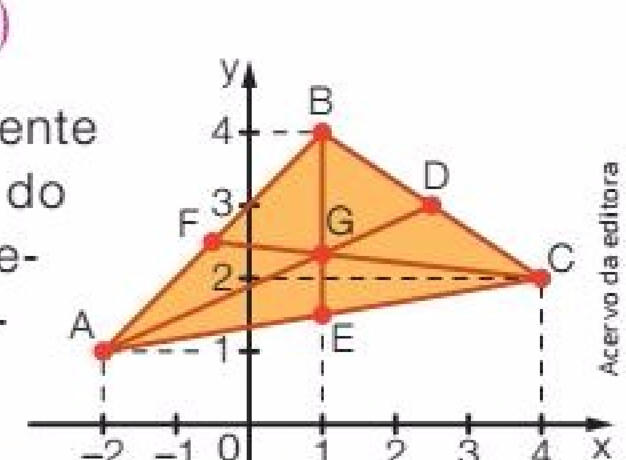


Acervo da editora

a) Quais são as coordenadas dos pontos P, Q e R?

b) Determine as coordenadas do ponto G, baricentro do $\triangle ABC$ e do ponto H, baricentro do $\triangle PQR$. $G(4,6)$; $H(4,6)$

29. Verifique numericamente que o baricentro G do $\triangle ABC$ divide cada mediana em dois segmentos na proporção de 1 para 2. Resposta nas Orientações para o professor.



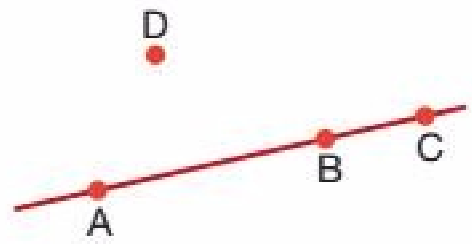
Acervo da editora

30. Os pontos $A(2,m)$, $B(4,1)$ e $C(6,m)$ são vértices de um triângulo. Calcule m para que o baricentro desse triângulo tenha coordenadas $G(4,3)$. $m=4$

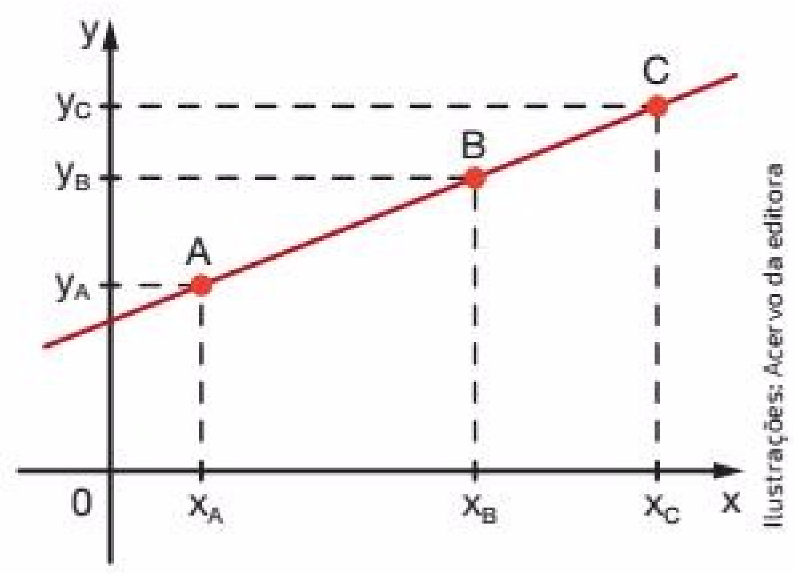
31. O ponto $C(-5,2)$ é um dos vértices do $\triangle ABC$. Sabendo que $\overline{AM}$ é uma das medianas, tal que $M(1,3)$, e que $G(2,4)$ é o baricentro do triângulo, determine as coordenadas dos pontos A e B. $A(4,6)$; $B(7,4)$

Condição de alinhamento de três pontos

Quando três ou mais pontos estão alinhados, ou seja, quando é possível construir uma reta passando por eles, dizemos que esses pontos são **colineares**. Na figura abaixo, os pontos *A*, *B* e *C* são colineares. Já os pontos *A*, *B* e *D*, por exemplo, não são colineares.



A partir das coordenadas de três pontos, é possível verificar se eles são colineares. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, representados no plano cartesiano.



De acordo com o Teorema de Tales, se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

Se os pontos *A*, *B* e *C* são colineares, temos, pelo Teorema de Tales:

- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x_B - x_A}{x_C - x_A}$
- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

Assim, segue que:

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_By_C - x_By_A - x_Ay_C + x_Ay_A = x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B + x_Ay_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_By_C - x_By_A - x_Ay_C - x_Cy_B + x_Cy_A + x_Ay_B = 0$$

O 1º membro dessa igualdade corresponde ao determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Portanto, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares, então:

$$\begin{array}{c} \text{abscissas dos pontos} \\ D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{ordenadas dos pontos} \end{array}$$

Lembre-se de que:

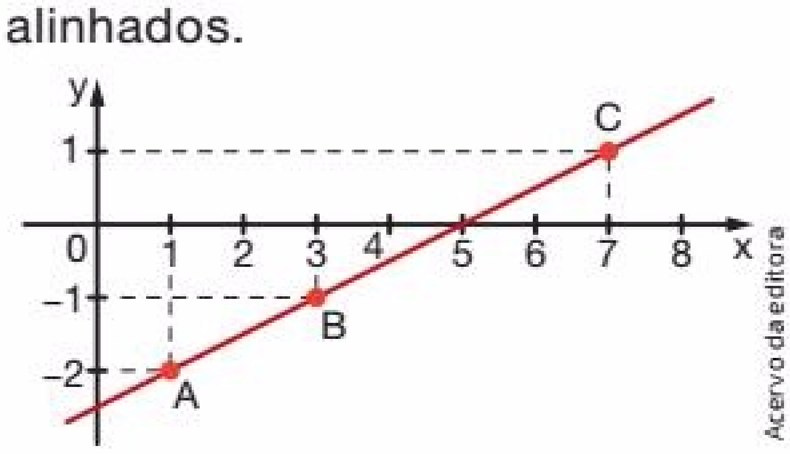
$D = -x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A + x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C =$
$= x_By_C - x_By_A - x_Ay_C - x_Cy_B + x_Cy_A + x_Ay_B$

Se realizarmos o processo inverso, verificaremos que, se $D = 0$, então $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares.

Exemplo

Vamos verificar se os pontos $A(1, -2)$, $B(3, -1)$ e $C(7, 1)$ estão alinhados.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 1 + 6 - 1 - 14 + 3 = 0$$

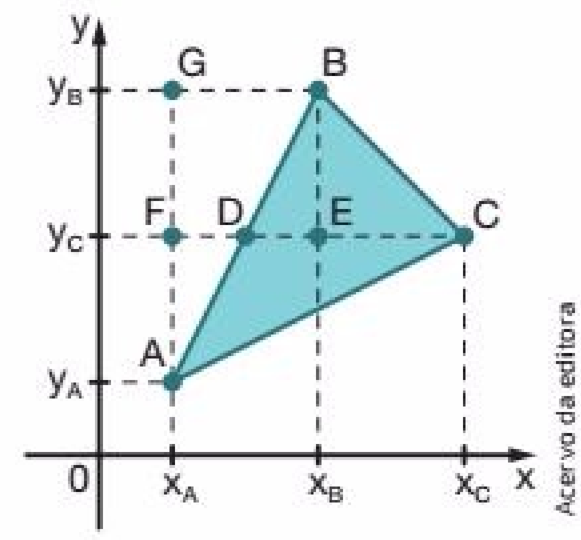


Portanto, os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados.

Área de um triângulo

Dadas as coordenadas de três pontos não colineares, é possível calcular a área do triângulo cujos vértices são esses pontos.

Para verificar como realizar esse cálculo, considere o $\triangle ABC$ a seguir, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



A área do $\triangle ABC$ é igual à soma das áreas do $\triangle ACD$ e do $\triangle BCD$.

Inicialmente, determinaremos a abscissa x_D do ponto *D* em função das coordenadas de *A*, *B* e *C*. Como $\triangle ABG \sim \triangle ADF$, temos:

$$\frac{BG}{DF}=\frac{AG}{AF}\Rightarrow\frac{x_B-x_A}{x_D-x_A}=\frac{y_B-y_A}{y_C-y_A}\Rightarrow x_D=x_A+\frac{(x_B-x_A)(y_C-y_A)}{y_B-y_A}$$

Agora, determinamos a medida CD:

$$CD=|x_C-x_D|=\left|x_C-x_A-\frac{(x_B-x_A)(y_C-y_A)}{y_B-y_A}\right|=\left|\frac{(x_C-x_A)(y_B-y_A)-(x_B-x_A)(y_C-y_A)}{y_B-y_A}\right|$$

Por fim, calculamos a área do $\triangle ABC$.

$$S_{ABC}=S_{ACD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AF+\frac{1}{2}\cdot CD\cdot FG=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot\overbrace{(AF+FG)}^{AG}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AG=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{(x_C-x_A)(y_B-y_A)-(x_B-x_A)(y_C-y_A)}{y_B-y_A}\right|\cdot|y_B-y_A|=\frac{1}{2}\cdot|(x_C-x_A)(y_B-y_A)-(x_B-x_A)(y_C-y_A)|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|-(x_Ay_B+x_Cy_A+x_By_C-x_Cy_B-x_By_A-x_Ay_C)|=\frac{1}{2}\cdot|x_Ay_B+x_Cy_A+x_By_C-x_Cy_B-x_By_A-x_Ay_C|$$

Note que $x_Ay_B+x_Cy_A+x_By_C-x_Cy_B-x_By_A-x_Ay_C$ corresponde a $D=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$.

Portanto, a área do $\triangle ABC$ é dada por $\boxed{S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|D|}$.

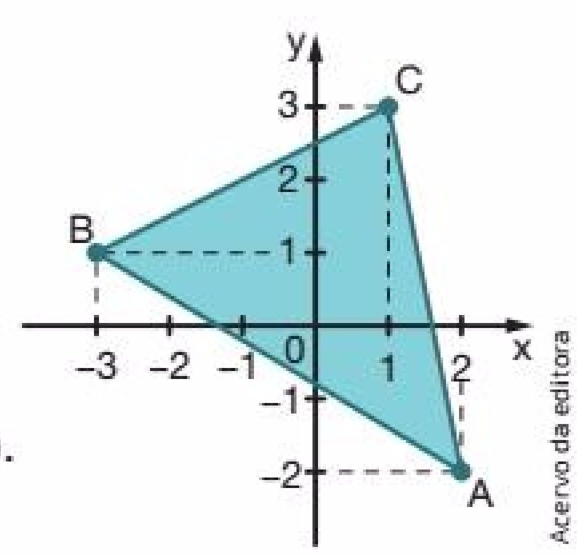
Exemplo

Para determinar a área do $\triangle ABC$, em que $A(2, -2)$, $B(-3, 1)$ e $C(1, 3)$, calculamos inicialmente o determinante *D*.

$$D=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-1-6-6+2-9-2=-22$$

Segue que:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|-22|=\frac{1}{2}\cdot 22=11$$



Portanto, a área do $\triangle ABC$ é 11 u.a. (unidades de área).

Atividades resolvidas

R7. Calcule a área da região triangular delimitada pelo eixo *y* e pelos gráficos das funções $f(x)=x-4$ e $g(x)=-2x+5$.

Resolução

Calculando $f(0)$ e $g(0)$, obtemos as coordenadas (x, y) dos pontos em que os gráficos das funções *f* e *g* intersectam o eixo *y*.

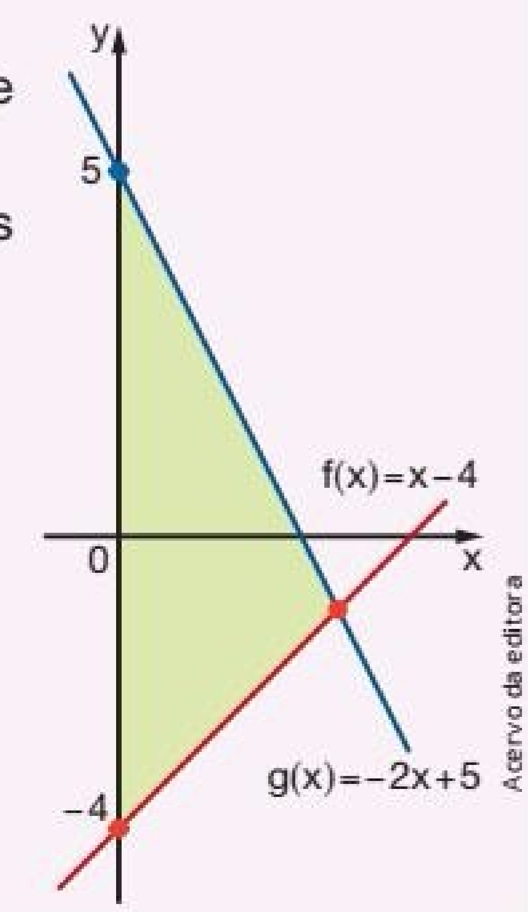
- $f(0)=0-4=-4 \rightarrow (0, -4)$
- $g(0)=-2\cdot 0+5=5 \rightarrow (0, 5)$

Para determinarmos a abscissa do ponto em que os gráficos das funções se intersectam, igualamos *f* e *g*.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x-4=-2x+5 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

Substituindo x por 3 em uma das funções, obtemos a ordenada desse ponto.

$$f(3)=3-4=-1$$



Logo, os gráficos das funções *f* e *g* se intersectam no ponto de coordenadas $(3, -1)$.

Finalmente, calculamos a área da região triangular definida pelos pontos de coordenadas $(0, -4)$, $(0, 5)$ e $(3, -1)$.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-15+0+0+0-12-0=-27$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot|-27|=\frac{1}{2}\cdot 27=\frac{27}{2}$$

Portanto, a área da região triangular é $\frac{27}{2}$ u.a.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

32. Verifique em quais itens os pontos estão alinhados. a; c; d

a) $A(1, 5)$, $B(-3, -7)$ e $C(-1, -1)$

b) $D(5, 9)$, $E(4, 7)$ e $F(3, 6)$

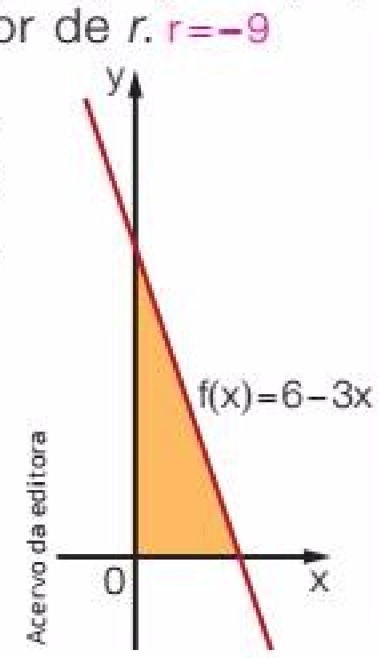
c) $P(4, 6)$, $Q(-2, 3)$ e $R(-8, 0)$

d) $S(5, 2)$, $T(12, 9)$ e $U(7, 4)$

33. Dados os pontos $A(-3, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 3)$ e $D(2, 1)$, determine as coordenadas do ponto $E(x, y)$, de modo que não seja possível construir os triângulos de ABE e CDE. $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

34. Sabendo que os pontos $A(4, -1)$, $B(1, 7)$ e $C(7, r)$ são colineares, determine o valor de *r*. $r=-9$

35. Calcule a área da região triangular compreendida entre os eixos cartesianos e o gráfico da função $f(x)=6-3x$. 6 u.a.



36. Calcule a área do quadrilátero ABCD, cujas coordenadas dos vértices são $A(3, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 3)$ e $D(7, 4)$. 10 u.a.

37. Calcule a área de cada triângulo cujos vértices estão indicados.

a) $A(-4, 3)$, $B(2, -1)$ e $C(3, 2)$ 11 u.a.

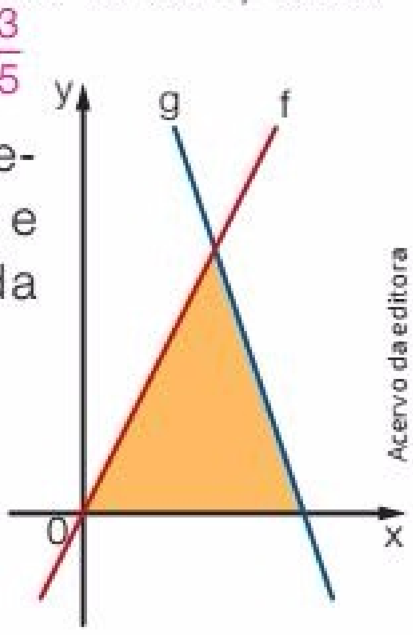
b) $D(5, 1)$, $E(7, 4)$ e $F(-2, -6)$ $\frac{7}{2}$ u.a.

c) $G(-3, 0)$, $H(-6, 2)$ e $I(-1, -4)$ 4 u.a.

d) $J(8, 5)$, $K(4, -7)$ e $L(2, 2)$ 30 u.a.

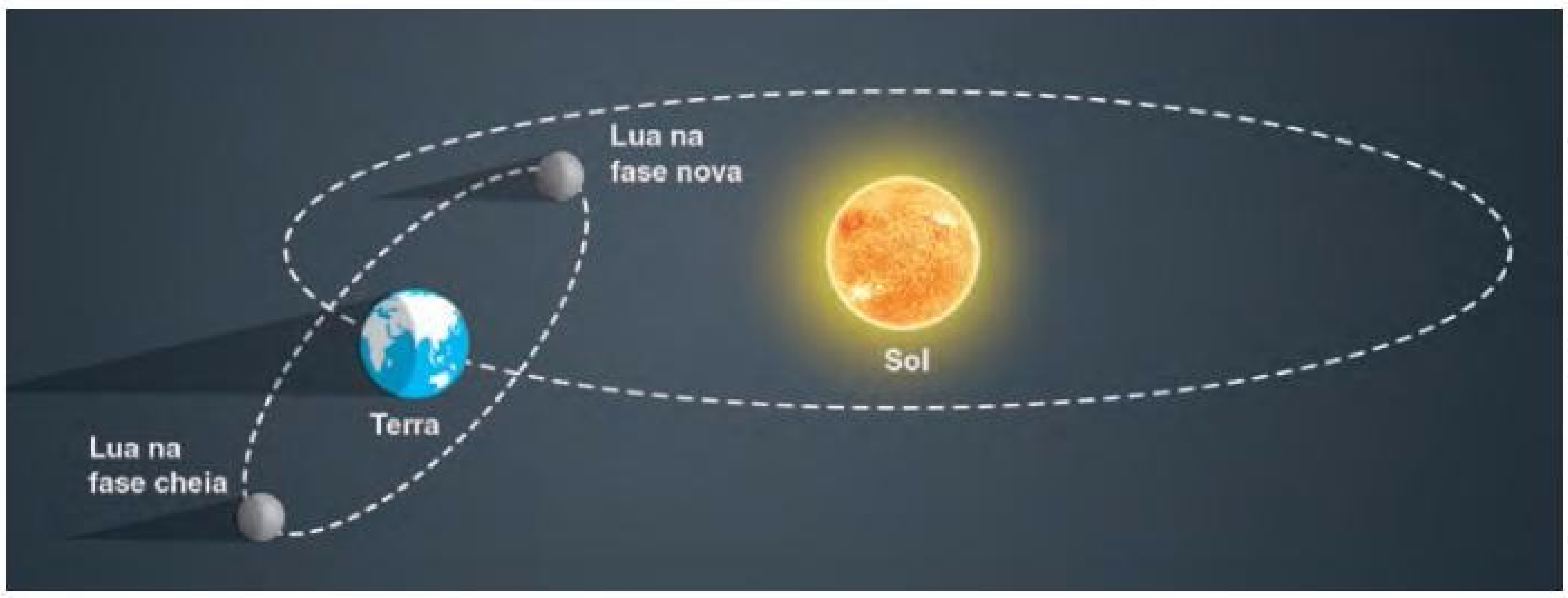
38. Sabendo que os pontos $P(3, -2)$, $Q(m, 0)$ e $R(4, 8)$ formam um triângulo cuja área é 19 u.a., determine o valor de *m*. $m=7$ ou $m=-\frac{3}{5}$

39. No plano cartesiano, as retas representam as funções $f(x)=2x$ e $g(x)=9-3x$. Calcule a área da região indicada. $\frac{27}{5}$ u.a.



40. Chamamos de eclipse o obscurecimento (parcial ou total) de um astro pela interposição de outro, ou seja, um astro fica posicionado entre um observador e outro astro, projetando uma sombra. Os eclipses mais conhecidos são o lunar e o solar, que acontecem quando o Sol, a Lua e a Terra ficam alinhados.

Esse alinhamento acontece em duas fases da Lua: na fase nova, quando a Lua fica posicionada entre o Sol e a Terra; e na fase cheia, quando a Terra fica entre o Sol e a Lua. No entanto, o plano de rotação da Lua ao redor da Terra tem uma inclinação em relação ao plano de rotação da Terra ao redor do Sol, o que impossibilita um eclipse lunar e um eclipse solar a cada mudança de fase da Lua.



Fotomontagem de Maryane Silva Vioto formada pela imagem Aphelleon/Shutterstock.com

Ilustração elaborada com base em: <www.planetario.ufrgs.br/eclipselunar.html>. Acesso em: 27 fev. 2016.

Fontes de pesquisa: MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. **Dicionário enciclopédico de astronomia e astronáutica.** 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995. p. 247-250. <www.planetario.ufrgs.br/eclipselunar.html>. Acesso em: 27 fev. 2016.

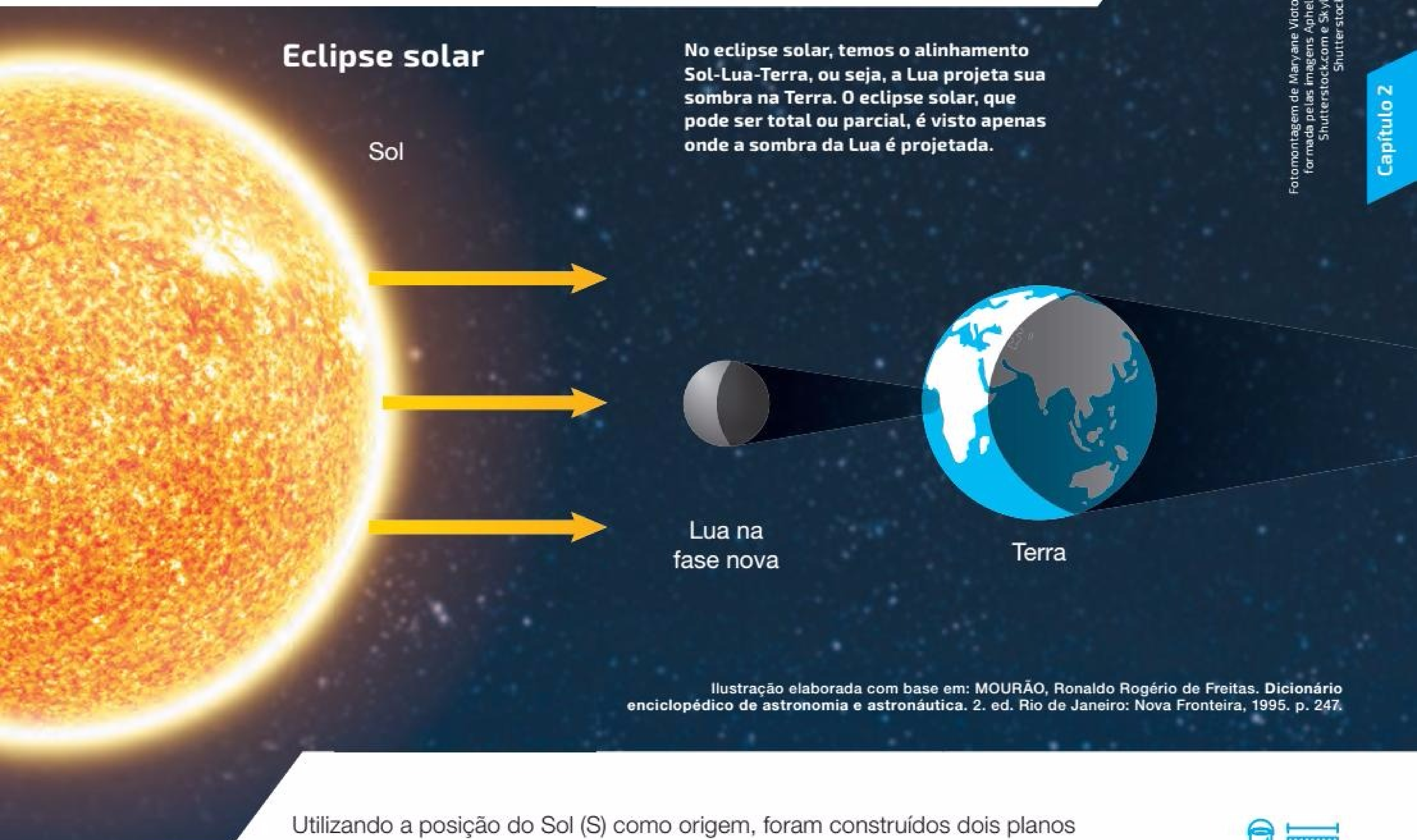
Esses planos de rotação possuem dois pontos em comum, e o eclipse acontece quando a Lua está próxima a um desses pontos, pois assim os três astros encontram-se alinhados em um mesmo plano, fazendo que um projete sombra no outro. A sombra circular que a Terra projeta na Lua durante um eclipse lunar foi, para Pitágoras e Aristóteles, a prova de que a Terra era esférica.

Eclipse lunar

No eclipse lunar, a Terra posiciona-se entre o Sol e a Lua, gerando uma sombra sobre a Lua. Esse eclipse, que pode ser total ou parcial, é visualizado em toda parte da Terra em que é noite.

Fotomontagem de Maryane Silva Vioto Silva formada pelas imagens Aphelleon/Shutterstock.com e Skylines/Shutterstock.com

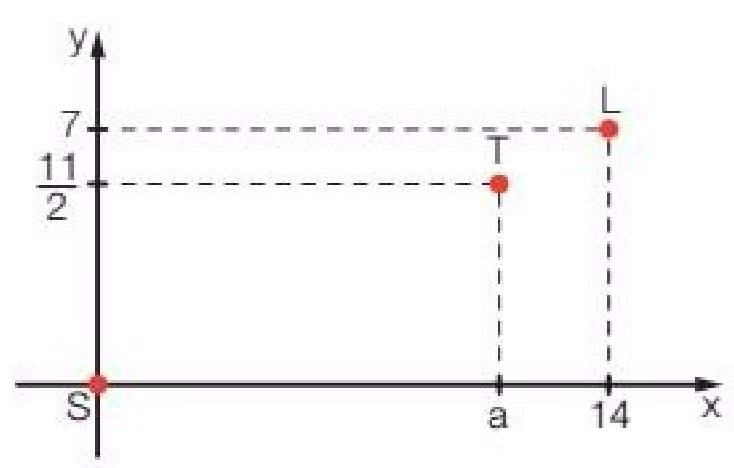
Ilustração elaborada com base em: MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. **Dicionário enciclopédico de astronomia e astronáutica.** 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995. p. 247.



Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pelas imagens Aphelleon/ Shutterstock.com e Skylines/ Shutterstock.com

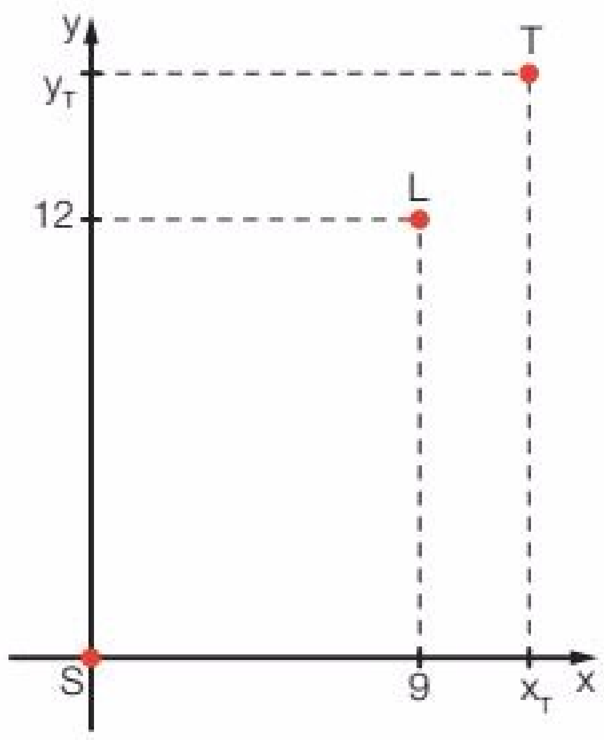
Ilustração elaborada com base em: MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. **Dicionário enciclopédico de astronomia e astronáutica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995. p. 247.

Utilizando a posição do Sol (S) como origem, foram construídos dois planos cartesianos, I e II, que representam a posição da Lua (L) e da Terra (T) em dois momentos.



Acervo da editora

plano cartesiano I



Acervo da editora

plano cartesiano II

Nos planos cartesianos, a escala dos eixos e as posições dos pontos que representam os astros são apenas ilustrativas.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Considerando que o plano cartesiano I representa a posição dos astros durante um eclipse lunar, calcule o valor da abscissa *a* da posição da Terra. $a = 11$

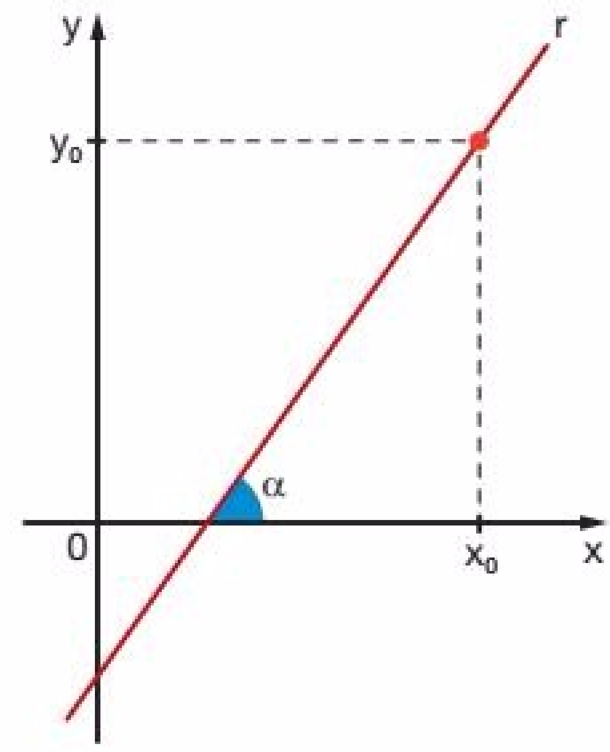
b) Sabendo que, no plano cartesiano II, a distância entre o Sol e a Terra é de 20 unidades de comprimento, determine as coordenadas da posição da Terra para que os astros estejam alinhados. Nesse caso, há ocorrência de um eclipse? De que tipo? T(12,16); sim; eclipse solar

c) Você já observou um eclipse lunar? E um eclipse solar? Resposta pessoal.

d) Pesquise as datas dos próximos eclipses que poderão ser vistos do Brasil. A resposta depende do ano vigente.

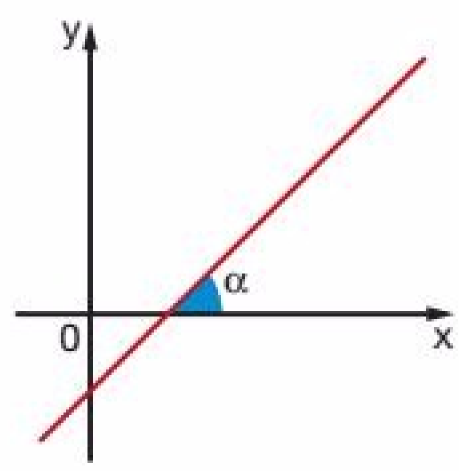
Reta

Considere a reta *r* representada no plano cartesiano.

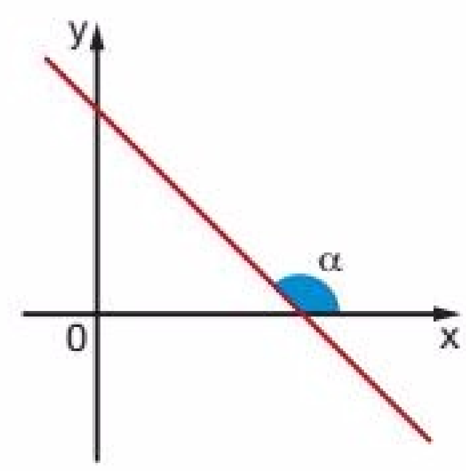


Em relação ao eixo horizontal, a reta *r* forma um ângulo indicado por α, denominado **ângulo de inclinação** da reta.

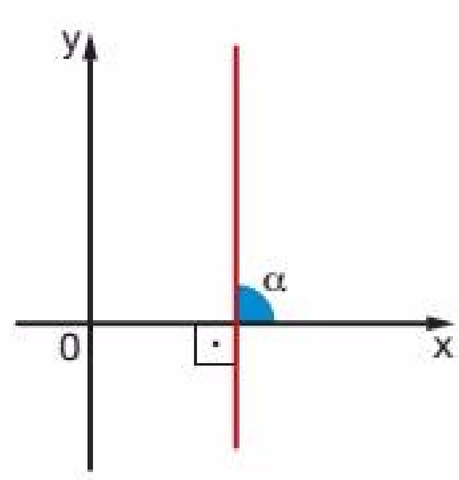
O ângulo α de inclinação da reta é considerado no sentido anti-horário, sendo $0° \leq \alpha < 180°$.



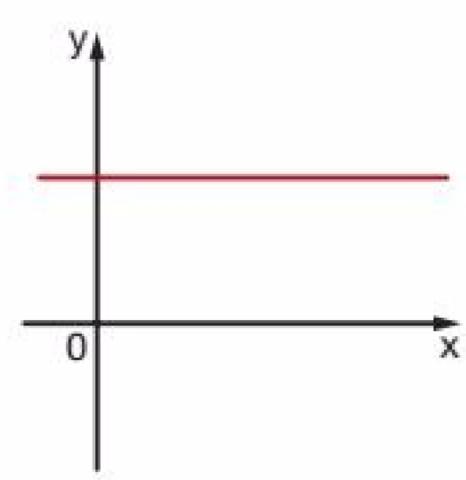
$0° < \alpha < 90°$



$90° < \alpha < 180°$

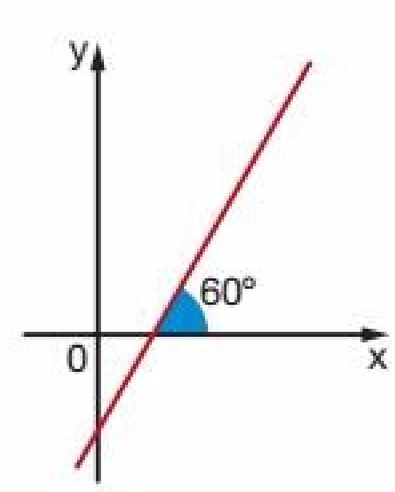


$\alpha = 90°$



$\alpha = 0°$

A tangente trigonométrica do ângulo de inclinação α, ou seja tg α, é denominada **coeficiente angular** da reta. Na reta a seguir, por exemplo, o coeficiente angular é dado por $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$.

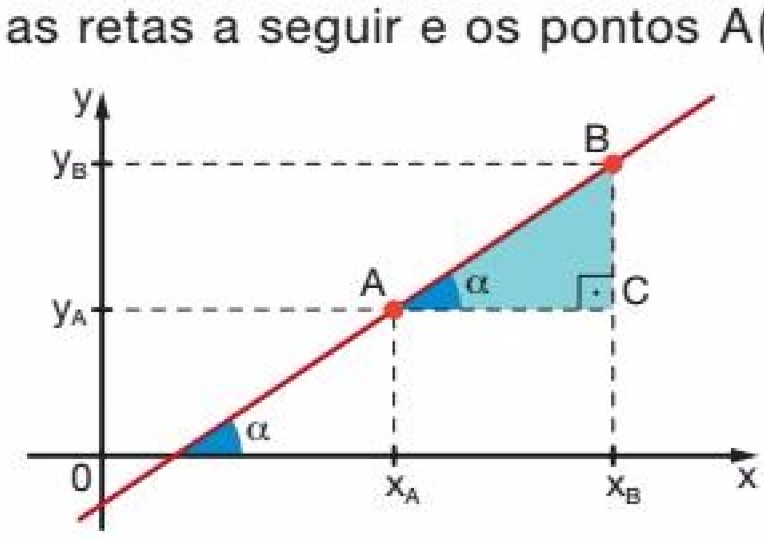


Podemos obter o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos. Para isso, considere as retas a seguir e os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

- 1º caso $(0° < \alpha < 90°)$

Em relação ao $\triangle ABC$, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

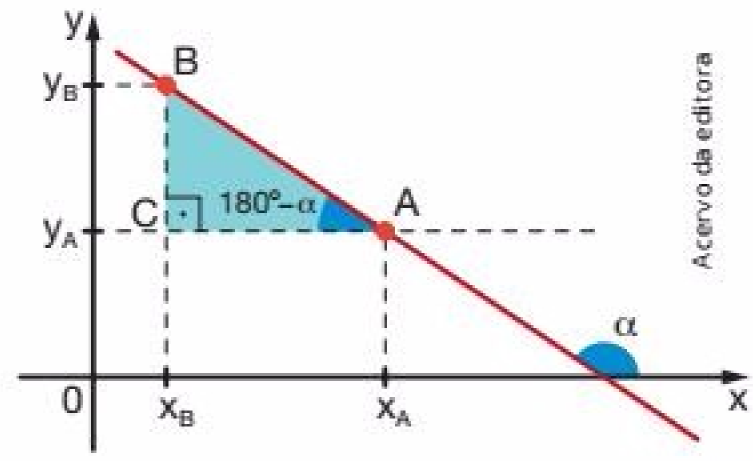


Ilustrações: Acervo da editora

- 2º caso $(90° < \alpha < 180°)$

Em relação ao $\triangle ABC$, temos:

$$\underbrace{tg(180° - \alpha)}_{-tg\alpha} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow -tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Note que consideramos apenas os casos em que $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$, pois para $\alpha = 90°$ temos que $tg\,\alpha$ não está definida, e para $\alpha = 0°$, temos $tg\,\alpha = 0$.

Em uma reta *r*, não paralela ao eixo *y*, que contém os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, temos que o coeficiente angular é dado por $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

> Exemplo

Para determinar o coeficiente angular *m* da reta que contém os pontos $A(7, -3)$ e $B(4, -1)$, efetuamos o seguinte cálculo:

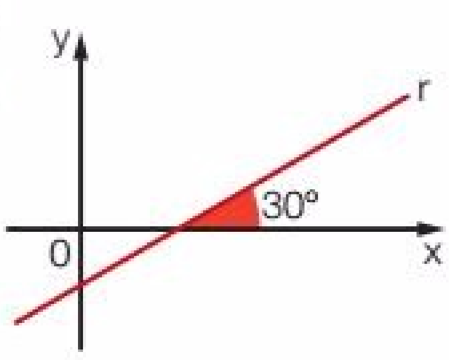
$$m = \frac{-1 - (-3)}{4 - 7} = -\frac{2}{3}$$

Atividades

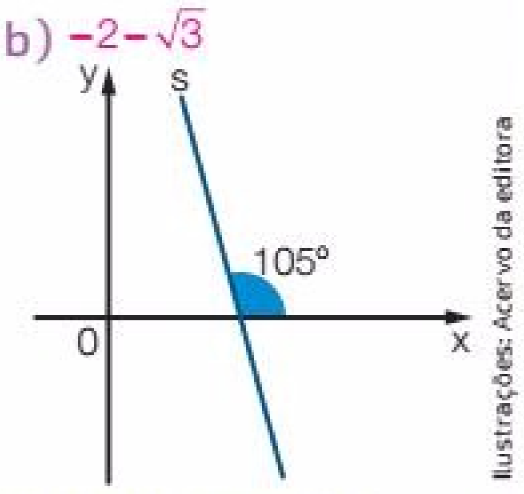
Anote as respostas no caderno.

41. Determine o coeficiente angular de cada reta.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



b) $-2-\sqrt{3}$



Lembre-se de que $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$.

42. Calcule o coeficiente angular da reta que passa:

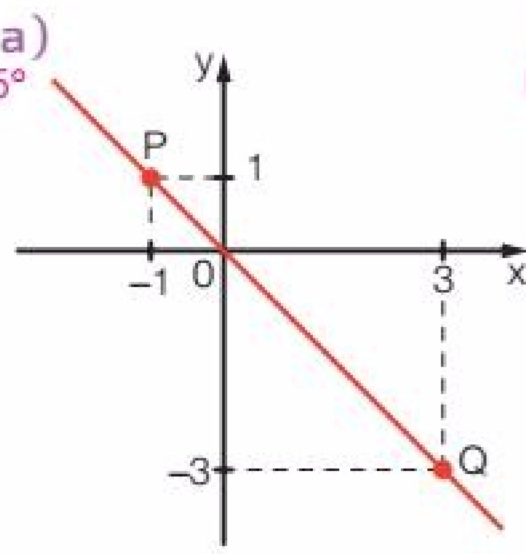
a) pela origem do sistema cartesiano e pelo ponto $A(-2, 8)$ -4

b) pelos pontos $B(2, 3)$ e $C(-6, 11)$ -1

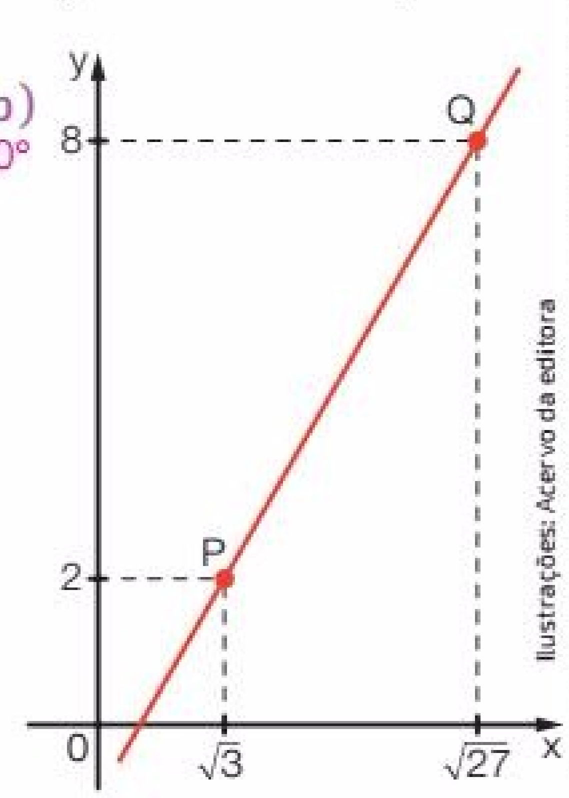
43. Sabendo que a reta *r* passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(x, x+2)$ e tem coeficiente angular $m = -1$, calcule o valor de *x*. $x = \frac{3}{2}$

44. Determine a medida do ângulo de inclinação de cada reta.

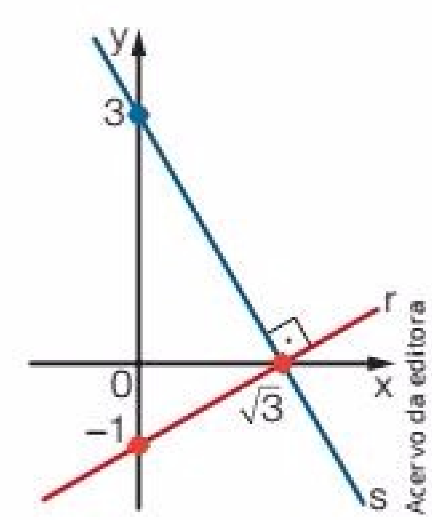
a) 135°



b) 60°



45. No plano cartesiano estão representadas as retas *r* e *s*, tal que o ângulo formado entre elas é reto.



a) Determine o ângulo de inclinação de cada uma das retas em relação ao eixo *x*. r: 30°; s: 120°

b) Qual é o coeficiente angular da reta *r*? E da reta *s*? $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\sqrt{3}$

46. Determine o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto $A(-2, 6)$ e pelo ponto médio do segmento com extremos $B(-3, 5)$ e $C(7, 3)$. $-\frac{1}{2}$

47. Qual é o coeficiente angular da reta bissetriz dos quadrantes pares do plano cartesiano? E dos quadrantes ímpares? -1; 1

48. Resposta esperada: calcularia o coeficiente angular da reta que passa por esses pontos dois a dois e compararia os resultados, caso o coeficiente angular seja o mesmo, então os pontos são colineares. Não são colineares.

48. Desafio

Explique como você faria para verificar se três pontos *A*, *B* e *C* são colineares utilizando conhecimentos acerca de coeficiente angular da reta. Em seguida, utilizando a estratégia que você descreveu, verifique se os pontos $A(2, 1)$, $B(4, -3)$ e $C(-1, 5)$ são colineares.

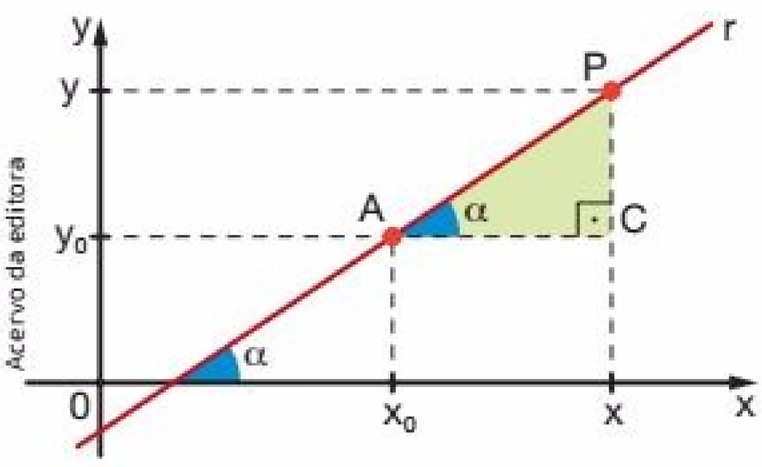
Equação da reta

No estudo da geometria analítica, é possível associar a cada reta uma equação, denominada **equação da reta**. Neste tópico, estudaremos diferentes maneiras de se obter a equação de uma reta, assim como distintas formas de representar essa equação.

Equação da reta conhecidos um ponto e o coeficiente angular

Ao definirmos um ponto $A(x_0, y_0)$ no plano cartesiano e um coeficiente angular *m*, podemos determinar a reta *r* que passa por *A* e tem coeficiente angular *m*.

Para obtermos a equação dessa reta *r*, consideramos um ponto $P(x, y)$ qualquer, distinto de *A* e pertencente a *r*.



Acervo da editora

Do $\triangle APC$, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{CP}{AC} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Portanto, a equação da reta *r* é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Em uma reta *r* paralela ao eixo *x*, temos $m = 0$ e, consequentemente, a equação de *r* é dada por $y = y_0$. Já uma reta *s* paralela ao eixo *y* tem equação $x = x_0$.

Exemplo

A equação de uma reta que passa pelo ponto $A(4, -3)$ e tem coeficiente angular $m = -2$ é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-3) = -2(x - 4) \Rightarrow y + 3 = -2x + 8 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 5}$$

Equação reduzida da reta

Estudamos anteriormente que a equação de uma reta *r* que passa pelo ponto $A(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular igual a *m* pode ser determinada pela equação $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Considerando o ponto pertencente à reta *r* que intersecta o eixo *y*, ou seja, de coordenadas $(0, n)$, temos:

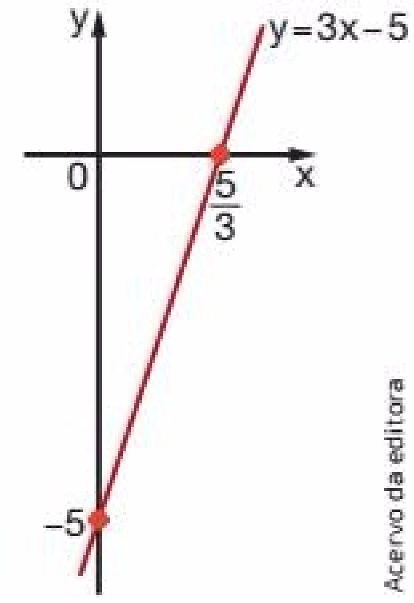
$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - n = m(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

Denominamos a equação na forma $y = mx + n$ como **equação reduzida da reta**, sendo *n* o **coeficiente linear**.

$$\underbrace{}_{\text{coeficiente angular}} m \qquad y = mx + n \qquad n: \text{coeficiente linear}$$

A equação reduzida de uma reta não paralela ao eixo *y* pode ser associada a uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, em que *a* é a declividade, e *b*, o termo constante.

O gráfico da função $f(x) = 3x - 5$, por exemplo, corresponde a uma reta cuja equação reduzida é $y = 3x - 5$.



Acervo da editora

Equação geral da reta

Podemos escrever para qualquer reta uma equação na forma $ax+by+c=0$, em que *a*, *b* e *c* são os coeficientes, sendo *a* e *b* não nulos simultaneamente. Chamamos essa equação de **equação geral da reta**.

A reta que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$, por exemplo, tem a seguinte equação geral:

$$m=\frac{-3-3}{2-(-1)}=-2$$

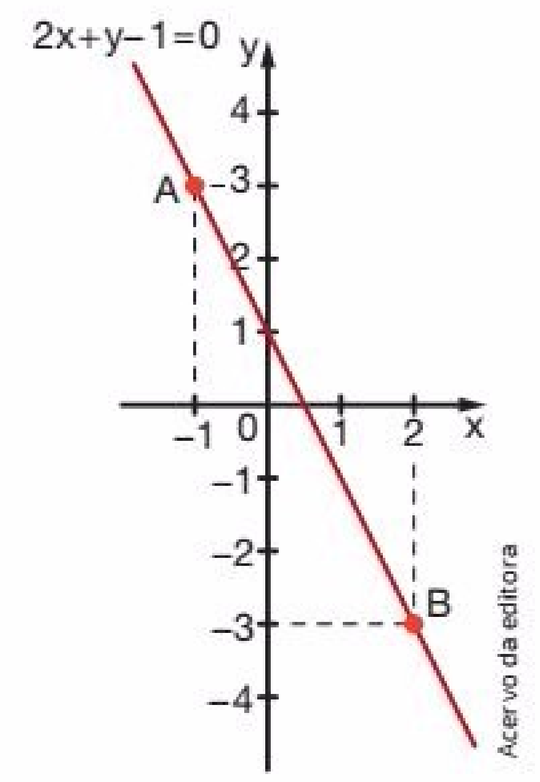
$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-3=-2[x-(-1)]\Rightarrow y-3=-2x-2\Rightarrow \boxed{2x+y-1=0}$$

Para obter a equação, também poderíamos ter substituído as coordenadas de $B(2, -3)$ em $y-y_0=m(x-x_0)$.

Outra maneira de determinar a equação geral da reta a partir de dois de seus pontos é por meio da verificação do alinhamento de três pontos.

Considere, por exemplo, três pontos colineares: $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$ novamente, e um ponto $P(x, y)$ qualquer. Como esses pontos estão alinhados, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+2y+3-6+3x+y=0\Rightarrow 3(2x+y-1)=0\Rightarrow \boxed{2x+y-1=0}$$

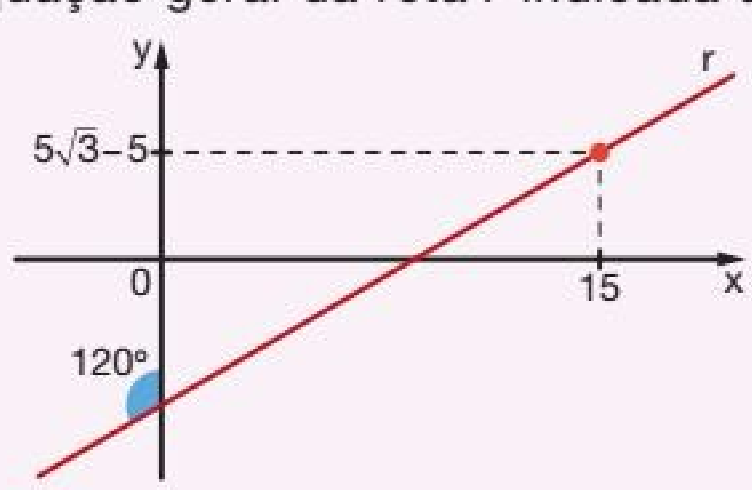


Note que a equação da reta é a mesma obtida anteriormente.

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, podemos determinar a equação geral da reta que passa por *A* e *B* a partir de $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0$.

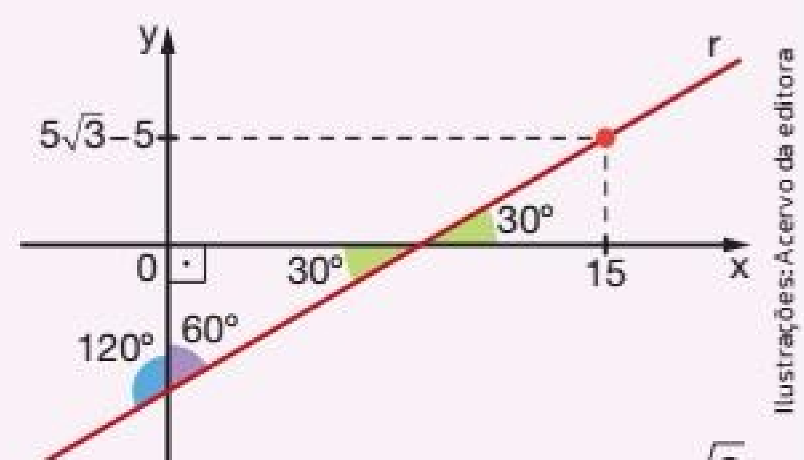
Atividades resolvidas

R8. Determine a equação geral da reta *r* indicada a seguir.



Resolução

Note que a reta *r* forma com os eixos *x* e *y* um triângulo retângulo. Sabendo que a soma das medidas de dois ângulos suplementares é 180°, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que os ângulos opostos pelo vértice possuem mesma medida, podemos obter o ângulo de inclinação, como indicado na imagem ao lado.



$m=\text{tg}\,30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Como a reta passa pelo ponto $(15, 5\sqrt{3}-5)$ e $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$, temos:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-(5\sqrt{3}-5)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-15)\Rightarrow y-5\sqrt{3}+5=\frac{\sqrt{3}}{3}x-5\sqrt{3}\Rightarrow y-\frac{\sqrt{3}}{3}x+5=0$$

Portanto, a equação da reta é $y-\frac{\sqrt{3}}{3}x+5=0$.

R9. Dada a reta de equação $y=-2x+5$, determine as coordenadas do ponto:

a) em que a reta intersecta o eixo y

b) em que a reta intersecta o eixo x

c) de abscissa 6

d) de ordenada 3

Resolução

a) A reta intersecta o eixo y no ponto em que $x=0$, ou seja:

$$y=-2\cdot 0+5 \Rightarrow y=5$$

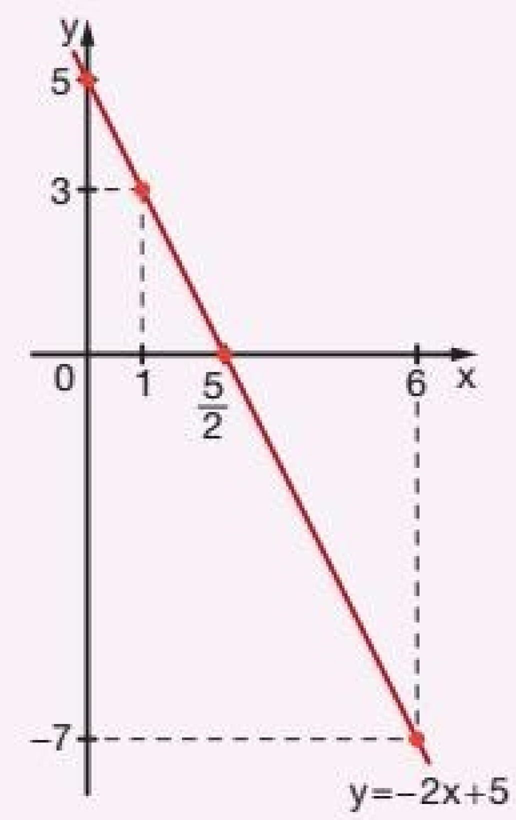
Logo, as coordenadas do ponto são $(0, 5)$.

> Note que a reta intersecta o eixo *y* no ponto de ordenada igual ao seu coeficiente linear.

b) A reta intersecta o eixo x no ponto em que $y=0$, ou seja:

$$0=-2x+5 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto são $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.



Acervo da editora

c) Substituindo $x=6$ na equação da reta, temos:

$$y=-2\cdot 6+5 \Rightarrow y=-7$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(6, -7)$.

d) Substituindo $y=3$ na equação da reta, temos:

$$3=-2x+5 \Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow x=1$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(1, 3)$.

R10. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(3, -2)$ e $B(5, 4)$.

Resolução

Podemos obter a equação da reta de três maneiras.

- 1ª maneira:

  Calculando o coeficiente angular da reta:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-(-2)}{5-3}=\frac{6}{2}=3$$

  Como a reta passa pelo ponto $A(3, -2)$ e $m=3$, temos:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-(-2)=3(x-3) \Rightarrow y+2=3x-9 \Rightarrow \boxed{-3x+y+11=0}$$

> Para obter a equação, também poderíamos optar por utilizar o ponto $B(5, 4)$.

- 2ª maneira:

  Substituindo as coordenadas dos pontos *A* e *B* na equação $y=mx+n$ e resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases}-2=m\cdot 3+n\\ 4=m\cdot 5+n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3m+n=-2 \quad \cdot(-1)\\ 5m+n=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3m-n=2\\ 5m+n=4\end{cases}$$

$$2m=6 \Rightarrow m=3$$

  Substituindo $m=3$ na equação $5m+n=4$:

$$5\cdot 3+n=4 \Rightarrow n=-11$$

  Assim, a equação geral da reta é:

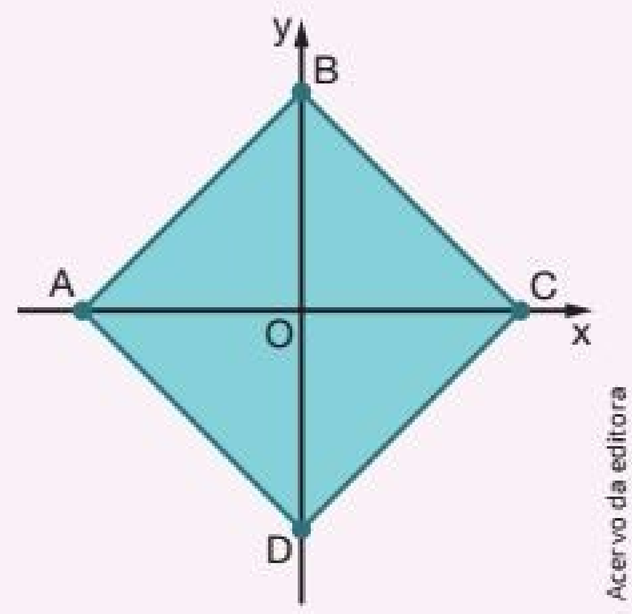
$$y=mx+n \Rightarrow y=3x-11 \Rightarrow \boxed{-3x+y+11=0}$$

- 3ª maneira:

Alinhando os pontos A e B a um ponto genérico $P(x, y)$ pelo determinante a seguir:

$$D=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2x+5y+12+10-4x-3y=0 \Rightarrow 2(-3x+y+11)=0 \Rightarrow \boxed{-3x+y+11=0}$$

R11. Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado medindo $3\sqrt{2}$ e centro em $O(0, 0)$. Escreva a equação geral das retas que contêm cada lado do quadrado.



Resolução

Como ABCD é um quadrado com centro em O, temos que a distância de cada vértice à origem é a mesma, ou seja, $OA=OB=OC=OD$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOB, temos:

$$(AB)^2=(OA)^2+(\underbrace{OB}_{OA})^2 \Rightarrow (3\sqrt{2})^2=(OA)^2+(OA)^2 \Rightarrow 18=2(OA)^2 \Rightarrow (OA)^2=9 \Rightarrow OA=3$$

Assim, a distância de cada vértice à origem O é 3. Logo, as coordenadas dos vértices desse quadrado são $A(-3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(3, 0)$ e $D(0, -3)$.

Segue que:

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -0+3y-3x+0+0-9=0 \Rightarrow 3y-3x-9=0 \Rightarrow \boxed{-x+y-3=0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -9-0-0+3x+3y+0=0 \Rightarrow 3y+3x-9=0 \Rightarrow \boxed{x+y-3=0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{CD}$:

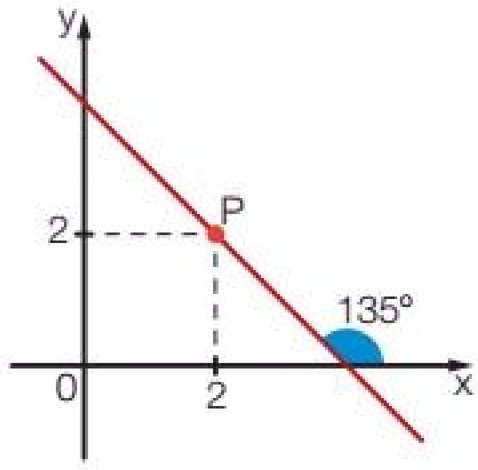
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -0-3y+3x+0+0-9=0 \Rightarrow -3y+3x-9=0 \Rightarrow \boxed{x-y-3=0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{AD}$:

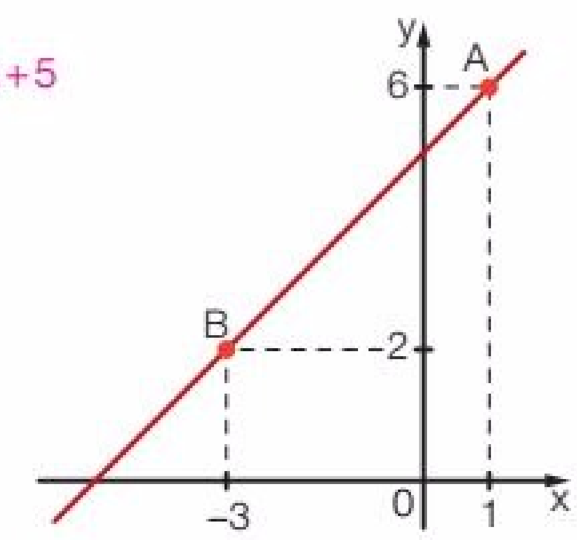
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -0+3y+3x+0+0+9=0 \Rightarrow 3y+3x+9=0 \Rightarrow \boxed{x+y+3=0}$$

49. Escreva a equação reduzida da reta apresentada em cada item.

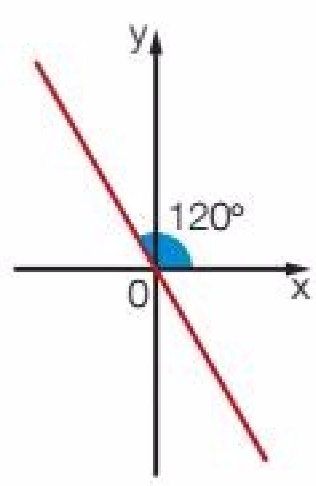
a) $y=4-x$



b) $y=x+5$



c) $y=-\sqrt{3}x$



Ilustrações: Acervo da editora

50. Qual é a equação reduzida da reta que:

a) passa pelo ponto $A(5,7)$ e tem coeficiente angular $m=2$? $y=2x-3$

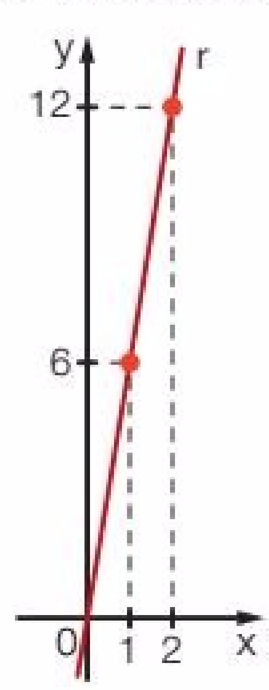
b) passa pelo ponto $B(-2,0)$ e tem coeficiente angular $m=-4$? $y=-4x-8$

c) passa pelo ponto $C(12,4)$ e é paralela ao eixo das ordenadas? $x=12$

d) passa pelos pontos $D(0,6)$ e $E(-3,-9)$? $y=5x+6$

51. Para qual valor de *p* a reta que passa pelos pontos $M(p,2p+1)$ e $N(1,6)$ tem coeficiente angular -3? $p=\frac{8}{5}$

52. Considere a reta *r* indicada a seguir.



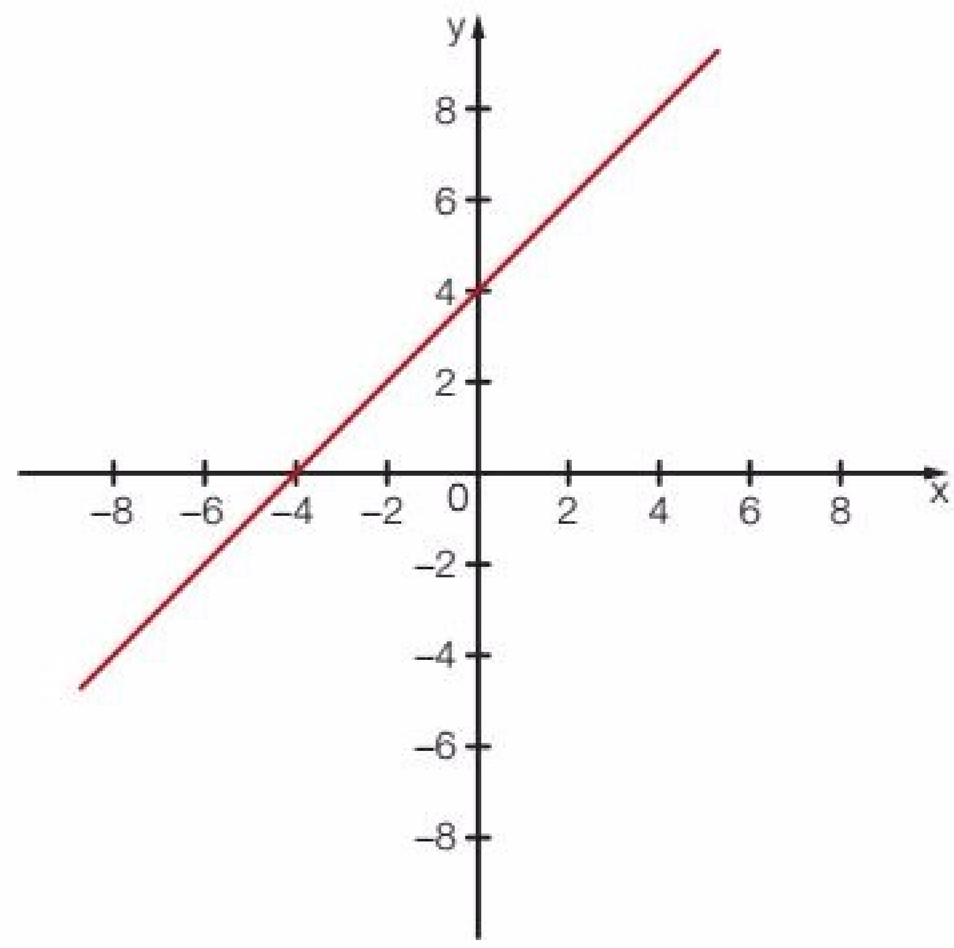
Acervo da editora

a) Qual é o coeficiente angular da reta *r*? $m=6$

b) Escreva a equação da reta *r*. $y=6x$

c) Dados os pontos $A(3,y_1)$ e $B(-2,y_2)$ pertencentes a *r*, determine os valores de y_1 e y_2. $y_1=18$; $y_2=-12$

53. (Enem-MEC) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



Acervo da editora

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto: b

a) $(-5, 0)$

b) $(-3, 1)$

c) $(-2, 1)$

d) $(0, 4)$

e) $(2, 6)$

54. Escreva a equação reduzida da reta que passa pelos pontos: Respostas no final do livro.

a) $A(5,2)$ e $B(-1,3)$

b) $C(0,-4)$ e $D(1,6)$

c) $E(-12,-7)$ e $F(-5,2)$

d) $G(8,-3)$ e $H(-4,-6)$

55. Se a reta *r* tem coeficiente angular −6 e coeficiente linear −9, então a equação reduzida de *r* é: d

a) $y=9x+6$

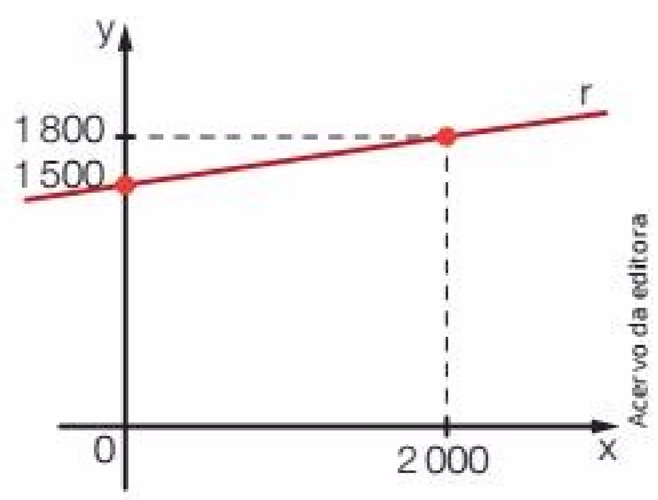
b) $y=-9x-6$

c) $y=6x-9$

d) $y=-6x-9$

e) $y=-2x-3$

56. Observe a reta *r* em um plano cartesiano.



a) Escreva a equação da reta *r*. $y=1\,500+0{,}15x$

b) Dados os pontos $A(1\,500,\ y_1)$ e $B(2\,800,\ y_2)$ pertencentes a *r* determine os valores de y_1 e y_2. $y_1=1\,725$; $y_2=1\,920$

c) Determine o valor de *x* para $y=2\,550$. 7 000

57. Para cada item, indique o coeficiente angular, o coeficiente linear e represente cada reta indicada em um plano cartesiano. Respostas no final do livro.

a) $y=3x-4$

b) $y=2-x$

c) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$

58. Observe a reta *r* em um plano cartesiano.

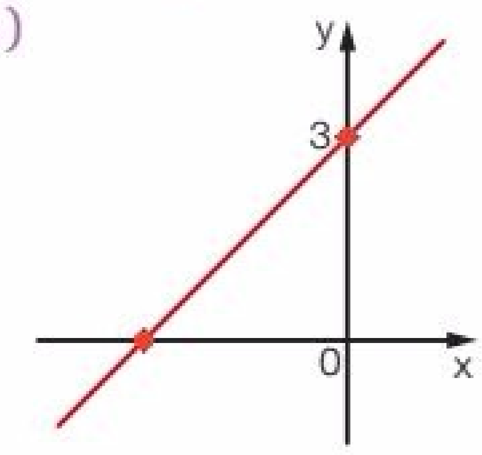
a) Escreva a equação de *r* na forma reduzida. $y=6x+4$

b) Qual a lei de formação da função *f* associada a *r*? $f(x)=6x+4$

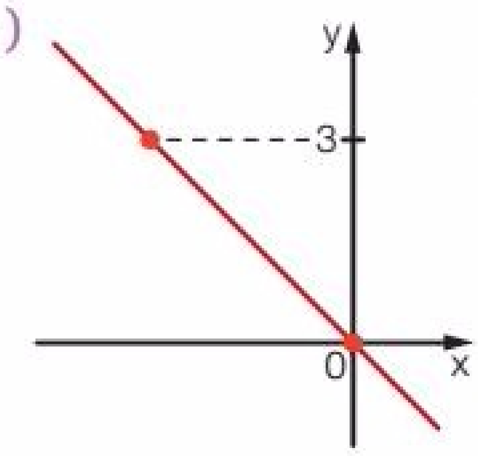
c) Para quais valores de *x* a imagem de *f* é negativa? Em qual quadrante do plano cartesiano a parte correspondente do gráfico de *f* está contida? $x<-\frac{2}{3}$; 3º quadrante

59. Qual alternativa apresenta a reta de equação $y=3-x$? b

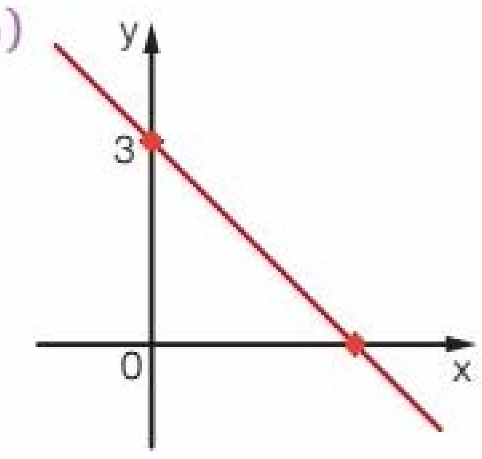
a)



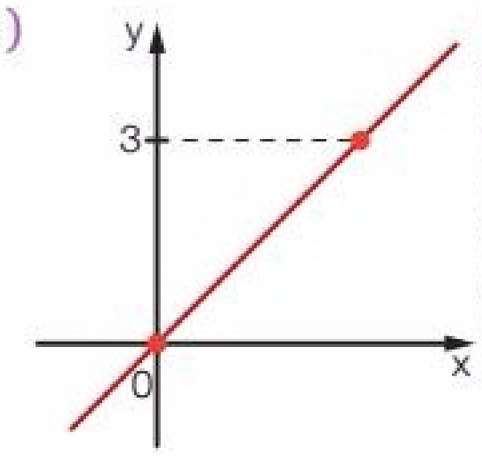
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

60. **Desafio**

Sabendo que o gráfico de uma função afim é uma reta, então é correto afirmar que toda função afim decrescente possui declividade negativa? Justifique. Resposta no final do livro.

61. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos indicados.

a) $A(-8,3)$ e $B(0,4)$ $-x+8y-32=0$

b) $C(5,2)$ e $D(-1,-6)$ $4x-3y-14=0$

c) $M(1,4)$ e $N(-4,3)$ $x-5y+19=0$

d) $P(0,-7)$ e $Q(2,-5)$ $-x+y+7=0$

62. **Desafio**

Escreva a equação geral das retas que passam pelos vértices opostos de um quadrado localizado acima do eixo das abscissas e cujos pontos $A(0,0)$ e $B(-1,3)$ são vértices consecutivos.
$2x-y=0$; $x+2y-5=0$

63. Considerando a reta *r*, cuja equação geral é $2y-6x+3=0$, determine:

a) o coeficiente angular de *r* 3

b) o coeficiente linear de *r* $-\frac{3}{2}$

c) três pontos que pertencem a *r* Resposta no final do livro.

64. Sabendo que a reta *r* corresponde ao gráfico da função $f(x)=ax+1$ e que $f(2)=-3$, resolva.

a) Qual é o coeficiente linear de *r*? E o coeficiente angular? 1; −2

b) A função *f* é crescente ou decrescente? decrescente

c) Escreva a equação geral de *r*. $-2x-y+1=0$

65. Sabendo que os pontos $A(2,24)$ e $B(5,60)$ pertencem a reta *r*, determine:

a) a equação geral da reta *r* $-12x+y=0$

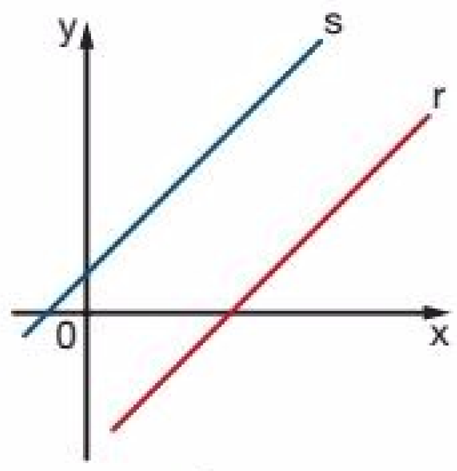
b) se o ponto $C(9,110)$ pertence a *r* não

c) o valor de *y* para $x=8$ 96

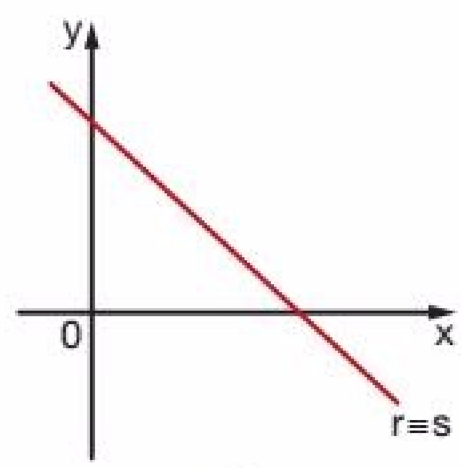
d) o valor de *x* para $y=156$ 13

Posição relativa entre duas retas

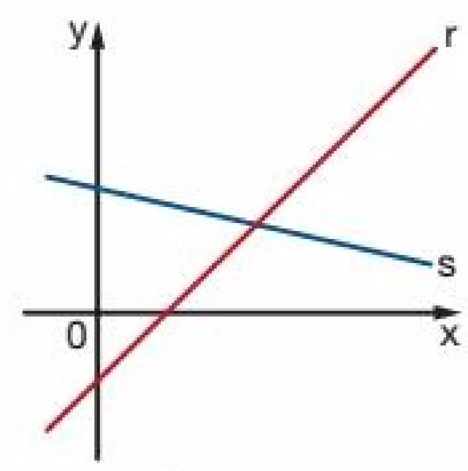
Em um plano, duas retas podem ser paralelas, coincidentes ou concorrentes (oblíquas ou perpendiculares).



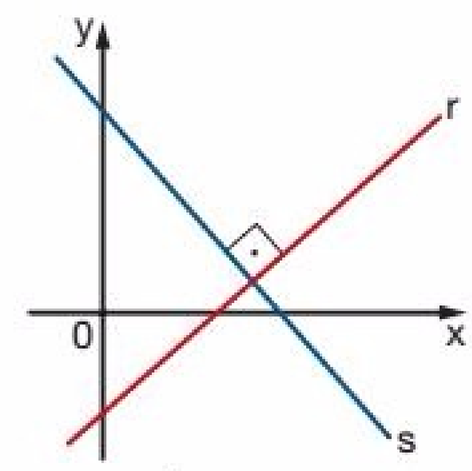
r e *s* são paralelas $(r // s)$



r e *s* são coincidentes



r e *s* são concorrentes e oblíquas



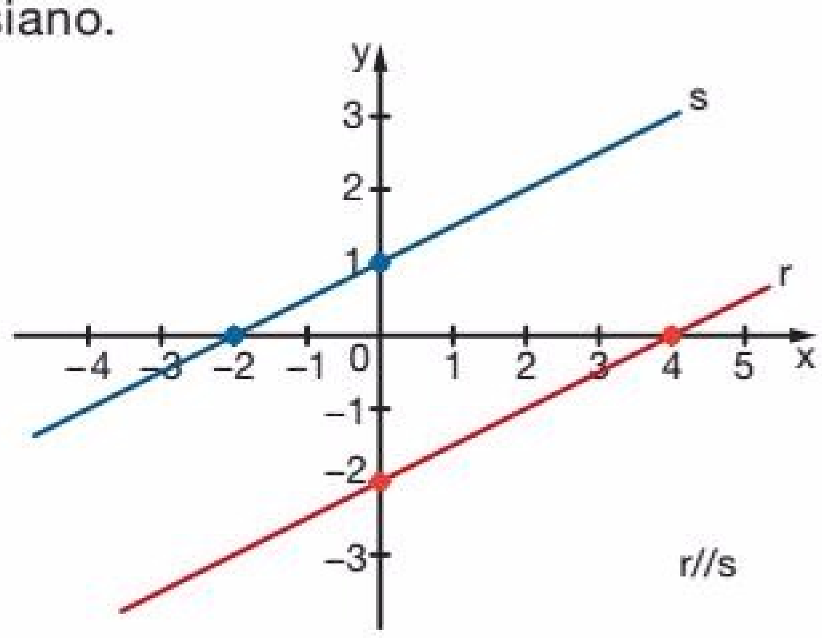
r e *s* são concorrentes e perpendiculares $(r \perp s)$

Neste tópico, estudaremos as posições relativas entre duas retas geometricamente e por meio de suas respectivas equações.

Retas paralelas

Estudaremos agora como verificar, por meio de suas equações, se duas retas são paralelas. É evidente que retas paralelas ao eixo *x* são sempre paralelas entre si e, da mesma maneira, as retas paralelas ao eixo *y* também são paralelas entre si. Assim, cabe analisarmos o caso em que as retas têm inclinação diferente de 0° e 90°.

Observe, por exemplo, as retas paralelas $r: -x+2y+4=0$ e $s: -2x+4y-4=0$ em um mesmo plano cartesiano.



Ilustrações: Acervo da editora

Como as retas *r* e *s* são paralelas, não há par ordenado que satisfaça simultaneamente as equações de *r* e *s*, ou seja, essas retas não têm ponto comum.

Algebricamente, podemos verificar se *r* e *s* são paralelas escrevendo suas equações na forma reduzida e analisando os respectivos coeficientes angulares.

- reta *r*

  $-x+2y+4=0 \Rightarrow 2y=x-4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2$

  $m_r=\frac{1}{2}$

- reta *s*

  $-2x+4y-4=0 \Rightarrow 4y=2x+4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$

  $m_s=\frac{1}{2}$

Como os coeficientes angulares são iguais $(m_r=m_s)$, as retas *r* e *s* têm a mesma inclinação $(\alpha_r=\alpha_s)$. Observando os coeficientes lineares de *r* e *s* $(n_r=-2 \text{ e } n_s=1)$, podemos notar que eles são diferentes $(n_r \neq n_s)$, ou seja, essas retas são distintas. Portanto, as retas *r* e *s* são paralelas.

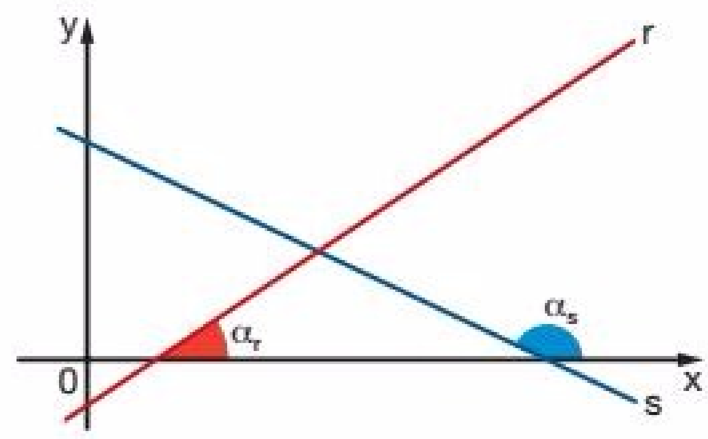
Dadas as equações reduzidas de duas retas $r: y=m_r x+n_r$ e $s: y=m_s x+n_s$, temos as seguintes possibilidades:

- $m_r=m_s$ e $n_r \neq n_s \rightarrow$ *r* e *s* paralelas $(r // s)$
- $m_r=m_s$ e $n_r=n_s \rightarrow$ *r* e *s* coincidentes
- $m_r \neq m_s \rightarrow$ *r* e *s* concorrentes

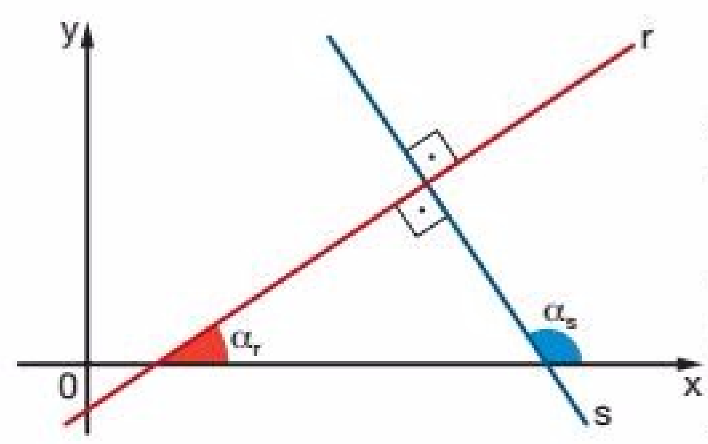
Retas concorrentes

Anteriormente, estudamos que se duas retas têm inclinação diferente de 0° e 90° e coeficientes angulares diferentes, então essas retas são concorrentes.

$$r: y = m_r x + n_r$$
$$s: y = m_s x + n_s$$
$$m_r \neq m_s \Rightarrow \alpha_r \neq \alpha_s \rightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes}$$



Agora, considere o caso de duas retas perpendiculares e não verticais *r* e *s*.



Ilustrações: Acervo da editora

Da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que:

$$\alpha_r + 90° + (180° - \alpha_s) = 180° \Rightarrow \alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow tg\alpha_s = tg(\alpha_r + 90°) = \frac{sen(\alpha_r + 90°)}{cos(\alpha_r + 90°)} = \frac{cos\alpha_r}{-sen\alpha_r} \Rightarrow \boxed{tg\alpha_s = -\frac{1}{tg\alpha_r}}$$

Portanto, se duas retas são perpendiculares, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja, $m_s = -\frac{1}{m_r}$. Também é possível demonstrar que a recíproca é verdadeira, ou seja, se $m_s = -\frac{1}{m_r}$, então as retas *r* e *s* são perpendiculares.

Dadas duas retas $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$ não verticais, temos que elas são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_s = -\frac{1}{m_r}$:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \text{ ou } r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Lembre-se de que para $0° < \alpha < 180°$, temos:
- $sen(\alpha + 90°) = cos\alpha$
- $cos(\alpha + 90°) = -sen\alpha$

Atividades resolvidas

R12. Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto $A(3, 1)$ e é paralela à reta *r* de equação $5x - y + 1 = 0$.

Resolução

Podemos obter a equação da reta de duas maneiras.

- 1ª maneira:

Inicialmente determinamos o coeficiente angular da reta *r*:

$$5x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 5x + 1 \rightarrow m = 5$$

Como a reta deve passar por $A(3, 1)$ e possuir o mesmo coeficiente angular da reta *r*, ou seja, $m = 5$, temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 5(x - 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - 1 = 5x - 15 \Rightarrow \boxed{5x - y - 14 = 0}$$

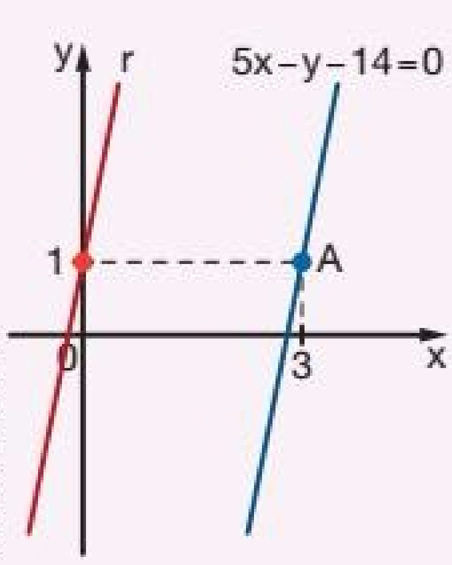
- 2ª maneira:

A equação da reta é da forma $5x - y - k = 0$. Como a reta deve passar por $A(3, 1)$, temos:

$$5 \cdot 3 - 1 - k = 0 \Rightarrow k = 14$$

Segue que:

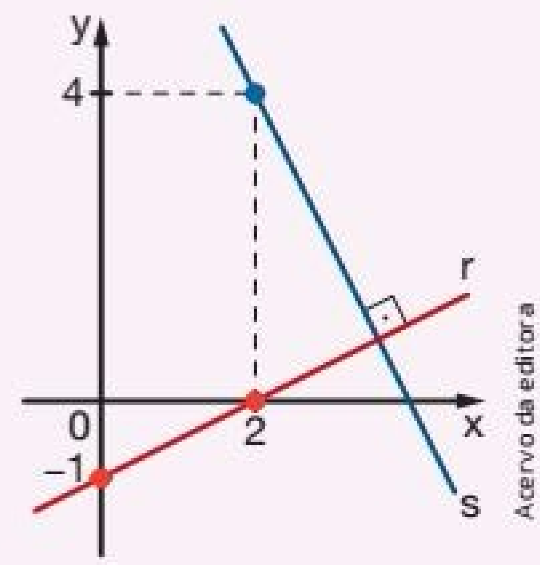
$$5x - y - k = 0 \Rightarrow \boxed{5x - y - 14 = 0}$$



Acervo da editora

Note que a reta de equação $5x - y - k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, possui o mesmo coeficiente angular que a reta de equação $5x - y + 1 = 0$.

R13. Determine a equação geral da reta *s* representada no gráfico ao lado.



Resolução

Inicialmente, determinamos a equação da reta *r*.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2-0-0-x+2y+0=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-1$$

Logo, $m_r=\frac{1}{2}$.

Como a reta *s* passa pelo ponto $(2,4)$ e é perpendicular à reta *r*, ou seja, $m_s=-\frac{1}{m_r}=-2$, obtemos a equação geral da reta *s*:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-4=-2(x-2) \Rightarrow y-4=-2x+4 \Rightarrow 2x+y-8=0$$

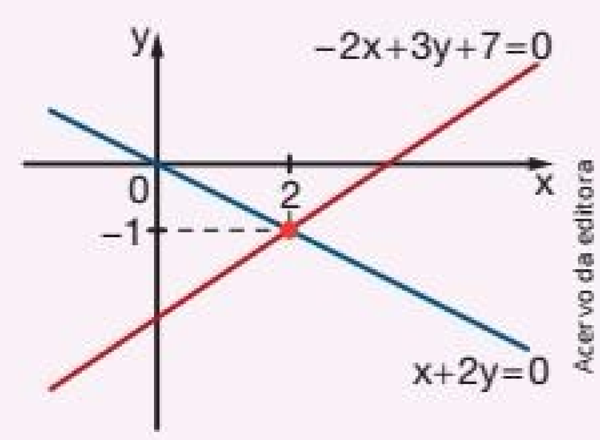
Portanto, a equação geral da reta *s* é $2x+y-8=0$.

R14. Determine as coordenadas do ponto em que as retas r: $-2x+3y+7=0$ e s: $x+2y=0$ se intersectam.

Resolução

Obtemos o ponto de interseção das retas resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -2x+3y+7=0 \\ x+2y=0 \quad \cdot(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+3y+7=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$$
$$7y+7=0 \Rightarrow y=-1$$



Substituindo y por -1 na equação $x+2y=0$:

$$x+2\cdot(-1)=0 \Rightarrow x=2$$

Portanto, as retas intersectam-se no ponto de coordenadas $(2,-1)$.

R15. Verifique a posição relativa entre as retas r: $-5x+y+1=0$, s: $-10x+2y-6=0$ e t: $\frac{1}{5}x+y+1=0$, duas a duas.

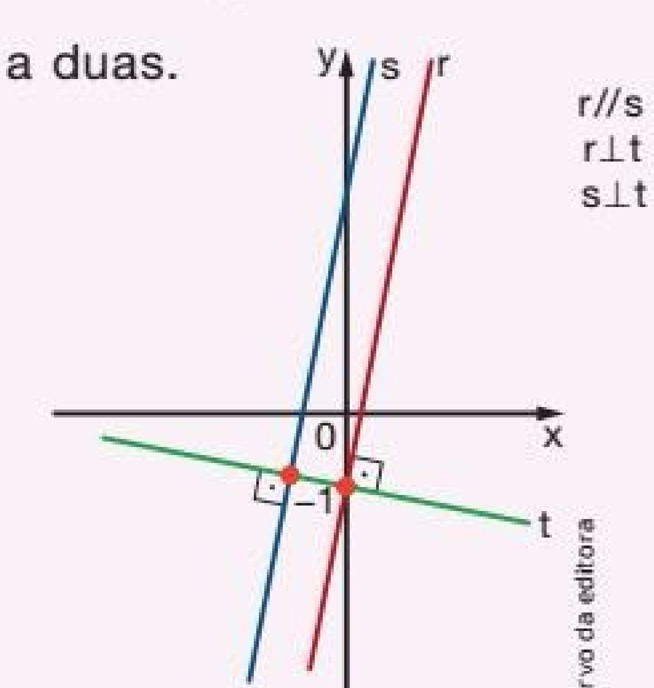
Resolução

Inicialmente, determinamos os coeficientes angular *m* e linear *n* de cada reta.

- $-5x+y+1=0 \Rightarrow y=5x-1$
  $m_r=5$ e $n_r=-1$
- $-10x+2y-6=0 \Rightarrow y=5x+3$
  $m_s=5$ e $n_s=3$
- $\frac{1}{5}x+y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{5}x-1$
  $m_t=-\frac{1}{5}$ e $n_t=-1$

Em seguida, verificamos a posição relativa das retas, duas a duas.

- *r* e *s*: como $m_r=m_s$ e $n_r \neq n_s$, as retas *r* e *s* são paralelas.
- *r* e *t*: como $m_r=-\frac{1}{m_t}$, as retas *r* e *t* são perpendiculares.
- *s* e *t*: como $m_s=-\frac{1}{m_t}$, as retas *s* e *t* são perpendiculares.



> Note que, em um mesmo plano, se *r* e *s* são distintas e perpendiculares a uma reta *t*, então *r* e *s* são paralelas entre si.

R16. Para quais valores de *k* as retas r: $-5kx+10y-2=0$ e s: $-(1-k)x+y+1=0$ são:

a) paralelas? b) concorrentes? c) perpendiculares?

Resolução

Temos que:

- $-5kx+10y-2=0 \Rightarrow 10y=5kx+2 \Rightarrow y=\frac{k}{2}x+\frac{1}{5}$

  $m_r=\frac{k}{2}$ e $n_r=\frac{1}{5}$

- $-(1-k)x+y+1=0 \Rightarrow y=(1-k)x-1$

  $m_s=1-k$ e $n_s=-1$

a) As retas *r* e *s* serão paralelas se os coeficientes angulares forem iguais e os coeficientes lineares forem diferentes. Como $n_r \neq n_s$, basta verificar o valor de *k* quando $m_r=m_s$.

$$m_r=m_s \Rightarrow \frac{k}{2}=1-k \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

Portanto, para $k=\frac{2}{3}$ as retas *r* e *s* são paralelas.

b) As retas *r* e *s* serão concorrentes se os coeficientes angulares forem diferentes, ou seja:

$$m_r \neq m_s \Rightarrow \frac{k}{2} \neq 1-k \Rightarrow k \neq \frac{2}{3}$$

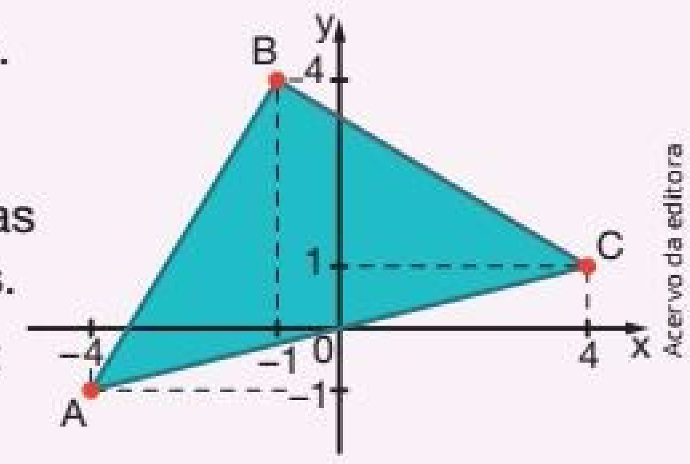
Portanto, para $k \neq \frac{2}{3}$ as retas *r* e *s* são concorrentes.

c) As retas *r* e *s* serão perpendiculares se o coeficiente angular de uma delas for igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja:

$$m_r=-\frac{1}{m_s} \Rightarrow \frac{k}{2}=-\frac{1}{1-k} \Rightarrow k-k^2=-2 \Rightarrow k^2-k-2=0 \left\langle \begin{array}{l} k=-1 \\ k=2 \end{array} \right.$$

Portanto, para $k=-1$ ou $k=2$ as retas *r* e *s* são perpendiculares.

R17. Verifique se o $\triangle ABC$ no plano cartesiano ao lado é retângulo.



Resolução

Para verificar se o triângulo é retângulo, devemos verificar se as retas que contém seus lados são, duas a duas, perpendiculares.

Determinando a equação da reta que contém cada lado, temos:

- Reta que contém o lado $\overline{AB}$ $(\overleftrightarrow{AB})$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -1+4y-4x-x-y-16=0 \Rightarrow 3y-5x-17=0 \Rightarrow y=\frac{5}{3}x+\frac{17}{3}$$

$m_{\overline{AB}}=\frac{5}{3}$

- Reta que contém o lado $\overline{AC}$ $(\overleftrightarrow{AC})$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4+4y-x-x+4y-4=0 \Rightarrow 8y-2x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x$$

$m_{\overline{AC}}=\frac{1}{4}$

- Reta que contém o lado $\overline{BC}$ $(\overleftrightarrow{BC})$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -16+y-x+4x+4y-1=0 \Rightarrow 5y+3x-17=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{5}x+\frac{17}{5}$$

$m_{\overline{BC}}=-\frac{3}{5}$

Como $m_{\overline{AB}}=-\frac{1}{m_{\overline{BC}}}$, temos que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são perpendiculares; logo, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, ou seja, o $\triangle ABC$ é retângulo em *B*.

66. Sejam as retas $q: \frac{1}{2}x + 3 = y$, $r: 3 - 2x - y = 0$, $s: 3y + 2x = 6$ e $t: 2y - x - 6 = 0$. Qual é a posição relativa entre as retas:

a) *q* e *s*? concorrentes

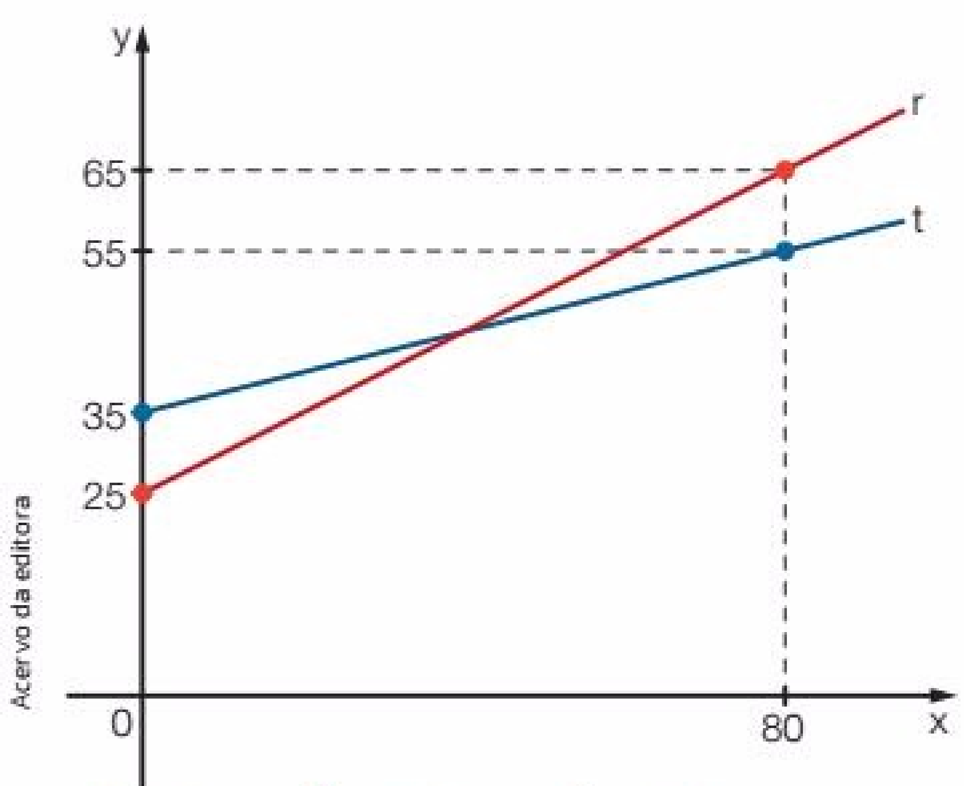
b) *r* e *t*? perpendiculares

c) *t* e *q*? coincidentes

d) *s* e *r*? concorrentes

67. Em um plano cartesiano, construa um triângulo cujos vértices são os pontos de interseção das retas $r: y = 8$, $s: 2x - 2y + 4 = 0$ e $t: y + x = -4$ e determine a área desse triângulo. Resposta no final do livro.

68. Considere as retas *r* e *t*.



68. a) $r: y = \frac{1}{2}x + 25$; $t: y = \frac{1}{4}x + 35$

a) Escreva a equação das retas *r* e *t*.

b) Determine as coordenadas do ponto de interseção das retas *r* e *t*. $(40, 45)$

69. Dadas as retas $r: 3kx - 4y + 2 = 0$ e $s: -6x + 2y - 7 = 0$, calcule *k* para que *r* e *s* sejam paralelas. $k = 4$

70. Mostre que o quadrilátero ABCD, de vértices $A(3, 0)$, $B(0, 2)$, $C(4, 8)$ e $D(7, 6)$, é um retângulo. Respostas nas **Orientações para o professor**.

71. Escreva a equação geral da reta que passa pelo ponto $P(3, 2)$ e é paralela à reta $s: 12x - 4y + 1 = 0$. $-3x + y + 7 = 0$

72. **Desafio**

Dada a reta $r: x - 2y + 3 = 0$ e o ponto $P(1, 6)$, determine:

a) a equação reduzida da reta *s*, que passa por *P* e é perpendicular a *r*. $y = -2x + 8$

b) as coordenadas do ponto simétrico a *P* em relação a *r*. $\left(\frac{21}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

73. Considerando as retas de equações $y = 6 - \frac{(a+1)}{2}x$ e $x + ay + 2 = 0$, determine os valores reais de *a* para que essas retas sejam concorrentes. $S = \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -2 \text{ e } a \neq 1\}$

74. Observe as retas indicadas no plano cartesiano e determine os pares de retas concorrentes e as coordenadas do ponto em que elas se intersectam.

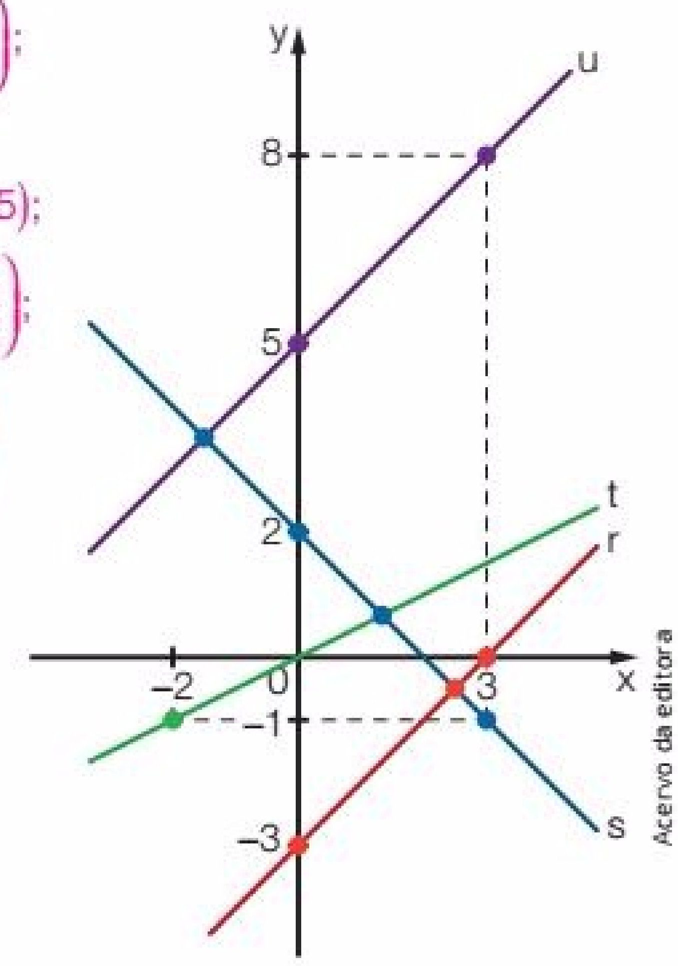
r e *s*: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

r e *t*: $(6, 3)$;

u e *t*: $(-10, -5)$;

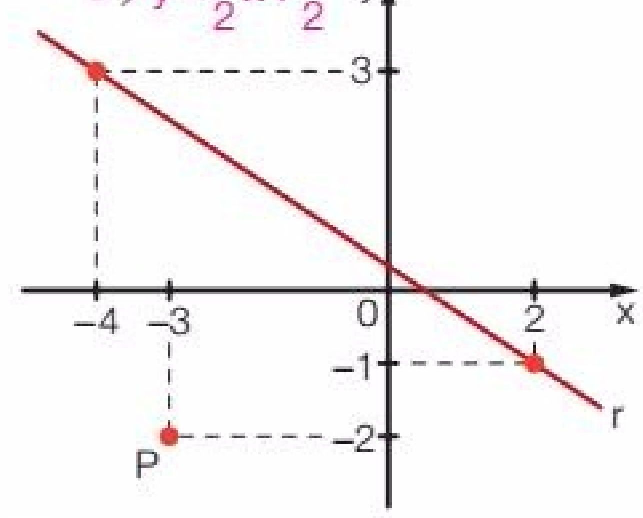
u e *s*: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$;

s e *t*: $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

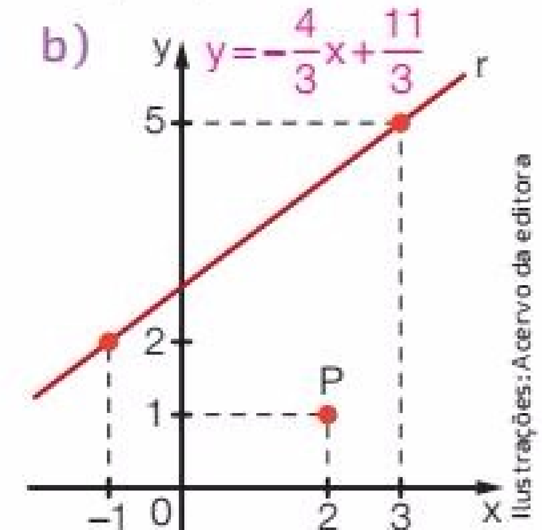


75. Em cada item, determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto *P* e é perpendicular a *r*.

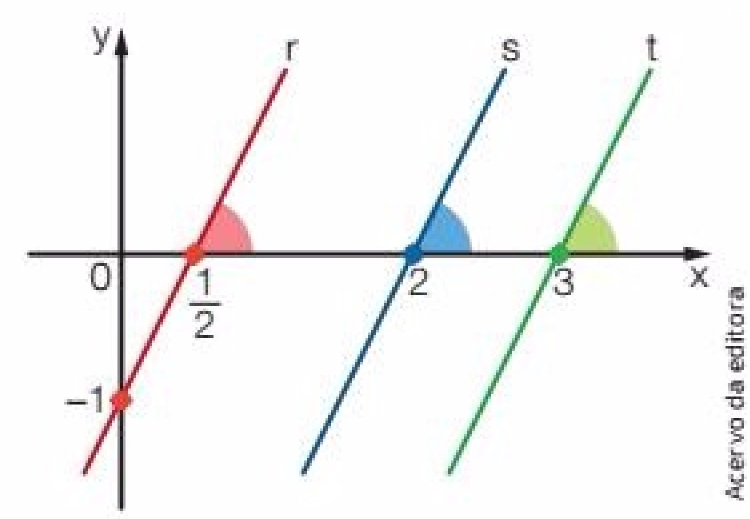
a) $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$



b) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$

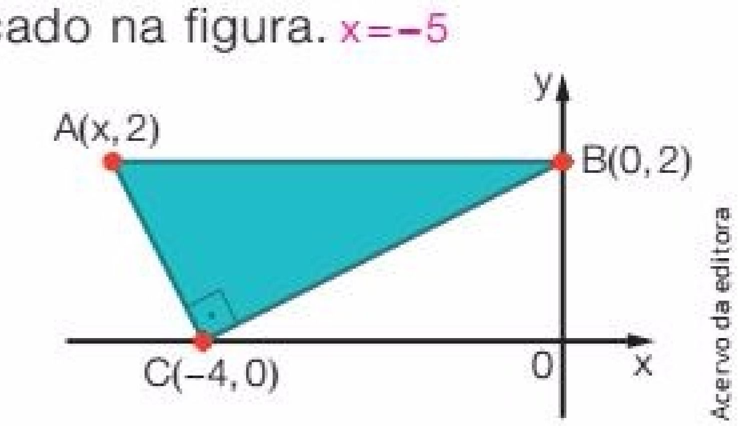


76. Observe o plano cartesiano, em que r//s//t, e determine a equação das retas *s* e *t*. $s: 2x - y - 4 = 0$; $t: 2x - y - 6 = 0$



77. Dados o ponto $P(3, 5)$ e a reta *r* cuja equação geral é $x + 2y - 2 = 0$, determine as coordenadas da projeção ortogonal de *P* sobre *r*. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

78. Determine a abscissa do vértice *A* do triângulo indicado na figura. $x = -5$



Discussão de um sistema linear

Estudamos anteriormente que, quando existe, a solução de um sistema linear com duas incógnitas e duas equações $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ corresponde ao par ordenado (x, y) que satisfaz simultaneamente as duas equações do sistema. Isso equivale a determinar as coordenadas do ponto em que as retas correspondentes às equações se cruzam.

Observe o exemplo.

Em uma papelaria, o preço de uma borracha e dois lápis é R\$ 10,00. Sabendo que não há diferença de preço entre uma borracha e três lápis, qual é o preço de cada um desses produtos?

leisuretime70/Shutterstock.com

lápis

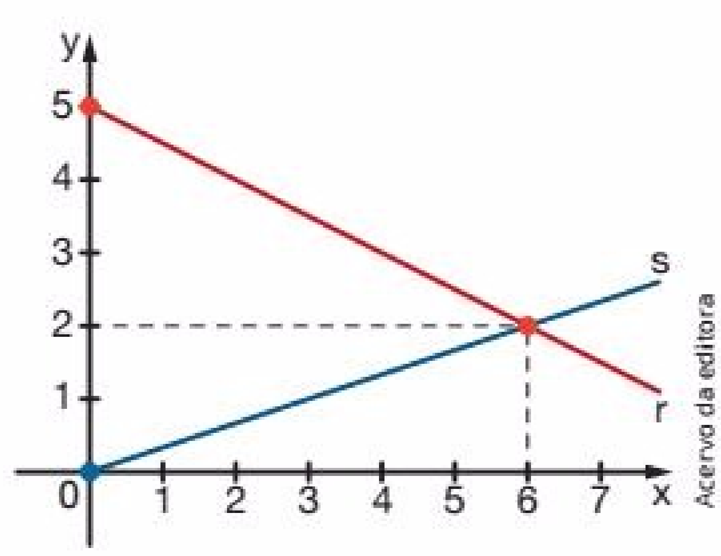
Alias Studiot Oy/ Shutterstock.com

borracha

Sendo *x* o preço de cada borracha, e *y*, o de cada lápis, temos o sistema $\begin{cases} x+2y=10 \\ x-3y=0 \end{cases}$. A solução desse sistema corresponde às coordenadas do ponto em que as retas $r: x+2y=10$ e $s: x-3y=0$ se cruzam.

Como $(6, 2)$ é a única solução do sistema, *r* e *s* se cruzam em um único ponto, de coordenadas $(6, 2)$. Assim, o preço de cada borracha é R\$ 6,00, e o de cada lápis, R\$ 2,00.

No exemplo acima, o sistema é possível e determinado (SPD) e as retas correspondentes a ele se cruzam em um único ponto (retas concorrentes).



Acervo da editora

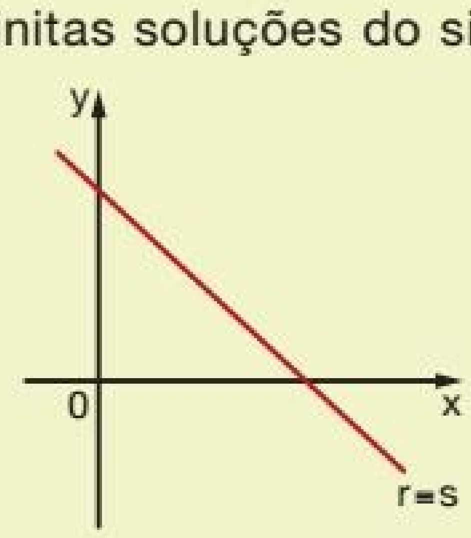
Proponha aos alunos que verifiquem que as retas *r* e *s* são concorrentes e se cruzam no ponto de coordenadas (6, 2).

Contudo, quando o sistema possuir infinitas soluções, as retas serão coincidentes, e quando o sistema não possuir solução, as retas serão paralelas.

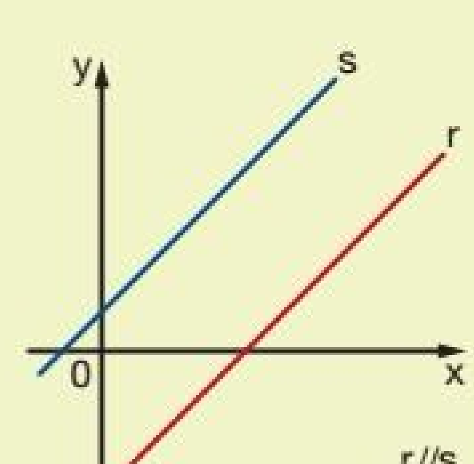
Em um sistema linear com duas incógnitas e duas equações $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, em relação ao par de retas $r: a_1x+b_1y=c_1$ e $s: a_2x+b_2y=c_2$, e às soluções desse sistema, temos as seguintes possibilidades:

- sistema possível e determinado (SPD): *r* e *s* são concorrentes, cruzando-se em um único ponto, cujas coordenadas correspondem à única solução do sistema.

- sistema possível e indeterminado (SPI): *r* e *s* são coincidentes, possuindo infinitos pontos comuns, cujas coordenadas correspondem às infinitas soluções do sistema.



- sistema impossível (SI): *r* e *s* são paralelas. Nesse caso, o sistema não tem solução.

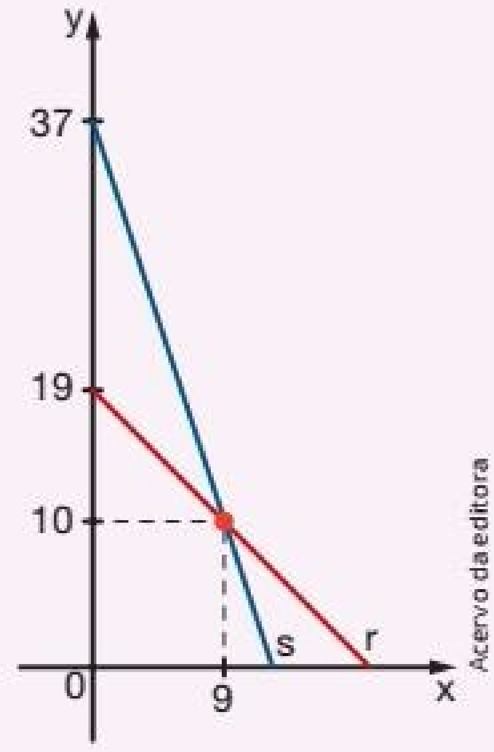


Ilustrações: Acervo da editora

R18. Para tornar o campeonato brasileiro de futebol mais competitivo, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) adotou em 2003 o sistema de pontuação por pontos corridos, no qual são atribuídos 3 pontos para o time vencedor ou 1 ponto para cada time, no caso de empate, sendo campeão o time que, ao final do campeonato, acumular o maior número de pontos.

Considere um time que apenas ganhou ou empatou os 19 primeiros jogos que disputou no campeonato. Quantos jogos esse time empatou, sabendo que ele acumulou 37 pontos?

Resolução



Sendo *x* e *y* o número de jogos vencidos e empatados, respectivamente, temos o sistema $\begin{cases} x+y=19 \\ 3x+y=37 \end{cases}$. A solução do sistema corresponde ao ponto onde as retas r: $x+y=19$ e s: $3x+y=37$ se cruzam. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x+y=19 & \cdot(-1) \\ 3x+y=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=-19 \\ 3x+y=37 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 2x=18 \Rightarrow x=9 \quad}$$
$$9+y=19 \Rightarrow y=10$$

Como *r* e *s* se cruzam em um único ponto, de coordenadas $(9, 10)$, temos que o time venceu 9 partidas e empatou 10.

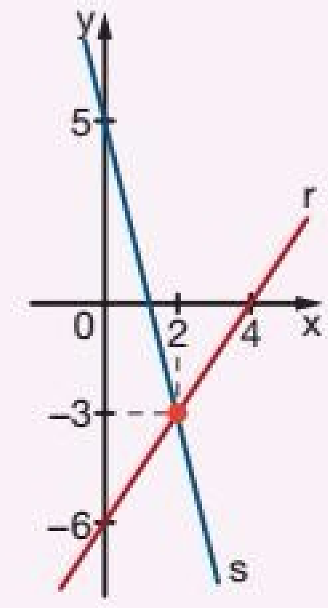
R19. Classifique os sistemas a seguir em SPD, SPI ou SI, analisando os coeficientes angulares e lineares das retas correspondentes.

a) $\begin{cases} 2y-3x=-12 \\ y+4x=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y-2x=7 \\ 5y-10x=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y-x=4 \\ -4y+2x=-8 \end{cases}$

Resolução



a) Sejam r: $2y-3x=-12$ e s: $y+4x=5$ as retas correspondentes às equações do sistema.

- $2y-3x=-12 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-6 \longrightarrow m_r=\frac{3}{2}$ e $n_r=-6$
- $y+4x=5 \Rightarrow y=-4x+5 \longrightarrow m_s=-4$ e $n_s=5$

Como $m_r \neq m_s$, as retas *r* e *s* são concorrentes; logo, o sistema é SPD.

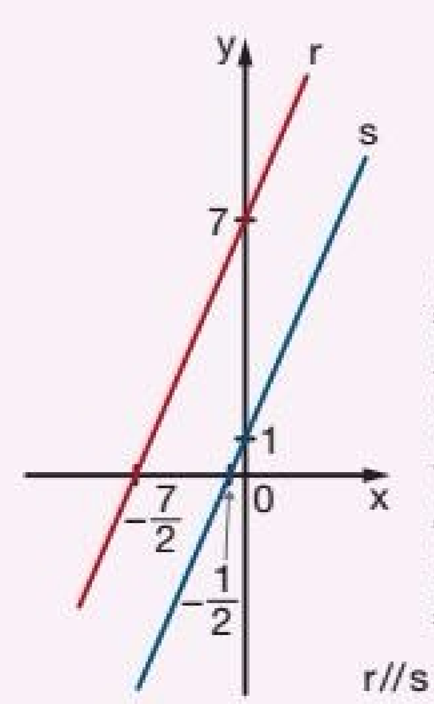
b) Sejam r: $y-2x=7$ e s: $5y-10x=5$ as retas correspondentes às equações do sistema.

- $y-2x=7 \Rightarrow y=2x+7$

  $m_r=2$ e $n_r=7$

- $5y-10x=5 \Rightarrow y=2x+1$

  $m_s=2$ e $n_s=1$



Como $m_r=m_s$ e $n_r \neq n_s$, as retas *r* e *s* são paralelas, ou seja, o sistema é SI.

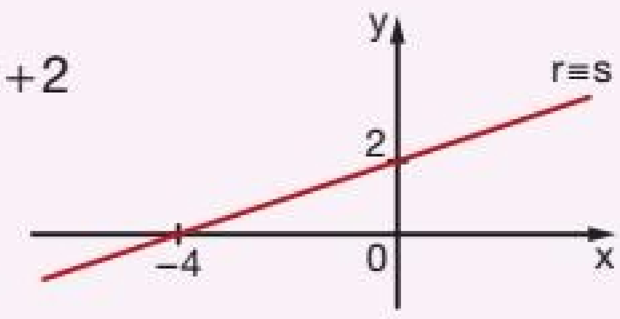
c) Sejam r: $2y-x=4$ e s: $-4y+2x=-8$ as retas correspondentes às equações do sistema.

- $2y-x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$

  $m_r=\frac{1}{2}$ e $n_r=2$

- $-4y+2x=-8 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$

  $m_s=\frac{1}{2}$ e $n_s=2$



Acervo da editora

Como $m_r=m_s$ e $n_r=n_s$, as retas *r* e *s* são coincidentes, ou seja, o sistema é SPI.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

79. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

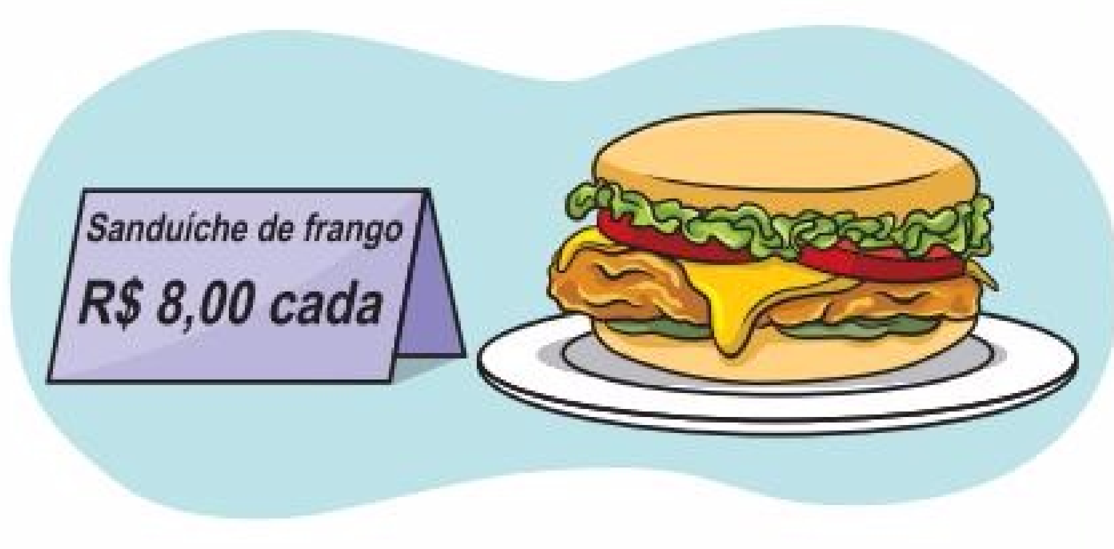
a) $\begin{cases} y-3x=12 \\ 2y-6x=24 \end{cases}$ SPI

b) $\begin{cases} 3y+x=1 \\ y-x=5 \end{cases}$ SPD

c) $\begin{cases} 2y-4x=-3 \\ 3x-6y=1 \end{cases}$ SPD

d) $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ SI

80. Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, frango e vegetariano, cujos preços estão indicados abaixo. Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R$ 324,00 na venda de 33 sanduíches.



Ilustrações: Desenhorama Estúdio

a) Escreva um sistema de equações que represente essa situação. $\begin{cases} 8A+12B=324 \\ A+B=33 \end{cases}$

b) Classifique o sistema que você escreveu no item **a** em SPD, SPI ou SI. SPD

c) Quantas unidades de cada sanduíche foram vendidas no final de semana?
frango: 18 unidades; vegetariano: 15 unidades

81. Calcule o valor de *m* para que o sistema de equações $\begin{cases} -2x+y=3 \\ mx+2y=1 \end{cases}$ não possua solução. $m=-4$

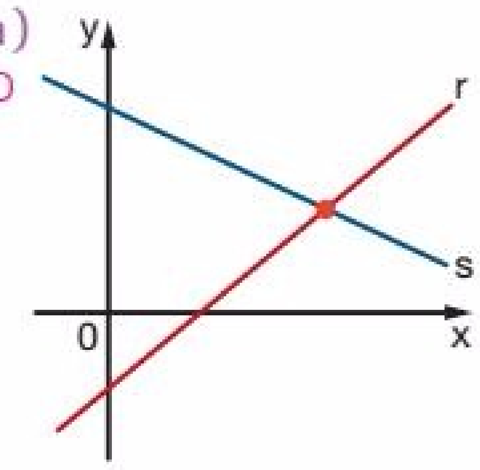
82. Represente geometricamente os sistemas de equações e, caso eles sejam SPD, determine sua solução. Respostas no final do livro.

a) $\begin{cases} 8x-2y=2 \\ 3x-y=-6 \end{cases}$

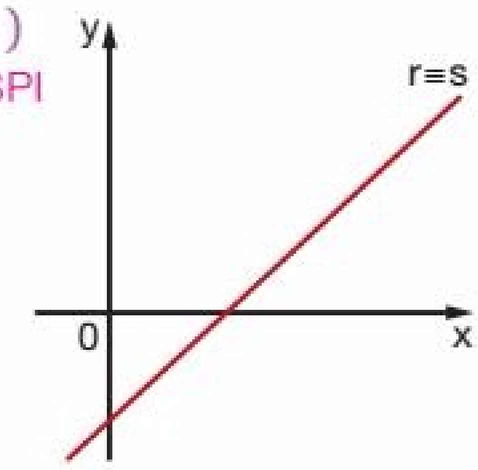
b) $\begin{cases} 2y-2x=1 \\ x=y-\frac{1}{2} \end{cases}$

83. Em cada item, está representado geometricamente um sistema linear em que as retas *r* e *s* correspondem a equações com duas incógnitas. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI.

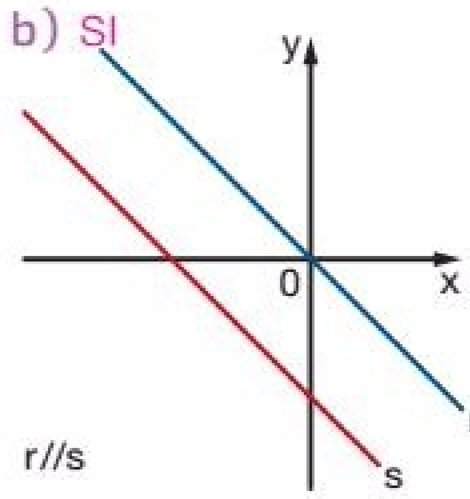
a) SPD



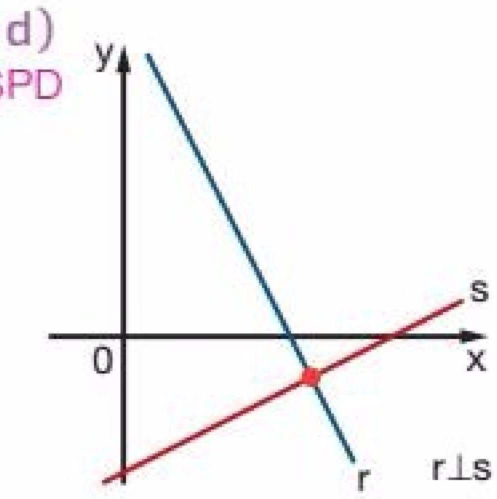
c) SPI



b) SI



d) SPD



Ilustrações: Acervo da editora

84. Dado o sistema de equações com coeficientes reais $\begin{cases} y=(a-1)x+2 \\ y-2x=b \end{cases}$, calcule *a* e *b* para que o sistema seja:

a) possível e indeterminado $a=3;\ b=2$

b) possível e determinado $a\neq 3;\ b\in\mathbb{R}$

c) impossível $a=3;\ b\neq 2$

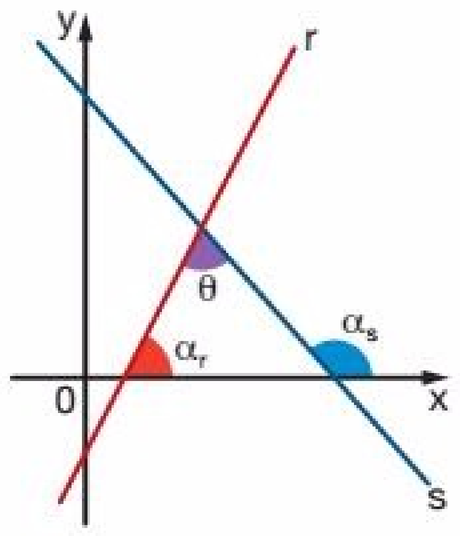
85. Calcule a solução dos sistemas de equações, caso exista.

a) $\begin{cases} x-3y=6 \\ 2x=6(y+1) \end{cases}$ não existe solução

b) $\begin{cases} 3y-2x=3 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$ $x=\frac{6}{19};\ y=\frac{23}{19}$

c) $\begin{cases} 2y-x=4 \\ y+2x=-4 \end{cases}$ $x=-\frac{12}{5};\ y=\frac{4}{5}$

Ângulo entre duas retas concorrentes



Nesse caso, m_r e m_s são, respectivamente, os coeficientes angulares das retas *r* e *s*.

Observe no plano cartesiano ao lado as retas *r* e *s*, não paralelas aos eixos *x* ou *y* e não perpendiculares entre si, e o ângulo agudo θ formado entre elas.

Temos que: Na dedução de tgθ, foi utilizada a fórmula da tangente da diferença de dois arcos, assunto estudado no volume 2 desta coleção.

$$\alpha_s=\alpha_r+\theta \Rightarrow \theta=\alpha_s-\alpha_r \Rightarrow \text{tg}\,\theta=\text{tg}(\alpha_s-\alpha_r)=\frac{\text{tg}\,\alpha_s-\text{tg}\,\alpha_r}{1+\text{tg}\,\alpha_s\cdot\text{tg}\,\alpha_r}=\frac{m_s-m_r}{1+m_s\cdot m_r}$$

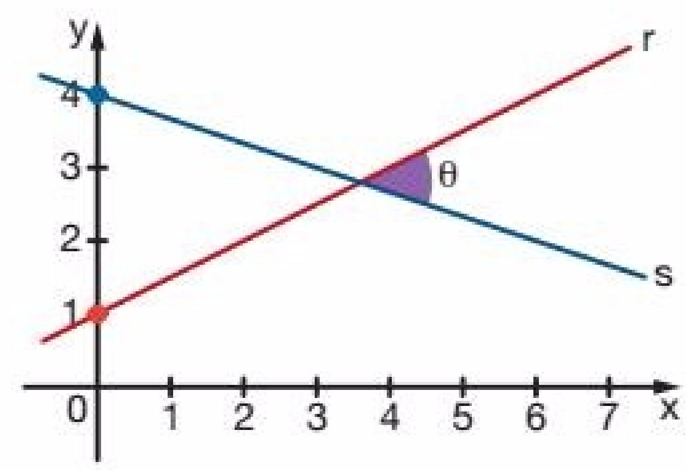
Como θ é agudo, ou seja, $0°<\theta<90°$, temos $\text{tg}\,\theta>0$. Assim:

$$\text{tg}\,\theta=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_s\cdot m_r}\right|$$

> Exemplo

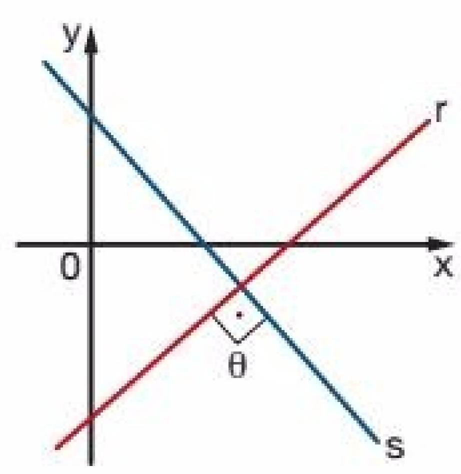
Vamos determinar o ângulo agudo θ, formado pelas retas $r: y=\frac{1}{2}x+1$ e $s: y=-\frac{1}{3}x+4$.

$$\text{tg}\,\theta=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_s\cdot m_r}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}\right|=1 \Rightarrow \theta=45°$$



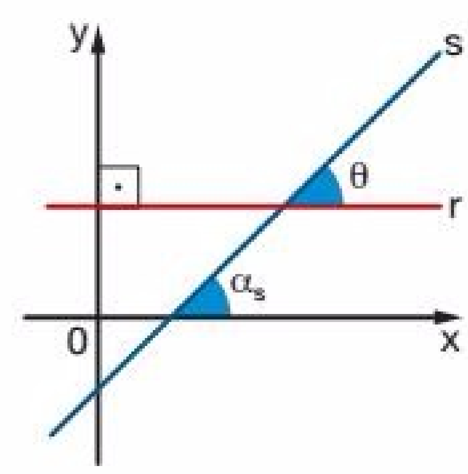
É importante observar que, dadas duas retas concorrentes *r* e *s*, temos outros três casos em relação ao ângulo θ formado por elas:

- *r* e *s* perpendiculares entre si



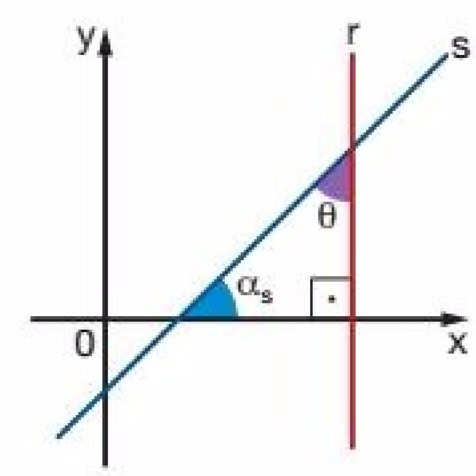
Nesse caso, $\theta=90°$.

- *r* paralela ao eixo *x*



Nesse caso, $\theta=\alpha_s$ (se $0°<\alpha_s<90°$) ou $\theta=180°-\alpha_s$ (se $90°<\alpha_s<180°$) e $\text{tg}\,\theta=|m_s|$.

- *r* paralela ao eixo *y*



Ilustrações: Acervo da editora

Nesse caso, $\theta=90°-\alpha_s$ e $\text{tg}\,\theta=\left|\frac{1}{m_s}\right|$.

Atividades

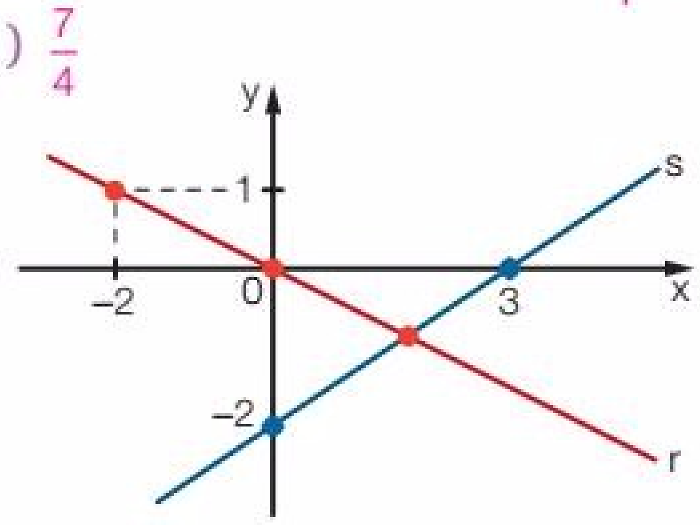
Anote as respostas no caderno.

86. Para cada item, determine a tangente do ângulo agudo formado pelas retas *r* e *s*.

a) $r: x-2y-6=0$ e $s: y=1-x$ 3

b) $r: y=2x-3$ e $s: y=-4x+2$ $\frac{6}{7}$

c) $\frac{7}{4}$



Acervo da editora

87. Sabendo que o ângulo agudo formado pelas retas $r: mx+2y-5=0$ e $s: y=6-2x$ é de 45°, calcule o valor de *m*. $m=\frac{2}{3}$ ou $m=-6$

88. Considerando o ponto $P(\sqrt{27}, 3)$ e a reta *r* de equação $y+\sqrt{3}x-4=0$:

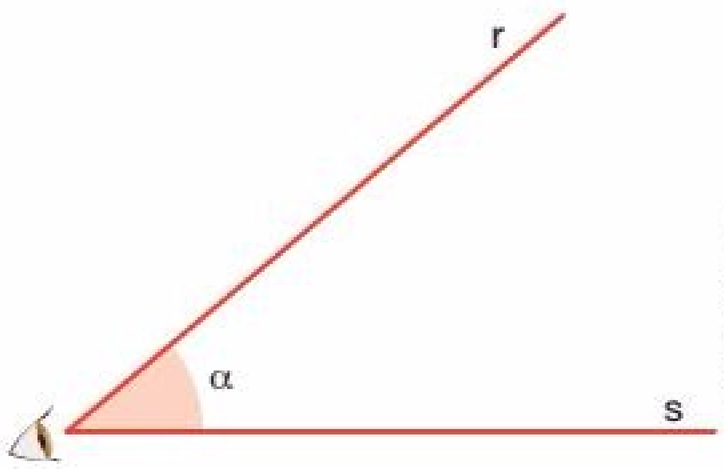
a) escreva a equação geral da reta *s* não paralela ao eixo *x* que passa por *P* e forma um ângulo de 60° com *r*; $s: -\sqrt{3}x+y+6=0$

b) represente geometricamente essas duas retas em um mesmo plano cartesiano. Resposta no final do livro.

89. Calcule a tangente do ângulo agudo formado pelas retas que representam as funções $f(x)=2x+4$ e f^{-1}. $\frac{3}{4}$

90. Nas páginas 36 e 37 estudamos informações sobre como o arco-íris é formado e visualizado por um observador.

Ao lado, está representado pela interseção das retas $r: -26x + 31y = 114$ e $s: y = 2$ o ângulo formado entre a linha de visão de um observador e o raio de uma das cores do arco-íris. Determine essa angulação. aproximadamente 40°



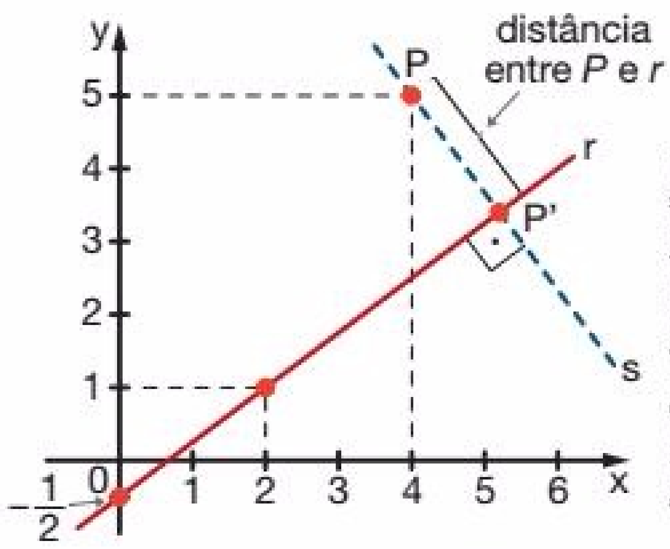
Acervo da editora

Leve para a sala de aula uma tabela trigonométrica ou diga aos alunos que, se $tg\alpha = 0{,}839$, então $\alpha = 40°$.

Distância entre ponto e reta

Estudamos em anos anteriores que a distância entre um ponto *P* e uma reta *r* corresponde à distância entre esse ponto e sua projeção ortogonal em *r*.

Para determinar a distância entre o ponto $P(4, 5)$ e a reta $r: -3x + 4y + 2 = 0$, por exemplo, obtemos inicialmente a equação da reta *s*, que passa por *P* e é perpendicular a *r* no ponto P'. Em seguida, calculamos a distância entre *P* e P'.



Ilustrações: Acervo da editora

Coeficiente angular de *r*:

$$-3x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \rightarrow m_r = \frac{3}{4}$$

Por $r \perp s$, segue que:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Como *s* passa por $P(4, 5)$, temos que a equação de *s* é dada por:

$$y - y_0 = m_s(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow y - 5 = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \Rightarrow 4x + 3y - 31 = 0$$

O ponto P' é comum às retas *r* e *s*. Assim, as coordenadas de P' correspondem à solução do sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 2 = 0 & \cdot(4) \\ 4x + 3y - 31 = 0 & \cdot(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x + 16y + 8 = 0 \\ 12x + 9y - 93 = 0 \end{cases}$$

$$25y - 85 = 0 \Rightarrow y = \frac{17}{5}$$

Substituindo y por $\frac{17}{5}$ em $-3x + 4y + 2 = 0$, temos:

$$-3x + 4 \cdot \frac{17}{5} + 2 = 0 \Rightarrow -3x + \frac{68}{5} + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{26}{5}$$

Calculando a distância entre $P(4, 5)$ e $P'\left(\frac{26}{5}, \frac{17}{5}\right)$:

$$PP' = \sqrt{\left(\frac{26}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{17}{5} - 5\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

Portanto, a distância entre o ponto *P* e a reta *r* é 2.

Outra maneira de calcular a distância *d* entre um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$ é por meio da fórmula:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Explique aos alunos que a fórmula ao lado pode ser demonstrada, o que não será feito nesta coleção.

Utilizando essa fórmula no exemplo apresentado, temos:

$$d = \frac{|-3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|-12 + 20 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

Atividades resolvidas

R20. Determine a distância entre as retas paralelas r: $12x - 5y - 2 = 0$ e s: $12x - 5y + 24 = 0$.

Resolução

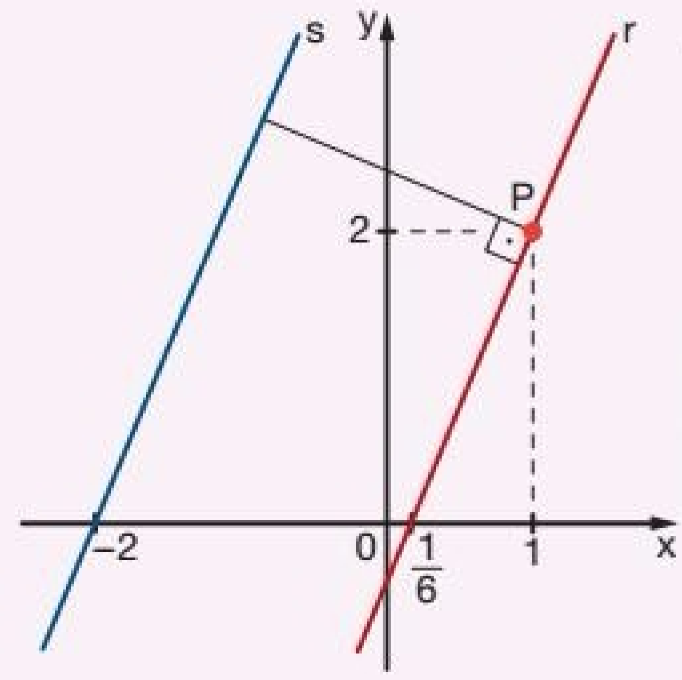
Como as retas são paralelas, a distância entre elas é igual à distância entre uma e um ponto *P* qualquer da outra reta. Tomando $x = 1$ na reta *r*, temos:

$$12 \cdot 1 - 5y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Logo, $P(1, 2)$ pertence à reta *r*.

A distância entre o ponto *P* e a reta *s* é dada por:

$$d = \frac{|12 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 24|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12 - 10 + 24|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{26}{13} = 2$$



Portanto, a distância entre as retas *r* e *s* é 2.

R21. Calcule a altura do $\triangle ABC$, de vértices em $A(6, 2)$, $B(9, 5)$ e $C(1, 3)$, em relação ao lado $\overline{AB}$.

Resolução

A altura em relação ao lado $\overline{AB}$ é igual à distância entre o ponto *C* e a reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, a reta-suporte do lado $\overline{AB}$.

Obtemos a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -18 - 6y - 5x + 2x + 9y + 30 = 0 \Rightarrow -3x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow -x + y + 4 = 0$$

Assim, a distância entre o ponto *C* e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dada por:

$$d = \frac{|(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-1 + 3 + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, a altura do $\triangle ABC$ em relação ao lado $\overline{AB}$ é $3\sqrt{2}$.

Atividades

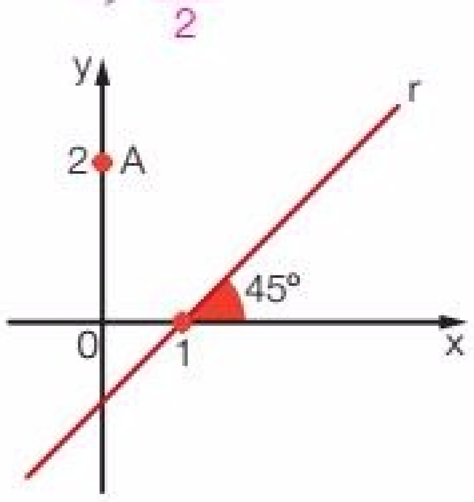
Anote as respostas no caderno.

91. Em cada item, calcule a distância entre o ponto *A* e a reta *r*.

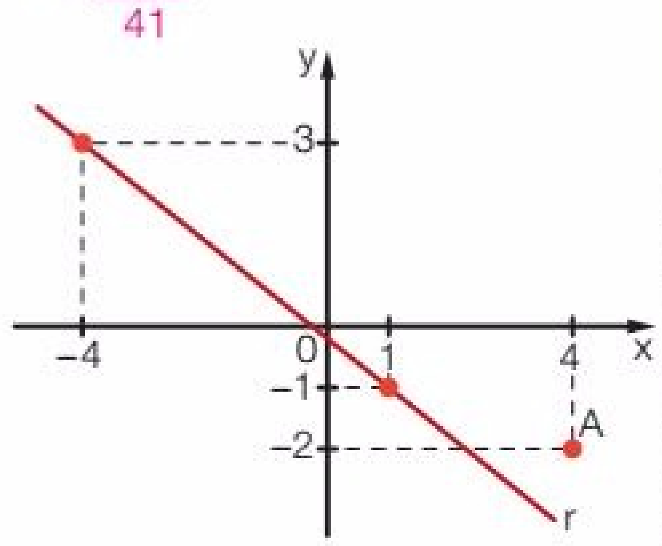
a) $A(2, 2)$ e $r: 2y + x - 1 = 0$ $\sqrt{5}$

b) $A(-1, 3)$ e $r: y - 3x + 6 = 0$ $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$



d) $\frac{7\sqrt{41}}{41}$



Ilustrações: Acervo da editora

92. Dadas as retas de equações $y = 4x + 2$ e $-2x + \frac{1}{2}y + 3 = 0$, responda.

a) Essas retas são paralelas? sim

b) Qual é a distância entre elas? $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

93. **Desafio**

Determine a equação reduzida da reta perpendicular à reta $r: x - y + 8 = 0$ e distante $\sqrt{2}$ unidades do ponto $A(1, 2)$. $y = -x + 1$ ou $y = -x + 5$

94. Seja $A(2, 6)$ um dos vértices do quadrado ABCD. Sabendo que os pontos *B* e *D* estão sobre a reta de equação $4x + 3y - 1 = 0$, calcule a área desse quadrado e as coordenadas do vértice *C*.
50 u.a.; $C(-6, 0)$

Inequação do 1º grau com duas variáveis

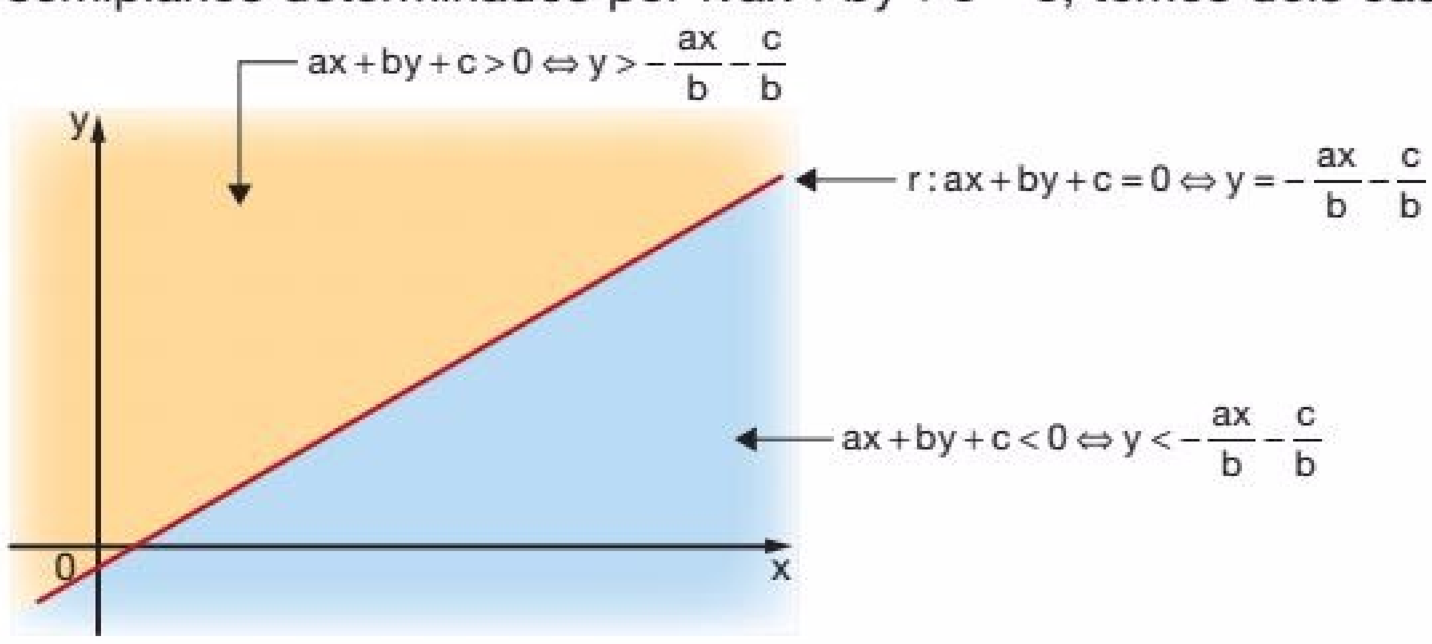
Uma reta define em um plano duas regiões denominadas **semiplanos**. Nesse sentido, ao traçar em um plano cartesiano uma reta $r: ax+by+c=0$, podemos associar os semiplanos determinados por essa reta às inequações do tipo $ax+by+c>0$, $ax+by+c<0$, $ax+by+c\geq 0$ ou $ax+by+c\leq 0$.

Escrevendo a equação da reta *r* na forma reduzida, com $b\neq 0$, temos:

$$ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=-\frac{ax}{b}-\frac{c}{b}$$

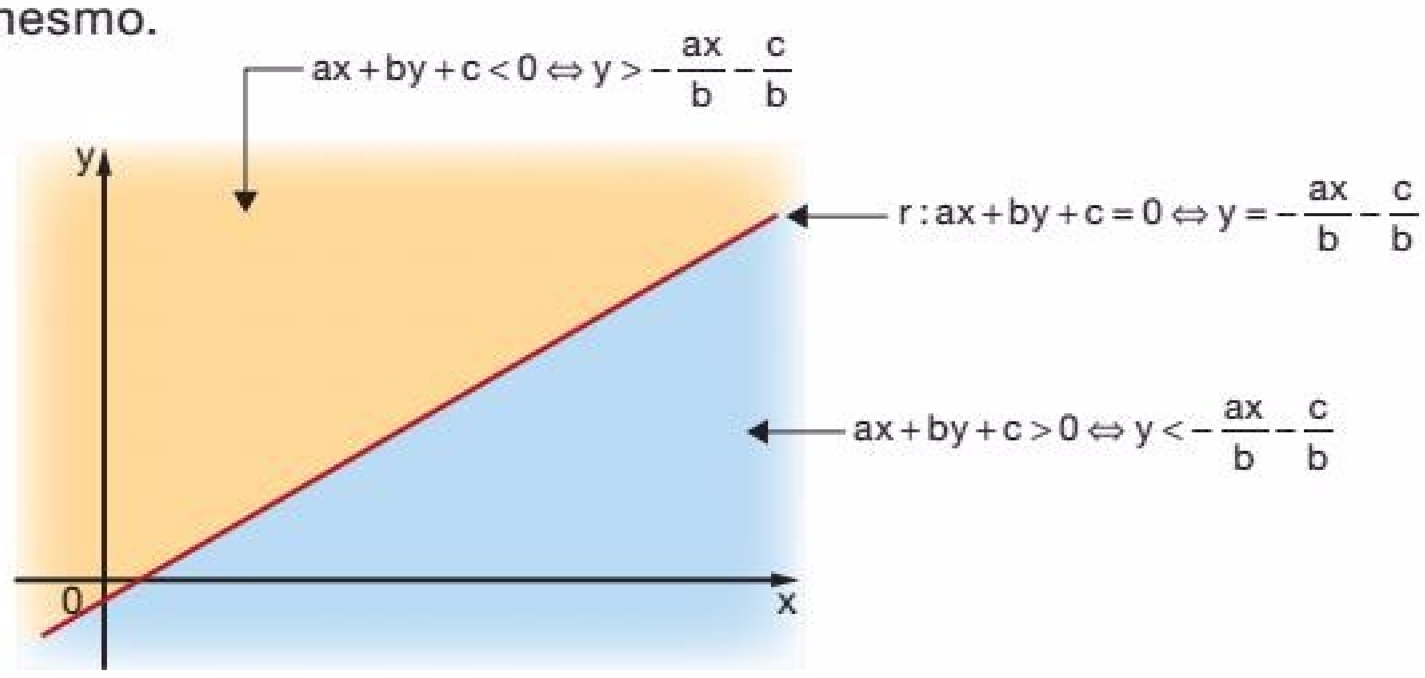
Considerando os semiplanos determinados por $r: ax+by+c=0$, temos dois casos.

- $b>0$



Note que, para $b>0$, o sinal da desigualdade das equações geral e reduzida permanece o mesmo.

- $b<0$



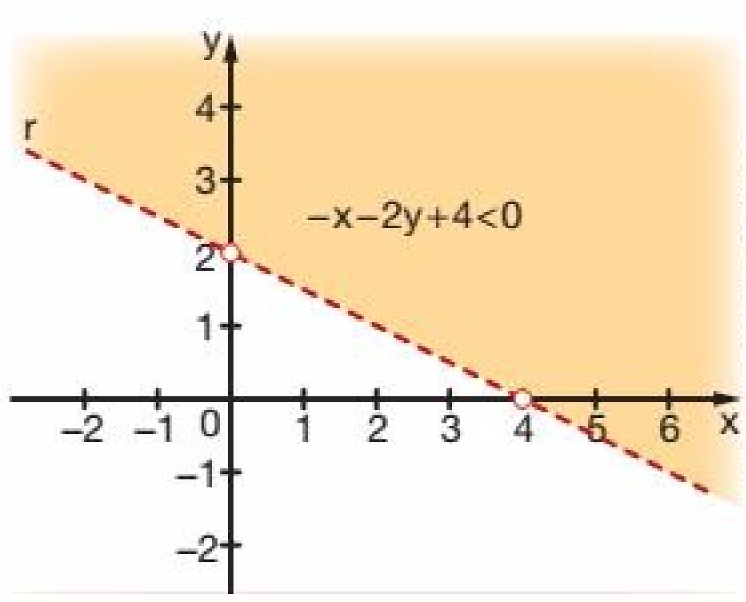
Note que, para $b<0$, o sinal da desigualdade das equações geral e reduzida se inverte.

Quando $b=0$, ou seja, quando *r* é perpendicular ao eixo *x*, a equação geral da reta será dada por $r: ax+c=0$ e definirá dois semiplanos, um à direita e outro à esquerda de *r*.

Podemos resolver graficamente a inequação $-x-2y+4<0$, por exemplo. Para isso, isolamos a variável *y*.

$$-x-2y+4<0 \Rightarrow y>-\frac{x}{2}+2$$

Em seguida, traçamos a reta $r: y=-\frac{x}{2}+2$ em um plano cartesiano. O conjunto solução da inequação $y>-\frac{x}{2}+2$ são os pontos do plano localizados acima $(>)$ da reta *r*. Portanto, a inequação $-x-2y+4<0$ determina um semiplano aberto acima da reta *r*, conforme a figura abaixo.



Ilustrações: Acervo da editora

O semiplano é aberto, pois a reta *r* não faz parte da solução da inequação.

Também podemos verificar que esse semiplano é solução, substituindo nessa inequação as coordenadas de um ponto qualquer não pertencente a *r*.

Observe que $A(0, 4)$ não pertence a *r*. Substituindo as coordenadas desse ponto na inequação $-x-2y+4<0$, temos:

$$-x-2y+4<0 \rightarrow -0-2\cdot 4+4<0 \Rightarrow -4<0$$

Como o ponto *A* satisfaz a inequação $-x-2y+4<0$, o semiplano determinado por *r* e por *A* é solução dessa inequação.

Considere agora $B(3, -2)$ um ponto não pertencente a *r*. Substituindo as coordenadas desse ponto em $-x-2y+4<0$, temos:

$$-x-2y+4<0 \rightarrow -3-2\cdot(-2)+4<0 \Rightarrow 5<0$$

Note que $5<0$ é falso, logo o ponto *B* não satisfaz a inequação. Portanto, o semiplano determinado por *r* e por *B* não é solução dessa inequação.

Atividades resolvidas

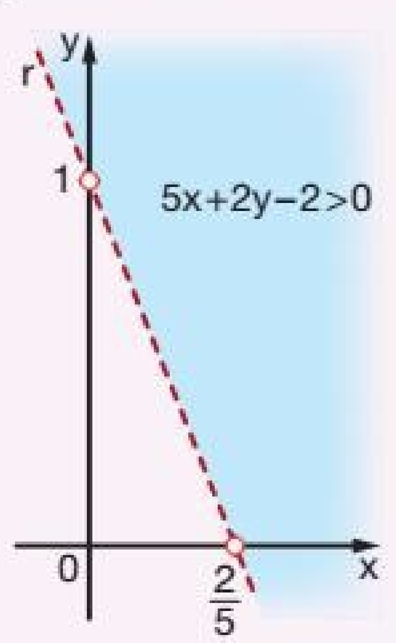
R22. Represente graficamente a solução do sistema de inequações $\begin{cases} 5x+2y-2>0 \\ x-y+1\geqslant 0 \end{cases}$.

Resolução

Inicialmente, para cada inequação do sistema, isolamos a variável *y* e indicamos, no plano cartesiano, o semiplano associado.

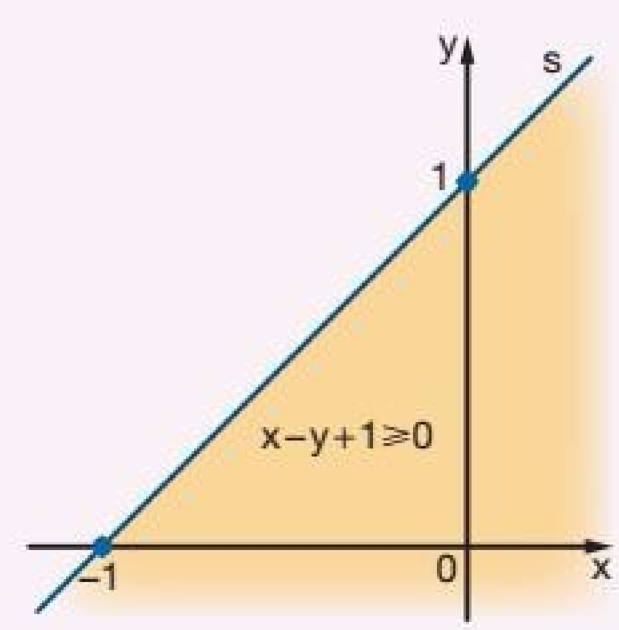
- $5x+2y-2>0 \Rightarrow y>-\dfrac{5x}{2}+1$

  Para indicarmos no plano cartesiano o semiplano associado, traçamos a reta $r: y=-\dfrac{5x}{2}+1$. A solução da inequação $y>-\dfrac{5x}{2}+1$ são os pontos do plano localizados acima $(>)$ da reta *r*. Logo, a inequação $5x+2y-2>0$ determina um semiplano aberto acima da reta *r*.

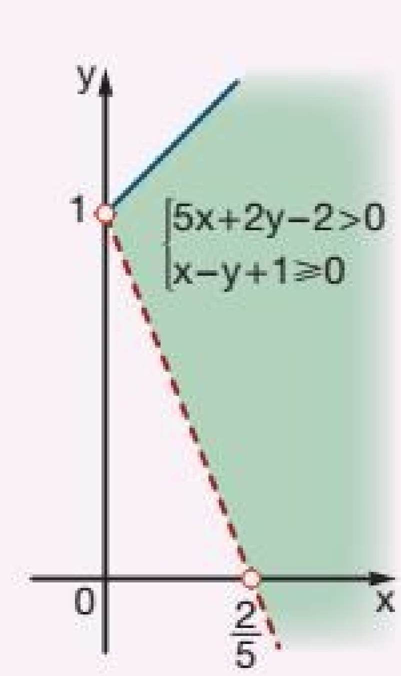


- $x-y+1\geqslant 0 \Rightarrow y\leqslant x+1$

  Para indicarmos no plano cartesiano o semiplano associado, traçamos a reta $s: y=x+1$. A solução da inequação $y\leqslant x+1$ corresponde aos pontos do plano localizados abaixo ou pertencentes $(\leqslant)$ à reta *s*. Logo, a inequação $x-y+1\geqslant 0$ determina um semiplano abaixo da reta *s*, incluindo essa reta.



Portanto, representamos a solução do sistema pela interseção das regiões dos semiplanos determinados pelas duas inequações.



Note que o ponto $(0, 1)$ de interseção das retas não é solução da inequação $5x+2y-2>0$; logo, não é solução do sistema.

Ilustrações: Acervo da editora

95. Represente geometricamente a solução de cada inequação. Respostas no final do livro.

a) $y<4-x$

b) $x+y-2\leqslant 0$

c) $y-2x+1\geqslant 0$

d) $2x-6y>0$

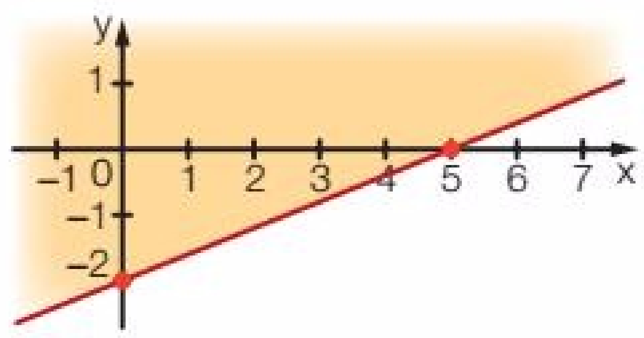
96. A região indicada no gráfico representa a inequação: c

a) $5y+2x-10<0$

b) $5y-2x-10\leqslant 0$

c) $5y-2x+10\geqslant 0$

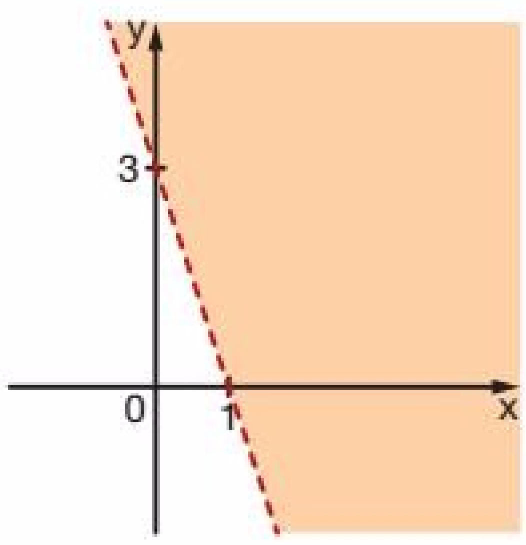
d) $5y+2x+10>0$



Acervo da editora

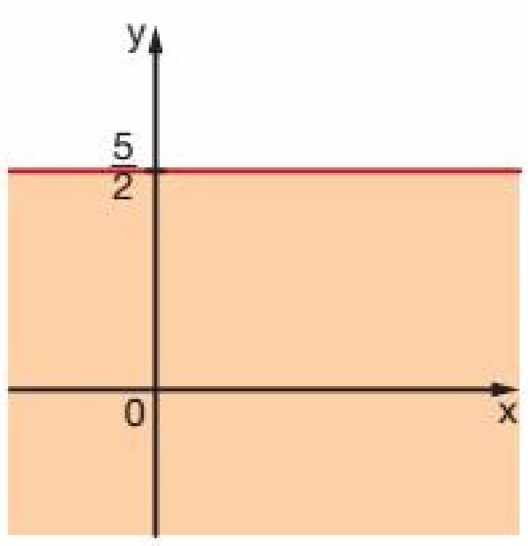
97. Para cada item, escreva uma inequação do 1º grau para representar a região destacada.

a)



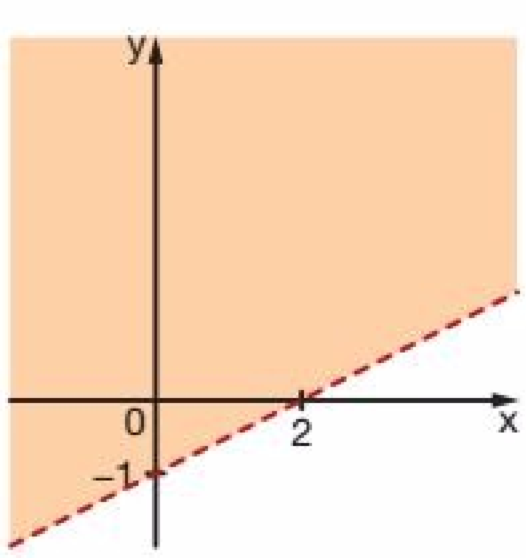
$y+3x-3>0$

b)



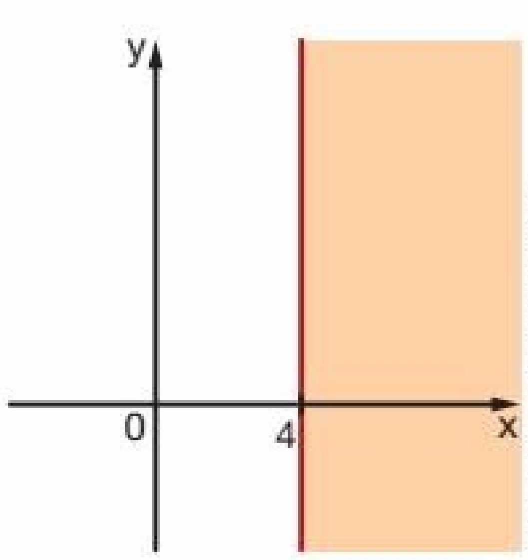
$y-\frac{5}{2}\leqslant 0$

c)



$y-\frac{1}{2}x+1>0$

d)

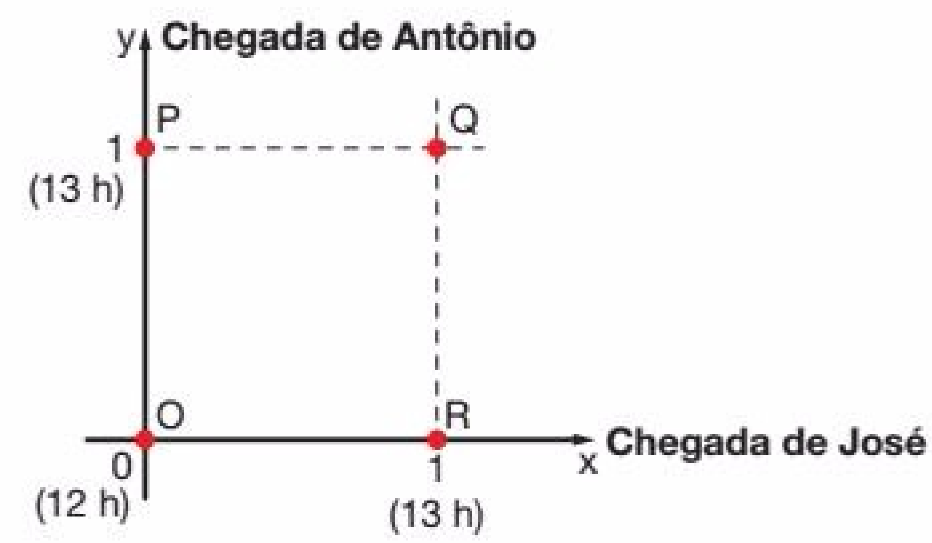


$x-4\geqslant 0$

Ilustrações: Acervo da editora

98. (Enem-MEC) José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho.

Chamando *x* o horário de chegada de José e *y* o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR abaixo indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x, y):



Acervo da editora

Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde: a

a) à diagonal OQ

b) à diagonal PR

c) ao lado PQ

d) ao lado QR

e) ao lado OR

99. Desafio

Resolva geometricamente a inequação $\dfrac{2x+y-1}{x-y}\geqslant 0$.
Resposta no final do livro.

100. Represente em um plano cartesiano a solução dos sistemas de inequações. Respostas no final do livro.

a) $\begin{cases} y+3x+2>0 \\ 6x+2y-1\geqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y<1 \\ 5x+y\geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y-x+3>0 \\ 2x-y+2>0 \end{cases}$

101. Determine a região do plano cartesiano definida pelas inequações $y-x\geqslant -2$ e $y\leqslant x+2$.
Resposta no final do livro.

102. Em um plano cartesiano, indique a região que é a solução simultânea das inequações $-2x-6y+18\geqslant 0$, $9x+2y+19\geqslant 0$ e $7x-4y-13\leqslant 0$ e calcule a área dessa região. Resposta no final do livro.

capítulo 3

A circunferência e as cônicas

O aparelho de GPS pode ser utilizado para traçar uma rota e informar a velocidade e a direção do deslocamento.

Pincasso/Shutterstock.com

Veja mais informações sobre o GPS no *site*:

- <http://tub.im/k699pk>
- <http://tub.im/77cpv3>

(acesso em: 3 mar. 2016)

GPS

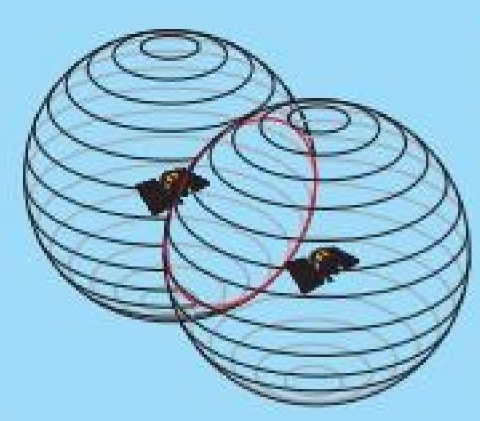
Por muitos séculos, o ser humano utilizou elementos da natureza para se orientar na superfície terrestre. No entanto, ao longo do tempo, avanços tecnológicos e científicos possibilitaram o desenvolvimento de diferentes equipamentos e sistemas de localização, que permitem saber onde está um objeto em qualquer ponto da Terra. Um exemplo é o GPS (do inglês *Global Positioning System* – Sistema de Posicionamento Global).

Para o funcionamento do GPS existem 24 satélites, distribuídos em seis órbitas em torno da Terra, dentre os quais pelo menos quatro podem monitorar um mesmo objeto do globo terrestre. Por meio de informações como o tempo de viagem de sinais de rádio entre o satélite e o aparelho receptor do GPS, obtido por meio de relógios atômicos, e a velocidade de propagação do sinal, previamente conhecida, é possível determinar a distância do satélite até o receptor. A partir da informação da distância em relação a três satélites, o receptor utiliza um princípio matemático denominado trilateração para obter a latitude e a longitude do ponto em que se encontra. Com informações de um quarto satélite, é possível também determinar a altitude.

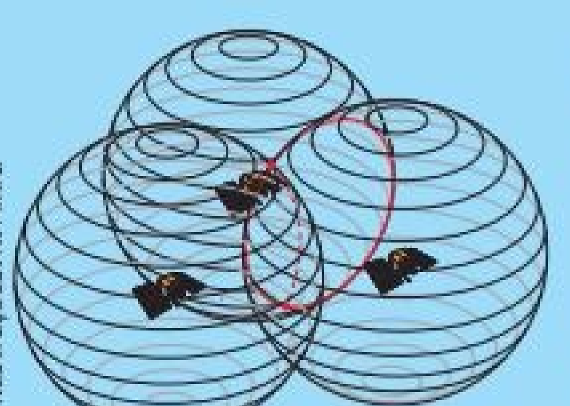
Fonte de pesquisa: VEJA. São Paulo: Abril, ano 39, n. 84, p. 64-65, dez. 2006. Edição especial.

A trilateração

É como se o aparelho criasse esferas hipotéticas em torno de cada satélite, onde o objeto a ser localizado estaria.



Considerando que o objeto esteja simultaneamente na superfície das duas esferas, ele poderá ser localizado na interseção dessas esferas, ou seja, em uma circunferência.



Ilustrações: N. Akira

Considerando que o objeto esteja também na superfície de uma terceira esfera, ele poderá ser localizado em apenas dois pontos que surgem da interseção dessa esfera com a circunferência já obtida anteriormente. Um dos pontos geralmente estará situado no subsolo ou na atmosfera, o outro corresponderá à localização do objeto e do receptor.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Que informações podem ser obtidas com um aparelho receptor GPS, visando à orientação na superfície terrestre?
A latitude, a longitude e a altitude referentes a um ponto qualquer.

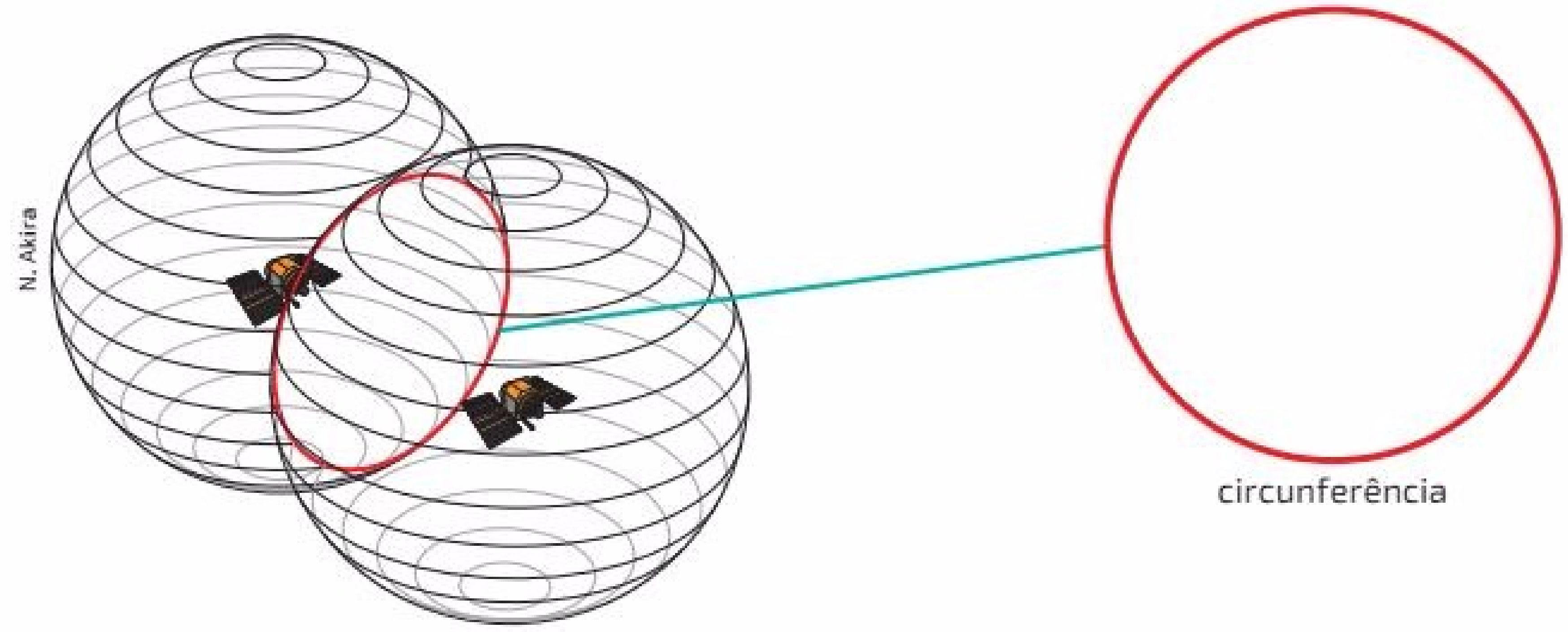
B No princípio da trilateração, de acordo com o esquema apresentado, que figura geométrica é determinada pela interseção de duas esferas hipotéticas criadas a partir do receptor GPS e de dois satélites? circunferência

C Pesquise situações nas quais os receptores GPS podem ser utilizados. Algumas possíveis respostas: pode ser utilizado para rastrear animais; obter a posição de veículos; orientar motoristas; obter informações sobre altitude durante a prática de esportes como alpinismo.

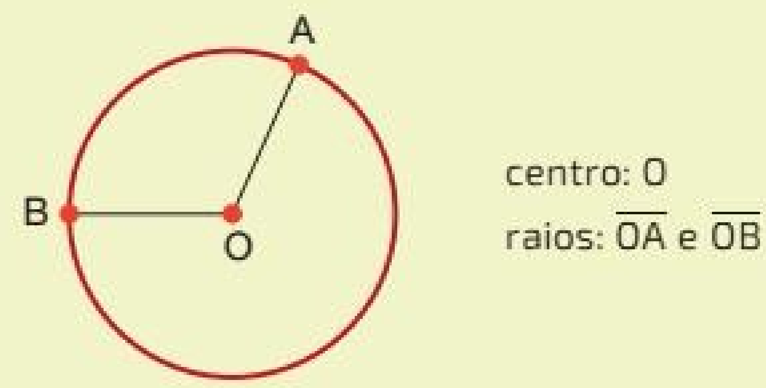
Circunferência

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados os exemplos e as atividades das páginas **201** e **202** da seção **Acessando tecnologias**.

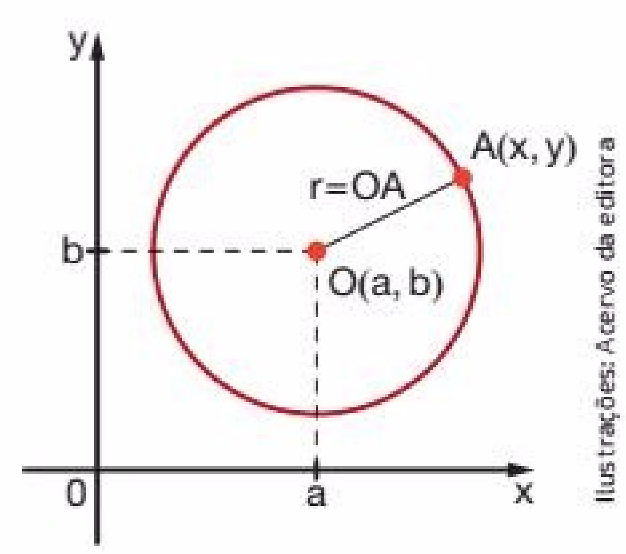
Nas páginas **74** e **75**, vimos que no funcionamento do GPS é utilizado um princípio matemático chamado trilateração, a fim de obter as coordenadas geográficas em que determinado ponto se encontra na superfície da Terra. No esquema apresentado nessas páginas, que detalha a trilateração, vimos que a interseção de duas esferas determina uma **circunferência**.



A **circunferência** é uma linha fechada em um plano, em que todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado **centro**. Cada segmento de reta com uma extremidade no centro e outra na circunferência é chamado **raio**.



Neste tópico, faremos o estudo analítico da circunferência no plano cartesiano. Para isso, considere inicialmente a circunferência de centro $O(a, b)$ e raio de medida *r*, e um ponto $A(x, y)$ pertencente a ela.



Nessa circunferência, a medida *r* do raio é dada pela distância entre os pontos *O* e *A*, ou seja, $r = OA$:

$$OA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \underbrace{\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}}_{\text{equação reduzida}}$$

A equação obtida é denominada **equação reduzida** da circunferência.

Desenvolvendo essa equação, obtemos a **equação geral** da circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow \underbrace{\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}}_{\text{equação geral}}$$

No caso em que o centro da circunferência é a origem $O(0, 0)$, a equação reduzida é dada por $x^2 + y^2 = r^2$, e a equação geral, por $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Exemplo

Vamos obter as equações reduzida e geral da circunferência de centro $O(4, 5)$ e raio de medida 3.

- equação reduzida:

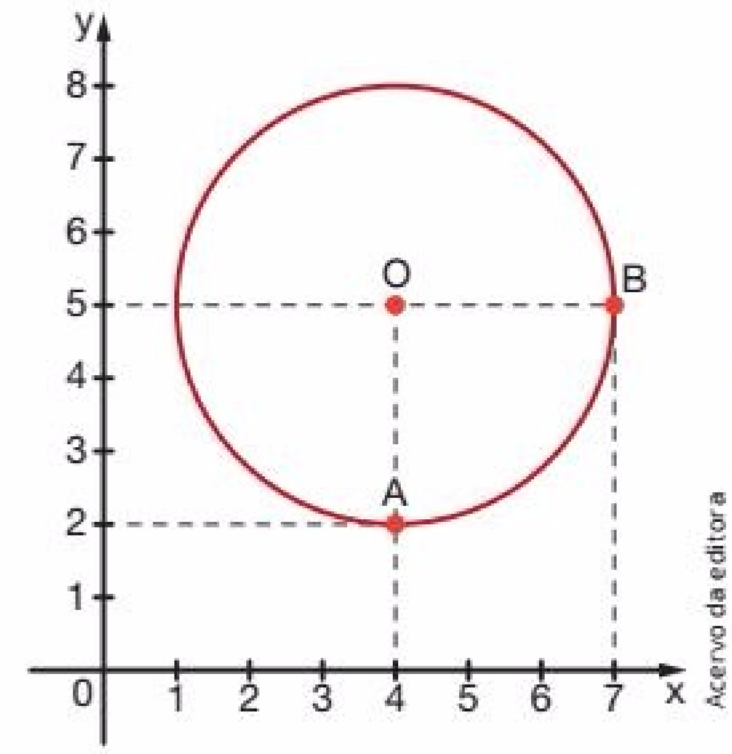
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-4)^2+(y-5)^2=3^2 \Rightarrow \boxed{(x-4)^2+(y-5)^2=9}$$

- equação geral:

$$(x-4)^2+(y-5)^2=9 \Rightarrow x^2-8x+16+y^2-10y+25=9 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2-8x-10y+32=0}$$

Nesse caso, os pontos cuja distância de $O(4, 5)$ é de 3 unidades pertencem à circunferência e satisfazem sua equação. Alguns desses pontos são:

- $A(4, 2)$: $(4-4)^2+(2-5)^2=9 \Rightarrow 0^2+(-3)^2=9 \Rightarrow 9=9$
- $B(7, 5)$: $(7-4)^2+(5-5)^2=9 \Rightarrow 3^2+0^2=9 \Rightarrow 9=9$



Atividades resolvidas

R1. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.

Resolução

Podemos obter as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de duas maneiras.

- 1ª maneira: completando quadrados.

  O método de completar quadrados consiste em escrever a equação na forma reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0 \Rightarrow x^2+4x+y^2-6y-3=\underbrace{4-4+9-9}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{x^2+4x+4}^{(x+2)^2}+\overbrace{y^2-6y+9}^{(y-3)^2}=4+9+3 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4^2$$

  Portanto, a equação representa uma circunferência com centro em $(-2, 3)$ e raio de medida 4.

- 2ª maneira: método da comparação.

  O método da comparação consiste em comparar, termo a termo, os coeficientes da equação geral da circunferência.

$$x^2+y^2+4x-6y-3=x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2$$

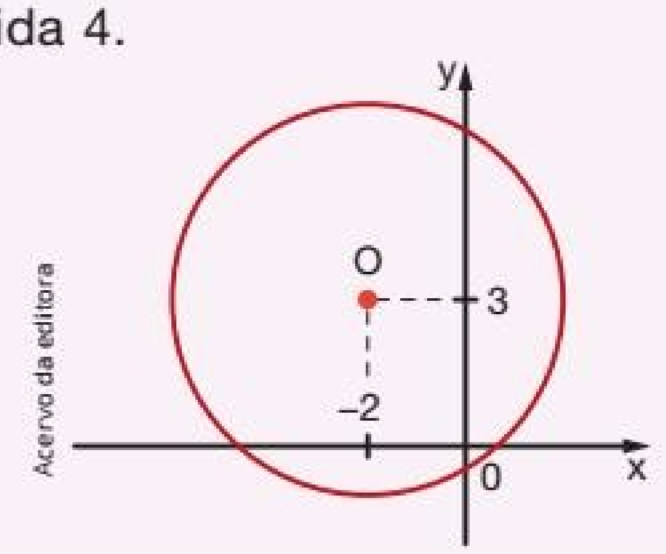
  Logo:

  $-2a=4 \Rightarrow a=-2$

  $-2b=-6 \Rightarrow b=3$

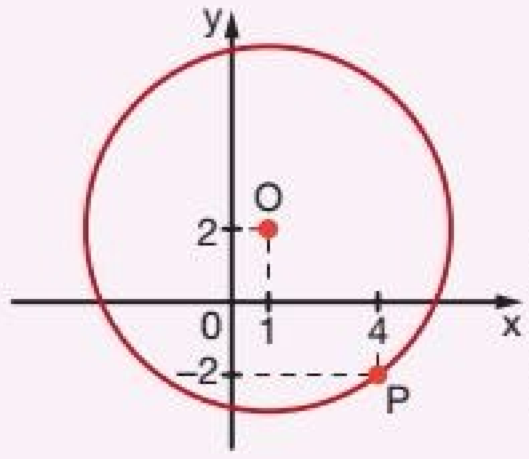
  $a^2+b^2-r^2=-3 \Rightarrow (-2)^2+3^2-r^2=-3 \Rightarrow 4+9-r^2=-3 \Rightarrow r^2=16 \begin{cases} r=4 \\ r=-4 \text{ (impossível)} \end{cases}$

  Portanto, a equação representa uma circunferência com centro em $(-2, 3)$ e raio de medida 4.



Note que, como a medida do raio da circunferência representa uma medida de comprimento, o valor $r=-4$ é impossível. Assim, devemos considerar apenas os valores positivos para as medidas do raio da circunferência.

R2. Determine a equação geral da circunferência de centro $O(1, 2)$ que passa pelo ponto $P(4, -2)$.



Resolução

Como a medida do raio da circunferência é OP, temos:

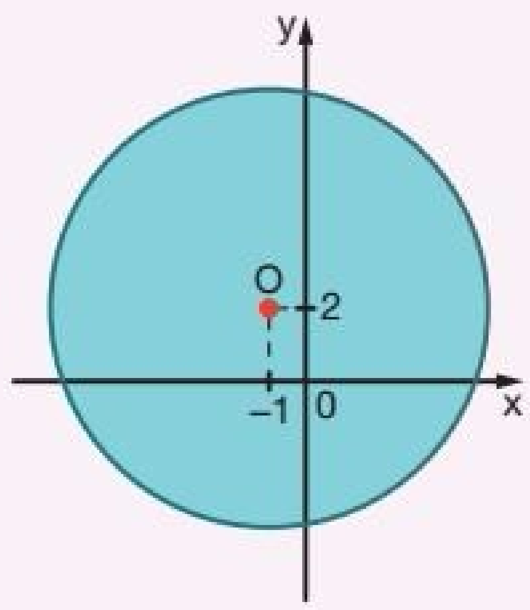
$$OP = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} \Rightarrow (OP)^2 = 3^2 + (-4)^2 \Rightarrow (OP)^2 = 25 \Rightarrow r^2 = 25$$

Assim, a equação geral da circunferência é dada por:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0}$$

R3. Qual é a área do círculo limitado pela circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0$? (Considere $\pi = 3{,}14$.)



Resolução

Utilizando o método do completamento de quadrados, temos:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y - 31 = \underbrace{1 - 1 + 4 - 4}_{0} \Rightarrow$$

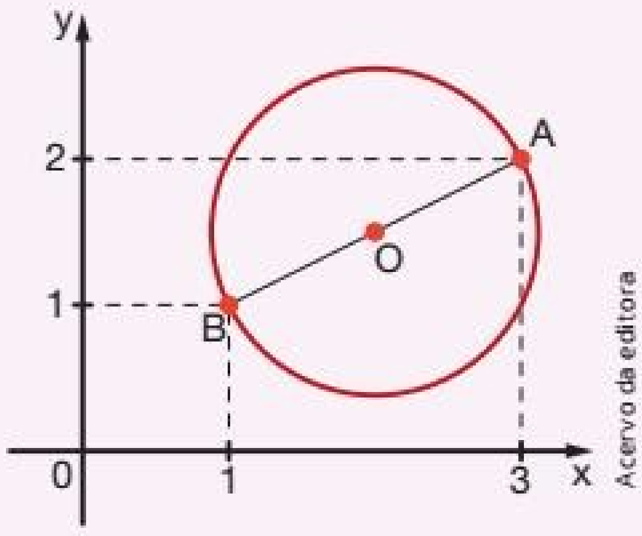
$$\Rightarrow \overbrace{x^2 + 2x + 1}^{(x+1)^2} + \overbrace{y^2 - 4y + 4}^{(y-2)^2} = 31 + 1 + 4 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 6^2$$

Logo, a equação representa uma circunferência com centro em $(-1, 2)$ e raio de medida 6.

Portanto, a área do círculo é:

$$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04 \rightarrow \boxed{113{,}04 \text{ u.a.}}$$

R4. Na circunferência a seguir, os pontos *A* e *B* são extremidades de um diâmetro. Escreva, na forma reduzida, a equação dessa circunferência.



Resolução

Seja $O(a, b)$ o centro da circunferência. Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, temos que *O* é o ponto médio de $\overline{AB}$. Assim:

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Logo, $O\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

A medida do raio da circunferência é $r = OA = OB$. Assim, temos:

$$r = OA = \sqrt{(3-2)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{5}{4}$$

Logo, a equação da circunferência é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação:

a) $x^2+(y-2)^2=9$ $O(0, 2)$; 3

b) $x^2+y^2+2x-7=0$ $O(-1, 0)$; $2\sqrt{2}$

c) $x^2+6x+y^2+y=-\dfrac{33}{4}$ $O\left(-3, -\dfrac{1}{2}\right)$; 1

d) $y^2+8(y-x)+x^2+28=0$ $O(4, -4)$; 2

2. Escreva a equação reduzida da circunferência que tem o centro *C* e a medida *r* do raio indicados em cada item. Respostas no final do livro.

a) $C(1, 4)$ e $r=7$

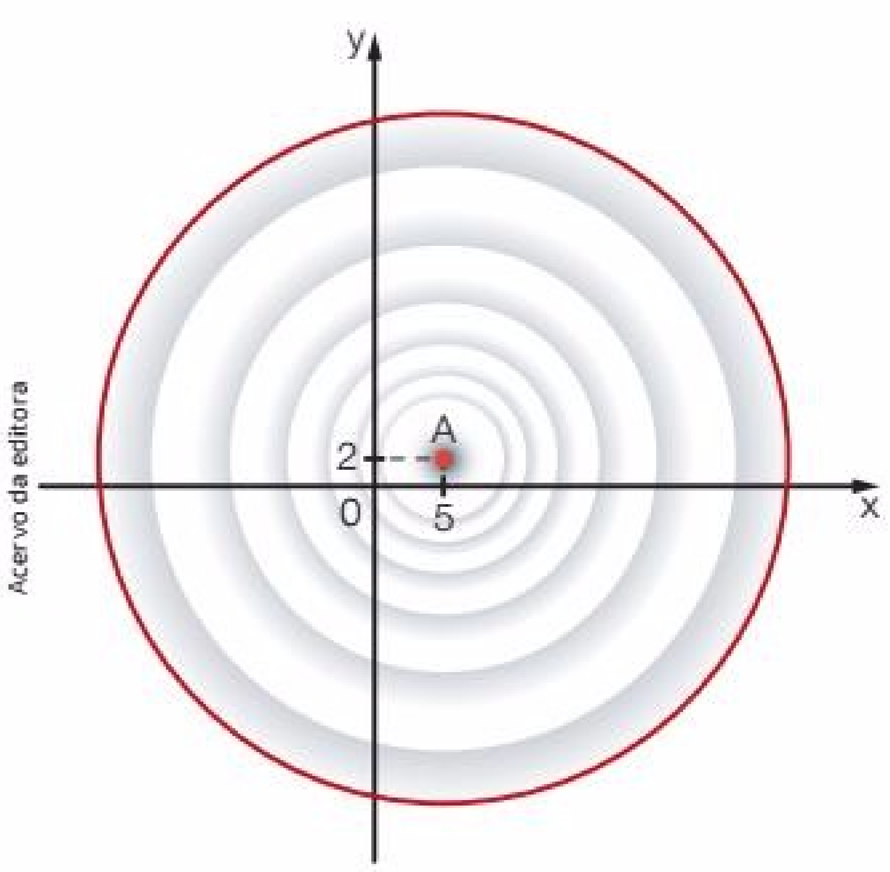
b) $C(-5, 0)$ e $r=4$

c) $C(-2, -6)$ e $r=\sqrt{3}$

d) $C(3, -1)$ e $r=5$

3. Dados os pontos $A(-5, 2)$ e $B(1, 4)$, escreva a equação reduzida da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.
$(x+2)^2+(y-3)^2=10$

4. No plano cartesiano a seguir, em que cada unidade representa 1 m, o ponto $A(5, 2)$ representa uma fonte sonora cujo som produzido se propaga em todas as direções, atingindo uma distância máxima de 25 m.



Acervo da editora

a) Determine a área atingida por essa fonte sonora. Para isso, admita $\pi=3{,}14$. 1 962,5 m^2

b) Escreva a equação reduzida da circunferência que limita a área atingida por essa fonte sonora.
$(x-5)^2+(y-2)^2=625$

5. Escreva na forma reduzida a equação da circunferência $5x^2+5y^2+40x-10y+55=0$. $(x+4)^2+(y-1)^2=6$

6. **Desafio**

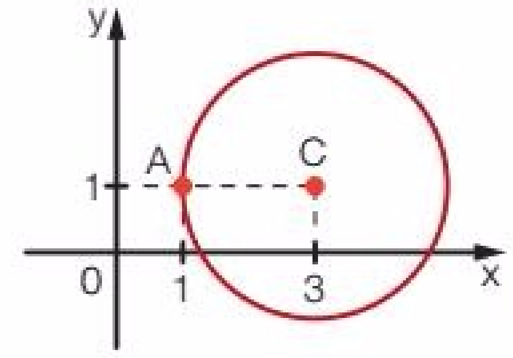
Determine a equação geral da circunferência que passa pelos pontos $P(1, 2)$, $Q(2, \sqrt{3})$ e $R(-1, 0)$.
$x^2+y^2-2x-3=0$

7. Verifique quais pontos pertencem à circunferência de centro $C(-6, 4)$ e raio de medida $\sqrt{8}$. Q e S

- $P(3, -1)$
- $Q(-8, 6)$
- $R(-2, -8)$
- $S(-4, 2)$

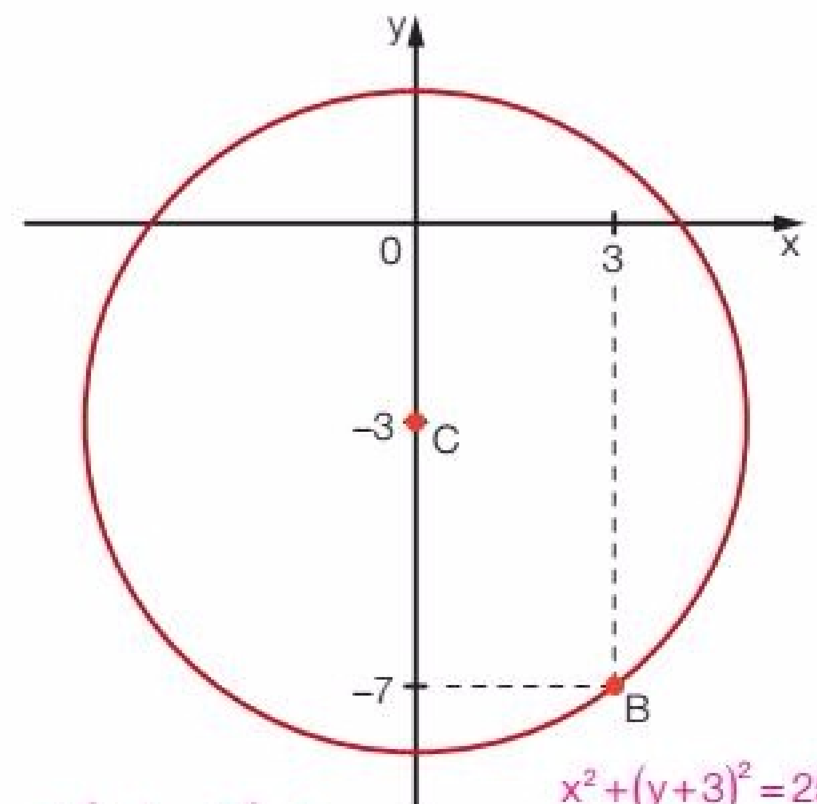
8. Escreva a equação reduzida que representa cada circunferência.

a)



$(x-3)^2+(y-1)^2=4$

b)



Ilustrações: Acervo da editora

$x^2+(y+3)^2=25$

9. b) $(x-2)^2+(y-3)^2=2$

9. O quadrado de vértices $A(1, 4)$, $B(1, 2)$, $C(3, 2)$ e $D(3, 4)$ está inscrito em uma circunferência.

a) Qual é a medida do lado do quadrado? 2 u.c.

b) Escreva a equação reduzida da circunferência.

c) Calcule a razão entre a área do círculo limitado pela circunferência e a área do quadrado. $\dfrac{\pi}{2}$

10. Escreva a equação geral da circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano e tem centro no ponto $C(-4, 2)$. $x^2+y^2+8x-4y=0$

11. Escreva na forma reduzida a equação da circunferência $5x^2+5y^2+10(x-5y)+80=0$. Em qual quadrante está localizado o centro da circunferência?
$(x+1)^2+(y-5)^2=10$; 2º quadrante

12. Para quais valores de *m* a equação $x^2+10x+y^2-6y+m=0$ representa uma circunferência? $m<34$

13. Represente graficamente as soluções da equação:
Respostas no final do livro.

a) $x^2+y^2=4$

b) $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

c) $x^2+(y-3)^2=\dfrac{1}{4}$

d) $x^2+y^2+10x-2y-23=0$

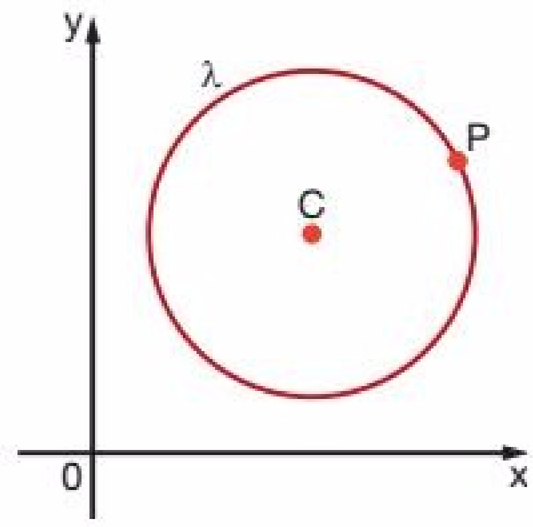
14. Calcule o valor de *k* para que o ponto $A(2, k)$ pertença à circunferência de centro $C(1, 4)$ e raio de medida $\sqrt{2}$. $k=3$ ou $k=5$

15. Calcule a distância entre o centro da circunferência de equação $(x-6)^2+(y+3)^2=12$ e a reta $s: 2x+y-4=0$.
$\sqrt{5}$

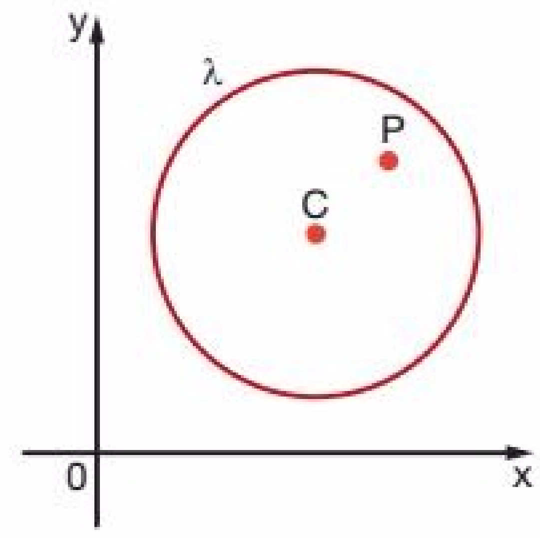
Posições relativas entre ponto e circunferência

Dada uma circunferência λ, de centro $C(a,b)$ e raio de medida *r*, um ponto $P(x_P, y_P)$ pode ser interno, externo ou pertencer a λ.

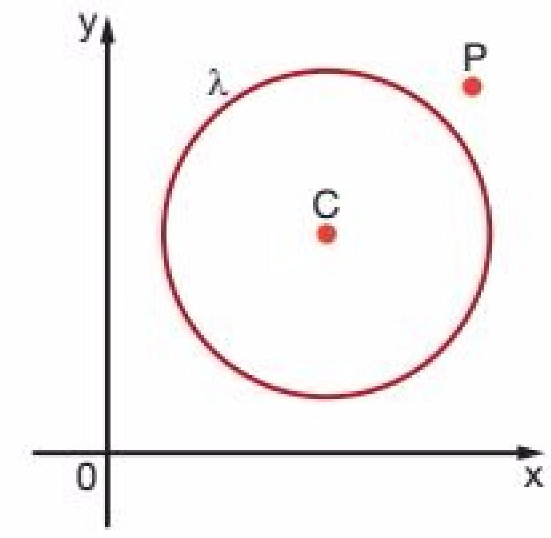
- No caso em que *P* pertence à circunferência $(P \in \lambda)$, $CP = r$ e $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 - r^2 = 0$.



- No caso em que *P* é interno à circunferência, $CP < r$ e $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 - r^2 < 0$.



- No caso em que *P* é externo à circunferência, $CP > r$ e $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 - r^2 > 0$.



Exemplo

Em relação à circunferência λ de equação $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$, temos que:

- $A(7, -1)$ pertence a λ:

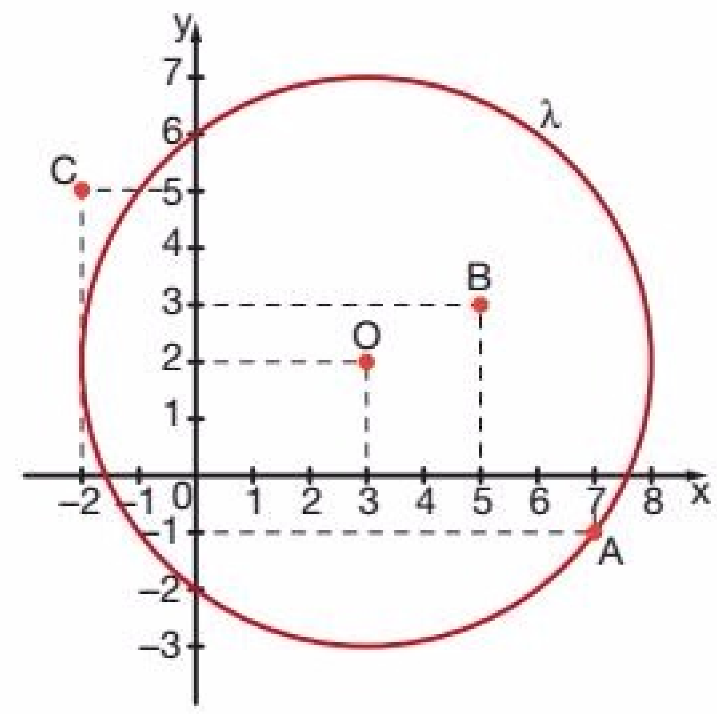
$$(7-3)^2 + (-1-2)^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$$

- $B(5, 3)$ é interno a λ:

$$(5-3)^2 + (3-2)^2 = 2^2 + 1^2 = 5 < 25$$

- $C(-2, 5)$ é externo a λ:

$$(-2-3)^2 + (5-2)^2 = (-5)^2 + 3^2 = 34 > 25$$



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R5. Para quais valores de *k* o ponto $A(k, 6)$ é interno à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 36 = 0$ e externo ou pertencente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$?

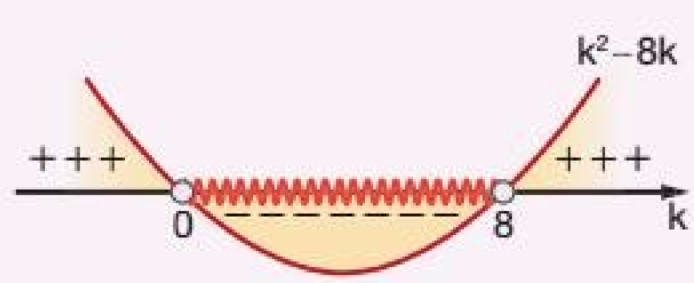
Resolução

Resolva com os alunos as inequações $k^2 - 8k < 0$ e $k^2 - 8k + 12 \geq 0$ que aparecem nesta atividade.

A partir das condições sobre o ponto *A*, temos:

- O ponto *A* é interno à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 36 = 0$ se:

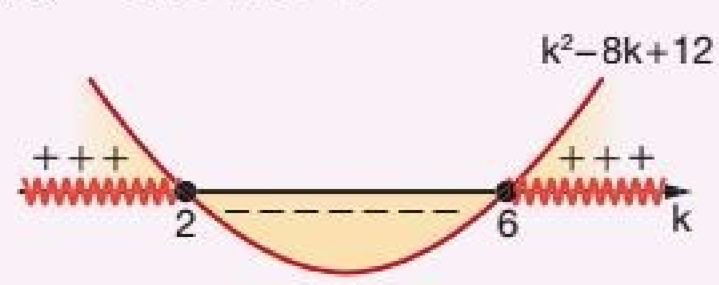
$$k^2 + 6^2 - 8k - 12 \cdot 6 + 36 < 0 \Rightarrow k^2 - 8k < 0$$



Logo, $S_1 = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k < 8\}$.

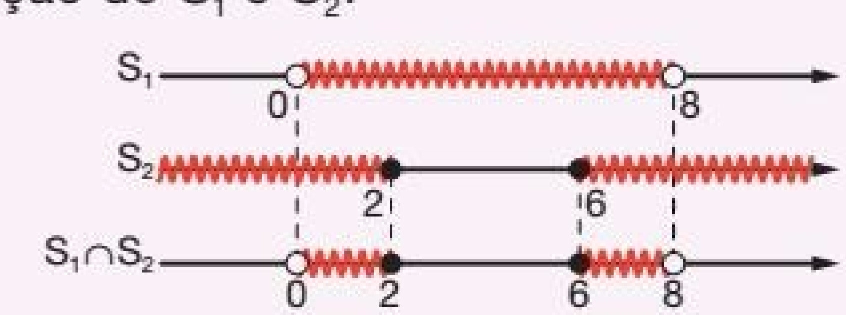
- O ponto *A* é externo ou pertencente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$ se:

$$k^2 + 6^2 - 8k - 12 \cdot 6 + 48 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k^2 - 8k + 12 \geq 0$$



Logo, $S_2 = \{k \in \mathbb{R} \mid k \leq 2 \text{ ou } k \geq 6\}$.

Assim, os valores de *k* que satisfazem todas as condições é dado pela interseção de S_1 e S_2:



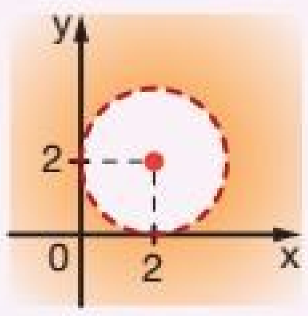
Ilustrações: Acervo da editora

Portanto, $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k \leq 2 \text{ ou } 6 \leq k < 8\}$.

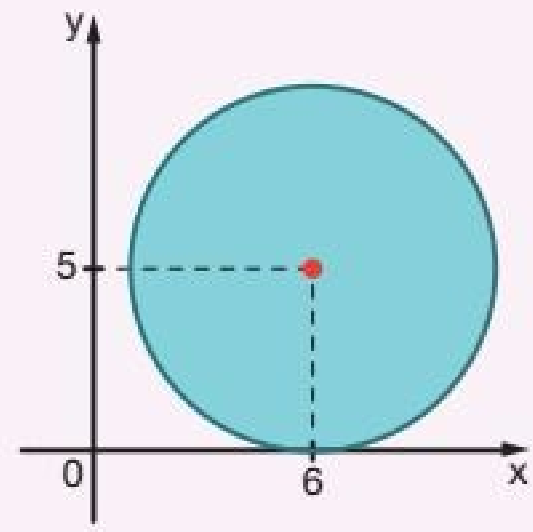
R6. Represente graficamente a solução do sistema de inequações $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2>4\\(x-6)^2+(y-5)^2\leqslant 25\end{cases}$.

Resolução

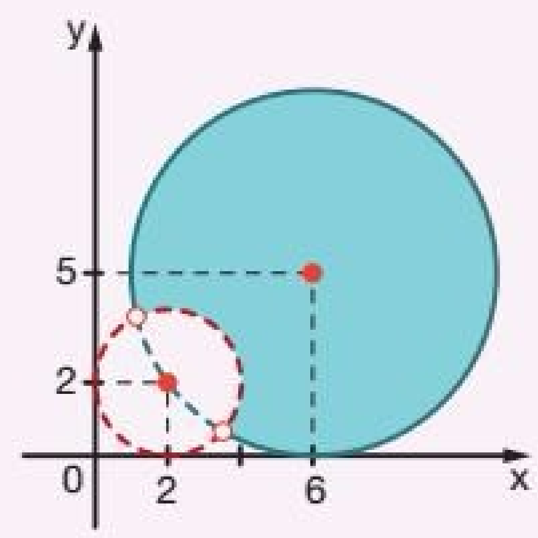
A solução da 1ª inequação corresponde à região do plano exterior à circunferência de centro $(2,2)$ e raio de medida 2.



A solução da 2ª inequação corresponde à região do plano interior ou pertencente à circunferência de centro $(6,5)$ e raio de medida 5.



Portanto, representamos a solução do sistema pela interseção das regiões determinadas pelas duas inequações.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que os pontos pertencentes à circunferência de menor raio não são soluções da inequação $(x-2)^2+(y-2)^2>4$; logo, não são soluções do sistema $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2>4\\(x-6)^2+(y-5)^2\leqslant 25\end{cases}$.

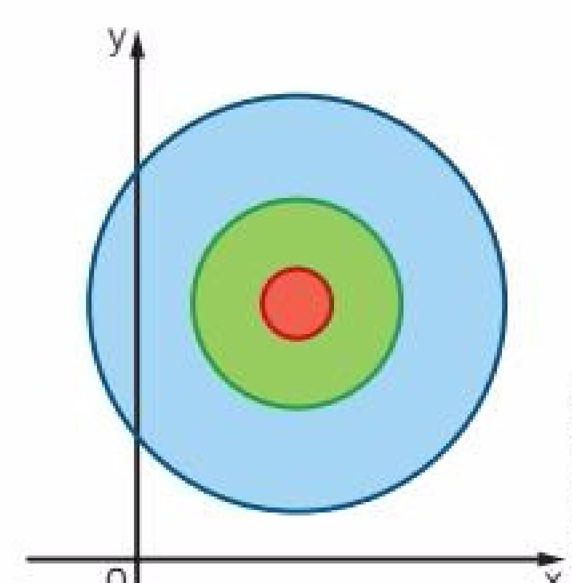
Atividades

Anote as respostas no caderno.

16. Determine a posição relativa entre a circunferência descrita pela equação $x^2-4x+y^2=0$ e o ponto:

- $A(-1,0)$ externo
- $B(2,-2)$ pertencente
- $C\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ interno
- $D(0,2)$ externo

17. No plano cartesiano ao lado, está representado um alvo de dardo composto por três circunferências concêntricas de centro $C(5,8)$ e raios de medida 1, 3 e 6. Ao lançar um dardo, o competidor recebe 50 pontos se acertar na região em vermelho, 30 pontos se acertar na região em verde e 10 pontos se acertar na região em azul. Caso o competidor acerte uma das circunferências que limita as regiões, a pontuação recebida corresponderá à da região de maior valor limitada pela circunferência acertada. Caso não acerte o alvo, o competidor não receberá pontuação.



Acervo da editora

a) Escreva a equação correspondente a cada circunferência que compõe o alvo no plano cartesiano. vermelha: $(x-5)^2+(y-8)^2=1$; verde: $(x-5)^2+(y-8)^2=9$; azul: $(x-5)^2+(y-8)^2=36$

b) Determine a pontuação recebida por um competidor ao acertar um dardo no ponto de coordenadas:

- $(5,6)$ 30 pontos
- $\left(\dfrac{1}{2},7\right)$ 10 pontos
- $(8,8)$ 30 pontos
- $\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{15}{2}\right)$ 50 pontos

c) No lançamento de quatro dardos, um competidor acertou nos pontos $A(0,11)$, $B(5,5)$, $C(3,7)$ e $D(4,2)$. Qual foi a pontuação total obtida por esse competidor? 70 pontos

d) No lançamento de três dardos, um competidor obteve 90 pontos. Quais as coordenadas dos três pontos que ele acertou no alvo? Uma possível resposta: $A(6,3)$, $B(4,10)$ e $C(5,8)$.

18. Verifique quais dos pontos a seguir pertencem ao círculo limitado pela circunferência de raio de medida 3 e centro $C(-1,4)$. *Q; R; T*

- $P(0,0)$
- $Q(1,5)$
- $R(-3,2)$
- $S(-4,1)$
- $T(-2,4)$

Capítulo 3

19. b) pontos internos: *B* e *G*; pontos externos: *D* e *F*; pontos pertencentes: *A* e *E*

19. Calcule a distância entre cada ponto indicado e o centro *C* da circunferência $\lambda: x^2+y^2+4x+2y-20=0$.

- $A(-5, 3)$ 5
- $D(-4, 4)$ $\sqrt{29}$
- $F(0, -6)$ $\sqrt{29}$
- $B(1, 2)$ $3\sqrt{2}$
- $E(3, -1)$ 5
- $G(2, -3)$ $2\sqrt{5}$

a) A medida de $\overline{CA}$ é maior, menor ou igual à do raio da circunferência? E a medida de $\overline{CB}$? igual; menor

b) Determine a posição relativa entre cada ponto indicado e a circunferência λ.

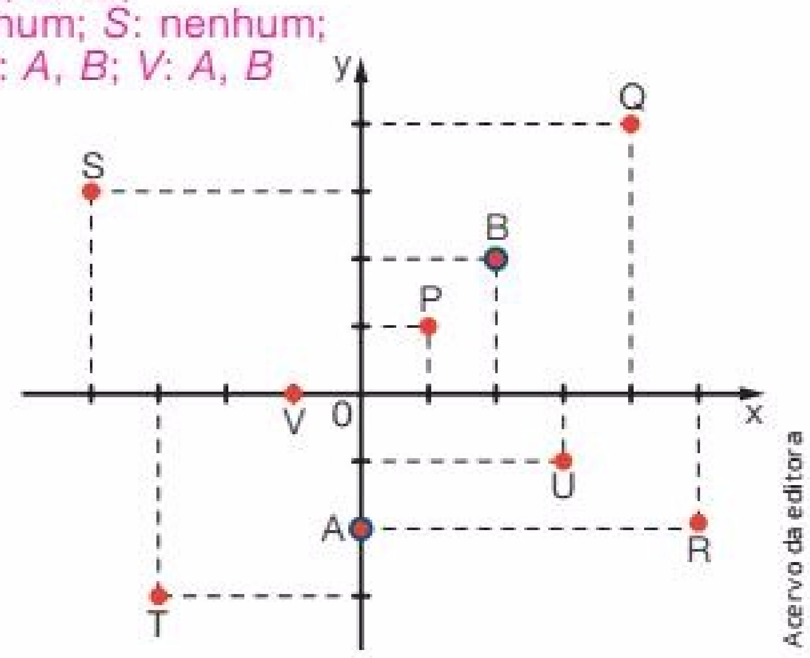
c) É possível determinar a posição relativa entre um ponto *P* qualquer e uma circunferência de centro *C*, sabendo apenas a medida CP e a medida do raio da circunferência? Justifique. Resposta no final do livro.

20. Verifique se o ponto $P(1, -1)$ é interno, externo ou pertencente à circunferência de equação $x^2+y^2+2y=0$. pertencente

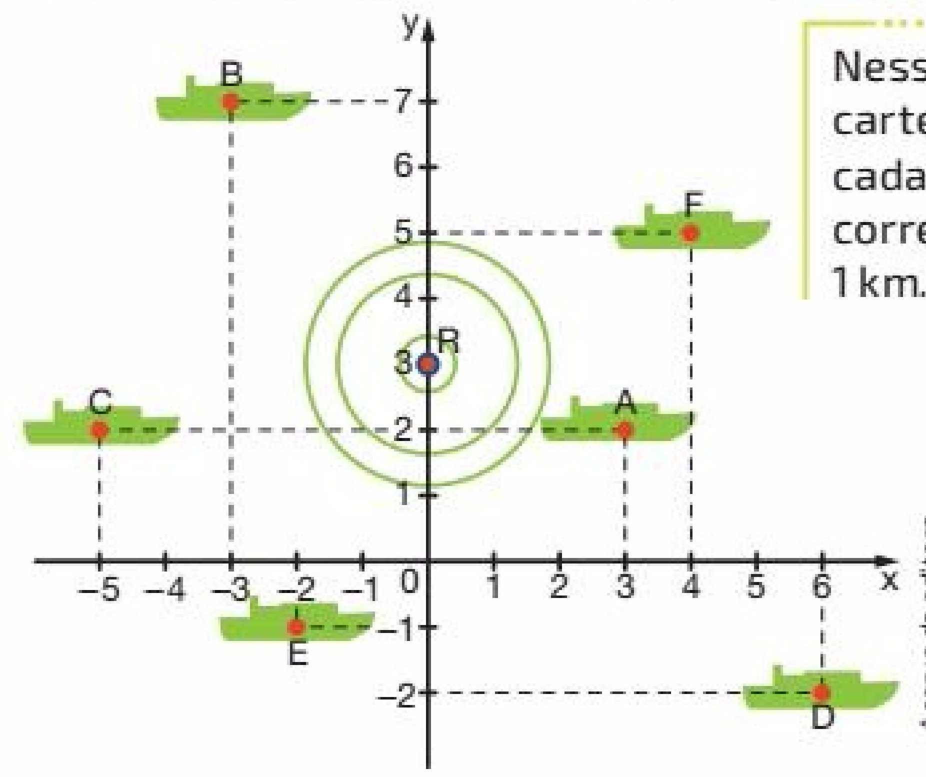
21. Determine os valores de *m* para que o ponto $P(2, m)$ seja externo à circunferência $\lambda: (x-3)^2+(y+7)^2=17$. $m \in]-\infty, -11[\cup]-3, +\infty[$

22. No plano cartesiano, os pontos *A* e *B* representam a localização de um aparelho de transmissão de internet sem fio, com raio de alcance de 60 m. Considerando que cada unidade no plano cartesiano corresponde a 15 m e que os demais pontos são computadores configurados para receber esse tipo de internet, determine de qual aparelho cada computador recebe a transmissão da internet.

P: *A*, *B*; *Q*: *B*; *R*: nenhum; *S*: nenhum; *T*: *A*; *U*: *A*, *B*; *V*: *A*, *B*



23. Os pontos em destaque no esquema representam a posição de um radar *R* e dos navios *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Sabendo que o radar detecta a presença de qualquer navio num raio de 5 km, quais navios são detectados por esse radar? *A*; *B*; *E*; *F*



Nesse sistema cartesiano, cada unidade corresponde a 1 km.

24. Represente graficamente a solução das inequações. Respostas no final do livro.

a) $(x+2)^2+(y+5)^2<16$

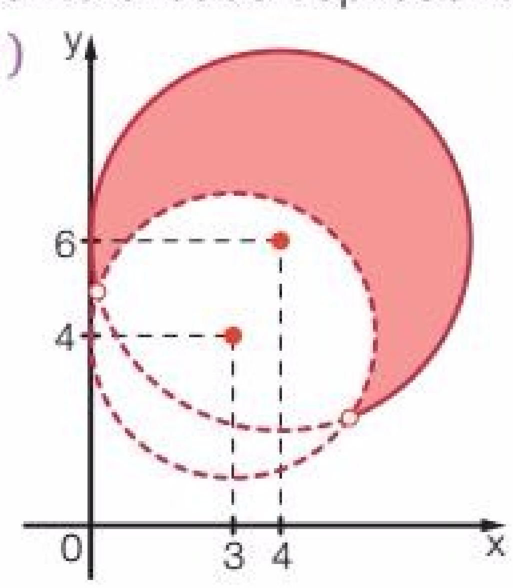
b) $x^2+(y-7)^2 \leqslant 1$

c) $x^2-2x+y^2+4y+1 \geqslant 0$

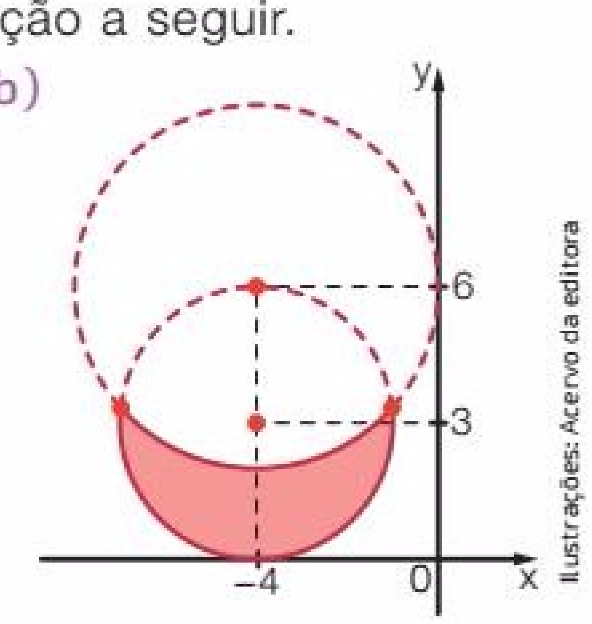
d) $x^2+y^2>25$

25. Escreva um sistema de inequações correspondente a cada representação a seguir.

a)



b)



26. Resolva graficamente os sistemas de inequações. Respostas no final do livro.

a) $\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2>9 \\ x^2+(y-2)^2 \geqslant 4 \end{cases}$

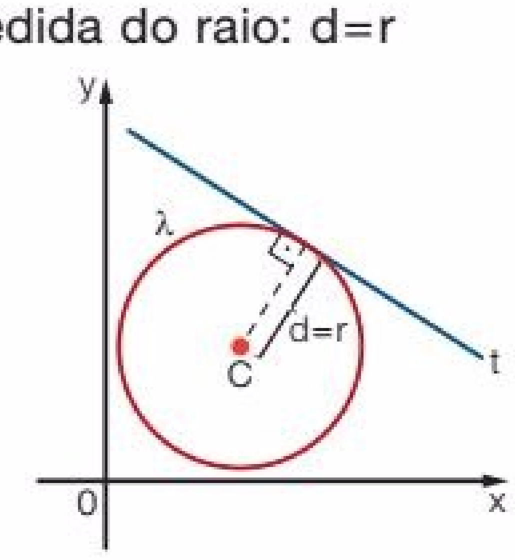
b) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2 \leqslant 49 \\ x+y<2 \\ y>x \end{cases}$

25. a) $\begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2 \leqslant 16 \\ (x-3)^2+(y-4)^2>9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+4)^2+(y-6)^2 \geqslant 16 \\ (x+4)^2+(y-3)^2 \leqslant 9 \end{cases}$

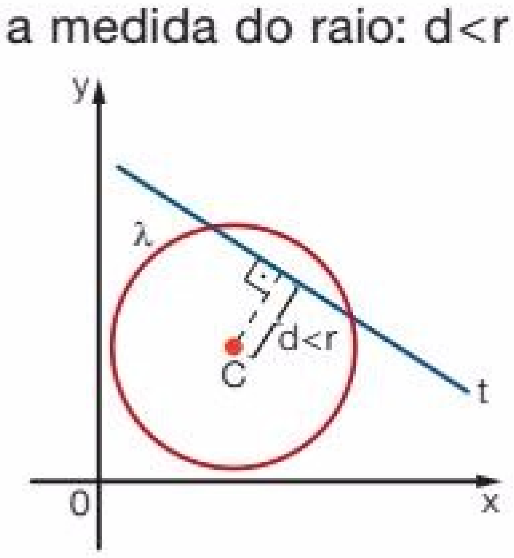
Posições relativas entre reta e circunferência

Dada uma circunferência λ, de centro *C* e raio de medida *r*, uma reta *t* pode ser tangente, secante ou externa a λ.

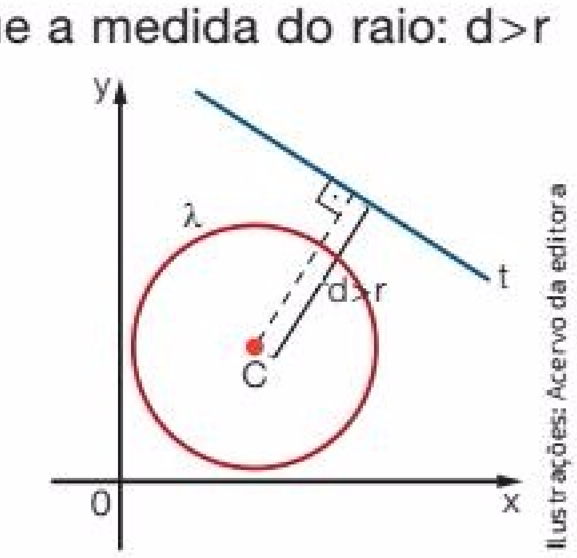
- No caso em que *t* é tangente à circunferência, a distância *d* da reta *t* ao centro de λ é igual a medida do raio: $d=r$



- No caso em que *t* é secante à circunferência, a distância *d* da reta *t* ao centro de λ é menor que a medida do raio: $d<r$



- No caso em que *t* é externa à circunferência, a distância *d* da reta *t* ao centro de λ é maior que a medida do raio: $d>r$



Atividades resolvidas

R7. Verifique a posição relativa entre a circunferência $\lambda: (x-3)^2+(y-1)^2=9$ e as retas s: $\frac{4}{3}x-y+2=0$, t: $-x+y+2=0$ e u: $3x+4y+7=0$.

Resolução

Temos que λ é uma circunferência de centro $O(3,1)$ e raio de medida $r=\sqrt{9}=3$. Logo:

- distância entre o centro de λ e a reta *s*:

$$d=\frac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|\frac{4}{3}\cdot 3+(-1)\cdot 1+2\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{|4-1+2|}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=\frac{5}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{5}{\frac{5}{3}}=3$$

Caso os alunos tenham alguma dúvida no cálculo da distância entre um ponto (centro da circunferência) e uma reta, retome esse assunto, estudado no capítulo 2 deste volume.

Como $d=r$, temos que *s* é tangente à circunferência λ.

- distância entre o centro de λ e a reta *t*:

$$d=\frac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(-1)\cdot 3+1\cdot 1+2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{|-3+1+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$$

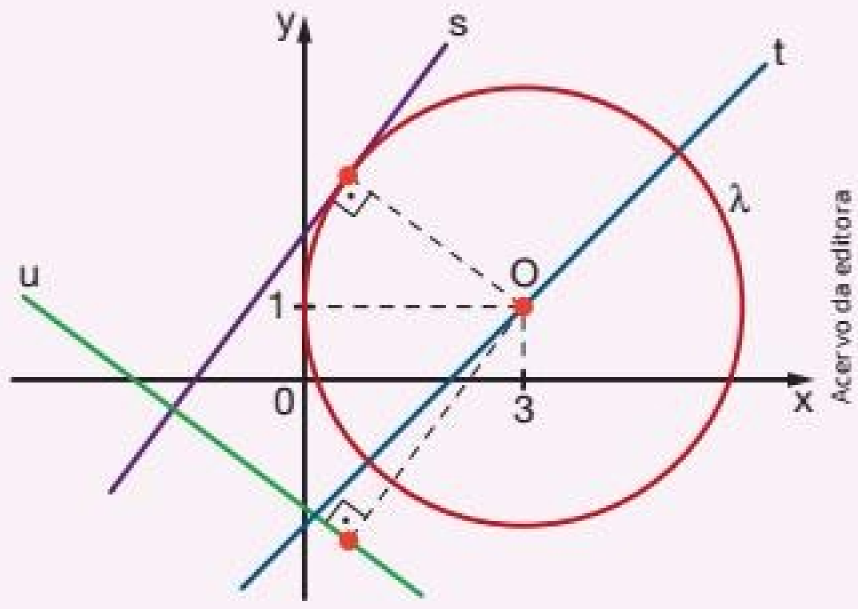
Note que a reta *t* passa pelo centro da circunferência, pois $d=0$.

Como $d<r$, temos que *t* é secante à circunferência λ.

- distância entre o centro de λ e a reta *u*:

$$d=\frac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|9+4+7|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4$$

Como $d>r$, temos que *u* é externa à circunferência λ.



R8. Determine o valor de *k*, com $k>0$, de maneira que a reta de equação $r: -kx+y=0$ seja tangente à circunferência $\gamma: x^2+y^2-6y+5=0$.

Resolução

Podemos obter o valor de *k* calculando a distância entre o centro da circunferência e a reta.

Utilizando o método do completamento de quadrados, temos:

$$x^2+y^2-6y+5=0 \Rightarrow x^2+y^2-6y+5=9-9 \Rightarrow x^2+\overbrace{y^2-6y+9}^{(y-3)^2}=9-5 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=2^2$$

Logo, a equação descreve uma circunferência de centro $O(0,3)$ e raio de medida 2. Como a reta é tangente à circunferência, temos que a distância entre o centro da circunferência e a reta é igual à medida do raio, ou seja:

$$d=\frac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow 2=\frac{|(-k)\cdot 0+1\cdot 3+0|}{\sqrt{(-k)^2+1^2}} \Rightarrow 2=\frac{|0+3+0|}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow 2\sqrt{k^2+1}=3 \Rightarrow$$

Lembre-se de que $k>0$.

$$\Rightarrow 2^2(k^2+1)=3^2 \Rightarrow k^2+1=\frac{9}{4} \Rightarrow k^2=\frac{5}{4} \Rightarrow k=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Também é possível obter o valor de *k* resolvendo o sistema formado pelas equações da reta e da circunferência.

R9. Dada a circunferência $\lambda: (x-4)^2+(y-3)^2=32$, determine as equações das retas tangentes a λ e que passam pelo ponto:

a) $P(8,7)$ b) $Q(-2,1)$

Resolução

Temos que λ é uma circunferência de centro $O(4,3)$ e raio de medida $r=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

a) O ponto $P(8,7)$ pertence à circunferência, pois:

$$(8-4)^2+(7-3)^2=4^2+4^2=32=r^2$$

Como a reta é tangente a λ e *P* pertence a λ, então ela é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$. Logo:

$$m_{\overleftrightarrow{OP}}=\frac{y_P-y_O}{x_P-x_O}=\frac{7-3}{8-4}=1$$

Segue que:

$$m=-\frac{1}{m_{\overleftrightarrow{OP}}}=-\frac{1}{1}=-1$$

Lembre-se de que se duas retas *r* e *s* são perpendiculares, então $m_r=-\frac{1}{m_s}$.

Portanto, a equação da reta tangente a λ no ponto $P(8,7)$ é dada por:

$$y-y_P=m(x-x_P)\Rightarrow y-7=-1\cdot(x-8)\Rightarrow \boxed{x+y-15=0}$$

b) O ponto $Q(-2,1)$ é externo à circunferência, pois:

$$(-2-4)^2+(1-3)^2=(-6)^2+(-2)^2=40>r^2$$

Temos duas retas tangentes a λ que passam pelo ponto $Q(-2,1)$. Elas são da forma:

$$y-y_Q=m(x-x_Q)\Rightarrow y-1=m[x-(-2)]\Rightarrow y-1=mx+2m\Rightarrow mx-y+2m+1=0$$

Calculando a distância entre as retas e o centro da circunferência, temos:

$$\underset{r}{d}=\frac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow 4\sqrt{2}=\frac{|m\cdot 4+(-1)\cdot 3+2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\Rightarrow 4\sqrt{2}=\frac{|6m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade:

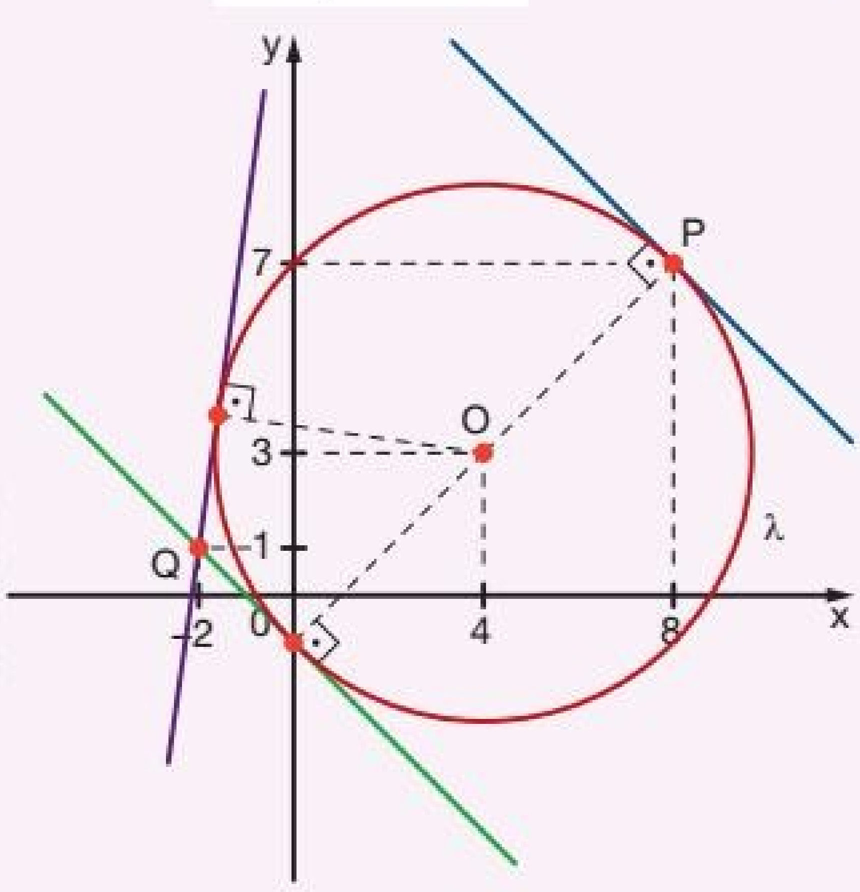
$$(4\sqrt{2})^2=\left(\frac{|6m-2|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2\Rightarrow 32=\frac{36m^2-24m+4}{m^2+1}\Rightarrow 32m^2+32=36m^2-24m+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m^2-24m-28=0\left\langle\begin{array}{l} m_1=7 \\ m_2=-1\end{array}\right.$$

Resolva com os alunos a equação $4m^2-24m-28=0$, que aparece nesta atividade.

Retornando os valores de m_1 e m_2 na equação $mx-y+2m+1=0$:

- $7x-y+2\cdot 7+1=0\Rightarrow \boxed{7x-y+15=0}$
- $-1\cdot x-y+2\cdot(-1)+1=0\Rightarrow \boxed{x+y+1=0}$



Acervo da editora

Note que:

Quando o ponto *P* pertence à circunferência, existe uma só reta tangente à circunferência passando por *P*. Já quando o ponto *P* é externo à circunferência, existem duas retas tangentes à circunferência passando por *P*.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

27. Determine a posição relativa entre as retas dadas e a circunferência $\lambda: x^2-10x+y^2+6y+29=0$.

a) $m: y=x+1$ externa
b) $s: y+2x=7$ secante
c) $t: 2y-x+6=0$ tangente
d) $u: y-x+7=0$ secante

28. Quantos são os pontos de interseção da reta $r: 2x-2y-4=0$ com a circunferência de equação $x^2+4x+y^2-2y=8$? 2 pontos

29. Escreva a equação de cada uma das retas que possuem coeficiente angular $m=-1$ e são tangentes à circunferência $\lambda: (x+5)^2+(y-2)^2=8$. $y+x+7=0$; $y+x-1=0$

30. Calcule o comprimento da corda determinada pela interseção da circunferência $\lambda: x^2+y^2+6y=0$ com a reta $s: y-x-1=0$. $2\sqrt{2}$

31. Calcule a distância entre o centro da circunferência $\lambda: (x-6)^2+(y-5)^2=225$ e a reta indicada em cada item. Em seguida, compare o resultado encontrado com a medida do raio de λ e determine se a reta é secante, tangente ou externa à circunferência λ. Respostas no final do livro.

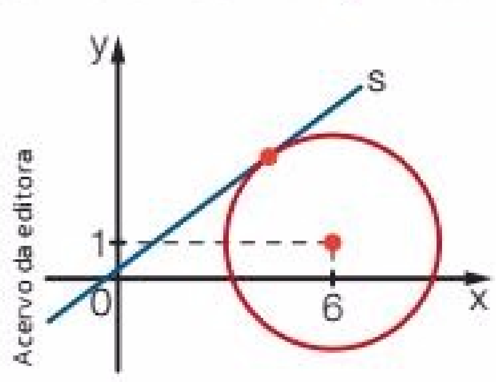
a) $r: 3x+4y+37=0$
b) $s: x-y=0$
c) $t: y+x+29=0$
d) $u: 6y-8x+11=0$

32. Considerando a reta $r: 2x+4y=12$ e a circunferência $\lambda: (x-3)^2+(y+3)^2=18$, calcule a área do triângulo determinado pelo centro de λ e pelos pontos de interseção de λ com r. * $\frac{27}{5}$ u.a.

33. Escreva a equação de cada uma das retas que passam pelo ponto $P(2, 3)$ e são tangentes à circunferência de equação $x^2+4x+y^2-6y+5=0$. $y-x-1=0$; $y+x-5=0$

34. Determine os valores de c para que a reta de equação $y=2x+c$ seja exterior à circunferência de equação $x^2+(y-3)^2=5$. $c<-2$ ou $c>8$

35. A reta $s: 3x-4y+1=0$ é tangente à circunferência de centro $C(6, 1)$. Determine a equação geral dessa circunferência. $x^2+y^2-12x-2y+28=0$



36. Em cada item, determine, caso existam, as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção entre a reta r e a circunferência λ dadas. Respostas no final do livro.

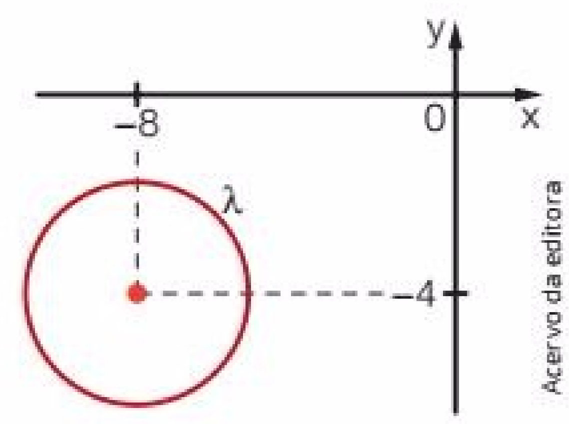
a) $\lambda: (x+1)^2+(y+1)^2=8$ e $r: y+x=2$
b) $\lambda: x^2+10x+y^2-4y+23=0$ e $r: 5x+y-3=0$
c) $\lambda: (x-5)^2+(y-8)^2=29$ e $r: x=0$
d) $\lambda: 2x^2+8x+2y^2-8y+14=0$ e $r: x-3y+5=0$

*Se necessário, lembre aos alunos como calcular a área de um triângulo conhecendo as coordenadas dos seus vértices.

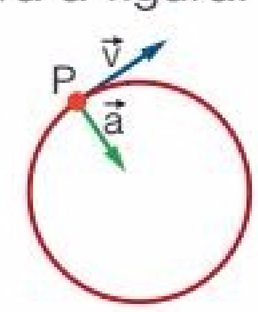
37. Considerando a reta $r: y=ax$ e a circunferência $\lambda: x^2+y^2-4y+3=0$, determine o valor de a para que r seja:

a) tangente a λ $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$
b) secante a λ $a<-\sqrt{3}$ ou $a>\sqrt{3}$
c) externa a λ $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

38. Dada a circunferência $\lambda: (x+8)^2+(y+4)^2=5$, determine as coordenadas do ponto pertencente a λ mais próximo da origem do sistema cartesiano. $(-6, -3)$



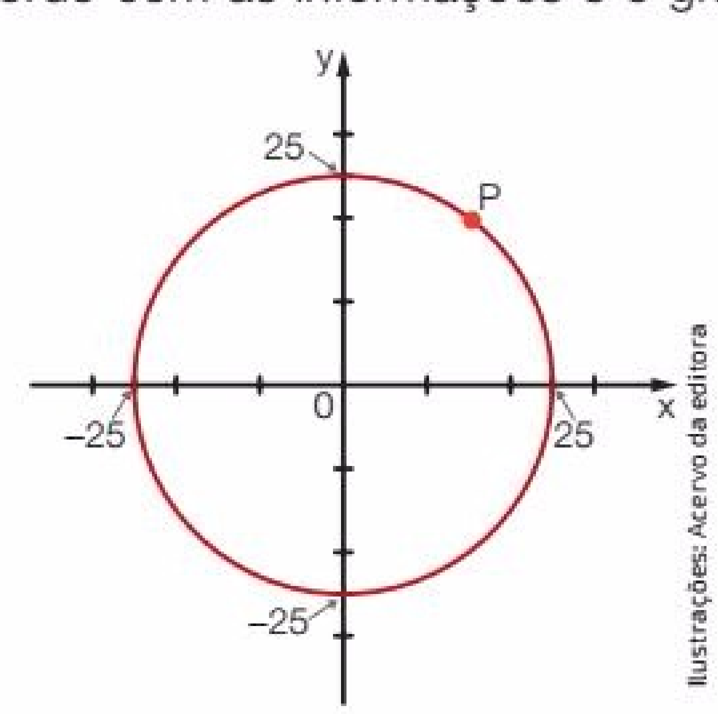
39. No deslocamento de um móvel numa trajetória circular, a aceleração $(\vec{a})$, denominada aceleração centrípeta, está voltada para o centro da circunferência, e a velocidade $(\vec{v})$ é sempre tangente à circunferência, isto é, se o móvel sair da trajetória circular no ponto P, ele continuará seu deslocamento na direção da velocidade, conforme mostra a figura.



Trajetória de uma partícula no sentido horário.

A aceleração centrípeta pode ser determinada pela fórmula $a=\frac{v^2}{r}$, em que v é a velocidade em metros por segundo e r é a medida do raio, em metros, da circunferência que descreve a trajetória.

De acordo com as informações e o gráfico:



a) determine a equação que descreve a trajetória do móvel P; $x^2+y^2-625=0$
b) se P se desloca a uma velocidade de 45 km/h, calcule a aceleração centrípeta do móvel; $a=6{,}25\ m/s^2$
c) escreva a equação da reta-suporte que indica a direção do movimento se P sair da trajetória circular no ponto $(-15, 20)$. $4y-3x-125=0$

Posições relativas entre duas circunferências

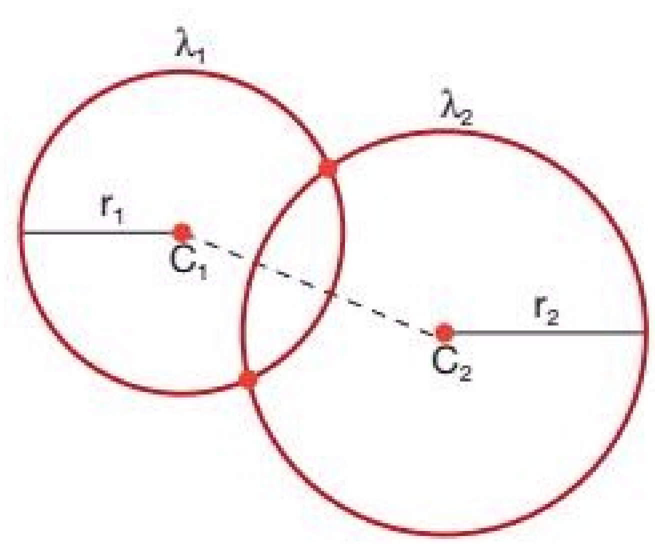
As características próprias e até mesmo seu aspecto visual tornaram a circunferência muito utilizada por artistas plásticos. Na obra ao lado, do artista russo Wassily Kandinsky (1866-1944), por exemplo, é possível observar diversas circunferências que se relacionam entre si.

Wassily Kandinsky. 1926. Óleo sobre tela, 140 x 140 cm. Museu Solomon R. Guggenheim, Nova York (EUA)

Vários círculos, de Wassily Kandinsky, 1926.

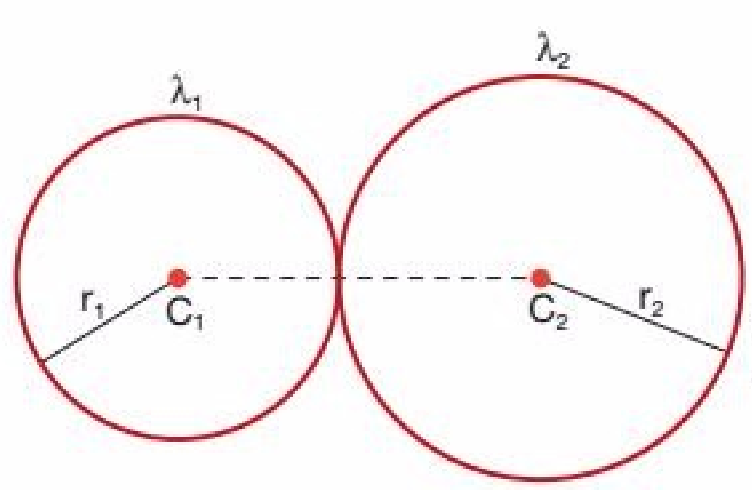
Em um mesmo plano, duas circunferências distintas, λ_1 e λ_2, com raios de medida r_1 e r_2 e centros C_1 e C_2, respectivamente, podem ter dois, um ou nenhum ponto comum. Essa análise pode ser realizada a partir da medida de seus raios e da distância entre seus centros.

- Circunferências secantes: 2 pontos comuns



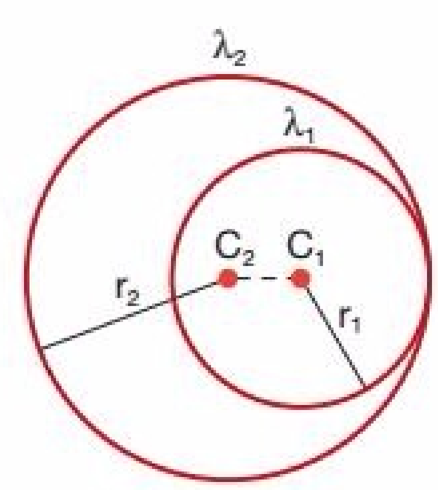
$$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$$

- Circunferências tangentes: 1 ponto comum



tangentes externas

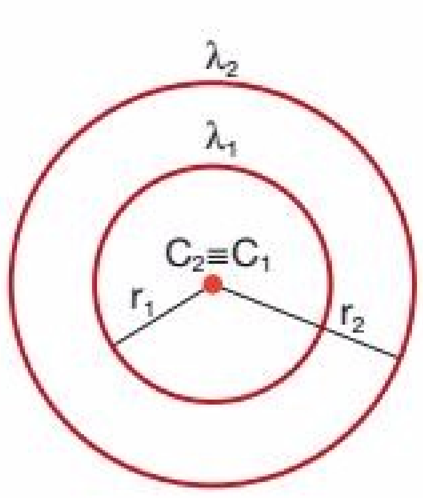
$$C_1C_2 = r_1 + r_2$$



tangentes internas

$$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$$

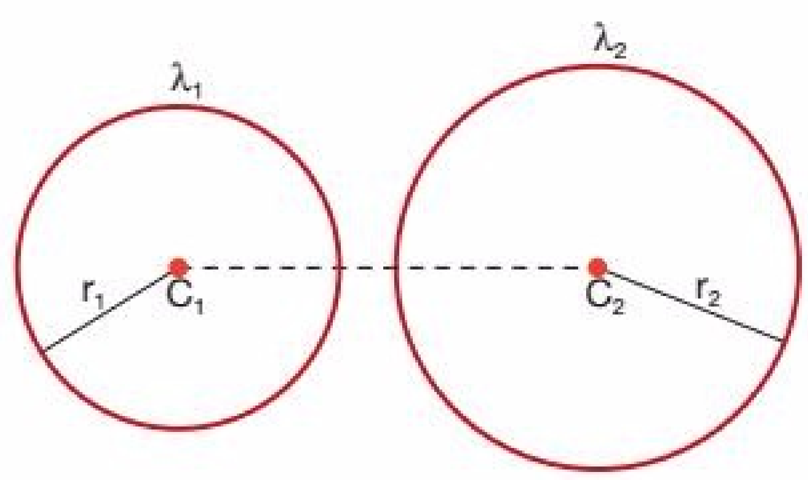
As circunferências internas que têm centros coincidentes são denominadas concêntricas.



$$C_1C_2 = 0$$

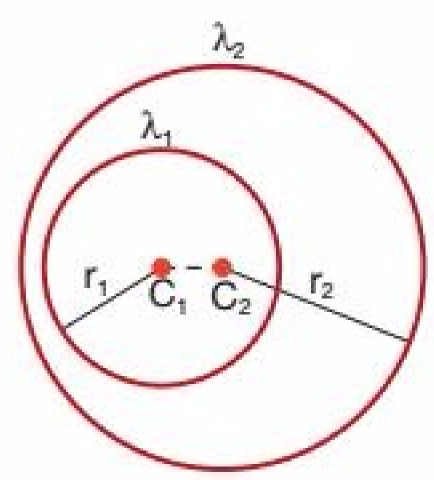
Ilustrações: Acervo da editora

- Circunferências externas ou internas: nenhum ponto comum



circunferências externas

$$C_1C_2 > r_1 + r_2$$



circunferências internas

$$C_1C_2 < |r_1 - r_2|$$

Atividades resolvidas

R10. Verifique a posição relativa entre as circunferências $\lambda_1: (x-5)^2+y^2=9$, $\lambda_2: (x-2)^2+y^2=30$ e $\lambda_3: x^2+y^2=4$, duas a duas, e determine os pontos comuns a elas, caso existam.

Resolução

- Posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_2:

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, temos:

$$\begin{cases}(x-5)^2+y^2=9\\(x-2)^2+y^2=30\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-10x+25+y^2=9 \quad \cdot(-1)\\x^2-4x+4+y^2=30\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x^2+10x-y^2=16\\x^2-4x+y^2=26\end{cases}$$

$$6x=42 \Rightarrow x=7$$

Substituindo *x* por 7 na 1ª equação:

$$(x-5)^2+y^2=9 \Rightarrow (7-5)^2+y^2=9 \Rightarrow 4+y^2=9 \Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$$

Como os pontos $(7, \sqrt{5})$ e $(7, -\sqrt{5})$ são soluções do sistema, então as circunferências λ_1 e λ_2 são secantes.

- Posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_3:

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, temos:

$$\begin{cases}(x-5)^2+y^2=9\\x^2+y^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-10x+25+y^2=9 \quad \cdot(-1)\\x^2+y^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x^2-y^2+10x=16\\x^2+y^2=4\end{cases}$$

$$10x=20 \Rightarrow x=2$$

Substituindo *x* por 2 na 2ª equação:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow 2^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0$$

Como o ponto $(2, 0)$ é a única solução do sistema, então as circunferências λ_1 e λ_3 são tangentes. Calculando a distância entre seus centros, temos:

$$C_1C_3=\sqrt{(0-5)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25+0}=5$$

Note que $\underbrace{C_1C_3}_{5}=\underbrace{r_1}_{3}+\underbrace{r_3}_{2}$; logo, as circunferências são tangentes externas.

- Posição relativa entre as circunferências λ_2 e λ_3:

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, temos:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=30\\x^2+y^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-4x+4+y^2=30 \quad \cdot(-1)\\x^2+y^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x^2-y^2+4x=-26\\x^2+y^2=4\end{cases}$$

$$4x=-22 \Rightarrow x=-\frac{11}{2}$$

Substituindo *x* por $-\frac{11}{2}$ na 2ª equação:

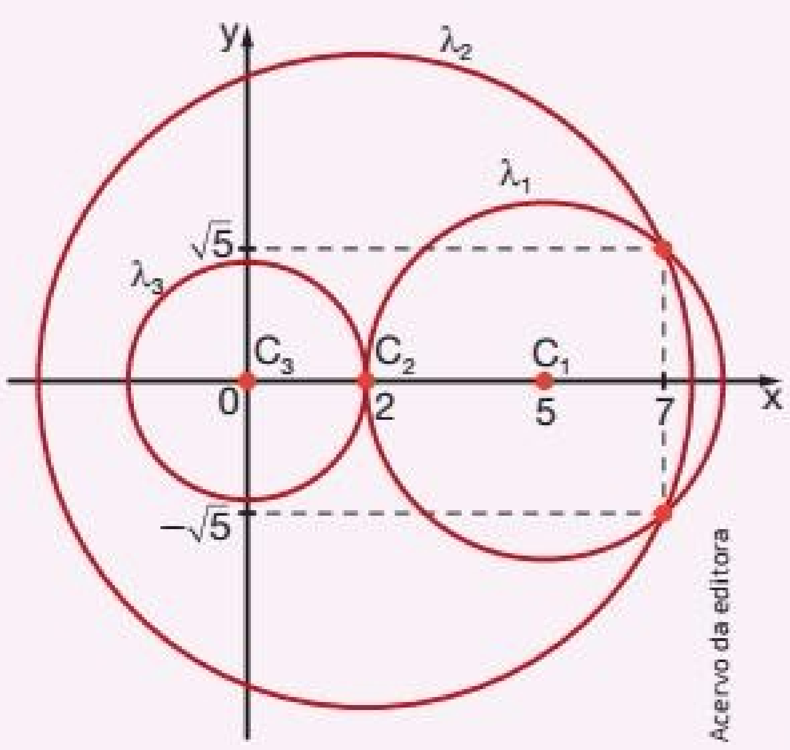
$$x^2+y^2=4 \Rightarrow \left(-\frac{11}{2}\right)^2+y^2=4 \Rightarrow \frac{121}{4}+y^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=-\frac{105}{4} \quad \text{(impossível em } \mathbb{R}\text{)}$$

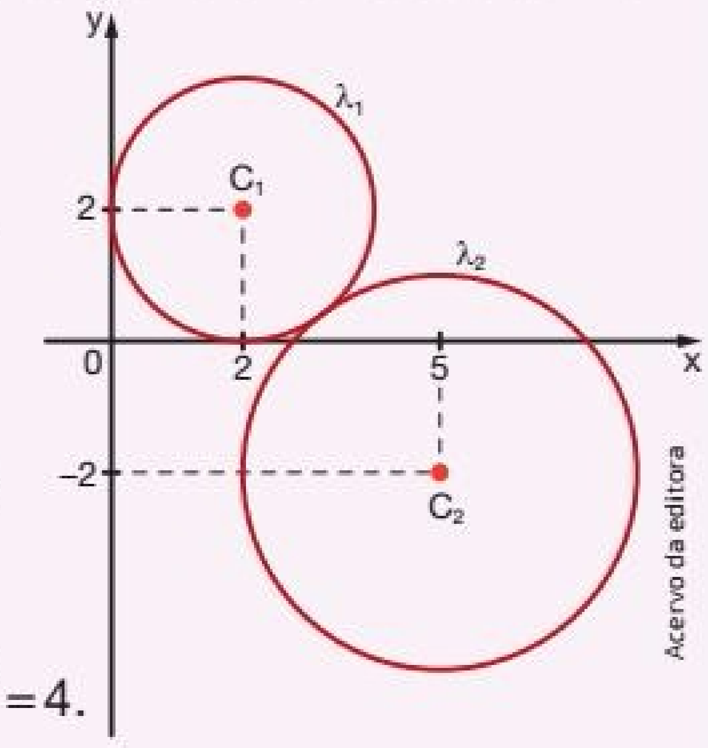
Como o sistema não possui solução, então as circunferências λ_2 e λ_3 não possuem ponto em comum. Calculando a distância entre seus centros, temos:

$$C_2C_3=\sqrt{(0-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4+0}=2$$

Note que $\underbrace{C_2C_3}_{2}<\underbrace{|r_2-r_3|}_{\sqrt{30}-2}$; logo, as circunferências são internas.



R11. Determine a equação da circunferência λ_1, de centro $C_1(2,2)$, tangente externa à circunferência $\lambda_2: (x-5)^2+(y+2)^2=9$.



Resolução

Calculando a distância entre os centros das circunferências, temos:

$$C_1C_2=\sqrt{(5-2)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

Como as circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes externas, temos que:

$$C_1C_2=r_1+r_2 \Rightarrow 5=r_1+3 \Rightarrow r_1=2$$

Portanto, a equação da circunferência λ_1 é $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

40. Determine a posição relativa entre a circunferência $\lambda: (x-3)^2+(y+5)^2=36$ e a circunferência de equação:

a) $x^2-4x+y^2+10y+4=0$ tangentes internas

b) $x^2-8x+y^2+6y+24=0$ internas

c) $x^2+y^2+4y=0$ secantes

d) $x^2+10x+y^2-2y+17=0$ externas

41. Determine a equação geral da circunferência de raio de medida 3 e concêntrica à circunferência de equação $x^2+10x+y^2=0$. $x^2+y^2+10x+16=0$

42. Uma circunferência tangente externa à circunferência apresentada no plano cartesiano pode ser representada pela equação: b

a) $(x-3)^2+(y+4)^2=16$

b) $(x+2)^2+(y-8)^2=36$

c) $(x+1)^2+(y-2)^2=12$

d) $(x+4)^2+(y-3)^2=20$

43. Qual é a posição relativa entre as circunferências de equações $x^2+y^2-16x+10y-49=0$ e $(x-8)^2+(y+5)^2=49$? concêntricas

44. Em cada item, determine as coordenadas dos pontos de interseção das circunferências, caso existam.

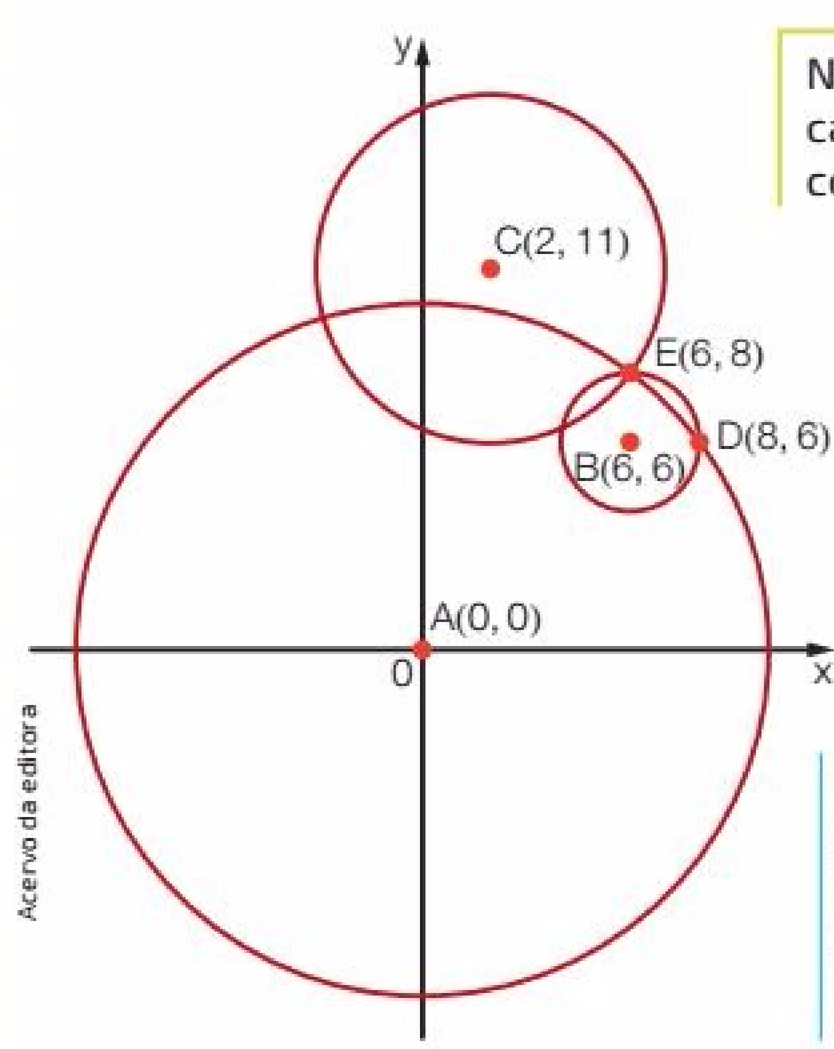
a) $\lambda_1: (x+5)^2+(y+2)^2=16$ e
$\lambda_2: (x+2)^2+(y-1)^2=10$ $(-5,2)$ e $(-1,-2)$

b) $\lambda_1: (x-4)^2+(y-4)^2=9$ e
$\lambda_2: x^2-10x+y^2-8y+37=0$ $(7,4)$

c) $\lambda_1: x^2+y^2-y-20=0$ e
$\lambda_2: x^2+y^2-7=0$ não possuem pontos de interseção

45. Determine a equação da circunferência λ_1, de centro $C_1(-7,-4)$, tangente interna à circunferência $\lambda_2: (x+5)^2+(y+4)^2=25$. $\lambda_1: (x+7)^2+(y+4)^2=9$

46. Considerando a superfície da Terra como um plano cartesiano, um sismógrafo *A*, posicionado na origem, indica que o epicentro de um terremoto está localizado a uma distância de 100 km, ou seja, o epicentro desse terremoto é um ponto sobre a circunferência de centro $(0,0)$ e raio de medida 100. Um sismógrafo *B*, localizado no ponto $(6,6)$, observa que esse mesmo epicentro se encontra num raio de 20 km. Com essas duas informações, obtemos dois possíveis pontos de localização do epicentro, *D* e *E*. Um sismógrafo *C*, localizado no ponto de coordenadas $(2,11)$, indica que o epicentro do terremoto está a 50 km de distância. Com esse último dado, obtemos apenas um ponto, que é a interseção das três circunferências e que fornece a localização do epicentro do terremoto, nesse caso, o ponto *E*.



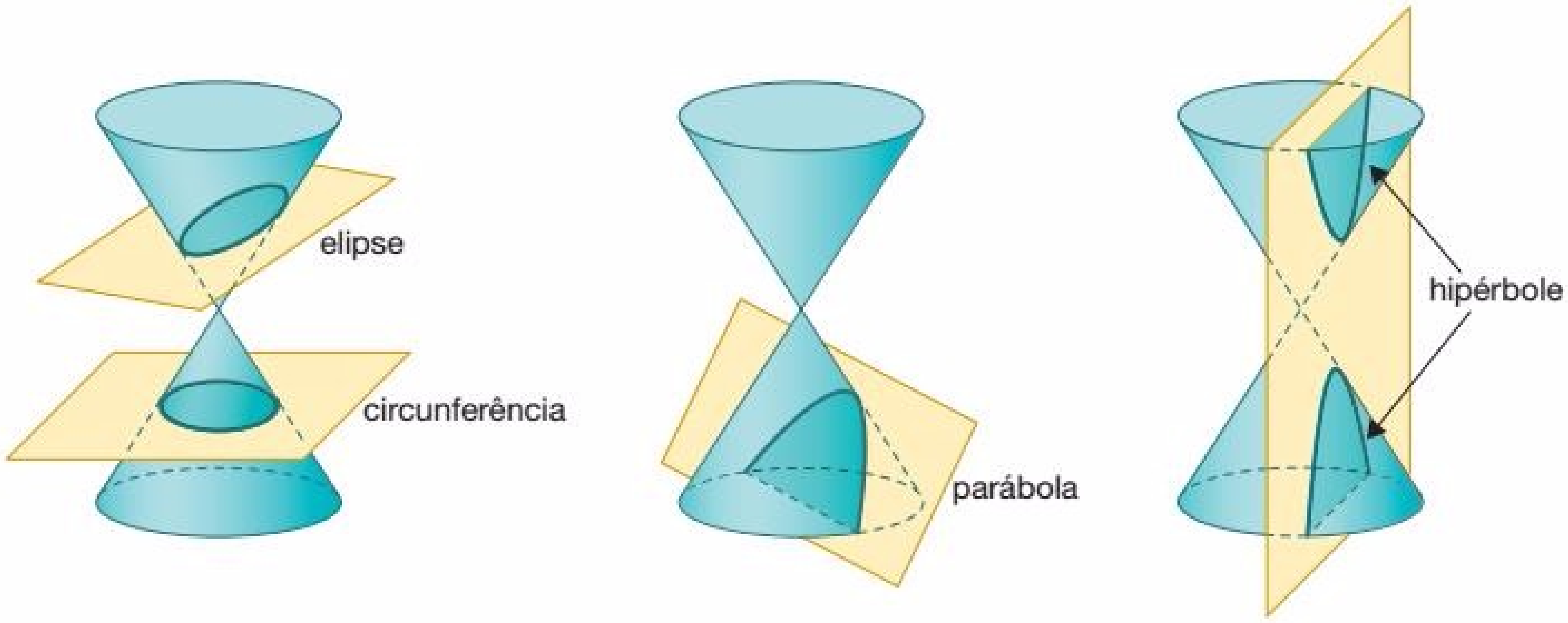
No plano cartesiano, cada unidade corresponde a 10 km.

Epicentro: ponto da superfície terrestre aonde primeiro chega o terremoto e registra-se a intensidade máxima desse movimento sísmico.

Determine a localização do epicentro de um terremoto que está a $30\sqrt{5}$ km do sismógrafo *A*, 30 km do *B* e $10\sqrt{26}$ km do *C*. $(3,6)$

Cônicas

No século III a.C., podemos destacar três grandes matemáticos: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Embora menos famoso que os dois primeiros, Apolônio, que nasceu por volta de 262 a.C., em Perga, no sul da Ásia Menor, realizou diversas contribuições à Matemática. Em sua obra mais famosa, **Seções cônicas**, Apolônio estuda detalhadamente essas curvas, superando os tratados escritos anteriormente relacionados a esse assunto. Nessa obra, as cônicas são obtidas a partir de seções da superfície de um cone duplo. Observe:

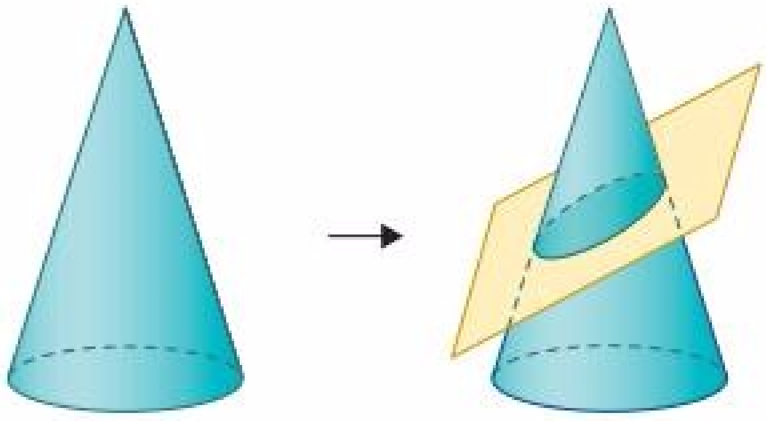


Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos na Matemática por Apolônio, baseados em termos utilizados pelos pitagóricos para designar outros elementos matemáticos.

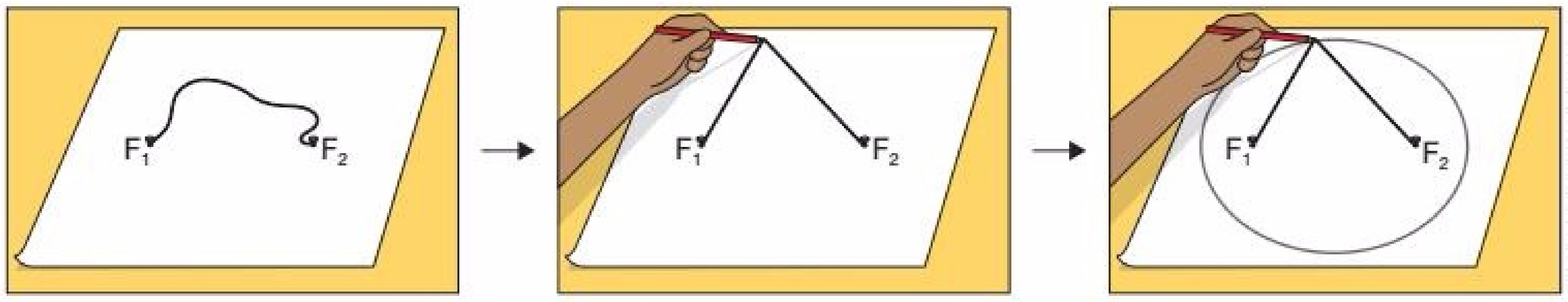
Neste tópico, estudaremos as seções cônicas no plano cartesiano e as equações que as representam.

Elipse

Considere a superfície de um cone e um plano que o secione não paralelamente à sua base. Se o plano for concorrente a todas as geratrizes do cone, a seção cônica obtida será a **elipse**.



Para esboçarmos uma elipse, marcamos dois pontos sobre uma folha de papel $(F_1$ e $F_2)$ e fixamos nesses pontos as extremidades de um barbante. Com um lápis na posição indicada, traçamos a curva contínua, de maneira que o barbante permaneça constantemente esticado, obtendo-se ao final uma **elipse**.



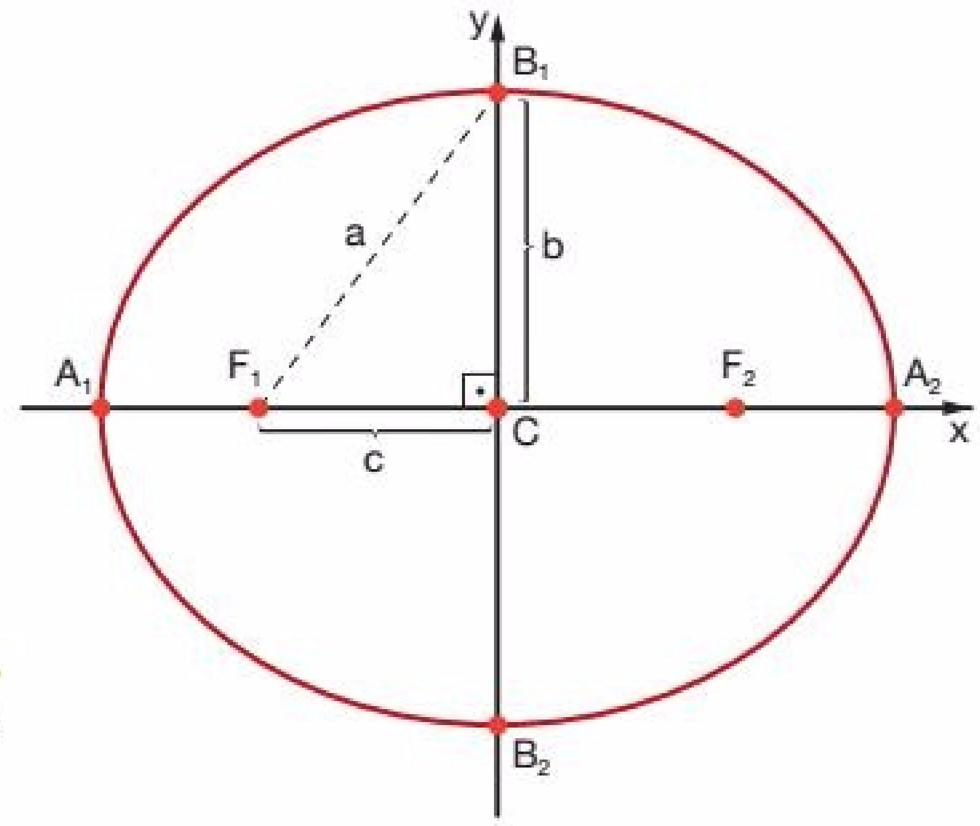
Ilustrações: Acervo da editora

Note que a soma das distâncias de F_1 e F_2 a qualquer ponto da elipse é constante. Nesse caso, igual ao comprimento do barbante.

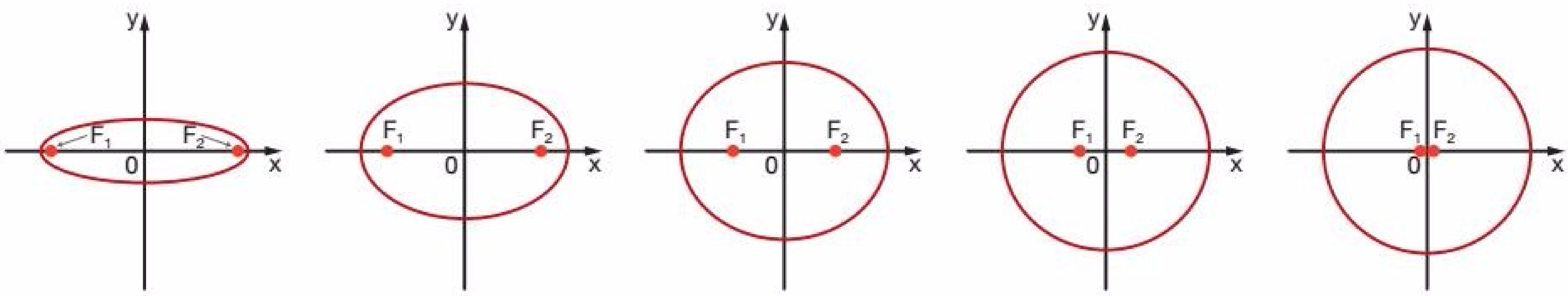
Observe a elipse e seus elementos.

- focos: F_1 e F_2
- distância focal: $F_1F_2 = 2c$
- centro: C
- eixo maior: $\overline{A_1A_2}$, com $A_1A_2 = 2a$
- eixo menor: $\overline{B_1B_2}$, com $B_1B_2 = 2b$
- excentricidade: corresponde ao número $e = \dfrac{c}{a}$, com $0 < e < 1$

> O centro C de uma elipse corresponde ao ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{F_1F_2}$ e de $\overline{B_1B_2}$.



Quanto mais próxima de 1 for a excentricidade de uma elipse, mais "achatada" ela será. Já quanto mais próxima de 0 for a excentricidade, mais ela se assemelhará a uma circunferência.



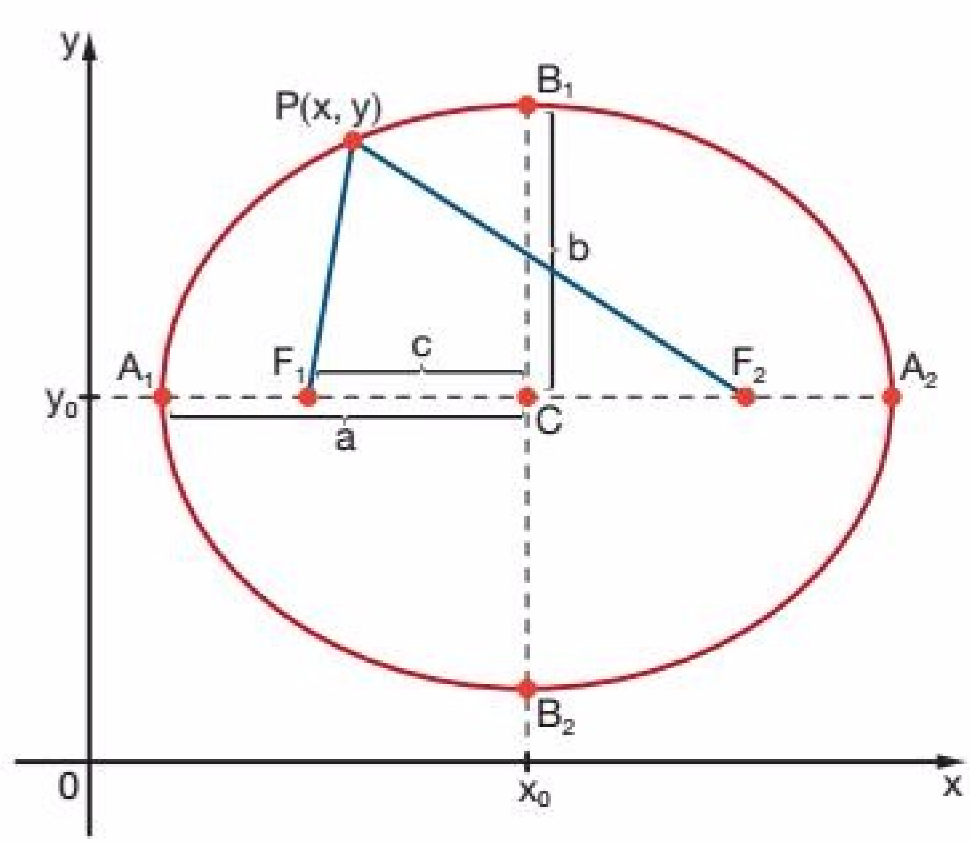
$e = 0{,}95$ $e = 0{,}75$ $e = 0{,}5$ $e = 0{,}25$ $e = 0{,}05$

Ainda de acordo com a figura, note que o triângulo CF_1B_1 é retângulo em C. Assim, a partir do Teorema de Pitágoras, podemos escrever a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

> A elipse é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos (F_1 e F_2), é constante e igual a 2a, de maneira que 2a seja maior que a distância focal 2c, ou seja, $2a > 2c$.

Para realizarmos o estudo analítico da elipse, consideramos em um plano cartesiano uma elipse com o eixo maior paralelo ao eixo x e um ponto qualquer $P(x, y)$, pertencente a ela.

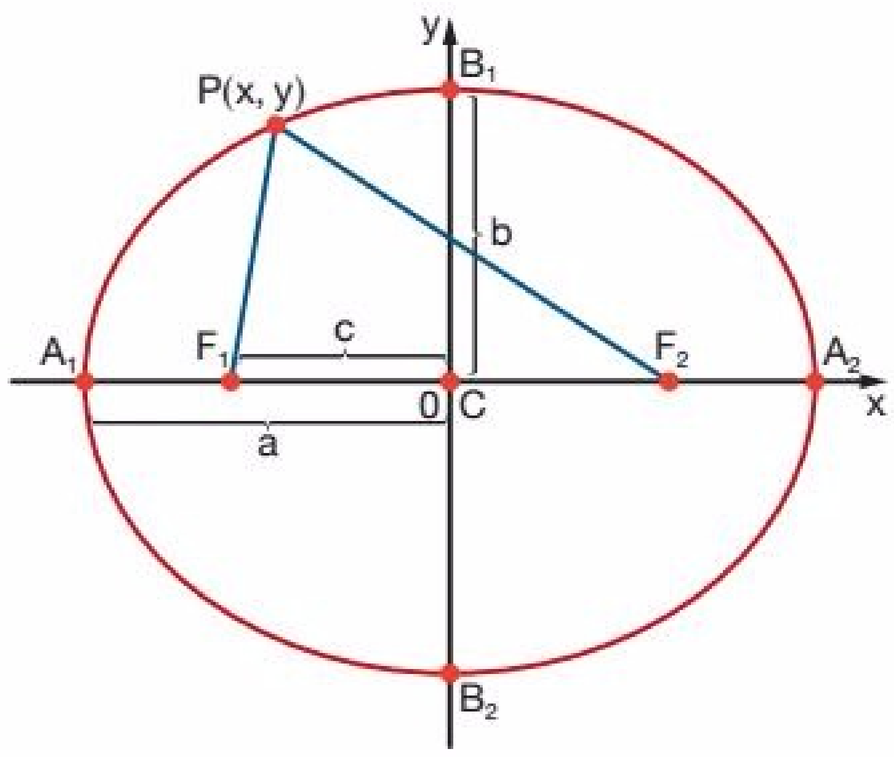


Ilustrações: Acervo da editora

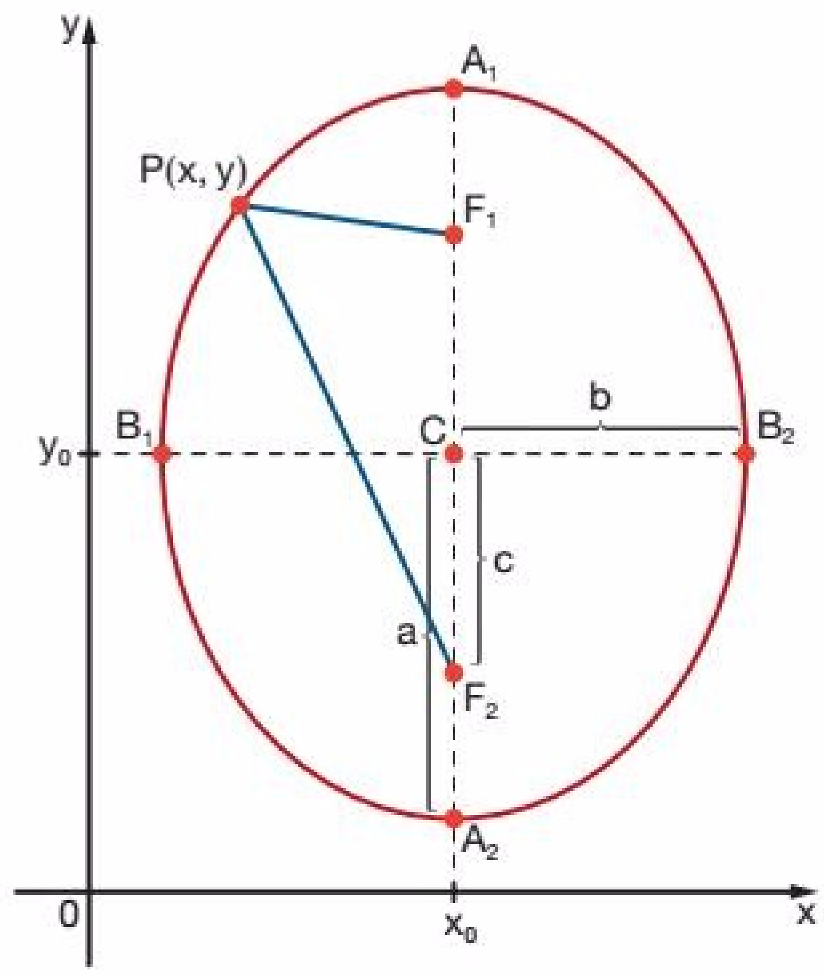
Desenvolvendo a igualdade $PF_1 + PF_2 = 2a$ e utilizando a relação $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos a equação reduzida da elipse de centro $C(x_0, y_0)$, que possui eixo maior paralelo ao eixo x:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

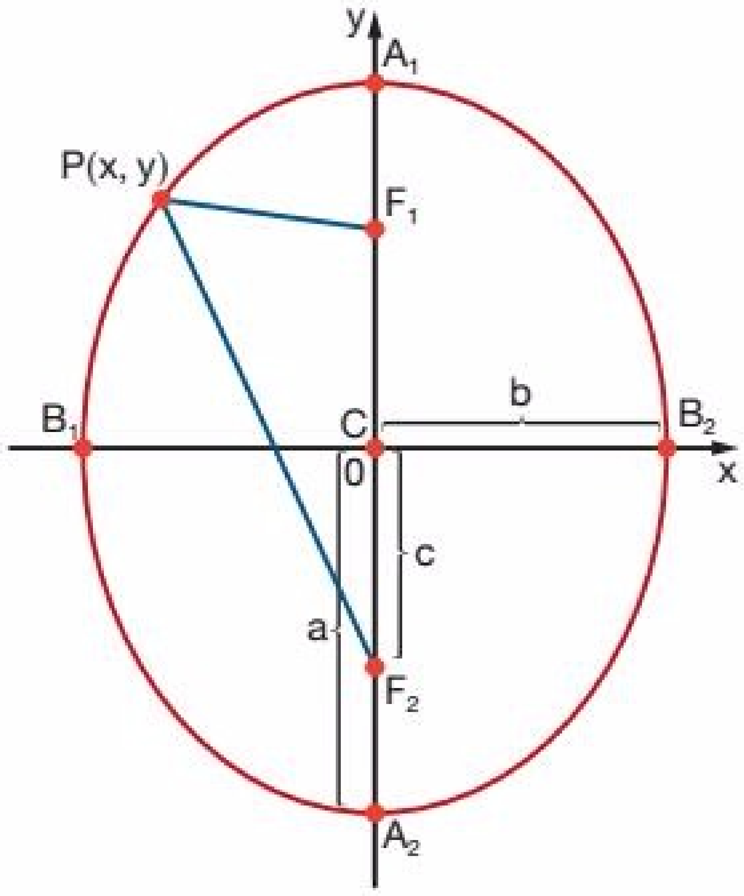
Caso o centro da elipse seja a origem $C(0, 0)$ e os focos F_1 e F_2 pertençam ao eixo *x*, a equação será dada por: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Ao considerarmos em um plano cartesiano uma elipse com o eixo maior paralelo ao eixo *y* e centro $C(x_0, y_0)$, obtemos a equação reduzida: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$.



No caso em que o centro da elipse é a origem $C(0, 0)$, e os focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo *y*, a equação será dada por: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.



Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 3

Atividades resolvidas

R12. Esboce no plano cartesiano as elipses cujas equações estão indicadas a seguir.

a) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{8}=1$

Resolução

a) Nesse caso, temos uma elipse com centro $C(-3, 1)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo *x*, pois $25>16$. Logo:

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

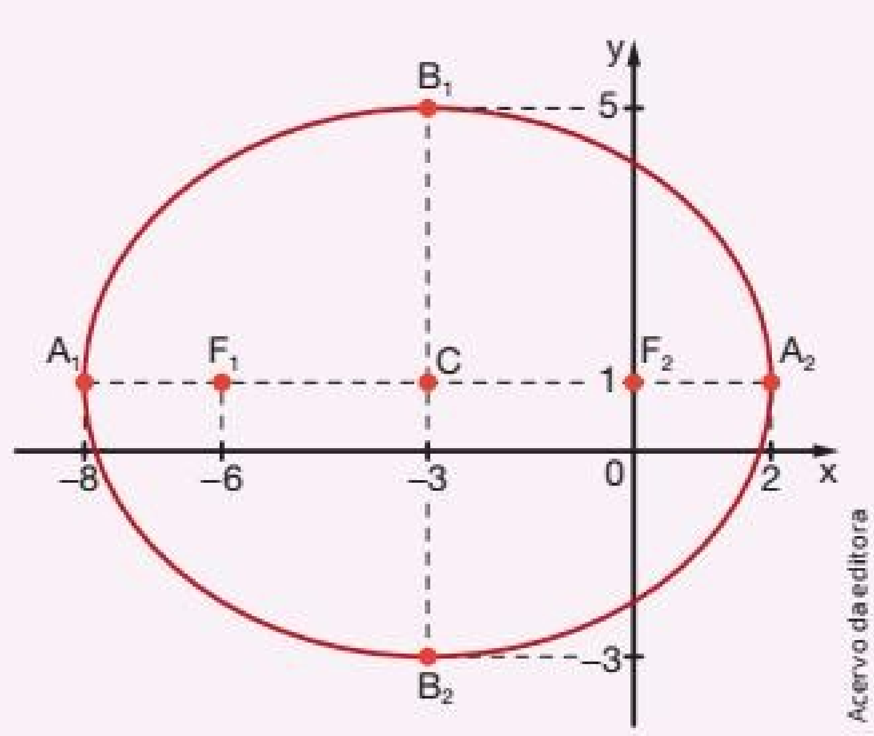
$b^2=16 \Rightarrow b=4$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=16+c^2 \Rightarrow c^2=9 \Rightarrow c=3$

Segue que:

- $F_1(x_0-c, y_0) \Rightarrow F_1(-6, 1)$
- $F_2(x_0+c, y_0) \Rightarrow F_2(0, 1)$
- $A_1(x_0-a, y_0) \Rightarrow A_1(-8, 1)$
- $A_2(x_0+a, y_0) \Rightarrow A_2(2, 1)$
- $B_1(x_0, y_0+b) \Rightarrow B_1(-3, 5)$
- $B_2(x_0, y_0-b) \Rightarrow B_2(-3, -3)$

Indicando os pontos *C*, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 em um plano cartesiano e esboçando elipse, temos:



b) Nesse caso, temos uma elipse com centro $C(1, 2)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo *y*, pois $4<8$. Logo:

$a^2=8 \Rightarrow a=2\sqrt{2}$

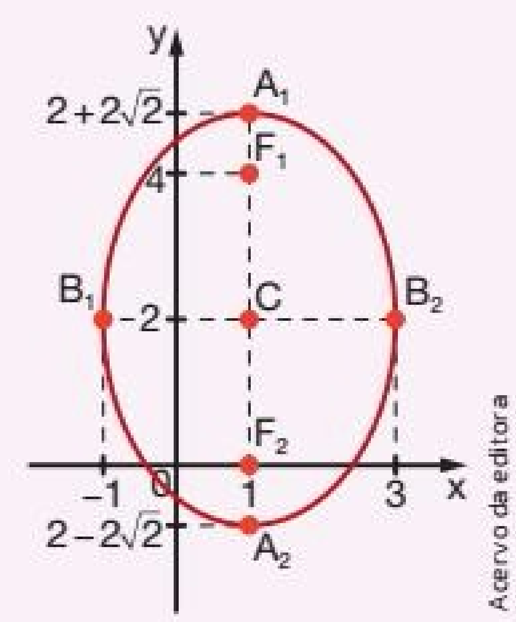
$b^2=4 \Rightarrow b=2$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 8=4+c^2 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=2$

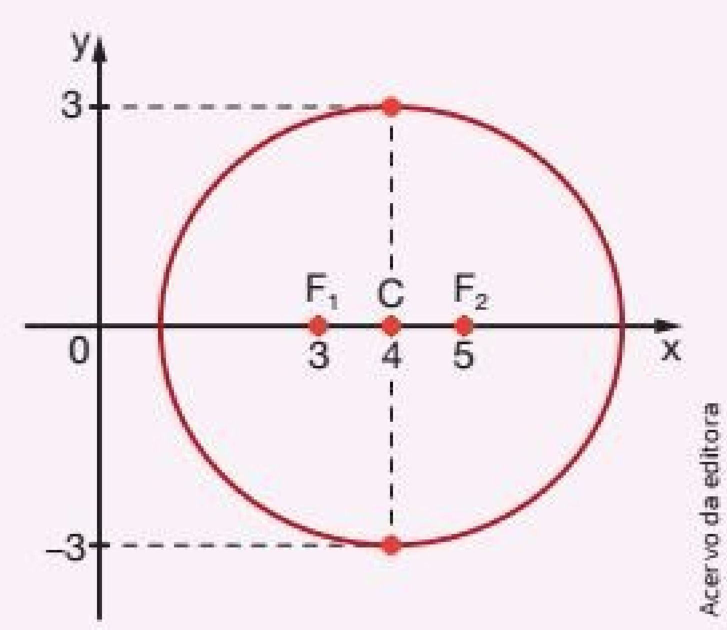
Segue que:

- $F_1(x_0, y_0+c) \Rightarrow F_1(1, 4)$
- $F_2(x_0, y_0-c) \Rightarrow F_2(1, 0)$
- $A_1(x_0, y_0+a) \Rightarrow A_1(1, 2+2\sqrt{2})$
- $A_2(x_0, y_0-a) \Rightarrow A_2(1, 2-2\sqrt{2})$
- $B_1(x_0-b, y_0) \Rightarrow B_1(-1, 2)$
- $B_2(x_0+b, y_0) \Rightarrow B_2(3, 2)$

Indicando os pontos *C*, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 em um plano cartesiano e esboçando, temos:



R13. Determine a equação da elipse indicada no plano cartesiano.



Resolução

Temos que o eixo maior da elipse está sobre o eixo *x*, tal que $c=1$ e $b=3$. Logo:

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=3^2+1^2 \Rightarrow a^2=9+1 \Rightarrow a^2=10$

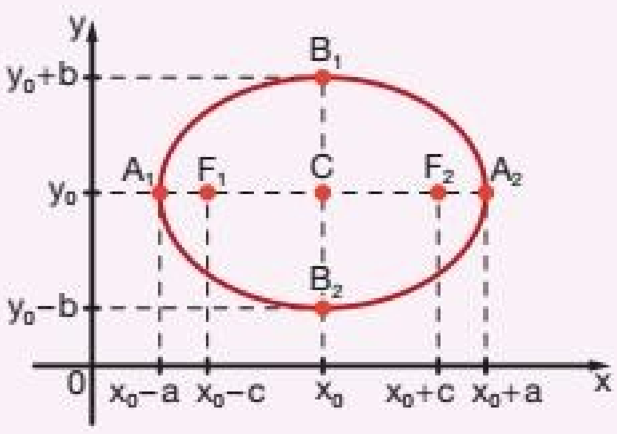
Como a elipse possui centro em $(4, 0)$ e o eixo maior está sobre o eixo *x*, a equação é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{(x-4)^2}{10}+\frac{y^2}{9}=1}$$

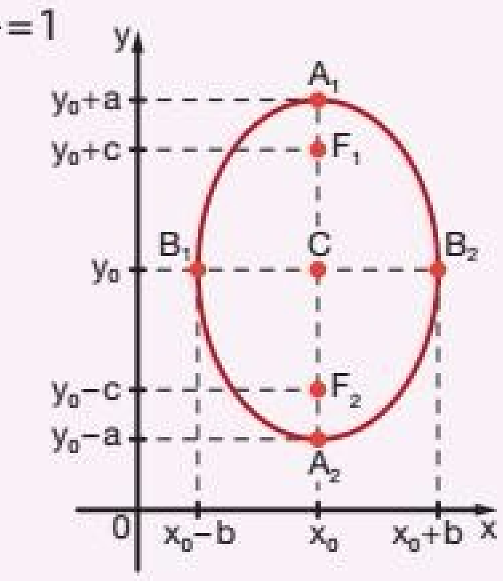
Qual é a excentricidade dessa elipse? $e=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Note que:

- Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo x, temos:
  - $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
  - $F_1(x_0-c,\ y_0)$
  - $F_2(x_0+c,\ y_0)$
  - $A_1(x_0-a,\ y_0)$
  - $A_2(x_0+a,\ y_0)$
  - $B_1(x_0,\ y_0+b)$
  - $B_2(x_0,\ y_0-b)$



- Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo y, temos:
  - $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$
  - $F_1(x_0,\ y_0+c)$
  - $F_2(x_0,\ y_0-c)$
  - $A_1(x_0,\ y_0+a)$
  - $A_2(x_0,\ y_0-a)$
  - $B_1(x_0-b,\ y_0)$
  - $B_2(x_0+b,\ y_0)$



Ilustrações: Acervo da editora

Uma equação do 2º grau nas incógnitas x e y representa uma elipse se for redutível à forma $\frac{(x-x_0)^2}{q_1}+\frac{(y-y_0)^2}{q_2}=1$, com $q_1>0$, $q_2>0$ e $q_1\neq q_2$.

- $q_1<q_2$, $q_1=b^2$ e $q_2=a^2$, então o eixo maior é vertical
- $q_1>q_2$, $q_1=a^2$ e $q_2=b^2$, então o eixo maior é horizontal

R14. Escreva a equação da elipse de focos $F_1(-2, 0)$ e $F_2(2, 0)$ e excentricidade $e=\frac{1}{3}$.

Resolução

Como o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ é $(0, 0)$, a elipse possui centro na origem. Como F_1 e F_2 estão sobre o eixo x, então o eixo maior é sobre o eixo x. De $F_1F_2 = 2c$, segue que:

$$\sqrt{[2-(-2)]^2+(0-0)^2}=2c \Rightarrow \sqrt{16}=2c \Rightarrow c=2$$

Utilizando as relações $e=\frac{c}{a}$ e $a^2=b^2+c^2$, calculamos a e b^2.

- $e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{a} \Rightarrow a=6$
- $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 6^2=b^2+2^2 \Rightarrow b^2=32$

Portanto, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$$

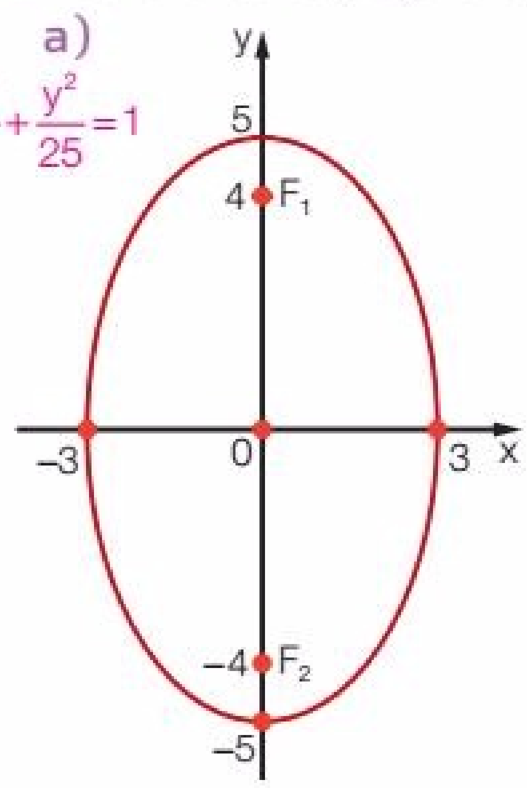
A equação da elipse também pode ser escrita como $8x^2+9y^2=288$.

Atividades

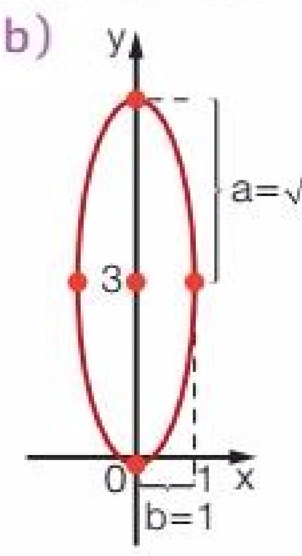
Anote as respostas no caderno.

47. Escreva a equação da elipse representada em cada item.

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

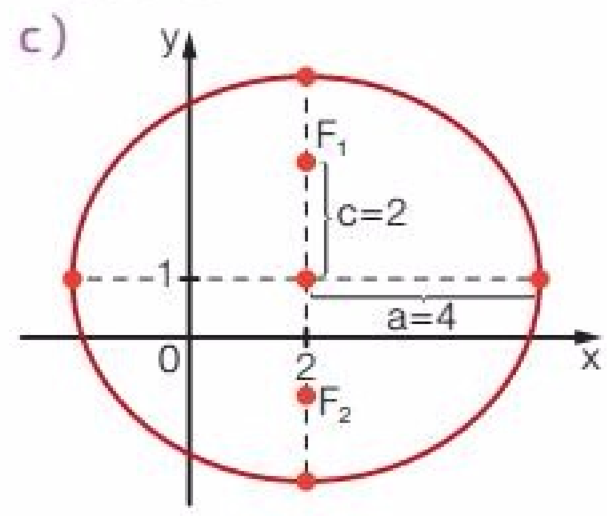


b)



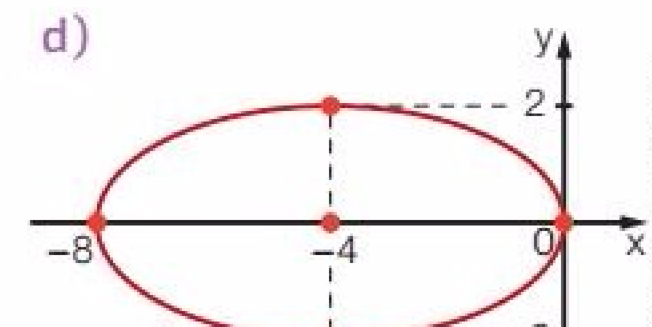
$x^2+\frac{(y-3)^2}{10}=1$

c)



$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$

d)



$\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

Ilustrações: Acervo da editora

48. Determine as coordenadas dos focos das elipses cujas equações estão indicadas.

a) $\frac{(x+4)^2}{100}+\frac{(y-6)^2}{36}=1$
$F_1(-12, 6)$ e $F_2(4, 6)$

b) $9y^2+16x^2+18y=135$
$F_1(0, -1+\sqrt{7})$ e $F_2(0, -1-\sqrt{7})$

Fonte de pesquisa: Matsuura, Oscar T. Bem-vindo Halley! **Ciência Hoje**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 21, p. 32-46, nov./dez. 1985.

49. Edmond Halley (1656-1742), astrônomo e matemático britânico, estudando as órbitas de cometas em torno do Sol e com base nas leis de Kepler e na lei da gravitação de Newton, verificou que a órbita de um cometa visto em 1682 coincidia com a órbita de cometas observados em 1531 e em 1607. Concluindo então que se tratava do mesmo astro celeste, Halley previu, para os fins de 1758, uma nova aparição do cometa, estimando assim um período de translação de aproximadamente 76 anos, ou seja, em média, a cada 76 anos ele completa uma volta em torno do Sol. O cometa correspondeu à previsão de Halley, que infelizmente não estava mais vivo para observar o espetáculo. Atualmente, esse cometa é chamado de Halley, em homenagem a seu descobridor, e suas aparições se repetiram em 1835, 1910 e em 1986.

Royal Observatory, Edinburgh/SPL/Latinstock

Halley foi o primeiro cometa a ser reconhecido como periódico. A fotografia registra a sua mais recente aparição, em 1986.

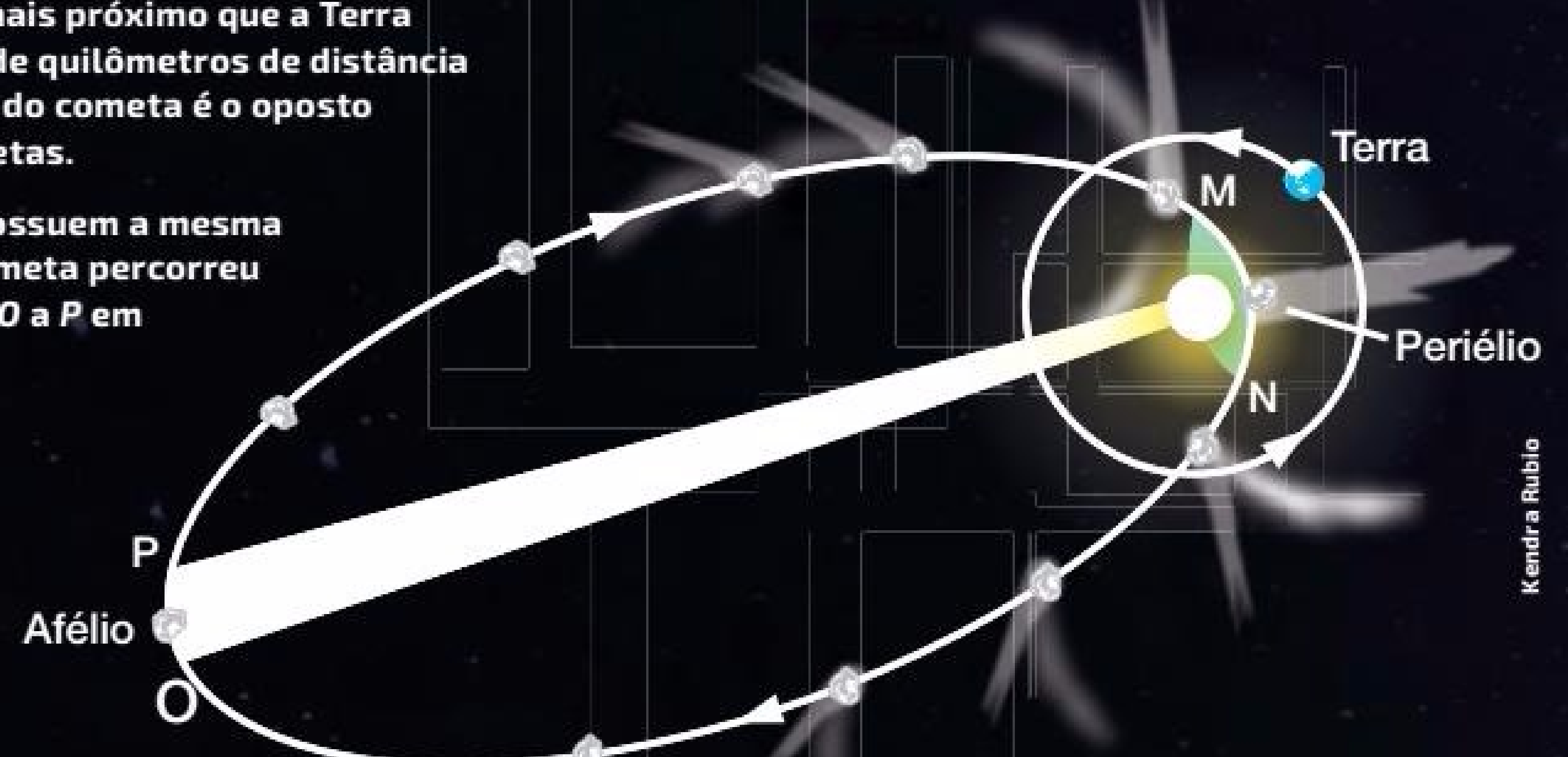
As conclusões de Halley também comprovaram a veracidade da 1ª Lei de Kepler, que afirma que as trajetórias dos astros em torno do Sol são elípticas, estando este em um dos focos. As extremidades do eixo maior dessa elipse são chamadas de periélio (ponto orbital mais próximo do Sol) e afélio (ponto orbital mais distante do Sol). Para o cometa Halley, o periélio vale aproximadamente 88 milhões de quilômetros, e o afélio, aproximadamente 5,3 bilhões de quilômetros.

A 2ª Lei de Kepler afirma que os astros, em seus movimentos elípticos, varrem áreas iguais em tempos iguais. Para que isso seja verdade, é necessário que eles acelerem quando se aproximam do Sol, estando com a maior velocidade no periélio, e retardem seu movimento quando se afastam do Sol, estando com a menor velocidade no afélio.

guteksk7/Shutterstock.com

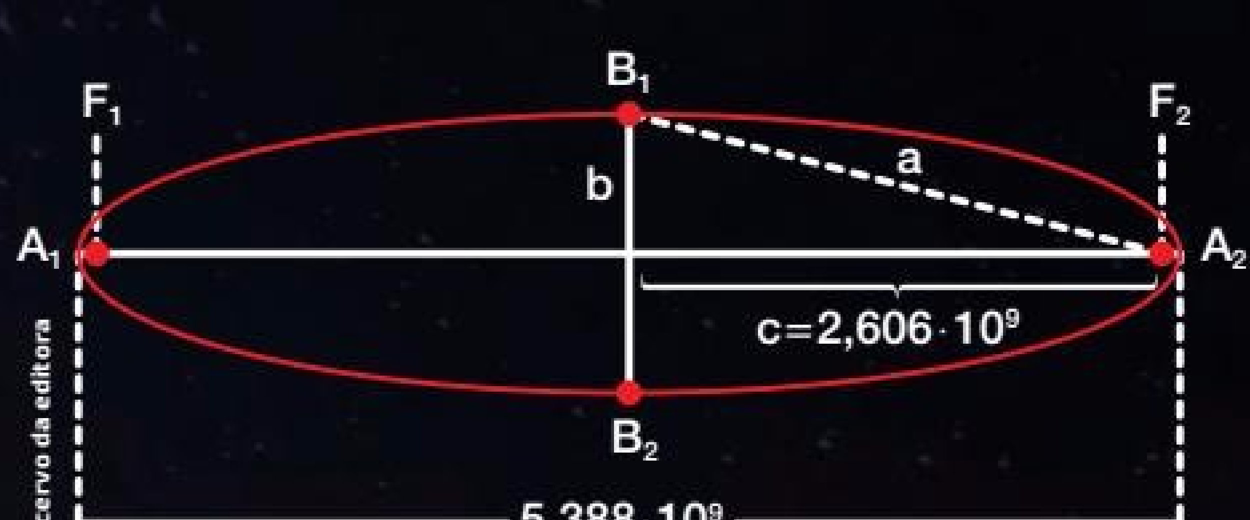
No periélio, o cometa Halley está a aproximadamente 88 milhões de quilômetros do Sol, ou seja, mais próximo que a Terra (aproximadamente 150 milhões de quilômetros de distância do Sol). O sentido de movimento do cometa é o oposto ao daquele realizado pelos planetas.

Como os setores em destaque possuem a mesma área, podemos concluir que o cometa percorreu os deslocamentos de *M* a *N* e de *O* a *P* em tempos iguais.



Kendra Rubio

Ilustração elaborada com base em: <www.if.ufrgs.br/oei/solar/solar15/solar15.htm>. Acesso em: 29 fev. 2016.



Acervo da editora

Observe ao lado a trajetória elíptica do cometa Halley e algumas das medidas associadas a ela, dadas em quilômetros.

c) $\dfrac{x^2}{(2{,}694 \cdot 10^9)^2} + \dfrac{y^2}{(0{,}683 \cdot 10^9)^2} = 1$

e) 2062; Resposta esperada: pois o cometa pode ser visto da Terra a cada 76 anos, e sua mais recente aparição foi em 1986.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Como é denominado o ponto da órbita do cometa Halley mais distante do Sol? E o mais próximo? afélio; periélio

b) Qual é a excentricidade da elipse descrita pelo cometa Halley? $e = 0{,}967$

c) Qual é a equação dessa elipse, considerando o centro na origem e o eixo maior horizontal?

d) De acordo com a 2ª Lei de Kepler e o período de translação do cometa, você afirmaria que em 2021 ele estará acelerando ou desacelerando em sua órbita? Por quê? Desacelerando, pois o cometa estará se afastando do Sol, ou seja, indo em direção ao afélio.

e) Em que ano, aproximadamente, o cometa Halley será visto aqui da Terra novamente? Por quê?

f) Pesquise outros cometas que são periódicos e sua periodicidade. Resposta pessoal.

Capítulo 3

O que compõe um cometa

Ilustração elaborada com base em: <http://veja.abril.com.br/noticia/ciencia/novo-cometa-pode-ser-o-mais-brilhanteja-registrado>. Acesso em: 29 fev. 2016.

1 **A cauda do cometa é resultado de sua aproximação ao Sol, que causa a vaporização dos gases e liberação da poeira de seu núcleo, podendo se estender por até 100 milhões de quilômetros. A cauda está sempre apontada na direção oposta ao Sol.**

2 **Uma nuvem luminosa de gás e poeira envolve o núcleo do cometa. Essa região, chamada de coma (ou cabeleira), pode ter vários milhões de quilômetros de diâmetro.**

3 **A camada externa é bastante escura, refletindo de 3% a 4% da luz solar recebida.**

4 **O núcleo é formado principalmente de água, monóxido de carbono e dióxido de carbono.**

5 **Alguns cometas se despedaçam, devido à sua frágil estrutura.**

50. Para cada elipse cuja equação ou representação no plano cartesiano está indicada a seguir, calcule a medida do eixo maior, do eixo menor, a distância focal e a excentricidade.

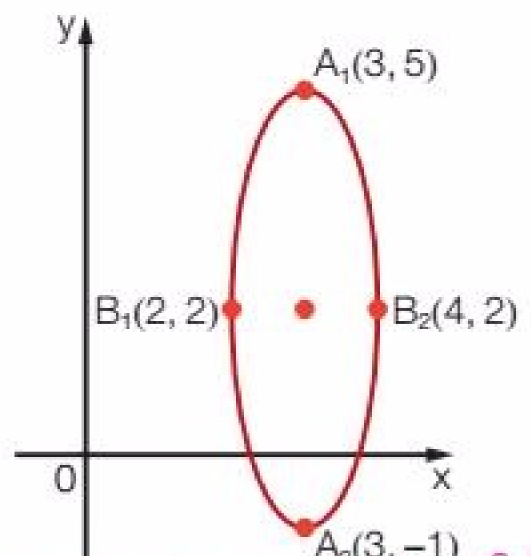
a) $\frac{(x+5)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$ $2a=4\sqrt{2}$; $2b=2\sqrt{3}$; $2c=2\sqrt{5}$; $e=\frac{\sqrt{10}}{4}$

b) $\frac{x^2}{5}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ $2a=2\sqrt{5}$; $2b=4$; $2c=2$; $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $36x^2+16y^2=576$ $2a=12$; $2b=8$; $2c=4\sqrt{5}$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

d) $9(x-9)^2+6(y-7)^2=54$
$2a=6$; $2b=2\sqrt{6}$; $2c=2\sqrt{3}$; $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$

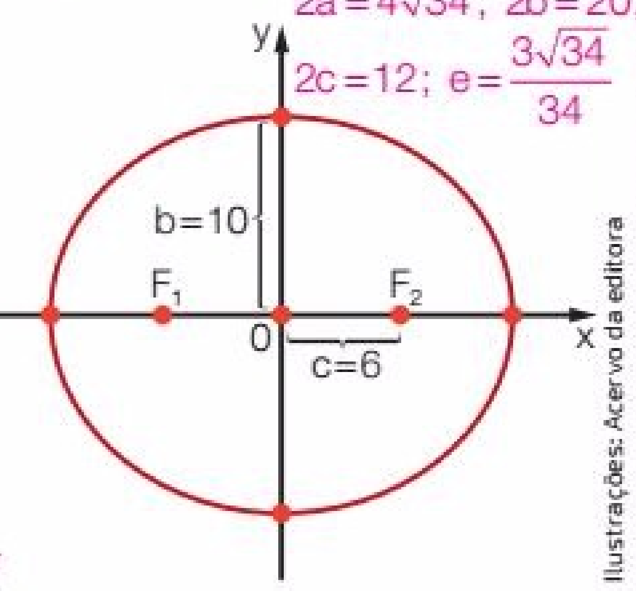
e)



$2a=6$; $2b=2$; $2c=4\sqrt{2}$; $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

f)

$2a=4\sqrt{34}$; $2b=20$; $2c=12$; $e=\frac{3\sqrt{34}}{34}$



Ilustrações: Acervo da editora

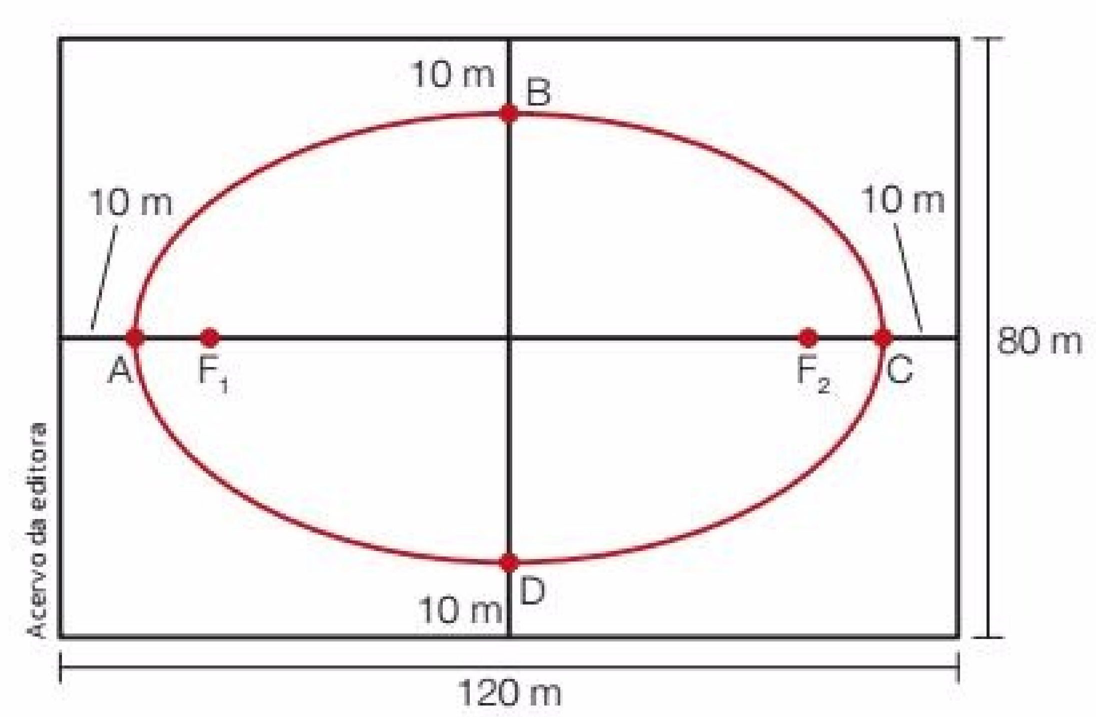
51. Esboce no plano cartesiano a elipse de equação: Respostas no final do livro.

a) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

b) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

c) $x^2+16y^2=16$

52. Em uma cidade será construída uma praça retangular com dimensões 80 m e 120 m, na qual será construído um jardim em forma de elipse na parte central, como indicado na figura.



Acervo da editora

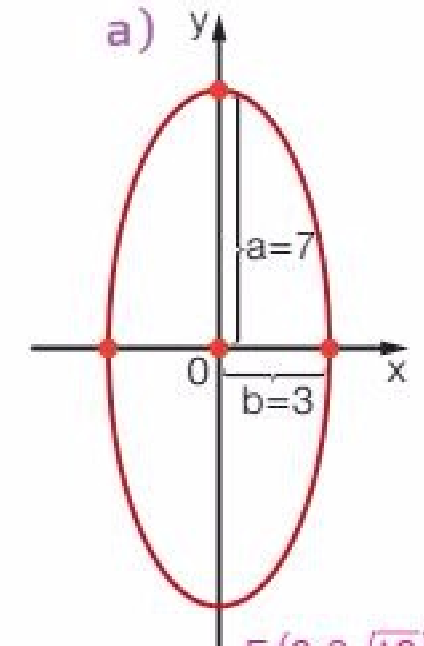
Considere os segmentos AC e BD os eixos maior e menor, respectivamente, e os pontos F_1 e F_2 focos da elipse, onde deverão ser colocados dois postes de iluminação.

A distância entre os postes de iluminação será, aproximadamente, de: b

a) 68 m
b) 80 m
c) 76 m
d) 72 m
e) 84 m

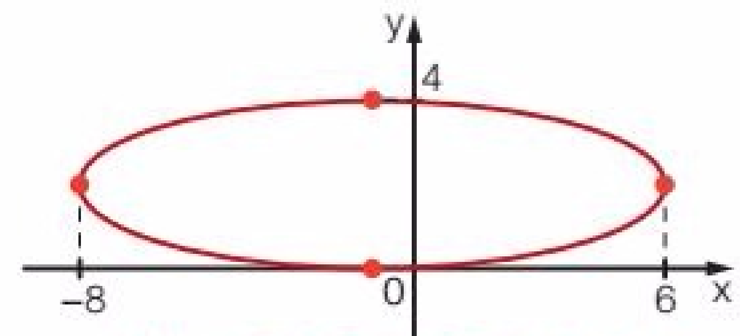
53. Determine as coordenadas dos focos da elipse indicada em cada item.

a)



$F_1(0, 2\sqrt{10})$ e $F_2(0, -2\sqrt{10})$

b)



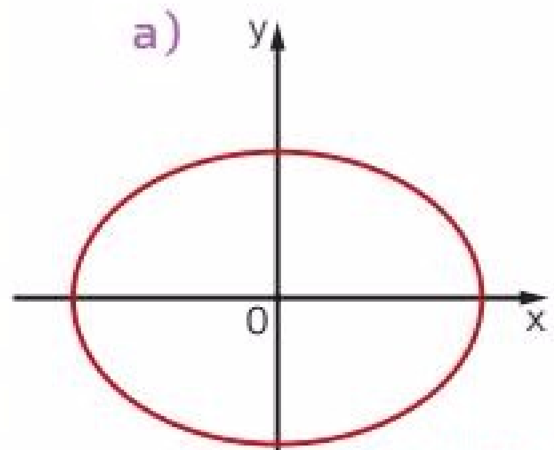
$F_1(-1-3\sqrt{5}, 2)$ e $F_2(-1+3\sqrt{5}, 2)$

Ilustrações: Acervo da editora

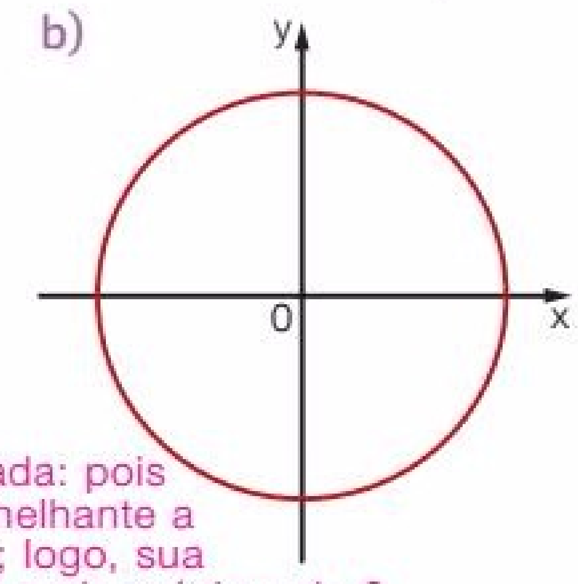
54. Escreva a equação da elipse de focos $F_1(-4, 2)$ e $F_2(-4, 8)$ que passa pelo ponto $P(0, 5)$. $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

55. Qual das elipses apresentadas tem excentricidade de menor valor, sabendo que os eixos coordenados estão em uma mesma escala? Justifique.

a)



b)

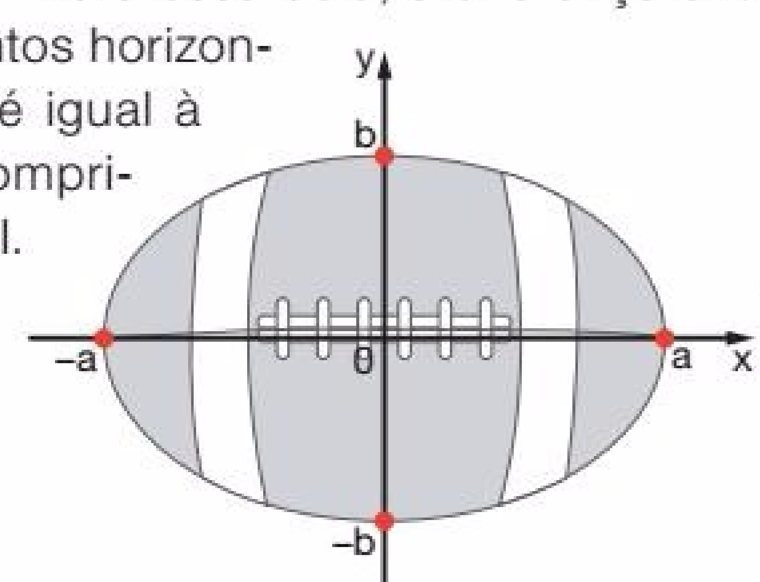


Ilustrações: Acervo da editora

b; Resposta esperada: pois é a elipse mais semelhante a uma circunferência; logo, sua excentricidade está mais próxima de 0.

56. Escreva a equação da elipse de centro na origem, com excentricidade $\frac{1}{3}$ e cujos focos estão sobre o eixo das abscissas e distam 6 unidades de comprimento um do outro. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1$

57. (Enem-MEC) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores *a* e *b* são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Sergio Lima

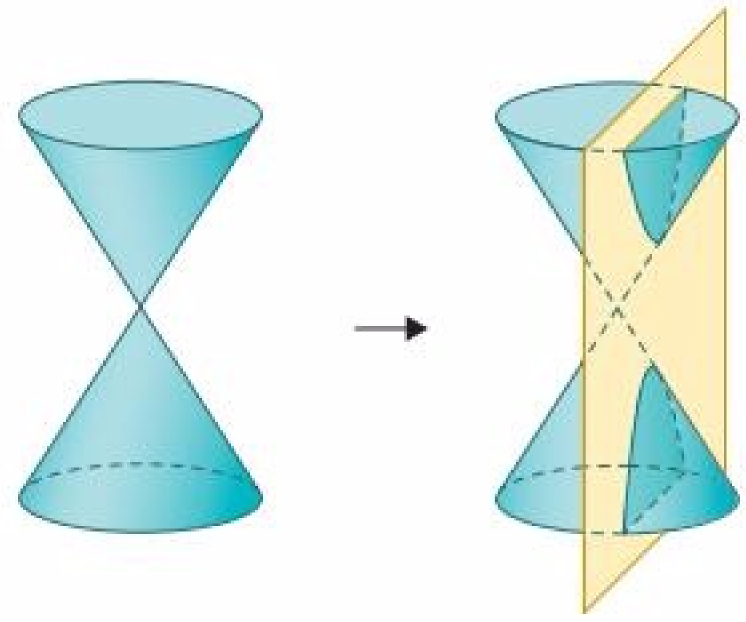
Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V=4ab^2$.

O volume dessa bola, em função apenas de *b*, é dado por: b

a) $8b^3$
b) $6b^3$
c) $5b^3$
d) $4b^3$
e) $2b^3$

Hipérbole

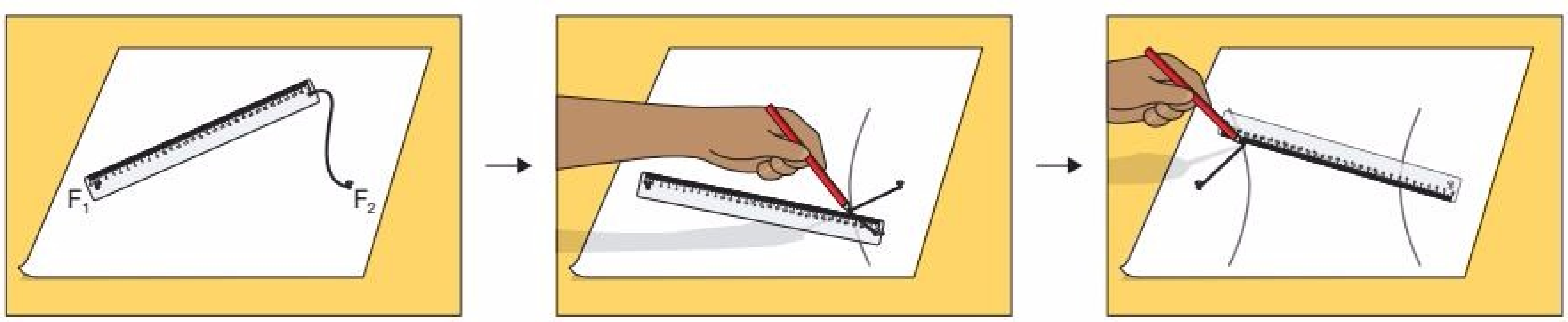
Um cone duplo, ao ser secionado nas duas folhas por um plano que não passa pelo seu vértice, determina em sua superfície a seção cônica hipérbole.



É importante não confundir o elemento geométrico hipérbole com sua homônima, que consiste em uma figura de linguagem que busca definir de maneira exagerada algo que se queira expressar. Alguns exemplos dessa figura de linguagem na língua portuguesa são:

- A plateia morreu de rir.
- Eu já lhe falei um bilhão de vezes.
- Ela chorou um rio de lágrimas de saudade.

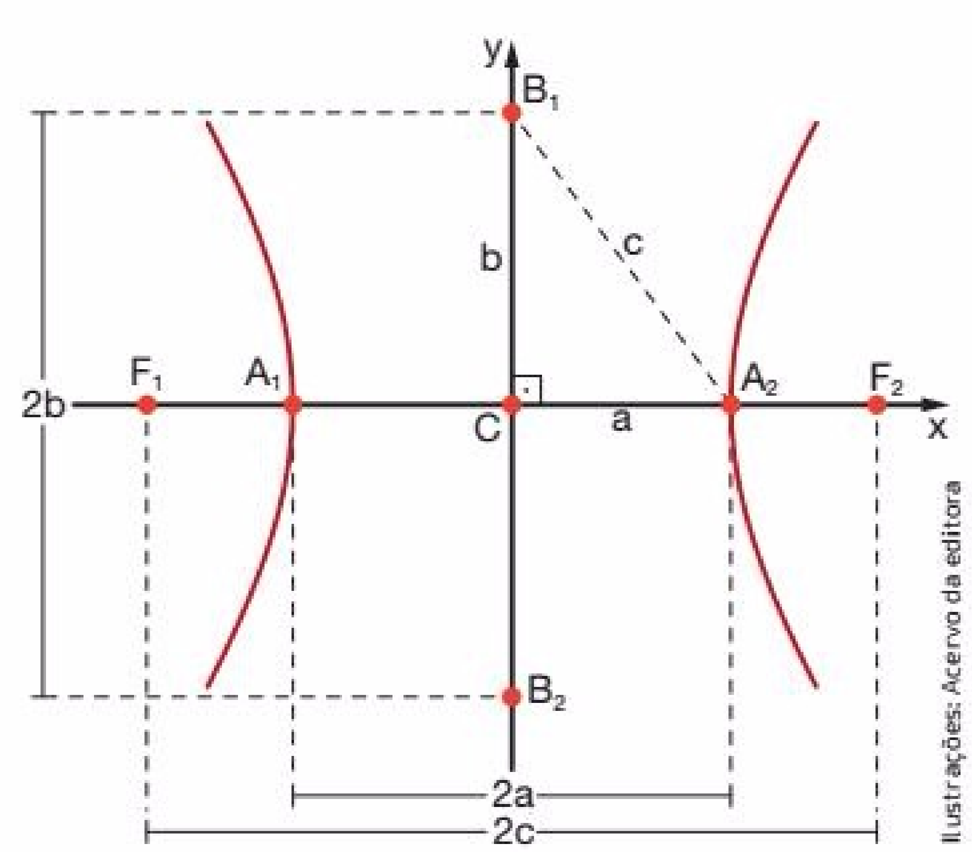
Para esboçarmos uma hipérbole, marcamos dois pontos sobre uma folha de papel $(F_1 \text{ e } F_2)$. Em F_1, fixamos uma régua por um furo em uma das suas extremidades. Na outra extremidade da régua, fixamos um barbante, que por sua vez tem a outra extremidade fixada em F_2 (a diferença em módulo entre o comprimento do barbante e o da régua deve ser menor que F_1F_2). Com a ponta de um lápis na régua, de modo que o barbante fique sempre esticado, giramos a régua desenhando um dos ramos da hipérbole. Procedendo de maneira semelhante, obtemos o outro ramo da hipérbole.



Note que a diferença em módulo das distâncias de F_1 e F_2 a qualquer ponto da hipérbole é constante e menor que F_1F_2.

Observe a hipérbole ao lado e seus elementos.

- focos: F_1 e F_2
- distância focal: $F_1F_2 = 2c$
- centro: C
- eixo real ou transverso: $\overline{A_1A_2}$, com $A_1A_2 = 2a$
- eixo imaginário ou não transverso: $\overline{B_1B_2}$, com $B_1B_2 = 2b$
- excentricidade: corresponde ao número $e = \frac{c}{a}$, com $e > 1$



Ilustrações: Acervo da editora

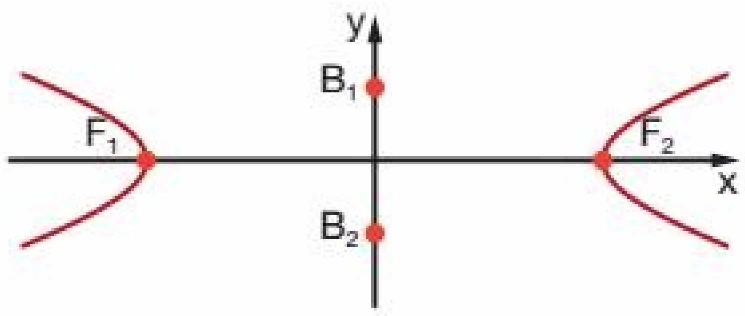
O centro C de uma hipérbole corresponde ao ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

Nessa hipérbole, note que o triângulo CB_1A_2 é retângulo em C. Assim, a partir do Teorema de Pitágoras, podemos escrever a seguinte relação:

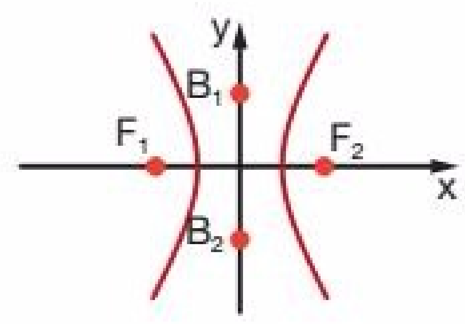
$$c^2 = a^2 + b^2$$

A hipérbole é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença em módulo da distância de cada um deles aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a 2a, de maneira que 2a seja menor que a distância focal 2c, ou seja, $2a < 2c$.

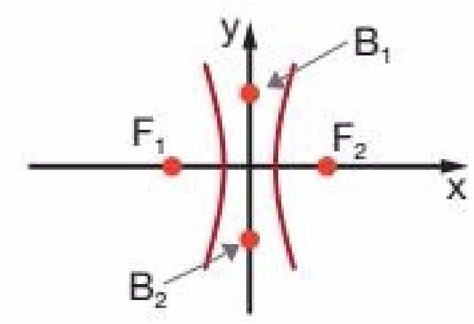
Observe, na sequência de figuras a seguir, alterações nas características da hipérbole quando a excentricidade é alterada.



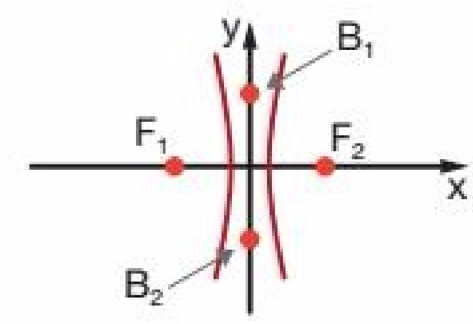
$e = 1{,}05$



$e = 2$

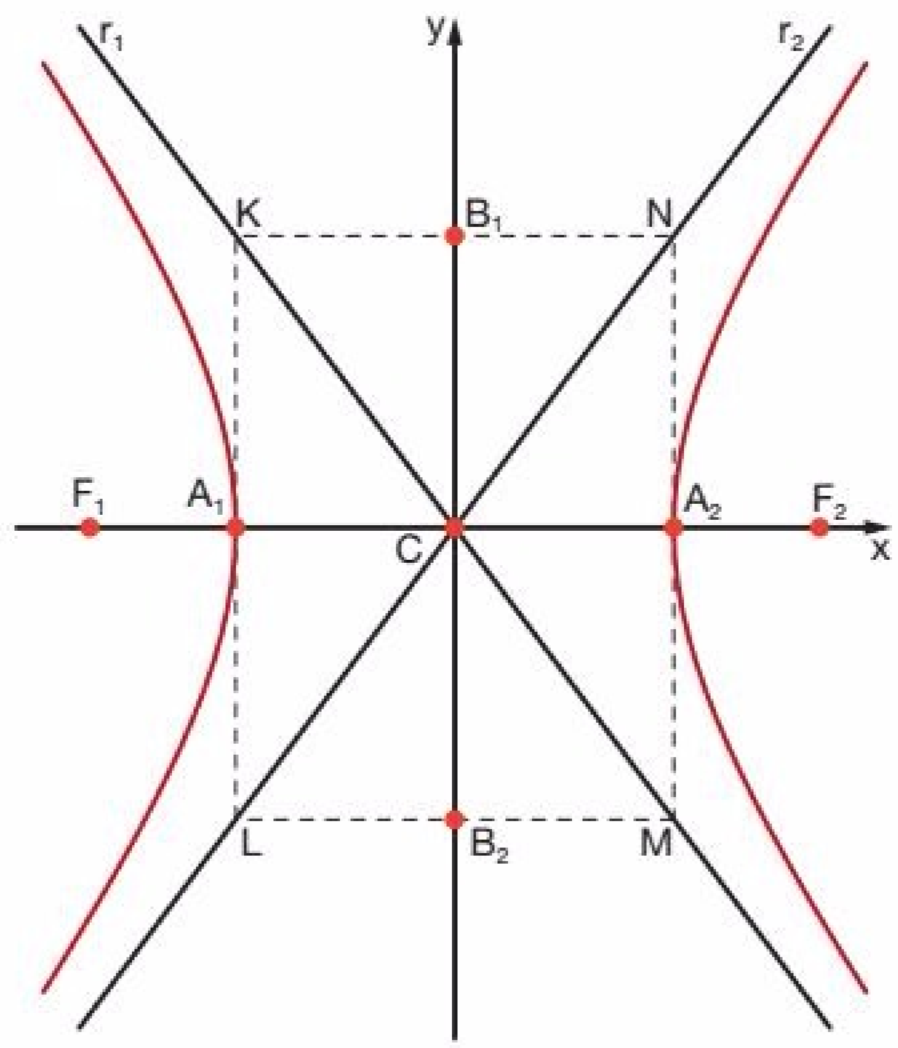


$e = 3$



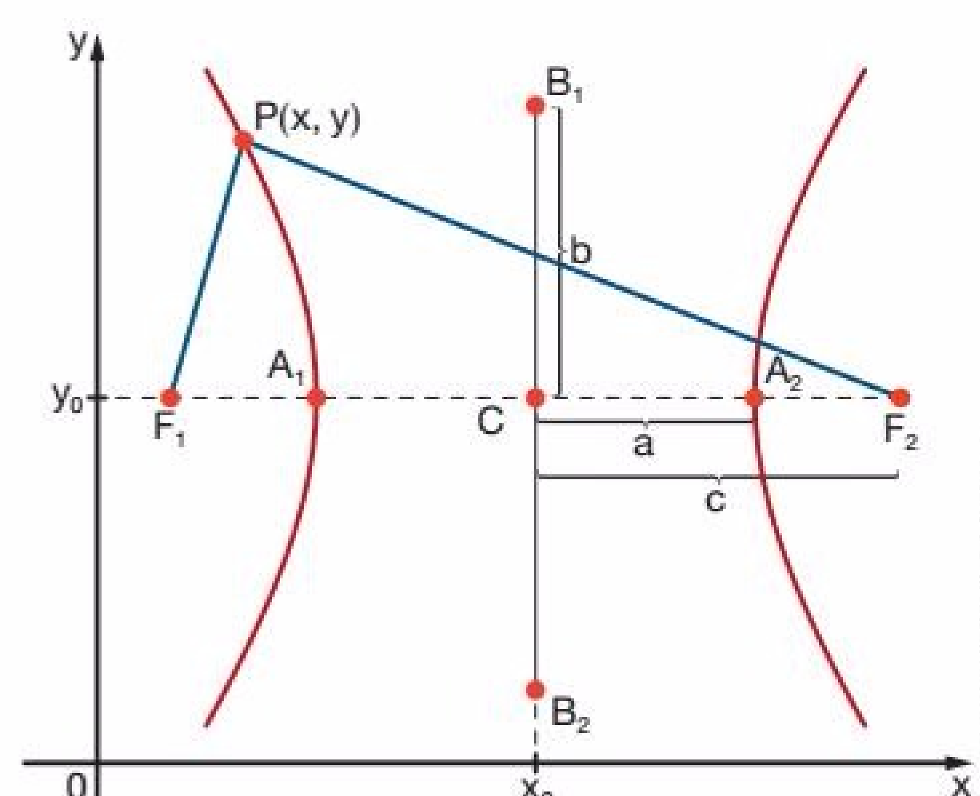
$e = 4$

Um elemento importante no estudo das hipérboles são as suas **assíntotas**. Na imagem abaixo, o retângulo KLMN tem os lados passando por A_1, A_2, B_1 e B_2, e medidas 2a e 2b. As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais desse retângulo são as assíntotas da hipérbole.



À medida que escolhemos um ponto da hipérbole mais distante de seu centro, mais próximo esse ponto estará de uma assíntota. Contudo, a hipérbole nunca toca a assíntota.

Para realizarmos o estudo analítico da hipérbole, consideramos em um plano cartesiano uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo *x* e um ponto qualquer $P(x, y)$, pertencente a ela.

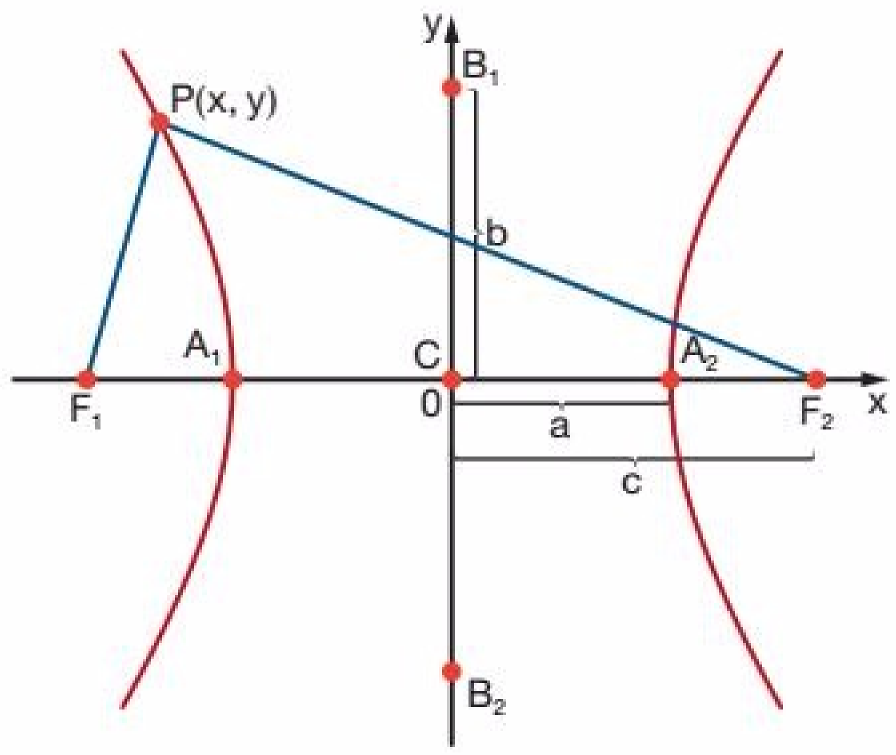


Ilustrações: Acervo da editora

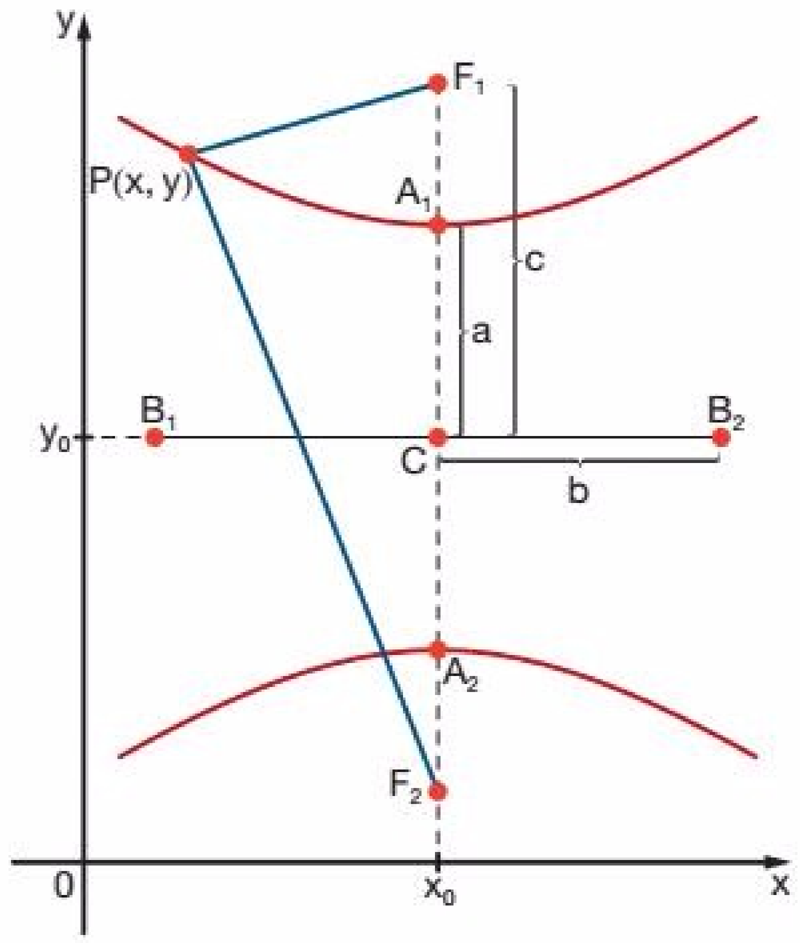
Desenvolvendo a igualdade $|PF_1 - PF_2| = 2a$ e utilizando a relação $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos a equação reduzida da hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$ que possui eixo real paralelo ao eixo *x*:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

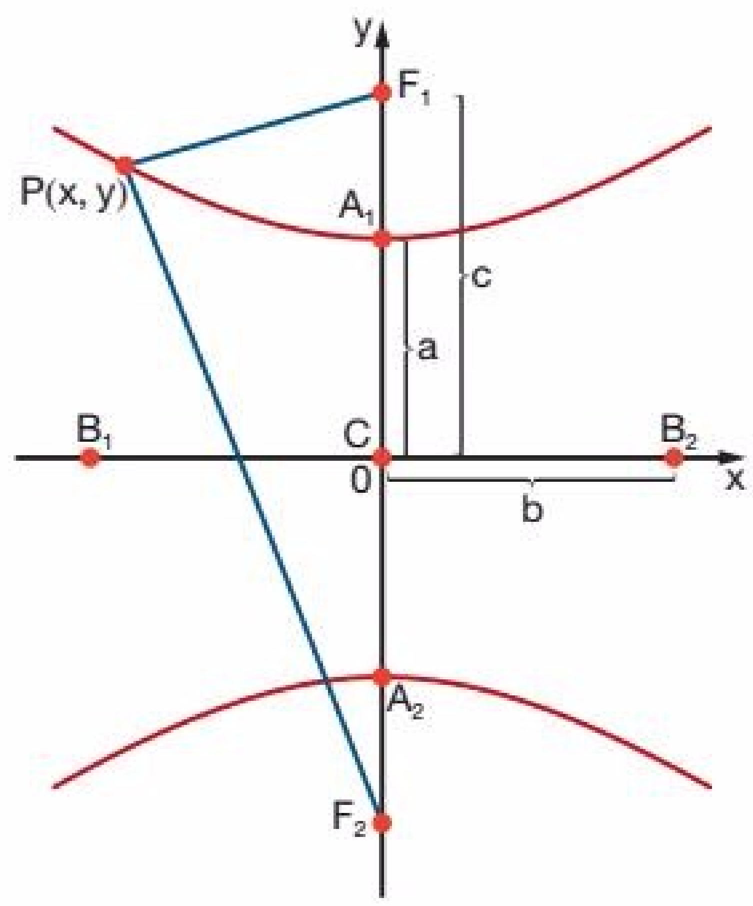
Caso o centro da hipérbole seja a origem $C(0,0)$ e os focos F_1 e F_2 pertençam ao eixo *x*, a equação será dada por: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



Ao considerarmos em um plano cartesiano uma hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo *y*, de centro $C(x_0, y_0)$, obtemos a equação reduzida: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$.



No caso em que o centro da hipérbole é a origem $C(0,0)$, e os focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo *y*, a equação será dada por: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.



Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 3

Atividades resolvidas

R15. Esboce no plano cartesiano as hipérboles cujas equações estão indicadas a seguir.

a) $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ b) $\dfrac{(y-5)^2}{9}-\dfrac{(x+2)^2}{7}=1$

Resolução

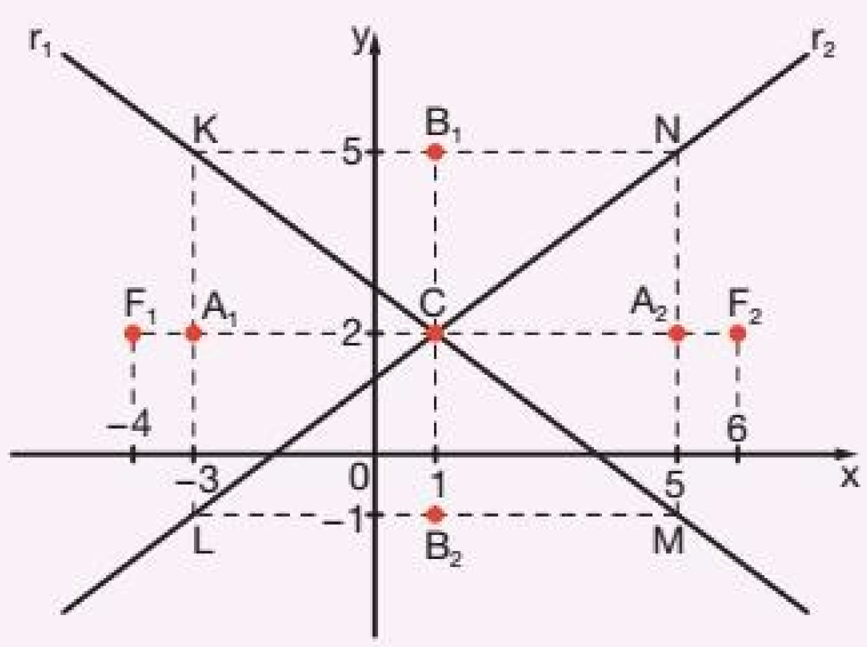
a) De acordo com a equação, temos uma hipérbole com centro $C(1, 2)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo *x*. Logo:

$a^2=16 \Rightarrow a=4$ $b^2=9 \Rightarrow b=3$ $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+9 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=5$

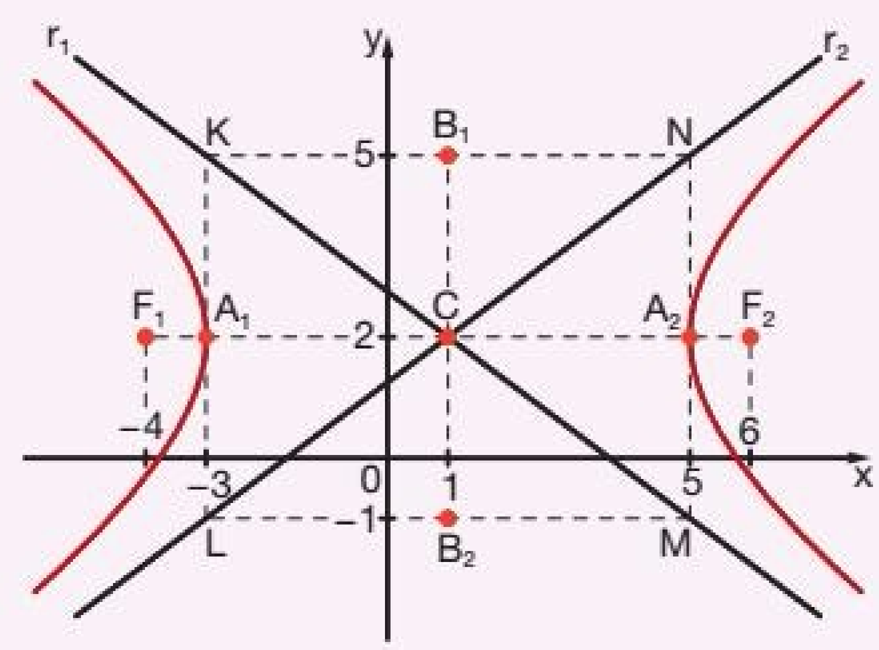
Segue que:

- $F_1(x_0-c, y_0) \Rightarrow F_1(-4, 2)$
- $F_2(x_0+c, y_0) \Rightarrow F_2(6, 2)$
- $A_1(x_0-a, y_0) \Rightarrow A_1(-3, 2)$
- $A_2(x_0+a, y_0) \Rightarrow A_2(5, 2)$
- $B_1(x_0, y_0+b) \Rightarrow B_1(1, 5)$
- $B_2(x_0, y_0-b) \Rightarrow B_2(1, -1)$

Para esboçar a hipérbole, indicamos no plano cartesiano os pontos *C*, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2, e traçamos as assíntotas r_1 e r_2.



Por fim, esboçamos a hipérbole $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$.



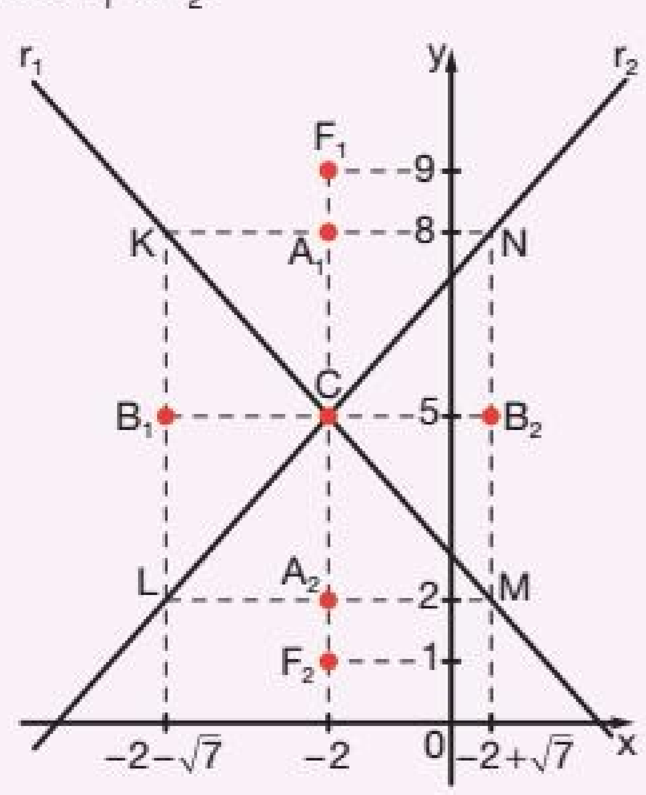
b) De acordo com a equação, temos uma hipérbole com centro $C(-2, 5)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo *y*. Logo:

$a^2=9 \Rightarrow a=3$ $b^2=7 \Rightarrow b=\sqrt{7}$ $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=9+7 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$

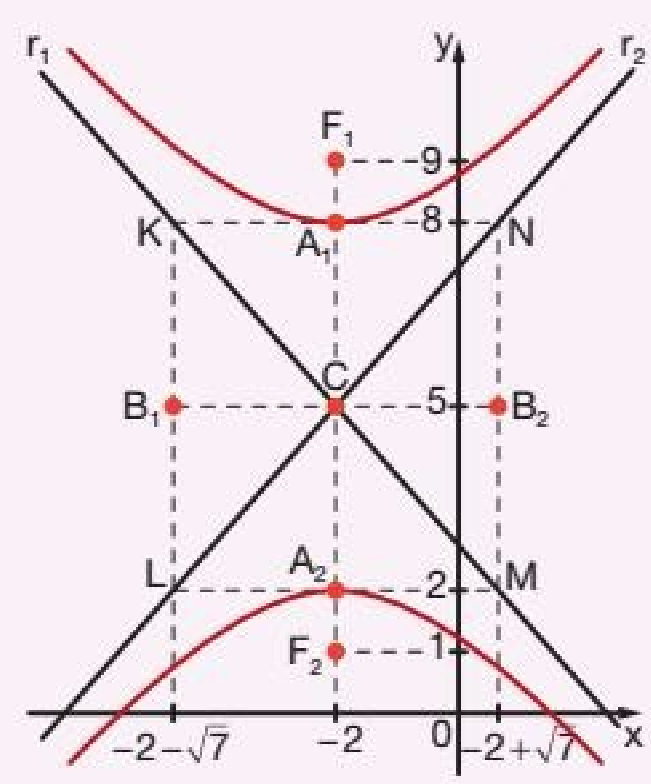
Segue que:

- $F_1(x_0, y_0+c) \Rightarrow F_1(-2, 9)$
- $F_2(x_0, y_0-c) \Rightarrow F_2(-2, 1)$
- $A_1(x_0, y_0+a) \Rightarrow A_1(-2, 8)$
- $A_2(x_0, y_0-a) \Rightarrow A_2(-2, 2)$
- $B_1(x_0-b, y_0) \Rightarrow B_1(-2-\sqrt{7}, 5)$
- $B_2(x_0+b, y_0) \Rightarrow B_2(-2+\sqrt{7}, 5)$

Para esboçar a hipérbole, indicamos no plano cartesiano os pontos *C*, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2, e traçamos as assíntotas r_1 e r_2.



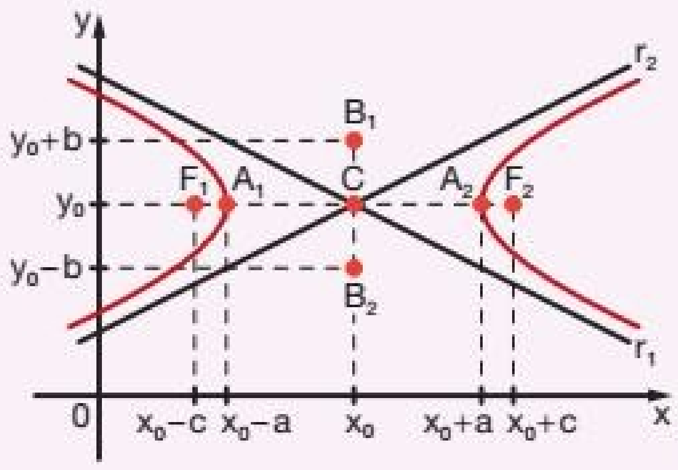
Por fim, esboçamos a hipérbole $\dfrac{(y-5)^2}{9}-\dfrac{(x+2)^2}{7}=1$.



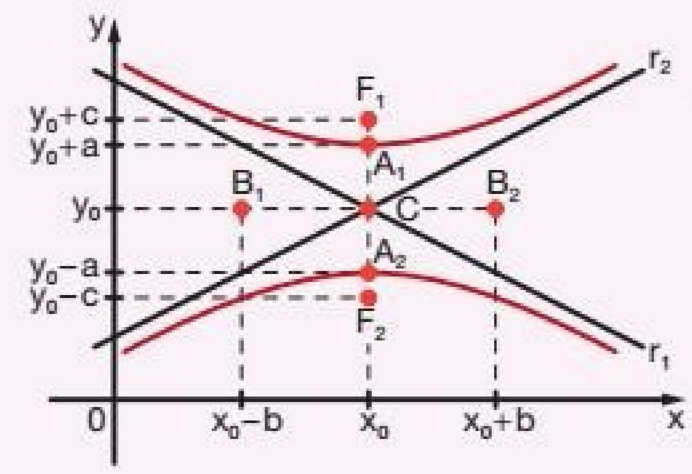
Ilustrações: Acervo da editora

Note que:

- Quando o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo x, temos:
  - $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
  - $F_1(x_0-c,\ y_0)$
  - $F_2(x_0+c,\ y_0)$
  - $A_1(x_0-a,\ y_0)$
  - $A_2(x_0+a,\ y_0)$
  - $B_1(x_0,\ y_0+b)$
  - $B_2(x_0,\ y_0-b)$

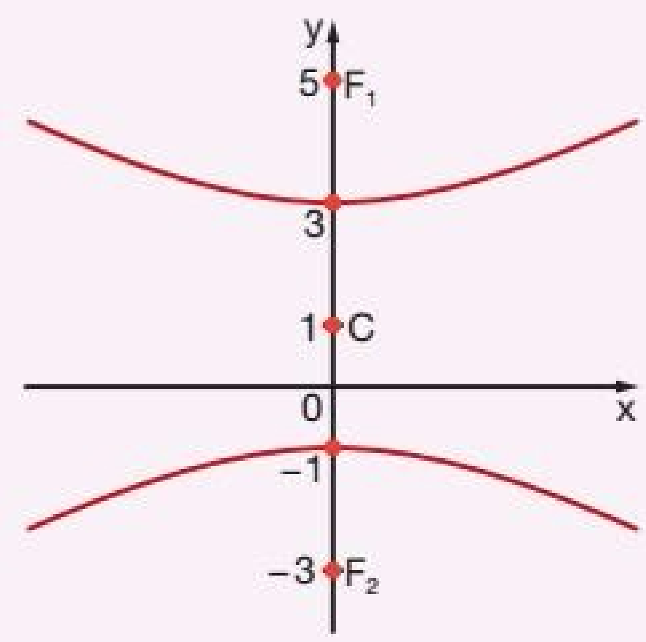


- Quando o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo y, temos:
  - $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$
  - $F_1(x_0,\ y_0+c)$
  - $F_2(x_0,\ y_0-c)$
  - $A_1(x_0,\ y_0+a)$
  - $A_2(x_0,\ y_0-a)$
  - $B_1(x_0-b,\ y_0)$
  - $B_2(x_0+b,\ y_0)$



Ilustrações: Acervo da editora

R16. Determine a equação da hipérbole indicada ao lado.



Acervo da editora

Resolução

Temos que o eixo real da hipérbole está sobre o eixo y, tal que $c=4$ e $a=2$. Logo:

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 4^2=2^2+b^2 \Rightarrow 16=4+b^2 \Rightarrow b^2=12$$

Como a hipérbole possui centro em $(0,1)$ e eixo real sobre o eixo y, a equação é dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1}$$

Qual é a excentricidade dessa hipérbole? $e=2$

R17. Verifique se a equação $8x^2-2y^2-16x-8y=32$ representa uma hipérbole. Em caso afirmativo, determine as coordenadas do centro e dos focos dessa hipérbole.

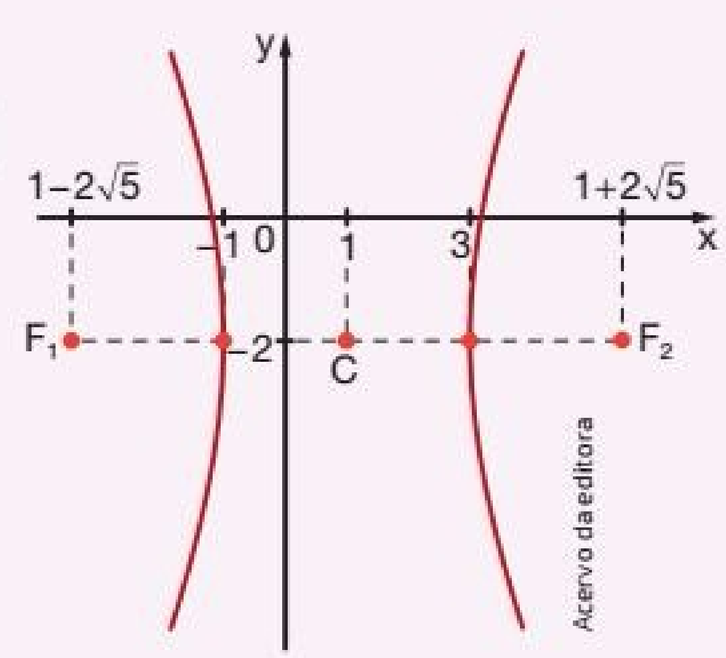
Resolução

Desenvolvendo a equação e utilizando o método do completamento de quadrados, temos que:

$$8x^2-2y^2-16x-8y=32 \Rightarrow 8(x^2-2x)-2(y^2+4y)=32 \Rightarrow 8(x^2-2x+1-1)-2(y^2+4y+4-4)=32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x-1)^2-8-2(y+2)^2+8=32 \Rightarrow \frac{8(x-1)^2}{32}-\frac{2(y+2)^2}{32}=\frac{32}{32} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

De acordo com a equação obtida, temos que ela representa uma hipérbole de centro $C(1,-2)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo x. Determinando as coordenadas dos focos, temos:



Acervo da editora

- $a^2=4$
- $b^2=16$
- $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=4+16 \Rightarrow c^2=20 \Rightarrow c=2\sqrt{5}$
- $F_1(x_0-c,\ y_0) \Rightarrow F_1(1-2\sqrt{5},\ -2)$
- $F_2(x_0+c,\ y_0) \Rightarrow F_2(1+2\sqrt{5},\ -2)$

Portanto, o centro da hipérbole é $C(1,-2)$ e os focos são $F_1(1-2\sqrt{5},-2)$ e $F_2(1+2\sqrt{5},-2)$.

Uma equação do 2º grau nas incógnitas x e y representa uma hipérbole se for redutível à forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{q_1}+\dfrac{(y-y_0)^2}{q_2}=1$, com q_1 e q_2 de sinais opostos.

58. Verifique se o eixo real de cada hipérbole, cujas equações estão indicadas, é paralelo ao eixo x ou ao eixo y, ou se está sobre um dos eixos.

a) $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{8^2}=1$ sobre o eixo x

b) $-\frac{(x-9)^2}{12}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$ paralelo ao eixo y

c) $25y^2+50y-16x^2=375$ sobre o eixo y

d) $x^2-y^2=4$ sobre o eixo x

59. Verifique quais equações representam uma hipérbole e reescreva-as na forma reduzida. b; c; d; f

a) $9x^2+16y^2=144$

b) $8x^2-6y^2-32x+36y-70=0$ $\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y-3)^2}{8}=1$

c) $-2x^2+16x+5y^2+10y=37$ $\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(x-4)^2}{5}=1$

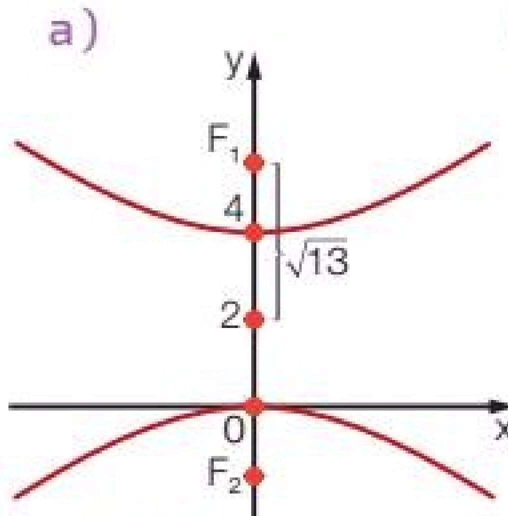
d) $6y^2-4x^2-64x-280=0$ $\frac{y^2}{2}-\frac{(x+8)^2}{6}=1$

e) $3(1-x)^2-y^2+2y=1$

f) $(x+y)(x-y)=4$ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

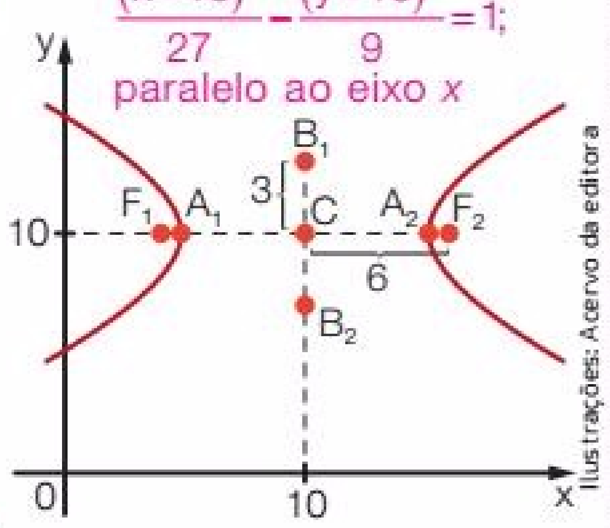
60. Escreva a equação da hipérbole representada em cada item e verifique se o eixo real é paralelo ao eixo x ou ao eixo y, ou se está sobre um dos eixos.

a)



$\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$; sobre o eixo y

b) $\frac{(x-10)^2}{27}-\frac{(y-10)^2}{9}=1$; paralelo ao eixo x



Ilustrações: Acervo da editora

61. Escreva a equação e esboce graficamente a hipérbole com eixo real de comprimento 10, e de focos $F_1(6,1)$ e $F_2(-8,1)$. Resposta no final do livro.

62. Determine a equação das assíntotas da hipérbole $\frac{(y-3)^2}{36}-\frac{(x+7)^2}{4}=1$ e esboce-a graficamente. Resposta no final do livro.

63. Dada a hipérbole de equação $3y^2+36y-4x^2+32x+8=0$, determine:

a) o comprimento do eixo real $4\sqrt{3}$

b) o comprimento do eixo imaginário 6

c) a distância focal $2\sqrt{21}$

d) a excentricidade $\frac{\sqrt{7}}{2}$

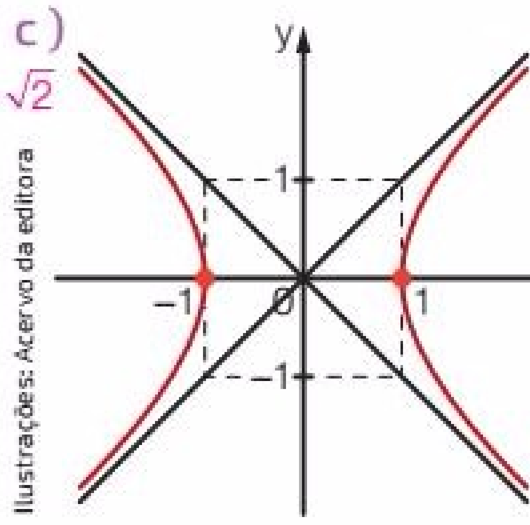
64. Escreva a equação da hipérbole com eixo real sobre o eixo y, de centro $C(0,4)$ e cujas medidas do eixo imaginário e real são, respectivamente, 12 e 16. $\frac{(y-4)^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$

65. Calcule a excentricidade de cada hipérbole cuja equação ou representação gráfica está indicada a seguir.

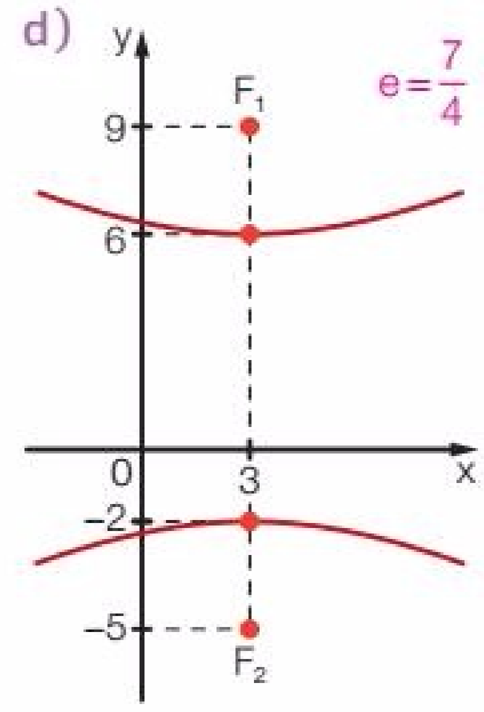
a) $\frac{(y+8)^2}{16}-\frac{(x-5)^2}{20}=1$ $e=\frac{3}{2}$

b) $3x^2-12x-y^2+9=0$ $e=2$

c) $e=\sqrt{2}$

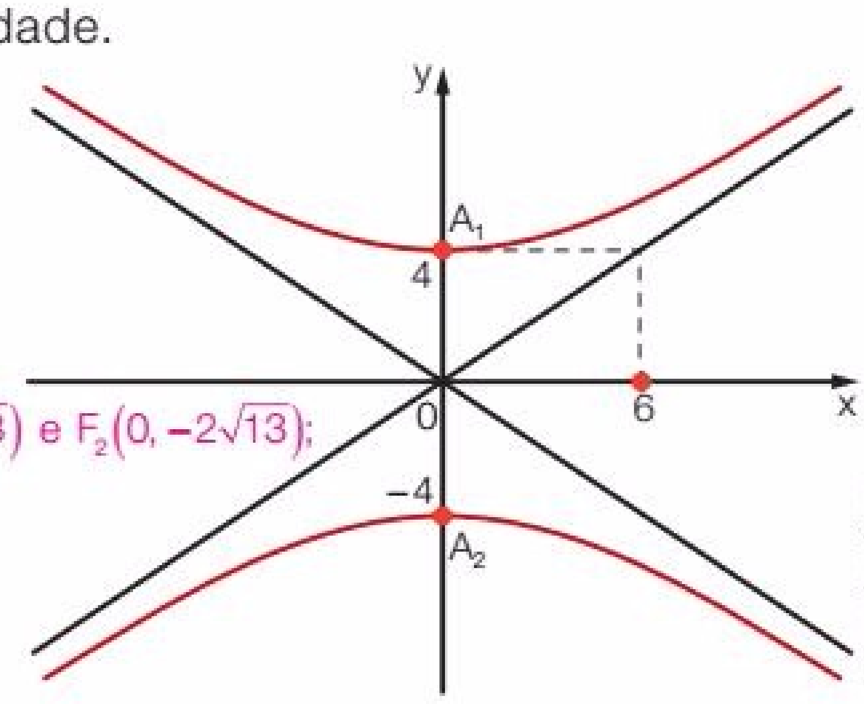


d) $e=\frac{7}{4}$



Ilustrações: Acervo da editora

66. Observe a hipérbole representada a seguir e determine as coordenadas dos focos e a excentricidade.



$F_1(0, 2\sqrt{13})$ e $F_2(0, -2\sqrt{13})$; $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$

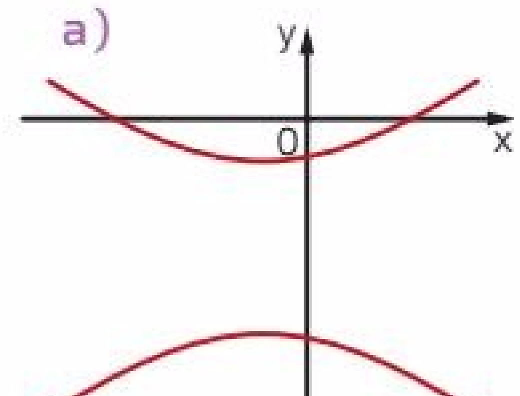
Acervo da editora

67. Desafio

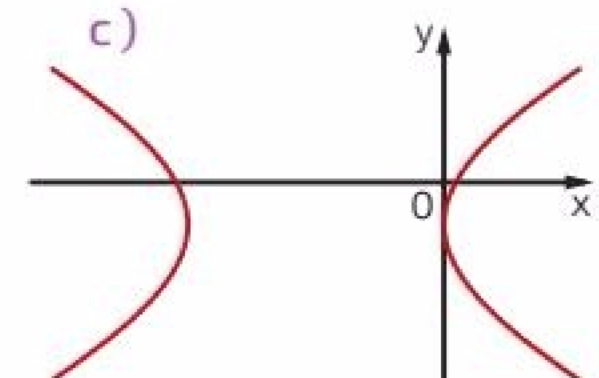
Qual é a equação da hipérbole que passa pelo ponto $P(5,-4)$ e cujos focos são $F_1(12,-4)$ e $F_2(4,-4)$? $\frac{(x-8)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{7}=1$

68. A cônica de equação $4x^2-9y^2+24x-18y-9=0$ está melhor representada no item: c

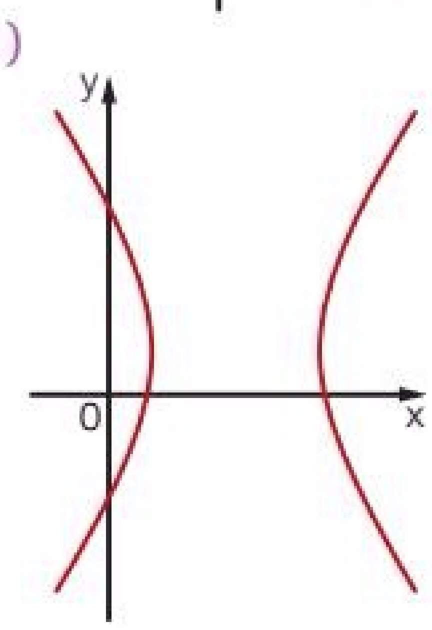
a)



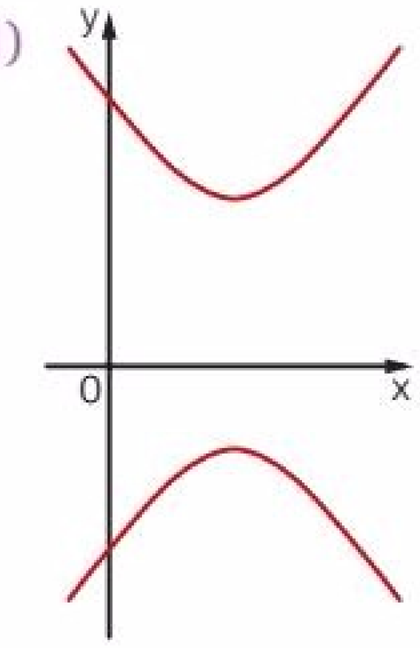
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

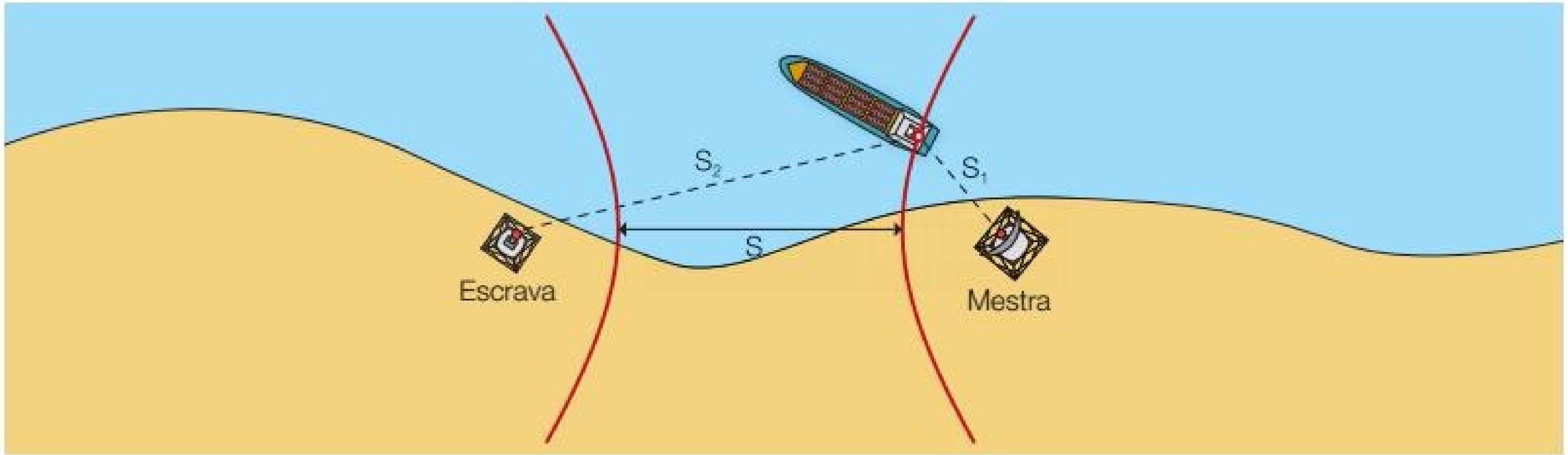
69. A navegação hiperbólica utiliza o conceito de hipérbole para obter as linhas de posição (LDP) que definem a localização de um navio. Um desses sistemas eletrônicos, denominado LORAN-C (abreviatura de *Long-Range Navigation* ou Navegação de Longa Distância), baseia-se na diferença do tempo de recebimento dos sinais de rádio emitidos por duas estações.

Nesse sistema, desenvolvido nos Estados Unidos em 1940, duas estações emissoras de ondas de rádio, uma chamada de Mestra (M), e outra, de Secundária ou Escrava (E), localizadas em pontos distintos, emitem seus sinais, que são recepcionados por um navio em tempos definidos como t_1 e t_2, respectivamente. O receptor LORAN-C do navio irá medir a diferença de tempo em que os sinais foram recebidos e irá definir um valor constante $t=|t_2-t_1|$.

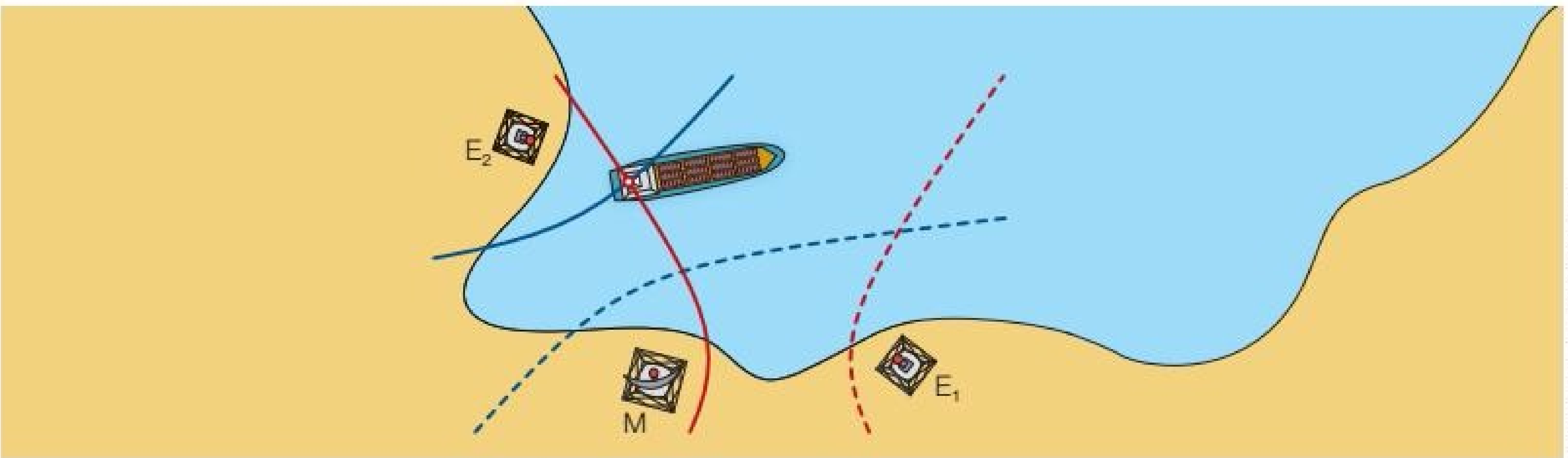
Utilizando o conceito de velocidade média $\left(v_m=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right)$, as notações S_1 e S_2 para representarem as distâncias percorridas pela onda até o navio, e considerando que toda onda de rádio tem na atmosfera velocidade próxima à da luz $(c=300\,000\text{ km/s})$, temos:

$$t=|t_2-t_1| \Rightarrow \frac{S}{c}=\left|\frac{S_2}{c}-\frac{S_1}{c}\right| \Rightarrow \boxed{S=|S_2-S_1|}$$

A última relação encontrada (em destaque) é a definição do lugar geométrico dos pontos que constituem uma hipérbole, sendo *S* a constante hiperbólica, que é a distância entre as linhas hiperbólicas. Em navegação, a distância entre as torres de emissão é chamada de linha de base.



Como há duas linhas hiperbólicas possíveis para se localizar o navio, utiliza-se outra emissora Escrava, definindo-se assim dois pares de linhas de posição, que possuem um ponto de interseção que corresponde à posição do navio. Várias estações emissoras de ondas de rádio são utilizadas pela navegação hiperbólica para a localização de navios.



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte de pesquisa: <www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap-36.pdf>. Acesso em: 29 fev. 2016.

Em uma situação hipotética, a linha de base entre a estação Mestra e uma de suas Escravas é de 260 km. O capitão de um navio, em alto-mar, para determinar a sua localização, aciona seu sistema LORAN-C, que mostra um valor de tempo igual a $8\cdot10^{-4}$ s. Considerando essas informações e aquelas referentes à navegação hiperbólica:

a) Qual é a distância entre essas duas emissoras? 260 km

b) Calcule a excentricidade da hipérbole definida por essas duas estações de rádio para o tempo citado. $e=1{,}08\overline{3}$

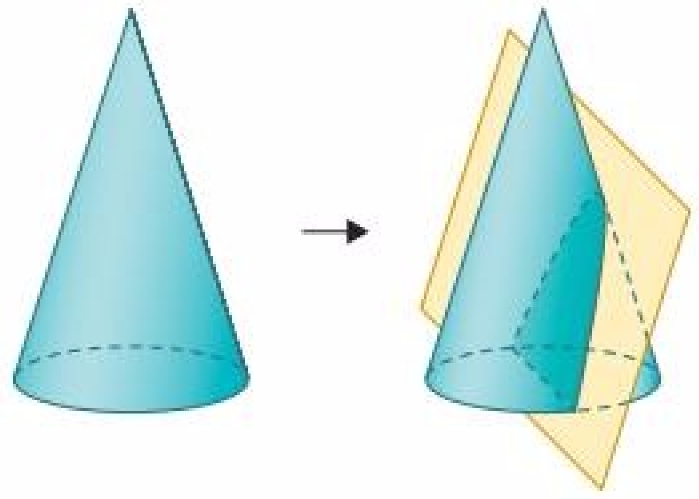
c) Qual é o valor da constante hiperbólica? 240 km

d) Escreva a equação que representa essa hipérbole, considerando o centro na origem e os focos sobre o eixo *x*. $\dfrac{x^2}{120^2}-\dfrac{y^2}{50^2}=1$

e) Que outros sistemas de localização você conhece? Junte-se a um colega e realize uma pesquisa. Resposta pessoal.

Parábola

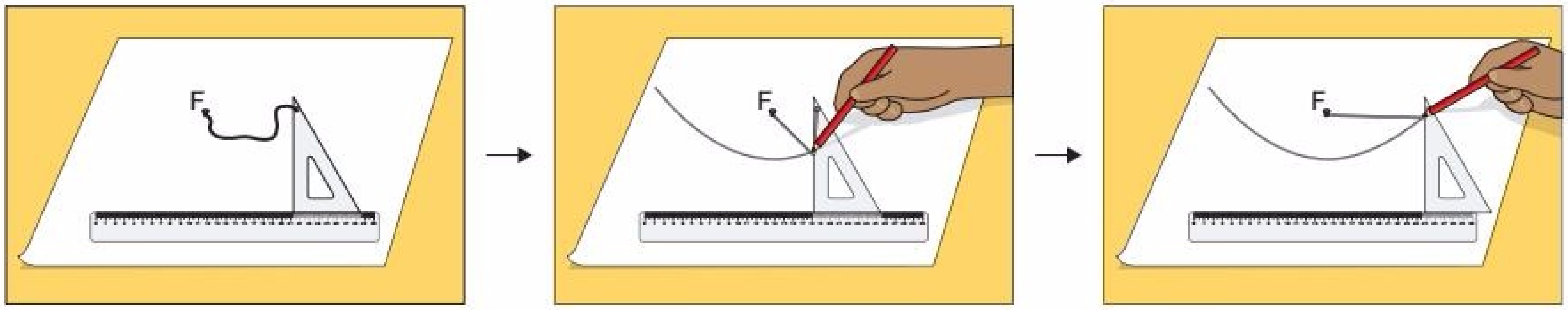
Ao secionar a superfície de um cone por um plano paralelo a uma das geratrizes, a seção cônica obtida será a **parábola**.



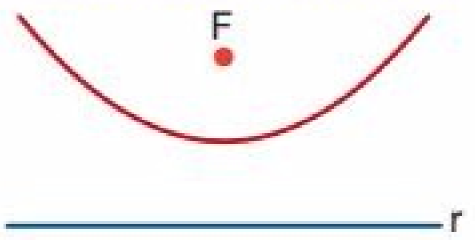
Ronaldo Almeida/Shutterstock.com

Além de descrever a trajetória no lançamento de alguns projéteis, a forma parabólica está presente em diversas outras situações, como em construções e obras de arte. Na Igreja da Pampulha, em Belo Horizonte (MG), do arquiteto Oscar Niemeyer, é possível identificar a composição de diversas formas que lembram parábolas.
Fotografia de 2012.

Para esboçarmos uma parábola, marcamos um ponto *F* em uma folha de papel, fixando nele uma das extremidades de um barbante, e a outra em um esquadro. Com o auxílio de uma régua, deslizamos o esquadro, mantendo o barbante esticado, e traçamos com um lápis a parábola, como indicado na figura.



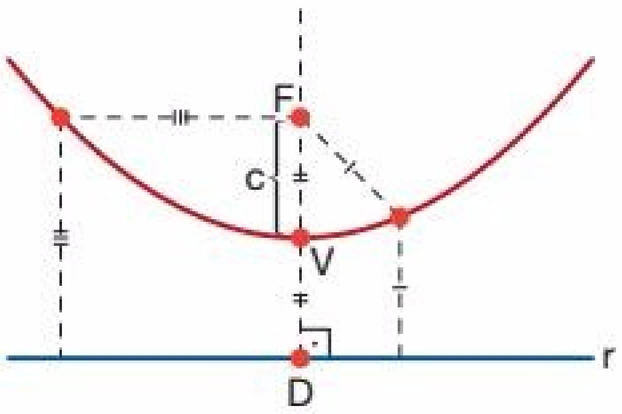
É possível traçar uma reta em que a distância de cada ponto da parábola ao foco seja igual à distância do ponto a essa reta.



O vértice *V* da parábola corresponde ao ponto médio de $\overline{FD}$.

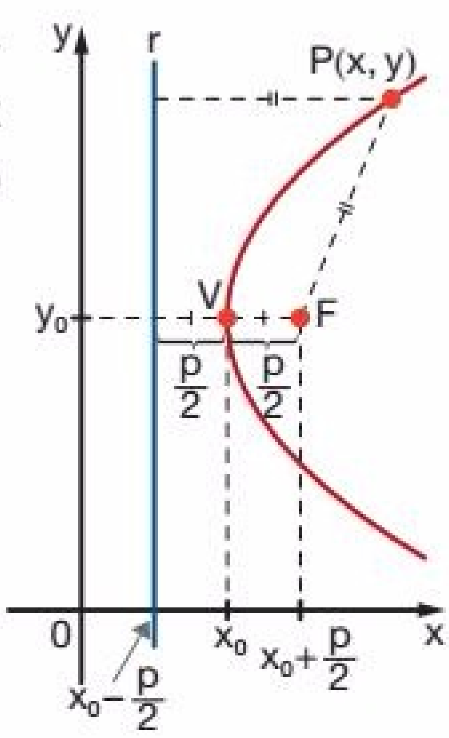
Observe a parábola ao lado e seus elementos.

- foco: *F*
- reta diretriz: *r*
- vértice: *V*
- eixo de simetria: $\overleftrightarrow{FV}$ (reta perpendicular a *r*)
- parâmetro: $p = FD = 2c$



A parábola é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja distância a um ponto fixo *F* é sempre igual à distância a uma reta dada.

Para realizarmos o estudo analítico da parábola, consideramos em um plano cartesiano uma parábola com reta diretriz paralela ao eixo *y*, vértice $V(x_0, y_0)$ à direita da diretriz, foco $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$ e um ponto qualquer $P(x, y)$, pertencente a ela.



Ilustrações: Acervo da editora

Utilizando o fato de que a distância entre o ponto *P* e o foco *F* é igual à distância entre o ponto *P* e a reta *r*, obtemos a equação reduzida da parábola que possui a diretriz paralela ou sobre o eixo *y* e vértice *V* à direita da diretriz:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

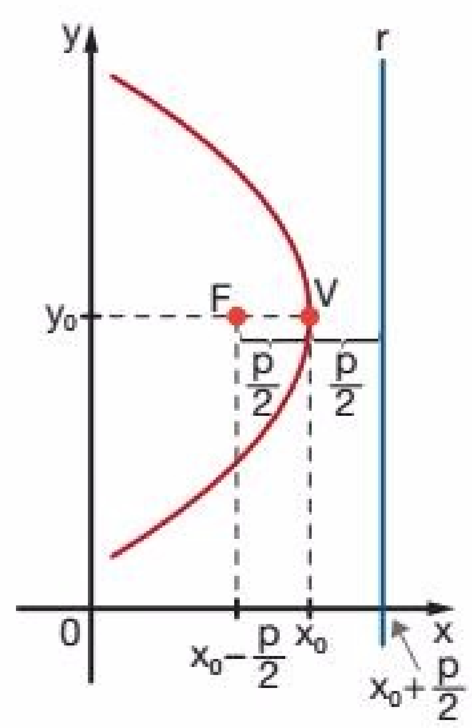
foco: $F\left(x_0+\frac{p}{2}, y_0\right)$

reta diretriz: $x = x_0 - \frac{p}{2}$

Outras possibilidades de equações de parábolas são:

- Diretriz paralela ou sobre o eixo *y* e vértice *V* à esquerda da diretriz.

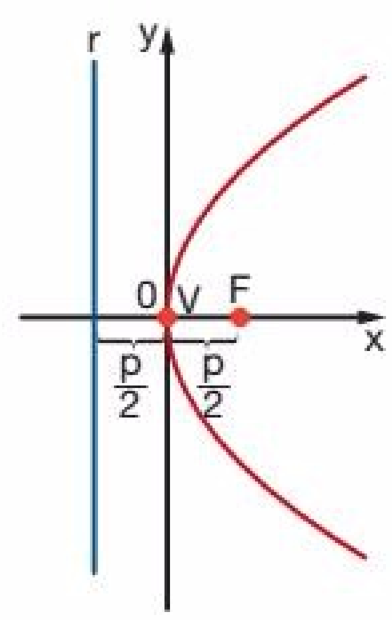
$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$$



foco: $F\left(x_0-\frac{p}{2}, y_0\right)$ reta diretriz: $x = x_0 + \frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ao eixo *y* e vértice $V(0,0)$ na origem e à direita da diretriz.

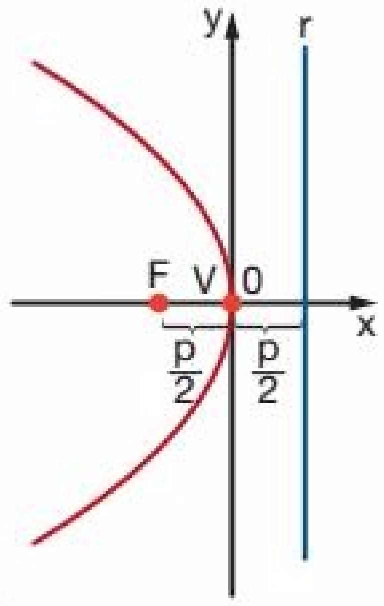
$$y^2 = 2px$$



foco: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ reta diretriz: $x = -\frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ao eixo *y* e vértice $V(0,0)$ na origem e à esquerda da diretriz.

$$y^2 = -2px$$

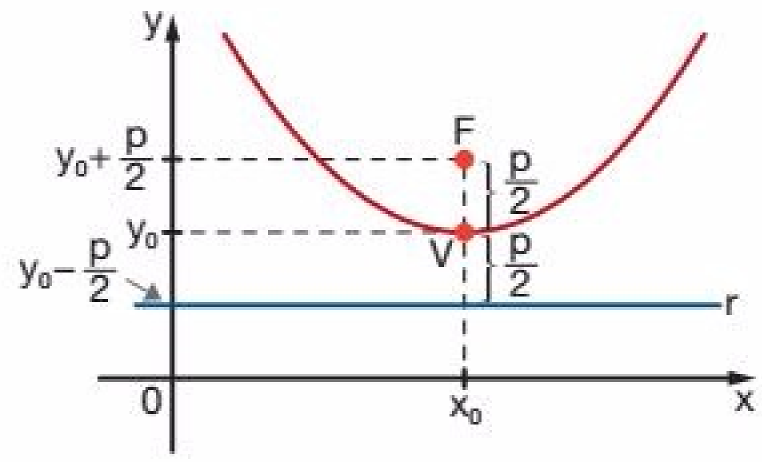


Ilustrações: Acervo da editora

foco: $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ reta diretriz: $x = \frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ou sobre o eixo *x* e vértice *V* acima da diretriz.

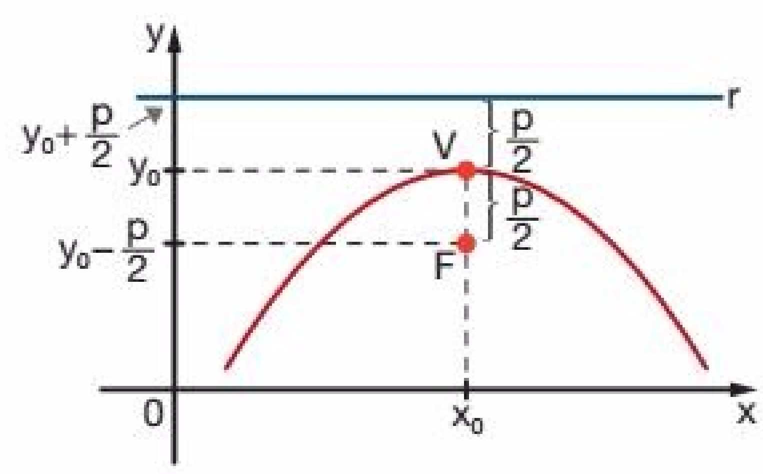
$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$$



foco: $F\left(x_0, y_0+\frac{p}{2}\right)$ reta diretriz: $y=y_0-\frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ou sobre o eixo *x* e vértice *V* abaixo da diretriz.

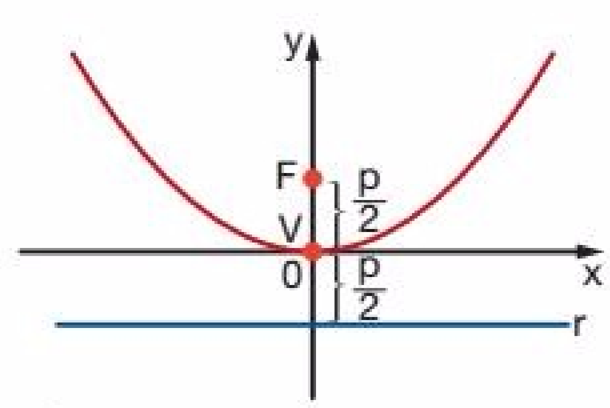
$$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$$



foco: $F\left(x_0, y_0-\frac{p}{2}\right)$ reta diretriz: $y=y_0+\frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ao eixo *x* e vértice $V(0, 0)$ na origem e acima da diretriz.

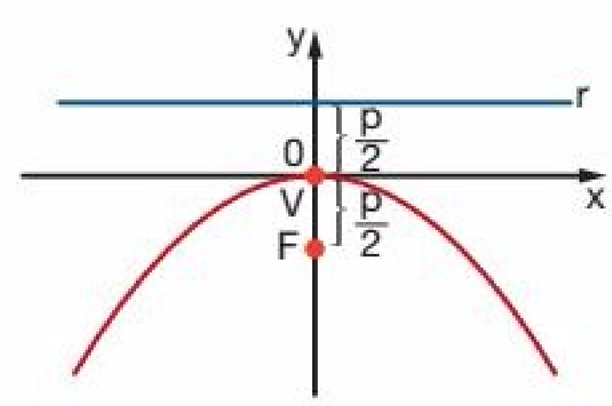
$$x^2=2py$$



foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ reta diretriz: $y=-\frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ao eixo *x* e vértice $V(0, 0)$ na origem e abaixo da diretriz.

$$x^2=-2py$$



Ilustrações: Acervo da editora

foco: $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ reta diretriz: $y=\frac{p}{2}$

Atividades resolvidas

R18. Esboce no plano cartesiano as parábolas cujas equações estão indicadas.

a) $y^2+6y-4x+29=0$

b) $x^2-8x+8y+32=0$

c) $y^2-4y+2x+12=0$

d) $x^2+8x-12y-44=0$

Resolução

a) Utilizando o método de completar quadrados, temos:

$$y^2+6y-4x+29=0 \Rightarrow \underbrace{y^2+6y+9}_{(y+3)^2}=4x-20 \Rightarrow$$

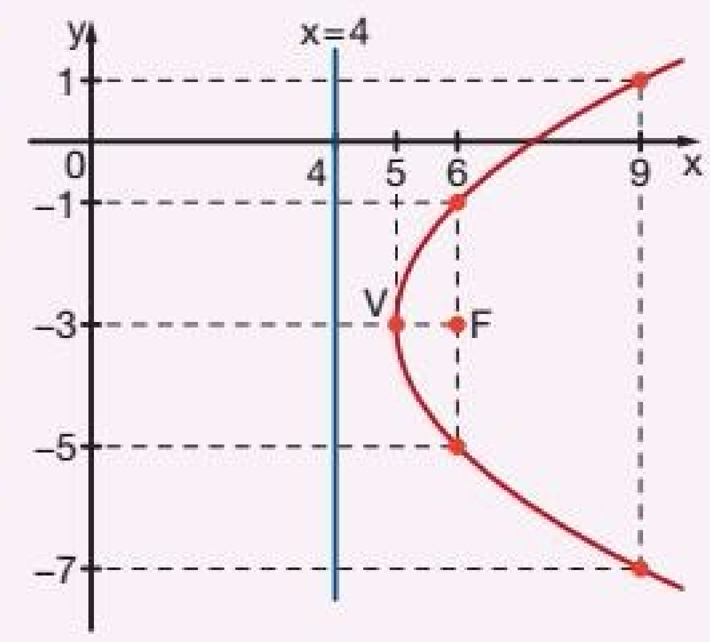
$$\Rightarrow (y+3)^2=4(x-5) \Rightarrow \left[y-(-3)\right]^2=2\cdot 2(x-5)$$

Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo *y*, com vértice em $V(5,-3)$ à direita da diretriz e $p=2$.

Segue que:

- foco: $F\left(x_0+\frac{p}{2},\ y_0\right) \rightarrow F(6,-3)$
- reta diretriz: $x=x_0-\frac{p}{2} \rightarrow x=4$

x	y
6	−5
6	−1
9	−7
9	1



b) Temos:

$$x^2-8x+8y+32=0 \Rightarrow \underbrace{x^2-8x+16}_{(x-4)^2}=-8y-16 \Rightarrow$$

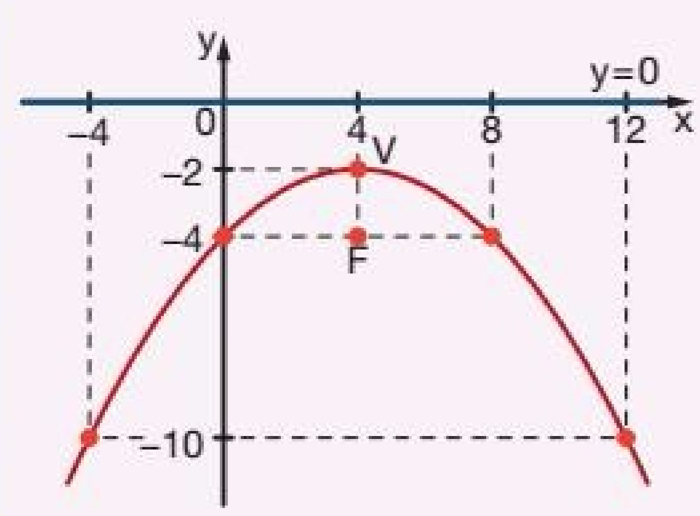
$$\Rightarrow (x-4)^2=-8(y+2) \Rightarrow (x-4)^2=-2\cdot 4\left[y-(-2)\right]$$

Logo, a parábola possui a diretriz sobre o eixo *x*, com vértice em $V(4,-2)$ abaixo da diretriz e $p=4$.

Segue que:

- foco: $F\left(x_0,\ y_0-\frac{p}{2}\right) \rightarrow F(4,-4)$
- reta diretriz: $y=y_0+\frac{p}{2} \rightarrow y=0$

x	y
−4	−10
0	−4
8	−4
12	−10



c) Temos:

$$y^2-4y+2x+12=0 \Rightarrow \underbrace{y^2-4y+4}_{(y-2)^2}=-2x-8 \Rightarrow$$

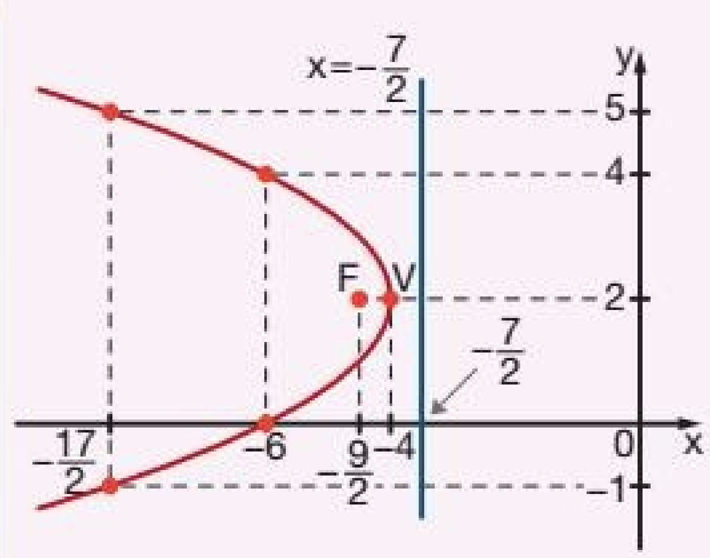
$$\Rightarrow (y-2)^2=-2(x+4) \Rightarrow (y-2)^2=-2\cdot 1\left[x-(-4)\right]$$

Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo *y*, com vértice em $V(-4,2)$ à esquerda da diretriz e $p=1$.

Segue que:

- foco: $F\left(x_0-\frac{p}{2},\ y_0\right) \rightarrow F\left(-\frac{9}{2},\ 2\right)$
- reta diretriz: $x=x_0+\frac{p}{2} \rightarrow x=-\frac{7}{2}$

x	y
$-\frac{17}{2}$	−1
$-\frac{17}{2}$	5
−6	0
−6	4



Ilustrações: Acervo da editora

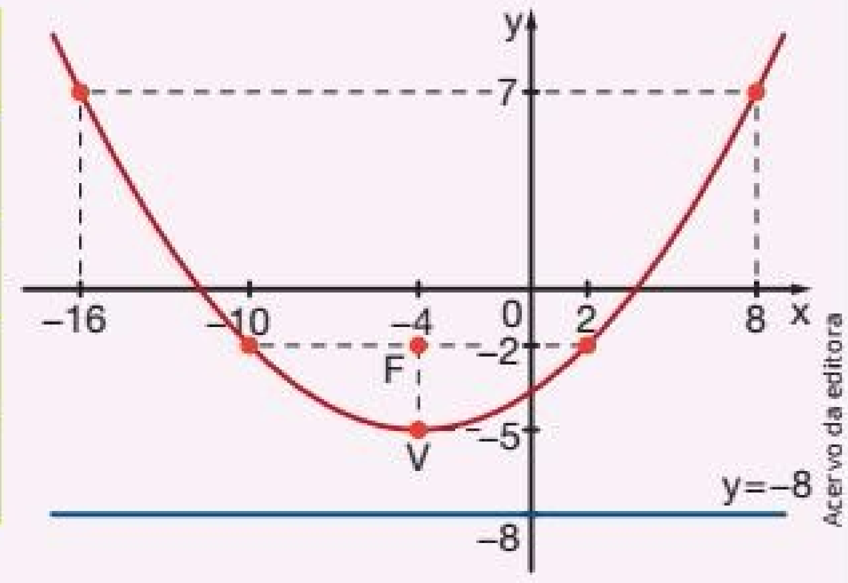
d) Temos:

$$x^2+8x-12y-44=0 \Rightarrow \underbrace{x^2+8x+16}_{(x+4)^2}-16=12y+44 \Rightarrow (x+4)^2=12(y+5) \Rightarrow [x-(-4)]^2=2\cdot 6[y-(-5)]$$

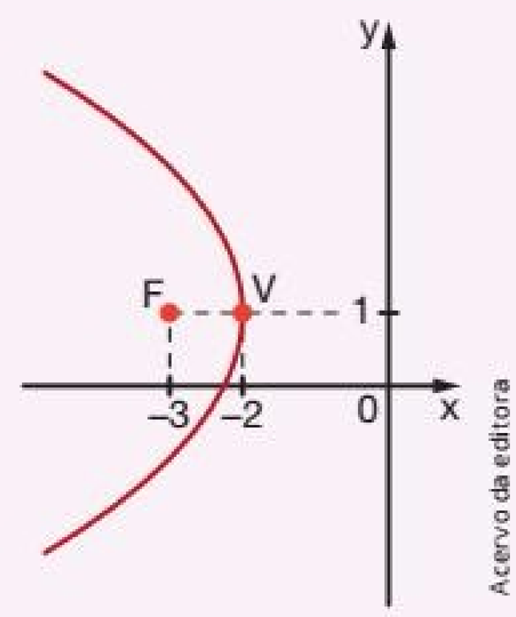
Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo *x*, com vértice em $V(-4,-5)$ acima da diretriz e $p=6$. Segue que:

- foco: $F\left(x_0,\ y_0+\dfrac{p}{2}\right) \rightarrow F(-4,-2)$
- reta diretriz: $y=y_0-\dfrac{p}{2} \rightarrow y=-8$

x	y
−16	7
−10	−2
2	−2
8	7



R19. Determine a equação da parábola representada a seguir.



Resolução

Temos que a equação da parábola é da forma $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$, tal que $V(-2,1)$ e $F(-3,1)$.

Calculando *p*, temos:

$$p=2\cdot FV=2\cdot\left(\sqrt{[-3-(-2)]^2+(1-1)^2}\right)=2\cdot 1=2$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0) \rightarrow \boxed{(y-1)^2=-4(x+2)}$$

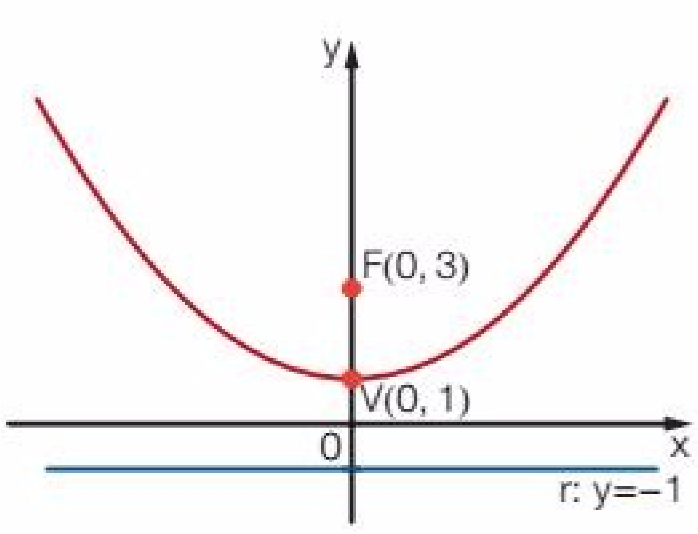
Qual é a equação da reta diretriz dessa parábola? $x=-1$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

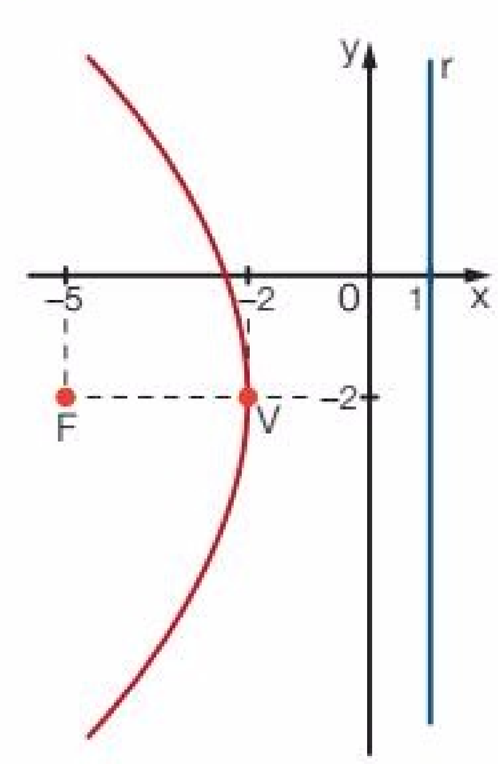
70. Escreva a equação da parábola representada em cada item.

a)



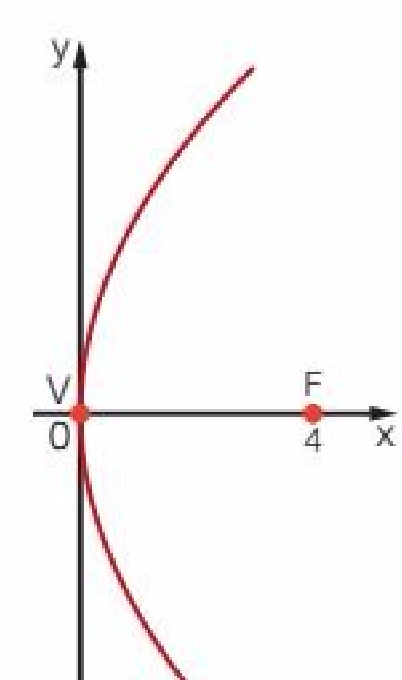
$x^2=8(y-1)$

b)



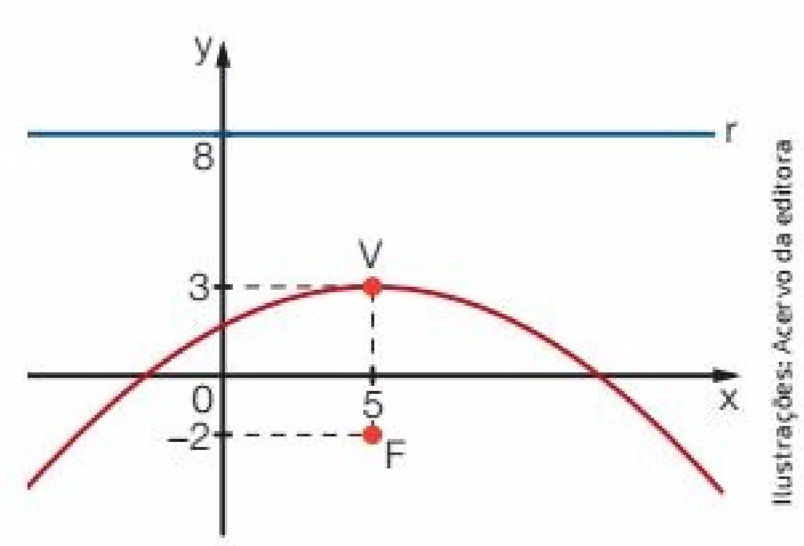
$(y+2)^2=-12(x+2)$

c)



$y^2=16x$

d)



$(x-5)^2=-20(y-3)$

Ilustrações: Acervo da editora

71. Determine o foco F e a reta diretriz da parábola de equação:

a) $(y-8)^2=-6(x+3)$ $F\left(-\frac{9}{2}, 8\right)$; $x=-\frac{3}{2}$

b) $(x-8)^2-12y+96=0$ $F(8, 11)$; $y=5$

c) $x^2+6x-16y+25=0$ $F(-3, 5)$; $y=-3$

72. Verifique quais pontos pertencem à parábola cujo foco é o ponto $F(3, -4)$ e a reta diretriz é $x=9$.
B; D

- $A(0, 0)$
- $B(3, 2)$
- $C(8, -9)$
- $D\left(\frac{2}{3}, 4\right)$
- $E\left(\frac{1}{2}, -5\right)$

73. Qual é o vértice da parábola descrita pela equação $32x+16y^2-8y+33=0$? $V\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

74. Ao lançar uma bola de golfe, podemos determinar sua trajetória aproximada utilizando a equação $y=x\cdot \text{tg}\,\alpha-5\left(\frac{x}{v\cdot\cos\alpha}\right)^2$, na qual α é o ângulo de lançamento e v é a velocidade inicial, em metros por segundo.


Photodisc/Getty Images

Jogador de golfe prestes a realizar uma tacada.

Considerando que uma bola de golfe é lançada à velocidade inicial de 30 m/s em um ângulo de 45° em relação ao solo, responda:

a) Qual é o vértice da parábola que representa essa equação? O que representa o y do vértice? $V\left(45, \frac{45}{2}\right)$; a altura máxima atingida pela bola de golfe

b) A bola de golfe começa a descer após ter percorrido horizontalmente quantos metros? 45 m

c) Qual foi a distância horizontal total percorrida pela bola de golfe? 90 m

75. Esboce em um plano cartesiano as parábolas cujas equações estão indicadas. Respostas no final do livro.

a) $(y+5)^2=24(x-2)$

b) $y=3x-x^2$

c) $x=6y-y^2-2$

76. Dada a cônica de equação $x=2y^2-16y+25$, determine:

a) as coordenadas do vértice $(-7, 4)$

b) a medida do parâmetro p $p=\frac{1}{4}$

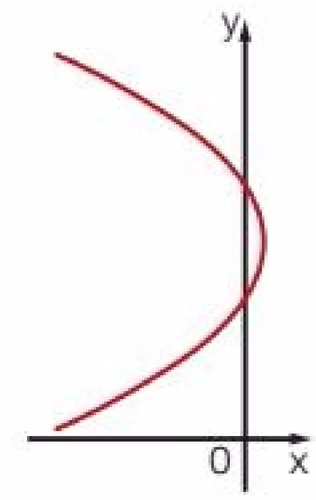
c) a equação da reta diretriz $x=-\frac{57}{8}$

77. Determine a equação da parábola que passa pelos pontos $A(0, 3)$, $B(6, 0)$ e $C(-2, 8)$ e tem eixo de simetria vertical. $(x-4)^2=4(y+1)$

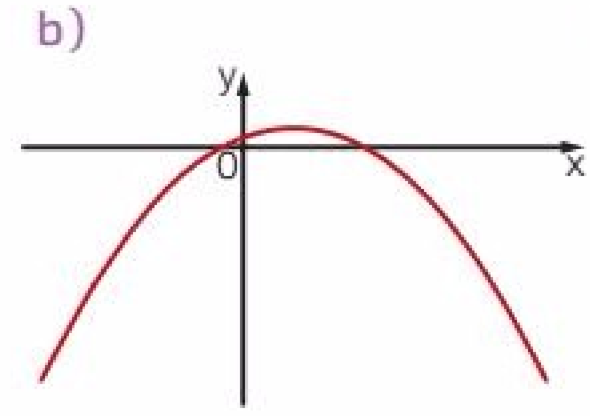
78. Quais parábolas a seguir representam uma função de x em y? a; b

a)

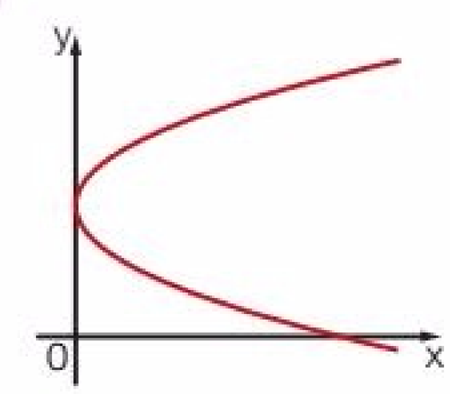
c)



b)

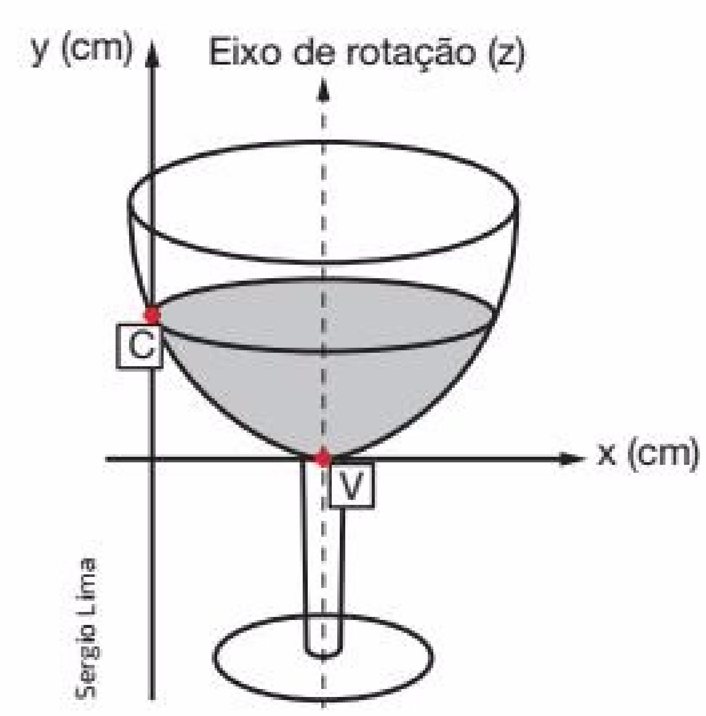


d)



Ilustrações: Acervo da editora

79. (Enem-MEC) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



Sergio Lima

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é: e

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

Capítulo 3

capítulo 4

A estatística

Palê Zuppani/Pulsar

Recenseadora do IBGE, na cidade de Brasília (DF), em 2010.

Censo demográfico

*Diga aos alunos que não houve censo em 1990, pois foi realizado no ano seguinte, em 1991. Isso ocorreu devido à autorização tardia para a contratação de funcionários para sua realização.

Conhecer dados estatísticos sobre os habitantes de determinada localidade não é um interesse exclusivo da atualidade. O registro mais antigo de tal conjunto de dados, que recebe o nome de "censo", data de 2238 a.C., na China. No Brasil, o primeiro censo realizado foi em 1872, antes mesmo de nos tornarmos república.

Com a criação do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 1936, houve uma grande modernização no processo censitário, o que agilizou a coleta e a organização de informações. Foi então que, a partir de 1940, o censo passou a ser realizado a cada dez anos no país.*

As informações obtidas nos censos são de extrema importância para o governo, pois, com base na análise desses dados, ele pode direcionar suas ações: onde investir mais em saúde, educação, implementar projetos para desenvolvimento econômico, entre outras. E a sociedade também pode tirar proveito dessas informações. É possível utilizá-las, por exemplo, para instalar comércios, conhecer o perfil de determinado público e também para cobrar ações do governo a fim de resolver problemas específicos.

Fonte de pesquisa: <http://memoria.ibge.gov.br/sinteses-historicas/historicos-dos-censos/panorama-introdutorio.html>.

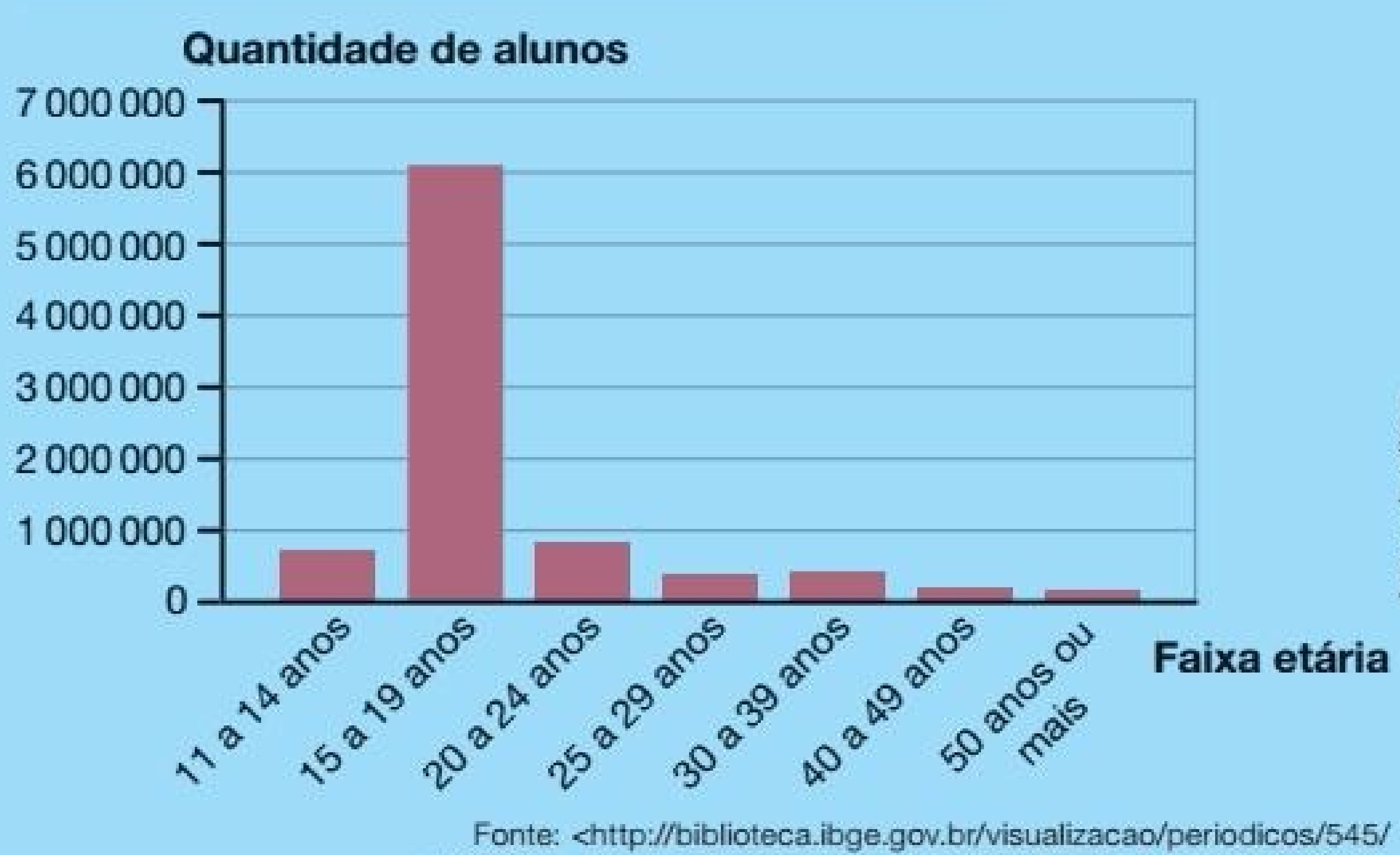
Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A De acordo com o texto, por que a realização do censo é tão importante? Resposta esperada: porque o governo e a sociedade obtêm informações sobre vários aspectos da população, podendo direcionar suas ações.

B Junto com os colegas da turma, façam uma estimativa de quantos alunos há em toda a escola e, em seguida, verifiquem esse dado com o professor ou com a direção da escola. A estimativa feita se aproximou da quantidade real? Justifique. Resposta pessoal. Verifique a informação de quantidade de alunos matriculados na escola previamente.

C O gráfico a seguir representa dados coletados no censo 2010.

Alunos que frequentam o Ensino Médio, por faixa etária, no Brasil em 2010



Fonte: <http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/545/cd_2010_educacao_e_deslocamento.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2016.

Em qual das colunas você se enquadraria em relação à faixa etária? Estime a quantidade total de alunos que frequentavam o Ensino Médio em 2010. Resposta pessoal. 8 875 556 alunos
A resposta indicada neste item é exata e corresponde a um parâmetro para a avaliação da estimativa feita pelos alunos.

Veja mais informações sobre o censo no *site*:
- <http://tub.im/kdp2qw>

(acesso em: 29 mar. 2016)

Estudando estatística

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados os exemplos e as atividades das páginas 208 e 209 da seção Acessando tecnologias.

Estudamos nas páginas **110** e **111** que não é de agora que a estatística é uma ferramenta importante para a humanidade. Um exemplo são os registros de contagem da população desde antes da Era Cristã, como o recenseamento ocorrido no Egito por volta de 2900 a.C.

Atualmente, o estudo da estatística permeia os mais diversos campos do conhecimento, como a Medicina, a Agronomia e a Computação, sendo aplicado não somente com o intuito de constatar fatos, mas também de percepção de tendências. Um governo, por exemplo, utiliza informações de pesquisas atuais acerca da população para prever necessidades futuras, como a quantidade de escolas ou o número de hospitais a serem construídos em certa localidade.

Os meios de comunicação e as evoluções tecnológicas nos levam à exposição cada vez maior de informações apresentadas com tratamento estatístico, como a utilização de gráficos, tabelas e medidas estatísticas.

É importante que, ao nos depararmos com uma informação tratada estatisticamente, tenhamos a capacidade de interpretar, compreender, estabelecer relações e realizar previsões a partir dos dados expostos.

Variáveis estatísticas

Quando o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realiza os chamados censos, busca obter informações sobre o perfil da população brasileira, tais como idade, sexo, grau de instrução, renda, tipo de moradia etc. Em estatística, esses itens são denominados **variáveis**.

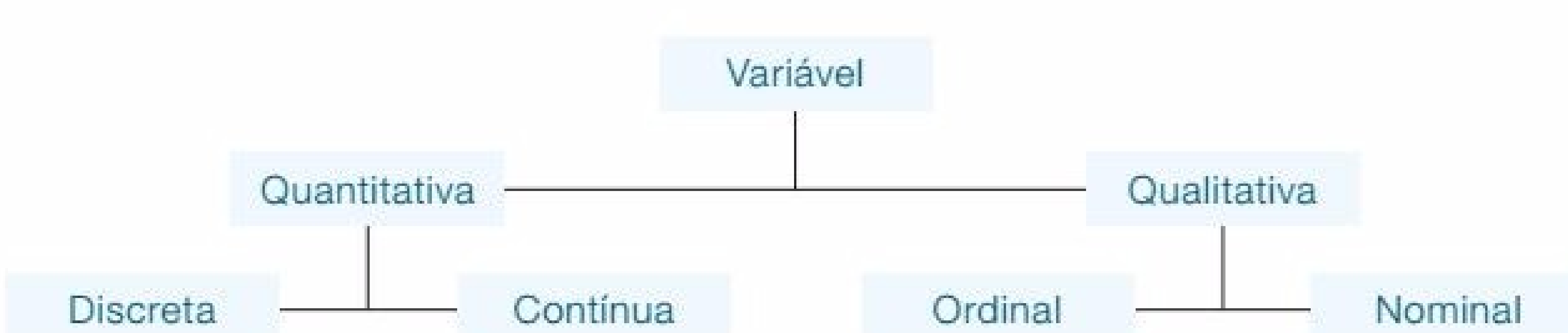
Quando uma variável está relacionada a um valor numérico, como, por exemplo, a altura de uma pessoa ou o número de espécies de animais em um ambiente, é denominada **variável quantitativa**. Já aquela que está relacionada a uma qualidade ou a um atributo, como o sexo de um indivíduo ou o grau de instrução de um trabalhador, é denominada **variável qualitativa**.

Uma variável quantitativa pode ser classificada em:

- **variável quantitativa discreta**, quando pode assumir certos valores, em geral, números inteiros. O número de clientes de um restaurante, a quantidade de alunos matriculados em uma escola e o número de atendimentos em um hospital são exemplos desse tipo de variável.
- **variável quantitativa contínua**, quando pode assumir valores dados em um intervalo real. A massa de uma pessoa é um exemplo de variável quantitativa contínua, pois ela pode assumir como valor, por exemplo, 72 kg, 72,5 kg ou 72,58 kg.

Por sua vez, uma variável qualitativa pode ser classificada em:

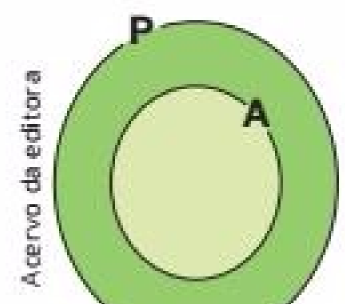
- **variável qualitativa ordinal**, quando se refere a uma categoria que, mesmo não sendo numérica, pode ser ordenada. O nível de desenvolvimento de um país é um exemplo desse tipo de variável, pois um país pode ter alto, médio ou baixo nível de desenvolvimento.
- **variável qualitativa nominal**, quando não é numérica e tampouco há uma ordenação subjetiva. A cor dos automóveis vendidos em uma concessionária e o esporte predileto de uma pessoa são exemplos dessa variável.



População e amostra estatística

Quando uma pesquisa estatística é planejada, diversos elementos relacionados a ela devem ser definidos, como as variáveis que constarão no questionário. Outro fator importante no planejamento é estabelecer quem será consultado nessa pesquisa. Para obter a altura dos alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, por exemplo, é possível consultar todos os alunos da turma, que constituem a **população** ou **universo estatístico** dessa pesquisa.

Em outros casos, é impossível ou inviável consultar todos os indivíduos da pesquisa. Durante as campanhas eleitorais para presidente da República, por exemplo, é inviável questionar todos os eleitores do país sobre sua intenção de voto, uma vez que isso demandaria muito tempo e recursos financeiros. Nesses casos, seleciona-se um subconjunto da população, chamado **amostra**, que possa representar essa população da melhor maneira possível. Para que a amostra seja representativa, ela deve ter as principais características da população à qual pertence. No exemplo apresentado, os eleitores selecionados para responder a sua intenção de voto para a eleição presidencial correspondem à amostra da pesquisa.



Acervo da editora

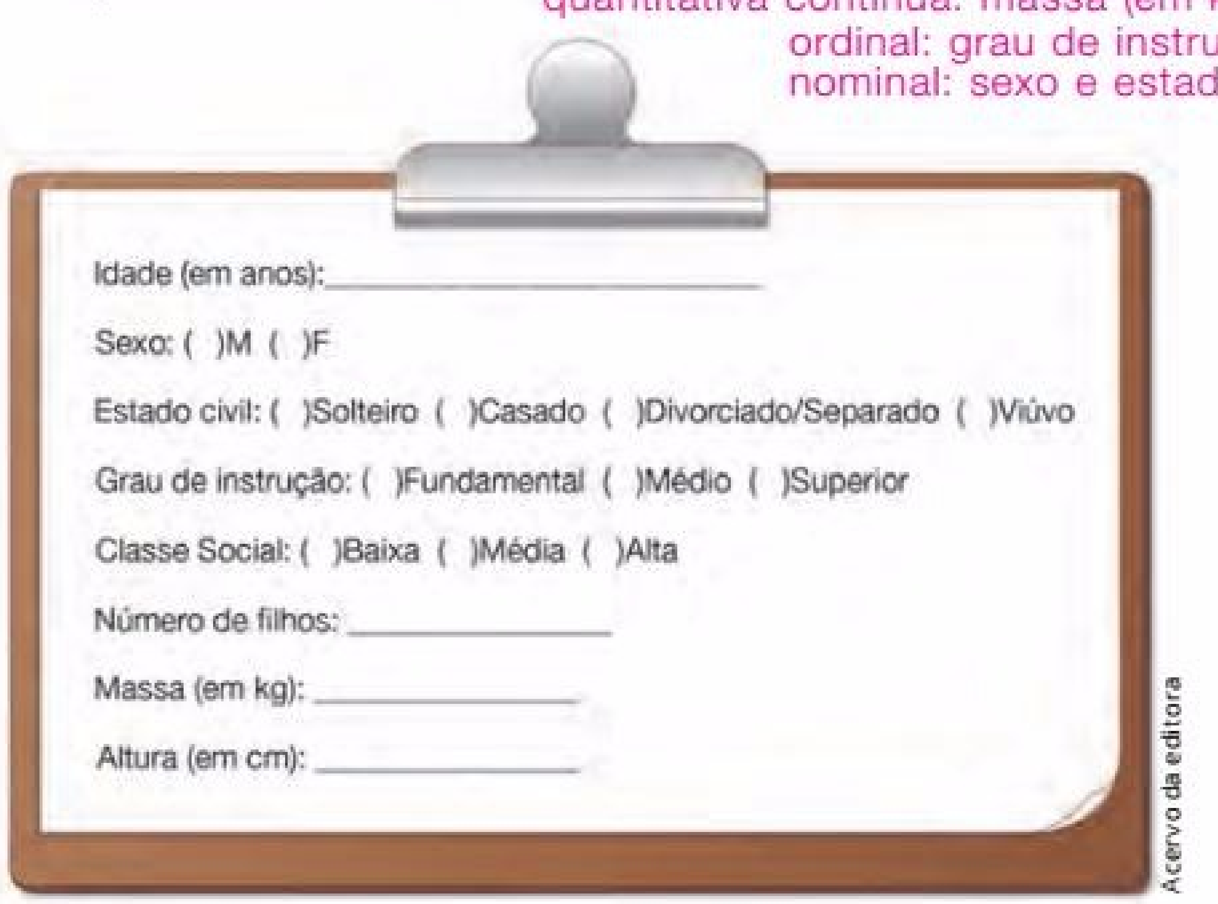
P: população
A: amostra

$A \subset P$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Classifique cada variável apresentada no questionário a seguir em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa ordinal ou qualitativa nominal. quantitativa discreta: idade (em anos) e número de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução e classe social; qualitativa nominal: sexo e estado civil



Idade (em anos): ____________

Sexo: ( )M ( )F

Estado civil: ( )Solteiro ( )Casado ( )Divorciado/Separado ( )Viúvo

Grau de instrução: ( )Fundamental ( )Médio ( )Superior

Classe Social: ( )Baixa ( )Média ( )Alta

Número de filhos: ____________

Massa (em kg): ____________

Altura (em cm): ____________

Acervo da editora

2. Na Pesquisa Nacional por Amostragem de Domicílio (Pnad) de 2014, o IBGE, para obter informações referentes aos 203 191 000 habitantes da época, aplicou o questionário a uma amostra de 362 627 pessoas.

Elabore um questionário a ser aplicado à turma em que você estuda, utilizando variáveis quantitativas e qualitativas. Por fim, estabeleça um critério para formar uma amostra, como: escolher uma fileira, fazer sorteio aleatório etc. Resposta pessoal. Fica a critério do professor a aplicação desta atividade na prática, ou seja, a realização efetiva ou não da pesquisa por amostra pelos alunos.

3. Seja *P* o conjunto dos elementos que compõem determinada população em uma pesquisa estatística e *A* um subconjunto de *P*, correspondente à amostra que será pesquisada. Em que circunstância temos $A = P$? Quando todo elemento da população *P* também é elemento da amostra *A*, ou seja, quando todos os elementos da população serão pesquisados.

4. Uma fábrica de automóveis pretende produzir mensalmente 5 000 unidades de um novo modelo. Porém, com o objetivo de testar os itens de segurança, a fábrica realizará uma pesquisa simulando acidentes com esse automóvel. Em sua opinião, nessa pesquisa, o fabricante utilizará a população ou uma amostra dos automóveis desse novo modelo? Justifique sua resposta. Resposta esperada: o fabricante utilizará uma amostra, uma vez que é inviável realizar a simulação com todas as 5 000 unidades produzidas mensalmente desse modelo de automóvel.

Gráficos e tabelas

Os gráficos e as tabelas são recursos estatísticos muito úteis para resumir e apresentar os resultados obtidos em uma pesquisa. As tabelas são utilizadas para organizar as informações e apresentá-las de modo mais simples ao leitor. Já os gráficos, além de simplificar a exposição dos dados obtidos na pesquisa, possibilitam uma análise mais detalhada acerca da evolução das variáveis ou de como elas se relacionam. Há diversos tipos de gráficos, e a escolha do mais adequado à situação depende de uma série de fatores, como o objetivo do pesquisador e as características das informações a serem apresentadas.

Tabelas

Assim como os gráficos, as tabelas devem apresentar em sua estrutura **título** e **fonte**. O título deve conter informações suficientes para explicitar o que está sendo apresentado. A fonte deve identificar a origem dos dados apresentados.

Em tabelas, os dados são apresentados em linhas e colunas, contribuindo para a leitura e a interpretação das informações.

Observe a tabela abaixo.

Pontos mais elevados do Brasil em 2015 — título

Nome (estado)	Altitude (m)
Pico da Neblina (AM)	2 995,30
Pico 31 de Março (AM)	2 974,18
Pico da Bandeira (MG/ES)	2 891,32
Pedra da Mina (MG/SP)	2 798,06
Pico das Agulhas Negras (MG/RJ)	2 790,94
Pico do Cristal (MG)	2 769,05
Monte Roraima (RR)	2 734,05

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.inde.gov.br/noticias-inde/8530-geociencias-ibge-reve-as-altitudes-de-sete-pontos-culminantes.html>. Acesso em: 28 abr. 2016. — fonte

Paulo Pinto/Estadão Conteúdo

Pico da Neblina, no Amazonas, em 2012.

Analisando essa tabela, chegamos a algumas conclusões, como:

- o ponto que possui a maior altitude no Brasil é o Pico da Neblina;
- o Pico do Cristal, em Minas Gerais, tem 2 769,05 m de altitude.

Note que, para chegarmos a essas conclusões, temos que observar a tabela horizontalmente, ou seja, analisar suas linhas. Contudo, há tabelas em que devemos analisar, simultaneamente, as linhas e as colunas. Essas são as tabelas de dupla entrada. Observe.

População indígena (quesito cor ou raça) no Brasil, segundo a situação do domicílio, nos censos demográficos de 1991, 2000 e 2010

	1991	2000	2010
Urbana	71 026	383 298	315 180
Rural	223 105	350 829	502 783
Total	294 131	734 127	817 963

Fonte: IBGE. Disponível em: <http://indigenas.ibge.gov.br/graficos-e-tabelas-2.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Renato Soares/Pulsar

Indígenas Kayapó, em São Félix do Xingu (PA), em 2015.

Nessa tabela, para identificar a população indígena urbana brasileira no ano 2000, temos que observar o valor correspondente à coluna “2000” e à linha “Urbana”. Nesse caso, a população era de 383 298 indígenas.

Gráfico de barras

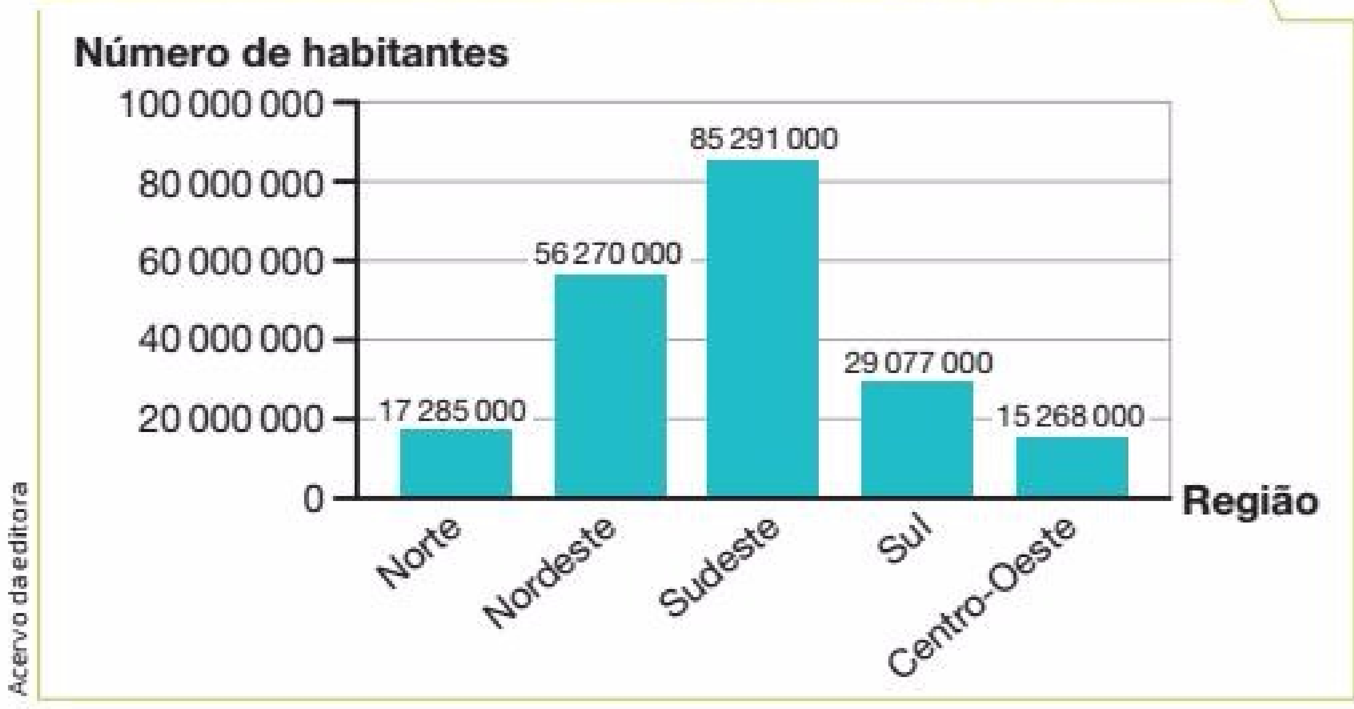
Os gráficos de barras (ou de colunas) representam os dados pesquisados por meio de retângulos que podem estar dispostos na vertical (**gráfico de barras verticais**) ou na horizontal (**gráfico de barras horizontais**). Esse tipo de gráfico é muito utilizado para comparar entre si os dados obtidos na pesquisa.

No gráfico de barras verticais, os retângulos têm larguras (medida horizontal) iguais e alturas (medida vertical) proporcionais aos valores representados. Já no gráfico de barras horizontais, os retângulos têm alturas iguais e as larguras é que variam.

Observe os exemplos.

- Gráfico de barras verticais

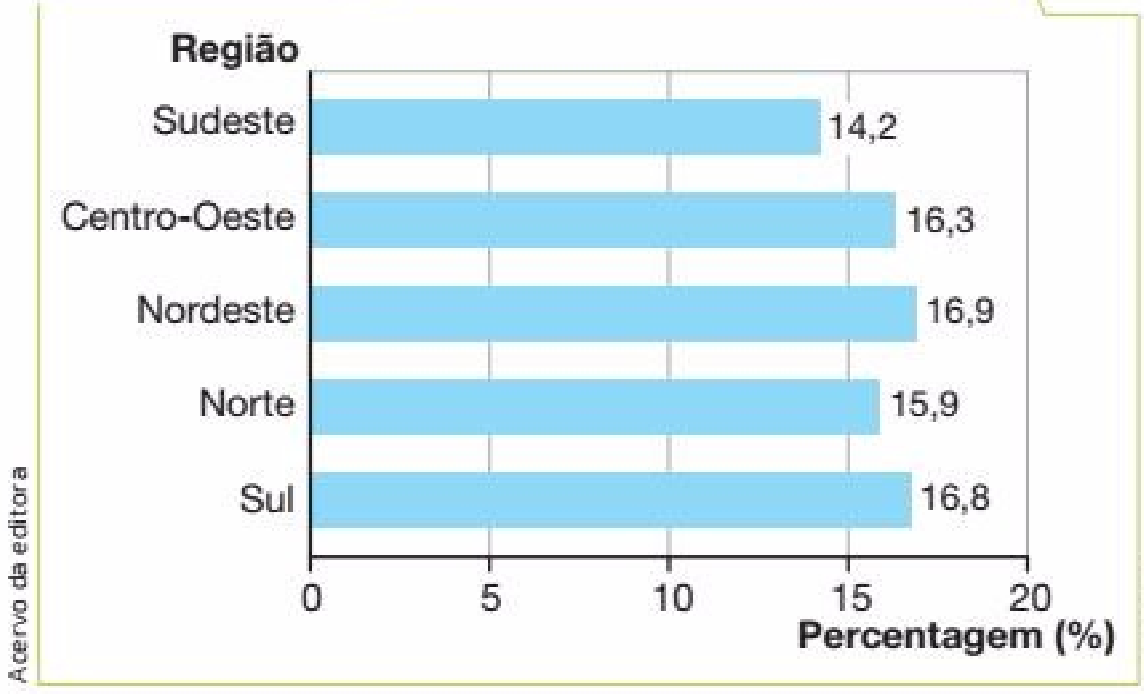
População brasileira estimada por região em 2014



Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/trabalhoerendimento/pnad2014/brasil_defaultxls_grandes.shtm>. Acesso em: 18 jan. 2016.

- Gráfico de barras horizontais

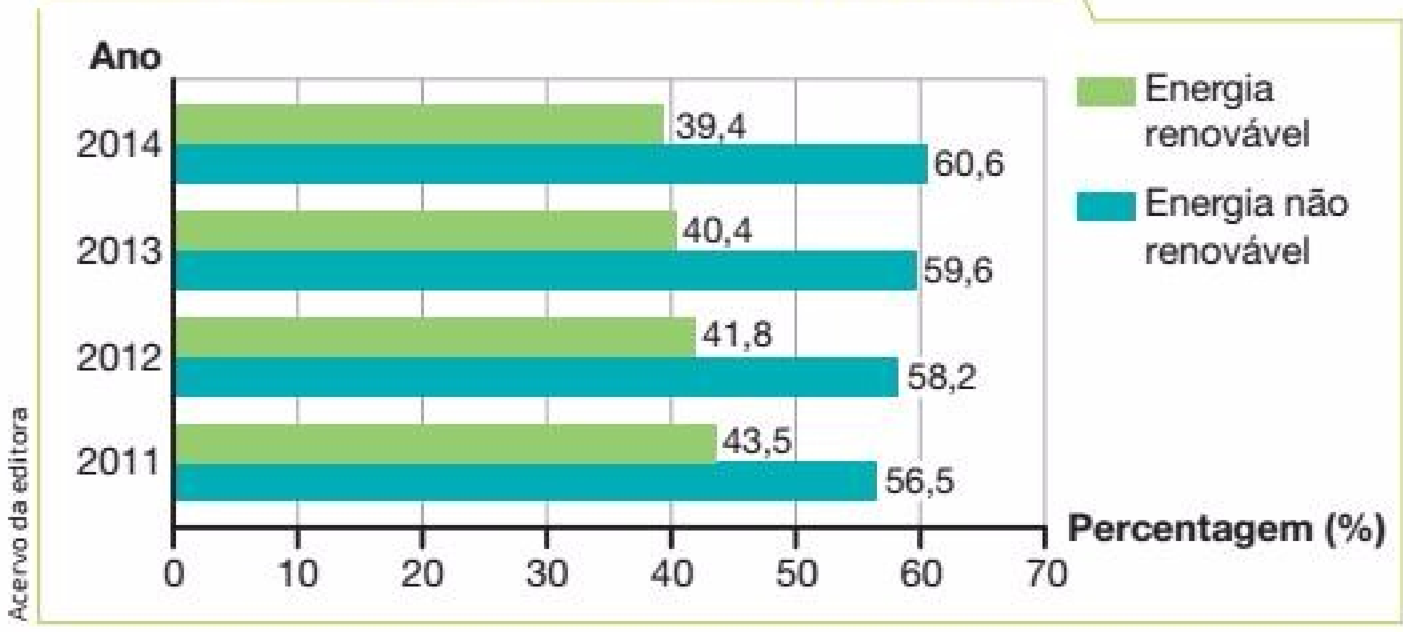
Jovens de 15 a 17 anos de idade fora da escola nas regiões do Brasil em 2013



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv91983.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Há também os gráficos de barras múltiplas, em que é possível representar mais de um fenômeno no mesmo gráfico de barras verticais ou horizontais, contribuindo para a comparação e a verificação de relações entre eles. Observe um exemplo.

Oferta de energia no Brasil de 2011 a 2014



Fonte: Balanço Energético Nacional. Disponível em: <https://ben.epe.gov.br/downloads/Relatorio_Final_BEN_2015.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2016.

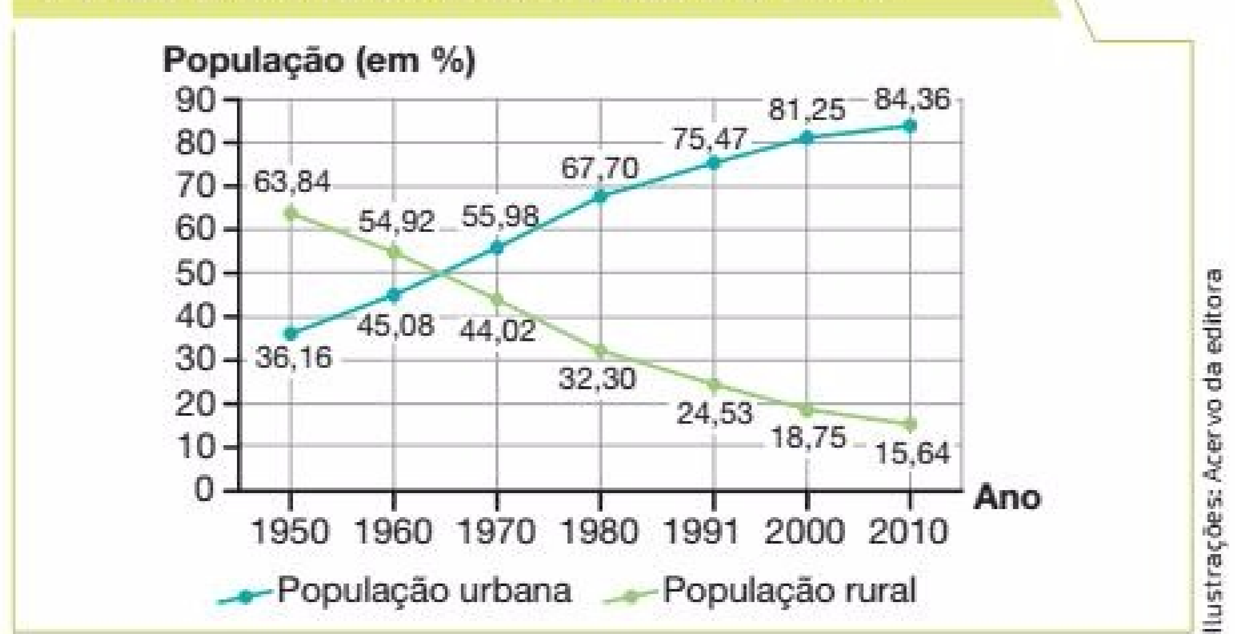
Gráfico de linhas

Os gráficos de linhas (ou gráficos de segmentos) são utilizados, em geral, para representar a variação contínua de um fenômeno no decorrer do tempo. Esse tipo de gráfico facilita suposições em relação a tendências do fenômeno pesquisado em períodos de tempo posteriores ao apresentado, como crescimento, decrescimento ou constância. Observe os exemplos.

Taxa de fecundidade no Brasil de 1940 a 2015

Fonte: IBGE. Disponível em: <http://7a12.ibge.gov.br/vamos-conhecer-o-brasil/nosso-povo/nupcialidade-e-fecundidade.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.
Fonte: <http://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-de-fecundidade-total.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Distribuição da população brasileira nas zonas urbana e rural de 1950 a 2010



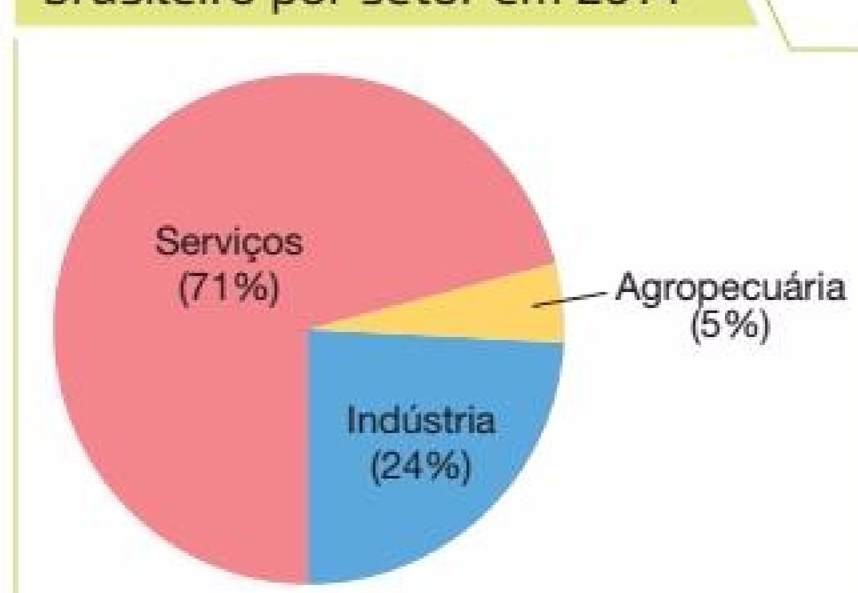
Fonte: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/popul/default.asp?t=3&z=t&o=25&u1=1&u2=1&u3=1&u4=1&u5=1&u6=1>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Como os gráficos de linhas tratam da variação de uma grandeza em relação à outra, podemos dizer que eles nos reportam ao conceito de função. No gráfico **Taxa de fecundidade no Brasil**, o número de filhos por mulher está em função do tempo.

Gráfico de setores

Os gráficos de setores, em geral, são utilizados para comparar as partes de um conjunto de dados com o todo. Para isso, costuma-se utilizar a porcentagem correspondente a cada uma dessas partes. Esse gráfico consiste em um círculo dividido em tantas partes quantas forem as divisões dos dados, e cada setor obtido é proporcional à parte por ele representada. Observe o exemplo.

Distribuição do PIB brasileiro por setor em 2014



Fonte: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&c=1846>. Acesso em: 19 jan. 2016.

É possível obter a medida do ângulo central correspondente a cada setor do gráfico acima por meio de regra de três:

- Agropecuária: $\dfrac{\overset{100\%}{\widehat{1}}}{\underbrace{0,05}_{5\%}} = \dfrac{360°}{x_A} \Rightarrow x_A = 18°$

- Indústria: $\dfrac{\overset{100\%}{\widehat{1}}}{\underbrace{0,24}_{24\%}} = \dfrac{360°}{x_B} \Rightarrow$

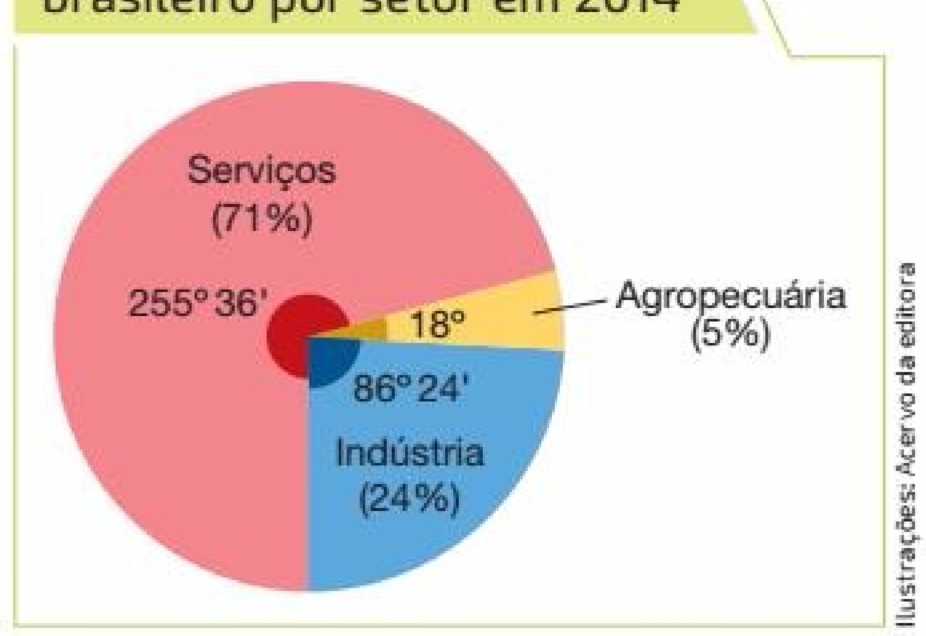
  $\Rightarrow x_B = 86,4° = 86°\ 24'$

Lembre-se de que $1° = 60'$ e, dessa maneira, temos:
- $86,4° = 86° + 0,4 \cdot 60' = 86°\ 24'$
- $255,6° = 255° + 0,6 \cdot 60' = 255°\ 36'$

- Serviços: $\dfrac{\overset{100\%}{\widehat{1}}}{\underbrace{0,71}_{71\%}} = \dfrac{360°}{x_C} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x_C = 255,6° = 255°\ 36'$

Distribuição do PIB brasileiro por setor em 2014



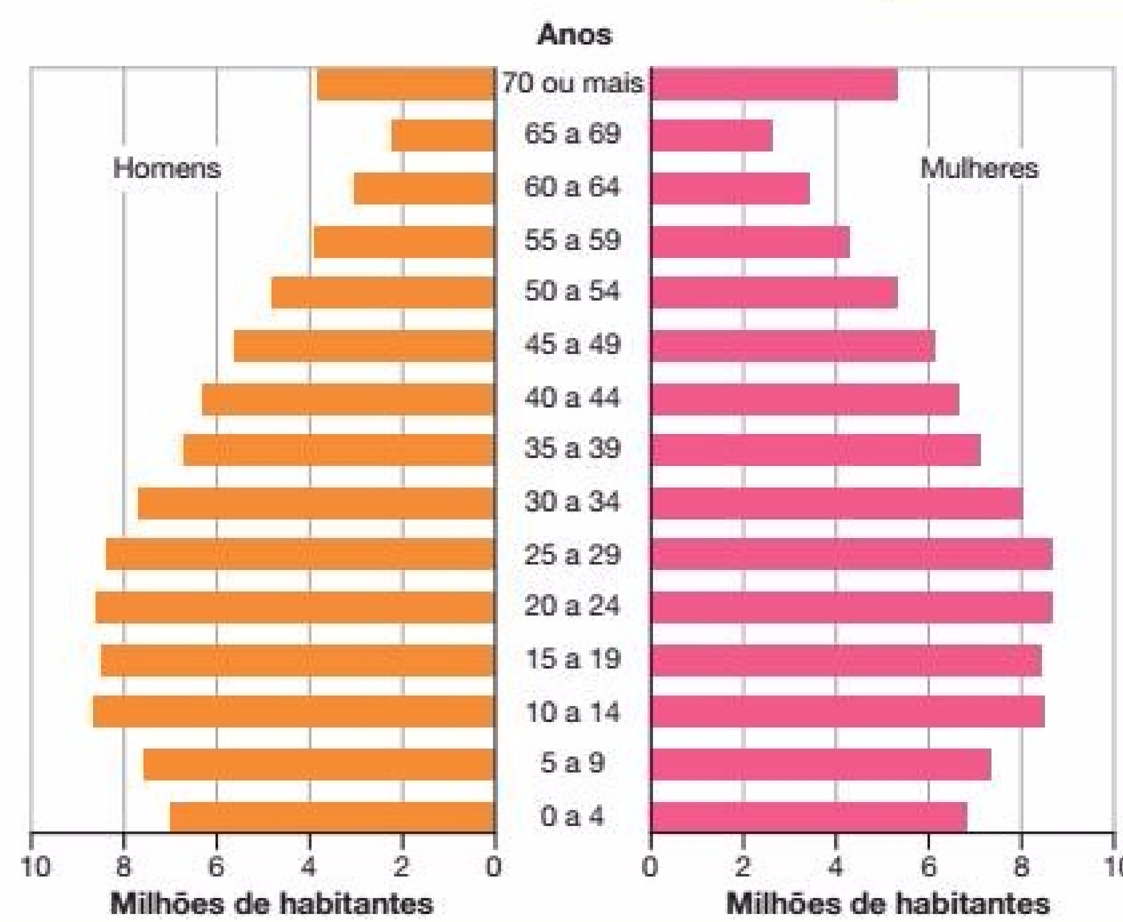
Fonte: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&c=1846>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Pirâmide etária

As pirâmides etárias são um tipo de gráfico utilizado para representar uma população cuja distribuição está disposta em faixas etárias. Nesse tipo de gráfico, costuma-se organizar os dados de maneira que na parte inferior (base) estejam as faixas etárias dos mais jovens e, na parte superior (topo), as faixas etárias dos mais idosos.

No exemplo ao lado, além das faixas etárias, a população também está organizada por gênero: homens e mulheres.

População do Brasil em 2010, classificada por sexo e faixa etária



Fonte: IBGE. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice>. Acesso em: 26 jan. 2016.

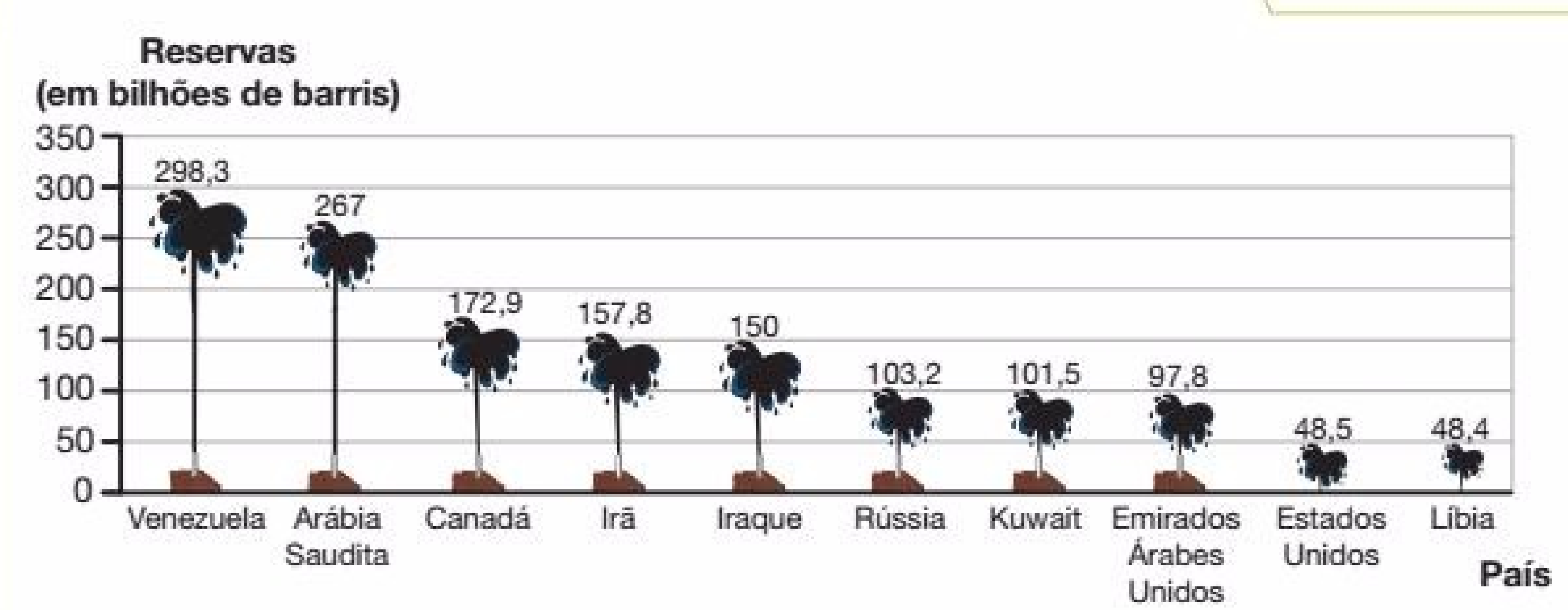
Acervo da editora

Pictograma

Os pictogramas ou gráficos pictóricos são gráficos que utilizam em sua apresentação figuras, fotografias ou outros recursos visuais relacionados ao contexto tratado. Essas imagens tornam o pictograma mais atrativo ao leitor e, por isso, é um tipo de gráfico muito utilizado em revistas, jornais etc.

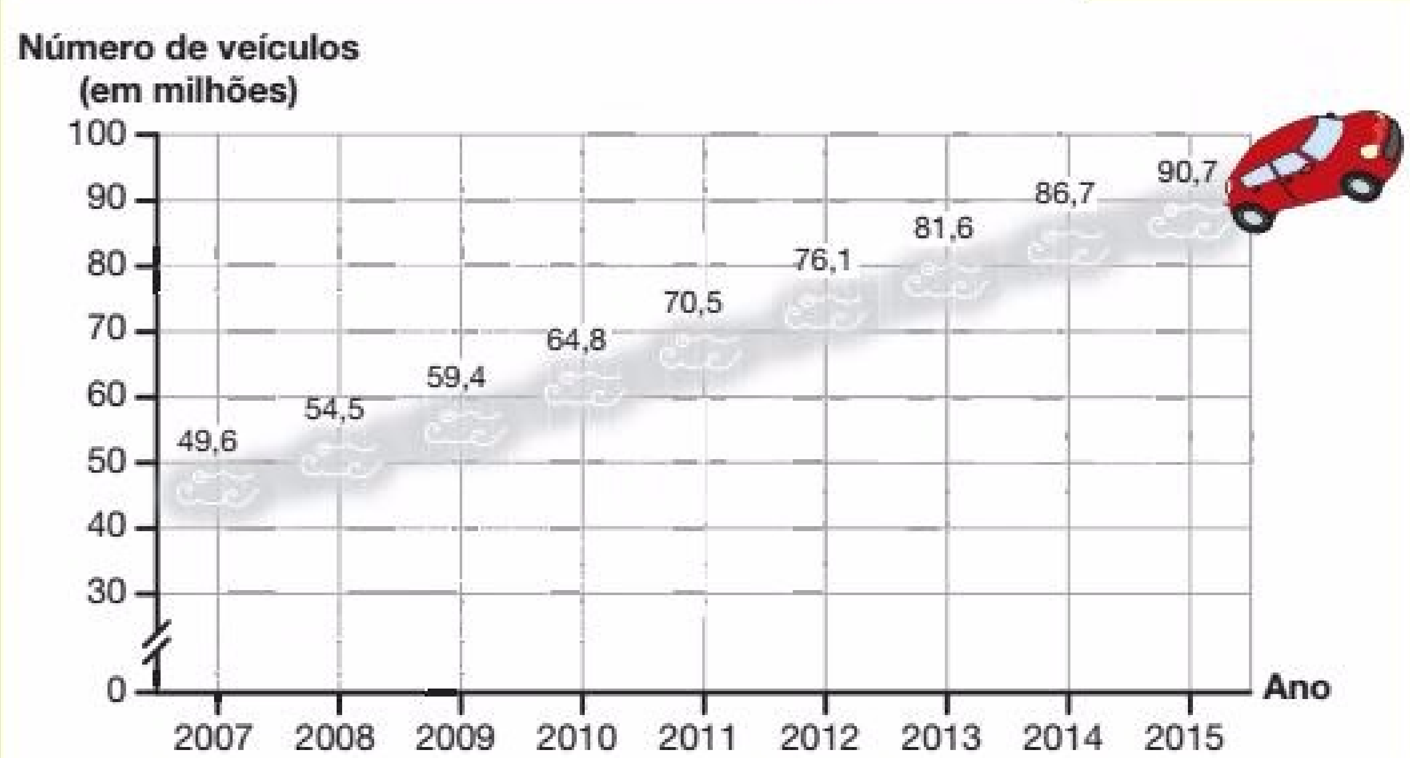
Veja a seguir algumas situações envolvendo pictogramas.

Países com as maiores reservas de petróleo em 2014



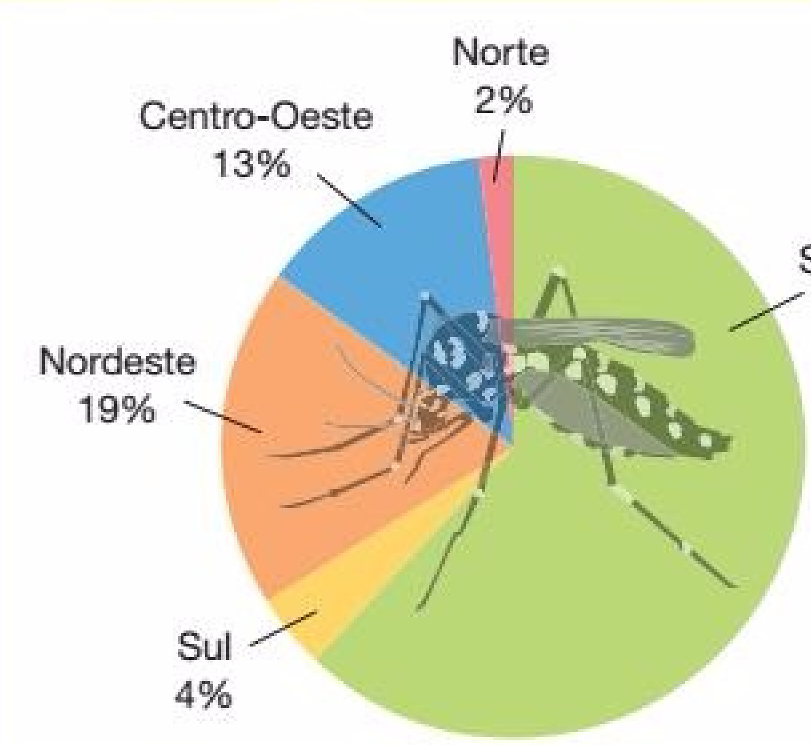
Fonte: Revista EXAME. Disponível em: <http://exame.abril.com.br//economia/noticias/estes-10-paises-tem-as-maiores-reservas-de-petroleo-no-mundo/lista>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Frota de veículos no Brasil de 2007 a 2015



Fonte: DENATRAN. Disponível em: <www.denatran.gov.br/frota.htm>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Percentual de casos prováveis de dengue por região no Brasil em 2015



Fonte: Portal Saúde. Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br/images/pdf/2016/janeiro/15/svs2016-be003-dengue-se52.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2016.

Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 4

5. A falta de água potável em diversas regiões do mundo já é uma realidade. Desde o tratamento adequado de esgotos residenciais e industriais, passando pelo uso correto da água na agricultura, até o combate ao desperdício de água em situações corriqueiras, como o banho, são exemplos de atitudes que devemos tomar para garantir a nossos descendentes o direito a esse bem vital.

As tabelas a seguir apresentam algumas informações relacionadas à água.

I — Consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras em 2013

	Consumo diário (litros/habitante)
Brasil	166
Norte	156
Nordeste	126
Sudeste	194
Sul	150
Centro-Oeste	161

Fonte: <www.snis.gov.br/diagnostico-agua-e-esgotos/diagnostico-ae-2013>. Acesso em: 19 jan. 2016.

II — Quantidade de água necessária para produzir alguns produtos

Produto (1 kg)	Quantidade de água (em litros)
Café	21 000
Arroz	5 200
Açúcar	3 340
Leite	2 000
Trigo	286

Fonte: <http://revistagalileu.globo.com/Revista/Galileu/0,,EDG82626-7943-201,00-O+PLANETA+PEDE+AGUA.html>. Acesso em: 20 jan. 2016.

a) Quais dados são apresentados em cada tabela?

b) Qual região brasileira apresentou menor consumo médio de água por habitante em 2013? E qual apresentou maior consumo? Nordeste; Sudeste

c) Em 2013, o Brasil tinha cerca de 201 milhões de habitantes. Quantos litros de água, aproximadamente, foram consumidos diariamente no Brasil em 2013? 33 366 000 000 L

d) Dos produtos apresentados na tabela II, quais necessitam de uma quantidade de água inferior a 7 000 L para que sejam produzidos 2 kg? açúcar; leite; trigo

e) Quantos litros de água, no total, são necessários para produzir 500 g de cada um dos produtos apresentados na tabela II? 15 913 L

f) Calcule quantos litros de água, em média, foram consumidos em 2013 na sua região por uma família com o mesmo número de integrantes que a sua. Resposta pessoal.

6. (Enem-MEC) O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010

Região	Doadores	Número de habitantes	Doadores/habitantes
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são: b

a) Norte, Centro-Oeste e Sul
b) Norte, Nordeste e Sudeste
c) Nordeste, Norte e Sul
d) Nordeste, Sudeste e Sul
e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste

7. Com base na tabela a seguir, construa um gráfico de barras horizontais e elabore algumas questões. Depois, troque suas questões com um colega e, ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta no final do livro. Resposta pessoal.

Distribuição do rebanho bovino nas regiões brasileiras em 2014

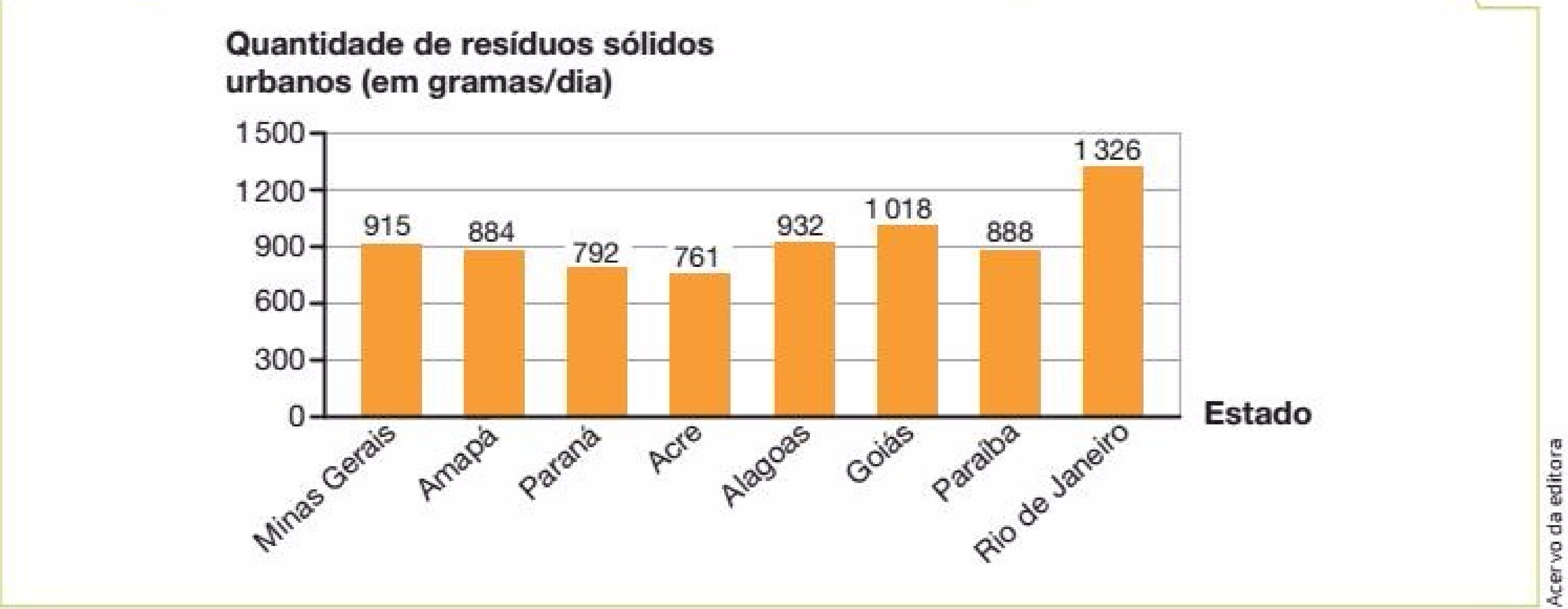
Região	Distribuição (%)
Centro-Oeste	33,3
Norte	21,9
Sudeste	18,1
Nordeste	13,9
Sul	12,9

Fonte: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/file/Dados%20de%20rebanho%20bovino%20e%20bubalino%20do%20Brasil%202014.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

5. a) Na tabela I é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2013. Na tabela II é apresentada a quantidade de água necessária para produzir alguns produtos.

8. Observe o gráfico e resolva.

Produção de resíduos sólidos urbanos por pessoa em alguns estados em 2014



Fonte: <www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2014.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

a) Podemos afirmar que a quantidade diária de resíduos sólidos urbanos produzida por pessoa no Acre é menor que a quantidade produzida no Paraná? Justifique. Resposta no final do livro.

b) Em 2014, a população urbana do estado de Goiás era cerca de 6 036 000 habitantes. Calcule a quantidade diária aproximadamente de resíduos sólidos urbanos produzida, em quilogramas, nesse estado. 6 144 648 kg

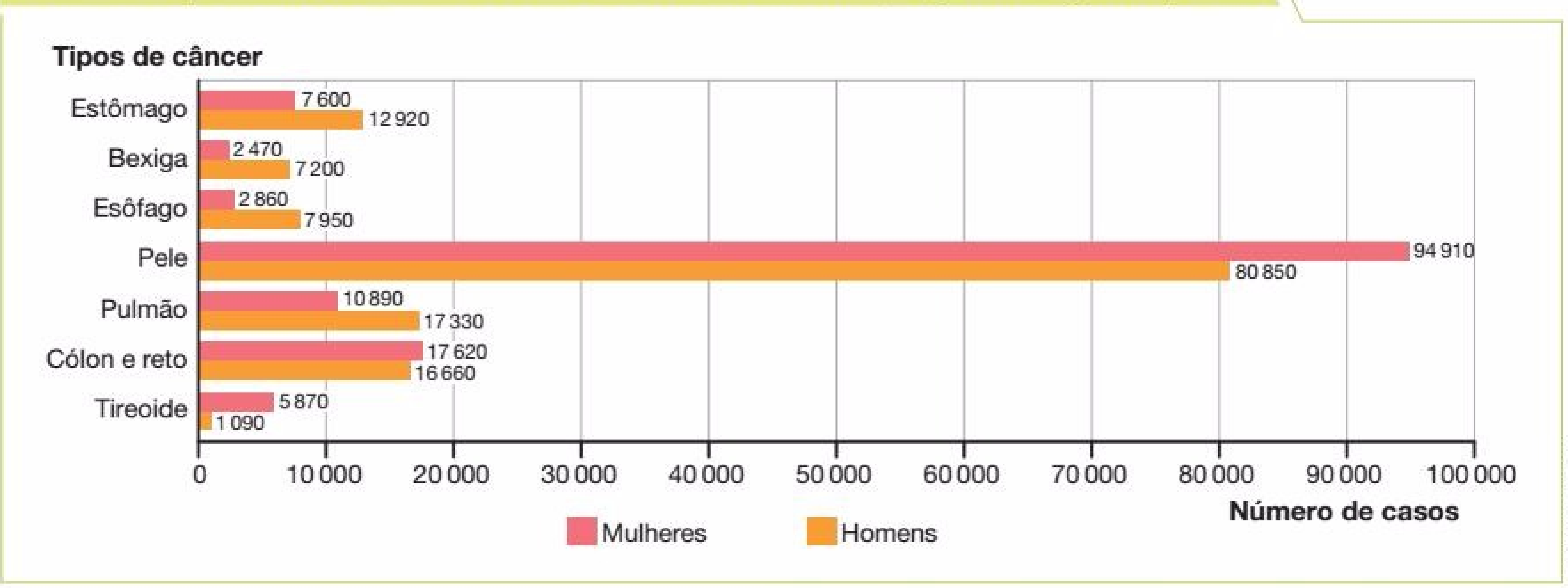
c) Cite algumas medidas que podemos tomar para diminuir a produção de lixo. Resposta pessoal.

9. O câncer é uma patologia que pode atacar diversas partes do organismo, não possui sintomas específicos e pode ser detectado em vários estágios de evolução. As causas do câncer podem ser externas (relacionadas ao meio ambiente, aos hábitos e aos costumes) ou internas ao organismo (na maioria das vezes, geneticamente predeterminadas). De 80% a 90% dos casos de câncer são causados por fatores externos, como o cigarro, que causa o câncer de pulmão (os fumantes têm 10 vezes mais chances de desenvolver câncer de pulmão do que os não fumantes); a exposição excessiva ao sol, que causa o câncer de pele; e alguns vírus, que podem causar a leucemia.

Fontes de pesquisa: <www1.inca.gov.br/conteudo_view.asp?id=322>. Acesso em: 1º fev. 2016.
<www2.inca.gov.br/wps/wcm/connect/dia_mundial_sem_tabaco/site/2012/deixe_de_fumar>. Acesso em 1º fev. 2016.

Observe algumas informações no gráfico e responda.

Estimativa para novos casos de câncer no Brasil em 2016, segundo alguns tipos



Fonte: <www.inca.gov.br/wcm/dncc/2015/por-tipos.asp>. Acesso em: 21 jan. 2016.

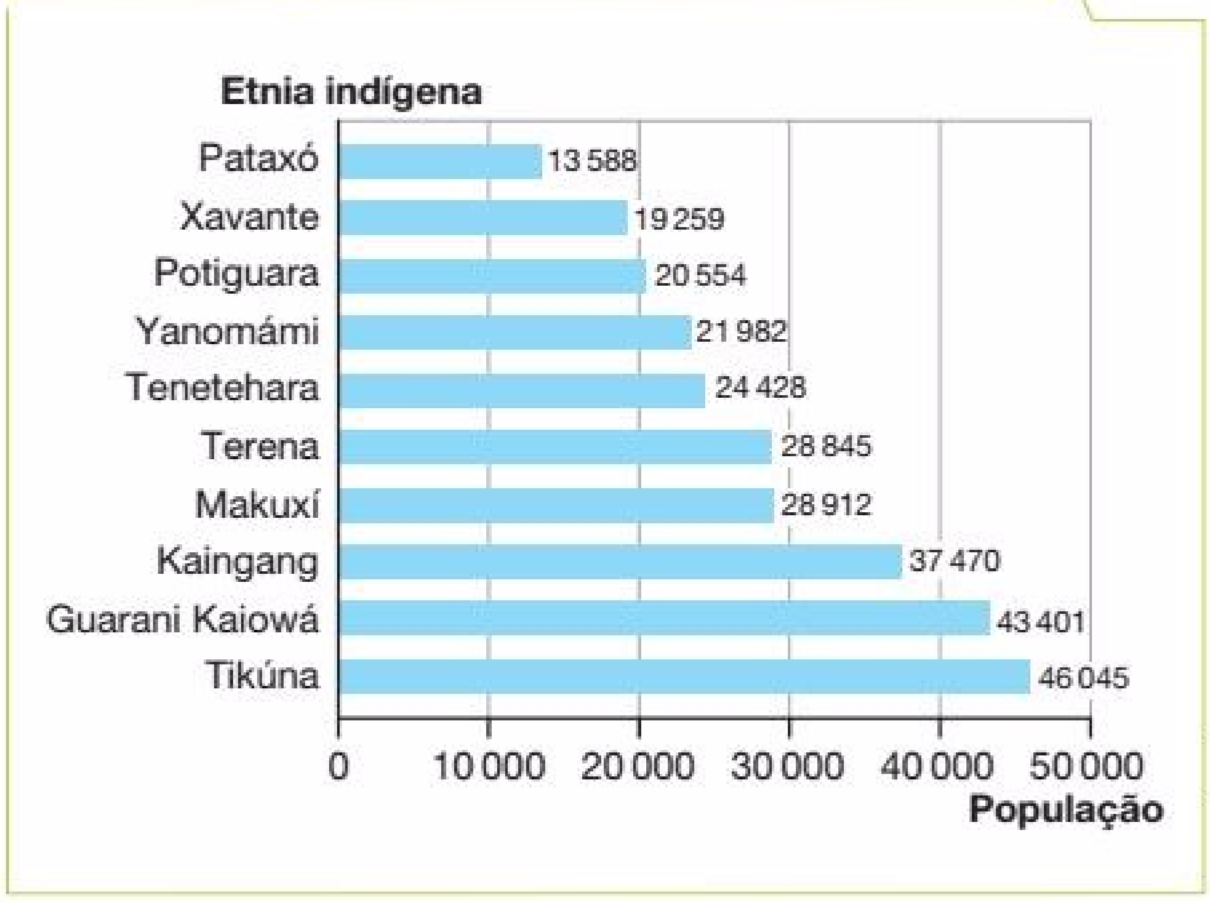
a) Estima-se que em 2016 os homens serão a maioria diagnosticada com alguns tipos de câncer. Quais são esses tipos? câncer de estômago; câncer de bexiga; câncer de esôfago; câncer de pulmão

b) Qual a estimativa de novos casos de câncer de pulmão que serão diagnosticados no Brasil em 2016? 28 220 novos casos

c) Da estimativa dos casos de câncer de bexiga que serão diagnosticados no Brasil em 2016, qual o percentual aproximado de diagnósticos em homens? 74,46%

10. Nas páginas **110** e **111** foram apresentadas informações históricas sobre a finalidade do censo. No censo demográfico realizado pelo IBGE em 2010, foram coletadas informações específicas sobre os povos indígenas, entre elas, a etnia a qual perteciam, a língua falada e se residiam ou não em terras indígenas. Observe o gráfico e resolva as questões.

Etnias indígenas mais populosas do Brasil em 2010, segundo classificação do IBGE



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/95/cd_2010_indigenas_universo.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Indígenas da etnia Pataxó na Reserva da Jaqueira, em Porto Seguro (BA), em 2015.

a) Quais são as duas etnias com as populações mais próximas à metade da apresentada pelo povo Tikúna? Yanomámi e Tenetehara

b) Calcule a população indígena aproximada que declarou pertencer a alguma etnia, sabendo que os Tikúna correspondem a 6,8% desse total. 677,1 mil

c) Junte-se a um colega e pesquisem informações sobre uma das etnias apresentadas no gráfico, como região do país onde mais se concentra e costumes próprios. Depois, compartilhem com a turma as informações pesquisadas. Resposta pessoal.

11. De grandes, pesados e restritos a um pequeno grupo de privilegiados, os aparelhos celulares passaram a ser uma grande fonte de universalização de tecnologia. Atualmente, em média, temos no Brasil mais de 1 celular por habitante. Veja o gráfico abaixo.

Número de celulares por grupo de 100 habitantes no Brasil de 2007 a 2014

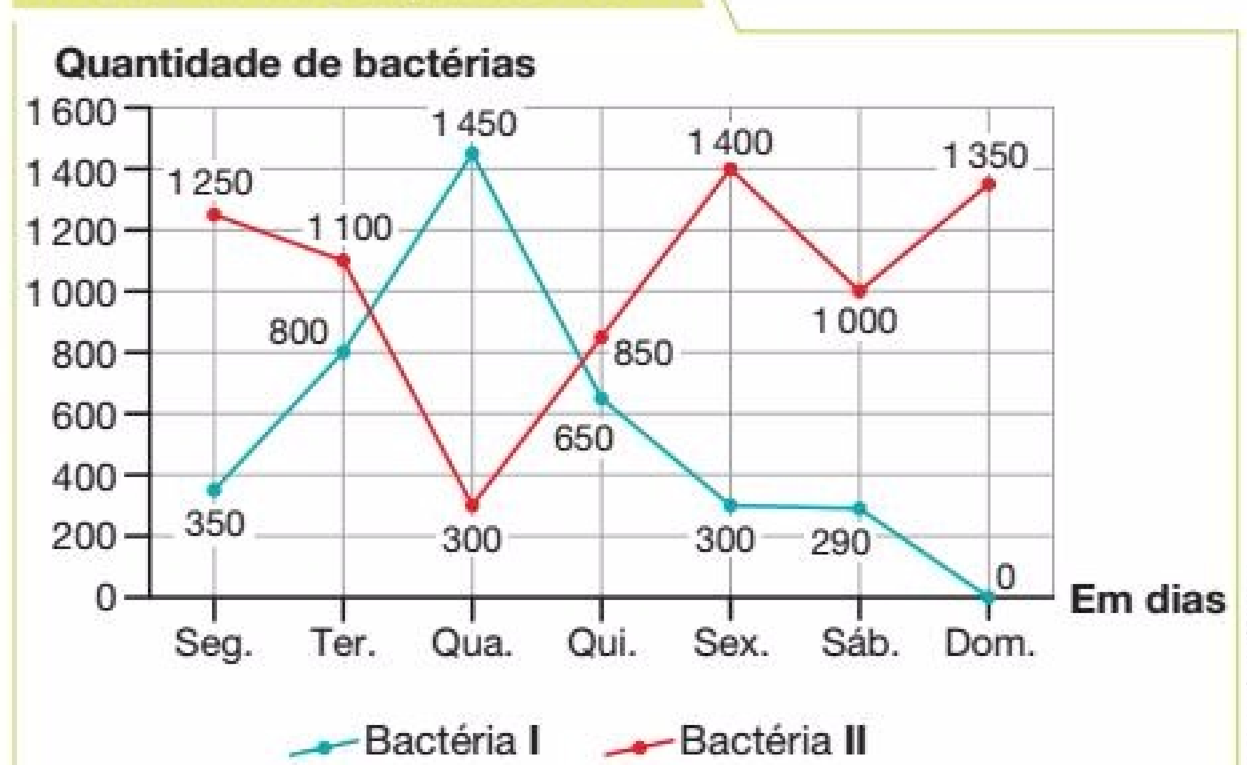
Fonte: <www.teleco.com.br/ncel_hist.asp>. Acesso em: 22 jan. 2016.

a) Em qual ano o Brasil ultrapassou, em média, a marca de mais de 1 celular por brasileiro? 2010

b) Entre quais anos consecutivos ocorreu a maior variação no número de celulares por grupo de 100 habitantes no Brasil? De quanto foi essa variação? entre 2010 e 2011; 18,8 celulares por grupo de 100 habitantes

12. (Enem-MEC) Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Bactérias das espécies I e II



Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima? a

a) Terça-feira
b) Quarta-feira
c) Quinta-feira
d) Sexta-feira
e) Domingo

13. A partir da tabela, construa um gráfico de linhas para representar a população do Brasil nos anos indicados. Resposta no final do livro.

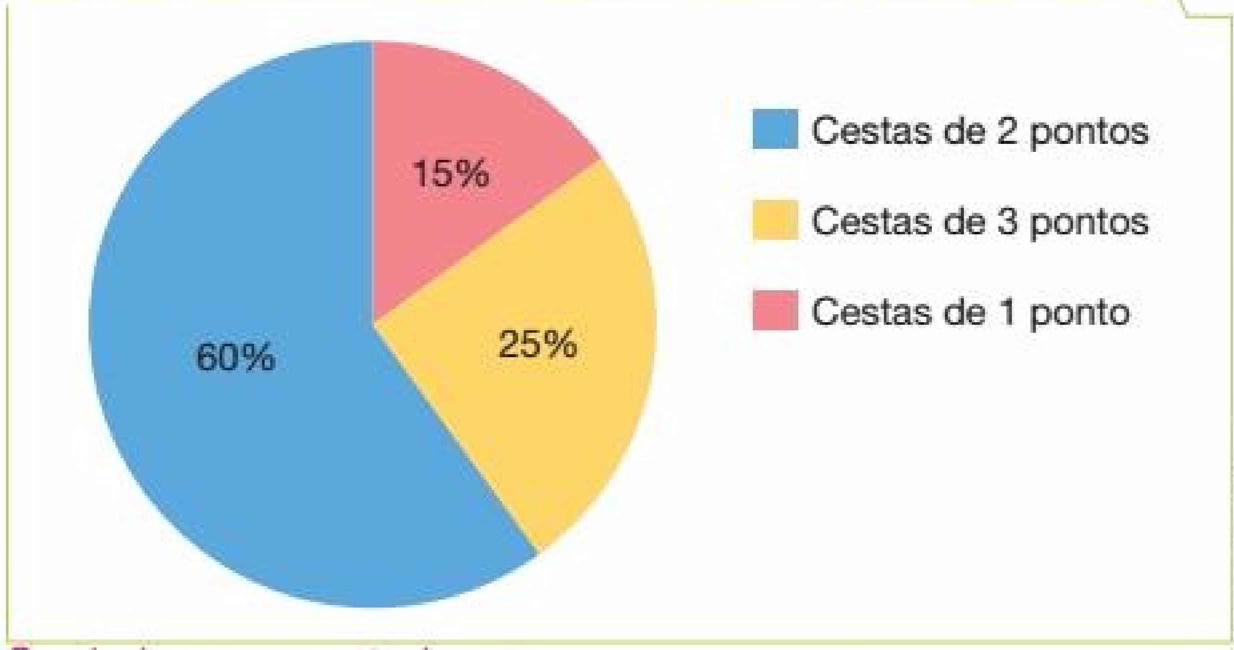
População do Brasil de 1940 a 2010

Ano	População (em quantidade de pessoas)
1940	41 236 315
1950	51 944 397
1960	70 992 343
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 799 170
2010	190 755 799

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/popul/default.asp?t=3&z=t&o=25&u1=1&u2=1&u3=1&u4=1&u5=1&u6=1>. Acesso em: 22 jan. 2016.

14. O gráfico representa as cestas convertidas por uma equipe, em uma partida de basquete, de acordo com a pontuação correspondente.

Cestas convertidas de acordo com a pontuação



Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte: Súmula da partida.

a) De quantos pontos foi a maior parte das cestas convertidas pela equipe? cestas de 2 pontos

b) Sabendo que essa equipe converteu 40 cestas ao todo, qual foi a pontuação obtida por ela na partida? 84 pontos

15. Uma instituição de Ensino Superior oferece cursos de graduação em diferentes áreas de conhecimento. Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Distribuição dos cursos por área de conhecimento

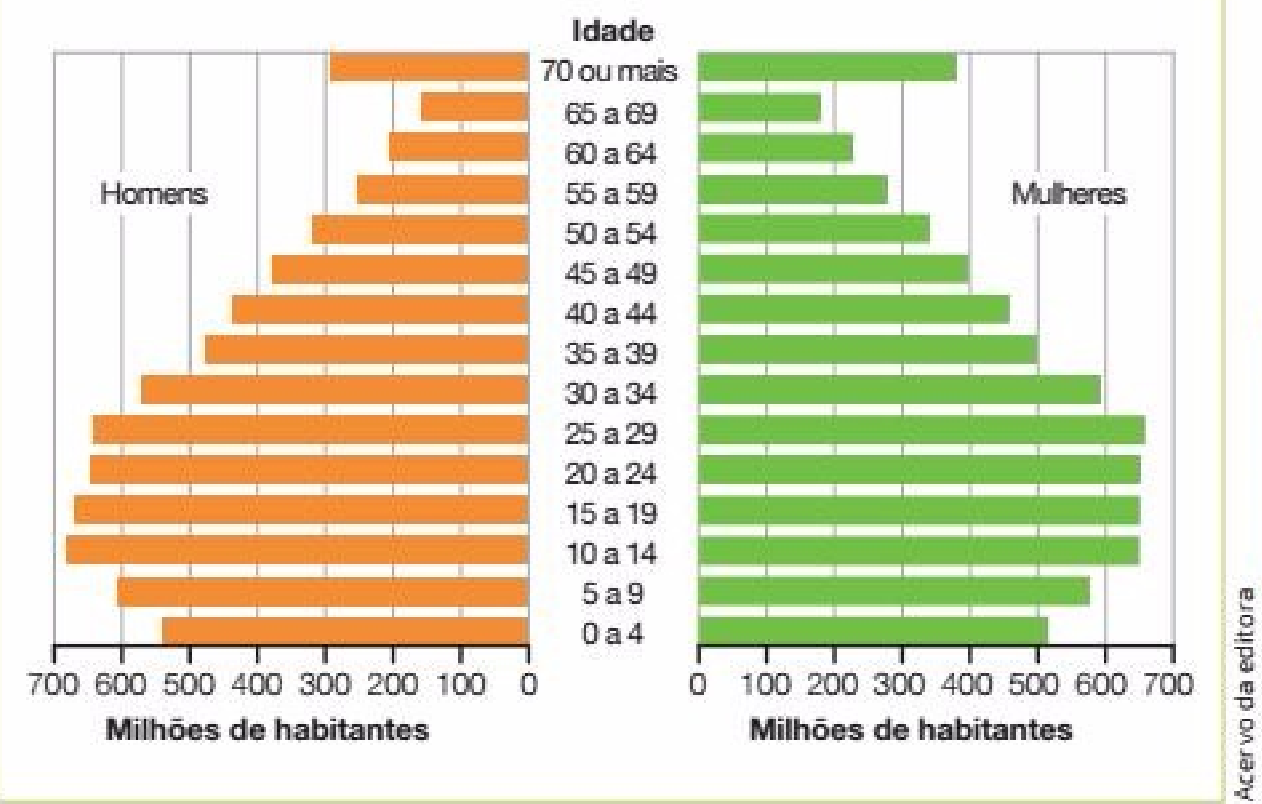
Área de conhecimento	Quantidade de cursos
Exata	13
Humana	8
Biológica	9
Tecnológica	10

Fonte: Catálogo da instituição.

Construa um gráfico de setores para representar os dados da tabela. Resposta no final do livro.

16. De acordo com as informações da pirâmide etária, resolva as questões.

População residente na Bahia, por sexo e grupo de idade em 2010



Fonte: IBGE. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice/default.php?cod1=29&cod2=&cod3=31&frm=>. Acesso em: 26 jan. 2016.

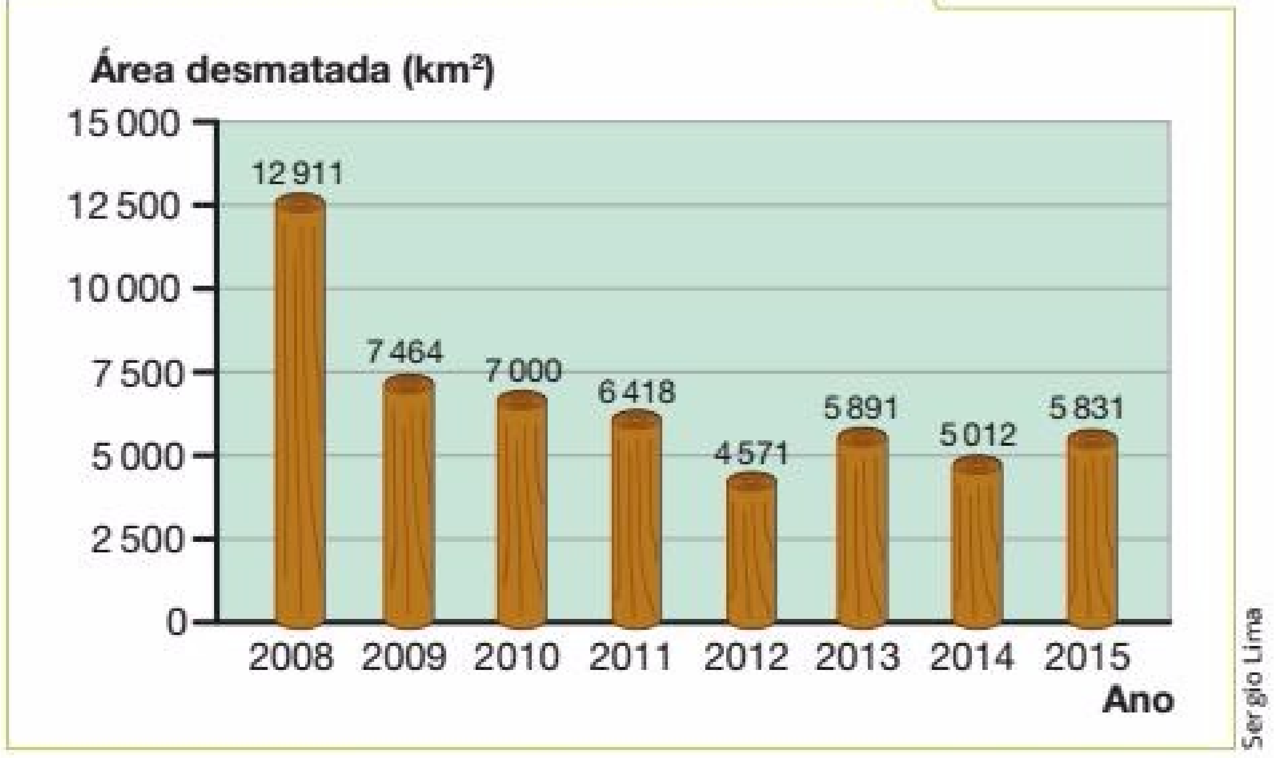
a) Quais faixas etárias possuem entre 640 mil e 650 mil indivíduos entre os homens? 20 a 24 anos e 25 a 29 anos

b) Na faixa etária entre 0 e 4 anos há mais homens ou mulheres? E na faixa etária entre 60 e 64? homens; mulheres

c) Aproximadamente quantas pessoas são da mesma faixa etária que você? A resposta depende da idade do aluno.

17. Observe as áreas florestais desmatadas na Amazônia Legal.

Desmatamento na Amazônia Legal de 2008 a 2015



Fonte: <www.obt.inpe.br/prodes/prodes_1988_2015n.htm>. Acesso em: 27 jan. 2016.

a) Em qual ano foi registrada a maior área desmatada? 2008

b) Podemos afirmar que a área desmatada a cada ano, no período apresentado, foi sempre decrescente em relação ao ano anterior? Por quê? não; Resposta esperada: entre os anos de 2012 e 2013, 2014 e 2015 a área desmatada foi crescente.

c) Determine, em porcentagem, o aumento na área desmatada em 2015 em relação à 2014. aproximadamente 16,34%

Medidas de tendência central

As **medidas de tendência central** são utilizadas quando é necessário representar, por um único valor, um conjunto de dados, obtidos em uma pesquisa. Essas medidas indicam que os dados tendem a concentrar-se em torno dele. Nesse tópico, iremos estudar as medidas de tendência central média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana.

Quando dizemos, por exemplo, que a média dos rendimentos do trabalhador brasileiro em agosto de 2015 era de R$ 1 866,00, indicamos que esse é um valor que representa o conjunto formado pela renda de todos os trabalhadores brasileiros considerados na pesquisa.

Fonte de pesquisa: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/trabalhoerendimento/pnad_continua/default.shtm>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Média aritmética

A **média aritmética**, ou simplesmente média, é a medida de tendência central mais utilizada para representar um conjunto de dados. Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, adicionamos esses números e dividimos o resultado obtido pela quantidade de números adicionados.

A média aritmética $(\overline{x})$ de um conjunto de *n* valores $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Exemplo

Observe a seguir o número de transplantes de fígado realizados no Brasil a cada ano, de 2007 a 2014.

Transplantes de fígado no Brasil de 2007 a 2014

Ano	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Número de transplantes	1 008	1 177	1 334	1 413	1 496	1 598	1 723	1 755

Fonte: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2014/rbt2014-lib.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

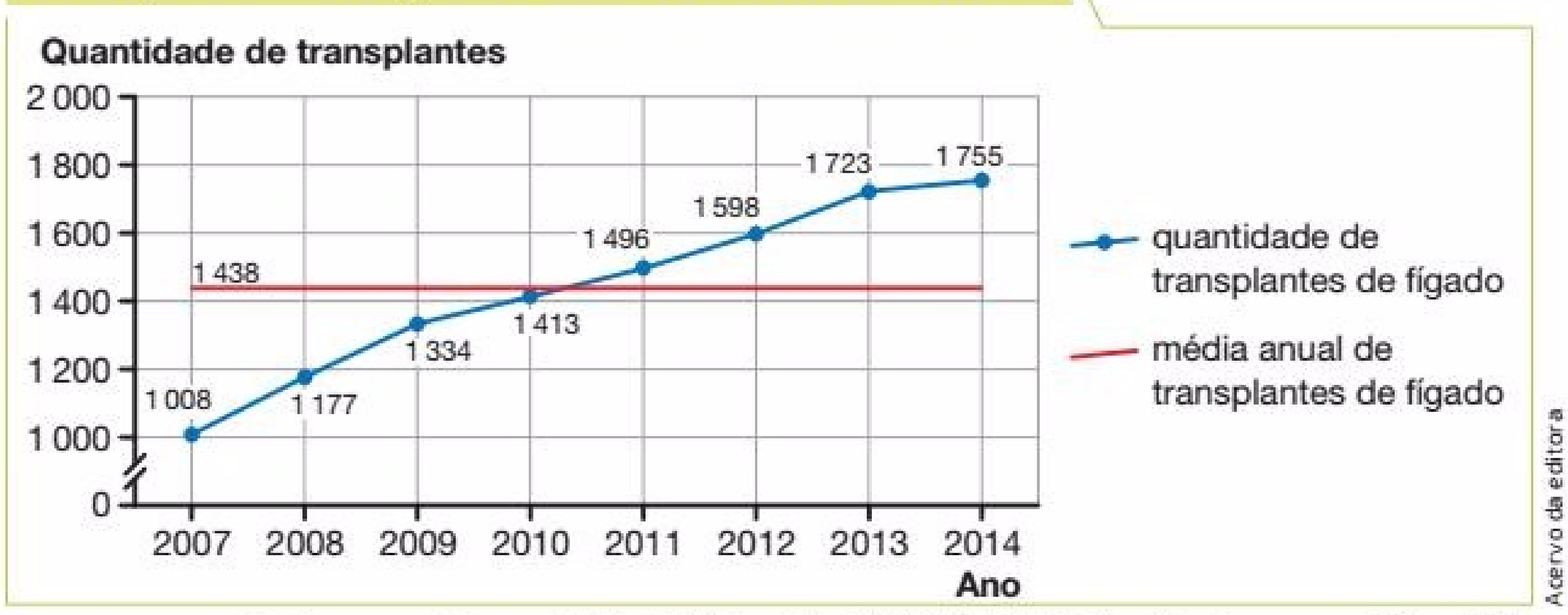
Calculando a média anual de transplantes de fígado realizados no período, temos:

$$\overline{x} = \frac{1\,008 + 1\,177 + 1\,334 + 1\,413 + 1\,496 + 1\,598 + 1\,723 + 1\,755}{8} = \frac{11\,504}{8} = 1\,438$$

Portanto, de 2007 a 2014, foram realizados por ano, em média, 1 438 transplantes de fígado no Brasil.

No gráfico a seguir, a linha em azul indica a quantidade de transplantes de fígado, e a linha em vermelho indica a média anual.

Transplantes de fígado no Brasil de 2007 a 2014



Fonte: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2014/rbt2014-lib.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Média aritmética ponderada

No cálculo da média aritmética visto anteriormente, supomos que cada valor do conjunto de dados tenha a mesma “importância”. Contudo, há situações nas quais essa suposição não é verdadeira, ou seja, há valores com “importâncias” diferentes. Observe a situação a seguir.

> No processo de seleção de certa instituição de Ensino Superior, a nota do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) obtida pelo candidato tem peso 4, e a obtida no vestibular, peso 6. Se um candidato obtiver nota 70 no Enem e 50 no vestibular, qual será sua nota média final?

Note que, nessa situação, temos de levar em consideração o peso (importância) de cada nota obtida (Enem e vestibular). Essa característica faz que seja necessária, para o cálculo da nota média final do candidato, a utilização da **média aritmética ponderada** $(\overline{x}_p)$, que é dada pela soma dos produtos de cada nota pelo respectivo peso, dividida pela soma dos pesos.

Na situação apresentada, temos:

$$\overline{x}_p = \frac{4 \cdot 70 + 6 \cdot 50}{4+6} = \frac{280+300}{10} = \frac{580}{10} = 58$$

Portanto, a nota média final do candidato foi 58.

> A média aritmética ponderada $(\overline{x}_p)$ de um conjunto de *n* valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n$, cujos pesos são respectivamente $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{n-1}, p_n$, é dada por:
>
> $$\overline{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + \dots + x_{n-1} \cdot p_{n-1} + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_{n-1} + p_n}$$

Moda

Quando dizemos que algo está na moda, como uma peça de vestuário, por exemplo, estamos nos referindo a um modelo de roupa que está sendo aceito e usado por muitas pessoas. Em estatística, a **moda** (Mo) é uma medida de tendência central correspondente aos valores de maior frequência em um conjunto de dados.

Exemplo

Veja a seguir o número de gols marcados nos 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol de 2015.

4	3	1	3	1	3	5	0	6	2
2	2	1	4	1	5	0	1	1	0
3	2	1	0	3	1	1	1	2	1
4	3	3	2	0	3	2	4	5	3

Fonte de pesquisa: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a#.VqDCzporIdU>. Acesso em: 21 jan. 2016.


Celso Pupo/Shutterstock.com

Partida entre Fluminense e São Paulo, válida pelo campeonato brasileiro de futebol de 2015, no Rio de Janeiro (RJ).

Como você faria para determinar o total de gols marcados nesses 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol a partir das informações ao lado?

Uma possível resposta: adicionaria os produtos de cada frequência pelo respectivo número de gols, cujo total é de 89 gols.

Para auxiliar na obtenção da moda do número de gols marcados por partida, podemos determinar a **frequência** (f) de cada valor, ou seja, quantas vezes esse valor se repete no conjunto de dados. A moda corresponde ao valor de maior frequência.

Portanto, como a maior frequência (11) foi 1 gol, temos Mo = 1, ou seja, a moda desse conjunto de dados é 1 gol.

Número de gols marcados nos 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol de 2015

Número de gols marcados por jogos	Frequência (f)
0	5
1	11
2	7
3	9
4	4
5	3
6	1

Fonte: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a#.VyJuoVK5cdV>. Acesso em: 21 jan. 2016.

Há conjuntos de dados que não possuem moda, denominados **amodais**. Contudo, existem também aqueles que possuem mais de uma moda. Denominamos **bimodais** aqueles que possuem duas modas, **trimodais** os que possuem três modas, e assim por diante.

Exemplos

- Preço de certo produto em diversos supermercados (em reais):

1,85	2,07	2,11	2,45	2,49	2,79	2,99

Nesse caso, não há repetição nos preços do produto, ou seja, o conjunto dos preços é amodal.

- Idade dos funcionários de certa empresa (em anos):

18	21	21	21	23	27	31	31	31	38	42	49

Nesse caso, há duas idades empatadas com maior frequência (21 anos e 31 anos), ou seja, o conjunto das idades é bimodal.

Mediana

Outra medida de tendência central muito utilizada é a **mediana** (Md).

Podemos considerar dois casos para a obtenção da mediana:

- 1º caso: conjunto de dados com quantidade **ímpar** de valores.

Nesse caso, inicialmente dispomos esses valores em **rol**, ou seja, em ordem não decrescente ou não crescente. A mediana irá corresponder ao termo central do rol.

Exemplo

A seguir, está indicado em ordem não decrescente o comprimento (em centímetros) de 11 peixes criados por um piscicultor.

13	15	15	16	17	18	19	19	21	22	22

Portanto, a mediana dos comprimentos dos peixes é 18 cm.

Quando a quantidade n de valores de um conjunto de dados for ímpar, a posição do valor correspondente à mediana, com os valores dispostos em rol, é dada por $\frac{n+1}{2}$.

No exemplo acima, temos:

$$\frac{11+1}{2}=6 \rightarrow 6^{a} \text{ posição}$$

- 2º caso: conjunto de dados com quantidade **par** de valores.

  Com os valores dispostos em **rol**, obtemos a mediana calculando a média aritmética entre os dois termos centrais do rol.

Exemplo

A seguir, está indicado, em rol, o tamanho (em megabaites) de 14 arquivos gravados em um *pen drive*.

52,8	76	82,4	103	142,5	167,2	173,1	181,5	207,4	248,2	262,3	281	313,3	358,4

$$Md = \frac{173{,}1 + 181{,}5}{2} = \frac{354{,}6}{2} = 177{,}3$$

Portanto, a mediana do tamanho dos arquivos é 177,3 MB.

Quando a quantidade *n* de valores de um conjunto de dados for par, a posição dos valores cuja média aritmética corresponde à mediana, com os valores dispostos em rol, é dada por $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

No exemplo acima, temos:

$\frac{14}{2} = 7 \rightarrow$ 7ª posição $\qquad \frac{14}{2} + 1 = 8 \rightarrow$ 8ª posição

Atividades resolvidas

R1. A seguir estão apresentados os resultados de 400 candidatos aprovados em um concurso e que resolveram uma prova com 30 questões.

Número de acertos	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Número de candidatos	108	80	64	54	39	29	15	7	3	1

Com base nessas informações, calcule a média aritmética, a moda e a mediana para a variável "número de acertos" e dê o significado de cada uma delas.

Resolução

Explique aos alunos que, mesmo quando a variável é do tipo quantitativa discreta, é conveniente utilizarmos valores decimais para representar medidas estatísticas, como a média aritmética.

- Média aritmética

  A média aritmética $(\overline{x})$ do número de acertos por candidato é dada por:

$$\overline{x} = \frac{108 \cdot 21 + 80 \cdot 22 + 64 \cdot 23 + 54 \cdot 24 + 39 \cdot 25 + 29 \cdot 26 + 15 \cdot 27 + 7 \cdot 28 + 3 \cdot 29 + 1 \cdot 30}{108 + 80 + 64 + 54 + 39 + 29 + 15 + 7 + 3 + 1} = \frac{9\,243}{400} \simeq 23{,}1$$

  Os candidatos acertaram, em média, aproximadamente 23,1 questões.

- Moda

  A moda corresponde ao número de acertos com maior frequência, ou seja, Mo = 21. Logo, a quantidade de questões que mais alunos acertaram foi 21.

- Mediana

  O total de candidatos é 400 (par). Logo, as posições centrais são 200º e 201º $\left(\frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ e } \frac{n}{2} + 1 = \frac{400}{2} + 1 = 201\right)$.

  Se organizássemos todos os candidatos em ordem não decrescente, de acordo com o número de acertos, teríamos que do 1º ao 108º acertaram 21 questões, do 109º ao 188º acertaram 22 questões (80 candidatos) e do 189º ao 252º acertaram 23 questões (64 candidatos).

  Logo, os candidatos de posição 200º e 201º acertaram 23 questões. Assim:

$$Md = \frac{23 + 23}{2} = 23$$

  Portanto, a quantidade mediana de acertos dos 400 candidatos é 23 acertos.

R2. Um instituto de pesquisa entrevistou alguns consumidores em relação à qualidade de três marcas de televisores. Observe ao lado a nota média dada pelos entrevistados em três critérios e os pesos atribuídos pelo instituto para o cálculo da média final.

Qual marca de televisor obteve a maior nota final?

Critério	Marca do televisor			Peso
	A	B	C	
Qualidade de imagem	8	7	9	5
Qualidade de som	7	8	6	3
Preço	6	6	4	2

Resolução

Chamando de $\overline{x}_{p_A}$, $\overline{x}_{p_B}$ e $\overline{x}_{p_C}$ as médias ponderadas finais dos televisores das marcas **A**, **B** e **C**, respectivamente, temos:

- $\overline{x}_{p_A} = \dfrac{8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{5+3+2} = \dfrac{73}{10} = 7{,}3$
- $\overline{x}_{p_B} = \dfrac{7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{5+3+2} = \dfrac{71}{10} = 7{,}1$
- $\overline{x}_{p_C} = \dfrac{9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{5+3+2} = \dfrac{71}{10} = 7{,}1$

Portanto, a marca **A** obteve maior nota final.

R3. (Enem-MEC) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o:

a) 1　　b) 2　　c) 3　　d) 4　　e) 5

Resolução

Calculando a média para cada reagente:

- Reagente 1: $\dfrac{1+6+6+6+11}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$
- Reagente 2: $\dfrac{0+6+7+6+5}{5} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$
- Reagente 3: $\dfrac{2+3+8+10+11}{5} = \dfrac{34}{5} = 6{,}8$
- Reagente 4: $\dfrac{2+4+7+8+12}{5} = \dfrac{33}{5} = 6{,}6$
- Reagente 5: $\dfrac{1+2+9+10+11}{5} = \dfrac{33}{5} = 6{,}6$

Comparando a média para cada reagente com os resultados do quadro, observamos que o reagente 2 é o que atende ao critério do pesquisador, pois é o que possui a maior quantidade de resultados acima da média (4 resultados).

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

22. a) Não, pois sua média aritmética final será de aproximadamente 6,8, que é inferior à nota média mínima.

22. c) Sim, pois para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5, nota com a qual sua média final ficará acima de 7.

18. Calcule a média aritmética, a moda e a mediana de cada conjunto de valores.

a) 3 8 15 5 3 12 7 11

média: 8; moda: 3; mediana: 7,5

b) 5 10 9 13 21 −5 −1 10 9 12 1 0 3 8 7

média: 6,8; moda: 10 e 9; mediana: 8

c) −6 −4 −7 −11 −3 −1 −5 −7 −10 −20 0 −25 −22 −2 −15

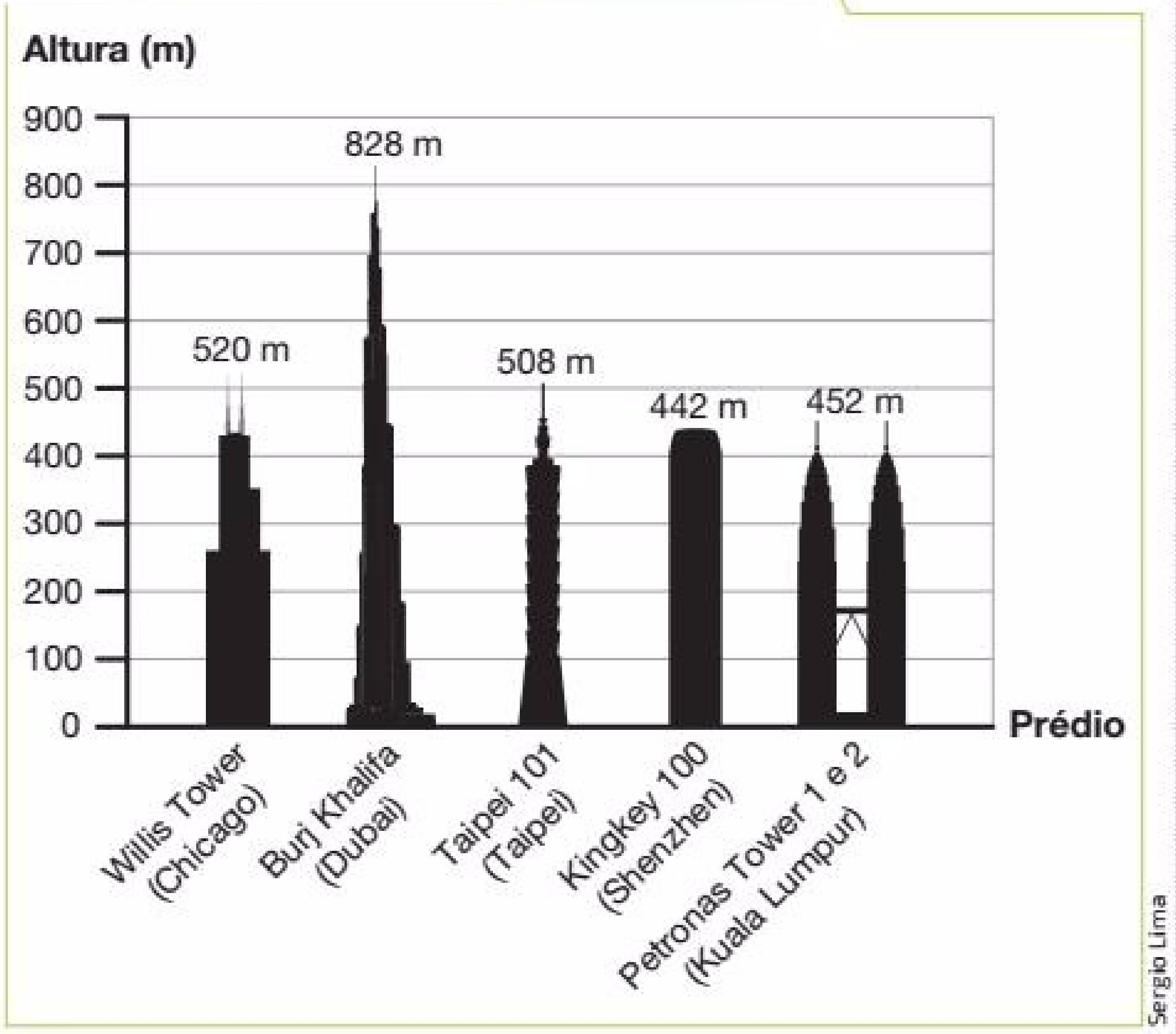
média: −9,2; moda: −7; mediana: −7

d) −20 5 8 −1 12 −24 6 10 −3 16 −1 −8 0

média: 0; moda: −1; mediana: 0

19. Os avanços tecnológicos na construção civil permitem a edificação de prédios cada vez mais altos. Observe a altura de alguns dos prédios mais altos do mundo.

Altura de alguns dos prédios mais altos do mundo em 2013



Fonte: <http://exame.abril.com.br/mundo/noticias/os-20-predios-mais-altos-do-mundo#1>. Acesso em: 13 fev. 2016.
Fonte: <www.willistower.com/building-information/history-and-facts>. Acesso em: 13 fev. 2016.

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana das alturas desses prédios.
média: 550 m; amodal; mediana: 508 m

b) Qual prédio deve ser desconsiderado para que a média das alturas diminua? Nesse caso, qual seria essa média? Burj Khalifa; 480,5 m

20. Carlos tem o dobro da idade de seu filho e metade da idade de seu pai. Sabendo que a média da idade dos três é 49 anos, qual é a idade de cada um deles? Carlos: 42 anos; filho: 21 anos; pai: 84 anos

21. A seguir é apresentado o número de alunos de cada uma das três turmas de 3º ano do Ensino Médio de um colégio, e as notas médias em Matemática de cada uma delas, em certo bimestre. Qual foi a média geral em Matemática nessas três turmas, no bimestre? 67

Turma	Número de alunos	Nota média em Matemática
A	24	77
B	30	59
C	26	67

22. Certo concurso público era composto por três etapas: prova de conhecimentos gerais, prova de conhecimentos específicos e prova prática. Para ser aprovado nesse concurso, o candidato não poderia obter em nenhuma das etapas nota inferior a 5 pontos, e a média aritmética final das três notas tinha de ser igual/ou superior a 7 pontos.

Veja a seguir as notas obtidas por três candidatos nas duas primeiras etapas desse concurso.

Candidato	Conhecimentos gerais	Conhecimentos específicos
Amanda	5,2	6,3
Carlos	6,5	7,2
Fátima	7,8	8,3

a) Caso Amanda obtenha nota 9 na prova prática, ela será aprovada? Por quê?

b) Qual é a nota mínima que Carlos deve obter na prova prática para que seja aprovado? 7,3

c) É possível afirmar que se Fátima não for eliminada na prova prática ela será aprovada? Justifique.

23. Após ter realizado uma prova **A** com peso 7 e obtido nota 6,5, Carlos realizará uma prova **B**, com peso 5. Sabendo que para ser aprovado ele deve obter a média ponderada das notas das provas **A** e **B** igual ou superior a 7, qual é a nota mínima que Carlos deve obter na prova **B**? 7,7

24. (Enem-MEC) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80

Raia	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é: d

a) 20,70 b) 20,77 c) 20,80 d) 20,85 e) 20,90

25. A tecnologia da comunicação é extremamente dinâmica, uma vez que a cada dia apresenta novidades e muitas delas afetam diretamente a maneira como interagimos com as outras pessoas. Desde a invenção do telefone por Alexander Graham Bell (1847-1922), em 1876, diversas outras ferramentas tecnológicas da comunicação surgiram, como o rádio, a televisão, o computador e a internet. Esta última, talvez, seja a que mais possibilitou a conexão entre as pessoas, mesmo que a partir de locais muito distantes geograficamente. Informações que poderiam levar horas ou até mesmo dias para serem transmitidas, com a internet, podem ser divulgadas quase instantaneamente.

No Brasil, as primeiras conexões via internet aconteceram em 1990. Ainda muito primitivas, elas exigiam computadores de grande capacidade para a época, com alto custo, o que limitava seu uso. No decorrer dos anos, os avanços tecnológicos permitiram maior acessibilidade à internet, fazendo que o número de usuários crescesse em ritmo acelerado. Em 2014, por exemplo, 50% dos domicílios brasileiros possuíam acesso à internet.

Os telefones celulares deixaram de realizar apenas ligações telefônicas, transformando-se em aparelhos multifuncionais, os chamados *smartphones*. Com eles, utilizando a internet, é possível, por exemplo, enviar mensagens de texto, de voz ou de vídeo e acessar *sites* ou redes sociais, fazendo que as pessoas interajam mais rapidamente e de diferentes maneiras.

Um dos grandes desafios para a universalização da internet no Brasil, permitindo acesso a mais pessoas, consiste em melhorar a qualidade do sinal de conexão, fixa ou móvel, que reflete na velocidade com a qual os dados são transmitidos. Apenas com uma boa conexão à internet, por exemplo, uma escola pode oferecer acesso simultaneamente a centenas de alunos para realizarem pesquisas ou outras atividades escolares.

Fontes de pesquisa: <www.brasil.gov.br/infraestrutura/2015/09/acesso-a-internet-chega-a-50-das-casas-pela-1-vez-no-pais>. Acesso em: 28 abr. 2016.
VERGOTTI, Marco; FORTES, Rodrigo. In: FERRARI, Bruno. Os tijolões estão de volta. Época, São Paulo, n. 708, p. 40-41, 12 dez. 2011.

Evolução dos aparelhos celulares

Desde o primeiro modelo, os aparelhos celulares sofreram muitas mudanças. Veja alguns desses modelos e suas medidas.

Fotomontagem de Maryane Vioto Silva formada pelas imagens Bloomua/Shutterstock.com e ilolab/Shutterstock.com

Veja algumas informações sobre a evolução da internet no mundo.

População mundial e dispositivos conectados à internet em 1984, 2010 e 2020*

	1984	2010	2020
População mundial	4 765 658 000	6 929 725 000	7 758 157 000
Dispositivos conectados	1000	10 bilhões	mais de 50 bilhões

*As informações apresentadas no ano de 2020 são previsões.

Fonte: <http://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Standard/Population>. Acesso em: 12 fev. 2016.

Fonte: <http://exame.abril.com.br/tecnologia/noticias/50-bi-de-dispositivos-estarao-conectados-a-internet-ate-2020>. Acesso em: 12 fev. 2016.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Você acessa a internet? Quais aparelhos utiliza para isso? Resposta pessoal.

b) Em 2010, no mundo, havia em média quantos dispositivos conectados à internet por habitante? aproximadamente 1,4 dispositivo por habitante

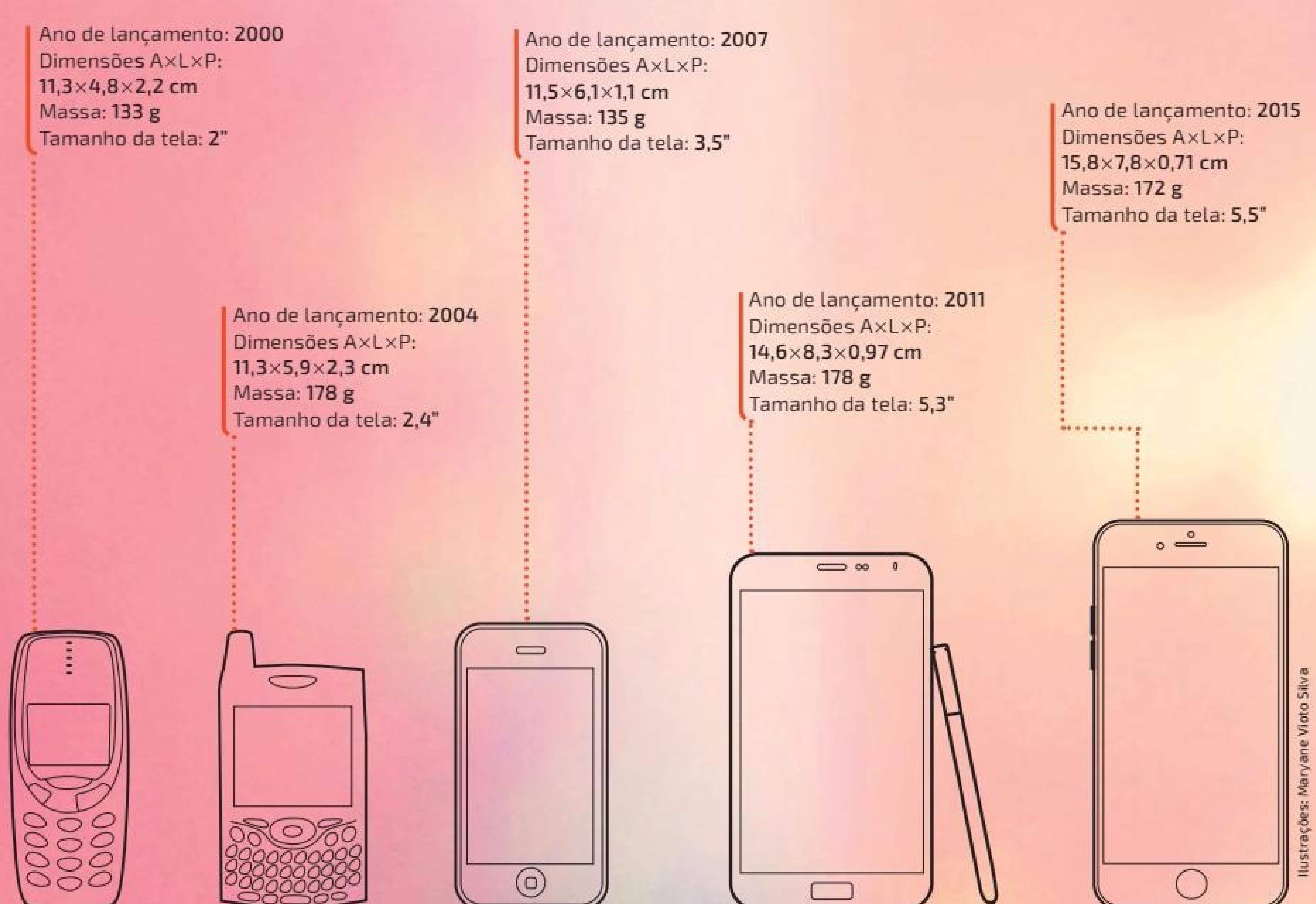
c) Leia a afirmativa abaixo.

> Em 2020, estima-se que haverá, em média, mais de 6 aparelhos conectados à internet, por habitante, no mundo.

Essa afirmativa é verdadeira? Justifique.

c) sim; Resposta esperada: em 2020 estima-se que a população mundial seja de aproximadamente 7,8 bilhões de habitantes, enquanto a quantidade de dispositivos conectados à internet seja de mais de 50 bilhões, de maneira que a média desses dispositivos por habitante será de aproximadamente $\frac{50}{7,8} = 6,4$.

d) No infográfico **Evolução dos aparelhos celulares**, ao comparar o aparelho lançado em 2000 ao de 2015, qual tem a maior tela? Quantos por cento maior?
O aparelho lançado em 2015 possui a tela cerca de 175% maior que a do lançado no ano 2000.



Ilustrações: Maryane Vioto Silva

Medidas de dispersão

Vimos anteriormente que as medidas de tendência central buscam representar um conjunto de dados por meio de um único valor. Contudo, em diversas situações, fazem-se necessárias, para melhor representar o conjunto de dados, algumas medidas que indiquem a distribuição desses valores em torno da média. Essas medidas são denominadas **medidas de dispersão**.

Para representar o salário dos 5 funcionários de certo setor de uma empresa, por exemplo, podemos utilizar seu valor médio. Observe dois exemplos:

› Exemplo 1

Salários: R$ 2660,00, R$ 2700,00, R$ 3040,00, R$ 3200,00 e R$ 3400,00.

Média: $\bar{x}=\dfrac{2660+2700+3040+3200+3400}{5}=3000 \longrightarrow$ R$ 3000,00

› Exemplo 2

Salários: R$ 1680,00, R$ 1680,00, R$ 1900,00, R$ 3800,00 e R$ 5940,00.

Média: $\bar{x}=\dfrac{1680+1680+1900+3800+5940}{5}=3000 \longrightarrow$ R$ 3000,00

Note que em ambos os exemplos a média é igual a R$ 3000,00. Contudo, no exemplo **1** os valores estão próximos da média e, no exemplo **2**, mais distantes dela. Dizemos que no exemplo **1** os valores estão menos dispersos em relação à média do que no exemplo **2**.

A seguir, estudaremos as medidas de dispersão **desvio médio** (Dm), **variância** (V) e **desvio padrão** (Dp).

Desvio médio (Dm)

Observe a seguir a quantidade de veículos vendidos por uma concessionária em certa semana.

Domingo	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
26	12	18	16	33	17	25

Vamos calcular inicialmente a média diária de veículos vendidos:

$$\bar{x}=\frac{26+12+18+16+33+17+25}{7}=\frac{147}{7}=21 \longrightarrow 21 \text{ veículos}$$

Agora, calculamos os **desvios** de cada valor em relação à média:

- $x_1-\bar{x}=26-21=5$
- $x_2-\bar{x}=12-21=-9$
- $x_3-\bar{x}=18-21=-3$
- $x_4-\bar{x}=16-21=-5$
- $x_5-\bar{x}=33-21=12$
- $x_6-\bar{x}=17-21=-4$
- $x_7-\bar{x}=25-21=4$

Podemos verificar que a soma dos desvios é igual a zero $(5-9-3-5+12-4+4=0)$. A fim de não ser afetado por essa propriedade, o desvio médio é dado pela média dos valores absolutos dos desvios. Nesse caso, temos:

$$Dm=\frac{|5|+|-9|+|-3|+|-5|+|12|+|-4|+|4|}{7}=\frac{42}{7}=6 \longrightarrow 6 \text{ veículos}$$

Portanto, o desvio médio diário foi de 6 veículos vendidos.

O desvio médio (Dm) de um conjunto de *n* valores é dado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média:

$$Dm=\frac{|x_i-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+|x_3-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}$$

Variância (V)

Outra medida de dispersão muito utilizada é a variância (V).

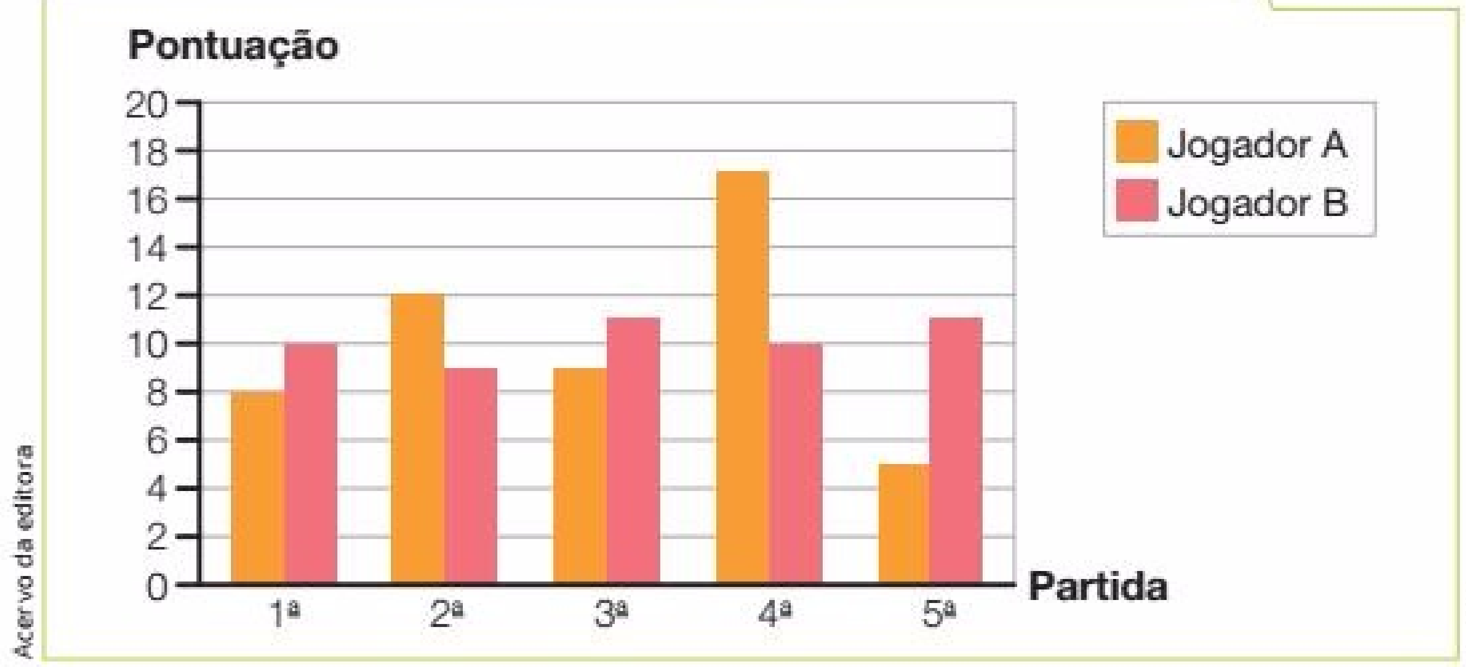
A variância (V) de um conjunto de *n* valores é dada pela média aritmética dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Exemplo

Após as 5 primeiras rodadas de um campeonato de basquete, os dois principais "cestinhas" (jogadores que mais pontuaram) obtiveram médias iguais de pontos por partida. Observe a seguir a pontuação que cada jogador obteve por partida. Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Pontuação dos dois principais cestinhas do campeonato de basquete em 2016



Fonte: Organização do campeonato.

Média de pontos por partida:

- jogador **A**: $\bar{x}_A = \frac{8+12+9+17+5}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$
- jogador **B**: $\bar{x}_B = \frac{10+9+11+10+11}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$

Podemos utilizar a variância para verificar qual dos jogadores obteve maior regularidade na pontuação por partida.

- Variância do jogador **A**

  Desvios:
  - $x_1 - \bar{x} = 8 - 10{,}2 = -2{,}2$
  - $x_2 - \bar{x} = 12 - 10{,}2 = 1{,}8$
  - $x_3 - \bar{x} = 9 - 10{,}2 = -1{,}2$
  - $x_4 - \bar{x} = 17 - 10{,}2 = 6{,}8$
  - $x_5 - \bar{x} = 5 - 10{,}2 = -5{,}2$

$$V_A = \frac{(-2{,}2)^2 + 1{,}8^2 + (-1{,}2)^2 + 6{,}8^2 + (-5{,}2)^2}{5} = \frac{4{,}84 + 3{,}24 + 1{,}44 + 46{,}24 + 27{,}04}{5} = \frac{82{,}8}{5} = 16{,}56$$

- Variância do jogador **B**

  Desvios:
  - $x_1 - \bar{x} = 10 - 10{,}2 = -0{,}2$
  - $x_2 - \bar{x} = 9 - 10{,}2 = -1{,}2$
  - $x_3 - \bar{x} = 11 - 10{,}2 = 0{,}8$
  - $x_4 - \bar{x} = 10 - 10{,}2 = -0{,}2$
  - $x_5 - \bar{x} = 11 - 10{,}2 = 0{,}8$

$$V_B = \frac{(-0{,}2)^2 + (-1{,}2)^2 + 0{,}8^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}8^2}{5} = \frac{0{,}04 + 1{,}44 + 0{,}64 + 0{,}04 + 0{,}64}{5} = \frac{2{,}8}{5} = 0{,}56$$

Note que a variância de pontos por partida do jogador **A** $(16{,}56)$ é maior que a do jogador **B** $(0{,}56)$. Portanto, o jogador **B** foi mais regular que o jogador **A**.

Capítulo 4

Desvio padrão (Dp)

Vimos que no cálculo da variância os desvios de cada valor em relação à média são elevados ao quadrado, sendo que o resultado é obtido em uma unidade diferente da variável. A medida de dispersão desvio padrão consiste na raiz quadrada da variância, o que resulta em um valor na mesma unidade da variável.

Qual é o desvio padrão de um conjunto de *n* valores iguais? zero

Em relação ao exemplo apresentado no estudo da variância, vamos calcular o desvio padrão do número de pontos por partida obtido pelos jogadores **A** e **B**.

- Desvio padrão do jogador **A**: $Dp_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{16,56} \simeq 4,07$
- Desvio padrão do jogador **B**: $Dp_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{0,56} \simeq 0,75$

Portanto, o jogador **A** teve um desvio padrão de aproximadamente 4,07 pontos por partida, e o jogador **B**, de cerca de 0,75 ponto por partida.

O desvio padrão (Dp) de um conjunto de *n* valores é dado pela raiz quadrada da variância: $Dp = \sqrt{V}$

Quanto mais próximo de zero estiver o desvio padrão, mais regular será o conjunto de valores, ou seja, mais próximos da média estarão esses valores.

Atividades resolvidas

R4. Observe a seguir as idades dos alunos de uma das turmas do 3º ano noturno do Ensino Médio de certa escola.

Com relação às idades dos alunos, determine o:

a) desvio médio

b) desvio padrão

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Idades dos alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio de certa escola, em 3 de outubro de 2016

Idade (em anos)	16	17	18	19	20	22
Frequência (f)	16	9	4	2	1	1

Fonte: Turma do 3º ano do Ensino Médio.

Resolução

Inicialmente calculamos a média aritmética das idades.

$$\overline{x} = \frac{16 \cdot 16 + 17 \cdot 9 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 22 \cdot 1}{16 + 9 + 4 + 2 + 1 + 1} = \frac{561}{33} = 17 \longrightarrow 17 \text{ anos}$$

Agora, calculamos o desvio de cada valor em relação à média:

- $x_1 - \overline{x} = 16 - 17 = -1$
- $x_2 - \overline{x} = 17 - 17 = 0$
- $x_3 - \overline{x} = 18 - 17 = 1$
- $x_4 - \overline{x} = 19 - 17 = 2$
- $x_5 - \overline{x} = 20 - 17 = 3$
- $x_6 - \overline{x} = 22 - 17 = 5$

Como os dados estão distribuídos em uma tabela de frequências, vamos considerar a frequência absoluta para o cálculo das medidas de dispersão.

a) $$Dm = \frac{16 \cdot |-1| + 9 \cdot |0| + 4 \cdot |1| + 2 \cdot |2| + 1 \cdot |3| + 1 \cdot |5|}{33} = \frac{32}{33} = 0,\overline{96} \longrightarrow 0,\overline{96} \text{ ano}$$

Portanto, o desvio médio das idades dos alunos é de $0,\overline{96}$ ano.

b) Como o desvio padrão é dado pela raiz quadrada da variância, segue que:

$$V = \frac{16 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5^2}{33} = \frac{62}{33} = 1,\overline{87}$$

$$Dp = \sqrt{1,\overline{87}} \simeq 1,37$$

Portanto, o desvio padrão é de aproximadamente 1,37 ano.

26. Para cada conjunto de valores, calcule a média aritmética, a moda, a mediana, o desvio médio, a variância e o desvio padrão.

a)

62	58	72	66	53	70	51	64

$\bar{x}=62$; amodal; Md=63; Dm=6; V=50,25; Dp=7,09

b)

14	18	25	14	39	27	31

$\bar{x}=24$; Mo=14; Md=25; Dm=7,43; V=74,29; Dp=8,62

c)

12	4,5	1,2	12	2,7	4,5

$\bar{x}=6,15$; Mo = 4,5 e Mo = 12; Md = 4,5; Dm = 3,9; V = 18,38; Dp = 4,29

d)

13	−18	3	8	−1	11	1	3

$\bar{x}=2,5$; Mo = 3; Md = 3; Dm = 6,375; V = 81; Dp = 9

27. Uma Organização Não Governamental (ONG) realiza semanalmente uma pesquisa de preços de combustíveis em 6 postos. A seguir, estão apresentados os preços da gasolina nesses postos em duas semanas consecutivas.
Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Preço do litro da gasolina por posto de combustível (R$) em janeiro de 2016

posto \ semana	1ª	2ª
A	4,67	4,70
B	4,68	4,73
C	4,71	4,74
D	4,69	4,71
E	4,70	4,73
F	4,69	4,71

Fonte: Posto de combustível.

27. c) 1ª semana: Dm = 0,01; V = 0,00017; Dp = 0,013
2ª semana: Dm = 0,013; V = 0,0002; Dp = 0,014

a) De quantos por cento, aproximadamente, foi a diferença entre o menor e o maior preço pesquisado em cada semana? 1ª semana: 0,86%; 2ª semana: 0,85%

b) Qual é o preço médio da gasolina na 1ª semana? E na 2ª semana? R$ 4,69; R$ 4,72

c) Para cada semana, calcule o desvio médio, a variância e o desvio padrão em relação ao preço do litro da gasolina.

28. Em certo concurso, foram aprovados os candidatos que obtiveram, no conjunto de 3 provas, nota média superior a 60 pontos e desvio padrão inferior a 5 pontos. Uma candidata que obteve 54, 68 e 61 pontos nas provas foi aprovada nesse concurso? Justifique.
Não, pois, apesar de sua média ser superior a 60 pontos ($\bar{x}=61$), o desvio padrão foi superior a 5 pontos (Dp = 5,7).

29. Em uma corrida de automóveis, três pilotos estão disputando o primeiro lugar. A seguir está apresentado o tempo, em segundos, para as cinco primeiras voltas da corrida.

	Volta				
Piloto	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
A	870	848	855	845	852
B	866	850	847	845	847
C	867	851	843	849	855

Considerando as cinco primeiras voltas, determine qual piloto obteve:

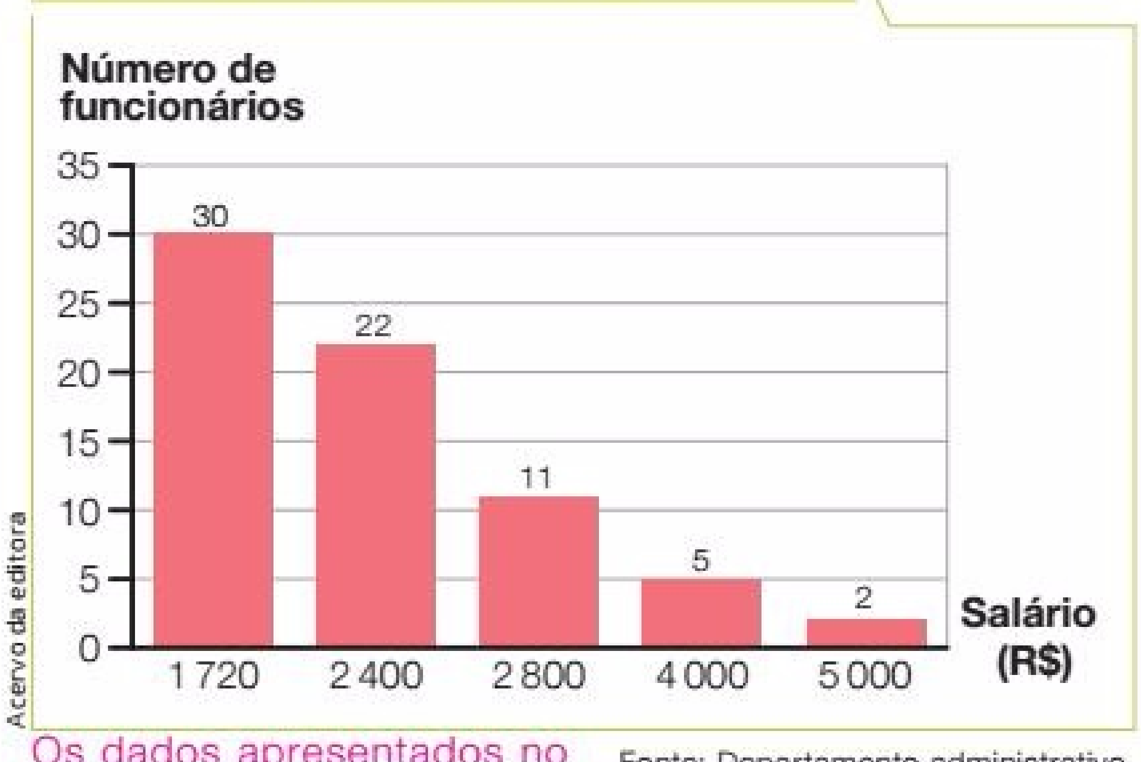
a) pior média piloto A
b) maior regularidade piloto B

30. Em um grupo de pessoas, em que todas têm idades distintas, a média das idades é 18 anos. Se a pessoa mais jovem for substituída por uma de 18 anos, é possível afirmar que, em relação às idades: d

a) a média e o desvio padrão irão aumentar.
b) a média irá permanecer igual, e o desvio padrão, diminuir.
c) a média irá diminuir, e o desvio padrão, aumentar.
d) a média irá aumentar, e o desvio padrão, diminuir.
e) a média e o desvio padrão não se alterarão.

31. Os salários dos funcionários de uma fábrica estão representados no gráfico.

Salário dos funcionários de uma fábrica em janeiro de 2016



Os dados apresentados no gráfico são fictícios.
Fonte: Departamento administrativo.

a) Qual é o salário médio dos funcionários dessa fábrica? R$ 2360,00

b) Calcule o desvio padrão dos salários dos funcionários. aproximadamente R$ 773,12

c) Se cada funcionário receber um aumento de R$ 100,00, o que ocorrerá com a média dos salários? E com o desvio padrão?
aumentará R$ 100,00; continuará com o mesmo valor

Distribuição de frequência

Observe o nível de conhecimento em informática de 20 estudantes que se candidataram a estagiários em uma empresa do setor de tecnologia.

Os dados apresentados nas tabelas são fictícios

Candidatos a estagiários em uma empresa

Nome	Nível de conhecimento
Agnaldo	Avançado
Altair	Básico
Amanda	Intermediário
Ana Maria	Avançado
Carlos	Intermediário
Fabiane	Avançado
Fábio	Avançado
Gabriel	Intermediário
João	Intermediário
Marcos	Avançado

Fonte: Departamento de tecnologia.

Candidatos a estagiários em uma empresa

Nome	Nível de conhecimento
Marta	Intermediário
Natália	Intermediário
Osvaldo	Básico
Rafael	Avançado
Ricardo	Intermediário
Tainá	Avançado
Tiago	Avançado
Vagner	Intermediário
Válter	Intermediário
Vanessa	Intermediário

Fonte: Departamento de tecnologia.

Nesse caso, como pode ser classificada a variável "nível de conhecimento"?
qualitativa ordinal

Podemos, por exemplo, resumir os valores atribuídos à variável "nível de conhecimento" utilizando a **frequência absoluta** (f), ou simplesmente frequência, que corresponde à quantidade de vezes em que cada valor foi citado. Nesse caso, temos as seguintes frequências absolutas:

- frequência do conhecimento básico: 2
- frequência do conhecimento intermediário: 10
- frequência do conhecimento avançado: 8

Para comparar a participação de cada um desses valores em relação ao todo, podemos utilizar a **frequência relativa** (fr), que equivale à razão entre a frequência absoluta correspondente e a quantidade total de observações. Em geral, a frequência relativa é apresentada em porcentagem. Em relação à variável "nível de conhecimento", temos:

- frequência relativa do conhecimento básico: $\frac{2}{20} = 0{,}1$ ou 10%
- frequência relativa do conhecimento intermediário: $\frac{10}{20} = 0{,}5$ ou 50%
- frequência relativa do conhecimento avançado: $\frac{8}{20} = 0{,}4$ ou 40%

Podemos organizar as frequências absoluta e relativa em uma **tabela de frequências**.

Candidatos a estagiários em uma empresa

Nível de conhecimento	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)
Básico	2	10%
Intermediário	10	50%
Avançado	8	40%
Total	20	100%

Fonte: Departamento de tecnologia.

Outros tipos de frequência muito utilizados são a **frequência acumulada** (fa) e a **frequência acumulada relativa** (far), que correspondem, respectivamente, às somas das frequências absolutas e às somas das frequências relativas até determinado dado.

Complementando a tabela de frequências vista anteriormente, temos:

Candidatos a estagiários em uma empresa Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Nível de conhecimento	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
Básico	2	2	10%	10%
Intermediário	10	$\underbrace{12}_{2+10}$	50%	$\underbrace{60\%}_{10\%+50\%}$
Avançado	8	$\underbrace{20}_{2+10+8}$	40%	$\underbrace{100\%}_{10\%+50\%+40\%}$
Total	20		100%	

Fonte: Departamento de tecnologia.

Na tabela de frequências, observando a frequência acumulada podemos notar, por exemplo, que 12 estudantes têm nível de conhecimento em informática até o intermediário (básico e intermediário), o que corresponde a 60% dos estudantes, informação que pode ser observada na frequência acumulada relativa.

Atividades

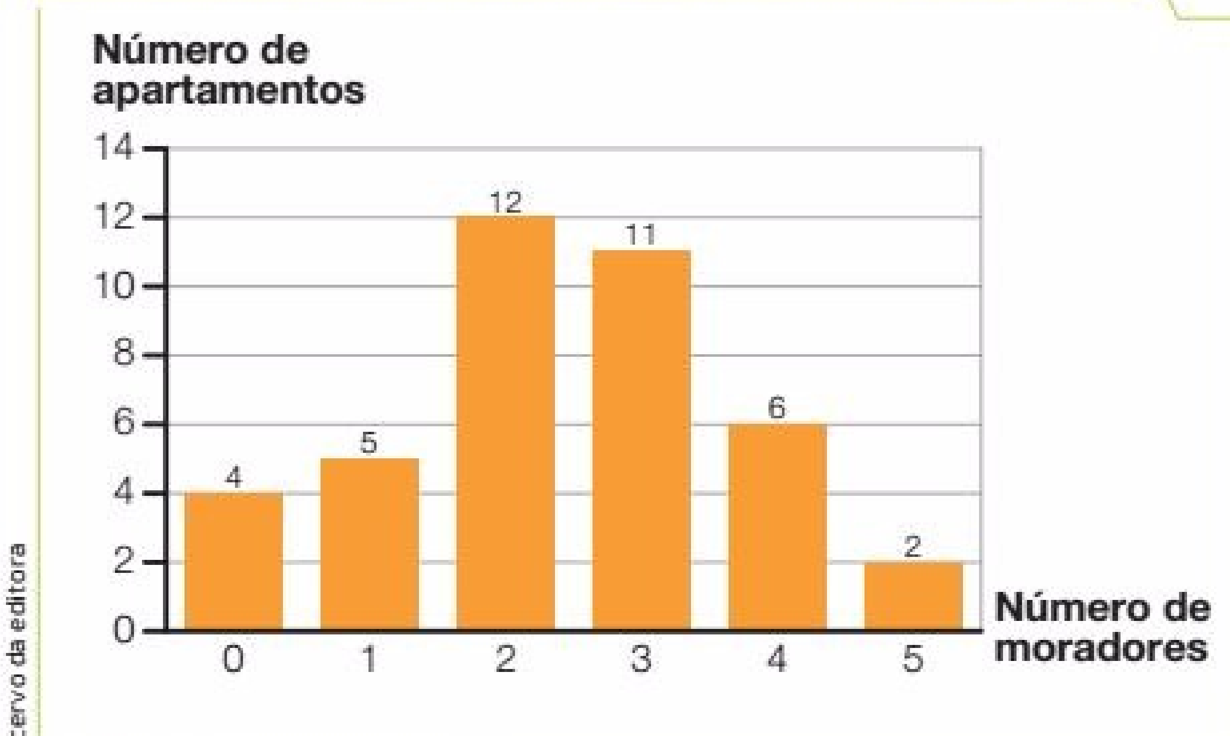
Anote as respostas no caderno.

32. Veja a seguir o número de nascimentos diários em uma maternidade, em certo mês. A partir dele, construa uma tabela de frequências contendo *f*, *fa*, *fr* e *far*. Resposta no final do livro.

5	2	3	1	4	4	3	2	2	0
2	4	3	2	1	3	4	5	3	4
2	3	1	4	5	4	2	4	2	2

33. Observe o gráfico a seguir e resolva as questões.

Número de moradores, por apartamento, em um condomínio residencial em janeiro de 2016



Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte: Administração do condomínio.

a) Quantos apartamentos tem esse condomínio? Desses, quantos têm exatamente 4 moradores? 40 apartamentos; 6 apartamentos

b) A partir das informações do gráfico, construa uma tabela de frequências para a variável "número de moradores", contendo *f*, *fa*, *fr* e *far*. Resposta no final do livro.

c) Quantos apartamentos têm 2 moradores ou menos? Que porcentagem dos apartamentos essa quantidade representa? 21 apartamentos; 52,5%

34. O uso de aparelhos eletrônicos durante a noite prejudica o sono, pois a luz emitida por eles afeta diretamente a produção de melatonina, hormônio responsável pela indução do sono.

De acordo com pesquisas, para manter a saúde em dia, é recomendado para cada faixa etária uma quantidade de horas de sono diária. Aconselha-se que jovens de 14 a 17 anos, por exemplo, durmam de 8 a 9 horas por dia.

Fonte de pesquisa: <http://veja.abril.com.br/noticia/saude/estudo-revela-horas-de-sono-necessarias-para-cada-idade>. Acesso em: 1º fev. 2016.

Por meio de um questionário foram obtidas as informações indicadas no gráfico a seguir.

Número médio de horas de sono diário dos alunos de uma turma em fevereiro de 2016

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte: Resultado do questionário.

Com base no gráfico, determine:

a) a tabela de frequências, obtendo *f*, *fa*, *fr* e *far*, para a variável "número de horas de sono" Resposta no final do livro.

b) o número de alunos da sala de aula 32 alunos

c) a porcentagem de alunos que dormem a quantidade de horas recomendadas para sua idade 28,125%

Intervalo de classe


diogoppr/Shutterstock.com

A ingestão em excesso de açúcares, gorduras e massas pode potencializar o aumento de triglicérides no organismo, ficando acima do nível recomendado. Sendo assim, evitar o consumo habitual de refrigerantes, frituras etc. e associar uma rotina alimentar saudável a atividades físicas com acompanhamento médico são medidas essenciais para controlar o nível de triglicérides.

O excesso de triglicérides, um tipo de gordura, pode ser um forte indicador de possíveis doenças cardíacas. Embora não haja consenso sobre a partir de que nível de triglicérides as pessoas devam receber maior cuidado médico, é certo que acima de 150 mg por decilitro de sangue é recomendável a realização de tratamento.

A seguir, estão apresentadas as medições de triglicérides, em miligramas por decilitro de sangue, de 60 pessoas que realizaram exame em um laboratório.

70	122	140	155	174	206	238	258	279	299
76	125	146	160	178	214	241	267	285	306
82	130	146	162	183	217	243	268	287	308
89	132	149	162	194	220	245	271	291	311
98	135	150	162	199	226	247	273	294	314
105	138	155	166	201	234	257	277	297	318

Podemos representar essas medidas por meio de uma tabela de frequência. Contudo, observe que a maioria das medidas não se repete, tornando necessárias muitas linhas na tabela. A fim de resumir esses dados, podemos agrupá-los em **intervalos de classes.**

Há diversas maneiras de definir o número de intervalos de classes que irão compor uma tabela de frequência. Porém, o mais importante é observar que, de maneira geral, uma grande quantidade de intervalos de classes tende a prejudicar o resumo das informações. Em contrapartida, uma quantidade muito pequena pode interferir na qualidade das informações.

Em relação às medições de triglicérides, podemos definir os intervalos de classes da seguinte maneira:

- calculamos a diferença entre o maior e o menor valor, obtendo assim a **amplitude total**:

$$318-70=248$$

- Escolhemos um valor conveniente, maior ou igual à amplitude total, que, nesse caso, pode ser 250. Considerando o número de intervalos igual a 5, por exemplo, determinamos a amplitude de cada intervalo:

$$\frac{250}{5}=50$$

- Construímos os intervalos de classes com amplitude 50, a partir da menor medição obtida (70 mg/dL):

$$70 \vdash \underbrace{120}_{70+50} \qquad 120 \vdash \underbrace{170}_{120+50} \qquad 170 \vdash \underbrace{220}_{170+50} \qquad 220 \vdash \underbrace{270}_{220+50} \qquad 270 \vdash \underbrace{320}_{270+50}$$

- A notação "$\vdash$" indica, por exemplo, que no intervalo $70 \vdash 120$ serão consideradas as medidas maiores ou iguais a 70 e menores que 120 (inclui 70 e exclui 120).

Outras notações utilizadas para designar intervalos de classes são:
- $10 \dashv 20$: números maiores que 10 e menores ou iguais a 20
- $10 \vdash\!\dashv 20$: números maiores ou iguais a 10 e menores ou iguais a 20

A partir das 60 medições obtidas, quantificamos as frequências de cada intervalo, obtendo assim a frequência absoluta (f) e, consequentemente, as frequências acumulada (fa), relativa (fr) e acumulada relativa (far).

Exames de triglicérides realizados em março de 2016

Nível (mg/dL)	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
70 ⊢ 120	6	6	10%	10%
120 ⊢ 170	18	24	30%	40%
170 ⊢ 220	9	33	15%	55%
220 ⊢ 270	12	45	20%	75%
270 ⊢ 320	15	60	25%	100%
Total	60		100%	

Os dados apresentados na tabela e nos gráficos são fictícios.

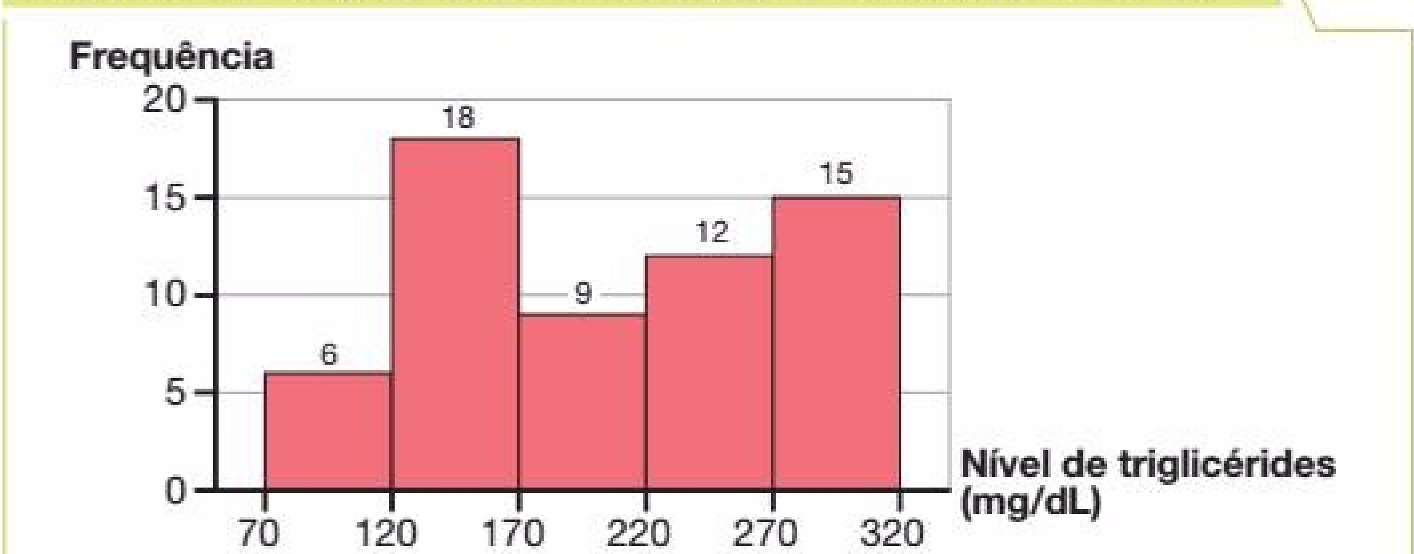
Fonte: Laboratório.

As frequências absoluta e relativa podem ser representadas por um tipo de gráfico denominado **histograma**, que consiste em retângulos justapostos, que representam cada intervalo de classe, cujas alturas são proporcionais às frequências.

Em relação aos exames de nível de triglicérides, temos:

- histograma relacionado à frequência absoluta

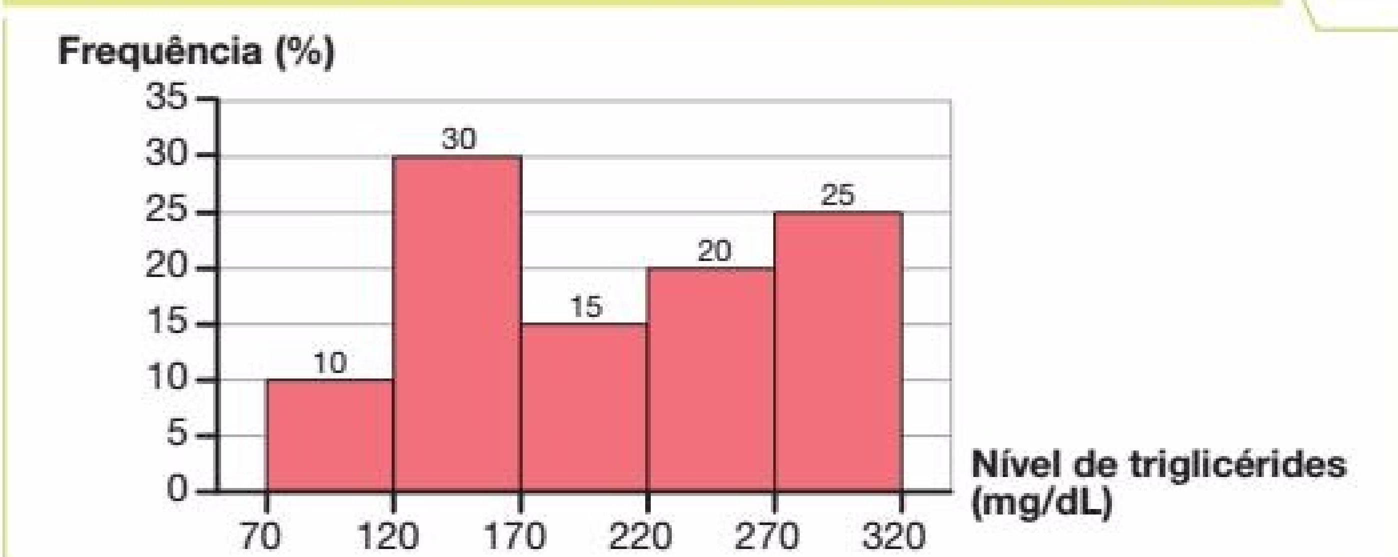
Exames de triglicérides realizados em março de 2016



Fonte: Laboratório.

- histograma relacionado à frequência relativa

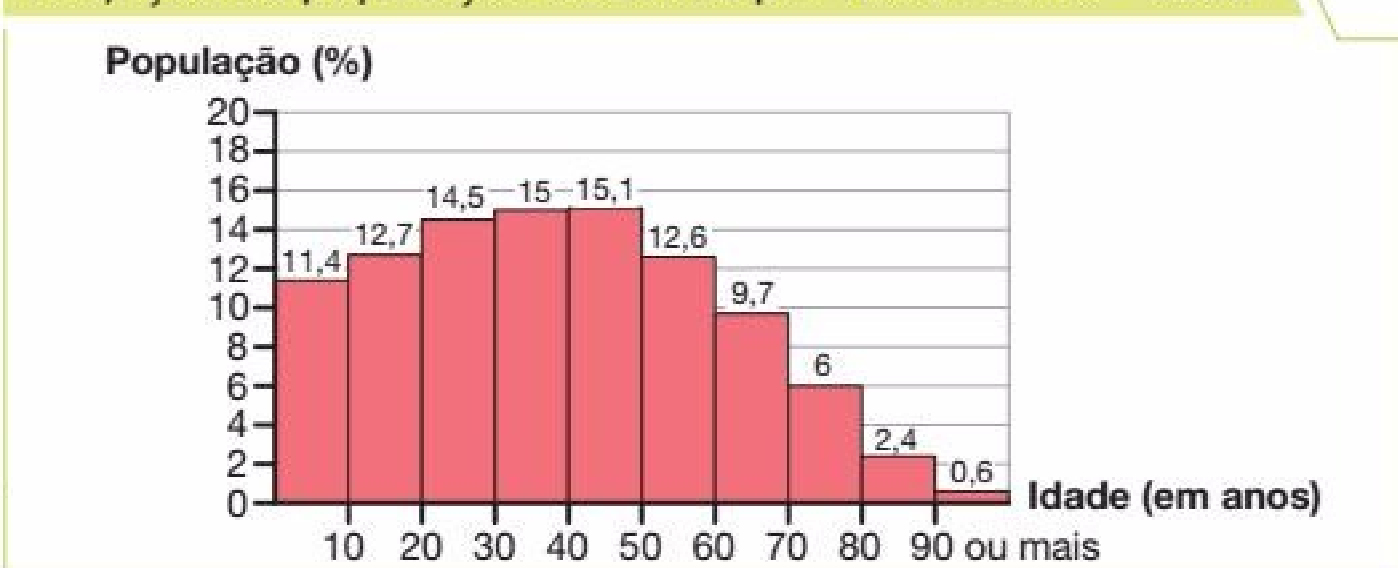
Exames de triglicérides realizados em março de 2016



Fonte: Laboratório.

Observe outro exemplo de histograma.

Projeção da população do Brasil por faixa etária – 2030



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 22 jan. 2016.

35. Em relação aos 60 exames de triglicérides apresentados anteriormente, responda.

a) Quantos pacientes apresentaram níveis de triglicérides iguais ou superiores a 70 mg/dL e inferiores a 170 mg/dL? 24 pacientes

b) Quantos por cento dos pacientes apresentaram níveis de triglicérides iguais ou superiores a 220 mg/dL? 45%

c) Para quantos pacientes pode-se recomendar a realização de tratamento médico? 43 pacientes

36. Observe as informações e responda.

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Altura dos atletas que treinam basquete em uma equipe juvenil em março de 2016

Altura (m)	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
1,7 ⊢ 1,8	4	4	20%	20%
1,8 ⊢ 1,9	7	11	35%	55%
1,9 ⊢ 2,0	6	17	30%	85%
2,0 ⊢ 2,1	2	19	10%	95%
2,1 ⊢ 2,2	1	20	5%	100%

Fonte: Ficha técnica.

a) Quantos atletas treinam nessa equipe de basquete? 20 atletas

b) Em qual intervalo está concentrado o maior número de atletas dessa equipe? 1,8 ⊢ 1,9

c) Quantos atletas têm altura superior ou igual a 2 m? 3 atletas

d) Que porcentagem dos atletas possui altura inferior a 1,9 m? 55%

e) Podemos afirmar que existem 2 atletas com 1,85 m de altura? Por quê? Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

37. Abaixo é apresentado o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de cada país do continente americano.

IDH dos países do continente americano em 2014

País	IDH
Antígua e Barbuda	0,783
Argentina	0,836
Bahamas	0,790
Barbados	0,785
Belize	0,715
Bolívia	0,662
Brasil	0,755
Canadá	0,913
Chile	0,832

IDH dos países do continente americano em 2014

País	IDH
Colômbia	0,720
Costa Rica	0,766
Cuba	0,769
Dominica	0,724
El Salvador	0,666
Equador	0,732
Estados Unidos	0,915
Granada	0,750
Guatemala	0,627

IDH dos países do continente americano em 2014

País	IDH
Guiana	0,636
Haiti	0,483
Honduras	0,606
Jamaica	0,719
México	0,756
Nicarágua	0,631
Panamá	0,780
Paraguai	0,679
Peru	0,761

IDH dos países do continente americano em 2014

País	IDH
República Dominicana	0,715
Santa Lúcia	0,729
São Cristóvão e Névis	0,752
São Vicente e Granadinas	0,720
Suriname	0,714
Trinidad e Tobago	0,772
Uruguai	0,793
Venezuela	0,762

Fonte: <http://hdr.undp.org/en/composite/HDI>. Acesso em: 22 jan. 2016.

a) Com base nessas informações, construa uma tabela de frequências contendo *f*, *fa*, *fr* e *far*, agrupando o IDH em seis intervalos de classes, sendo 0,480 ⊢ 0,560 o primeiro deles. Resposta no final do livro.

b) Em qual intervalo de frequência da tabela o Brasil está? 0,720 ⊢ 0,800

c) Em 2014, que porcentagem dos países americanos apresentavam IDH maior ou igual a 0,640 e menor que 0,720? 20%

d) Quantos países possuem IDH menor que 0,800? 31 países

e) Realize uma pesquisa para obter o IDH do Brasil neste ano e compare com o do ano de 2014. Resposta pessoal.

38. A tabela a seguir apresenta a projeção da população brasileira, por faixa etária, em 2023 e 2025.

Projeção da população brasileira por faixa etária em 2023 e 2025

Faixa etária	2023	2025
0 ⊢ 20	58 806 161	57 313 261
20 ⊢ 40	67 994 110	67 402 019
40 ⊢ 60	56 261 856	58 187 445
60 ⊢ 80	28 271 633	30 335 696
80 ou mais	4 664 964	5 091 593

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>. Acesso em: 22 jan. 2016.

a) Qual a projeção da população brasileira com menos de 40 anos de idade em 2023? E em 2025? 126 800 271 habitantes; 124 715 280 habitantes

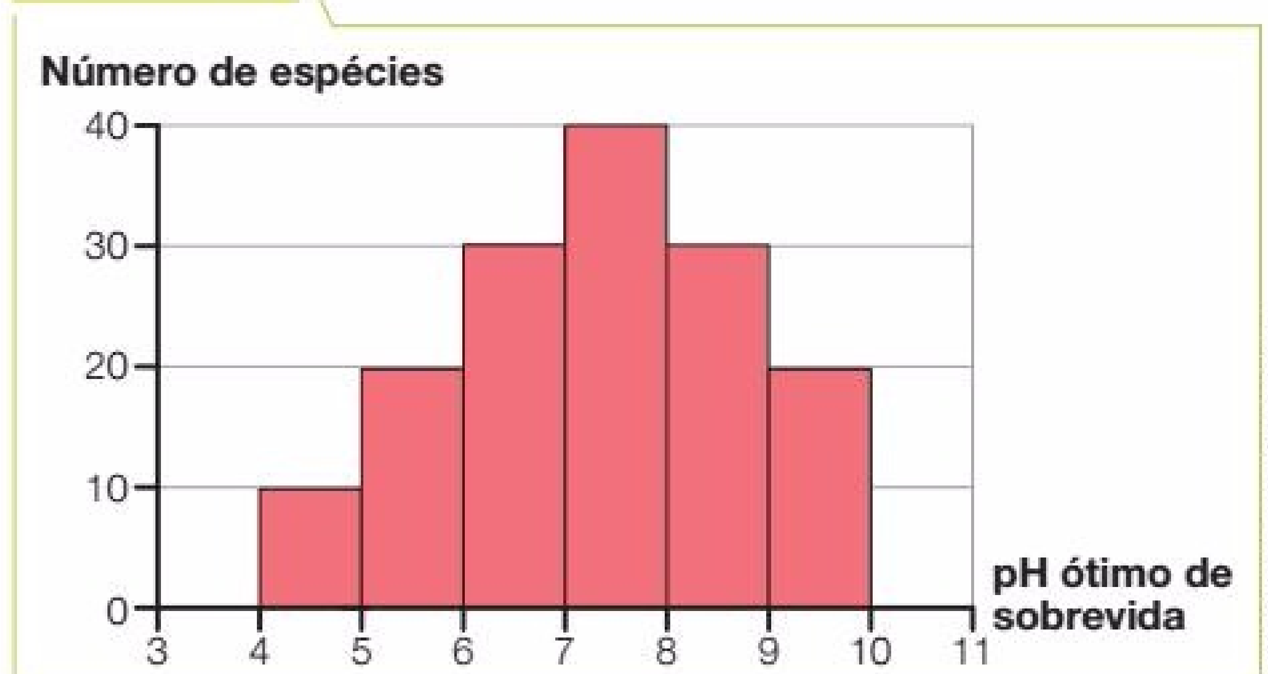
b) De quantos por cento aproximadamente foi o aumento da projeção da população brasileira com idade maior ou igual a 40 anos e menor do que 60 anos, de 2023 para 2025? 3,42%

c) Em quais faixas etárias a projeção para a população diminui em 2025, se comparado a 2023? 0 ⊢ 20 anos e 20 ⊢ 40 anos

39. (Enem-MEC) Um estudo caracterizou 5 ambientes aquáticos, nomeados de **A** a **E**, em uma região, medindo parâmetros físico-químicos de cada um deles, incluindo o pH nos ambientes. O gráfico **I** representa os valores de pH dos 5 ambientes. Utilizando o gráfico **II**, que representa a distribuição estatística de espécies em diferentes faixas de pH, pode-se esperar um maior número de espécies no ambiente: d

Gráfico I

Gráfico II



Ilustrações: Acervo da editora

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

40. O Índice de Massa Corporal (IMC) é uma medida internacional muito utilizada para avaliar a massa corporal de um adulto. Sua fórmula é dada por $IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{\text{altura}^2\text{ (m)}}$.

A seguir está indicado o IMC de um grupo de pessoas.

IMC de algumas pessoas em março de 2016

IMC	Número de pessoas
16 ⊢ 18,5	2
18,5 ⊢ 21	6
21 ⊢ 23,5	9
23,5 ⊢ 26	12
26 ⊢ 28,5	8
28,5 ⊢ 31	5
31 ⊢ 33,5	3

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Fonte: Pessoas do grupo.

a) Usando os dados acima, construa um histograma referente à frequência relativa da variável IMC. Resposta no final do livro.

b) De acordo com o histograma que você construiu no item **a**, elabore uma questão e troque com um colega. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.

Capítulo 4

Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes

Estudamos anteriormente como calcular medidas de tendência central para dados discretos. Agora veremos como calcular a média aritmética, a moda e a mediana para dados agrupados em intervalos de classes. Para isso, considere a tabela de frequência a seguir, que apresenta as massas dos 30 alunos de uma turma do Ensino Médio.

Os dados apresentados nas tabelas são fictícios.

Massa dos alunos de uma turma do Ensino Médio em março de 2016

Massa (kg)	Frequência (f)
40 ⊢ 50	4
50 ⊢ 60	10
60 ⊢ 70	9
70 ⊢ 80	5
80 ⊢ 90	2
Total	30

Fonte: Turma do Ensino Médio.

Para calcularmos as medidas de tendência central para a variável "massa dos alunos", inicialmente obtemos o **valor médio** (vm) de cada intervalo de classe.

O valor médio de um intervalo de classe corresponde à média dos extremos desse intervalo. No exemplo ao lado, o valor médio do intervalo 40 ⊢ 50 é 45, pois $\frac{40+50}{2}=45$.

Massa dos alunos de uma turma do Ensino Médio em março de 2016

Massa (kg)	Frequência (f)	Valor médio (vm)
40 ⊢ 50	4	45
50 ⊢ 60	10	55
60 ⊢ 70	9	65
70 ⊢ 80	5	75
80 ⊢ 90	2	85
Total	30	

Fonte: Turma do Ensino Médio.

- Para calcularmos a **média aritmética** $(\overline{x})$, adicionamos o produto de cada frequência pelo valor médio correspondente e dividimos o resultado obtido pela quantidade total de valores.

  Em relação à massa dos alunos, temos que a média é dada por:

$$\overline{x}=\frac{4\cdot 45+10\cdot 55+9\cdot 65+5\cdot 75+2\cdot 85}{30}=\frac{1860}{30}=62 \longrightarrow 62\text{ kg}$$

- A **moda** (Mo) corresponde ao valor médio do intervalo de classe de maior frequência.

  Em relação à massa dos alunos, como o intervalo de classe de maior frequência é 50 ⊢ 60 (10 valores), a moda equivale ao valor médio correspondente, que nesse caso é 55 kg, ou seja, Mo = 55.

- A **mediana** (Md) corresponde ao valor médio do intervalo de classe que contém o termo central se a quantidade de termos for ímpar; se a quantidade de termos for par, a mediana corresponde à média aritmética dos valores médios correspondentes aos intervalos de classes que contêm os dois termos centrais.

  Em relação às massas dos alunos, a quantidade de termos é par e igual a 30. Como o 15º e o 16º termos (termos centrais) pertencem ao intervalo 60 ⊢ 70, a mediana é dada por:

$$Md=\frac{65+65}{2}=65 \longrightarrow 65\text{ kg}$$

41. Ao acompanhar o desenvolvimento de uma plantação de trigo, um engenheiro agrônomo mediu o comprimento de algumas plantas (amostra). Os dados obtidos estão apresentados na tabela.
Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Comprimento das plantas da amostra em abril de 2016

Comprimento (cm)	Número de plantas
3 ⊢ 5	6
5 ⊢ 7	18
7 ⊢ 9	47
9 ⊢ 11	21
11 ⊢ 13	8

Fonte: Anotações do engenheiro agrônomo.

a) Quantas plantas compõem a amostra analisada pelo engenheiro agrônomo? 100 plantas

b) Calcule a média, a moda e a mediana do comprimento das plantas da amostra.
$\bar{x} = 8{,}14$; $Mo = 8$; $Md = 8$

c) O que se pode afirmar em relação à porcentagem das plantas da amostra que têm o comprimento maior ou igual à média?
Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

42. A associação de moradores de um bairro observou que os acidentes de trânsito eram frequentes em certo trecho de uma avenida, onde a velocidade máxima permitida era de 80 km/h, e que isso era causado pelo excesso de velocidade dos veículos que transitam no local. Para mostrar a necessidade da instalação de redutores de velocidade e cobrar providências do poder público, foi feita a medição da velocidade dos veículos que passaram pelo local em certo período do dia, cujos resultados estão organizados abaixo.
Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Velocidade dos veículos que passaram pelo local em certo período do dia 15 de abril de 2016

Velocidade (km/h)	Frequência (f)
50 ⊢ 60	3
60 ⊢ 70	5
70 ⊢ 80	11
80 ⊢ 90	19
90 ⊢ 100	9
100 ⊢ 110	3
Total	50

Fonte: Associação de moradores.

a) Calcule a média, em km/h, das velocidades registradas. 82 km/h

b) A média da velocidade dos veículos ficou acima ou abaixo do limite nesse trecho da avenida?
acima

43. O histograma a seguir apresenta o resultado da prova de Matemática aplicada para a turma do 3º ano do Ensino Médio. Calcule a média das notas obtidas por essa turma. aproximadamente 6,08

Nota dos alunos do 3º ano do Ensino Médio em abril de 2016

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte: Anotações da professora.

44. O Brasil é campeão mundial em incidência de raios. A cada 50 mortes no mundo provocadas por esse fenômeno natural, uma é no Brasil.

Estudos mostram que em grandes áreas urbanas tem aumentado o número de descargas atmosféricas devido, entre outros fatores, ao maior grau de poluição nessas regiões. Observe a tabela a seguir.

Fontes de pesquisa: <www.inpe.br/webelat/homepage/menu/el.atm/perguntas.e.respostas.php>. Acesso em: 2 fev. 2016. <www.inpe.br/webelat/homepage/menu/infor/infografico.-.mortes.por.raios.php>. Acesso em: 2 fev. 2016.

Densidade anual média de descargas atmosféricas no estado de São Paulo de 1998 a 2012

Densidade (raios/km²)	Número de municípios
4 ⊢ 6	56
6 ⊢ 8	259
8 ⊢ 10	242
10 ⊢ 12	79
12 ⊢ 14	9

Fonte: <www.inpe.br/webelat/docs/Densidade_de_Raios_por_Municipio.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2016.

a) Em quantos municípios de São Paulo ocorreram menos de 8 raios/km^2 por ano, em média?
315 municípios

b) Em média, qual foi a densidade de descargas atmosféricas nos municípios de São Paulo no período apresentado? aproximadamente 8,15 raios/km^2

c) Calcule a mediana e a moda da densidade média anual de descargas atmosféricas, no período apresentado, nos municípios de São Paulo. $Md = 9$; $Mo = 7$

Ser consciente

Quando menos é mais

O aumento na renda dos brasileiros, a facilidade e o estímulo na compra de automóveis e as reduções fiscais são algumas das razões que fizeram a frota de automóveis aumentar consideravelmente nos últimos anos no Brasil. Acrescentam-se a tudo isso as comodidades de ter o próprio carro, como a disponibilidade imediata de transporte e a liberdade de se deslocar sem restrições de horário. Juntos, esses e outros fatores fizeram com que a frota de automóveis crescesse cerca de 67% de 2007 a 2015, enquanto a população brasileira aumentou cerca de 8% no mesmo período.

E quanto às nossas vias urbanas? Será que também cresceram para comportar tantos automóveis?

Para responder, basta acompanharmos os frequentes noticiários sobre congestionamentos no trânsito, em especial nas grandes cidades. Em algumas capitais, os motoristas enfrentam dezenas de quilômetros de lentidão todos os dias, passando horas no carro. Ou seja, o mesmo automóvel que deveria proporcionar conforto acaba gerando estresse, além da poluição e dos acidentes decorrentes disso.

Em razão desses problemas, diversas cidades do mundo vêm tomando providências para diminuir os engarrafamentos. Entre as alternativas, estão o incentivo ao transporte coletivo, o rodízio de automóveis, a cobrança de pedágio urbano e o investimento em tecnologia e infraestrutura. No entanto, a colaboração cabe também a todos os cidadãos individualmente, que precisam se conscientizar dessa situação e adotar soluções que ao menos amenizem as condições atuais. Pequenas ações no dia a dia podem refletir positivamente no trânsito, seja andar a pé, de bicicleta ou em transportes coletivos.

Fontes de pesquisa: <http://abetran.org.br/index.php?option=com_content&task=view&id=25904&Itemid=2>. Acesso em: 15 mar. 2016.
<www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2014/08/1503030-frota-de-veiculos-cresce-mais-rapido-que-a-estrutura-viaria-no-pais.shtml>. Acesso em: 15 mar. 2016.

Dicas para diminuir os congestionamentos

A mudança de alguns hábitos pode diminuir os congestionamentos nas grandes cidades.

Quando possível, opte pelo transporte coletivo. Uma única pessoa no automóvel ocupa no trânsito um espaço sete vezes maior do que se estivesse em um ônibus.

*gráfico de barras múltiplas
**15 milhões de habitantes
***aproximadamente 6 habitantes por automóvel; aproximadamente 4 habitantes por automóvel

b) Algumas possíveis respostas: ao se deslocar de automóvel, optar por ruas menos movimentadas; sempre que possível, evitar se deslocar de automóvel em horário de pico; em regiões que possuem metrô, optar por esse meio de transporte.

Analisando com cidadania

a) No município em que você mora há congestionamento no trânsito? Com qual frequência? Resposta pessoal.

b) Além das iniciativas apresentadas, escreva outras ações de cidadania que podemos praticar a fim de evitar os congestionamentos.

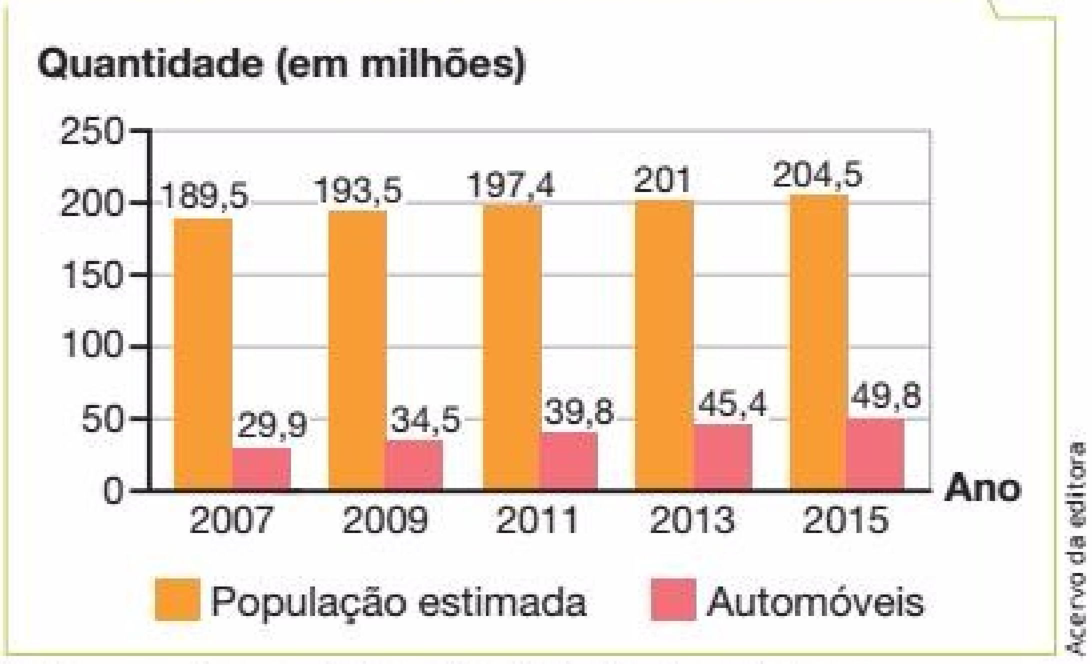
c) O excesso de automóveis nas ruas também ocasiona prejuízo econômico para o país, pois enquanto estamos presos no congestionamento deixamos de produzir e gerar renda para o país. Com um colega, pesquisem mais sobre esse assunto. Resposta pessoal.

Veja mais informações sobre a frota de automóveis no *site*:
• <http://tub.im/v5e65r>
(acesso em: 4 abr. 2016)

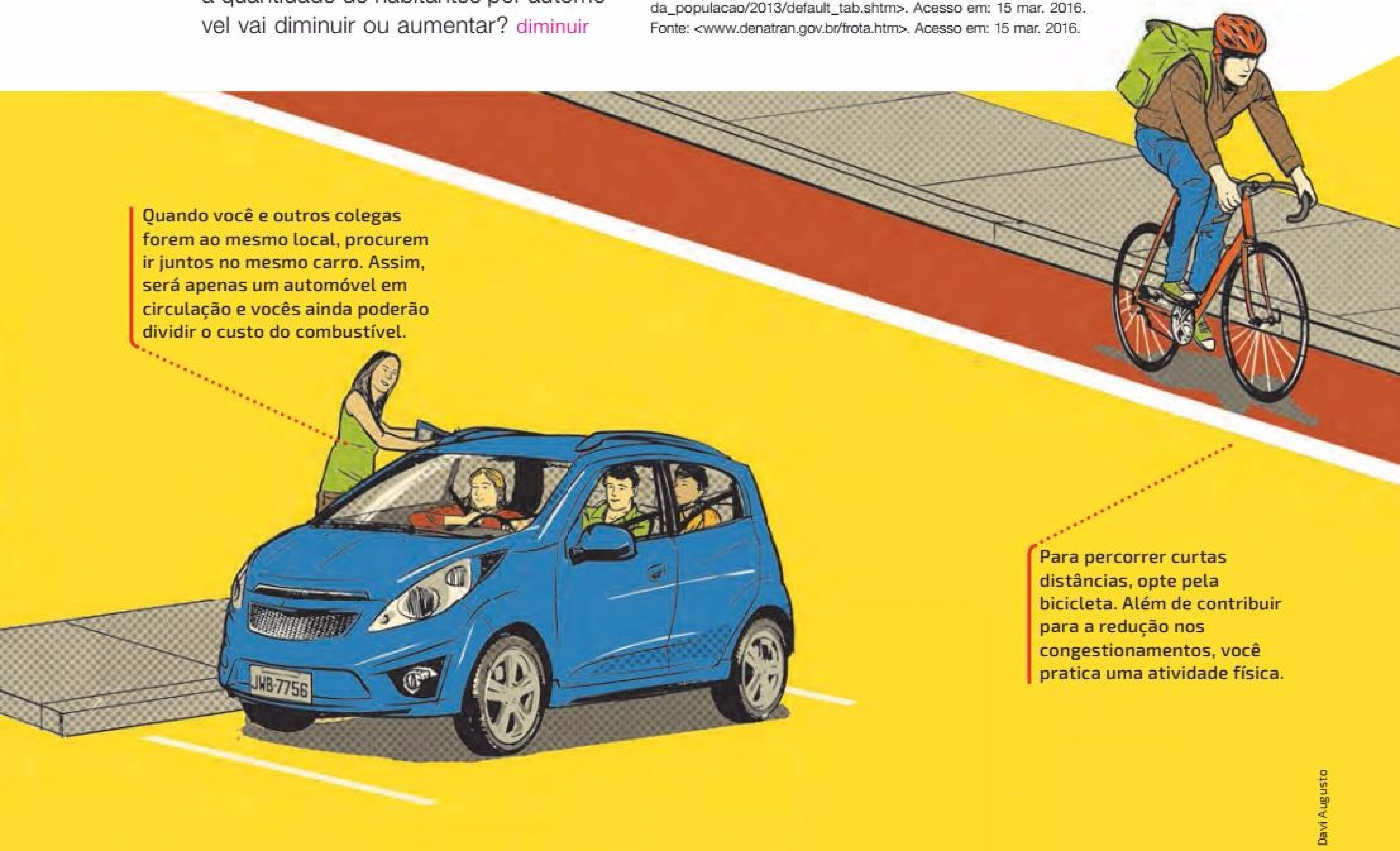
Analisando com Matemática

d) Observe o gráfico ao lado e responda às questões.
- Como é chamado esse tipo de gráfico?*
- Qual foi a variação aproximada da população brasileira, em milhões de habitantes, no período apresentado?**
- Em 2007, quantos habitantes, em média, havia para cada automóvel? E em 2015?***
- Se a população e a frota de automóveis continuarem crescendo, em um ritmo semelhante ao do período apresentado, a quantidade de habitantes por automóvel vai diminuir ou aumentar? diminuir

Crescimento da população e da frota de automóveis no Brasil de 2007 a 2015



Fonte: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>. Acesso em: 15 mar. 2016.
Fonte: <www.denatran.gov.br/frota.htm>. Acesso em: 15 mar. 2016.



Capítulo 4

capítulo 5

Os números complexos

Veja mais informações sobre Luiz Sacilotto e suas obras no *site*:

- **<http://tub.im/tc2zya>**

(acesso em: 31 mar. 2016)

Luiz Sacilotto em seu ateliê, em Santo André (SP), em 2002.

Acervo Sacilotto

Luiz Sacilotto

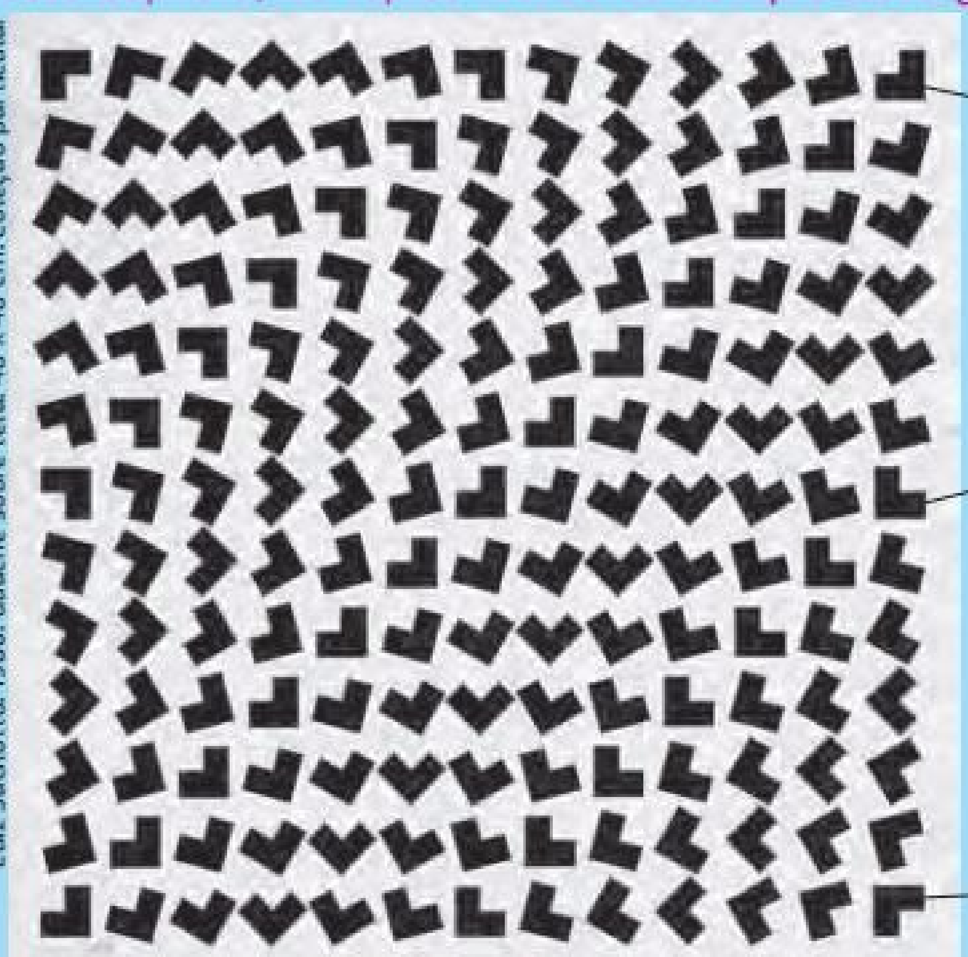
Ao longo da história diferentes elementos matemáticos foram utilizados na composição de obras artísticas, como a simetria, a ilusão de ótica, a geometria, a perspectiva e a razão áurea. Um exemplo de movimento artístico em que é notória a utilização da matemática é o Concretismo, cuja base são elementos geométricos. Nas pinturas concretistas, a atenção é voltada ao plano e às cores, alinhados ao rigor formal.

No Brasil, um dos representantes do Concretismo na pintura é Luiz Sacilotto (1924-2003). Nascido em Santo André (SP), esse artista utilizava materiais pouco convencionais em suas obras, como esmalte, madeira compensada, latão e ferro, produzindo efeitos visuais com base em figuras geométricas. Na tela abaixo, por exemplo, Sacilotto rotaciona e reproduz uma mesma figura, criando um interessante padrão visual.

Fonte de pesquisa: <www.sacilotto.com.br>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Explique aos alunos que o estudo de rotações no plano será estudado neste capítulo, no tópico **Números complexos e geometria**.

Luiz Sacilotto. 1980. Guache sobre tela, 48 x 48 cm. Coleção particular



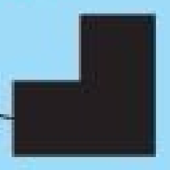


figura **1**

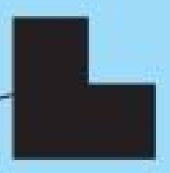


Figura **1** rotacionada 90° no sentido horário ou 270° no sentido anti-horário.

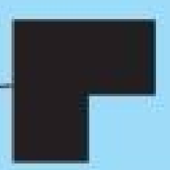


Figura **1** rotacionada 180° no sentido horário ou 180° no sentido anti-horário.

0266, de Luiz Sacilotto, 1980.

A) Resposta esperada: a base são os elementos geométricos, de maneira que a atenção maior é dada ao plano e às cores, alinhados ao rigor formal.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A Cite características das pinturas concretistas.

B Converse com um colega sobre o efeito visual gerado na tela acima. Resposta pessoal.

C Ao rotacionar uma imagem em 360°, no sentido horário, o que ocorre com sua posição? Não se altera.

Estudando os números complexos

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e a atividade das páginas **203 a 205** da seção **Acessando tecnologias**.

Uma das maiores contribuições ao desenvolvimento da Álgebra, a fórmula resolutiva de equações cúbicas de Tartaglia-Cardano, não tinha grandes aplicações práticas, sendo mais eficiente a resolução dessas equações por meio do método de aproximações sucessivas. Porém, do ponto de vista lógico, a fórmula proposta por esses matemáticos trouxe grandes contribuições, promovendo discussões que culminaram no desenvolvimento dos **números complexos**.


Autor desconhecido. 1877. Óleo sobre tela. Coleção particular

Girolamo Cardano


Autor desconhecido. Gravura. Coleção particular. Foto: Mary Evans Picture Library Ltd/Easypix

Niccolo Tartaglia

A publicação da fórmula que permite determinar o conjunto solução de equações cúbicas ocorreu em 1545, na obra **Ars Magna**, do matemático Girolamo Cardano (1501-1576), na qual o autor faz referência a um novo tipo de número, que denominou "quantidade fictícia". Tais quantidades eram na realidade raízes quadradas de números negativos, hoje tratadas como números imaginários.

> [...] Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente, como os gregos antigos, que as equações $x^2=2$ e $x+2=0$ não são resolúveis. Semelhantemente os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2+1=0$ não é resolúvel. Não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Porém, com a solução da equação cúbica, a situação mudou radicalmente. Sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.
>
> [...]
>
> BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 210.

O matemático Rafael Bombelli (c.1526-1573), em seus estudos, percebeu que em algumas situações, com a utilização da fórmula de Tartaglia-Cardano na solução de equações cúbicas, era preciso operar com números imaginários, mesmo quando as raízes da equação pertenciam ao conjunto dos números reais. Considerando a equação $x^3=15x+4$ e aplicando essa fórmula Bombelli obteve $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Ele percebeu que $x=4$ é uma raiz da equação proposta e, desse modo, mesmo existindo números negativos nos radicais, a equação apresenta solução real.

Vários outros estudiosos se dedicaram ao estudo desse "novo" conjunto numérico, como Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). É creditada a eles a associação dos números complexos a pontos do plano real, frequentemente denominado de plano de Argand-Gauss.

Posteriormente, William Rowan Hamilton (1805-1865) representou um número complexo como um par ordenado de números reais, podendo assim definir operações algébricas com esses números de maneira mais simples do que a utilizada inicialmente.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Conjunto dos números complexos

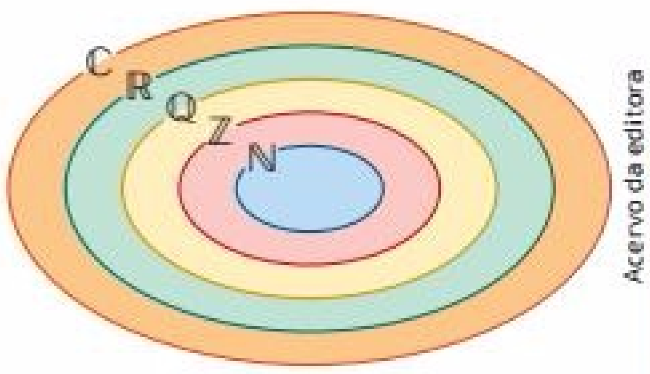
Já estudamos anteriormente que, no conjunto dos números reais, uma equação do tipo $x^2+a=0$, com $a>0$, não possui solução, pois não existe um número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.

$$x^2+a=0 \Rightarrow x^2=-a \Rightarrow x=\pm\sqrt{-a}$$

Para solucionar esse tipo de problema, foi estabelecida uma extensão do conjunto dos números reais, obtendo um novo conjunto numérico, denominado conjunto dos **números complexos**, e indicado por $\mathbb{C}$.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ pode ser definido como o conjunto de pares ordenados de números reais (x, y) em que estão definidas certas operações.

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z=(x, y), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}$$



Acervo da editora

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

Lembre os alunos que $\mathbb{I}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, em que $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números irracionais.

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de números complexos e definidos de modo que seja possível realizar as operações de adição e multiplicação, além de possibilitar o cálculo da raiz de índice par de números negativos. Uma vez que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, as operações de adição e multiplicação de números reais, quando realizadas em $\mathbb{C}$, não sofrem alterações.

Representação algébrica de um número complexo

Todo número complexo $z=(x, y)$ pode ser representado algebricamente.

Um número complexo *z* pode ser representado da seguinte maneira:

$$z=x+yi$$

com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2=-1$, em que *i* é chamada unidade imaginária.

Note que um número complexo *z*, escrito em sua forma algébrica, possui duas partes:

$$\underbrace{x}_{\text{parte real de } z:\ \mathrm{Re}(z)=x}+\underbrace{yi}_{\text{parte imaginária de } z:\ \mathrm{Im}(z)=y}$$

Em um número complexo, caso a:

- parte imaginária seja nula $(y=0)$, dizemos que o número é **real**:

$$z=x+0i \Rightarrow z=x$$

- parte real seja nula $(x=0)$ e a parte imaginária seja não nula $(y\neq 0)$, dizemos que o número é **imaginário puro**:

$$z=0+yi \Rightarrow z=yi$$

Exemplos

- $z=2+5i$: $\mathrm{Re}(z)=2$, $\mathrm{Im}(z)=5$
- $z=-6i$: $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=-6$ (número imaginário puro)
- $z=\frac{1}{2}$: $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z)=0$ (número real)

Peça aos alunos que citem outros exemplos de números complexos e escreva-os na lousa. Em seguida, junto com os alunos, classifique esses números em real ou imaginário puro, quando for o caso.

A unidade imaginária *i* é que indica uma raiz de índice par de um número negativo no conjunto $\mathbb{C}$.

Exemplo

Na equação $x^2+9=0$, temos:

$$x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow x=\pm 3i \begin{cases} x_1=3i \\ x_2=-3i \end{cases}$$

Atividades resolvidas

R1. Determine o conjunto solução da equação $x^2-6x+10=0$, no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Resolução

Utilizando a fórmula resolutiva, temos:

$$a=1;\ b=-6;\ c=10$$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 10=-4$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{-4}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 2i}{2} \begin{cases} x_1=3+i \\ x_2=3-i \end{cases}$$

Portanto, $S=\{3+i, 3-i\}$.

R2. Determine os valores de *k*, para os quais o número complexo:

a) $z=7+(4-2k)i$ seja real.

b) $z=(k^2-k-6)+2i$ seja imaginário puro.

Resolução

a) Como *z* é real para $\text{Im}(z)=0$, temos:

$$\text{Im}(z)=0 \Rightarrow 4-2k=0 \Rightarrow -2k=-4 \Rightarrow k=2$$

Portanto, para $k=2$ o número *z* é real.

b) Como $\text{Im}(z)=2\neq 0$, o número *z* é imaginário puro para $\text{Re}(z)=0$, ou seja:

$\text{Re}(z)=0 \Rightarrow k^2-k-6=0$

$a=1;\ b=-1;\ c=-6$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25$

$$k=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2} \begin{cases} k_1=3 \\ k_2=-2 \end{cases}$$

Portanto, para $k=3$ ou $k=-2$ o número *z* é imaginário puro.

R3. Determine os números reais α e β, de modo que a igualdade $\alpha^2-2\alpha+5\beta i=\alpha-2-(2\beta-7)i$ seja verdadeira.

Dois números complexos, $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, são iguais se, e somente se, suas partes reais e suas partes imaginárias forem iguais, ou seja, se $a=c$ e $b=d$.

Resolução

Considerando os números complexos $z_1=\alpha^2-2\alpha+5\beta i$ e $z_2=\alpha-2-(2\beta-7)i$, temos:

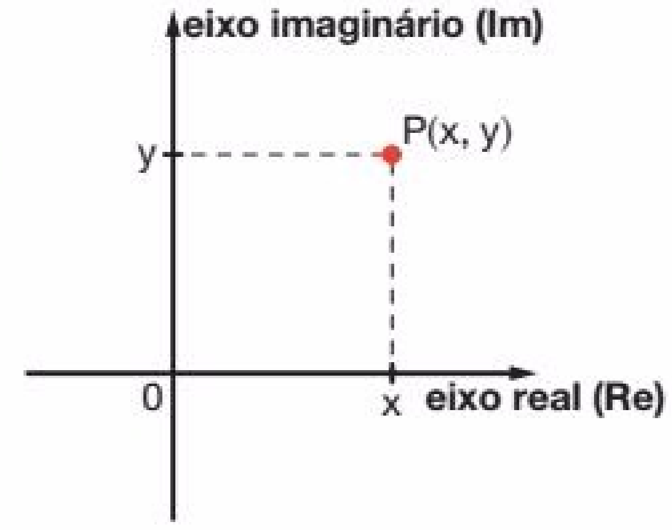
- $\text{Re}(z_1)=\text{Re}(z_2) \Rightarrow \alpha^2-2\alpha=\alpha-2 \Rightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=2 \end{cases}$
- $\text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_2) \Rightarrow 5\beta=-(2\beta-7) \Rightarrow 7\beta=7 \Rightarrow \beta=1$

Portanto, $\alpha=1$ ou $\alpha=2$ e $\beta=1$.

Representação geométrica de um número complexo

Vimos que um número complexo z pode ser escrito como um par ordenado $z=(x,\ y)$ e na forma algébrica $z=x+yi$, com $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$.

Cada par ordenado de números reais $(x,\ y)$ pode ser representado em um plano cartesiano por um único ponto. Assim, no plano, a um ponto P, de coordenadas x e y, ou seja, $P(x,\ y)$, podemos associar um único número complexo $z=x+yi$, e vice-versa.

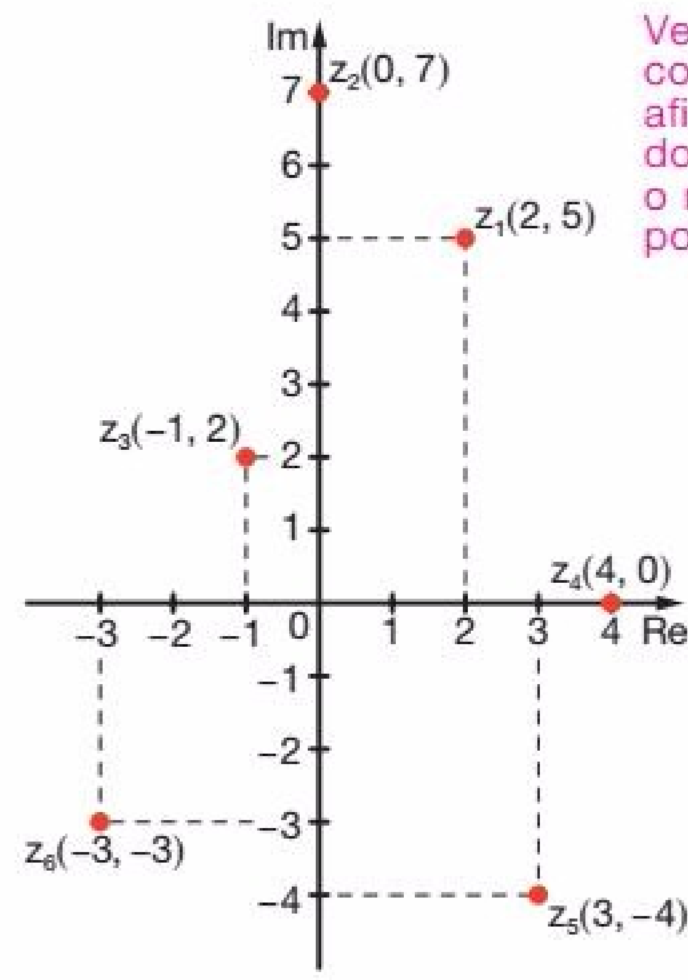


O ponto P é denominado **imagem** de z, e o plano cartesiano em que são representados os números complexos é denominado **plano de Argand-Gauss** ou **plano complexo**. Nesse plano, o eixo das abscissas é chamado **eixo real** (Re), e o eixo das ordenadas, **eixo imaginário** (Im). O número complexo representado pelo ponto $P(x,\ y)$ é chamado de **afixo** de P.

Exemplo

Observe a representação geométrica de alguns números complexos.

- $z_1=2+5i=(2,\ 5)$
- $z_2=7i=(0,\ 7)$
- $z_3=-1+2i=(-1,\ 2)$
- $z_4=4=(4,\ 0)$
- $z_5=3-4i=(3,\ -4)$
- $z_6=-3-3i=(-3,\ -3)$

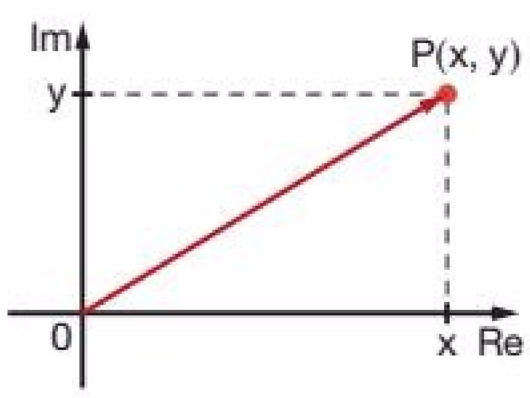


Verifique se os alunos compreenderam que o afixo de um ponto P, do plano complexo, é o número complexo por ele representado.

Note que o número imaginário puro $z_2=7i$ é da forma $(0,\ y)$, logo ele é representado sobre o eixo imaginário (Im). Já o número real $z_4=4$ é da forma $(x,\ 0)$, e sua representação é sobre o eixo real (Re).

Também podemos associar cada número complexo $z=x+yi$ a um único vetor, com origem na origem do plano complexo e extremidade no ponto $P(x,\ y)$.

Lembre os alunos de que um vetor é um segmento de reta que possui direção, sentido e comprimento.



Ilustrações: Acervo da editora

Atividades resolvidas

R4. Represente no plano de Argand-Gauss a região em que os pontos correspondem aos números complexos $z=a+bi$, com a e b reais, nas condições a seguir:

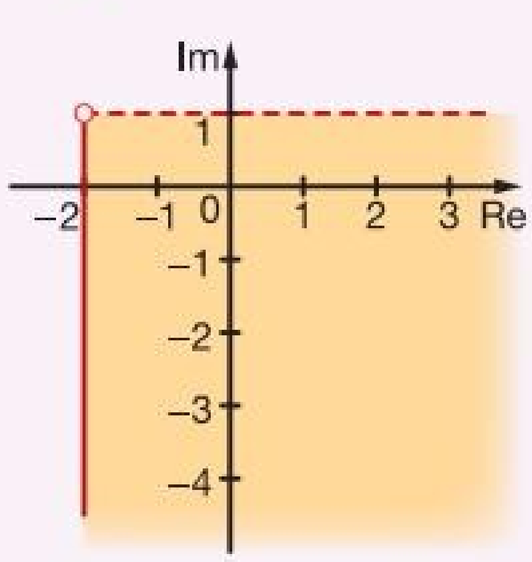
a) $a\geq-2$ e $b<1$

b) $a<3$ e $b\geq-4$

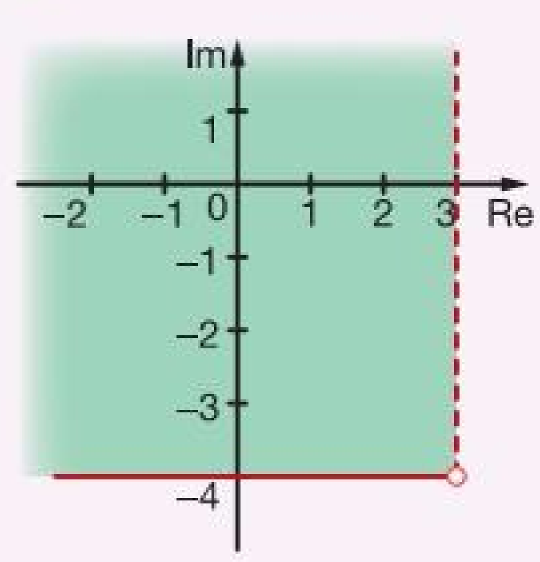
c) $-2\leq a<3$ e $-4\leq b<1$

Resolução

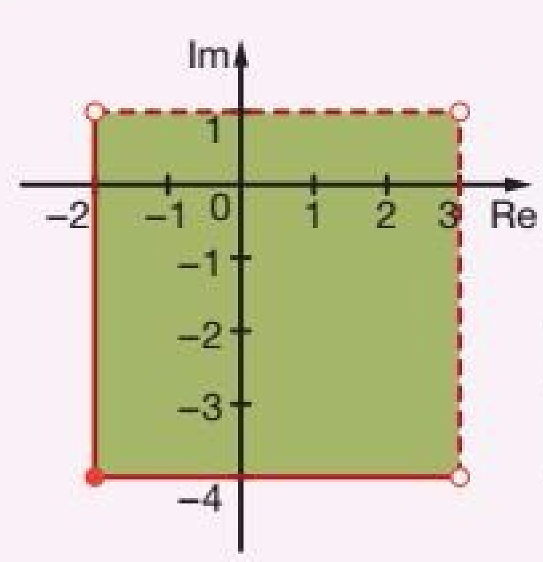
a) $a\geq-2$ e $b<1$



b) $a<3$ e $b\geq-4$



c) $-2\leq a<3$ e $-4\leq b<1$



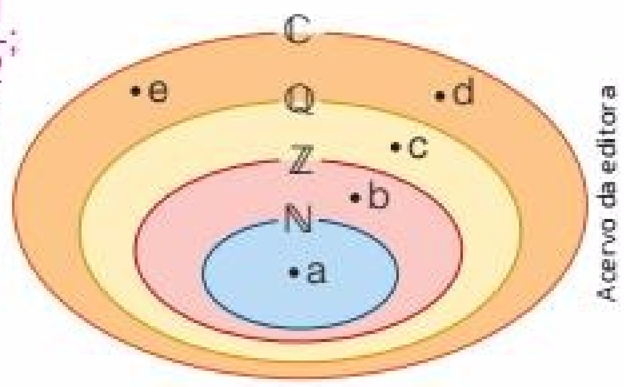
Ilustrações: Acervo da editora

Note que os pontos correspondentes à região do plano determinada no item **c** correspondem à interseção das regiões do plano determinadas nos itens **a** e **b**.

Anote as respostas no caderno.

1. No diagrama a seguir, cada uma das letras *a*, *b*, *c*, *d* e *e* representa uma das raízes das equações: $x^2-4x+8=0$, $x^2-x-6=0$ ou $x^2-x+\frac{1}{4}=0$. Determine o valor de cada letra.

$a=3$; $b=-2$; $c=\frac{1}{2}$; $d=2+2i$; $e=2-2i$ (ou $d=2-2i$; $e=2+2i$)



2. Escreva a parte real e a parte imaginária de cada número complexo. Respostas no final do livro.

a) $z_1=3+2i$
b) $z_2=-4i$
c) $z_3=\sqrt{5}$
d) $z_4=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}i$
e) $z_5=0$

3. Resolva.

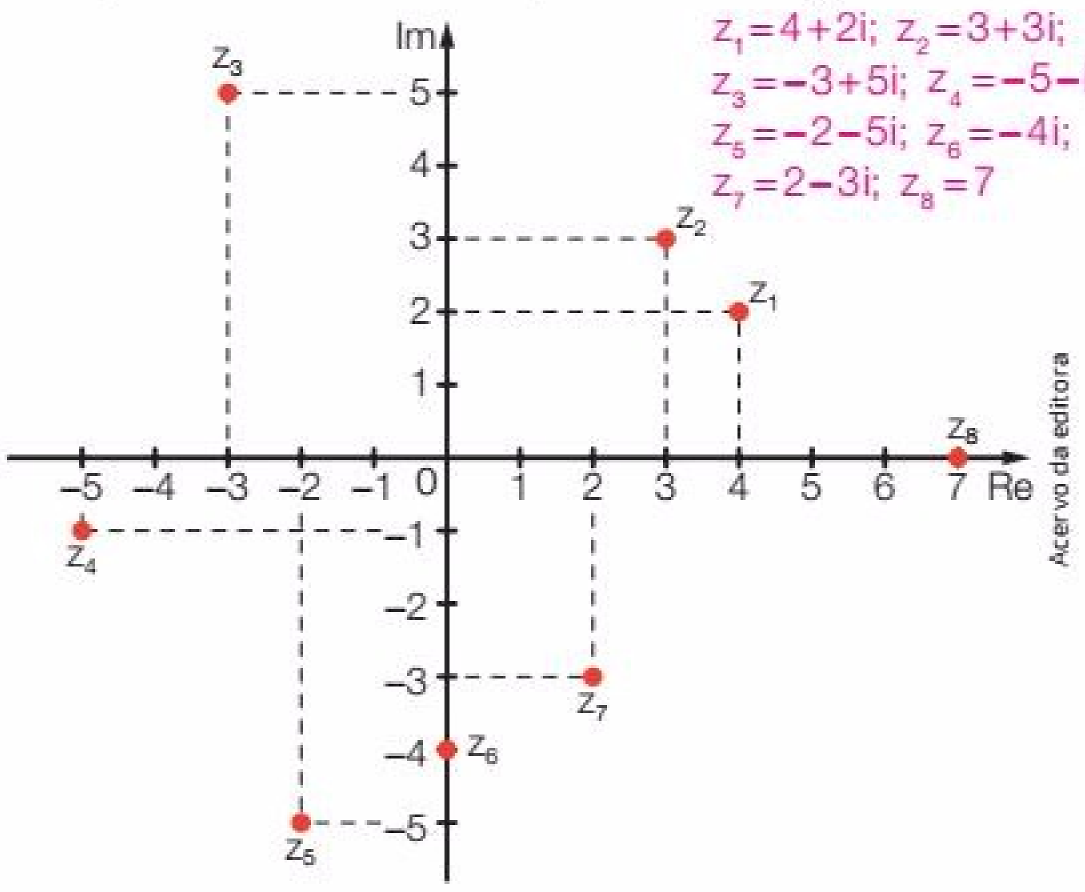
a) Escreva cada número complexo na forma algébrica.

- $z_1=(4,5)$ $z_1=4+5i$
- $z_2=\left(-3{,}5;\frac{2}{5}\right)$ $z_2=-3{,}5+\frac{2}{5}i$
- $z_3=\left(0,\sqrt{7}\right)$ $z_3=\sqrt{7}i$
- $z_4=\left(6,-\frac{3}{2}\right)$ $z_4=6-\frac{3}{2}i$
- $z_5=\left(\pi,-\frac{3}{4}\right)$ $z_5=\pi-\frac{3}{4}i$

b) Represente no plano de Argand-Gauss cada número complexo escrito no item **a**. Resposta no final do livro.

4. Represente na forma algébrica cada número complexo indicado no plano de Argand-Gauss.

$z_1=4+2i$; $z_2=3+3i$; $z_3=-3+5i$; $z_4=-5-i$; $z_5=-2-5i$; $z_6=-4i$; $z_7=2-3i$; $z_8=7$



5. Determine o conjunto solução de cada equação em ℂ. Respostas no final do livro.

a) $2x^2-8x+10=0$
b) $3x^2-18x+30=0$
c) $-x^2+x-\frac{37}{4}=0$
d) $3x^2-4x+2=0$

6. Calcule os valores de *p* para os quais o número complexo:

a) $z_1=(-4-p)+5i$ seja imaginário puro $p=-4$
b) $z_2=(p-7)-(2+3p)i$ seja real $p=-\frac{2}{3}$
c) $z_3=\left(4-p^2\right)+(4p-8)i$ seja imaginário puro $p=-2$

7. Determine os valores reais de *a* para que o número complexo $z=(5-a)+(a-3)i$ tenha:

a) $\text{Re}(z)=4$ $a=1$
b) $\text{Im}(z)=9$ $a=12$
c) $\text{Re}(z)<\text{Im}(z)$ $a>4$

8. Obtenha *x* e *y* reais de modo que:

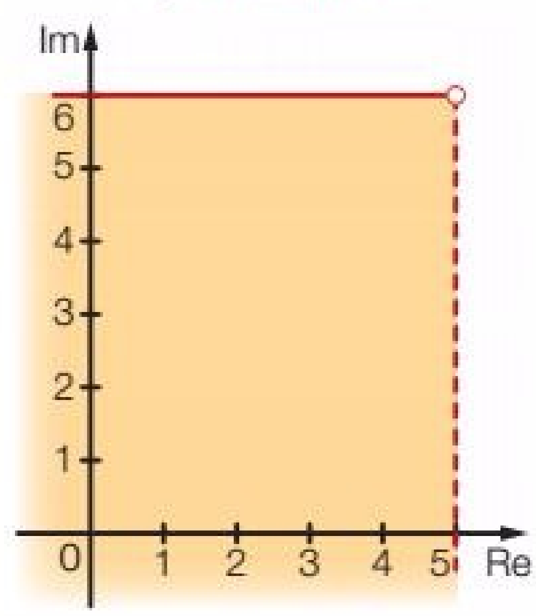
a) $(x-4)+(2y-1)i=-1-3i$ $x=3$; $y=-1$
b) $(6x-3)-(5-2y)i=5i$ $x=\frac{1}{2}$; $y=5$
c) $(x+y-1)+(5x-2y+23)i=0$ $x=-3$; $y=4$

9. Sabendo que $z=x^2+5x-50-10xi+50i$ é imaginário puro e que $x\in\mathbb{R}$, determine:

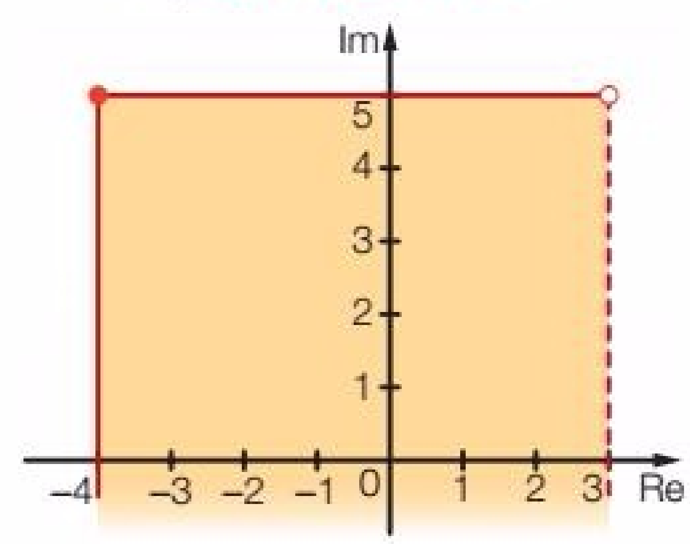
a) o valor de *x* -10
b) *z* na forma algébrica $z=150i$

10. Em cada item, escreva para quais valores de *a* e *b*, em $z=a+bi$, corresponde a região em destaque no plano de Argand-Gauss.

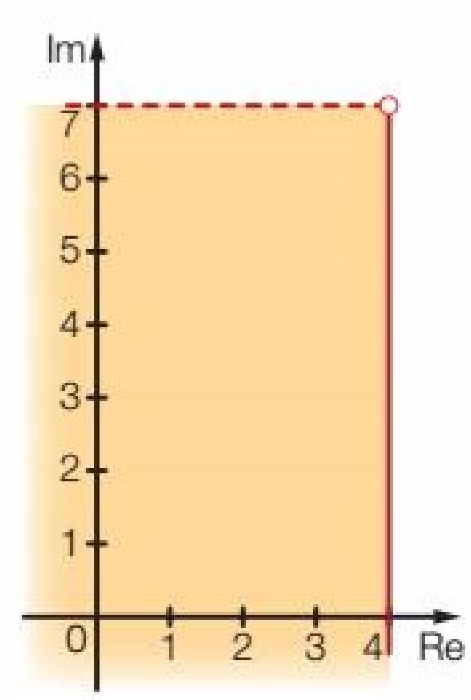
a) $a<5$; $b\leq 6$



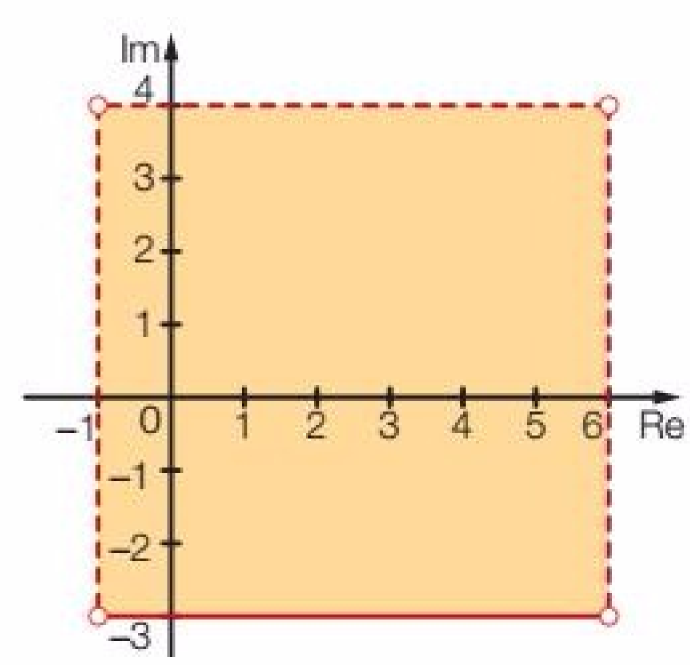
d) $-4\leq a<3$; $b\leq 5$



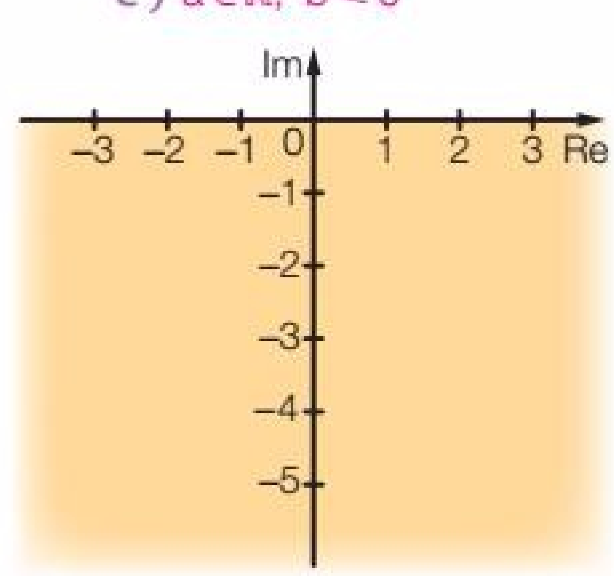
b) $a\leq 4$; $b<7$



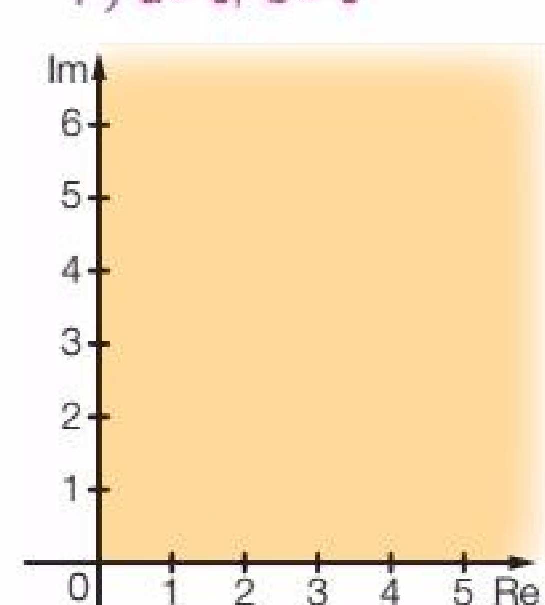
e) $-1<a<6$; $-3\leq b<4$



c) $a\in\mathbb{R}$; $b\leq 0$



f) $a\geq 0$; $b\geq 0$



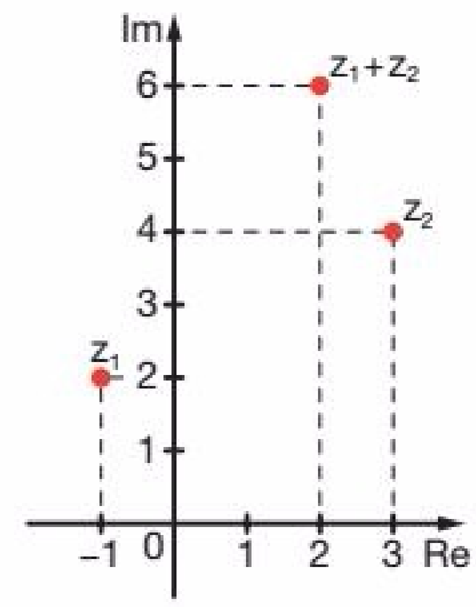
Ilustrações: Acervo da editora

Operações com números complexos

Adição, subtração e multiplicação

Na **adição** de dois números complexos, adicionamos separadamente as partes reais e as partes imaginárias. Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = -1+2i$ e $z_2 = 3+4i$, calculamos $z_1 + z_2$:

$$z_1+z_2=\underbrace{(-1+2i)}_{z_1}+\underbrace{(3+4i)}_{z_2}=(-1+3)+(2+4)i \Rightarrow \mathbf{z_1+z_2=2+6i}$$



Em relação à adição de números complexos, destacamos a propriedade do **elemento oposto**.

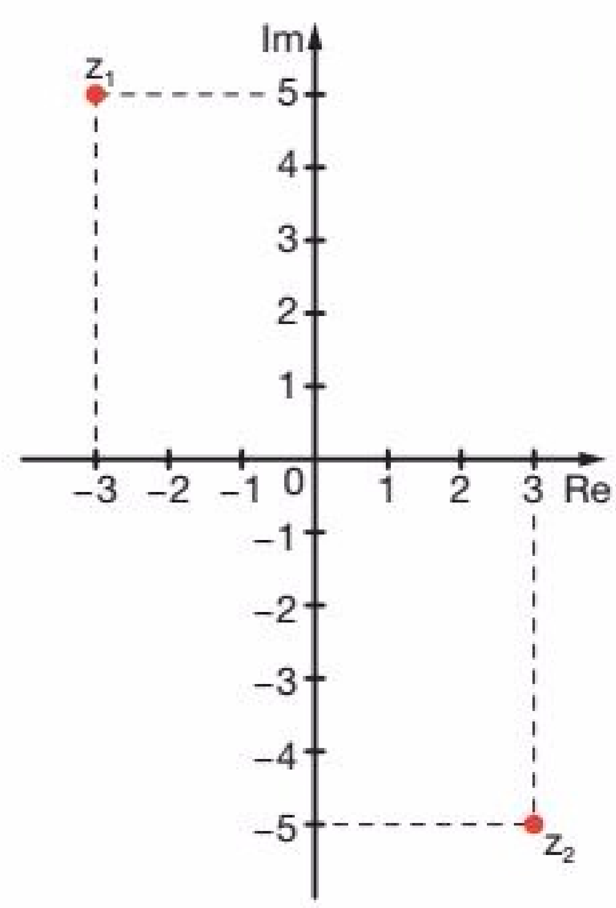
> Para cada número complexo $z_1 = a+bi$, existe um **número oposto** $z_2 = -a-bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ também complexo, tal que:
>
> $$z_1+z_2=z_2+z_1=0+0i$$

Exemplo

Considere os números complexos $z_1 = -3+5i$ e $z_2 = 3-5i$. Desenvolvendo $z_1+z_2=z_2+z_1$, temos:

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$
$$(-3+5i)+(3-5i)=(3-5i)+(-3+5i)$$
$$(-3+3)+(5-5)i=(3-3)+(-5+5)i$$
$$0+0i=0+0i$$

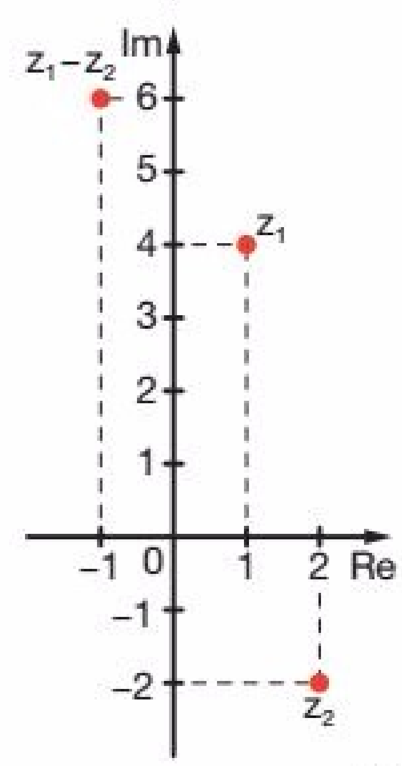
Como $z_1+z_2=z_2+z_1=0+0i$, dizemos que esses números são opostos.



No plano de Argand-Gauss, as imagens de dois números complexos opostos são simétricas em relação à origem do plano.

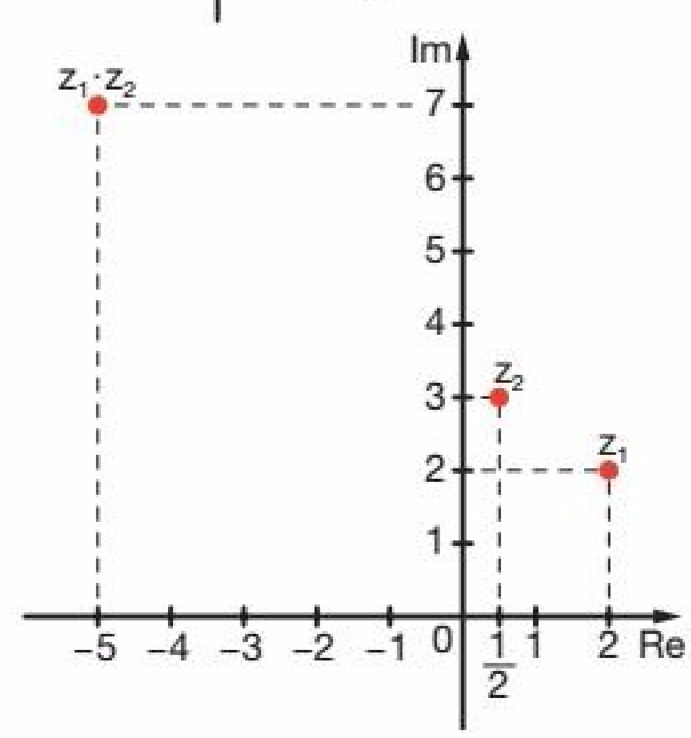
Para realizar a **subtração** de dois números complexos, subtraímos separadamente as partes reais e as partes imaginárias. Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = 1+4i$ e $z_2 = 2-2i$, calculamos $z_1 - z_2$:

$$z_1-z_2=\underbrace{(1+4i)}_{z_1}-\underbrace{(2-2i)}_{z_2}=1+4i-2+2i=$$
$$=(1-2)+(4+2)i \Rightarrow z_1-z_2=-1+6i$$



Na **multiplicação** de dois números complexos, aplicamos a propriedade distributiva e reduzimos os termos semelhantes. Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = 2+2i$ e $z_2 = \frac{1}{2}+3i$, calculamos $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1\cdot z_2=\underbrace{(2+2i)}_{z_1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}+3i\right)}_{z_2}=1+6i+i+6\underbrace{i^2}_{-1}=1+6i+i-6 \Rightarrow z_1\cdot z_2=-5+7i$$



Ilustrações: Acervo da editora

> Propriedade distributiva da multiplicação:
>
> $$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Considerando os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, temos:

- Adição

$$z_1 + z_2 = (a+bi)+(c+di) \Rightarrow z_1 + z_2 = (a+c)+(b+d)i$$

- Subtração

$$z_1 - z_2 = (a+bi)-(c+di) \Rightarrow z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)i$$

- Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Atividades resolvidas

R5. Verifique se os números complexos $z_1 = 2-2i$ e $z_2 = 2+2i$ são soluções da equação $z^2 - 4z + 8 = 0$.

Resolução

Podemos resolver essa atividade de duas maneiras:

Lembre-se de que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ e $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1ª maneira: substituindo os valores.

- Para $z_1 = 2-2i$:

$$z^2 - 4z + 8 = (2-2i)^2 - 4(2-2i) + 8 = 4 - 8i + 4\underbrace{i^2}_{-1} - 8 + 8i + 8 = 4 - 8i - 4 - 8 + 8i + 8 = 0$$

Logo, $z_1 = 2-2i$ é solução da equação.

- Para $z_2 = 2+2i$:

$$z^2 - 4z + 8 = (2+2i)^2 - 4(2+2i) + 8 = 4 + 8i + 4\underbrace{i^2}_{-1} - 8 - 8i + 8 = 4 + 8i - 4 - 8 - 8i + 8 = 0$$

Logo, $z_2 = 2+2i$ é solução da equação.

2ª maneira: verificando a soma (S) e o produto (P) das possíveis soluções.

- $S = z_1 + z_2 = (2-2i)+(2+2i) = 4$
- $P = z_1 \cdot z_2 = (2-2i)(2+2i) = 4 + 4i - 4i - 4\underbrace{i^2}_{-1} = 4 + 4i - 4i + 4 = 8$

Considerando a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$, temos $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$. Assim, segue que $z_1 = 2-2i$ e $z_2 = 2+2i$ são soluções da equação.

R6. Considerando os números complexos $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$ e $z_3 = -1+3i$, efetue algebricamente e represente os vetores correspondentes aos números complexos:

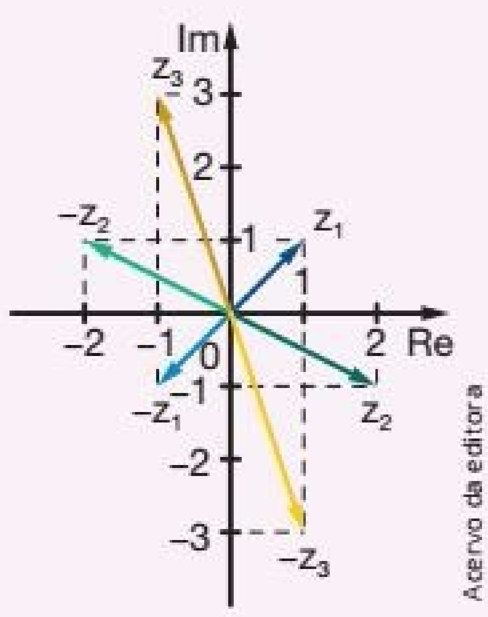
a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $-z_1 - z_2 - z_3$

c) $2z_1 + z_2 - 2z_3$

Resolução

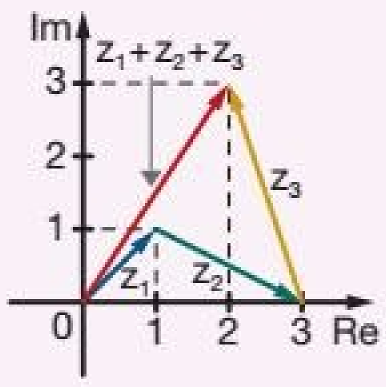
Vimos que a cada número complexo $z = a + bi$ associamos um único vetor com origem em $(0, 0)$ e extremidade em (a, b). Na imagem ao lado, representamos os vetores correspondentes aos números complexos z_1, $-z_1$, z_2, $-z_2$, z_3 e $-z_3$.



Podemos efetuar geometricamente a adição de números complexos por meio da **regra do polígono**, na qual escolhemos um dos vetores como ponto de partida e transladamos os vetores seguintes, de modo que a origem do 2º vetor coincida com a extremidade do 1º, e assim sucessivamente.

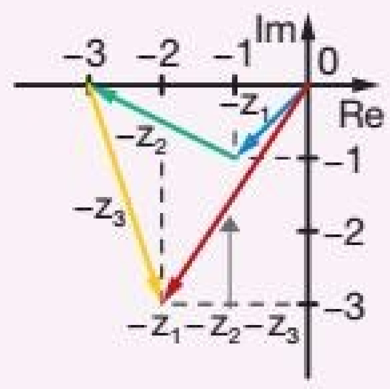
Em cada plano de Argand-Gauss, o vetor em vermelho indica o resultado da operação.

a) $z_1+z_2+z_3=(1+i)+(2-i)+(-1+3i)=2+3i$



Note que, ao transladarmos a origem do vetor z_2 uma unidade para cima e uma unidade para a direita, o mesmo acontece com a sua extremidade.

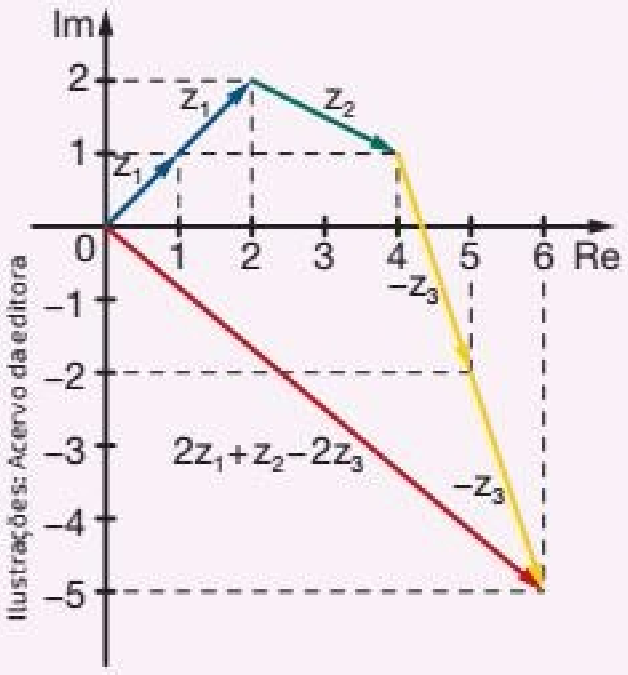
b) $-z_1-z_2-z_3=-(1+i)-(2-i)-(-1+3i)=-2-3i$



c) $2z_1+z_2-2z_3=z_1+z_1+z_2-z_3-z_3=$

$=2(1+i)+(2-i)-2(-1+3i)=$

$=2+2i+2-i+2-6i=6-5i$



Ilustrações: Acervo da editora

A ordem escolhida para traçar os vetores foi a mesma ordem dos elementos na operação.

R7. Determine o número complexo z em cada igualdade.

a) $4z-5i=10-z$

b) $3i-2z=(z+7)i-7$

Resolução

a) $4z-5i=10-z \Rightarrow 4z+z=10+5i \Rightarrow 5z=10+5i \Rightarrow 5z=5(2+i) \Rightarrow z=2+i$

b) Como z é da forma $z=a+bi$, temos:

$$3i-2z=(z+7)i-7 \Rightarrow 3i-2(a+bi)=(a+bi+7)i-7 \Rightarrow 3i-2a-2bi=ai+b\underbrace{i^2}_{-1}+7i-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2a+(3-2b)i=-7-b+(a+7)i$$

Escrevemos e resolvemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -2a=-7-b \\ 3-2b=a+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=-7 \\ -a-2b=4 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=-7 \\ 2a+4b=-8 \end{cases}$$

$$5b=-15 \Rightarrow b=-3$$

Substituindo $b=-3$ em $-2a=-7-b$, temos:

$$-2a=-7-(-3) \Rightarrow -2a=-4 \Rightarrow a=2$$

Portanto, $z=2-3i$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

11. Calcule:

a) $(4+5i)+(1-2i)$ $5+3i$

b) $(-2+3i)-(5+9i)$ $-7-6i$

c) $(4+i)-(-5-7i)$ $9+8i$

d) $(-20-8i)-(-18+7i)$ $-2-15i$

e) $20-(10+\sqrt{20}i)+5+(7+\sqrt{45}i)$ $22+\sqrt{5}i$

12. Dados os números complexos $z_1=-4+7i$ e $z_2=2+3i$, determine z_3 de modo que:

a) $z_3=z_1+z_2$ $z_3=-2+10i$

b) $z_3=z_1-z_2$ $z_3=-6+4i$

c) $z_3=z_2-z_1$ $z_3=6-4i$

Agora, em um mesmo plano de Argand-Gauss, construa um vetor correspondente a cada número complexo z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2 e z_2-z_1. Resposta no final do livro.

13. O número complexo z_1 é tal que seu oposto somado com $z_2=8-3i$ é igual a $z_3=9-12i$. Determine z_1 na sua forma algébrica. $z_1=-1+9i$

14. Sejam os números complexos $z=-2+xi$ e $w=y-5i$, com x e y reais, de maneira que $w-z=10-20i$. Sobre o valor numérico de $\frac{\sqrt{x+1}}{y}$, verifique quais das afirmativas abaixo são verdadeiras. b; e

a) É divisível por 5.

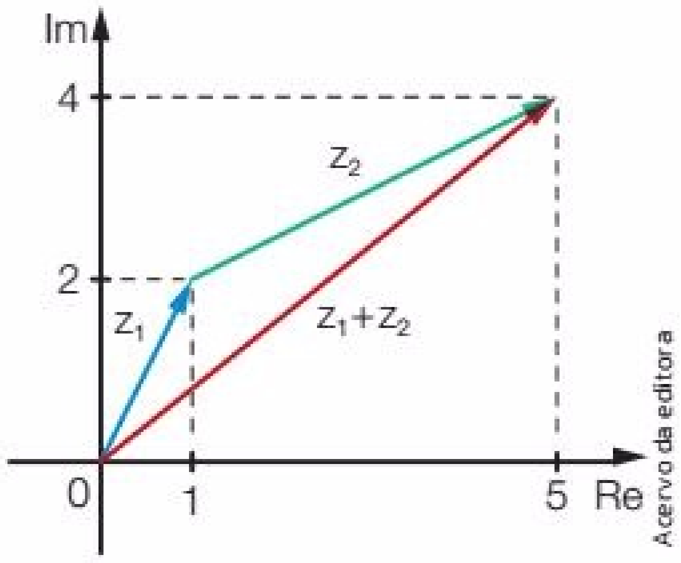
b) É uma potência de base 2 e expoente inteiro.

c) É um número inteiro.

d) Pertence ao intervalo $[2, 5]$.

e) O seu inverso é um número primo.

15. No plano complexo está representado z_1+z_2.



a) Escreva na forma algébrica os números complexos z_1, z_2 e z_1+z_2. $z_1=1+2i$; $z_2=4+2i$; $z_1+z_2=5+4i$

b) Efetue algébrica e geometricamente a operação $2z_2+z_1$. Resposta no final do livro.

16. Resolva o sistema. $z_1=2+7i$; $z_2=3-5i$; $z_3=4i$

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=5+6i \\ 3z_1-z_2+z_3=3+30i \\ -z_1-z_2+z_3=-5+2i \end{cases}$$

17. Dados os números complexos $z_1=5+i$ e $z_2=4-9i$, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$ $29-41i$

b) z_2^2 $-65-72i$

c) $z_1^2 \cdot z_2^2$ $-840-2\,378i$

18. Determine o número complexo z em que a soma das partes real e imaginária é igual a 1 e $z^2=-7-24i$. $z=-3+4i$

19. Sejam os números complexos $z=(p-1)+(p-3)i$ e $w=(p-5)+(p+1)i$, com $p\in\mathbb{R}$, tais que $z\cdot w$ é imaginário puro. Qual é o valor de p? $p=2$

20. Sabendo que a matriz $C=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ é definida por $A\cdot B=C$, em que $A=\begin{bmatrix} -3 & 1+2i \\ -1+i & -5i \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -1+2i & 4 \\ -2i & 3i \end{bmatrix}$, determine a soma $c_1+c_2+c_3+c_4$. $-11-4i$

21. **Desafio**

Determine os números complexos, z_1, z_2 e z_3, de maneira que: $z_1=3-2i$, $z_2=\frac{20}{k}i$ e $z_3=k$, com $k\in\mathbb{R}^*$

I) $z_1\cdot z_2\cdot z_3=40+60i$

II) a parte imaginária de z_1 é -2

III) z_2 é imaginário puro

IV) z_3 é real

Na atividade 17, verifique se os alunos perceberam que, se $z=a+bi$, então $z^2=(a+bi)^2$.

Conjugado

O **conjugado** do número complexo $z=x+yi$, indicado por $\bar{z}$, é dado por $\bar{z}=x-yi$, com $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$. Note que obtemos $\bar{z}$ trocando o sinal da parte imaginária de z.

> Exemplos

- $z=8+15i \Rightarrow \bar{z}=8-15i$
- $z=\frac{2}{5}-i \Rightarrow \bar{z}=\frac{2}{5}+i$
- $z=9i \Rightarrow \bar{z}=-9i$
- $z=12 \Rightarrow \bar{z}=12$

Uma das propriedades do conjugado é que o produto entre um número complexo e seu conjugado é sempre um número real não negativo.

Calculando o produto entre $z=x+yi$ e seu conjugado $\bar{z}=x-yi$, temos:

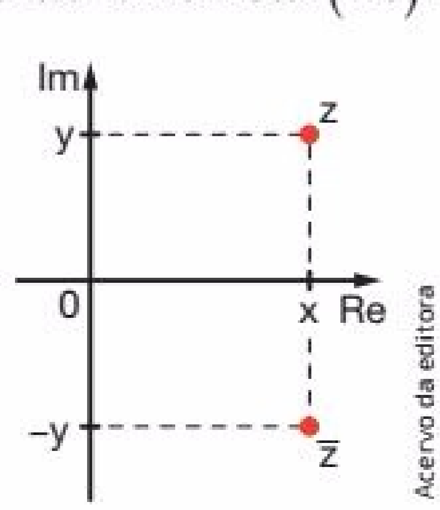
$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-xyi+xyi-y^2\underbrace{i^2}_{-1} \Rightarrow z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$$

Portanto, o produto $z\cdot\bar{z}$ é igual ao quadrado da parte real mais o quadrado da parte imaginária de z.

> Exemplos

- $z=-2+5i \Rightarrow z\cdot\bar{z}=(-2)^2+5^2=29$
- $z=-3-i \Rightarrow z\cdot\bar{z}=(-3)^2+(-1)^2=10$

No plano de Argand-Gauss, as imagens de um número complexo e de seu conjugado são simétricas em relação ao eixo real (Re).



Atividades resolvidas

R8. Mostre que, se z_1 e z_2 são números complexos, então são válidas as seguintes propriedades:

a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Resolução

Consideramos os números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$.

a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=a+c-bi-di=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

b) Temos que:

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Logo:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i \text{ (I)}$$

Além disso:

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i \text{ (II)}$$

Portanto, comparando **I** e **II**, concluímos que $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

R9. Determine o número complexo *z*, tal que $3z+i=\overline{z}+4$.

Resolução

Considerando $z=a+bi$, temos:

$$3z+i=\overline{z}+4\Rightarrow 3(a+bi)+i=a-bi+4\Rightarrow 3a+3bi+i=a+4-bi\Rightarrow 3a+(3b+1)i=a+4-bi$$

Igualando as partes reais e as partes imaginárias:

- $3a=a+4\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$
- $3b+1=-b\Rightarrow 4b=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{4}$

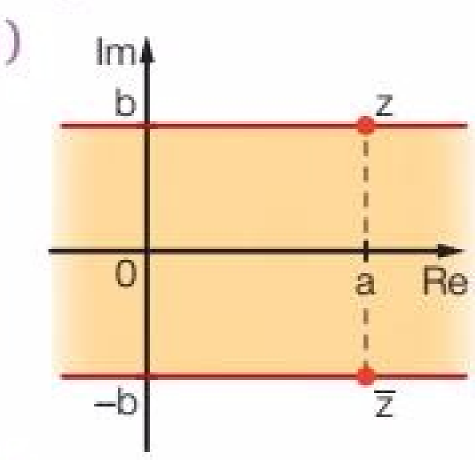
Portanto, $z=2-\frac{1}{4}i$.

Atividades

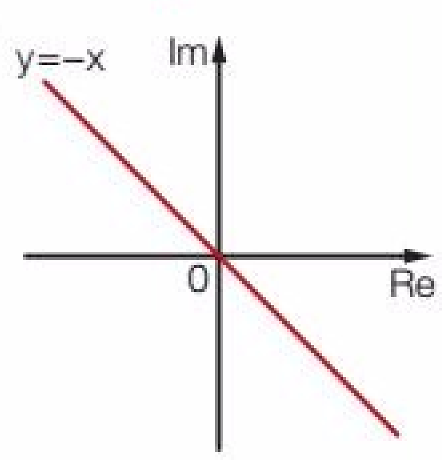
Anote as respostas no caderno.

22. Qual dos gráficos representa o lugar geométrico no plano de Argand-Gauss das imagens dos números complexos $z=a+bi$, tais que $z=\overline{z}\cdot i$? b

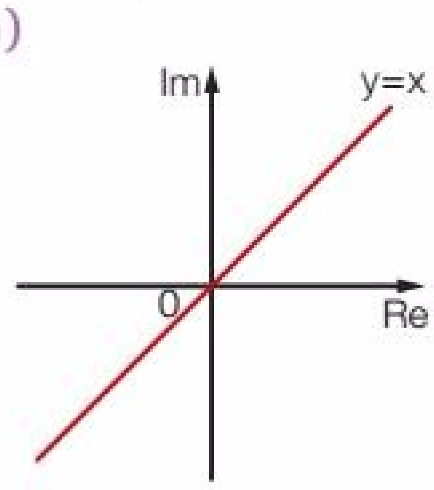
a)



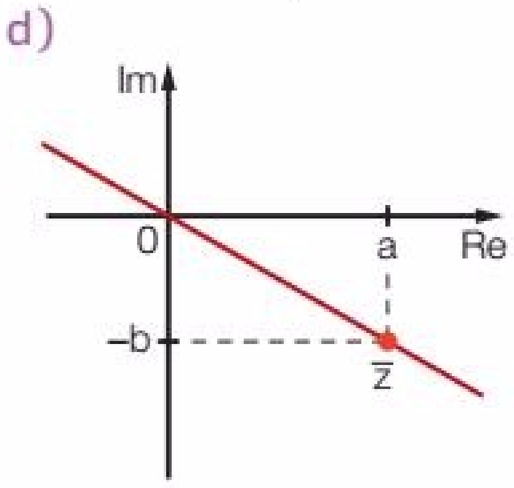
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

23. Para cada item, calcule $z\cdot\overline{z}$.

a) $z=1-2i$ 5

b) $z=4+2i$ 20

c) $z=7+\sqrt{8}i$ 57

d) $z=-5$ 25

e) $z=4i$ 16

24. Determine os números reais *m* e *n* em $z_1=\left(\frac{m}{2}-1\right)+\left(n-\frac{3}{2}\right)i$, sabendo que $z_2=-\frac{5}{8}-\frac{1}{2}i$ e $z_1=\overline{z_2}$. $m=\frac{3}{4}$; $n=2$

25. Dados os números complexos $z_1=-6+2i$, $z_2=1-4i$ e $z_3=3i$, calcule:

a) $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}$ $-5-i$

b) $\overline{z_1+z_2+z_3}$ $-5-i$

c) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}$ $-78-6i$

d) $\overline{z_1\cdot z_2\cdot z_3}$ $-78-6i$

26. Mostre que a relação $\overline{z^2}=\left(\overline{z}\right)^2$ é válida para todo número complexo $z=a+bi$.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

27. **Desafio**

Sendo z_1 e z_2 números complexos, resolva o sistema $\begin{cases}\overline{z_1}^2-\overline{z_2}^2=15-30i\\ \overline{z_1}-\overline{z_2}=3i\end{cases}$. $z_1=-5+i$; $z_2=-5+4i$

28. Mostre que dado um número complexo $z=a+bi$, em que $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}$, o produto $\left(\overline{z}\right)^2\cdot z^2$ é um número real. Resposta nas **Orientações para o professor**.

Capítulo 5

Divisão

O quociente entre dois números complexos z_1 e z_2, com $(z_2 \neq 0)$, pode ser obtido multiplicando-se o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor, isto é:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Exemplo

Considerando $z_1=-6+9i$ e $z_2=2+4i$, e calculando $\frac{z_1}{z_2}$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}=\frac{(-6+9i)\cdot(2-4i)}{(2+4i)\cdot(2-4i)}=\frac{-12+24i+18i-36\overbrace{i^2}^{-1}}{2^2+4^2}=$$

$$=\frac{(-12+36)+(24+18)i}{4+16}=\frac{24+42i}{20}=\frac{6}{5}+\frac{21}{10}i$$

Atividades resolvidas

R10. Escreva na forma $z=a+bi$ o número complexo $\frac{1-i}{1+i}+\frac{2+i}{3i}$, sendo *a* e *b* reais.

Resolução

Desenvolvendo cada divisão, temos:

- $\frac{1-i}{1+i}=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{1-2i-1}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i$
- $\frac{2+i}{3i}=\frac{2+i}{3i}\cdot\frac{(-3i)}{(-3i)}=\frac{-6i-3i^2}{3^2}=\frac{3-6i}{9}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$

Logo:

$$\frac{1-i}{1+i}+\frac{2+i}{3i}=-i+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i=\boxed{\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i}$$

R11. Sendo *a*, *b*, *c* e *d* reais com $c \neq 0$ ou $d \neq 0$, mostre que se $bc-ad=0$, então o número $z=\frac{a+bi}{c+di}$ é real.

Resolução

Desenvolvendo a divisão, temos:

$$z=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{\overbrace{bc-ad}^{0}}{c^2+d^2}i=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$$

Como *a*, *b*, *c* e *d* são números reais, então *z* é real.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

29. A partir dos números complexos $z_1=6-2i$ e $z_2=2+i$, calcule:

a) $\frac{z_1}{z_2}$ $2-2i$ b) $\frac{z_2}{z_1}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ c) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{z_1}{z_2}$ 4 d) $\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ $3+2i$

30. Escreva na forma $z=a+bi$, com *a* e *b* reais, o número complexo $z=\frac{2+3i}{6-i}+\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$. $z=\frac{9}{37}+\frac{77}{74}i$

31. Expresse *a* em função de *b*, com *a* e *b* de maneira que o número complexo $z=\frac{a-3i}{5+bi}$ seja:

a) real $a=-\frac{15}{b}$ b) imaginário puro $a=\frac{3b}{5}$

32. Sendo os números complexos $z=\frac{5}{2-2i}$ e $w=\frac{3+i}{1-3i}$, calcule:

a) $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$ $\frac{2}{5}-\frac{7}{5}i$ b) $\frac{\overline{w}}{z}$ $-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}i$ c) $\frac{1}{\overline{z}}\cdot\frac{1}{\overline{w}}$ $-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i$

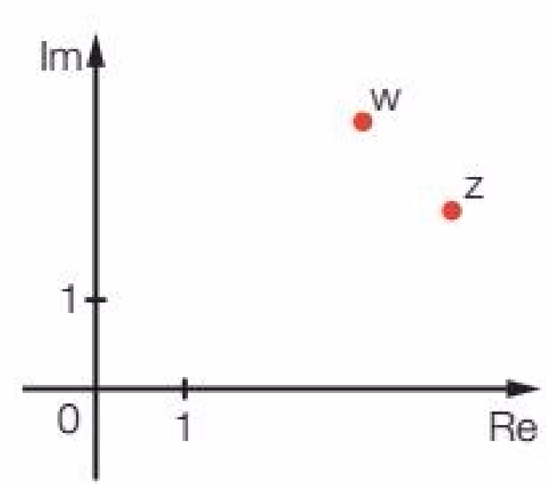
33. Considerando os números complexos $z=a+bi$ e $w=c+di$, sendo *a*, *b*, *c* e *d* reais, escreva o resultado de cada operação como um par ordenado de números reais.

a) $\frac{z}{w}$ $\frac{z}{w}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ b) $\frac{z}{\overline{w}}$ $\frac{z}{\overline{w}}=\left(\frac{ac-bd}{c^2+d^2}, \frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)$

34. Desafio

Considere os números complexos *z* e *w*, representados no plano complexo. Em qual quadrante do plano complexo deve ser representada a razão $\frac{z}{w}$? Justifique.

Resposta no final do livro.



Acervo da editora

Potenciação de *i*

Sabendo que $i^2=-1$ e utilizando as propriedades de potenciação conhecidas em $\mathbb{R}$, podemos calcular os valores de i^n, com $n \in \mathbb{N}$.

Calculando i^n para $0 \le n \le 11$, temos:

- $i^0=1$
- $i^1=i$
- $i^2=-1$
- $i^3=i^2 \cdot i^1=(-1) \cdot i=-i$
- $i^4=i^2 \cdot i^2=(-1) \cdot (-1)=1$
- $i^5=i^4 \cdot i^1=1 \cdot i=i$
- $i^6=i^4 \cdot i^2=1 \cdot (-1)=-1$
- $i^7=i^4 \cdot i^3=1 \cdot (-i)=-i$
- $i^8=i^4 \cdot i^4=1 \cdot 1=1$
- $i^9=i^8 \cdot i^1=1 \cdot i=i$
- $i^{10}=i^8 \cdot i^2=1 \cdot (-1)=-1$
- $i^{11}=i^8 \cdot i^3=1 \cdot (-i)=-i$

Note que os valores de i^n se repetem de 4 em 4, ou seja:

- $i^0=i^4=i^8=1$
- $i^1=i^5=i^9=i$
- $i^2=i^6=i^{10}=-1$
- $i^3=i^7=i^{11}=-i$

Essas recorrências são válidas para todo *n* natural. Assim, temos $i^n=i^r$, em que *r* é o resto da divisão de *n* por 4.

Exemplo

Calculando i^{50} e i^{107}, temos:

- i^{50}

$$\begin{array}{r|l} 50 & 4 \\ \hline 2 & 12 \end{array} \qquad i^{50}=i^2=-1$$

(2 ↑ resto)

- i^{107}

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ \hline 3 & 26 \end{array} \qquad i^{107}=i^3=-i$$

(3 ↑ resto)

Atividades resolvidas

R12. Determine o valor da expressão $i^{17}+3i^{288}-2i^{95}+i^{-30}$.

Resolução

Temos que:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

(1 ↑ resto)

$i^{17}=i^1=i$

$$\begin{array}{r|l} 288 & 4 \\ \hline 0 & 72 \end{array}$$

(0 ↑ resto)

$i^{288}=i^0=1$

$$\begin{array}{r|l} 95 & 4 \\ \hline 3 & 23 \end{array}$$

(3 ↑ resto)

$i^{95}=i^3=-i$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 2 & 7 \end{array}$$

(2 ↑ resto)

$i^{-30}=\left(i^{30}\right)^{-1}=\left(i^2\right)^{-1}=-1$

Assim: $i^{17}+3i^{288}-2i^{95}+i^{-30}=i+3 \cdot 1-2 \cdot (-i)+(-1)=i+3+2i-1=\boxed{2+3i}$

R13. Determine em qual dos quadrantes do plano de Argand-Gauss está localizado o ponto correspondente ao número complexo $z=\dfrac{4+i^{38}}{5-i^{59}}$.

Resolução

Temos que:

$$z=\frac{4+i^{38}}{5-i^{59}}=\frac{4+i^{4 \cdot 9+2}}{5-i^{4 \cdot 14+3}}=\frac{4+i^2}{5-i^3}=\frac{4-1}{5+i}=\frac{3}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i}=\frac{15-3i}{5^2+1^2}=\frac{15}{26}-\frac{3}{26}i$$

Como a parte real $a=\dfrac{15}{26}>0$ e a parte imaginária $b=-\dfrac{3}{26}<0$, temos que o ponto correspondente a *z* pertence ao 4º quadrante no plano Argand-Gauss.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

35. Calcule as potências de *i*.

a) i^{21} i   b) i^{26} −1   c) i^{133} i   d) i^{228} 1   e) i^{1003} −i

36. Calcule os valores de *a* e *b* na equação $\dfrac{(1+i)^9\cdot(2-i)^3}{(-1-i)^{10}}=a+bi$. $a=-\dfrac{9}{2}$; $b=-\dfrac{13}{2}$

37. Desafio

Determine o valor da expressão $\left(\sqrt{2}\right)^{i+i^2+i^3+i^4+i^5+\ldots+i^{498}+i^{499}}$.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

38. Considerando o número complexo $z=\dfrac{i^n+i^{n-1}}{i^{2n}}$, com $n\in\mathbb{N}^*$, responda.

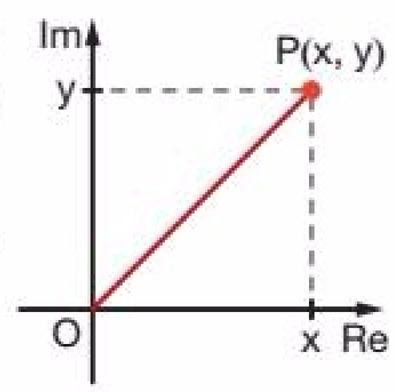
a) A quantos números complexos diferentes *z* pode corresponder? quatro números

b) Quais são esses números? $-1-i$; $-1+i$; $1+i$; $1-i$

39. Escreva na forma $w=a+bi$ o número complexo $w=\left(\dfrac{1+i^{11}}{1-i^{19}}\right)^{30}$. $w=-1$

Módulo de um número complexo

Definimos geometricamente o módulo de um número complexo $z=x+yi$, com $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$, como a distância entre a origem *O* do sistema de coordenadas cartesianas e o ponto $P(x, y)$.



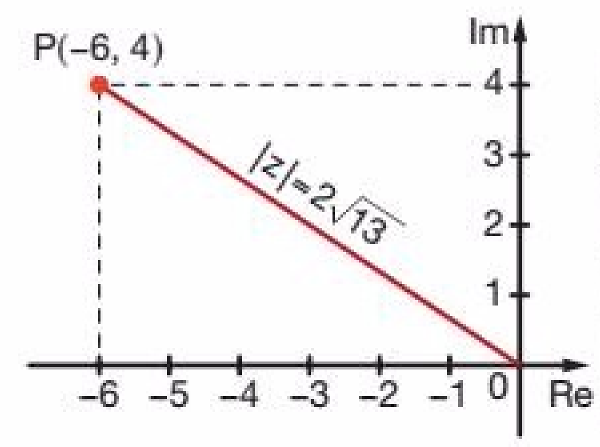
Algebricamente, indicamos o módulo do número complexo *z* por $|z|$. Utilizando o Teorema de Pitágoras, veja como podemos definir $|z|$:

$$(OP)^2=x^2+y^2 \Rightarrow OP=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exemplo

Calculando o módulo do número complexo $z=-6+4i$, temos:

$$|z|=\sqrt{(-6)^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$



Ilustrações: Acervo da editora

Em relação ao módulo de números complexos, destacamos as seguintes propriedades que podem ser demonstradas:

- $z\cdot\bar{z}=|z|^2$
- $|z|=|\bar{z}|$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2\neq 0$

Atividades resolvidas

R14. Duas antenas de telefonia celular foram instaladas em uma região plana. Ao representar a posição dessas antenas em um plano de Argand-Gauss, com graduação dos eixos em quilômetros, temos que elas correspondem aos números complexos $z=\dfrac{2+4i^{47}}{3-i}$ e $w=4+3i$. Qual é a distância entre essas antenas?

Resolução

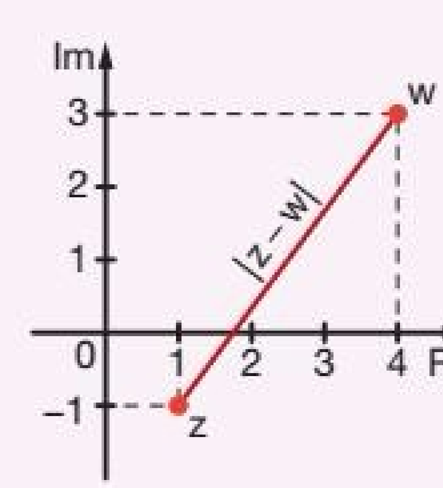
Inicialmente, escrevemos o número complexo $z=\dfrac{2+4i^{47}}{3-i}$ na forma $z=a+bi$.

$$z=\frac{2+4i^{47}}{3-i}=\frac{2+4i^{11\cdot4+3}}{3-i}=\frac{2+4i^3}{3-i}=\frac{2-4i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+2i-12i-4i^2}{9+1}=\frac{10-10i}{10}=1-i$$

Em seguida, calculamos a distância entre *z* e *w*:

$$|z-w|=\left|(1-i)-(4+3i)\right|=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Portanto, a distância entre as duas antenas é de 5 km.



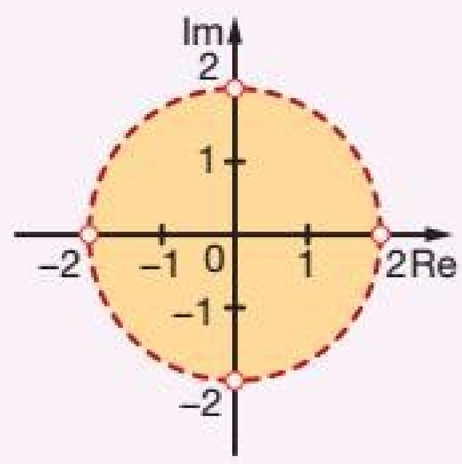
Acervo da editora

De modo geral, a distância entre dois pontos correspondentes aos números complexos *z* e *w* é o módulo da diferença entre eles, ou seja, $|z-w|$.

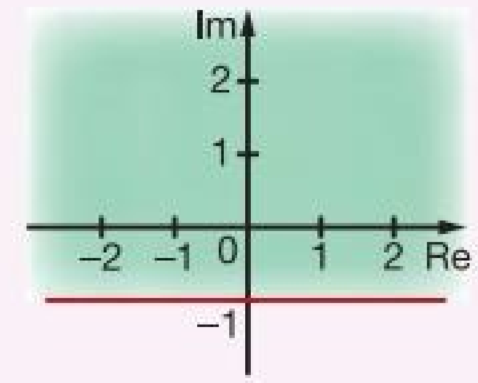
R15. Represente no plano complexo o conjunto dos pontos $z=a+bi$, com *a* e *b* reais tal que $|z|<2$ e $b\geq -1$.

Resolução

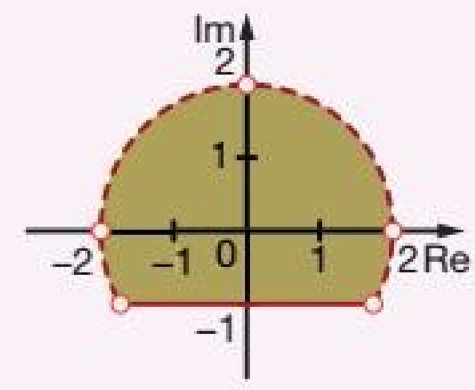
A região limitada pela inequação $|z|<2$ representa o conjunto de pontos no plano complexo cuja distância à origem é menor que 2, uma vez que $|z|$ corresponde à distância entre essa origem e o ponto $P(a,b)$. Essa região corresponde a um círculo de centro na origem e raio de medida 2, com exceção da circunferência.



A região limitada pela inequação $b\geq -1$ representa o conjunto de pontos no plano complexo cuja ordenada é maior ou igual a −1.



Portanto, representamos o conjunto dos pontos $z=a+bi$ pela interseção das regiões determinadas pelas duas inequações.



Ilustrações: Acervo da editora

Capítulo 5

Atividades

Anote as respostas no caderno.

40. Calcule o módulo dos números complexos.

a) $z_1=4+3i$ 5

b) $z_2=2-\frac{3}{2}i$ $\frac{5}{2}$

c) $z_3=-15+8i$ 17

d) $z_4=7-\sqrt{2}i$ $\sqrt{51}$

e) $z_5=\frac{6-2i}{2+i}\cdot\frac{1}{i}$ $2\sqrt{2}$

f) $z_6=\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}$ 1

41. A partir da representação dos números complexos *z* e *w* no plano de Argand-Gauss, determine a distância da origem a:

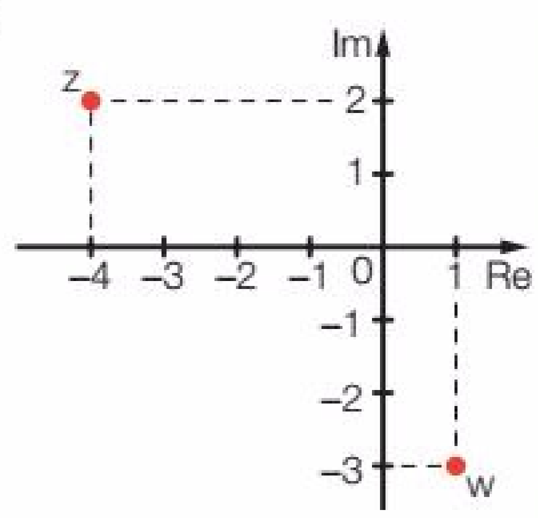
a) $\bar{z}$ $2\sqrt{5}$ u.c.

b) $z+w$ $\sqrt{10}$ u.c.

c) $z+\bar{w}$ $\sqrt{34}$ u.c.

d) $\frac{z}{w}$ $\sqrt{2}$ u.c.

e) $\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $\sqrt{2}$ u.c.



Acervo da editora

42. Calcule a distância entre os pontos que representam *z* e *w* nos seguintes casos:

a) $z=3-5i$ e $w=1+2i$ $\sqrt{53}$ u.c.

b) $z=-5+7i$ e $w=15-8i$ 25 u.c.

c) $z=-29-4i$ e $w=7+11i$ 39 u.c.

43. Determine o valor do número real *x* na equação $z=3x-15i^{23}$, em que $|z|=3\sqrt{41}$. $x=-4$ ou $x=4$

44. Considerando todos os números complexos $z=x+yi$, com *x* e *y* reais que satisfazem a relação $|z-3+5i|=6$, escreva na forma algébrica aquele que possuir:

a) menor valor numérico para *y* $z=3-11i$

b) maior valor numérico para *y* $z=3+i$

c) menor valor numérico para *x* $z=-3-5i$

d) maior valor numérico para *x* $z=9-5i$

45. Para cada item, escreva o número complexo *z* na sua forma algébrica, de maneira que satisfaça a condição:

a) $-|z|+z=-4+8i$ $z=6+8i$

b) $2\cdot i^{10}+z\cdot\bar{z}=z$ $z=2$ ou $z=-1$

46. Represente no plano complexo o conjunto dos pontos $z=x+yi$, com *x* e *y* reais, tal que:

a) $|z+5-2i|=|z+5i|$

b) $|z-3+4i|=\sqrt{2}$

Respostas no final do livro.

47. Sabendo que os pontos que representam os números complexos $z_1=3-2i$, $z_2=-4-2i$ e $z_3=1+yi$ em um plano de Argand-Gauss são vértices de um triângulo cuja área é 56 unidades, determine:

a) o valor de *y* $y=14$ ou $y=-18$

b) a distância entre z_1 e z_3 $2\sqrt{65}$ u.c.

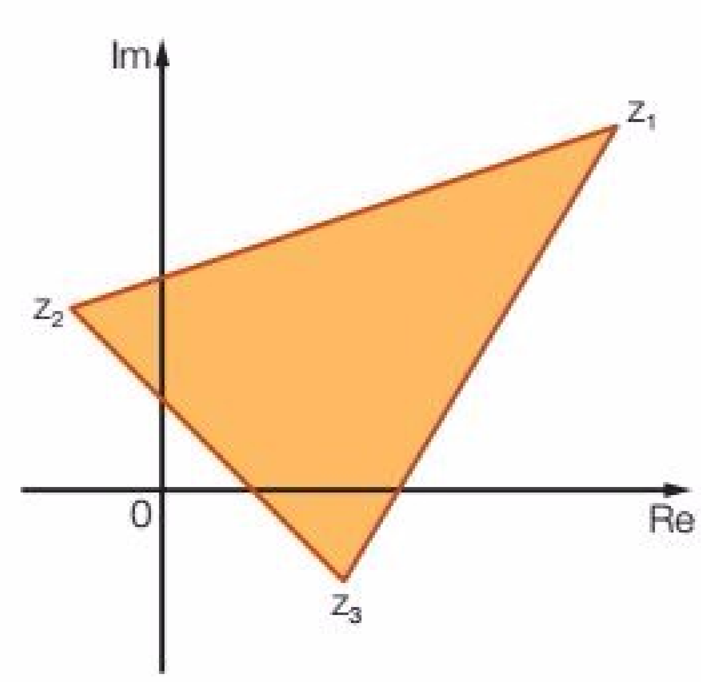
48. Mostre algebricamente a validade das propriedades a seguir: Respostas nas **Orientações para o professor**.

a) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

b) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2\neq 0$

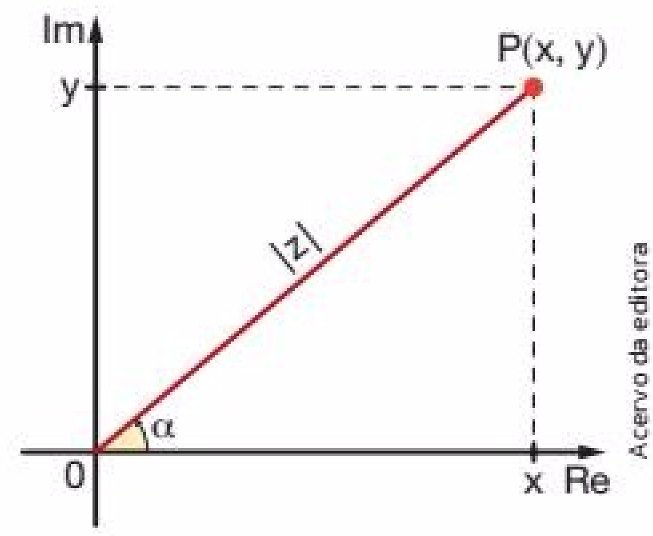
49. A partir da figura a seguir, elabore uma questão acerca do perímetro do triângulo. Em seguida, troque com um colega e, por fim, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.



Acervo da editora

Representação trigonométrica de um número complexo

Na representação geométrica do número complexo $z=x+yi$, com $z \neq 0$, podemos destacar o ângulo α, em que $0 \leq \alpha < 2\pi$, formado entre o segmento OP e o eixo real, medido no sentido anti-horário. Esse ângulo é denominado **argumento** de *z* (ou **argumento principal** de *z*) e é indicado por $\arg(z)$.



O ponto que representa um número complexo $z=x+yi$ pode ser indicado por meio das coordenadas cartesianas *x* e *y*, ou por meio das **coordenadas polares** desse ponto, que são o módulo e o argumento de *z*.

O ângulo α satisfaz as igualdades:

- $\cos\alpha = \dfrac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos\alpha$
- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \text{sen}\,\alpha$

Substituindo esses valores na forma algébrica de um número complexo, obtemos a **forma trigonométrica** (ou **forma polar**) do número complexo.

$$z = x + yi \Leftrightarrow z = |z| \cdot \cos\alpha + |z| \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot i \Leftrightarrow \boxed{z = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}$$

Atividades resolvidas

R16. Escreva na forma trigonométrica e represente geometricamente os números complexos:

a) $z=4+4i$

b) $z=-2-2\sqrt{3}i$

Resolução

Se necessário, lembre aos alunos como determinar a medida de um ângulo α, conhecendo os valores de $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$.

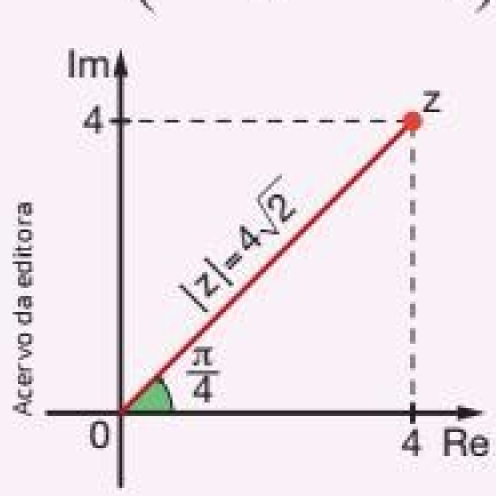
a) Inicialmente, calculamos o módulo de *z*.

$$|z| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

Em seguida, calculamos o argumento de *z*.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, a forma trigonométrica de *z* é $z = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$.



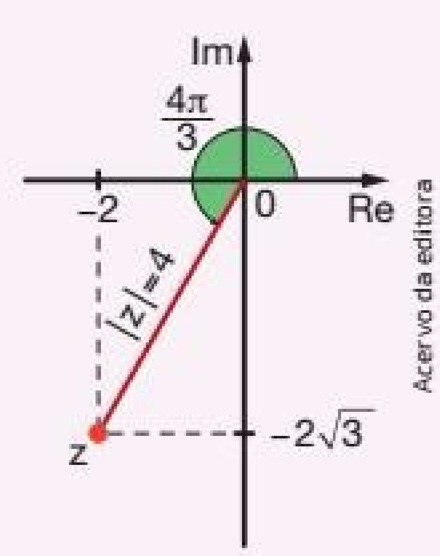
b) Temos que:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

Logo:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, a forma trigonométrica de *z* é $z = 4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$.



R17. Escreva na forma algébrica e represente geometricamente os números complexos:

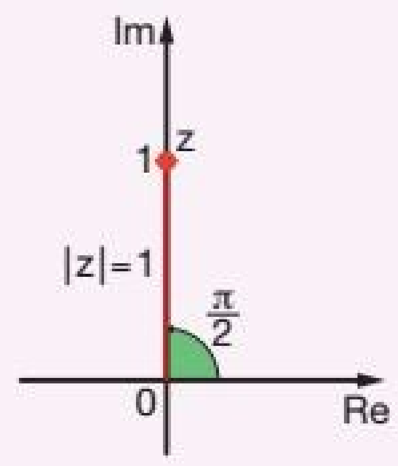
a) $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}$

b) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

> Lembre-se de que:
> $z=x+yi \Leftrightarrow z=|z|(\cos\alpha+i\,\text{sen}\alpha)$

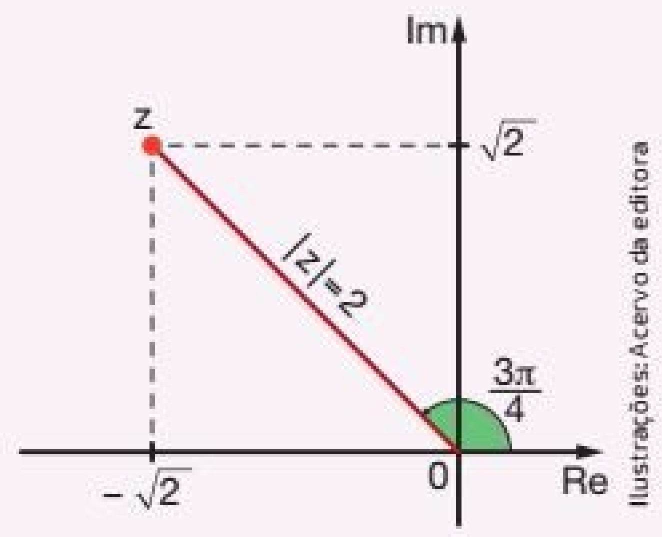
Resolução

a) $z=\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+i\,\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}=0+i\cdot 1=\boxed{i}$



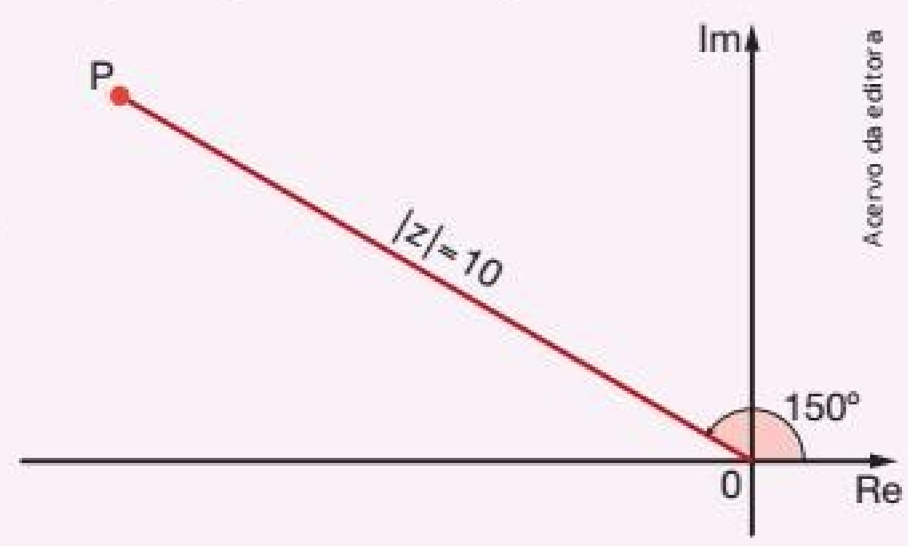
b) Como, para $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, temos $\text{sen}\alpha=\text{sen}(\pi-\alpha)$ e $\cos\alpha=-\cos(\pi-\alpha)$, segue que:

$$z=2\left(\underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}_{-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}}+i\,\underbrace{\text{sen}\frac{3\pi}{4}}_{\text{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$$



Ilustrações: Acervo da editora

R18. Determine o número complexo $z=a+bi$, representado pelo ponto *P* no plano de Argand-Gauss.



Acervo da editora

Resolução

Do plano, temos que o argumento principal α mede 150° ou $\frac{5\pi}{6}$. Como $|z|=10$, e para $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, temos $\text{sen}\alpha=\text{sen}(\pi-\alpha)$ e $\cos\alpha=-\cos(\pi-\alpha)$, então o número complexo *z* é:

$$z=10\left(\underbrace{\cos\frac{5\pi}{6}}_{-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}+i\,\underbrace{\text{sen}\frac{5\pi}{6}}_{\text{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}}\right)=10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\boxed{-5\sqrt{3}+5i}$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

50. Escreva na forma trigonométrica cada número complexo. Respostas no final do livro.

a) $z_1=2-2\sqrt{3}i$

b) $z_2=-4+4i$

c) $z_3=5i$

d) $z_4=-3-3\sqrt{3}i$

e) $z_5=-\sqrt{2}i$

51. A partir do valor do módulo e do argumento, escreva os números complexos na forma algébrica.

a) $|z_1|=10$ e $\arg(z_1)=\frac{5\pi}{3}$ $z_1=5-5\sqrt{3}i$

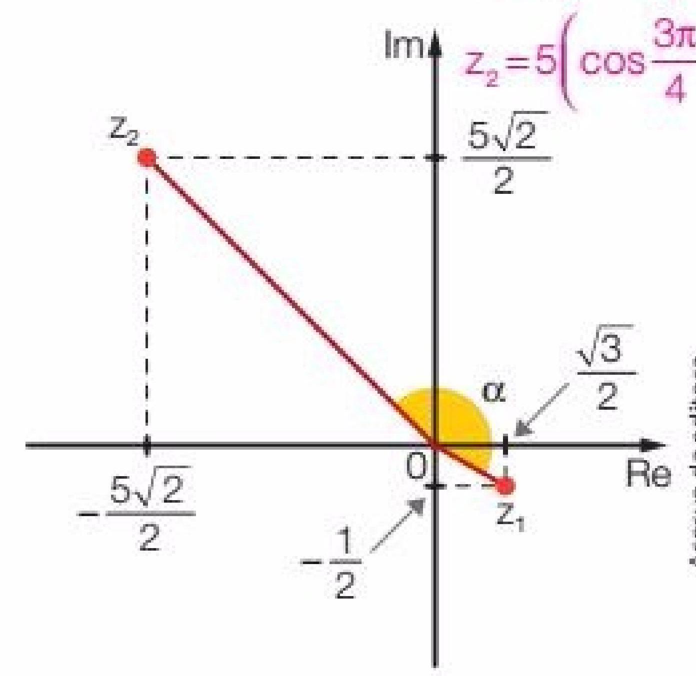
b) $|z_2|=3\sqrt{2}$ e $\arg(z_2)=\frac{7\pi}{4}$ $z_2=3-3i$

c) $|z_3|=20$ e $\arg(z_3)=60°$ $z_3=10+10\sqrt{3}i$

d) $|z_4|=8$ e $\arg(z_4)=180°$ $z_4=-8$

52. Sendo $z_1=2\sqrt{3}+2i$ e $z_2=-2+2\sqrt{3}i$, determine a medida do argumento α do número complexo $z_3=\frac{z_1}{z_2}$. $\frac{3\pi}{2}$

53. Determine a forma trigonométrica dos números complexos representados no plano de Argand-Gauss. Em seguida, determine quantos graus tem o ângulo α. $z_1=1\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$; $z_2=5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$; 165°

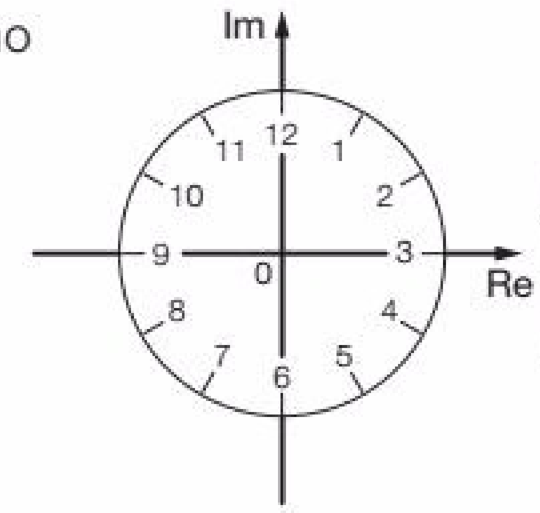


Acervo da editora

54. Determine a forma trigonométrica do número complexo $w=i+i^2+i^3+\ldots+i^{51}$. $w=1(\cos\pi+i\,\text{sen}\pi)$

55. Um professor de Matemática desenhou na lousa um relógio centrado em um plano de Argand-Gauss, como apresentado ao lado.

Ao representar a extremidade do ponteiro maior no ponto cujo afixo é $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e a do ponteiro menor pelo ponto cujo afixo é $w=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi$, que horário foi indicado no relógio? 9 h ou 21 h

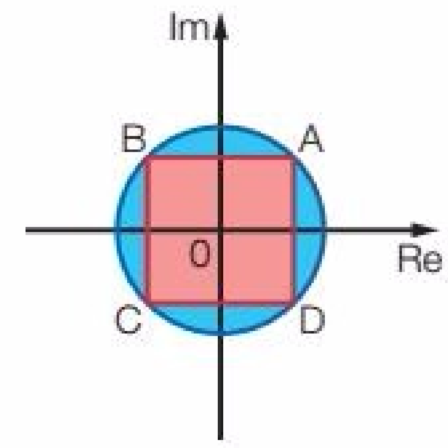


Acervo da editora

56. A figura ao lado representa um quadrado com 4 u.a. (unidades de área) inscrito em uma circunferência, de maneira que ambos estão centrados na origem. Sabendo que os vértices *A*, *B*, *C* e *D* desse quadrado correspondem respectivamente aos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, e que o segmento AB é perpendicular ao eixo imaginário, determine: Respostas no final do livro.

a) a forma trigonométrica de z_1, z_2, z_3 e z_4

b) a área da região em azul



Acervo da editora

57. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* correspondem, respectivamente, aos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4. Esses pontos estão, na ordem apresentada e no sentido anti-horário, sobre uma circunferência de raio 2, centrada na origem de um plano complexo. Sabendo que $\text{med}\left(A\hat{O}B\right)=75°$, $\text{med}\left(B\hat{O}C\right)=90°$, $\text{med}\left(C\hat{O}D\right)=105°$ e $z_4=\sqrt{3}-i$, escreva z_1, z_2, z_3 e z_4 nas formas trigonométrica e algébrica. Resposta no final do livro.

58. Considerando $0\leq\alpha<2\pi$ e *a* uma constante real tal que $a>3$, pode-se afirmar que as representações geométricas dos números complexos $z=3(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ e $w=a\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ no plano de Argand-Gauss correspondem, respectivamente, a: a

a) circunferência de raio 3 e ponto localizado no 1º quadrante cuja distância até a origem é *a*.

b) circunferência de raio *a* e ponto cuja distância até a origem é três unidades de comprimento.

c) círculo de raio 3 e ponto localizado no 1º quadrante cuja distância até a origem é *a*.

d) circunferência de raio 3 e ponto localizado no 3º quadrante cuja distância até a origem é *a*.

e) circunferência de raio 3 e ponto localizado no 1º quadrante cuja distância até a origem é 3a.

Multiplicação e divisão

O produto entre dois números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2, e o argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

O quociente entre dois números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao quociente dos módulos de z_1 e z_2, e o argumento é igual à diferença, na ordem dada, dos argumentos de z_1 e z_2.

Considere os números complexos $z_1=|z_1|(\cos\alpha_1+i\operatorname{sen}\alpha_1)$ e $z_2=|z_2|(\cos\alpha_2+i\operatorname{sen}\alpha_2)$ na forma trigonométrica.

- Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

  Calculando o produto $z_1\cdot z_2$, temos:

$$z_1\cdot z_2=|z_1|(\cos\alpha_1+i\operatorname{sen}\alpha_1)\cdot|z_2|(\cos\alpha_2+i\operatorname{sen}\alpha_2)$$

$$z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+i\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2+i\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2+i^2\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2)$$

$$z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|[\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2+i(\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2+\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2)]$$

$$\boxed{z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)]}$$

  Para *n* números complexos:

$$z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_n=|z_1||z_2||z_3|\ldots|z_n|[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)+i\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)]$$

- Divisão de números complexos na forma trigonométrica

  Calculamos o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, com $z_2\neq0$, da seguinte maneira:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\operatorname{sen}(\alpha_1-\alpha_2)]}$$

Na atividade 61 da página 163 é proposta a verificação dessa igualdade.

Atividades resolvidas

R19. Dados os números complexos $z_1=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$, calcule:

a) z_1^2 b) $z_1\cdot z_2$ c) $\frac{z_1}{z_2}$

Resolução

a) $z_1^2=z_1\cdot z_1=6\cdot 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=36\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right]$

b) $z_1\cdot z_2=6\cdot 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)\right]=12\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=12\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

c) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)\right]=3\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

Note que os ângulos de $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$ são côngruos, respectivamente, aos ângulos de $\frac{13\pi}{6}$ e $-\frac{3\pi}{2}$, pois $\frac{13\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi$ e $-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2\pi$.

R20. Determine o inverso multiplicativo z^{-1} do número complexo $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$.

Resolução

Como $1=1(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)$, determinamos o inverso multiplicativo de *z* da seguinte maneira:

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)}{2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(0-\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(0-\frac{3\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{-1}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

59. Dados os números complexos z_1, z_2 e z_3, tais que $z_1=4(\cos 80°+i\,\text{sen}\,80°)$, $z_2=6(\cos 45°+i\,\text{sen}\,45°)$ e $z_3=3(\cos 150°+i\,\text{sen}\,150°)$, calcule: Respostas no final do livro.

a) $z_1\cdot z_2$ c) $\frac{z_1}{z_2}$ e) $\frac{z_1}{z_2\cdot z_3}$

b) $z_1\cdot z_3$ d) $\frac{z_2}{z_1}$

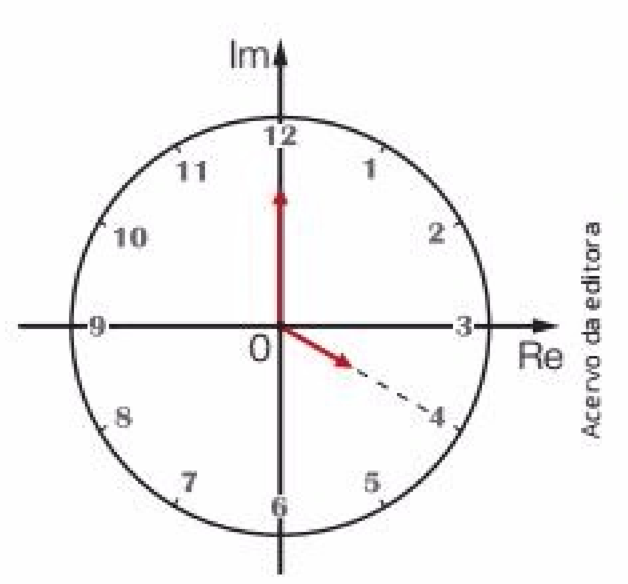
60. Determine os complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica, sabendo que $z_1\cdot z_2=48(\cos 150°+i\,\text{sen}\,150°)$ e $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{3}(\cos 10°+i\,\text{sen}\,10°)$. $z_1=12(\cos 70°+i\,\text{sen}\,70°)$; $z_2=4(\cos 80°+i\,\text{sen}\,80°)$

61. Considerando os números complexos $z_1=|z_1|\cdot(\cos\alpha_1+i\,\text{sen}\,\alpha_1)$ e $z_2=|z_2|\cdot(\cos\alpha_2+i\,\text{sen}\,\alpha_2)$, com $z_2\neq 0$, mostre que é verdadeira a igualdade $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\,\text{sen}(\alpha_1-\alpha_2)]$. Resposta nas Orientações para o professor.

62. Escreva o complexo $z=\left[\sqrt[15]{3}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{9}\right)\right]^{45}$ na forma algébrica. $z=-27$

63. Dado o número complexo $z=4(\cos 240°+i\,\text{sen}\,240°)$, determine z^{-2}. $z^{-2}=\frac{1}{16}(\cos 240°+i\,\text{sen}\,240°)$

64. Observe a representação de um relógio em um plano complexo.



Considerando que o comprimento do ponteiro das horas é 6 cm, determine o número complexo z_1, na forma trigonométrica, cuja representação geométrica corresponde ao ponto extremo do ponteiro das horas. $z_1=6(\cos 330°+i\,\text{sen}\,330°)$

65. Desde o processo de geração da energia elétrica até o momento em que ela é utilizada, diversos cálculos matemáticos fazem-se necessários.

Dentre os elementos envolvidos nesse processo, podemos destacar a corrente elétrica (fluxo de elétrons que passa por um fio, medido em ampere) e a tensão (energia potencial por unidade de carga elétrica, medida em volt), que podem assumir valores contínuos ou alternados. No caso da corrente elétrica, por exemplo, ela é chamada contínua quando os elétrons se movimentam em um único sentido, e alternada quando estes alternam o sentido do movimento constantemente, fazendo os valores da corrente oscilarem entre um valor máximo e um mínimo.

No sistema de transmissão, por serem alternadas, a tensão e a corrente podem ser representadas por sinais senoidais com os valores instantâneos da tensão (v) e da corrente (i), dados por $v(t) = V \cdot \text{sen}(w \cdot t + \alpha_0)$ e $i(t) = I \cdot \text{sen}(w \cdot t + \beta_0)$, ou seja, senoides dependentes do tempo *t*, em segundos, com amplitudes *V* e *I*, respectivamente, também chamadas de valores de pico. A frequência angular *w* representa a velocidade de oscilação da senoide, que pode ser dada em graus por segundo. Os valores de α_0 e β_0 representam a fase inicial da função.

Essas expressões matemáticas para tensões e correntes elétricas não permitem métodos práticos para a análise de circuitos elétricos, pois não são fáceis de serem algebricamente operadas. Na prática, para facilitar as operações algébricas, costuma-se utilizar um vetor radial girante denominado fasor, o qual, em cada instante, representa um ponto da senoide, possuindo, assim, a mesma frequência.

O módulo do fasor corresponde à amplitude de oscilação da senoide.

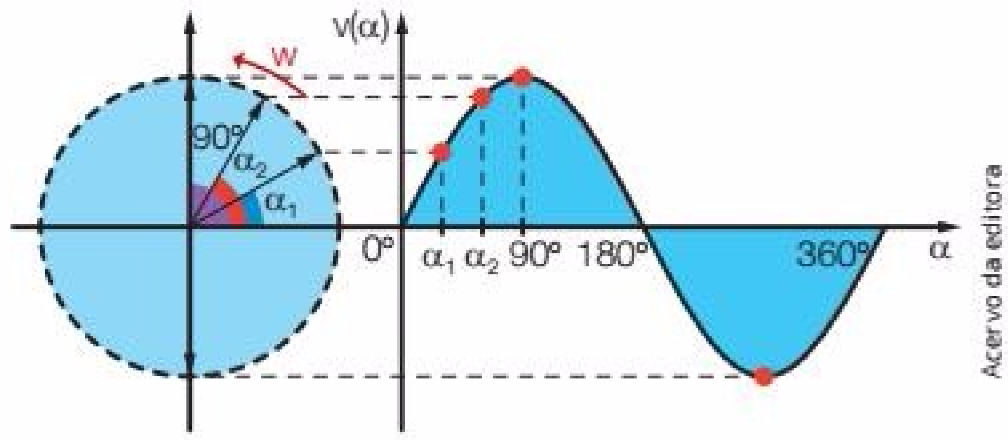
Energia elétrica: da usina à sua casa

Usina hidrelétrica: a queda da água gira as turbinas (eletroímãs) e, devido à indução eletromagnética, gera uma tensão alternada em bobinas ao seu redor.

Construída após um acordo entre o Brasil e o Paraguai, a usina hidrelétrica Itaipu Binacional é uma das maiores geradoras de energia do mundo. Na fotografia podemos observar o vertedouro dessa usina, em 2009.

Fotomontagem de Kendra Rubio formada pela imagem Delfim Martins/Pulsar

Como são vetores de módulo constante, os fasores podem ser representados por números complexos na forma trigonométrica, o que facilita as operações algébricas dos sinais senoidais. Em relação à tensão alternada no instante inicial ($t = 0$), por exemplo, temos o fasor $v = V \cdot (\cos \alpha_0 + j \operatorname{sen} \alpha_0)$.



Note que o símbolo da corrente elétrica é *i*. Assim, em estudos relacionados à corrente elétrica nos quais são necessários cálculos envolvendo números complexos, a unidade imaginária é representada por *j*.

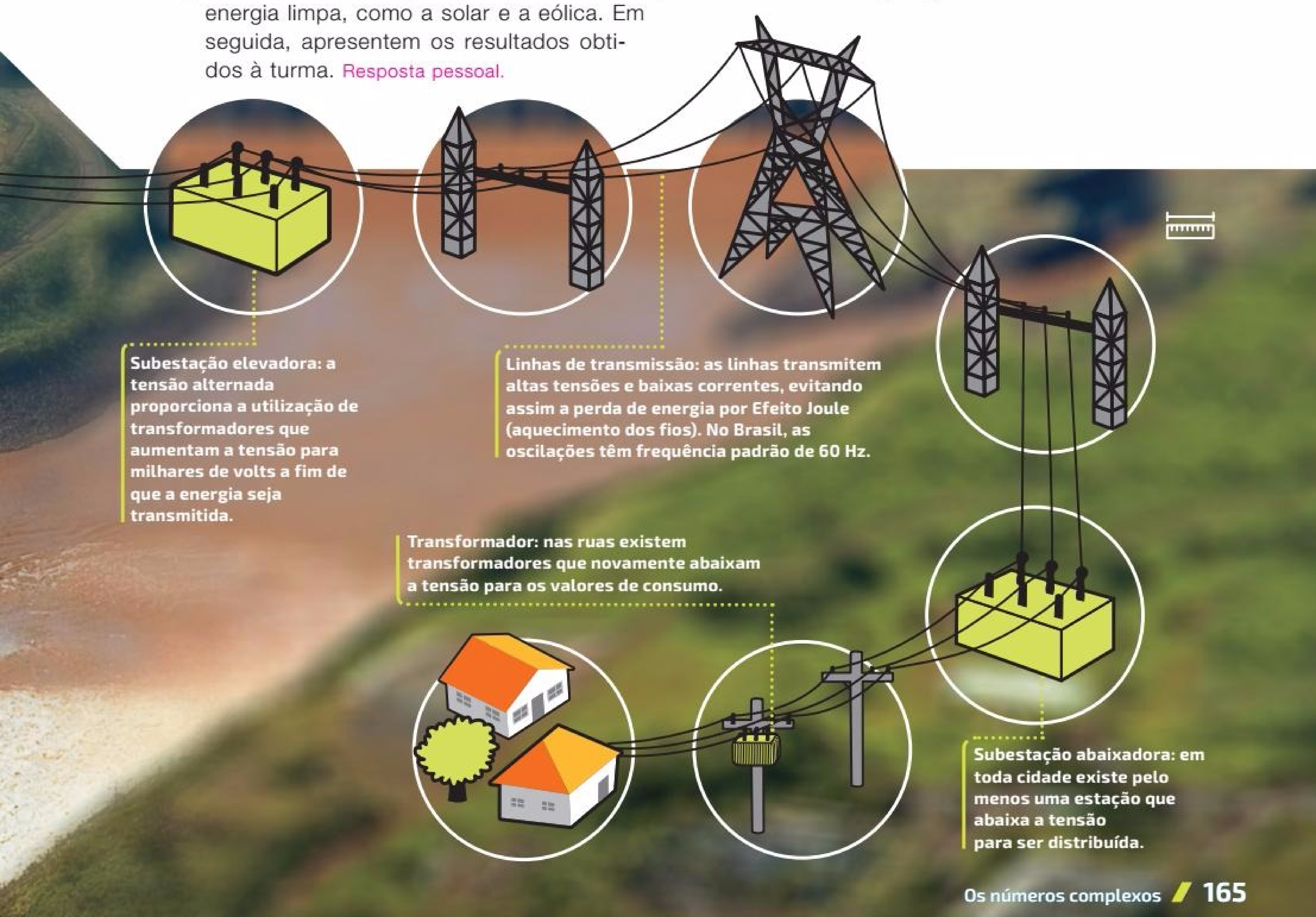
De acordo com as informações apresentadas e considerando um circuito de transmissão de tensão e corrente alternadas, em que os valores instantâneos dessas duas grandezas são dados pelas senoides $v(t) = 220 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot t + 30°)$ e $i(t) = 10 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot t + 60°)$, resolva as questões.

a) Represente, para o instante inicial, o fasor correspondente a cada senoide na forma complexa trigonométrica. $v = 220(\cos 30° + j \operatorname{sen} 30°)$; $i = 10(\cos 60° + j \operatorname{sen} 60°)$

b) Represente, para o instante inicial, o fasor correspondente a cada senoide na forma complexa algébrica. $v = 110\sqrt{3} + 110j$; $i = 5 + 5\sqrt{3}j$

c) Potência (P) é definida como a taxa com que a energia é transferida da bateria para algum componente e é dada pelo produto da tensão pela corrente ($P = i \cdot v$). Com as representações de tensão e corrente obtidas nos itens **a** e **b**, obtenha a representação complexa nas formas trigonométrica e algébrica para a potência elétrica, medida em watt. $P = 2\,200(\cos 90° + j \operatorname{sen} 90°)$; $P = 2\,200j$

d) Junte-se a um colega e pesquisem informações sobre meios de geração de energia limpa, como a solar e a eólica. Em seguida, apresentem os resultados obtidos à turma. Resposta pessoal.



Potenciação

A potência de ordem *n* de um número complexo *z* na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo de *z* elevado a *n* e cujo argumento é igual ao argumento de *z* multiplicado por *n*.

Vamos realizar o cálculo da potência de números complexos na forma trigonométrica, isto é, calcular $z^n = [|z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)]^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ vezes}}$, ou seja, uma multiplicação de números complexos iguais. Portanto:

$$z^n = \underbrace{|z||z||z|\ldots|z|}_{n \text{ vezes}}[\cos(\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{n \text{ vezes}}) + i\,\text{sen}(\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{n \text{ vezes}})]$$

$$z^n = |z|^n[\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)]$$

Essa igualdade é conhecida como **fórmula de De Moivre**, e também é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Atividades resolvidas

R21. Determine $z^3 + z^6 + z^{12}$, sendo $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$.

Resolução

Utilizando a fórmula de De Moivre, calculamos z^3:

$$z^3 = 1^3\left[\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right] = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\,\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{2}}_{1} = i$$

Logo:

- $z^6 = (z^3)^2 = i^2 = -1$
- $z^{12} = (z^6)^2 = (-1)^2 = 1$

Desse modo: $z^3 + z^6 + z^{12} = i - 1 + 1 = i$

Note que:
$|z| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \text{sen}^2\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1} = 1$

Números complexos e geometria

Uma das relações entre números complexos e geometria é a rotação de um ponto em torno da origem do sistema de coordenadas.

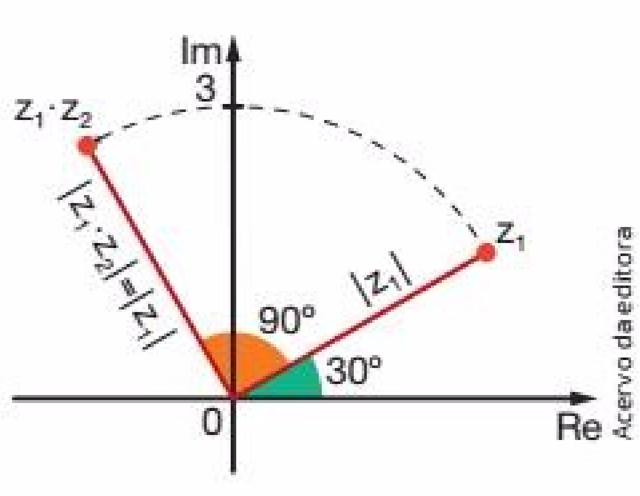
Considerando, por exemplo, os números complexos $z_1 = 3(\cos 30° + i\,\text{sen}30°)$ e $z_2 = \cos 90° + i\,\text{sen}\,90°$ e calculando $z_1 \cdot z_2$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = [3(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)] \cdot (\cos 90° + i\,\text{sen}\,90°)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 1[\cos(30° + 90°) + i\,\text{sen}(30° + 90°)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 120° + i\,\text{sen}120°)$$

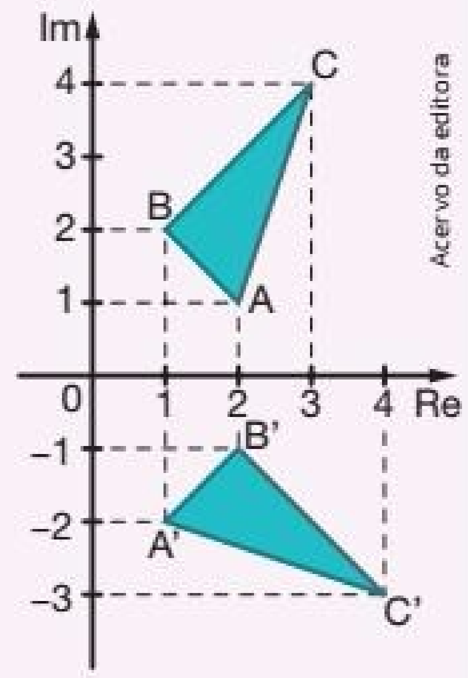
Note que o número complexo $z_1 \cdot z_2$ possui módulo igual ao de z_1, pois $|z_2| = 1$. Como o argumento de $z_1 \cdot z_2$ é a soma dos argumentos de z_1 e z_2, a representação geométrica de $z_1 \cdot z_2$ é igual à de z_1 rotacionada 90° no sentido anti-horário.



Se um ponto *P* representa um número complexo z_1 no plano de Argand-Gauss, para rotacionarmos *P* em α graus em torno da origem, em sentido anti-horário, multiplicamos z_1 pelo número complexo $z_2 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha$.

Atividades resolvidas

R22. Dado o $\triangle ABC$ de vértices $A(2, 1)$, $B(1, 2)$ e $C(3, 4)$, determine as coordenadas dos vértices do $\triangle A'B'C'$, obtido pela rotação do $\triangle ABC$ em 270°, em torno da origem, no sentido anti-horário.



Resolução

No plano de Argand-Gauss, os pontos *A*, *B* e *C* são correspondentes aos números complexos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 3 + 4i$, respectivamente. Obtemos as coordenadas de A', B' e C' da seguinte maneira:

- $A' = z_1 \cdot (\underbrace{\cos 270°}_{0} + i\,\underbrace{\operatorname{sen} 270°}_{-1}) = (2 + i)(-i) = -2i - i^2 = 1 - 2i \rightarrow A'(1, -2)$
- $B' = z_2 \cdot (\underbrace{\cos 270°}_{0} + i\,\underbrace{\operatorname{sen} 270°}_{-1}) = (1 + 2i)(-i) = -i - 2i^2 = 2 - i \rightarrow B'(2, -1)$
- $C' = z_3 \cdot (\underbrace{\cos 270°}_{0} + i\,\underbrace{\operatorname{sen} 270°}_{-1}) = (3 + 4i)(-i) = -3i - 4i^2 = 4 - 3i \rightarrow C'(4, -3)$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

66. Em cada item, determine a forma trigonométrica das potências do complexo $z = 2(\cos 35° + i\operatorname{sen} 35°)$.

a) z^5 $z^5 = 32(\cos 175° + i\operatorname{sen} 175°)$

b) z^8 $z^8 = 256(\cos 280° + i\operatorname{sen} 280°)$

c) $\frac{z^{12}}{z^8}$ $\frac{z^{12}}{z^8} = 16(\cos 140° + i\operatorname{sen} 140°)$

d) $(z^3)^4$ $(z^3)^4 = 4\,096(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$

67. Sabendo que $z = -1 + \sqrt{3}i$, calcule z^6, z^{16} e z^{101}, e expresse os resultados nas formas trigonométrica e algébrica. Resposta no final do livro.

68. Desafio

Determine todos os valores inteiros de *n*, de modo que o número complexo $w = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right]^n$ seja:

a) real $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 6k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) imaginário puro $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 6k + 3,\ k \in \mathbb{Z}\}$

69. Escreva na forma algébrica e represente no plano de Argand-Gauss o número complexo

$$w = \left[\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{72} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{72}\right)\right]^{24}.$$

Resposta no final do livro.

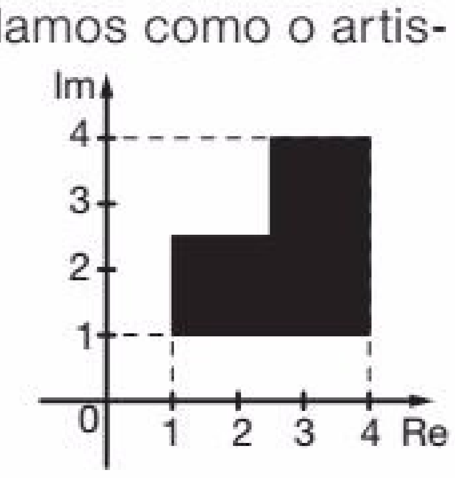
70. Escreva na forma $w = a + bi$, com *a* e *b* reais, o número complexo $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{109}$. $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

71. Determine as coordenadas do ponto P', obtido ao se rotacionar o ponto $P(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ em torno da origem, em um ângulo de 225°, no sentido:

a) anti-horário $P'(0, -8)$

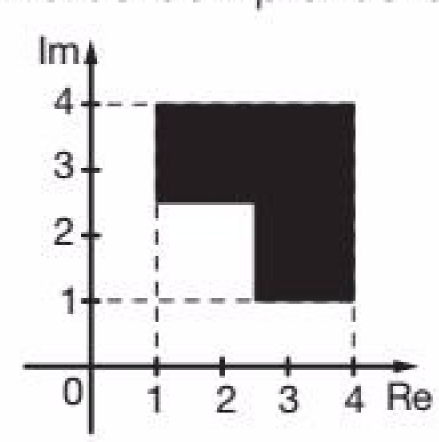
b) horário $P'(-8, 0)$

72. Nas páginas 144 e 145 estudamos como o artista Luiz Sacilotto utilizava em algumas de suas obras padrões visuais com rotação de figuras. Veja ao lado a representação de uma figura da obra apresentada nessas páginas, no plano de Argand-Gauss.

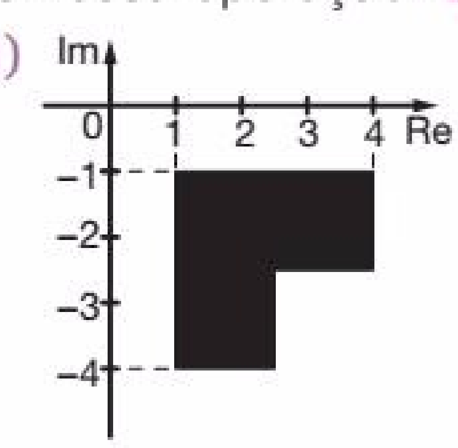


Considere a multiplicação dos números complexos correspondentes aos pontos que compõem essa figura por $z = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi$. Em qual alternativa a figura corresponde à representação dos números complexos obtidos nessa operação? c

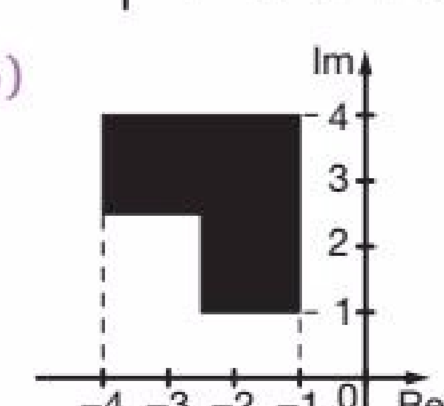
a)



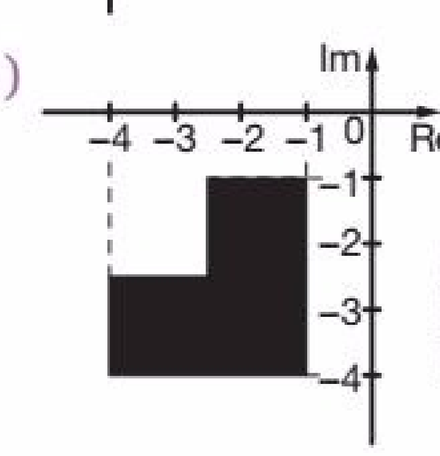
d)



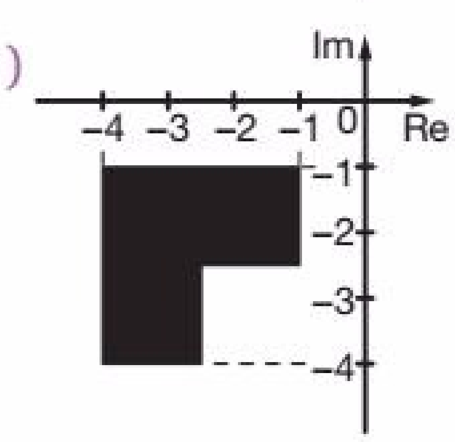
b)



e)



c)



Ilustrações: Acervo da editora

capítulo 6

Os polinômios e as equações polinomiais

Tânia Rego/Agência Brasil

Medalhas para premiação dos alunos vencedores da 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), em 2012.

Equações cúbicas

Você já ouviu falar da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)? Realizada pela primeira vez em 2005, a OBMEP é voltada para alunos de escolas públicas e tem, entre outros objetivos, o de estimular o interesse pela Matemática, tomar decisões em prol da Educação Básica e descobrir novos talentos na área. Atualmente, participam da OBMEP alunos desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio.

Na história também há registros de competições que envolviam desafios matemáticos. Um dos casos mais conhecidos ocorreu durante o século XVI entre os matemáticos italianos Tartaglia e Fior e se tratava de resolução de equações cúbicas. A disputa consistiu em resolver trinta questões propostas pelo adversário durante um tempo predeterminado. Na época, Fior sabia resolver apenas equações cúbicas do tipo $x^3 + mx = n$ (com m e n positivos), enquanto Tartaglia, além das desse tipo, sabia resolver outras. Por este motivo Tartaglia venceu a competição.

Outro personagem importante nessa história é o também italiano Girolamo Cardano, médico e professor de matemática. Atraído pelo sucesso de Tartaglia na competição, Cardano entrou em contato com ele e, com a condição de manter segredo, convenceu Tartaglia a lhe confidenciar o método da resolução das equações cúbicas que utilizou. Porém, em 1545, Cardano publicou um importante tratado algébrico **– Ars Magna –** contendo a solução que lhe havia sido confiada, sem creditar a descoberta ao seu verdadeiro autor. Na mesma publicação, foi apresentada a solução da equação quártica, atribuída a Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Philip Galle. Gravura. 1682. Coleção particular. Foto: Wellcome Images CC/Diomedia

Niccolo Tartaglia
(c. 1500-1557)

Robert Cooper. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: Wellcome Images CC/Diomedia

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Você já participou de alguma olimpíada de Matemática? Conte aos colegas como foi esta experiência.
Resposta pessoal.

B) O que você achou da atitude de Cardano em publicar como sua a descoberta de outro matemático?
Resposta pessoal.

C) Escreva exemplos de equações cúbicas.
Algumas possíveis respostas: $x^3 = 0$; $x^3 - 3 = 5$; $x^3 + 3x = -14$

Veja mais informações sobre Cardano e Tartaglia nos *sites*:
- <http://tub.im/t6sy45>
- <http://tub.im/i4zvhn>

(acesso em: 4 abr. 2016)

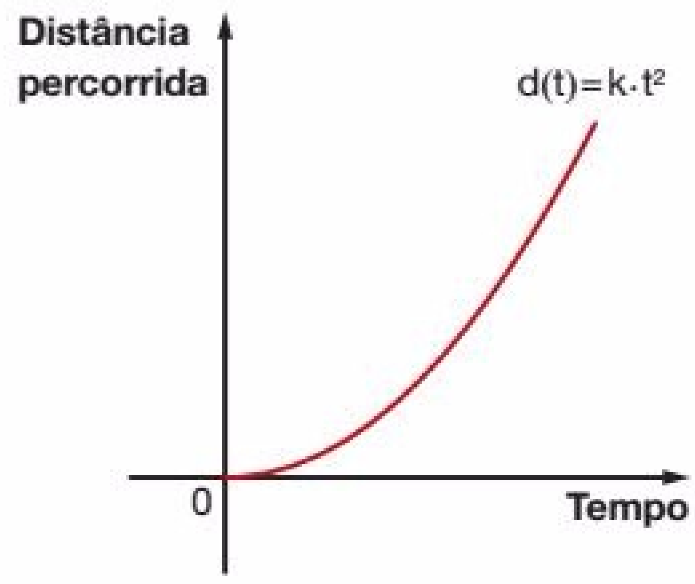
Polinômios

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades das páginas **210** e **211** da seção **Acessando tecnologias**.

Ilustrações: Acervo da editora

A função $d(t)=k \cdot t^2$ é similar à que foi proposta pelo físico e matemático Galileu Galilei (1564-1642) durante seus estudos sobre o movimento dos corpos. Há uma famosa história sobre as experiências de Galileu na qual ele demonstra que a velocidade de um corpo em queda livre não depende da sua massa. Segundo consta, ele subiu até o alto da torre de Pisa e, de lá, lançou dois corpos esféricos de volumes e massas diferentes: uma bala de canhão (com maior massa) e uma bala de mosquete (com menor massa). Esse experimento surpreendeu os acadêmicos da época, que acreditavam na ideia de Aristóteles de que um objeto com maior massa cai com maior velocidade e, consequentemente, chega primeiro ao solo.

Estudamos em capítulos anteriores diversas situações, as quais podiam ser representadas por funções polinomiais, principalmente de 1º e 2º graus. Um exemplo é a função $d(t)=k \cdot t^2$, que indica a distância *d* percorrida por um corpo em queda livre, sendo *k* uma constante não nula e *t* o tempo de queda.



Neste capítulo, estudaremos as funções polinomiais mais detalhadamente, assim como aquelas de graus maiores que dois. Para isso, inicialmente, definiremos função polinomial.

Sejam a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} e a_n pertencentes a $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e *x* uma variável complexa.

Denominamos **função polinomial** ou **polinômio na variável x** a função *p* de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, definida por:

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

- a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} e a_n são denominados **coeficientes**;
- cada parcela a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, $a_{n-2}x^{n-2}$, $a_{n-3}x^{n-3}$, ..., a_2x^2, a_1x, a_0 é um **termo**, sendo a_0 o termo **independente** da variável.

Polinômios de um termo são chamados **monômios**; de dois termos, **binômios**; e de três termos, **trinômios**.

Exemplos

Polinômios:

- $p(x)=x^5+2x^3-\frac{1}{3}x^2+3x-8$, com $a_5=1$, $a_4=0$, $a_3=2$, $a_2=-\frac{1}{3}$, $a_1=3$, $a_0=-8$
- $m(x)=2x^2-5x+1$, trinômio com $a_2=2$, $a_1=-5$, $a_0=1$
- $n(x)=9x^6$, monômio com $a_6=9$, $a_5=a_4=a_3=a_2=a_1=a_0=0$

Não polinômios:

- $f(x)=x^{-2}+3x-4$, pois possui um expoente negativo
- $g(x)=-2x^3-5x^{\frac{2}{3}}+10$, pois possui um expoente fracionário

Quando todos os coeficientes de um polinômio são iguais a zero, ou seja, $a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=a_{n-3}=\ldots=a_2=a_1=a_0=0$, o polinômio é denominado **identicamente nulo** ou simplesmente **nulo**. Indicamos o polinômio $p(x)$ identicamente nulo por $p(x)\equiv 0$ (lê-se: $p(x)$ é idêntico a 0). Nesse caso, $p(x)=0$, para todo *x*.

Definimos o **grau** de um polinômio não nulo como o maior expoente da variável dentre os termos de coeficientes não nulos.

No polinômio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, com $a_n \neq 0$, temos que o grau do polinômio é *n*, indicado por $gr(p)=n$. Dizemos ainda que, nesse caso, a_n é o **coeficiente dominante** de $p(x)$.

> Exemplos

- $p(x)=2x^7-x^6+x^2-5x+7$, polinômio de grau 7 e coeficiente dominante 2
- $m(x)=-\frac{2}{5}x^{11}+x^{10}-6x^9-3x^7+x$, polinômio de grau 11 e coeficiente dominante $-\frac{2}{5}$

Não definimos o grau e o coeficiente dominante de um polinômio identicamente nulo, pois seus coeficientes são iguais a zero.

Podemos determinar também o **valor numérico de um polinômio**. Dado um polinômio $p(x)$ e o número complexo α, o valor numérico de $p(x)$ para $x=\alpha$, representado por $p(\alpha)$, é o número obtido substituindo *x* por α e realizando os cálculos indicados.

$$p(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+a_{n-2}\alpha^{n-2}+a_{n-3}\alpha^{n-3}+\ldots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0$$

Quando o valor numérico de um polinômio $p(x)$ é igual a zero, ou seja, para $x=\alpha$ temos $p(\alpha)=0$, dizemos que α é uma **raiz** do polinômio.

> Exemplo

Calculando o valor numérico do polinômio $p(x)=2x^5+x^4-2x^2-x$ para alguns valores de *x*, temos:

- para $x=-2$

$$p(-2)=2(-2)^5+(-2)^4-2(-2)^2-(-2)=-64+16-8+2=-54$$

- para $x=3$

$$p(3)=2\cdot3^5+3^4-2\cdot3^2-3=486+81-18-3=546$$

- para $x=-\frac{1}{2}$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^5+\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

- para $x=1$

$$p(1)=2\cdot1^5+1^4-2\cdot1^2-1=2+1-2-1=0$$

Como $p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ e $p(1)=0$, temos que $-\frac{1}{2}$ e 1 são raízes do polinômio $p(x)=2x^5+x^4-2x^2-x$.

Qual dos itens a seguir corresponde à outra raiz do polinômio $p(x)=2x^5+x^4-2x^2-x$? b

a) $x=-1$

b) $x=0$

c) $x=2$

Dizemos que dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são **polinômios idênticos** se, e somente se, todos os coeficientes de $p(x)$ são iguais aos respectivos coeficientes de $q(x)$.

Se dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são idênticos, são indicados por $p(x)\equiv q(x)$; caso não sejam idênticos, são indicados por $p(x)\not\equiv q(x)$.

> Exemplo

Considerando os polinômios $p(x)=-x^5+\frac{1}{4}x^4-5x^3+3x^2+x-4$ e $q(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$, teremos $p(x)\equiv q(x)$ se, e somente se, $a=-1$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-5$, $d=3$, $e=1$ e $f=-4$.

Atividades resolvidas

R1. Para quais valores de *a* e *b* o polinômio $p(x)=(a^2-9)x^4+(2b+1)x^2$ é identicamente nulo?

Resolução

Para $p(x)\equiv 0$, temos:

- $a^2-9=0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3$ ou $a=-3$
- $2b+1=0 \Rightarrow 2b=-1 \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$

Portanto, o polinômio $p(x)$ será nulo para $a=3$, ou $a=-3$, e $b=-\dfrac{1}{2}$.

R2. Determine os números reais *a* e *b*, sabendo que os polinômios $p(x)=5x^6+(a+b)x^4+x+1$ e $q(x)=5x^6+3x^4+\dfrac{b}{5}x+1$ são idênticos.

Resolução

Como $p(x)\equiv q(x)$, comparamos esses polinômios termo a termo:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 1=\dfrac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow a=-2 \text{ e } b=5$$

R3. Verifique quais dos valores a seguir são raízes do polinômio $p(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$.

a) -2 b) -1 c) 1

Resolução

Calculando os valores numéricos do polinômio, temos:

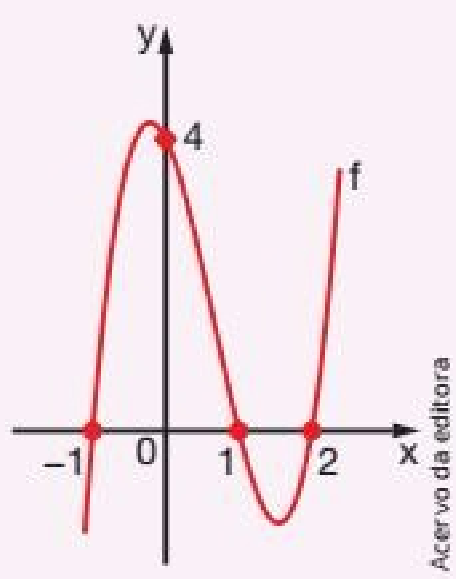
a) $p(-2)=(-2)^4+2(-2)^3-3(-2)^2-4(-2)+4=16-16-12+8+4=0$
Como $p(-2)=0$, então -2 é raiz de $p(x)$.

b) $p(-1)=(-1)^4+2(-1)^3-3(-1)^2-4(-1)+4=1-2-3+4+4=4$
Como $p(-1)\neq 0$, então -1 não é raiz de $p(x)$.

c) $p(1)=1^4+2\cdot 1^3-3\cdot 1^2-4\cdot 1+4=1+2-3-4+4=0$
Como $p(1)=0$, então 1 é raiz de $p(x)$.

Portanto, entre os valores apresentados, -2 e 1 são raízes de $p(x)$.

R4. Determine a lei da função *f*, sabendo que ela é polinomial de grau 3.



Resolução

Como *f* é do tipo polinomial de grau 3, temos que sua lei de formação é da forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Para determinar os coeficientes de *f*, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=4 \\ f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d=0 \\ a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=4 \\ a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0 \\ a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=0 \\ d=4 \\ a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=2,\ b=-4,\ c=-2 \text{ e } d=4$$

Termine a resolução do sistema junto com os alunos. Verifique se eles perceberam, por exemplo, que ao adicionar a 1ª e a 3ª equações e substituir no resultado $d=4$, obtém-se o valor de *b*.

Portanto, $f(x)=2x^3-4x^2-2x+4$.

1. Classifique cada expressão em polinômio ou não polinômio.

a) $p(x)=\frac{1}{5}x^4-3x$ polinômio

b) $q(x)=\frac{x}{2}-3x^2-7$ polinômio

c) $g(x)=3x^2+3x-\frac{1}{x}$ não polinômio

d) $h(x)=5x^{-1}+3x-5$ não polinômio

e) $m(x)=-\sqrt{2}x^8-7x^4+\frac{2}{3}x-1$ polinômio

f) $n(x)=4\sqrt{x}+3x+2$ não polinômio

2. Determine o grau de cada polinômio.

a) $p(x)=x^8-5x^2+3x^7$ $gr(p)=8$

b) $q(x)=x^2-3x^{3^2}-2$ $gr(q)=9$

c) $g(x)=5x^4\cdot x^3-2x+5$ $gr(g)=7$

d) $h(x)=5$ $gr(h)=0$

3. Quais dos itens a seguir correspondem às raízes do polinômio $p(x)=x^6+3x^5-11x^4-15x^3+46x^2-24x$? a; c; f; g; h

a) -3

b) 5

c) 0

d) 6

e) 4

f) 1

g) -4

h) 2

4. Calcule o valor de *m*, sabendo que o polinômio $a(x)=(m^2-2m-3)x^3-(m^2-9)x-(m+2)$ tem grau 0 e, em seguida, escreva o polinômio $a(x)$. $m=3$; $a(x)=-5$

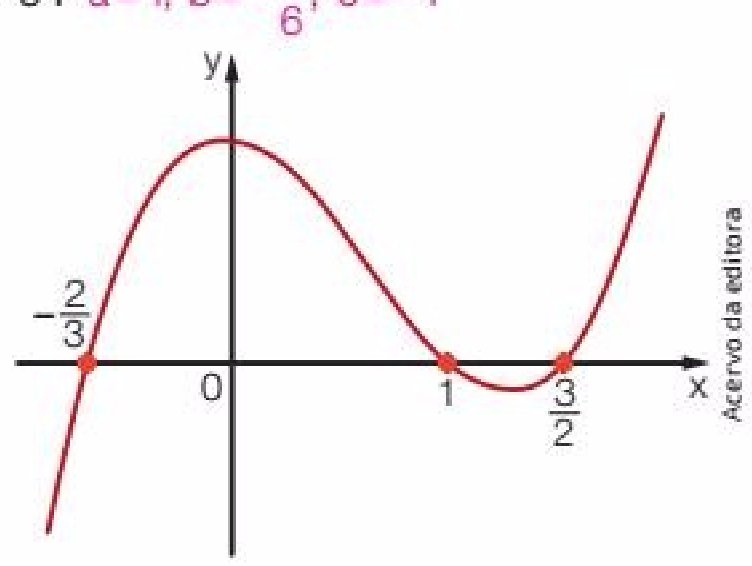
5. Determine o valor de *m* e de *n* para que o polinômio $h(x)=(m^2-16)x^5-(3m+n)x^2$ seja identicamente nulo. $m=4$ e $n=-12$ ou $m=-4$ e $n=12$

6. Qual é o valor de *m* no trinômio de grau 5 $p(x)=2x^5+(3m-6)x^2+3x-2$? $m=2$

7. Sabendo que o polinômio $p(x)=(3m^2-27)x^4-5x^3-2$ tem grau 3, quais os possíveis valores reais de *m*? $m=3$ ou $m=-3$

8. Escreva, em função dos valores de *m*, o grau do polinômio $p(x)=(m^2-36)x^6+(m-6)x^4+x^3-1$. Resposta no final do livro.

9. O gráfico a seguir representa o polinômio $g(x)=ax^3-\frac{11}{6}x^2+bx-c$. Quais são os valores de *a*, *b* e *c*? $a=1$; $b=-\frac{1}{6}$; $c=-1$



10. Determine o polinômio $p(x)$ e suas raízes, sabendo que $gr(p)=2$, $p(3)=7$, $p(-1)=-9$ e $p(0)=-8$. $p(x)=x^2+2x-8$; raízes: 2 e -4

11. Determine o grau de um polinômio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, sabendo que: $gr(p)=8$

- os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1 e a_0 formam, nessa ordem, uma PA;
- o coeficiente dominante de $p(x)$ é igual a 1;
- $p(0)=25$ e $p(1)=117$.

12. As raízes do polinômio $p(x)=x^4+bx^3+cx^2+dx+64$ são a_1, a_2, a_3 e 8, e formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2 em que todos os termos são positivos.

a) Calcule os valores de a_1, a_2 e a_3. $a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=4$

b) Determine os valores de *b*, *c* e *d*. $b=-15$; $c=70$; $d=-120$

c) Escreva o polinômio $p(x)$. $p(x)=x^4-15x^3+70x^2-120x+64$

13. Dado $C(x)=-2x^2+bx+8$, determine os valores de *a* e *b* sabendo que $C(a)=3b$ e $C(a-3)=-6$. $a=1$; $b=3$

14. Os polinômios $p(x)=(a-3)x^3+(e+a)x-18$ e $q(x)=(f-2c)x^4-\left(\frac{bd}{4}-f\right)x^2+2cx-2e+12$ são idênticos e (a, b, c, d, e) é uma PA de razão *r*.

a) Qual é o valor da razão *r* da PA? $r=3$

b) Calcule o valor de *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f*. $a=3$; $b=6$; $c=9$; $d=12$; $e=15$; $f=18$

c) Escreva os polinômios $p(x)$ e $q(x)$. $p(x)=18x-18$; $q(x)=18x-18$

15. O polinômio $q(x)=(a^2-5a+6)x^4+(ab^2-27)x^3-2ax^2-3$ tem grau 2, em que $a\in\mathbb{Z}$ e $b\in\mathbb{Z}$. Qual é o valor do coeficiente dominante desse polinômio? -6

16. Calculadora

No Brasil, em razão da grande procura pelo etanol, e das novas tecnologias referentes à geração de energia elétrica por meio da queima do bagaço, a cana-de-açúcar tem sido produzida a cada ano em maior escala.

Assim como a produção, a área plantada de cana-de-açúcar também variou de 2004 a 2014, sendo que essa variação pode ser modelada pela função polinomial $a(t)=0{,}0027t^4-0{,}0711t^3+0{,}5909t^2-1{,}1644t+6{,}2772$, em que *t* é o tempo, em anos, a partir do ano 2004 $(2004\rightarrow t=1)$, e *a* é a área plantada, em milhões de hectares. Os valores obtidos por meio da função são aproximações dos valores reais.

Fonte de pesquisa: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?c=1612&n=0&u=0&z=t&o=1&i=P>. Acesso em: 15 mar. 2016.

a) Qual é o grau da função polinomial $a(t)$? Qual é o valor de seu coeficiente dominante? $gr(a)=4$; $0{,}0027$

b) Determine a variação da área plantada de cana-de-açúcar de 2004 a 2014. aproximadamente 4,23 milhões de hectares

Operações com polinômios

Adição, subtração e multiplicação

Na adição e na subtração de polinômios, reduzimos os termos semelhantes.

As operações de adição, subtração e multiplicação envolvendo polinômios já foram estudadas no Ensino Fundamental. Assim, essas operações apenas serão retomadas por meio de alguns exemplos.

Exemplos

- Se $p(x)=5x^7-2x^6+3x^5-x^4+6x^3-7x^2+8x-4$ e $q(x)=x^6-4x^5+x^4+2x^3-x+5$, então:

$$p(x)+q(x)=\underbrace{5x^7-2x^6+3x^5-x^4+6x^3-7x^2+8x-4}_{p(x)}+\underbrace{x^6-4x^5+x^4+2x^3-x+5}_{q(x)}=$$

$$=5x^7+(-2+1)x^6+(3-4)x^5+(-1+1)x^4+(6+2)x^3-7x^2+(8-1)x+(-4+5)=$$

$$=\boxed{5x^7-x^6-x^5+8x^3-7x^2+7x+1}$$

Na multiplicação de um polinômio por uma constante, multiplicamos cada termo do polinômio por essa constante, ou seja, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

- Se $p(x)=2x^5+x^4-3x^3+4x^2+5x-1$ e $q(x)=3x^4+5x^3-x^2+5x+9$, então:

$$p(x)-q(x)=\underbrace{2x^5+x^4-3x^3+4x^2+5x-1}_{p(x)}-\underbrace{(3x^4+5x^3-x^2+5x+9)}_{q(x)}=$$

$$=2x^5+(1-3)x^4+(-3-5)x^3+[4-(-1)]x^2+(5-5)x+(-1-9)=$$

$$=\boxed{2x^5-2x^4-8x^3+5x^2-10}$$

Na multiplicação de polinômios, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

No exemplo, note que o grau do polinômio $p(x)\cdot q(x)$ é igual a $5=\underbrace{2}_{gr(p)}+\underbrace{3}_{gr(q)}$, ou seja, $gr(p\cdot q)=gr(p)+gr(q)$.

- Se $p(x)=x^5-3x^4+2x^3-\frac{1}{4}x^2+x+3$, então:

$$-3\cdot p(x)=-3\cdot\left(x^5-3x^4+2x^3-\frac{1}{4}x^2+x+3\right)=\boxed{-3x^5+9x^4-6x^3+\frac{3}{4}x^2-3x-9}$$

- Se $p(x)=x^2-6x+4$ e $q(x)=x^3+4x+2$, então:

$$p(x)\cdot q(x)=(x^2-6x+4)\cdot(x^3+4x+2)=$$

$$=x^5+4x^3+2x^2-6x^4-24x^2-12x+4x^3+16x+8=$$

$$=\boxed{x^5-6x^4+8x^3-22x^2+4x+8}$$

Atividades resolvidas

R5. Dados os polinômios $p(x)=2x^3+x^2-3x+1$ e $q(x)=x^5+2x^4-x^3+3x^2+4$, calcule $p(x)\cdot q(x)$.

Resolução

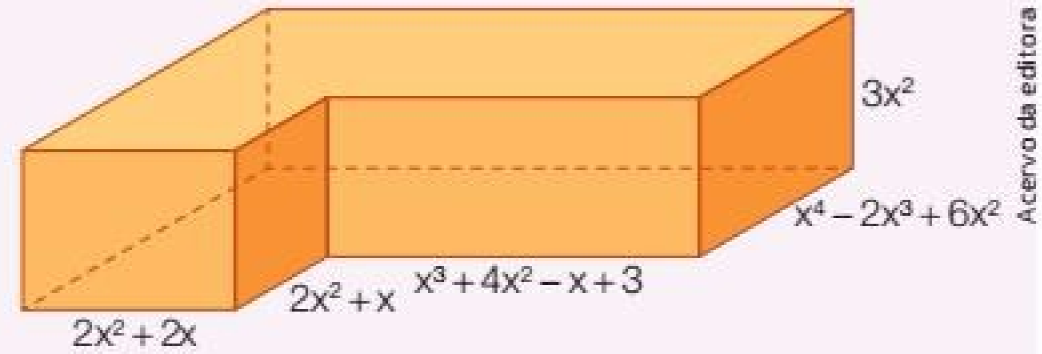
Podemos simplificar o cálculo de $p(x)\cdot q(x)$ utilizando o esquema ao lado:

q(x) \ p(x)	$2x^3$	x^2	$-3x$	1
x^5	$2x^8$	x^7	$-3x^6$	x^5
$2x^4$	$4x^7$	$2x^6$	$-6x^5$	$2x^4$
$-x^3$	$-2x^6$	$-x^5$	$3x^4$	$-x^3$
$3x^2$	$6x^5$	$3x^4$	$-9x^3$	$3x^2$
$0x$	$0x^4$	$0x^3$	$-0x^2$	$0x$
4	$8x^3$	$4x^2$	$-12x$	4

Portanto:

$$p(x)\cdot q(x)=2x^8+5x^7-3x^6+8x^4-2x^3+7x^2-12x+4$$

R6. Escreva o polinômio $v(x)$ que representa o volume do sólido ao lado.



Resolução

O volume do sólido é obtido calculando o produto entre a área da base e a altura, assim temos:

área da base: $(x^3+6x^2+x+3)(x^4-2x^3+6x^2)+(2x^2+x)(2x^2+2x)$

altura: $3x^2$

$$v(x)=\left((x^3+6x^2+x+3)(x^4-2x^3+6x^2)+(2x^2+x)(2x^2+2x)\right)\cdot 3x^2$$
$$v(x)=\left(x^7+4x^6-5x^5+37x^4+18x^2+4x^4+6x^3+2x^2\right)\cdot 3x^2$$
$$v(x)=\left(x^7+4x^6-5x^5+41x^4+6x^3+20x^2\right)\cdot 3x^2$$
$$v(x)=3x^9+12x^8-15x^7+123x^6+18x^5+60x^4$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

17. Dados os polinômios $f(x)=5x^4+3x^2-2x-1$ e $g(x)=2x^3+4x+3$, calcule:

a) $f+g$ $(f+g)(x)=5x^4+2x^3+3x^2+2x+2$ b) $g-f$ $(g-f)(x)=-5x^4+2x^3-3x^2+6x+4$ c) $f\cdot g$ $(f\cdot g)(x)=10x^7+26x^5+11x^4+10x^3+x^2-10x-3$

18. Sabendo que os polinômios *m*, *n* e *p* têm respectivamente graus 3, 5 e 7, determine o grau do polinômio *q*, sendo:

a) $q=p+n$ $gr(q)=7$ b) $q=p-m$ $gr(q)=7$ c) $q=m\cdot n$ $gr(q)=8$ d) $q=(m+n)\cdot p$ $gr(q)=12$ e) $q=(p\cdot m)-n$ $gr(q)=10$

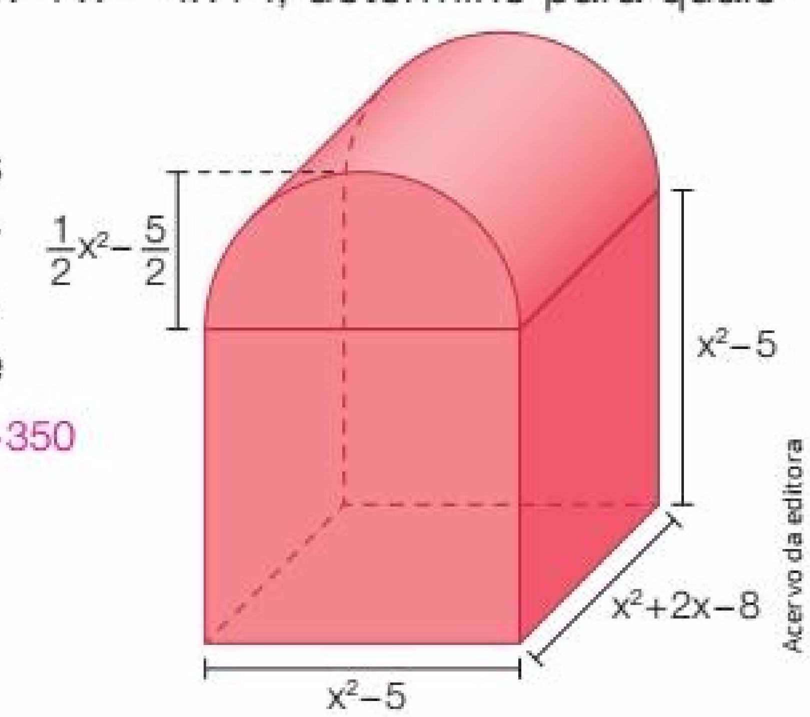
19. **Desafio**

Dados os polinômios $p(x)=(2a-6)x-2a+1$ e $q(x)=3ax+a+6$, para quais valores de *a* o polinômio $p\cdot q$ terá grau 1? Escreva os possíveis polinômios $p\cdot q$ de grau 1, de acordo com os valores de *a*.
$a=3$ ou $a=0$; para $a=3$, temos: $(p\cdot q)(x)=-45x-45$; para $a=0$, temos: $(p\cdot q)(x)=-36x+6$

20. Determine os valores de *a*, *b* e *c* em $p(x)=ax^3+6x+c$ e $q(x)=4x^3-(b+1)x-8$, de maneira que o polinômio $p(x)+q(x)$ seja identicamente nulo. $a=-4$; $b=5$; $c=8$

21. Considerando os polinômios $p(x)=2x^4+8x^3+x^2-4x+1$ e $q(x)=x^5+2x^4-8x^3+x^2-4x+1$, determine para quais valores de *x* temos $p(x)=q(x)$. 0, 4 e -4

22. Um armazém utilizado para estocar grãos pode ser decomposto em duas partes, sendo uma com forma de paralelepípedo reto, e outra, de semicilindro reto, conforme a figura, na qual as medidas são dadas em metros.



a) Determine o polinômio $v(x)$ que corresponde à capacidade desse armazém, em metros cúbicos. $v(x)=\frac{7}{4}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{63}{2}x^4-35x^3+\frac{735}{4}x^2+\frac{175}{2}x-350$

b) Qual a capacidade de armazenagem para $x=3$? $196\ m^3$

Para resolver esta atividade, considere $\pi=3$ e que os grãos podem ser estocados em todo o interior do armazém.

23. A receita e a despesa de uma pequena fábrica em certo ano são dadas, respectivamente, por $r(t)=\frac{1}{4}t^3-4t^2+\frac{65}{4}t$ e $d(t)=\frac{1}{8}(t^3-19t^2+91t)$, em que *t* é o mês (janeiro: 1, fevereiro: 2, ...), e $r(t)$ e $d(t)$ são dados em milhares de reais.

a) Escreva um polinômio $l(t)$ para representar o lucro (ou prejuízo) da fábrica, de acordo com o mês do ano. $l(t)=\frac{1}{8}(t^3-13t^2+39t)$

Considere que o lucro seja a diferença entre a receita e a despesa.

b) O que podemos afirmar em relação aos meses em que $l(t)$ assume valores menores que zero? Podemos afirmar que a fábrica teve prejuízo.

c) No mês de julho a fábrica teve lucro ou prejuízo? De quantos reais? prejuízo; R$ 2 625,00

d) Em quais meses a fábrica teve prejuízo? maio, junho, julho e agosto

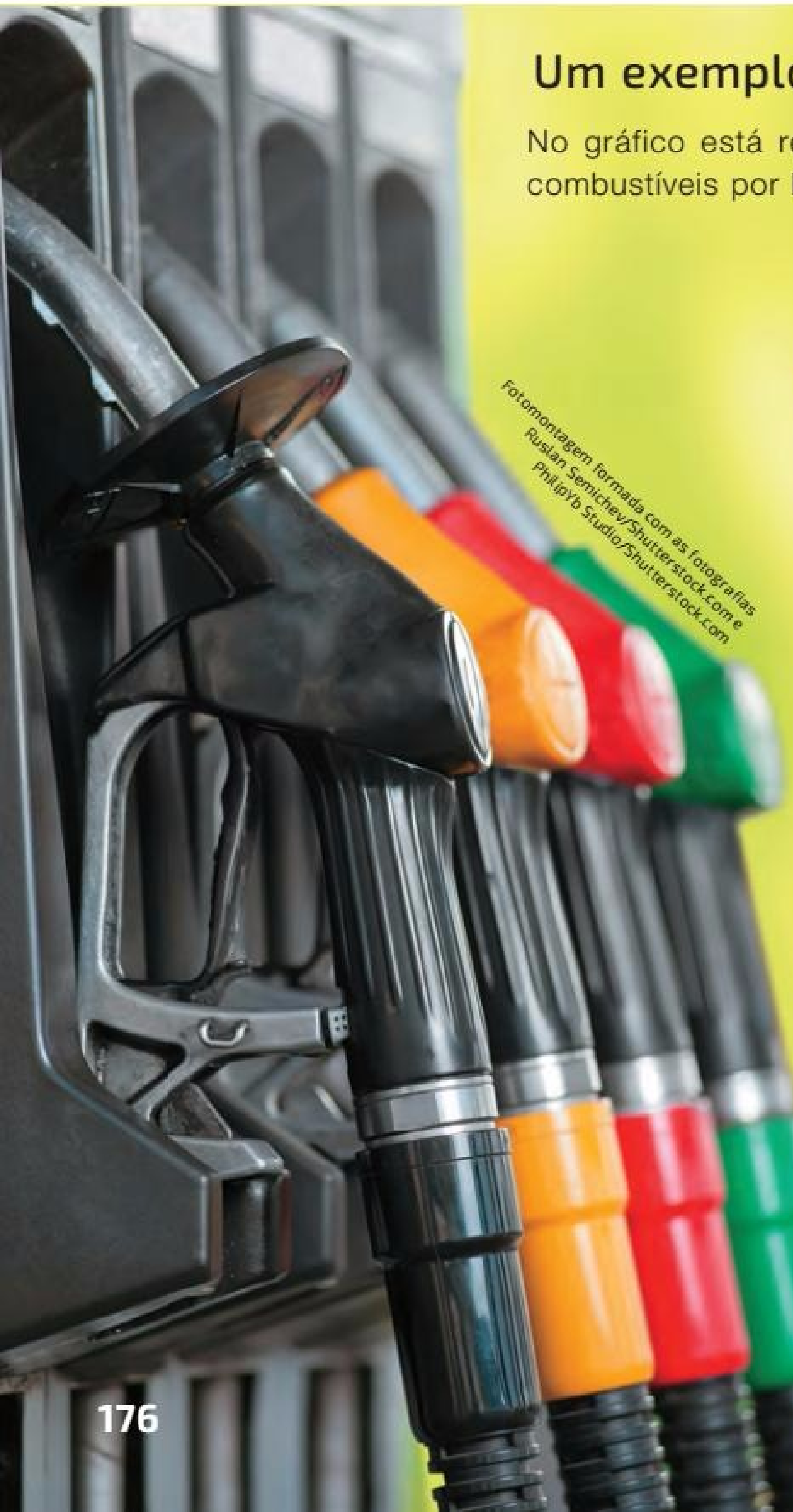
Capítulo 6

24. A Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) é o órgão regulador das atividades que integram a indústria do petróleo, gás natural e biocombustíveis no Brasil. Dentre suas funções, a ANP acompanha os preços dos combustíveis por meio de uma pesquisa semanal e comunica aos órgãos do Ministério da Justiça possíveis indícios de infrações contra a ordem econômica. Essa pesquisa é publicada periodicamente, ilustrando o comportamento do mercado de combustíveis.

Na Matemática, informações como essas são utilizadas com a finalidade de elaborar tendências, transformando situações do cotidiano em problemas matemáticos e desenvolvendo expressões cujas soluções podem ser utilizadas no problema em particular ou em outras aplicações. Esse campo de estudo faz parte da Modelagem Matemática.

Para desenvolver um modelo matemático é necessário, em suma, familiarizar-se com o tema do problema a ser abordado, organizar as informações, descrevê-las de maneira matemática por meio de expressões matemáticas, gráficos, tabelas, entre outros, e depois resolvê-las. Ao final, verifica-se se o modelo matemático obtido atende a todas as necessidades que o geraram. Caso isso não ocorra, é necessário retomar o processo anterior ajustando o que for necessário.

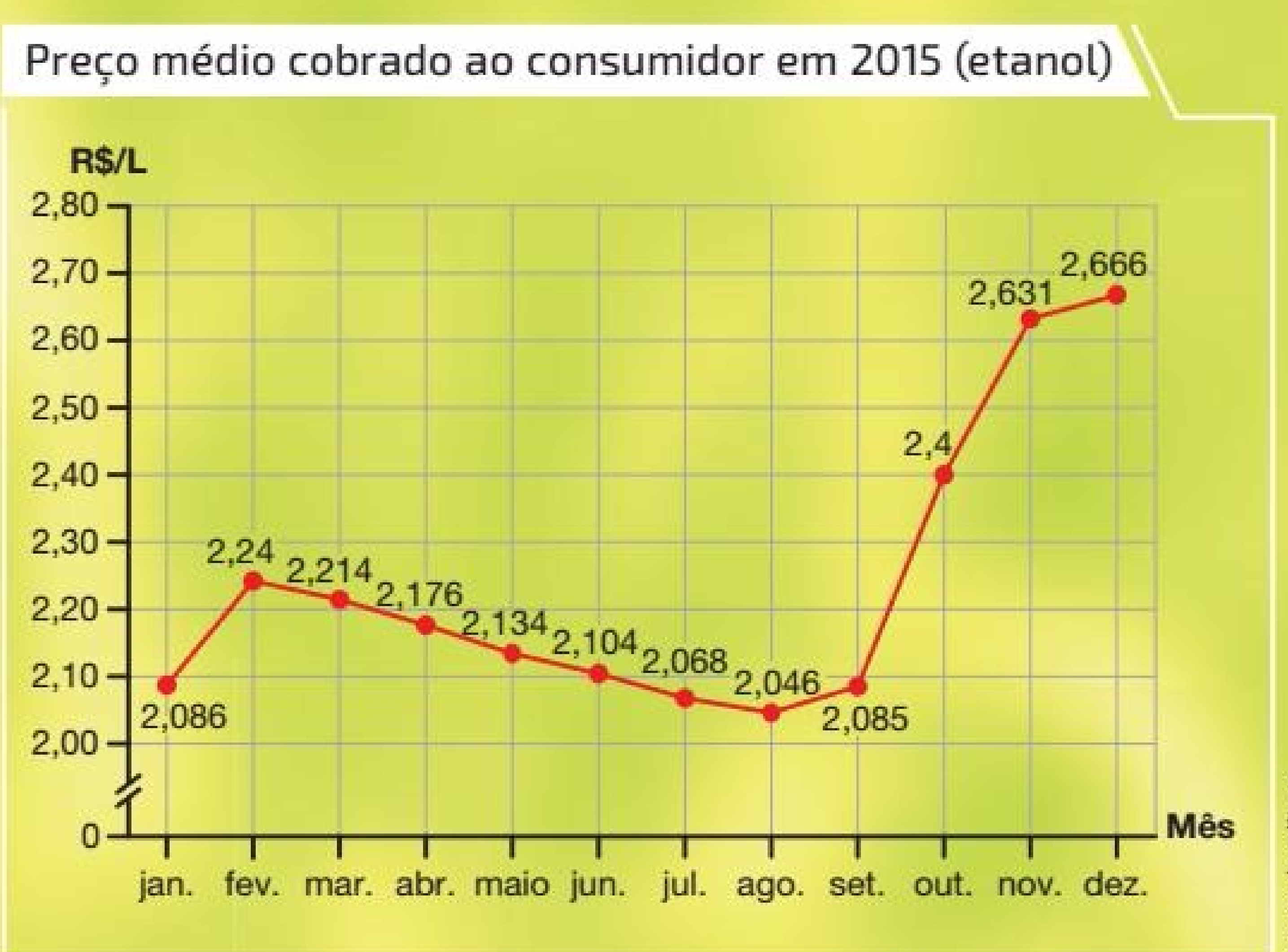
Fontes de pesquisa: <www.anp.gov.br/?pg=66510>. Acesso em: 8 mar. 2016. BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2007.



Fotomontagem formada com as fotografias Ruslan Semichev/Shutterstock.com e PhilipYb Studio/Shutterstock.com

Um exemplo de modelo polinomial

No gráfico está representado o preço médio mensal cobrado nos postos de combustíveis por litro de etanol no Brasil, no ano de 2015.



Fonte: <www.anp.gov.br/?pg=66510>. Acesso em: 8 mar. 2016.

Ao considerar a tendência descrita pelo gráfico de linhas em 2015, podemos ajustar os dados apresentados a uma função polinomial.

Bombas de combustível.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) Em que períodos de 2015 houve crescimento dos preços de revenda do etanol? E decrescimento? crescimento: janeiro a fevereiro, agosto a dezembro; decrescimento: fevereiro a agosto

b) Observe o comportamento da função polinomial nos gráficos **A**, **B** e **C**. Qual dentre essas três funções melhor se ajusta aos dados apresentados? Justifique. Função polinomial de grau 6 (gráfico **C**), porque seus valores são os que mais se aproximam dos valores reais.

c) No gráfico **C**, a função polinomial ajustada aos dados apresentados é dada por:

$$p(x) = -0{,}00005562x^6 + 0{,}0020347x^5 - 0{,}0289007x^4 + 0{,}204774x^3 - 0{,}7642x^2 + 1{,}3881x + 1{,}28$$

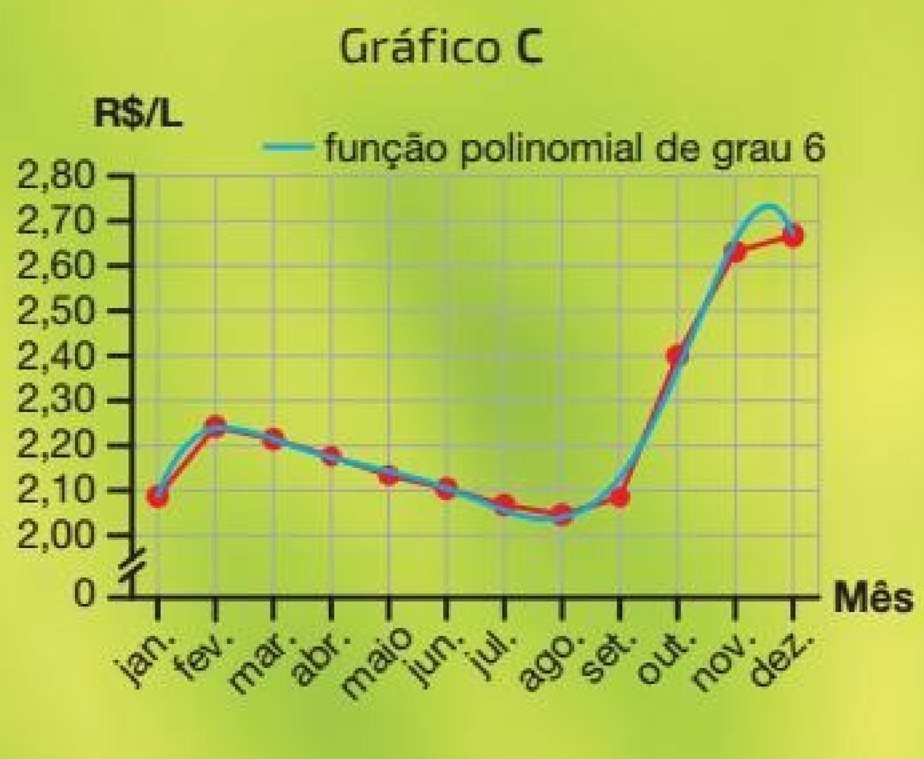
Com o auxílio de uma calculadora, determine a diferença, em módulo, entre o valor desse polinômio e os dados apresentados referentes aos meses de janeiro $(x = 1)$ e março $(x = 3)$. aproximadamente 0,00425; aproximadamente 0,00567

d) Qual foi a porcentagem de aumento no preço do etanol no mês de dezembro, quando comparado a agosto? aproximadamente 30,3%

e) A função polinomial de grau 2 é dada por $q(x) = 0{,}012x^2 - 0{,}1196x + 2{,}36$, e a de grau 4 por $m(x) = -0{,}0006x^4 + 0{,}0169x^3 - 0{,}1593x^2 + 0{,}527x + 1{,}69$. Calcule $m(x) - q(x)$. O que significa essa diferença?

$m(x) - q(x) = -0{,}0006x^4 + 0{,}0169x^3 - 0{,}1713x^2 + 0{,}6466x - 0{,}67$; essa diferença significa o quanto os valores dos polinômios estão distantes entre si para cada valor de *x*.

No gráfico **A**, ajustamos os dados a uma função polinomial de grau 2; no gráfico **B**, a função polinomial de grau 4; e no gráfco **C**, a uma função polinomial de grau 6.



Ilustrações: Acervo da editora

Note que, quanto maior for o grau do polinômio, mais os dados apresentados se aproximam dos valores da função polinomial, aumentando sua precisão. Contudo, quanto maior for a precisão, maiores serão os cálculos matemáticos envolvidos no problema.

Divisão

De modo geral, a divisão de polinômios é realizada por meio do método da chave, semelhante ao utilizado na divisão de números inteiros.

Considerando os polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo, dividir $p(x)$ por $h(x)$ é determinar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

- $p(x)=h(x)\cdot q(x)+r(x)$
- $gr(r)<gr(h)$ ou $r(x)\equiv 0$

$$\begin{array}{r|l} \overset{\text{dividendo}}{p(x)} & \overset{\text{divisor}}{h(x)} \\ \cline{2-2} \underset{\text{resto}}{r(x)} & \underset{\text{quociente}}{q(x)} \end{array}$$

O grau do quociente de uma divisão de polinômios é igual à diferença entre o grau do dividendo e o do divisor, ou seja, $gr(q)=gr(p)-gr(h)$.

Se na divisão de $p(x)$ por $h(x)$ temos $r(x)\equiv 0$, dizemos que $p(x)$ é divisível por $h(x)$.

Exemplo

Veja como podemos realizar a divisão do polinômio $p(x)=x^6+2x^5+x^3-x+3$ por $h(x)=x^2+2x-1$.

Note que os termos de $p(x)$ e $h(x)$ são escritos em ordem decrescente segundo as potências de x.

- Note que $p(x)$ possui alguns termos com coeficientes iguais a zero $(0x^4$ e $0x^2)$. Logo, escrevemos:

$$\begin{array}{r|l} x^6+2x^5+0x^4+x^3+0x^2-x+3 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

- Obtemos o 1º termo do quociente $q(x)$ dividindo o 1º termo de $p(x)$ pelo 1º termo de $h(x)$, ou seja, $\frac{x^6}{x^2}=x^{6-2}=x^4$. Em seguida, multiplicamos $h(x)$ por esse valor e escrevemos o resultado (com o sinal trocado) abaixo dos termos semelhantes de $p(x)$, adicionando os termos semelhantes.

$$\begin{array}{r|l} x^6+2x^5+0x^4+x^3+0x^2-x+3 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^6-2x^5+x^4} & x^4 \\ x^4+x^3+0x^2-x+3 & \end{array}$$

Para que os alunos compreendam melhor o processo da divisão de polinômios, realize com eles antes uma divisão de números naturais pelo algoritmo conhecido como **método da chave**. Na divisão de 187 por 5, por exemplo, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1\,8\,7 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-1\,5} & 37 \\ 3\,7 & \\ \underline{-3\,5} & \\ 2 & \end{array}$$

- Repetimos esse processo até que $gr(r)<gr(h)$ ou $r(x)\equiv 0$.

$$\begin{array}{r|l} x^6+2x^5+0x^4+x^3+0x^2-x+3 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^6-2x^5+x^4} & x^4+x^2-x+3 \\ x^4+x^3+0x^2-x+3 & \\ \underline{-x^4-2x^3+x^2} & \\ -x^3+x^2-x+3 & \\ \underline{x^3+2x^2-x} & \\ 3x^2-2x+3 & \\ \underline{-3x^2-6x+3} & \\ -8x+6 & \end{array}$$

Note que $gr(r)<gr(h)$, o que indica que a divisão está finalizada. Neste caso, obtemos o quociente $q(x)=x^4+x^2-x+3$ e o resto $r(x)=-8x+6$.

Realize os cálculos e verifique que:

$$\underbrace{x^6+2x^5+x^3-x+3}_{p(x)}=\underbrace{(x^2+2x-1)}_{h(x)}\cdot\underbrace{(x^4+x^2-x+3)}_{q(x)}+\underbrace{(-8x+6)}_{r(x)}$$

Atividades resolvidas

R7. Determine o polinômio $p(x)$ que, dividido por $h(x)=x^2+2x-1$, tem quociente $q(x)=x+1$ e resto $r(x)=5$.

Resolução

Como $p(x)=h(x)\cdot q(x)+r(x)$, temos que:

$$p(x)=(x^2+2x-1)\cdot(x+1)+5=$$
$$=x^3+x^2+2x^2+2x-x-1+5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x)=x^3+3x^2+x+4$$

Verificando pelo método da chave:

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+x+4 & x^2+2x-1 \\ \hline \underline{-x^3-2x^2+x} & x+1 \\ \quad x^2+2x+4 & \\ \quad \underline{-x^2-2x+1} & \\ \qquad 5 & \end{array}$$

R8. Calcule os valores de *a* e *b* de modo que o polinômio $p(x)=x^3+2x^2+ax+b$ seja divisível por $h(x)=x^2-x-2$.

Resolução

Aplicando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+ax+b & x^2-x-2 \\ \hline \underline{-x^3+x^2+2x} & x+3 \\ \quad 3x^2+(2+a)x+b & \\ \quad \underline{-3x^2+3x+6} & \\ \qquad \underbrace{(5+a)x+b+6}_{r(x)} & \end{array}$$

Para $p(x)$ ser divisível por $h(x)$, temos $r(x)\equiv 0$, ou seja:

- $5+a=0\Rightarrow a=-5$
- $b+6=0\Rightarrow b=-6$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

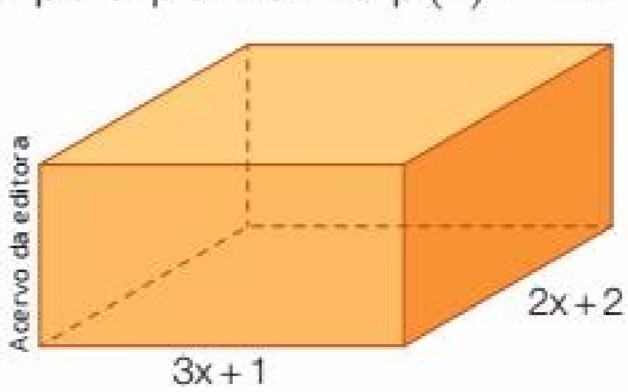
25. Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $h(x)$, sendo:

a) $p(x)=4x^5-2x^4-10x+15$; $h(x)=2x-1$ quociente: $2x^4-5$; resto: 10

b) $p(x)=x^6-2x$; $h(x)=x^2-2x-1$ quociente: $x^4+2x^3+5x^2+12x+29$; resto: $68x+29$

c) $p(x)=3x^7-5x^6+9x^5-10x^4-3x^3+15x^2-19x+18$; $h(x)=3x^2-5x+3$ quociente: x^5+2x^3-3x; resto: $-10x+18$

26. Determine, em função de *x*, a altura do paralelepípedo a seguir, sabendo que o volume é representado pelo polinômio $p(x)=12x^3+16x^2+4x$. 2x



27. Sabendo que $p(x)=2x^4-5x^3+2x^2-2ax-25$ é divisível por $q(x)=2x^2+x-5$, calcule o valor de *a*. $a=-10$

28. Determine o polinômio $p(x)$, de maneira que a divisão de $p(x)$ por $h(x)=x^3-5x+4$ tenha quociente $q(x)=x^2+2x+9$ e resto $r(x)=x^2+40x-35$. $p(x)=x^5+2x^4+4x^3-5x^2+3x+1$

29. Sejam dois polinômios, $p(x)$ e $h(x)$, em que $gr(p)=8$ e $gr(h)=1$, sendo que $p(x)$ não é divisível por $h(x)$. Qual é o grau do resto $r(x)$ e do quociente $q(x)$ da divisão de $p(x)$ por $h(x)$? $gr(r)=0$; $gr(q)=7$

30. Calcule os valores de *m* e *n*, de modo que a divisão de $p(x)=x^3-mx^2-nx+1$ por $h(x)=x^2+2x+1$ tenha resto $r(x)=16x+8$. $m=5$; $n=-3$

31. Os polinômios $p(x)=x^4-5x^3-13x^2+77x+8mn+4$ e $q(x)=x^3-13x+12$ são divisíveis pelo polinômio $h(x)=x^2+3x+m$. Qual é o valor de $m-n$? $m-n=-6$

32. A divisão do polinômio $p(x)=2x^4+3x^3+(3k+4)x^2+42x+72$ por $g(x)=x^2-9$ tem como resto um monômio $r(x)$.

Determine o valor de *k* e o resto $r(x)$. $k=-10$; $r(x)=69x$

33. O polinômio $r(x)=ai$, com $a\in\mathbb{R}$ e *i* a unidade imaginária, corresponde ao resto da divisão de $p(x)=4x^3-(k-5)x^2+4x-2$ por $h(x)=x^2-2x+i$. Calcule os valores de *k* e *a*, e determine o polinômio $r(x)$. $k=15-2i$; $a=2$; $r(x)=2i$

Divisão de polinômios por binômios do tipo $h(x) = x - a$

Estudamos que, na divisão de polinômios, o resto deve ser nulo ou seu grau deve ser menor que o grau do divisor. Se o divisor é do tipo $h(x) = x - a$, com $a \in \mathbb{C}$ e grau igual a 1, o resto é identicamente nulo ou tem grau igual a zero. Portanto, podemos concluir que o resto da divisão é independente da variável *x*, ou seja, uma constante *r*.

Assim, na divisão de um polinômio $p(x)$ por $h(x) = x - a$, temos:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

Fazendo $x = a$ e calculando $p(a)$, obtemos:

$$p(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \cdot q(a) + r \Rightarrow p(a) = r$$

Esse resultado é conhecido como **Teorema do resto**.

Sendo *a* uma constante qualquer, o resto *r* da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$, ou seja, $r = p(a)$.

Exemplo

Determine o resto *r* da divisão do polinômio $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 8$ por $h(x) = x + 2$.

Como $a = -2$, temos: $p(-2) = 2(-2)^4 + 5(-2)^3 - (-2)^2 + 8 = 32 - 40 - 4 + 8 = -4$.

Portanto, o resto da divisão de $p(x)$ por $h(x)$ é $r = -4$.

O valor de *a* corresponde à raiz do binômio $h(x) = x - a$. No exemplo apresentado, temos:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Maurice Quentin de La Tour. Séc. XVII. Pastel sobre tela. Museu do Louvre, Paris (França)

Jean-le-Rond d'Alembert

Uma importante consequência do Teorema do resto é o **Teorema de d'Alembert**. Esse teorema recebe esse nome em homenagem ao matématico francês Jean-le--Rond d'Alembert (1717-1783), nascido em Paris, na França, d'Alembert foi abandonado quando recém-nascido perto da igreja de Saint Jean-le-Rond. Assim como alguns de seus contemporâneos, tinha uma vasta instrução, enfatizada em Direito, Medicina, Ciências e Matemática. Entre os estudos a que mais se dedicou está a tentativa de demonstrar o Teorema fundamental da álgebra, que ainda será estudado neste capítulo. Enunciamos o Teorema de d'Alembert da seguinte maneira:

Sendo *a* uma constante qualquer, um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, *a* é raiz de $p(x)$, ou seja, $p(a) = 0$.

Exemplo

Verifique se o polinômio $p(x) = -x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 13x + 4$ é divisível por $h(x) = x - 4$.

Como $a = 4$, temos:

$$p(4) = -4^5 + 4 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^2 - 13 \cdot 4 + 4 = -1\,024 + 1\,024 + 128 - 80 - 52 + 4 = 0$$

Portanto, como $p(4) = 0$, segue que $p(x)$ é divisível por $h(x)$.

Atividades resolvidas

R9. Considere o polinômio $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-60$. Ao se dividir $p(x)$ por $x-1$, obtém-se resto -12, e ao se dividir $p(x)$ por $x+1$, obtém-se resto -144. Além disso, $p(x)$ é divisível por $x-2$. Determine os valores de *a*, *b* e *c*.

Resolução

Pelo Teorema do resto, temos que:

- $p(1)=-12 \Rightarrow 1^4+a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1-60=-12 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1+a+b+c-60=-12 \Rightarrow a+b+c=47$
- $p(-1)=-144 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (-1)^4+a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)-60=-144 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1-a+b-c-60=-144 \Rightarrow -a+b-c=-85$

Como $p(x)$ é divisível por $x-2$, pelo Teorema de d'Alembert, segue que:

$$p(2)=0 \Rightarrow 2^4+a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2-60=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16+8a+4b+2c-60=0 \Rightarrow 8a+4b+2c=44 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(4a+2b+c)=44 \Rightarrow 4a+2b+c=22$$

Logo, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=47 \\ -a+b-c=-85\ ^{*} \\ 4a+2b+c=22 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a=-2$, $b=-19$ e $c=68$.

*Resolva o sistema apresentado junto com os alunos. Verifique se eles perceberam que, ao adicionar a 1ª e a 2ª equações, obtém-se $b=-19$. Ao adicionar a 2ª e a 3ª equações e substituir $b=-19$ no resultado, obtém-se $a=-2$. O valor de *c* pode ser obtido substituindo $a=-2$ e $b=-19$ em qualquer das equações do sistema.

R10. Sabe-se que 2 é uma das raízes da equação $x^3-10x^2+31x-30=0$. Qual a soma das outras duas raízes?

Resolução

Considerando $p(x)=x^3-10x^2+31x-30$, temos que 2 é uma raiz de $p(x)$, e as outras raízes são as soluções da equação $q(x)=0$, em que $q(x)$ é o quociente da divisão de $p(x)$ por $x-2$, uma vez que $p(x)=(x-2)\cdot q(x)$.

Aplicando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{rl|l} x^3-10x^2+31x-30 & & x-2 \\ \cline{3-3} -x^3+2x^2 \quad\quad\quad & & \underbrace{x^2-8x+15}_{q(x)} \\ \hline -8x^2+31x-30 & & \\ 8x^2-16x \quad\; & & \\ \hline 15x-30 & & \\ -15x+30 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Segue que:

$$q(x)=0 \Rightarrow x^2-8x+15=0$$

Como a soma das raízes de uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$ é dada por $-\frac{b}{a}$, temos que:

$$a=1;\ b=-8;\ c=15$$
$$-\frac{b}{a}=-\frac{-8}{1}=8\ ^{**}$$

Portanto, a soma das outras duas raízes da equação é 8.

**Se necessário, lembre os alunos das relações de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau, assunto estudado de modo geral nos anos finais do Ensino Fundamental.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

34. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $h(x)$ em cada item.

a) $p(x)=x^4-2x^3-3x^2-2x-15$; $h(x)=x+1$ -13

b) $p(x)=2x^5-9x^4+12x^3-14x^2+19x-1$; $h(x)=x-3$ 11

c) $p(x)=x^4-3x^3-7x^2+31x-10$; $h(x)=x-3$ 20

35. Determine o valor de *m*, de modo que o polinômio $f(x)=(m-4)x^4-m^2x^3+9mx^2+20x+21$ seja divisível por $q(x)=x-3$. $m=3$

36. Dividindo-se o polinômio $h(x)=x^6+ax^4+bx^2+cx+3$ por $x+1$, obtém-se resto 28, e dividindo-se $h(x)$ por $x-1$ obtém-se resto 14. Sabendo que $h(x)$ é divisível por $x-3$, calcule os valores de *a*, *b* e *c*.
$a=-12$; $b=29$; $c=-7$

37. O resto da divisão do polinômio $p(x)=2x^3-5x^2+4x-d$ por $h(x)=x-2$ é um polinômio $r(x)$ identicamente nulo. Qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $x-4$?
60

38. Considerando o polinômio $p(x)=q(x)+x^3-2x^2+8x+4$ e sabendo que -3 é raiz de $p(x)$ e que 2 é raiz de $q(x)$, determine $q(-3)\cdot p(2)$. 1 300

39. Sabendo que -5 é uma das raízes do polinômio $f(x)=5x^3-5x^2-105x+225$, qual é a razão entre as outras duas raízes de $f(x)$? 1

40. Desafio

Sejam 2 e -7 os restos das divisões de um polinômio $p(x)$ por $x+1$ e por $x+2$, respectivamente. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por x^2+3x+2.
$9x+11$

Capítulo 6

Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

Paolo Ruffini

Dispositivo de Briot-Ruffini

Para efetuar a divisão de um polinômio com grau maior ou igual a 1 por um binômio do tipo $x-a$, podemos utilizar um dispositivo conhecido como **Dispositivo de Briot-Ruffini**, no qual, utilizando os coeficientes do dividendo e o valor de *a* (raiz do divisor), obtemos o quociente e o resto da divisão. Esse dispositivo recebe esse nome em homenagem aos matemáticos Charles A. A. Briot (1817-1882) e Paolo Ruffini (1765-1822).

Para dividir o polinômio $p(x)=2x^5+x^4-3x^2-x+5$ por $h(x)=x+2$, por meio do dispositivo de Briot-Ruffini, verificamos inicialmente se os termos de $p(x)$ estão em ordem decrescente segundo as potências de *x* e se $p(x)$ possui coeficientes iguais a zero. Nesse caso, temos $p(x)=2x^5+x^4+0x^3-3x^2-x+5$.

Então, dispomos os coeficientes de $p(x)$ e o valor de *a* como no esquema.

coeficientes do dividendo

$$\text{valor de } a \longrightarrow \begin{array}{r|rrrrr:r} -2 & 2 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ \hline & & & & & & \end{array} \longleftarrow \begin{array}{c}\text{termo}\\ \text{independente}\\ \text{do dividendo}\end{array}$$

Copiamos o 1º coeficiente do dividendo, nesse caso 2, obtendo o 1º coeficiente do quociente. O 2º coeficiente do quociente é obtido por meio do cálculo $2\cdot(-2)+1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr:r} -2 & 2 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ \hline & 2 & \underbrace{-3}_{2\cdot(-2)+1} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr:r} -2 & 2 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ \hline & 2 & -3 & \underbrace{6}_{(-3)\cdot(-2)+0} & \underbrace{-15}_{6\cdot(-2)+(-3)} & \underbrace{29}_{(-15)\cdot(-2)+(-1)} & \end{array}$$

O 3º coeficiente do quociente é obtido por meio do cálculo $(-3)\cdot(-2)+0$; o 4º, por meio do cálculo $6\cdot(-2)+(-3)$; e o 5º, por meio do cálculo $(-15)\cdot(-2)+(-1)$.

De acordo com o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

valor de *a*	coeficientes de *x* do dividendo	termo independente do dividendo
	coeficientes do quociente	resto

Obtemos o resto da divisão por meio do cálculo $29\cdot(-2)+5$.

$$\begin{array}{r|rrrrr:r} -2 & 2 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ \hline & 2 & -3 & 6 & -15 & 29 & \underbrace{-53}_{29\cdot(-2)+5} \end{array} \longleftarrow \begin{array}{c}\text{resto da}\\ \text{divisão}\end{array}$$

coeficientes do quociente

Portanto, na divisão de $p(x)$ por $h(x)$, obtemos o quociente $q(x)=2x^4-3x^3+6x^2-15x+29$ e resto igual a -53.

Atividades resolvidas

R11. Determine o valor de *k* de modo que ao dividir $p(x)=3x^5-x^4+2x^2+kx-6$ por $x-2$ obtenha-se resto 92.

Resolução

Aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrrr:r} 2 & 3 & -1 & 0 & 2 & k & -6 \\ \hline & 3 & \underbrace{5}_{3\cdot2-1} & \underbrace{10}_{5\cdot2+0} & \underbrace{22}_{10\cdot2+2} & \underbrace{44+k}_{22\cdot2+k} & \underbrace{82+2k}_{(44+k)\cdot2-6} \end{array} \longleftarrow \text{resto}$$

coeficientes do quociente

Para que o resto $r(x)$ seja igual a 92, segue que: $r(x)=92 \Rightarrow 82+2k=92 \Rightarrow k=5$

R12. Determine o quociente e o resto da divisão de $p(x)=6x^3+x^2-x+7$ por $h(x)=2x+1$.

Resolução

Como o divisor é da forma $kx-a$, com $k=2$ e $a=-1$, para aplicar o Dispositivo de Briot-Ruffini devemos dividir os coeficientes do dividendo, do divisor e do resto por *k*, ou seja:

$$p(x)=h(x)\cdot q(x)+r(x)\Rightarrow\frac{p(x)}{2}=\frac{h(x)\cdot q(x)+r(x)}{2}\Rightarrow\frac{p(x)}{2}=\frac{h(x)}{2}\cdot q(x)+\frac{r(x)}{2}$$

Logo:

- $\frac{p(x)}{2}=\frac{6x^3+x^2-x+7}{2}=3x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$
- $\frac{h(x)}{2}=\frac{2x+1}{2}=x+\frac{1}{2}$

Desse modo, podemos aplicar o Dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $\frac{p(x)}{2}$ por $\frac{h(x)}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc:c}
-\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \frac{7}{2} \\
\hline
 & 3 & \underbrace{-1}_{3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}} & \underbrace{0}_{-1\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} & & \underbrace{\frac{7}{2}}_{0\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{2}} \leftarrow \text{resto}
\end{array}$$

coeficientes do quociente

Extensão do Teorema do resto

Sendo *a* uma constante qualquer e $k\neq0$, o resto *r* da divisão de um polinômio $p(x)$ por $kx-a$ é igual a $p\left(\frac{a}{k}\right)$, ou seja, $r=p\left(\frac{a}{k}\right)$.

Assim:

- $q(x)=3x^2-x$
- $\frac{r(x)}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow r(x)=7$

Portanto, o quociente é $q(x)=3x^2-x$ e o resto é $r(x)=7$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

41. Utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini, determine o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ das divisões apresentadas em cada item. Respostas no final do livro.

a) $6x^4-3x^2+5x-2$ dividido por $x+5$

b) $2x^6-7x^5-8x^2+5x+1$ dividido por $x-3$

c) $4x^5+2x^3-3x^2+x-1$ dividido por $x+2$

42. A seguir está representada a divisão de um polinômio por um binômio do tipo $x-a$, utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini. Determine o divisor $h(x)$, o dividendo $p(x)$, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$. $h(x)=x-2$; $p(x)=3x^5-2x^4-3x^3+6x^2+2x-1$; $q(x)=3x^4+4x^3+5x^2+16x+34$; $r(x)=67$

$$\begin{array}{c|ccccc:c}
a & 3 & -2 & c & 6 & 2 & -1 \\
\hline
 & b & 4 & 5 & d & e & f
\end{array}$$

43. O quociente $q(x)=x-b^2$ é obtido na divisão do polinômio $p(x)=x^2+\frac{1}{4}x+4$ por $h(x)=x+b$.

Determine o resto $r(x)$ utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini. $r(x)=\frac{33}{8}$

44. Por meio do Dispositivo de Briot-Ruffini, calcule o valor de *a* em $p(x)=5x^4-18x^3+11x^2-7x-a$, sabendo que 3 é uma raiz de $p(x)$. $a=-3$

45. Sabendo que o resto da divisão do polinômio $h(x)=ax^3+11x^2+bx-3$ por $3x+2$ é igual a $-\frac{95}{27}$ e que o resto da divisão de $h(x)$ por $x-2$ é 107, resolva.

a) Qual é o valor de $h\left(-\frac{2}{3}\right)$? E de $h(2)$? $h\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{95}{27}$; $h(2)=107$

b) Escreva o polinômio $h(x)$. $h(x)=7x^3+11x^2+5x-3$

46. Utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $p(x)=16x^5-16x^4+12x^3-48x^2+14x+6$ por $4x-6$. quociente: $4x^4+2x^3+6x^2-3x-1$; resto: 0

47. A divisão de $p(x)=6x^4+5x^3-21x^2-4bx-8$ pelo polinômio $h(x)=3x-2$ tem $r(x)=b$ como resto. Determine o valor de *b*. $b=-4$

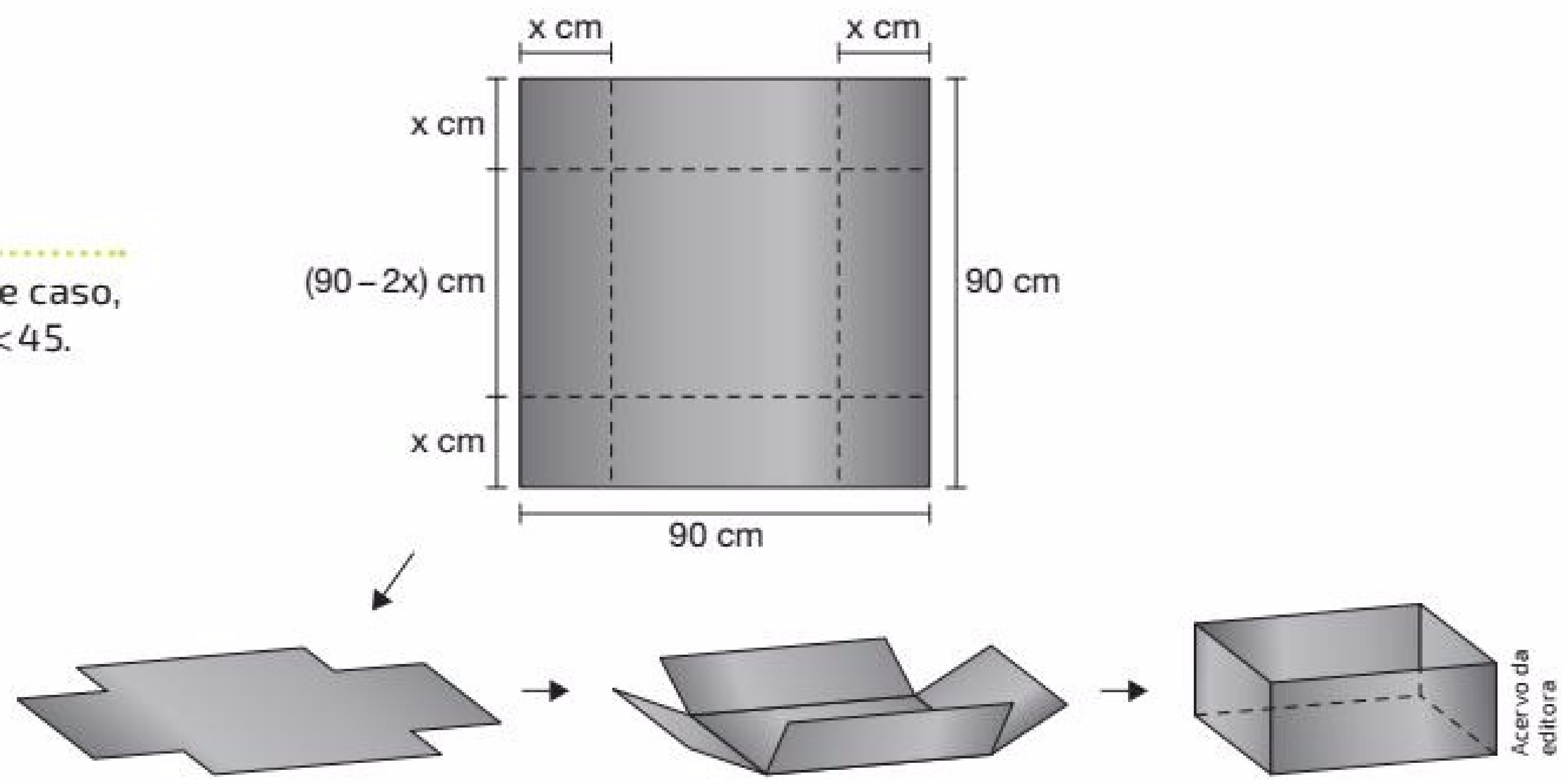
48. Determine o valor de *m*, de modo que o polinômio $f(x)=3x^4-2mx^3+13x^2-3mx+10$, dividido por $x-4$, tenha resto 6. $m=7$

49. O polinômio $p(x)=ax^3+13x^2+bx-3$ é divisível por $3x-1$ e o resto da divisão de $p(x)$ por $2x+5$ é igual a $-\frac{51}{2}$. Quais são os valores de *a* e *b*? $a=6$; $b=4$

Equações polinomiais

Certa indústria deseja fabricar caixas sem tampa, em formato de paralelepípedo, a partir de chapas metálicas quadradas de 90 cm de lado. Para que seja possível a confecção das caixas, será retirado de cada "canto" da chapa um quadrado de lado *x* cm. Depois, os lados serão dobrados e soldados, formando a caixa.

Nesse caso, $0 < x < 45$.



A intenção do fabricante é que essas caixas, quando prontas, tenham capacidade igual a 50 000 cm^3, desconsiderando a espessura do material. De acordo com essas exigências, qual deve ser a medida *x* do lado de cada quadrado a ser retirado da chapa?

Para calcular a capacidade da caixa que será construída, multiplicamos a área de sua base pela altura, obtendo o volume de um paralelepípedo equivalente:

- Área da base: $A = (90 - 2x)^2$ cm^2
- Altura: $h = x$ cm
- Volume: $V = A \cdot h = (90 - 2x)^2 \cdot x = (8\,100 - 360x + 4x^2)x = 4x^3 - 360x^2 + 8\,100x$

Como a intenção do fabricante é que a caixa tenha capacidade de 50 000 cm^3, temos que:

$$4x^3 - 360x^2 + 8\,100x = 50\,000 \Rightarrow 4x^3 - 360x^2 + 8\,100x - 50\,000 = 0$$

Assim, ao resolvermos essa equação, determinamos a medida *x* do lado de cada quadrado que será retirado da chapa metálica.

A equação obtida nessa situação é uma **equação polinomial**.

Denominamos **equação polinomial** ou **equação algébrica** toda equação que pode ser escrita na forma $p(x) = 0$, em que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é um polinômio de grau *n*, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

O grau e as raízes de uma equação polinomial $p(x) = 0$ são, respectivamente, iguais ao grau e às raízes do polinômio $p(x)$. Definimos como conjunto solução de uma equação polinomial o conjunto de todas as suas raízes.

Exemplos

- $2x^2 - 5x - 3 = 0$
  grau: 2
  raízes: $-\frac{1}{2}$ e 3
  conjunto solução: $S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$

- $3x - 6 = 0$
  grau: 1
  raiz: 2
  conjunto solução: $S = \{2\}$

- $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$
  grau: 3
  raízes: -4, $\frac{1}{3}$ e 1
  conjunto solução: $S = \left\{-4, \frac{1}{3}, 1\right\}$

Teorema fundamental da álgebra

O **Teorema fundamental da álgebra** foi demonstrado satisfatoriamente pela primeira vez em 1798, na tese de doutorado de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que na época tinha apenas 20 anos.

Veja o enunciado desse teorema, cuja demonstração não será apresentada nesta coleção.

> Toda equação polinomial de grau *n*, com $n \geqslant 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

Nascido em Brunswick, na Alemanha, em 1777, Gauss é considerado o maior matemático do século XIX e um dos maiores de todos os tempos. Gauss sempre relutou em publicar suas descobertas, motivo pelo qual algumas delas somente foram identificadas em seu diário matemático encontrado postumamente.

Note que, dada uma equação polinomial de grau $n \geqslant 1$, esse teorema garante somente que existe pelo menos um número complexo que é raiz dessa equação, não indicando "quantas são" ou "quais são" essas raízes.

Em consequência desse teorema, temos o **Teorema da decomposição em fatores**, conforme segue.

> De acordo com o Teorema da decomposição em fatores, todo polinômio de grau *n*, com $n \geq 1$, definido por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, pode ser decomposto na forma $p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n)$, na qual $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ são as raízes do polinômio.

Para justificar esse teorema, considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $n \geqslant 1$. Pelo Teorema fundamental da álgebra, $p(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa, que chamaremos de r_1. Logo, temos $p(r_1) = 0$. Como, de acordo com o Teorema de d'Alembert, o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - r_1$, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) \quad \text{(I)}$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Caso $n - 1 \geq 1$, de acordo com o Teorema fundamental da álgebra, $q_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa, r_2. Pelo Teorema de d'Alembert, temos:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad \text{(II)}$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$.

Fazendo a substituição de **II** em **I**:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x)$$

Realizando esse procedimento *n* vezes, temos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$ (identidade de polinômios).

Portanto:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n)$$

Considerando o Teorema da decomposição, temos que uma equação polinomial de grau *n*, com $n \geq 1$, dada por $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, pode ser escrita como:

$$a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_{n-2}) \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) = 0$$

Assim, $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ são todas as raízes da equação, ou seja, $p(x)$ tem *n* raízes.

> Uma equação polinomial de grau *n* tem *n* raízes complexas (não necessariamente distintas).

Capítulo 6

Atividades resolvidas

R13. Escreva o polinômio $p(x)$ de raízes -1, $2+i$ e $2-i$, tal que $p(2)=9$.

Resolução

Pelo Teorema da decomposição em fatores, o polinômio $p(x)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(2+i)]\cdot[x-(2-i)] \\ &= a_n\cdot(x+1)\cdot(x-2-i)\cdot(x-2+i) \\ &= a_n\cdot(x+1)\cdot(x^2-4x+5) \\ &= a_n\cdot(x^3-3x^2+x+5) \end{aligned}$$

Como $p(2)=9$, segue que:

$$p(2)=9 \Rightarrow a_n\cdot(2^3-3\cdot2^2+2+5)=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n\cdot3=9 \Rightarrow a_n=3$$

Portanto:

$$p(x)=3\cdot(x^3-3x^2+x+5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x)=3x^3-9x^2+3x+15}$$

R14. Sabendo que -4 e 3 são raízes da equação $x^4+3x^3-10x^2-24x=0$, determine as outras raízes dessa equação.

Resolução

Explique aos alunos que nesta atividade são realizadas divisões sucessivas por meio do Dispositivo de Briot-Ruffini.

Como -4 e 3 são duas raízes da equação, podemos decompô-la da seguinte maneira:

$$x^4+3x^3-10x^2-24x=0 \Rightarrow (x+4)\cdot(x-3)\cdot q_2(x)=0$$

Obtemos $q_2(x)$, aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini na divisão da equação por $x+4$, e, em seguida, o quociente dessa divisão por $x-3$.

-4	1	3	-10	-24	0
3	1	$\underbrace{-1}_{1\cdot(-4)+3}$	$\underbrace{-6}_{-1\cdot(-4)-10}$	$\underbrace{0}_{-6\cdot(-4)-24}$	$\underbrace{0}_{0\cdot(-4)+0}$
	1	$\underbrace{2}_{1\cdot3-1}$	$\underbrace{0}_{2\cdot3-6}$	$\underbrace{0}_{0\cdot3+0}$	

Logo, $q_2(x)=x^2+2x$. Como as raízes da equação $x^2+2x=0$ são $x_1=0$ e $x_2=-2$, então as outras duas raízes de $x^4+3x^3-10x^2-24x=0$ são 0 e -2.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

55. a) $S=\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 4\right\}$

50. Determine quantas raízes complexas, não necessariamente distintas, tem cada equação polinomial.

a) $2x^3-5x^2+3x-1=0$ 3 raízes

b) $5x^5-6x^4+2x^2-x=5x^5-3x^4+x^3-5$ 4 raízes

c) $x^2(7x^3-6x^2-5x+1)=0$ 5 raízes

d) $x^3-x^2(x^4-5x+1)=0$ 6 raízes

51. Qual é o conjunto solução da equação $\frac{1}{5}(x-3)^4(x-1)^2(x+2)^3=0$? E qual é o grau dessa equação? $S=\{-2, 1, 3\}$; grau: 9

52. Decomponha o polinômio $p(x)=3x^2+6x-45$ em termos de suas raízes. $p(x)=3(x+5)(x-3)$

53. Decomponha o polinômio $p(x)=x^3-2x^2-5x+6$ em termos de suas raízes: 1, 3 e -2.
$p(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$

54. Obtenha um polinômio $p(x)$ de grau:

a) 3, cujas raízes são -3, 2 e 3
Uma possível resposta: $p(x)=3x^3-6x^2-27x+54$

b) 4, cujas raízes são $3+i$, $3-i$, 2 e -1
Uma possível resposta: $p(x)=x^4-7x^3+14x^2+2x-20$

55. Determine o conjunto solução da equação:

a) $4x^3-8x^2-29x-12=0$, sabendo que 4 é raiz;

b) $6x^4-14x^3-26x^2+46x-12=0$, sabendo que 1 e -2 são raízes. $S=\left\{-2, \frac{1}{3}, 1, 3\right\}$

56. Calculadora

Nas páginas 168 e 169, estudamos informações sobre a resolução de equações cúbicas em uma competição envolvendo desafios matemáticos. Enunciada por Cardano em seu tratado **Ars Magna**, a resolução da equação cúbica na forma $x^3+mx=n$ (com *m* e *n* positivos), pode ser representada, em notação atual, da seguinte maneira:

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Utilizando o método de resolução apresentado por Cardano e uma calculadora científica, determine uma das raízes da equação $x^3+6x=20$. $x=2$

57. A altura *h* de um balão em relação ao solo foi observada durante certo tempo e modelada pela função $h(t)=t^3-30t^2+243t+24$, com $h(t)$ em metros e *t* em minutos. No instante $t=3$ o balão estava a 510 m de altura. Determine em que outros instantes *t* a altura foi também de 510 m.
9 min e 18 min

58. Sendo $S=\{a, b, -2, -1\}$, com $a<b$, o conjunto solução da equação $x^4+\frac{7}{4}x^3-\frac{17}{8}x^2-\frac{29}{8}x-\frac{3}{4}=0$, calcule o valor de *a* e *b*. $a=-\frac{1}{4}$; $b=\frac{3}{2}$

59. Escreva o polinômio $f(x)$ em que as quatro raízes são $2-i$, $2+i$, 3 e 4, e $f(2)=8$.
$f(x)=4x^4-44x^3+180x^2-332x+240$

Relações de Girard

O matemático Albert Girard (1590-1633) é conhecido principalmente por seus estudos em Álgebra e Geometria. Entre suas contribuições à Álgebra, figuram as chamadas Relações de Girard, enunciadas em **Invention nouvelle en l'algèbre**, de 1629. Ao que parece, antes de Girard, François Viète (1540-1603) chegou perto de estabelecer a relação entre as raízes da equação e os coeficientes, o que não foi possível porque ele reconhecia apenas as raízes positivas. Outro matemático que também fez descobertas semelhantes às de Girard foi Thomas Harriot (1560-1621), que, assim como Viète, teve seu trabalho prejudicado por não reconhecer as raízes negativas e imaginárias.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

As Relações de Girard são de grande utilidade na resolução de equações polinomiais, pois relacionam as raízes e os coeficientes de uma equação. Por meio dessas relações, podemos estabelecer um sistema de equações que, com algumas informações adicionais, pode permitir a resolução da equação inicial.

Capítulo 6

Relações de Girard para equações polinomiais de grau 2

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação polinomial de grau 2 definida por $a_2x^2+a_1x+a_0=0$, com $a_2\neq 0$. De acordo com o Teorema da decomposição, temos:

$$a_2x^2+a_1x+a_0=a_2(x-r_1)(x-r_2)=a_2(x^2-xr_1-xr_2+r_1r_2)=a_2x^2-a_2(r_1+r_2)x+a_2(r_1\cdot r_2)$$

Pela identidade de polinômios, temos:

- $a_2=a_2$
- $a_1=-a_2(r_1+r_2)\Rightarrow r_1+r_2=-\dfrac{a_1}{a_2}$
- $a_0=a_2(r_1\cdot r_2)\Rightarrow r_1\cdot r_2=\dfrac{a_0}{a_2}$

Portanto, para uma equação polinomial de grau 2, as Relações de Girard são:

$$r_1+r_2=-\frac{a_1}{a_2} \text{ e } r_1\cdot r_2=\frac{a_0}{a_2}$$

Relações de Girard para equações polinomiais de grau 3

Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação polinomial de grau 3 definida por $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, com $a_3\neq 0$. De acordo com o Teorema da decomposição, temos:

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_3(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=$$
$$=a_3(x^3-x^2r_1-x^2r_2-x^2r_3+xr_1\cdot r_2+xr_1\cdot r_3+xr_2\cdot r_3-r_1\cdot r_2\cdot r_3)=$$
$$=a_3x^3-a_3(r_1+r_2+r_3)x^2+a_3(r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3)x-a_3(r_1\cdot r_2\cdot r_3)$$

Pela identidade de polinômios, temos:

- $a_3=a_3$
- $a_2=-a_3(r_1+r_2+r_3)\Rightarrow r_1+r_2+r_3=-\dfrac{a_2}{a_3}$
- $a_1=a_3(r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3)\Rightarrow r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3=\dfrac{a_1}{a_3}$
- $a_0=-a_3(r_1\cdot r_2\cdot r_3)\Rightarrow r_1\cdot r_2\cdot r_3=-\dfrac{a_0}{a_3}$

Portanto, para uma equação polinomial de grau 3, as Relações de Girard são:

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{a_2}{a_3},\ r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3=\frac{a_1}{a_3} \text{ e } r_1\cdot r_2\cdot r_3=-\frac{a_0}{a_3}$$

Relações de Girard para equações polinomiais de grau *n*

Sejam r_1, r_2, r_3, ..., r_{n-1}, r_n as raízes da equação polinomial de grau *n* definida por $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, com $a_n\neq 0$. Seguindo procedimentos semelhantes aos utilizados para equações polinomiais de graus 2 e 3, obtemos as Relações de Girard para um polinômio de grau *n* qualquer.

- soma das *n* raízes:

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}+r_n=(-1)^1\frac{a_{n-1}}{a_n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas:

$$r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+\ldots+r_{n-1}r_n=(-1)^2\frac{a_{n-2}}{a_n}=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas três a três:

$$r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_2r_5+\ldots+r_{n-2}r_{n-1}r_n=(-1)^3\frac{a_{n-3}}{a_n}=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

Note que a soma dos produtos das raízes tomadas *n* a *n* corresponde ao produto das *n* raízes.

- soma dos produtos das raízes tomadas quatro a quatro:

$$r_1r_2r_3r_4+r_1r_2r_3r_5+r_1r_2r_3r_6+\ldots+r_{n-3}r_{n-2}r_{n-1}r_n=(-1)^4\frac{a_{n-4}}{a_n}=\frac{a_{n-4}}{a_n}$$

$$\vdots$$

- produtos das *n* raízes:

$$r_1r_2r_3r_4\cdot\ldots\cdot r_{n-1}r_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Atividades resolvidas

R15. Determine as raízes da equação $x^3-6x^2+3x+10=0$, sabendo que elas estão em progressão aritmética de razão r.

Resolução

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação. Da Relação de Girard, temos:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{-6}{1}=6$$

Como as raízes formam uma PA de razão r, segue que:

$$\underbrace{x_1}_{x_2-r}+x_2+\underbrace{x_3}_{x_2+r}=6\Rightarrow x_2-r+x_2+x_2+r=6\Rightarrow 3x_2=6\Rightarrow x_2=2$$

Logo, $x_2=2$ é uma das raízes da equação.

Para determinarmos as outras raízes, dividimos a equação por $x-2$.

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 1 & -6 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & \underbrace{-4}_{1\cdot2-6} & \underbrace{-5}_{-4\cdot2+3} & \underbrace{0}_{-5\cdot2+10} \end{array}$$

$$x^3-6x^2+3x+10=0\Rightarrow(x-2)(x^2-4x-5)=0$$

Assim, segue que:

$$x^2-4x-5=0\left\langle\begin{array}{l}x_1=-1\\x_3=5\end{array}\right.$$

Portanto, as raízes são −1, 2 e 5.

R16. Escreva as Relações de Girard para a equação $2x^4+4x^3-3x^2+5x-6=0$.

Resolução

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes da equação.

Pela equação, temos $a_4=2$, $a_3=4$, $a_2=-3$, $a_1=5$ e $a_0=-6$. Logo, das Relações de Girard segue que:

- $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_3}{a_4}=-\frac{4}{2}=-2$
- $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_4+x_2\cdot x_3+x_2\cdot x_4+x_3\cdot x_4=\frac{a_2}{a_4}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$
- $x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_1\cdot x_3\cdot x_4+x_2\cdot x_3\cdot x_4=-\frac{a_1}{a_4}=-\frac{5}{2}$
- $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=(-1)^4\frac{a_0}{a_4}=(-1)^4\frac{-6}{2}=-3$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

60. Determine a soma e o produto dos valores de *x* que tornam a igualdade $3x^3-12x^2+3x+3=0$ verdadeira. soma: 4; produto: −1

61. Escreva as Relações de Girard para o polinômio $q(x)=5x^4+3x^3+2x^2-x-3$, sabendo que x_1, x_2, x_3 e x_4 são suas raízes. Resposta no final do livro.

62. Sabendo que o produto de duas raízes da equação $5x^3-ax^2-\frac{7}{2}x+2=0$ é 1, resolva.

a) Quais são as raízes dessa equação? $-\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$ e 4

b) Calcule o valor de *a*. $a=\frac{77}{4}$

63. Os números reais x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são as raízes do polinômio $p(x)=x^5-\frac{31}{2}x^4+\frac{155}{2}x^3-155x^2+124x-32$ e, nessa ordem, formam uma progressão geométrica de razão igual a x_3. Escreva essa progressão geométrica. $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right)$

64. O produto entre as raízes r_1 e r_2 da equação polinomial $6x^3+ax^2-144x+45=0$ é igual a 1.

a) Qual é o valor de r_1+r_2? $r_1+r_2=\frac{10}{3}$

b) Determine o valor de *a*. $a=25$

65. Considerando que a soma e o produto das raízes r_1, r_2 e r_3 da equação $ax^3+bx^2-\frac{21}{4}x-\frac{9}{4}=0$ são iguais a 1 e $\frac{9}{4}$, respectivamente, calcule o valor de *a* e *b*.
$a=1$; $b=-1$

66. As raízes da equação $x^2+mx+6=0$, em que $m\in\mathbb{Z}$, são r_1 e r_2, com $r_1<r_2$. Calcule os valores de *m*, r_1 e r_2, sabendo que $\frac{r_2}{r_1}+4=\frac{11}{2}$. $r_1=2$; $r_2=3$; $m=-5$

67. Sabendo que a equação $-(m-5)x^3+12x^2-\frac{2x}{9}-\frac{4}{3}=0$ tem duas raízes opostas e que a soma das raízes dessa equação é −6, resolva.

a) Determine o valor de *m*. $m=3$

b) Qual é o produto das raízes da equação? $\frac{2}{3}$

c) Quais são as raízes dessa equação? $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ e −6

68. Os números $-\frac{5}{3}$ e 1 são raízes da equação $6x^3-mx^2+3nx+5=0$, em que *m* e *n* são números inteiros.

a) Calcule a terceira raiz dessa equação. $\frac{1}{2}$

b) Determine os valores de *m* e *n*. $m=-1$ e $n=-4$

69. **Desafio**

Sendo $S=\{a, b, c, d\}$ o conjunto solução da equação $x^4-\frac{49}{12}x^3+\frac{19}{12}x^2+\frac{14}{3}x+1=0$, qual é o valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$? $-\frac{14}{3}$

70. Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $6x^3-8x^2-34x+12=0$. $\frac{118}{9}$

71. Para qual valor de *m* a soma e o produto das raízes de $x^4-(m+3)^2x^3+(5+m)x^2-2mx+2m^2-50=0$ são estritamente positivos? $m<-5$ ou $m>5$

72. Sobre as raízes de $p(x)=8x^4+ax^3-201x^2-bx+c$, com *a*, *b* e *c* reais, sabe-se que a soma de duas delas é igual a zero e que o produto das outras duas é igual a $-\frac{1}{8}$. Calcule o produto de todas as raízes desse polinômio. $\frac{25}{8}$

Multiplicidade de uma raiz

Podemos decompor a equação polinomial $2x^6+14x^5+12x^4-68x^3-38x^2+150x-72=0$ da seguinte maneira:

$$2(x-1)(x-1)(x-1)(x+3)(x+3)(x+4)=0 \Rightarrow 2(x-1)^3(x+3)^2(x+4)=0$$

Temos que as raízes dessa equação são: 1, 1, 1, −3, −3 e −4.

Dizemos que: a raiz 1 tem **multiplicidade** 3 ou que 1 é raiz **tripla** da equação; a raiz −3 tem multiplicidade 2 ou que −3 é raiz **dupla** da equação; a raiz −4 tem multiplicidade 1 ou que −4 é raiz **simples** da equação.

Note que a multiplicidade de cada raiz da equação corresponde ao expoente do fator que contém essa raiz. Por exemplo, a raiz −3 tem multiplicidade 2, e o expoente do fator que a contém é igual a 2. Como a raiz −3 tem multiplicidade 2, a equação inicial é divisível por $(x+3)$ e $(x+3)^2$, porém não é divisível por $(x+3)^3$, por exemplo.

A quantidade de vezes que um número aparece como raiz de uma equação polinomial indica a multiplicidade dessa raiz.

Exemplos

- $x^2-10x+25=0 \Rightarrow (x-5)(x-5)=0 \Rightarrow (x-5)^2=0$

  Como há dois fatores $(x-5)$, dizemos que a raiz 5 tem multiplicidade 2.

- $x^7-11x^6+48x^5-100x^4+80x^3+48x^2-128x+64=0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow (x-2)(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow (x-2)^6(x+1)=0$

  Como há seis fatores $(x-2)$, dizemos que a raiz 2 tem multiplicidade 6, e como há um fator $(x+1)$, dizemos que a raiz −1 é simples.

Atividades resolvidas

R17. Qual é a multiplicidade da raiz 3 na equação $x^4-10x^3+36x^2-54x+27=0$?

Resolução

Para determinarmos a multiplicidade da raiz 3, devemos dividir, sucessivas vezes, o polinômio $p(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x+27$ por $x-3$.

3	1	−10	36	−54	27
3	1	$\underbrace{-7}_{1\cdot3-10}$	$\underbrace{15}_{-7\cdot3+36}$	$\underbrace{-9}_{15\cdot3-54}$	$\underbrace{0}_{-9\cdot3+27}$
3	1	$\underbrace{-4}_{1\cdot3-7}$	$\underbrace{3}_{-4\cdot3+15}$	$\underbrace{0}_{3\cdot3-9}$	
3	1	$\underbrace{-1}_{1\cdot3-4}$	$\underbrace{0}_{-1\cdot3+3}$		
	1	$\underbrace{2}_{1\cdot3-1} \neq 0$			

Note que, no Dispositivo de Briot-Ruffini, as divisões foram exatas (resto 0) nas três primeiras operações, ou seja, a equação possui três raízes iguais a 3 e uma raiz diferente de 3.

Decompondo $p(x)$, segue que:

$$p(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x+27=(x-3)\underbrace{(x^3-7x^2+15x-9)}_{(x-3)(x^2-4x+3)}=(x-3)^2\underbrace{(x^2-4x+3)}_{(x-3)(x-1)}=(x-3)^3(x-1)$$

Portanto, 3 é raiz tripla ou de multiplicidade 3 da equação.

R18. Resolva a equação $x^3-5x^2+8x-4=0$, sabendo que ela possui uma raiz dupla.

Resolução

Como a equação possui uma raiz dupla, indicamos as três raízes por x_1, x_1 e x_2. Das Relações de Girard, temos:

- $x_1+x_1+x_2=-\frac{(-5)}{1}\Rightarrow 2x_1+x_2=5$ (I)
- $x_1\cdot x_1\cdot x_2=-\frac{(-4)}{1}\Rightarrow x_1^2x_2=4$ (III)
- $x_1\cdot x_1+x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_2=\frac{8}{1}\Rightarrow x_1^2+2x_1x_2=8$ (II)

Isolando x_2 em I e substituindo em II, temos:

$$2x_1+x_2=5\Rightarrow x_2=5-2x_1$$

$$x_1^2+2x_1x_2=8\Rightarrow x_1^2+2x_1\cdot(5-2x_1)=8\Rightarrow x_1^2+10x_1-4x_1^2-8=0\Rightarrow -3x_1^2+10x_1-8=0 \left\langle \begin{array}{l} x_1'=2 \\ x_1''=\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Como x_1 é uma raiz dupla, devemos verificar qual valor satisfaz a equação inicial.

- $2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4=0\rightarrow x_1=2$ é raiz
- $\left(\frac{4}{3}\right)^3-5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+8\cdot\frac{4}{3}-4=\frac{4}{27}\neq 0\rightarrow x_1=\frac{4}{3}$ não é raiz

Substituindo $x_1=2$ em I, temos:

$$2\cdot 2+x_2=5\Rightarrow x_2=1$$

Portanto, $S=\{2, 1\}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

73. Determine quais são as raízes da equação $(x-3)^3(x+1)^2(x-5)=0$ e a multiplicidade de cada uma delas. −1 com multiplicidade 2, 3 com multiplicidade 3 e 5 é raiz simples

74. Escreva um polinômio de grau:

a) 4, em que −3 é raiz tripla e −1 é raiz simples
Uma possível resposta: $p(x)=x^4+10x^3+36x^2+54x+27$

b) 5, em que 2 é raiz tripla e 4 é raiz dupla
Uma possível resposta: $p(x)=x^5-14x^4+76x^3-200x^2+256x-128$

75. Qual é o grau de uma equação polinomial em que −1, −4, 3 e 5 são as raízes de multiplicidades 3, 1, 5 e 4, respectivamente? grau 13

76. Determine a multiplicidade da raiz −2 da equação $x^6+6x^5+9x^4-8x^3-24x^2+16=0$. multiplicidade 4

77. Sabendo que x_1 é raiz dupla e que $x_2=-\frac{4}{3}x_1$ é a outra raiz da equação $4x^3+8x^2-60x-144=0$, determine os valores de x_1 e x_2. $x_1=-3$; $x_2=4$

78. Calcule o valor de *m* e de *n*, sabendo que a equação dada por $x^5+7x^4+(m-3)x^3-(2m+n)x^2+(3m-n-10)x-2n-\frac{2}{3}m=0$ admite o zero como raiz dupla. Em seguida, escreva a equação substituindo *m* e *n* por seus respectivos valores.
$m=3$ e $n=-1$; $x^5+7x^4-5x^2=0$

79. Determine o conjunto solução da equação $4x^3-4x^2-64x-80=0$, sabendo que esta admite uma raiz de multiplicidade 2. $S=\{-2, 5\}$

80. A equação $x^6-3x^5+3x^4-x^3=0$ admite duas raízes de multiplicidade 3. Quais são as raízes dessa equação? 1 e 0

81. Sabendo que $S=\{-3, -1, 2\}$ é o conjunto solução de $x^7+2x^6-14x^5-20x^4+65x^3+58x^2-84x-72=0$, calcule a multiplicidade de cada uma das raízes dessa equação. −3 e −1 são raízes de multiplicidade 2, e 2 é raiz de multiplicidade 3

82. O conjunto $S=\{-1, 2\}$ é solução de uma equação polinomial do 4º grau, cujo termo independente é 144. Determine essa equação sabendo que −1 e 2 têm multiplicidade 2.
$36x^4-72x^3-108x^2+144x+144=0$

83. O produto das raízes de uma equação polinomial de 4º grau é 24. Sabendo que uma das raízes tem multiplicidade 3 e ambas são números primos, resolva.

a) Qual é o conjunto solução dessa equação polinomial? $S=\{2, 3\}$

b) Escreva essa equação polinomial.
$x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$

84. No gráfico está representada a função *f*, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, com *a*, *b* e *c* inteiros.

Sabendo que $f(x)$ é divisível por $x^2-8x+16$, resolva.

a) Determine as raízes de $f(x)=0$ e suas respectivas multiplicidades. 4 com multiplicidade 2; −2 é raiz simples

b) Quais são os valores de *a*, *b* e *c*? $a=-6$; $b=0$; $c=32$

Acervo da editora

Raízes complexas

A seguir está enunciado um teorema que trata das raízes complexas não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais, ou seja, das raízes complexas da forma $z=a+bi$, com $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}^*$.

Se o número complexo $z=a+bi$, com $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}^*$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o conjugado de z, dado por $\bar{z}=a-bi$, também é raiz dessa equação.

É possível que uma equação polinomial de coeficientes reais não possua raiz real? Justifique.

Sim, pois uma equação polinomial de coeficientes reais de grau par pode possuir apenas raízes complexas não reais.

Como consequência desse teorema, temos:

- Se uma equação polinomial de coeficientes reais possui uma raiz complexa não real *z* de multiplicidade *m*, então $\bar{z}$ (conjugado de *z*) também é uma raiz complexa não real de multiplicidade *m* dessa equação.
- Uma equação polinomial de coeficientes reais possui um número par de raízes complexas não reais. Portanto, caso o grau de uma equação polinomial de coeficientes reais seja ímpar, essa equação necessariamente possui um número ímpar de raízes reais.

Atividades resolvidas

R19. Determine o grau mínimo de uma equação polinomial de coeficientes reais que possui 2 como raiz simples, $2+i$ como raiz dupla e $1-i$ como raiz tripla.

Resolução

Como a equação polinomial possui coeficientes reais, o conjugado de cada raiz complexa não real também é raiz da equação. Logo:

- 2 é raiz
- $2+i$ é raiz dupla, então $2-i$ também é raiz dupla
- $1-i$ é raiz tripla, então $1+i$ também é raiz tripla

Portanto, a equação polinomial possui no mínimo 11 raízes, ou seja, o grau mínimo da equação é 11.

R20. Resolva a equação $x^4-7x^3+10x^2+26x-60=0$, sabendo que $3+i$ é uma das raízes da equação.

Resolução

Como a equação tem coeficientes reais e $3+i$ é uma raiz, então $3-i$ também é raiz. Dessa maneira, considerando $p(x)=x^4-7x^3+10x^2+26x-60$, temos:

$$p(x)=[x-(3+i)]\cdot[x-(3-i)]\cdot q(x)\Rightarrow p(x)=(x^2-6x+10)\cdot q(x)$$

Para determinarmos $q(x)$ e consequentemente as demais raízes de $p(x)=0$, temos de dividir $p(x)$ por $x^2-6x+10$.

$$\begin{array}{rl}
x^4-7x^3+10x^2+26x-60 & \underline{|\; x^2-6x+10} \\
\underline{-x^4+6x^3-10x^2} \qquad\qquad & \underbrace{x^2-x-6}_{q(x)} \\
-x^3+0x^2+26x-60 & \\
\underline{x^3-6x^2+10x} \qquad\; & \\
-6x^2+36x-60 & \\
\underline{6x^2-36x+60} & \\
0 &
\end{array}$$

Resolvendo a equação $q(x)=0$, temos:

$$q(x)=0\Rightarrow x^2-x-6=0 \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S=\{3+i, 3-i, -2, 3\}$.

R21. Resolva a equação $x^3-7ix^2-15x+9i=0$, sabendo que i é uma de suas raízes.

Resolução

Como i é uma raiz, obtemos as demais raízes dividindo o 1º membro da equação por $x-i$.

$$\begin{array}{c|ccc:c} i & 1 & -7i & -15 & 9i \\ \hline & 1 & \underbrace{-6i}_{1\cdot i-7i} & \underbrace{-9}_{-6i\cdot i-15} & \underbrace{0}_{-9\cdot i+9i} \end{array}$$

Note que os coeficientes $-7i$ e $9i$ da equação não são números reais. Logo, não podemos afirmar que o conjugado da raiz $z=i$ também é raiz da equação.

Dessa maneira, obtemos as outras raízes resolvendo a equação $x^2-6ix-9=0$.

$$\Delta=(-6i)^2-4\cdot 1\cdot(-9)=-36+36=0$$

$$x=\frac{-(-6i)\pm\sqrt{0}}{2\cdot 1}=3i$$

Note que $3i$ é raiz dupla de $x^3-7ix^2-15x+9i=0$.

Portanto, $S=\{i, 3i\}$.

Pesquisando raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros

Existem equações polinomiais de coeficientes inteiros que não admitem raízes racionais, tais como:

- $x^2+2x-1=0$

  cujas raízes são os números não racionais: $-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$
- $x^4-7x^2+10=0$

  cujas raízes são os números não racionais: $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$
- $x^6-2x^5-5x^4+20x^3-29x^2-42x+105=0$

  cujas raízes são os números não racionais: $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{3}$, $1-2i$, $1+2i$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$

O teorema a seguir não nos permite prever se uma equação polinomial de coeficientes inteiros admite raízes racionais. Porém, caso existam, esse teorema determina as possibilidades para essas raízes.

Considere uma equação polinomial de coeficientes inteiros, com $a_n\neq 0$, definida por:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_2x^2+a_1x+\mathbf{a}_0=0$$

Se $\frac{p}{q}$ é raiz dessa equação, tal que $p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Como consequência desse teorema, temos que, se uma equação polinomial apresentar coeficiente dominante igual a 1 $(a_n=1)$ e os demais coeficientes inteiros, essa equação não admite raízes racionais fracionárias. Nesse caso, as raízes podem ser inteiras e divisoras de a_0, porém nem todo divisor de a_0 será raiz da equação.

Capítulo 6

Atividades resolvidas

R22. Resolva a equação $2x^3-3x^2-8x-3=0$.

Resolução

Como os coeficientes da equação são números inteiros, os possíveis valores para as raízes na forma $\frac{p}{q}$ são tais que:

- *p* seja divisor de $-3 \to p=-3$, $p=-1$, $p=1$ ou $p=3$
- *q* seja divisor de $2 \to q=-2$, $q=-1$, $q=1$ ou $q=2$

Desse modo, as possíveis raízes racionais são $\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3\right\}$. Verificando cada uma delas, temos que:

- $x=-3$ não é raiz, pois: $2\cdot(-3)^3-3\cdot(-3)^2-8\cdot(-3)-3=-60$
- $x=-\frac{3}{2}$ não é raiz, pois: $2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-\frac{9}{2}$
- $x=-1$ é raiz, pois: $2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-3=0$
- $x=-\frac{1}{2}$ é raiz, pois: $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3=0$
- $x=\frac{1}{2}$ não é raiz, pois: $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-3=-\frac{15}{2}$
- $x=1$ não é raiz, pois: $2\cdot1^3-3\cdot1^2-8\cdot1-3=-12$
- $x=\frac{3}{2}$ não é raiz, pois: $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-3=-15$
- $x=3$ é raiz, pois: $2\cdot3^3-3\cdot3^2-8\cdot3-3=0$

Portanto, $S=\left\{-1, -\frac{1}{2}, 3\right\}$.

Note que nem todo racional na forma $\frac{p}{q}$ obtido é raiz da equação.

R23. Mostre que a equação polinomial $x^n+7x+2=0$, com $n\in\mathbb{N}$ e $n>1$, não admite raízes racionais.

Resolução

Os possíveis valores para as raízes racionais $\frac{p}{q}$ são tais que:

- *p* seja divisor de $2 \to p=-2$, $p=-1$, $p=1$ ou $p=2$
- *q* seja divisor de $1 \to q=-1$ ou $q=1$

Desse modo, as possíveis raízes racionais são $\{-2, -1, 1, 2\}$. Verificando cada uma delas:

- para $x=-2$:

  $(-2)^n+7\cdot(-2)+2=0 \Rightarrow (-2)^n=12$ (falso)

- para $x=-1$:

  $(-1)^n+7\cdot(-1)+2=0 \Rightarrow (-1)^n=5$ (falso)

- para $x=1$:

  $1^n+7\cdot1+2=0 \Rightarrow 1^n=-9$ (falso)

- para $x=2$:

  $2^n+7\cdot2+2=0 \Rightarrow 2^n=-16$ (falso)

Portanto, a equação não admite soluções racionais.

85. Qual é o grau mínimo da equação de coeficientes reais que admite 2 como raiz dupla e $3-i$ como raiz tripla? grau mínimo: 8

86. Determine o conjunto solução da equação $x^5-3x^4+2x^3-6x^2+x-3=0$, em que $-i$ é raiz dupla. $S=\{-i, i, 3\}$

87. Dada a equação $3x^7-5x^5+3x^4+\frac{5}{7}x^2-x+3=0$, é possível afirmar que ela possui ao menos uma raiz real? Justifique. Sim, pois se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação tem pelo menos uma raiz real.

88. Escreva uma equação polinomial de grau mínimo e coeficientes reais, de modo que $2-i$ seja raiz dupla e 3 seja raiz simples. Uma possível resposta: $x^5-11x^4+50x^3-118x^2+145x-75=0$.

89. Qual é o conjunto solução da equação dada por $x^6+9x^4-81x^2-729=0$, em que $-3i$ é raiz dupla? $S=\{-3, -3i, 3i, 3\}$

90. Os números complexos conjugados *i* e $-i$ são raízes da equação $x^3+(i+1)x^2+(i-6)x-6i=0$? O resultado que você obteve contradiz o teorema que trata das raízes complexas de uma equação polinomial? Justifique. *i* não é raiz e $-i$ é raiz; Não, pois os coeficientes da equação não são todos reais.

91. Sabendo que $1-i$ e 4 são duas das raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais, determine a terceira raiz da equação e os valores de *a*, *b* e *c*. terceira raiz: $1+i$; $a=-6$; $b=10$; $c=-8$

92. O polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e grau 5, em que $p(3)=100$, admite $2-2i$ como raiz de multiplicidade 2, e -1 como raiz simples. Escreva o polinômio $p(x)$. $p(x)=x^5-7x^4+24x^3-32x^2+64$

93. Considere o polinômio de menor grau $q(x)$ de coeficientes reais em que $-4+2i$ e $3+i$ são raízes de multiplicidade 2, *a* é uma raiz real simples e a soma das raízes é igual a 0.

a) Determine o valor de *a*. $a=4$

b) Qual é o grau do polinômio $q(x)$? $gr(q)=9$

c) Fatore o polinômio $q(x)$ em função de suas raízes, sabendo que o coeficiente dominante é 1.
$q(x)=(x+4-2i)^2\cdot(x+4+2i)^2\cdot(x-3-i)^2\cdot(x-3+i)^2\cdot(x-4)$

94. A soma e o produto das duas raízes complexas não reais da equação polinomial $x^3+mx^2+(2-3i)x-n=0$ são, respectivamente, $-i$ e 2.

a) Essa equação pode apresentar duas raízes complexas em que uma não seja o conjugado da outra? Justifique. Resposta no final do livro.

b) Calcule os valores de *m* e *n*. $m=i-3$; $n=6$

c) Quais são as raízes dessa equação polinomial? $-2i$, i e 3

95. Resolva as equações.

a) $5x^3-31x^2-29x+7=0$ $S=\left\{-1, \frac{1}{5}, 7\right\}$

b) $4x^3+4x^2-x-1=0$ $S=\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

96. Os valores numéricos das dimensões de um paralelepípedo reto retângulo, em metros, são dados pelas raízes da equação polinomial $12x^3-19x^2+8x-1=0$. Qual é o volume desse paralelepípedo? $\frac{1}{12}$ m³

97. A equação $x^5-16x^4+53x^3-64x^2+52x-48=0$ admite a raiz complexa $-i$ e uma raiz real de multiplicidade 2.

a) Essa equação admite quantas raízes complexas não reais? 2

b) Determine o conjunto solução dessa equação, sabendo que 12 é uma raiz. $S=\{-i, i, 2, 12\}$

98. Sabendo que a equação $3x^3-x^2-6x+2=0$ é divisível pelo binômio $(x-m)$, com $m \in \mathbb{Q}$, determine o valor de *m*. $m=\frac{1}{3}$

99. Em relação às raízes de $p(x)=4x^3+4x^2-x-1$, é correto afirmar que: c

a) uma raiz é irracional

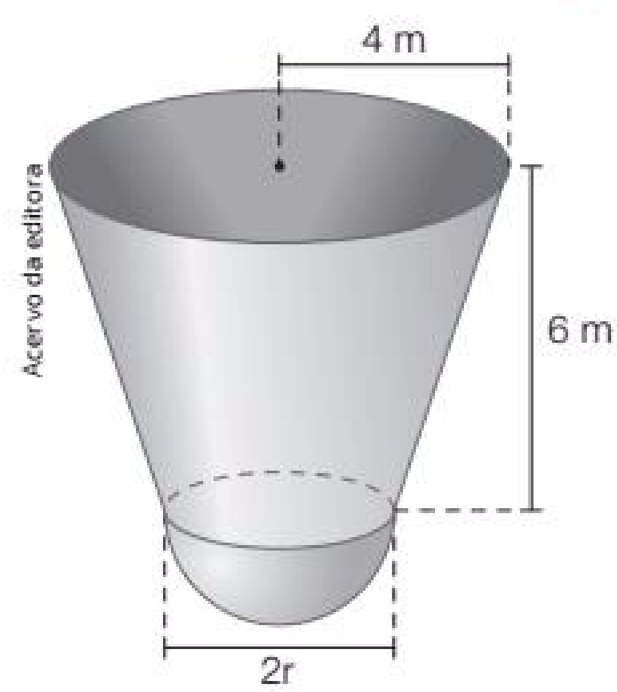
b) duas são imaginárias puras

c) as três são racionais

d) nenhuma é racional

e) apenas uma é racional

100. Um reservatório cuja capacidade é $\frac{184\pi}{3}$ m³ tem a forma de uma semiesfera acoplada a um tronco de cone, como indicado na figura. Qual é a medida do raio da semiesfera? 2 m



101. Quais são as raízes racionais do polinômio dado por $p(x)=4x^6-3x^5-2x^4-3x^3-x^2+6x-1$? 1 e -1

102. Sendo *a*, *b* e *c* as raízes de $p(x)=x^3+x^2-7x-15$, determine o polinômio $h(x)$ cujas raízes são $a+2$, $b+2$, $c+2$ e $h(0)=-5$. $h(x)=x^3-5x^2+x-5$

103. A equação $x^3-15x^2-mx+21n=0$, com *m* e *n* inteiros, admite como raízes três números inteiros ímpares e consecutivos.

a) Determine as raízes da equação. 3, 5 e 7

b) Quais são os valores de *m* e *n*? $m=-71$; $n=-5$

Capítulo 6

Ser consciente

Menos crianças, mais idosos

Em 1950, a quantidade de pessoas com 60 anos ou mais no Brasil correspondia a cerca de 5% da população. Em 2010, esse percentual era de aproximadamente 10% e, projeções sugerem que, em 2050, chegue aos 30%.

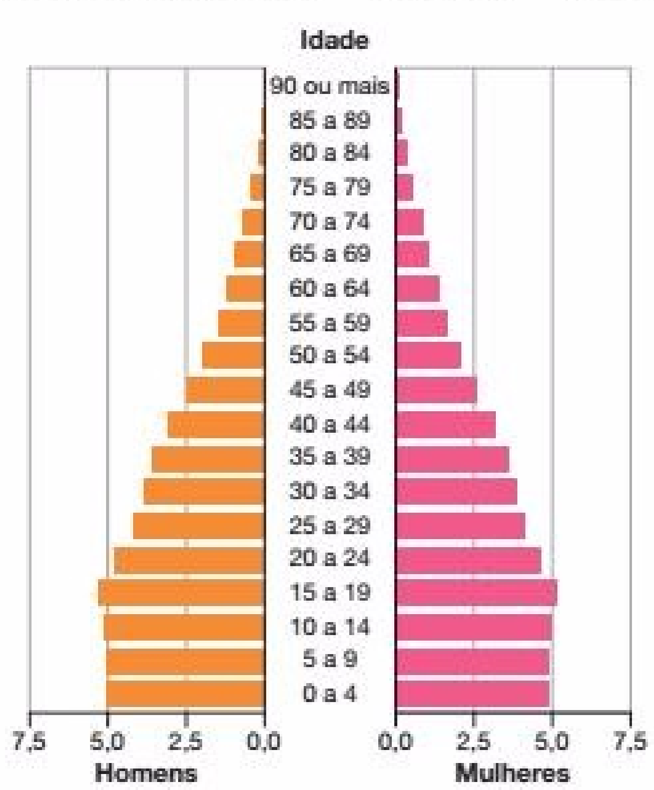
O envelhecimento da população brasileira está associado, dentre outros fatores, ao aumento da esperança de vida ao nascer, que saltou de cerca de 69,8 anos em 2000 para aproximadamente 75,4 anos em 2015, e à redução da taxa de fecundidade.

As projeções também mostram uma tendência à redução da população economicamente ativa (de 15 a 59 anos), o que pode trazer escassez de trabalhadores, lentidão no crescimento econômico e desequilíbrio no sistema previdenciário.

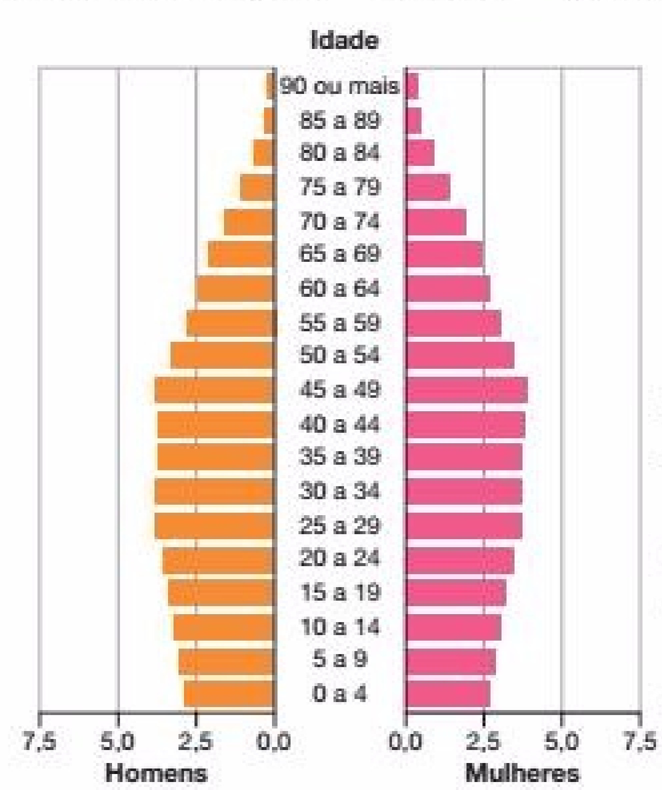
Em uma perspectiva mais otimista, devemos enxergar o aumento da esperança de vida como algo positivo, uma vez que é consequência de avanços em saúde pública, educação e desenvolvimento econômico. Com planejamento adequado e adotando-se estratégias, como alterações nas regras de aposentadoria, treinamento e oportunidades para trabalhadores mais idosos, os impactos citados podem ser minimizados.

Mudanças na pirâmide etária brasileira

Pirâmide etária – Brasil – 2000



Pirâmide etária – Brasil – 2030*



*Projeção

Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html>. Acesso em: 23 dez. 2015.

Fontes de pesquisa: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=4&uf=00>. Acesso em: 18 jan. 2016.
<http://esa.un.org/unpd/wpp/DataQuery>. Acesso em: 18 jan. 2016.
<http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv41229.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2016.
<http://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/esperancas-de-vida-ao-nascer.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.
<http://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-de-fecundidade-total.html>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Respeito ao idoso

O Estatuto do Idoso apresenta diversos direitos que devem ser respeitados. Independentemente disso, devemos ter atitudes no dia a dia que contribuam para uma vida melhor dos idosos.

Disponibilize o seu acento para um idoso, caso não haja outros disponíveis.

O idoso tem direito de exercer atividade profissional, respeitando suas condições físicas, intelectuais e psíquicas.

Analisando com cidadania

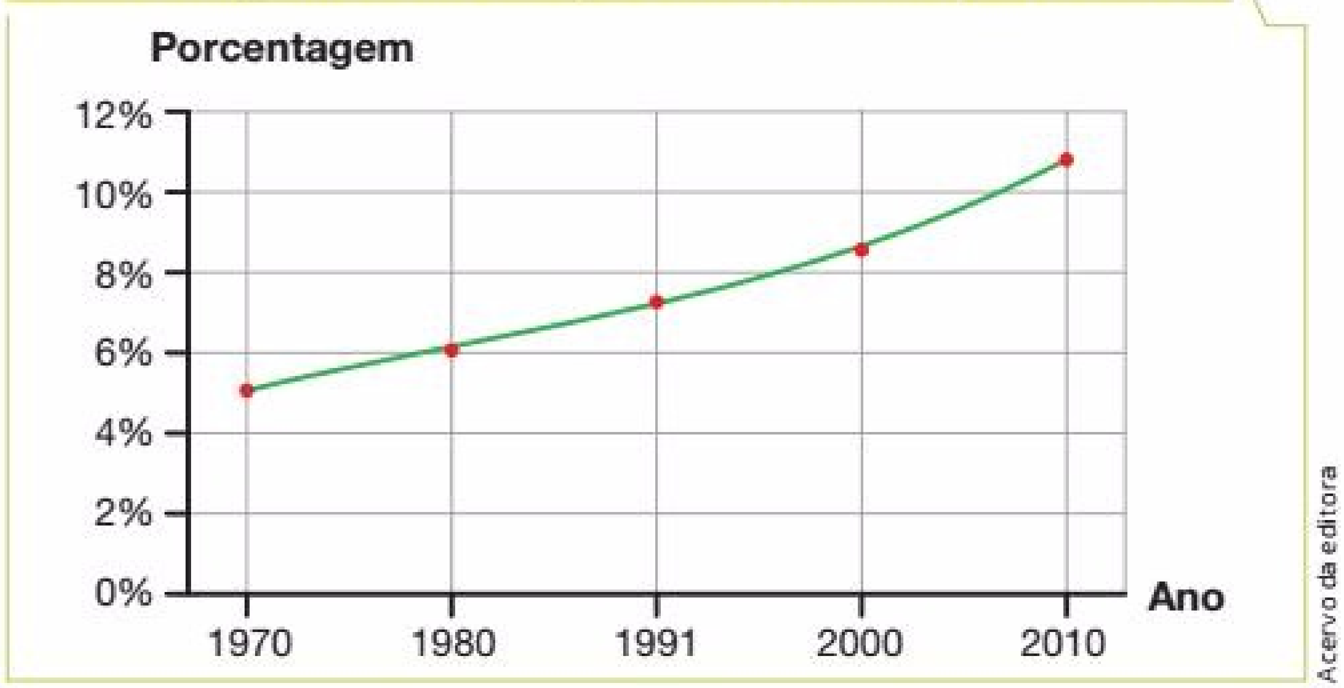
a) Você já presenciou alguma situação em que um idoso não teve seus direitos respeitados? Converse sobre isso com o professor e os colegas. Resposta pessoal.

b) Cite atitudes que podemos ter para contribuir para uma vida melhor dos idosos. Algumas possíveis respostas: ceder lugar em assentos ou em filas; auxiliar na travessia de ruas; visitar casas de repouso para idosos.

Analisando com Matemática

c) No gráfico a seguir estão representadas as porcentagens da população de idosos (60 anos ou mais) no Brasil em alguns censos realizados pelo IBGE, e também o modelo polinomial ajustado a estes dados, cuja equação é dada por $p(x) = 0,0006x^3 - 0,0037x^2 + 0,0174x + 0,0361$ (considere que 1970 corresponde à $x = 1$, 1980 à $x = 2$, 1991 à $x = 3$, 2000 à $x = 4$, 2010 à $x = 5$, 2020 à $x = 6$ e 2030 à $x = 7$).

Porcentagem de idosos (60 anos ou mais) no Brasil



Fonte: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 23 dez. 2015.

Veja mais informações sobre pirâmides etárias, esperança de vida e taxa de fecundidade da população brasileira no *site*:
- <http://tub.im/wczgmk> (acesso em: 6 abr. 2016)

- Qual o grau do polinômio apresentado? grau 3
- O que significa $p(6)$? Resposta esperada: a porcentagem da população de idosos projetada para 2020.
- Estime a população de idosos para 2030 por meio do modelo polinomial apresentado. Para isso, utilize uma calculadora. 18,24%

5% das vagas nos estacionamentos públicos e privados devem ser asseguradas aos idosos.

O atendimento preferencial imediato e individualizado é direito do idoso.

Capítulo 6

Acessando tecnologias

Nesta seção, indicamos algumas dentre as diversas possibilidades de utilização do computador na abordagem de temas matemáticos. Nesse sentido, sugerimos o trabalho com programas computacionais especializados que contribuem para a visualização e verificação de propriedades e auxiliam na resolução de problemas, uma vez que permitem construções e efeitos pouco viáveis ou impossíveis de serem realizados apenas com lápis, papel e instrumentos de medição e desenho.

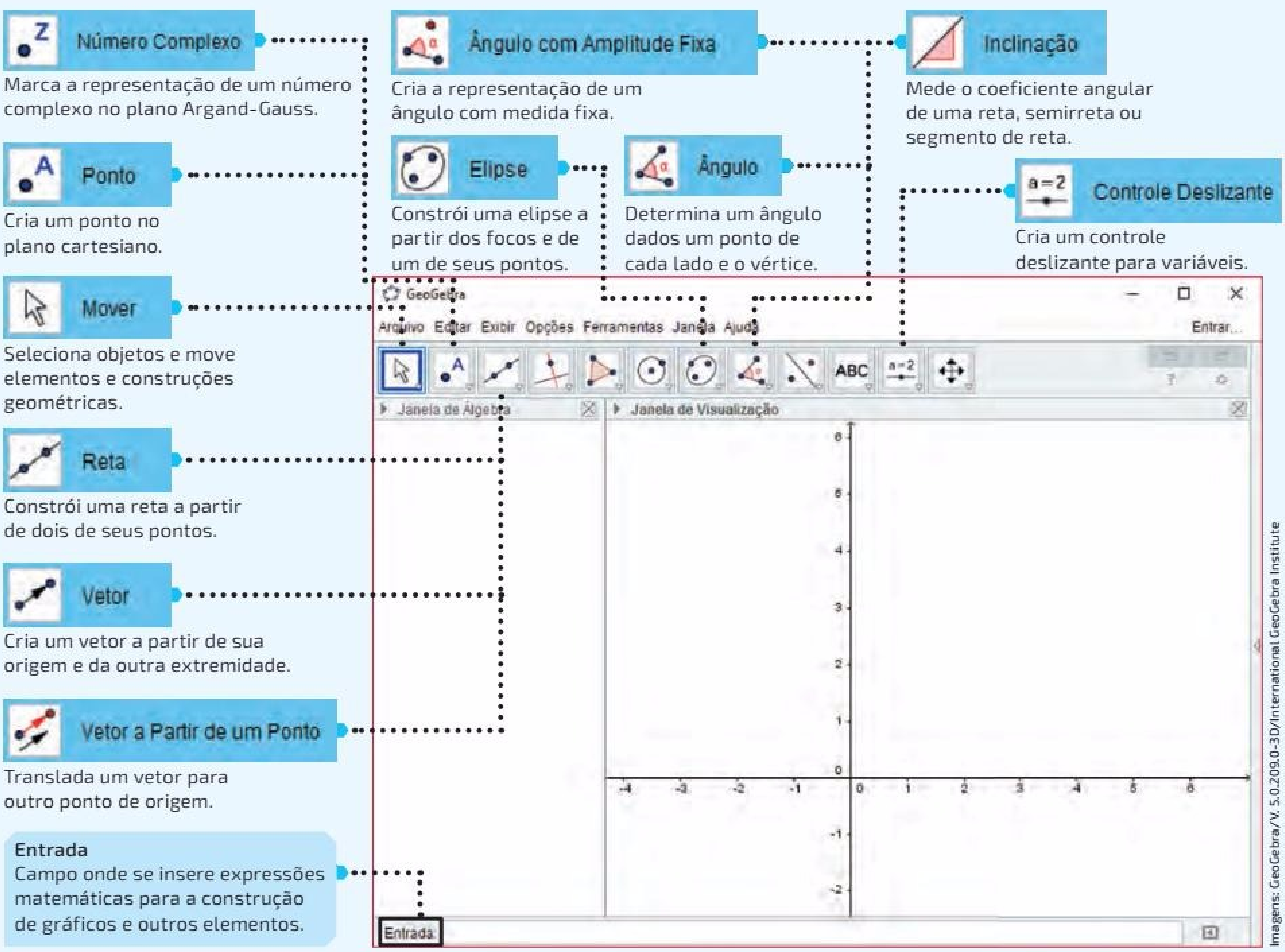
Convidamos você para conhecer e explorar o uso desses recursos computacionais e experimentar, de diferentes maneiras, os conteúdos matemáticos presentes em seu livro, procurando tornar o estudo mais interessante e dinâmico.

GeoGebra

O *GeoGebra* é um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de geometria e álgebra. Nesse programa, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferências e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Na Janela de Álgebra, podemos visualizar a expressão algébrica associada a cada elemento apresentado na Janela de Visualização.

Utilizado em escolas e universidades de diversos países, o *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em português. Você pode fazer o *download* no *site* <http://tub.im/99tt4j>.

Observe a representação do *GeoGebra* e algumas de suas funções.



Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

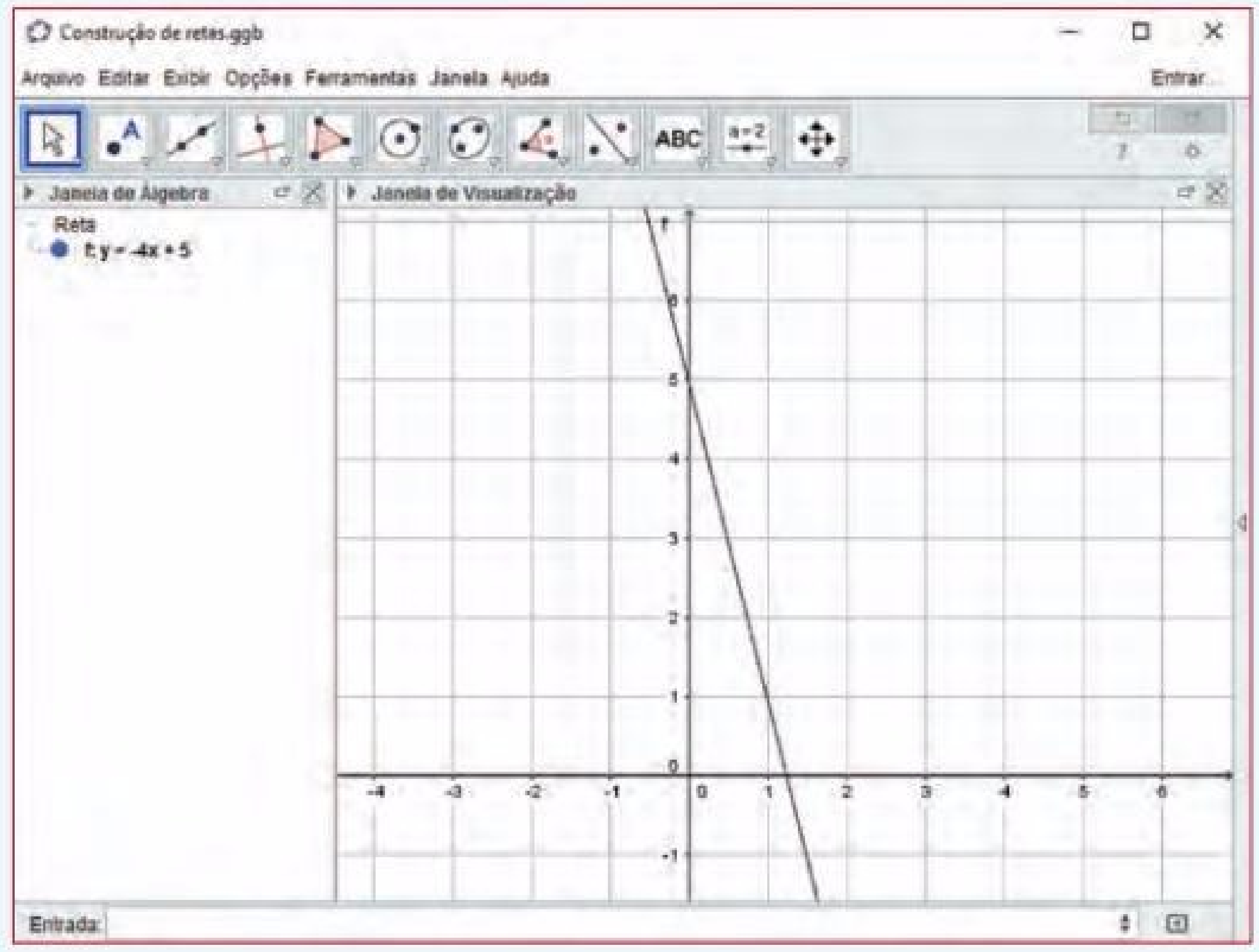
Construção de retas

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 2.

A seguir apresentaremos diferentes maneiras de construir retas, utilizando o programa computacional *GeoGebra*.

Exemplo 1: Construir no plano cartesiano a reta de equação $y = -4x + 5$.

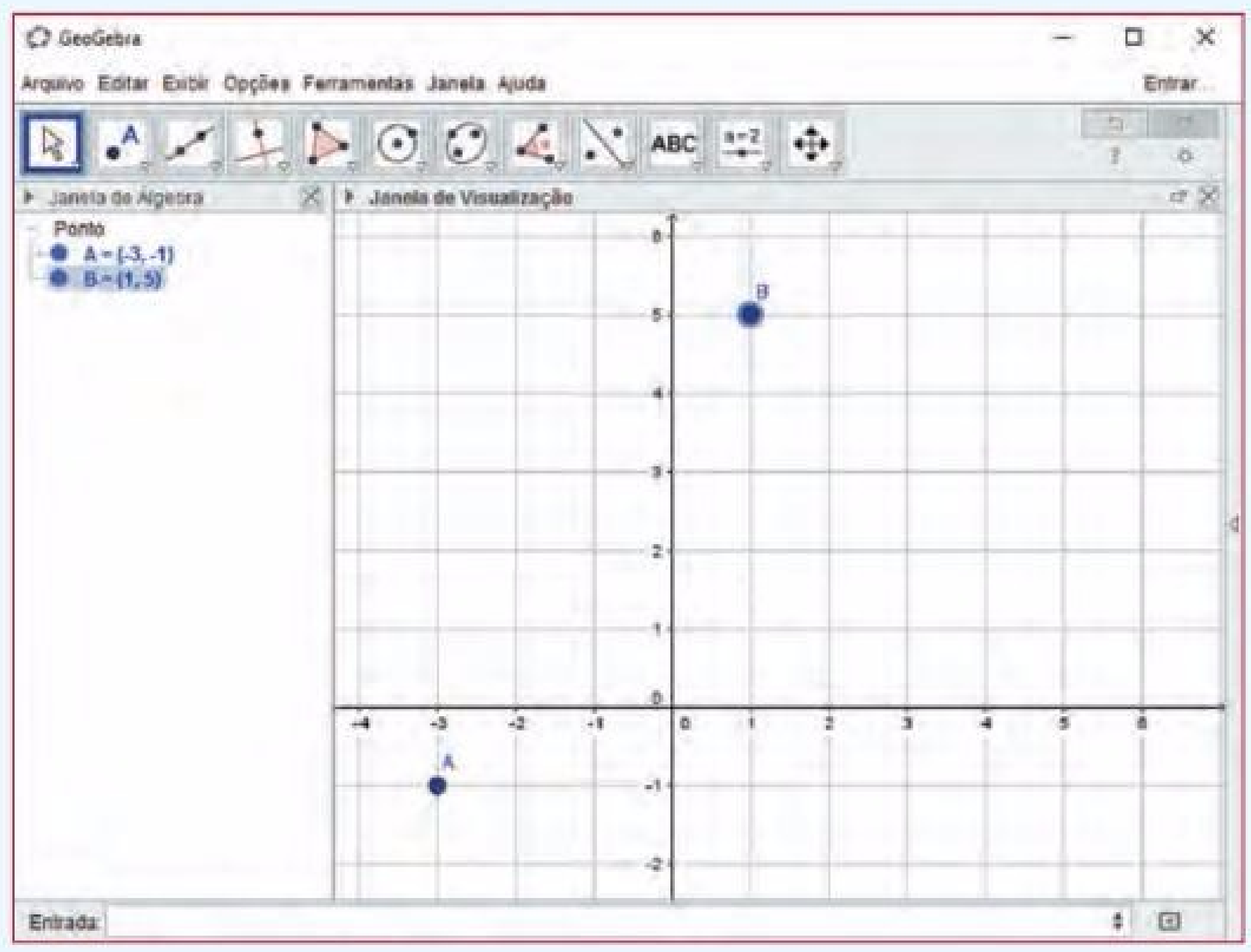
Digite a equação da reta no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**.



Para exibir a malha quadriculada, clique com o botão direito do *mouse* sobre uma área do plano cartesiano sem objetos e selecione a opção **Malha**.

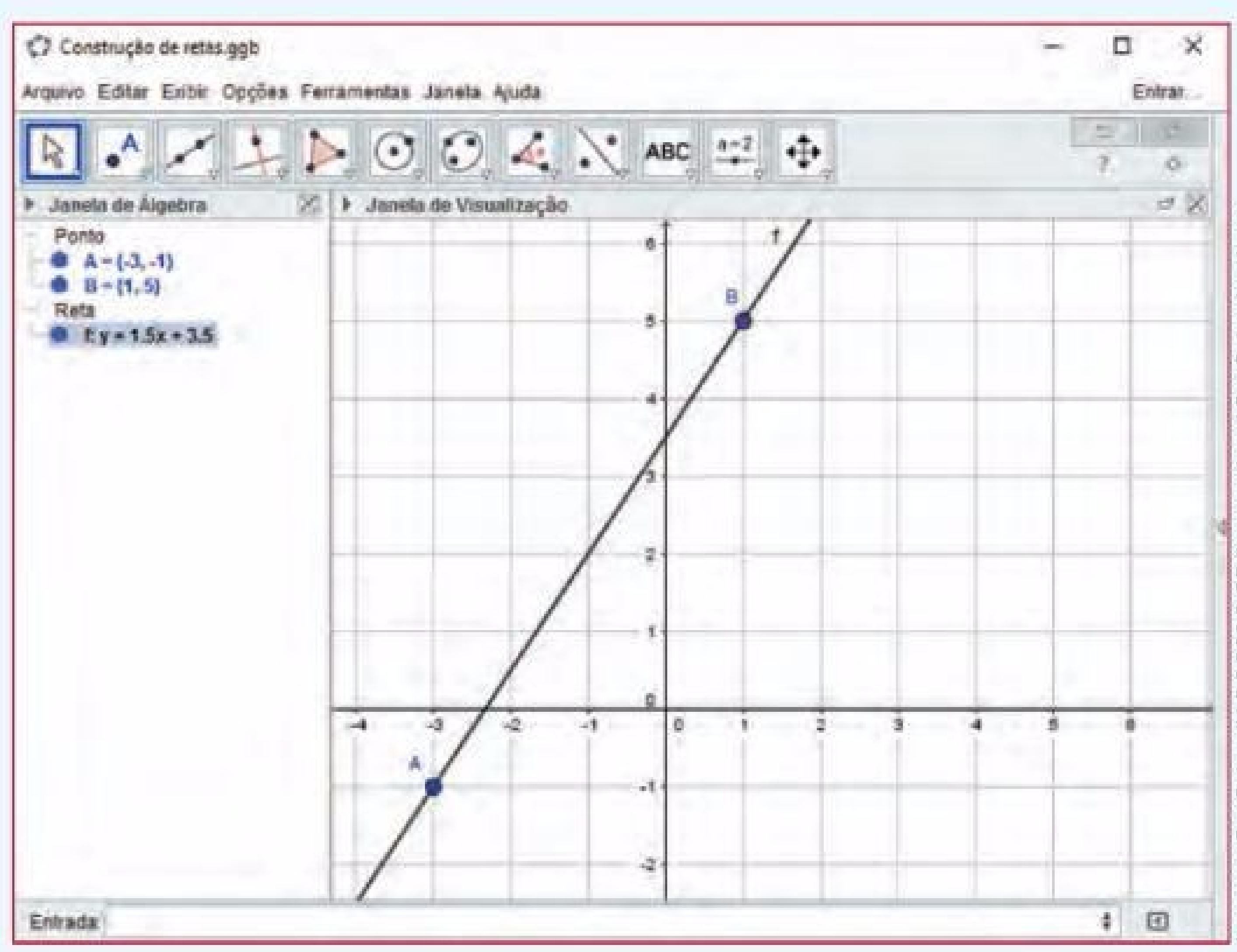
Exemplo 2: Construir uma reta que passa pelos pontos $A(-3, -1)$ e $B(1, 5)$.

1. Acesse o menu **Arquivo** e escolha a opção **Nova Janela** para abrir um novo arquivo. Em seguida, crie o ponto *A*, digitando $A = (-3, -1)$ no campo **Entrada** e pressionando a tecla **Enter**. De maneira semelhante, marque o ponto *B*.



2. Selecione a opção **Reta** no botão  e clique sobre um ponto e depois sobre o outro. Observe que a equação da reta aparece na **Janela de Álgebra**.

   Para exibi-la na forma reduzida, clique com o botão direito do *mouse* sobre a equação e escolha a opção **Equação** $y = ax + b$.



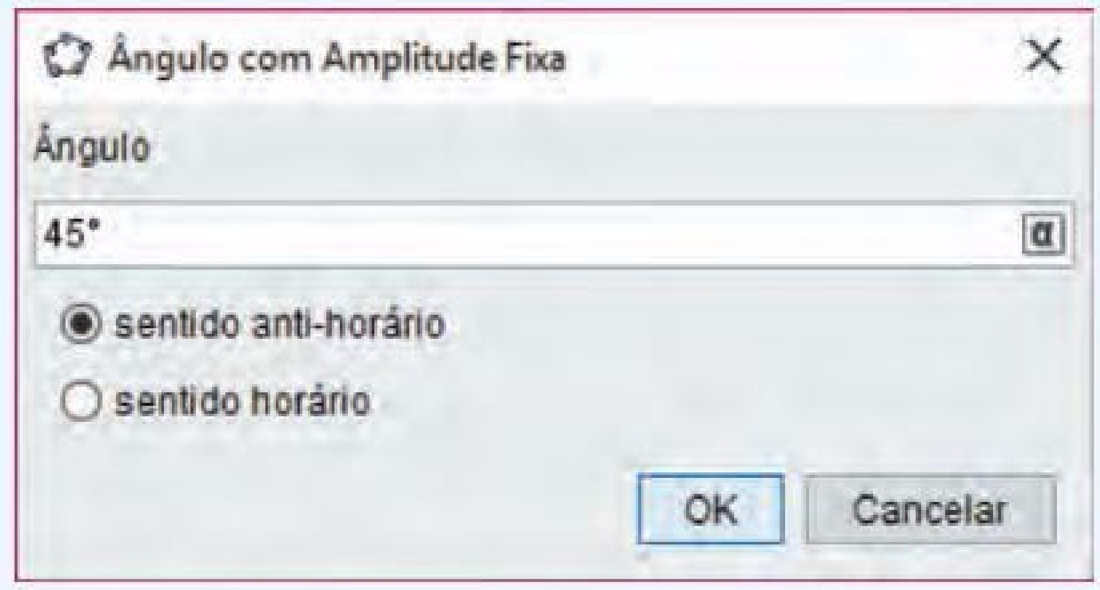
Imagens: GeoGebra/ V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Acessando tecnologias

Exemplo 3: Construir uma reta que passa pelos pontos $C(4, -2)$ e tenha inclinação de 45°.

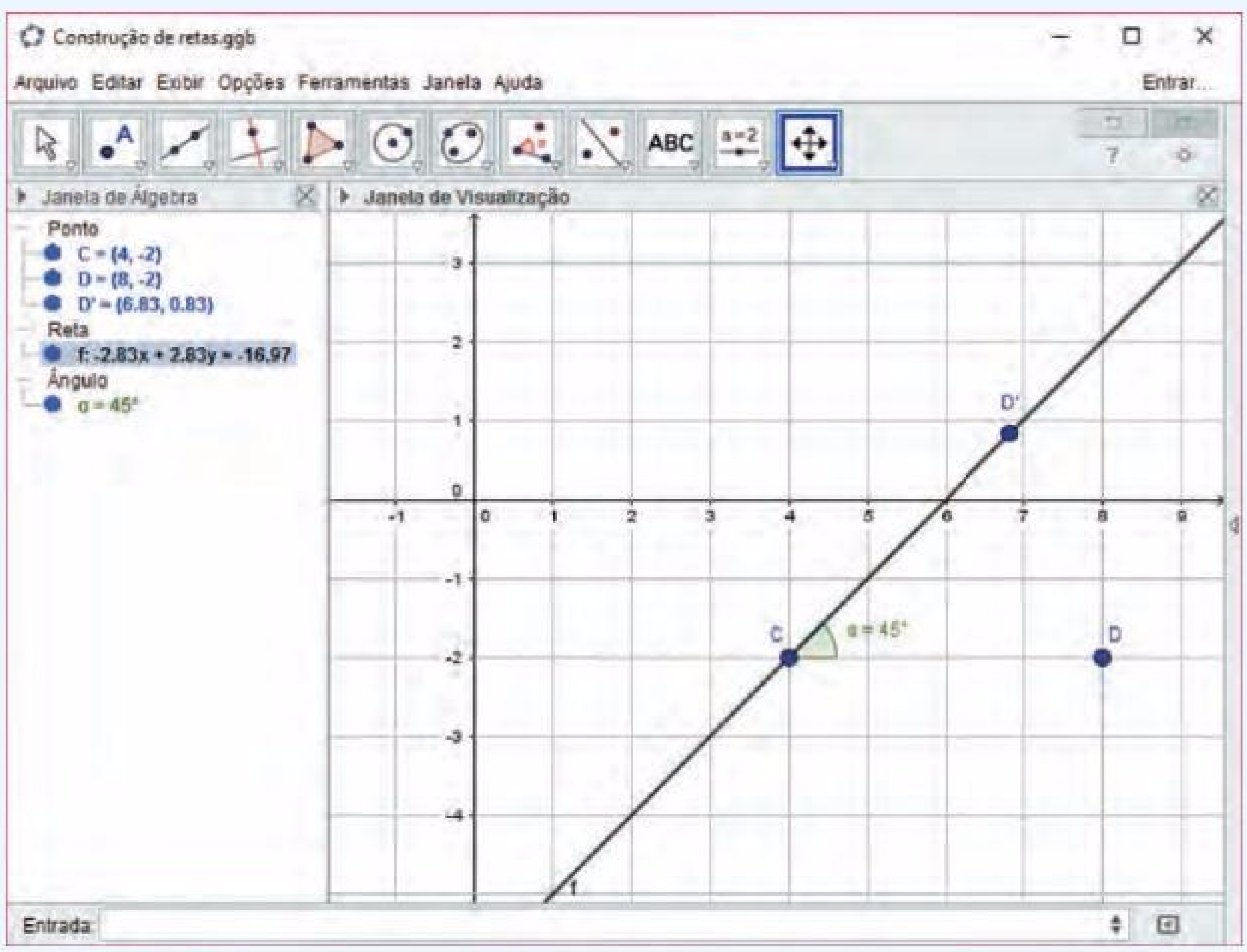
⟨1⟩ No menu **Arquivo**, escolha a opção **Nova Janela** para abrir um novo arquivo. Em seguida, crie o ponto *C*, digitando $C = (4, -2)$ no campo **Entrada** e pressionando a tecla **Enter**. Crie um ponto *D* com a mesma ordenada de *C* e abscissa diferente. Abaixo, escolhemos o ponto $D(8, -2)$.

Selecione a opção **Ângulo com Amplitude Fixa**, clicando no canto direito do botão . Clique sobre *D* e *C*, nesta ordem, para abrir a janela ao lado. Preencha 45° em **Ângulo**, marque **sentido anti-horário** e clique em **OK** para visualizar a representação do ângulo $(D\hat{C}D' = 45°)$.

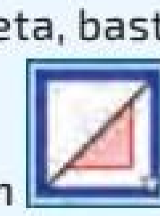


⟨2⟩ Selecione a opção **Reta** em  e clique sobre os pontos *C* e D'.

Observe que a equação da reta aparecerá na **Janela de Álgebra**.



Imagens: GeoGebra/ V. 5.0.209.0-3D/ International GeoGebra Institute

Em todos os exemplos, para visualizar o coeficiente angular da reta, basta clicar no canto inferior direito do botão , selecionar a opção **Inclinação** em  e clicar sobre a reta.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Construa no *GeoGebra* uma reta:

a) de equação $y = \frac{3}{4}x - 5$; Diga aos alunos que representamos as frações no *GeoGebra* utilizando a barra (/) e a fração entre parênteses. Assim, a equação do item **a** deve ser digitada $y = (3/4)x - 5$.

b) que passe pelos pontos: $(3, -2)$ e $(1, 4)$; $y = -3x + 7$

c) que passe pelo ponto $(-7, 1)$ e tenha inclinação de 135°. $y = -x - 6$

Nos itens **b** e **c**, indique as equações na forma reduzida.

Construção das cônicas

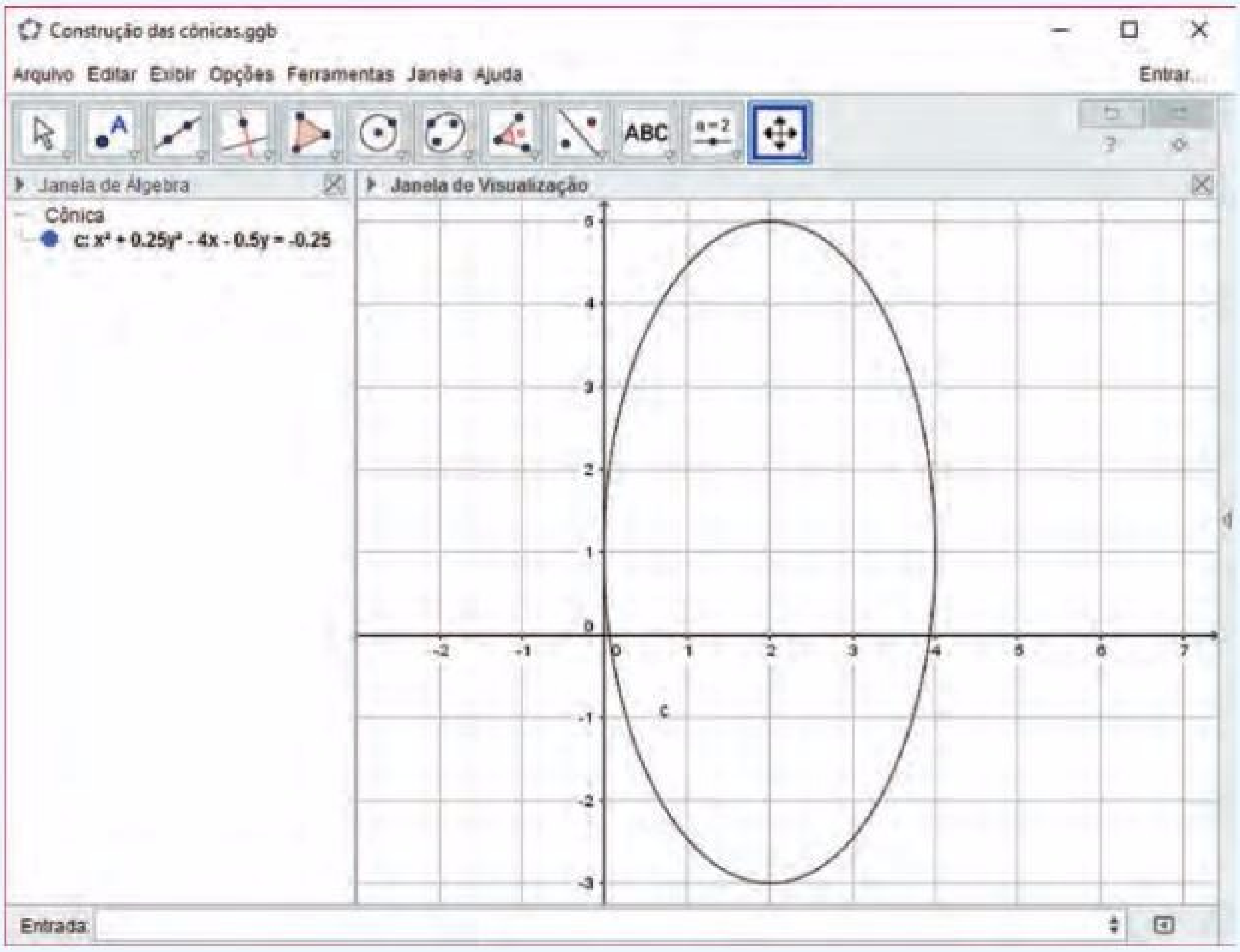
Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 3.

No programa computacional *GeoGebra* há construções geométricas que podem ser realizadas de diferentes maneiras. Pode-se, por exemplo, utilizar diferentes conceitos algébricos ou geométricos para construir o mesmo objeto. Como exemplo, veremos a seguir duas maneiras de construir uma elipse.

Exemplo 1: Construir no plano cartesiano a elipse cuja equação é dada por $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$.

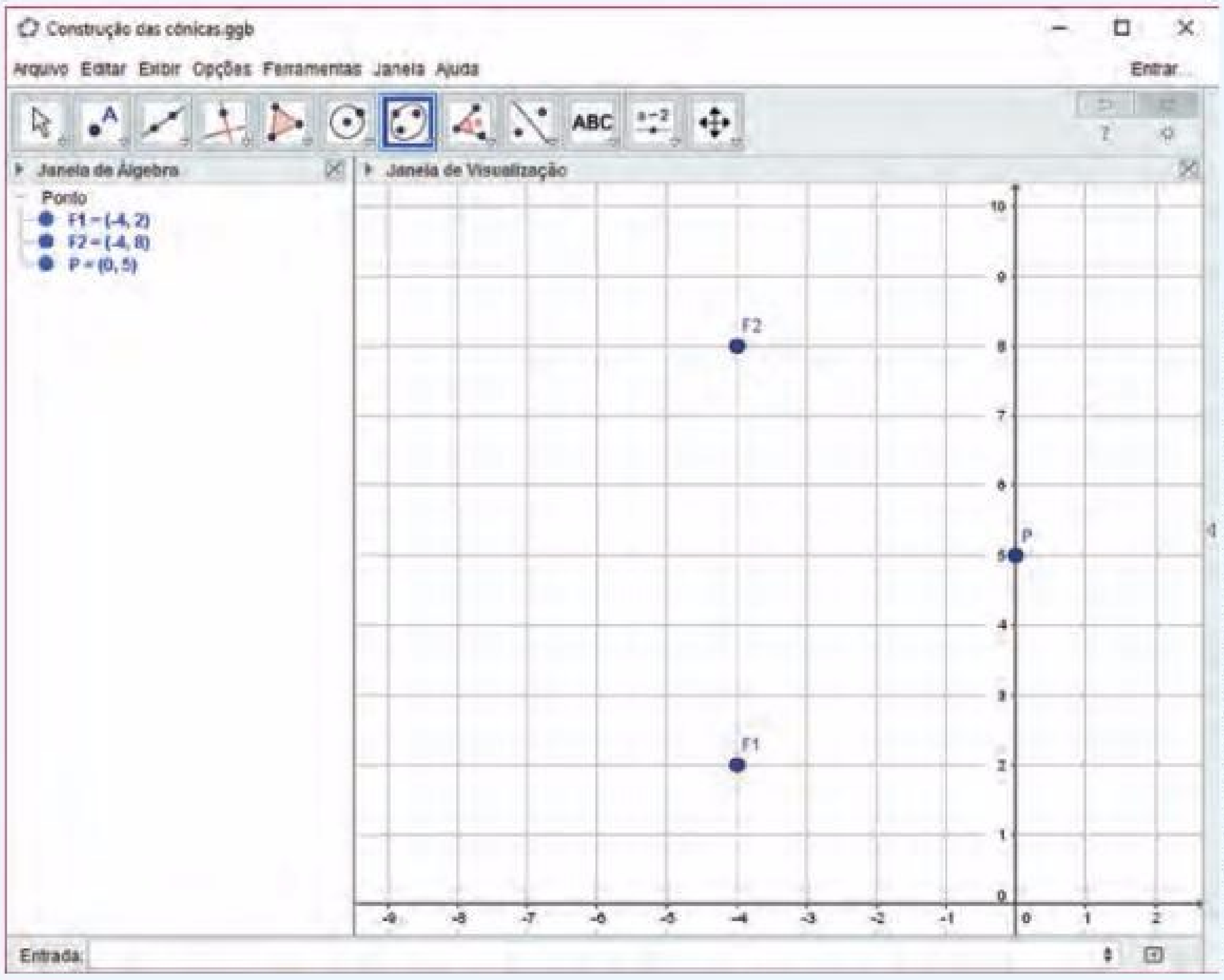
Digite a equação da elipse no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**.

Para isso, utilize o acento circunflexo (^) para inserir os expoentes e a barra (/) para as frações. Ou seja, a equação deverá ser digitada da seguinte maneira: $(x-2)^\wedge 2/4+(y-1)^\wedge 2/16=1$



Exemplo 2: Construir uma elipse com focos $F_1(-4,2)$ e $F_2(-4,8)$ e que passe pelo ponto $P(0,5)$.

1. Acesse o menu **Arquivo** e escolha a opção **Nova Janela** para abrir um novo arquivo. Em seguida, crie o ponto F_1 digitando $F1=(-4,2)$ no campo **Entrada** e pressionando a tecla **Enter**. Repita o procedimento para marcar os pontos F_2 e *P*.

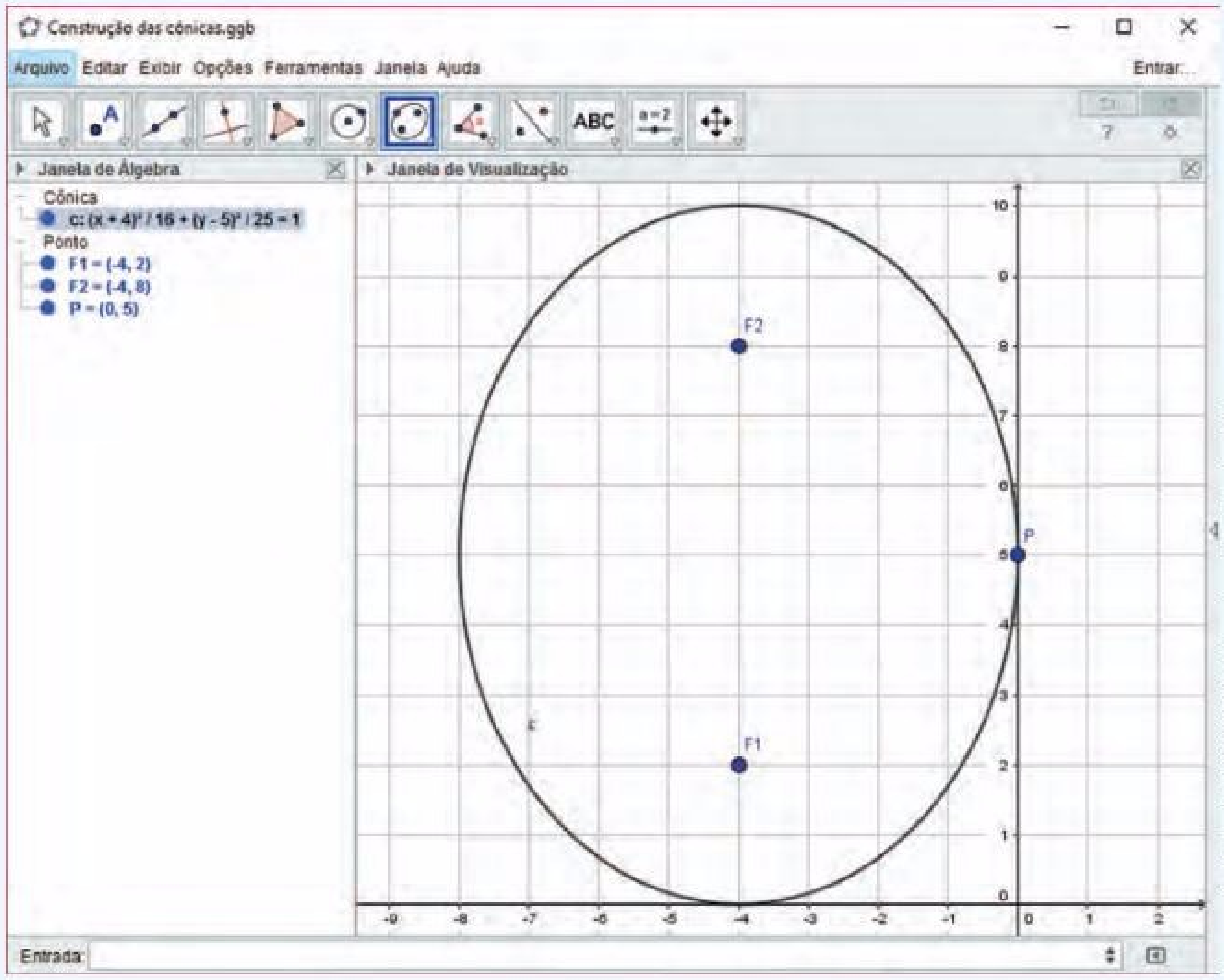


Imagens: GeoGebra/ V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Acessando tecnologias

2 Selecione o botão  e clique sobre os focos e o ponto P (pertencente à elipse), nesta ordem, para construir a elipse no plano cartesiano.

Note que a equação da elipse aparece na **Janela de Álgebra**. Para exibi-la na forma reduzida, clique com o botão direito do *mouse* sobre a equação e escolha a opção **Equação** $(x-m)^2/a^2+(y-n)^2/b^2=1$. Assim, obtemos a equação reduzida da elipse construída.



Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/International GeoGebra Institute

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Construa, no *GeoGebra*, a elipse de equação:

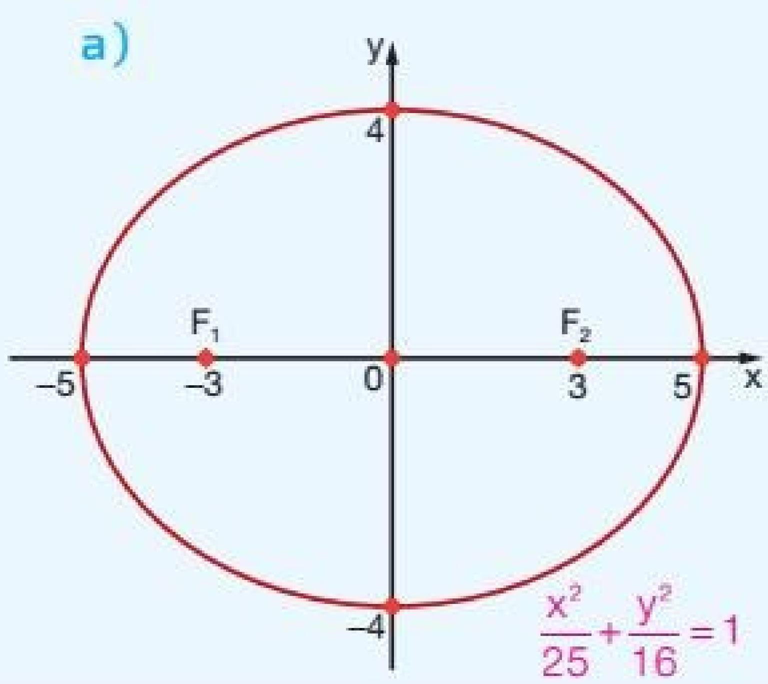
a) $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

b) $\dfrac{(x-2)^2}{8}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$

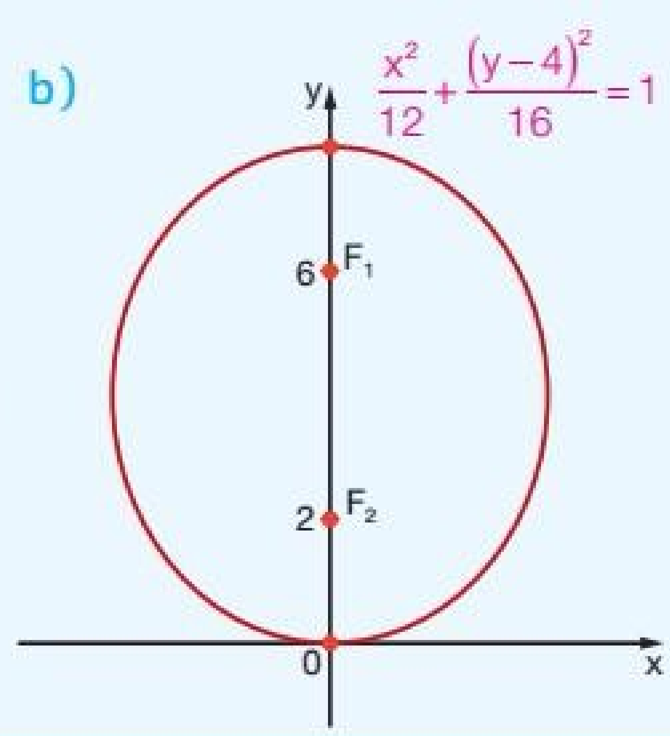
c) $15x^2+32y^2=100$

2. Reproduza no *GeoGebra* a elipse representada em cada item e determine sua equação reduzida.

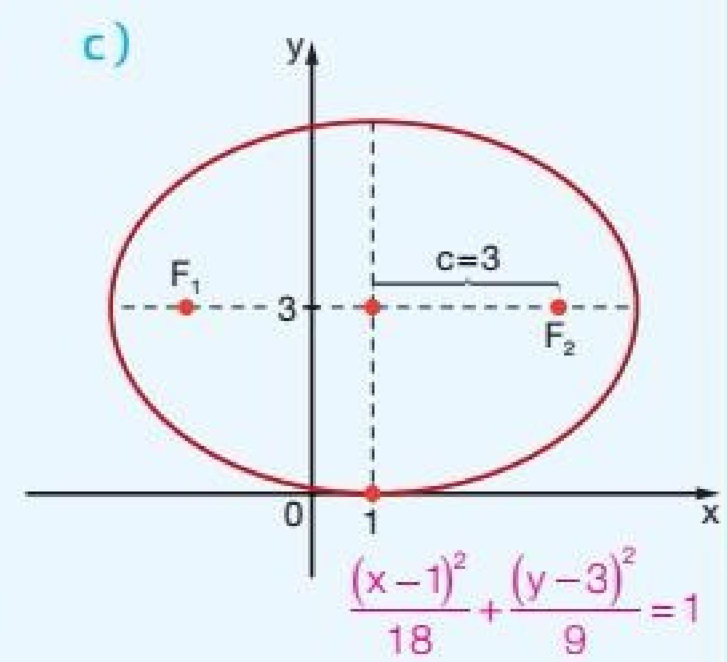
a)



b)



c)



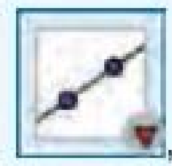
Ilustrações: Acervo da editora

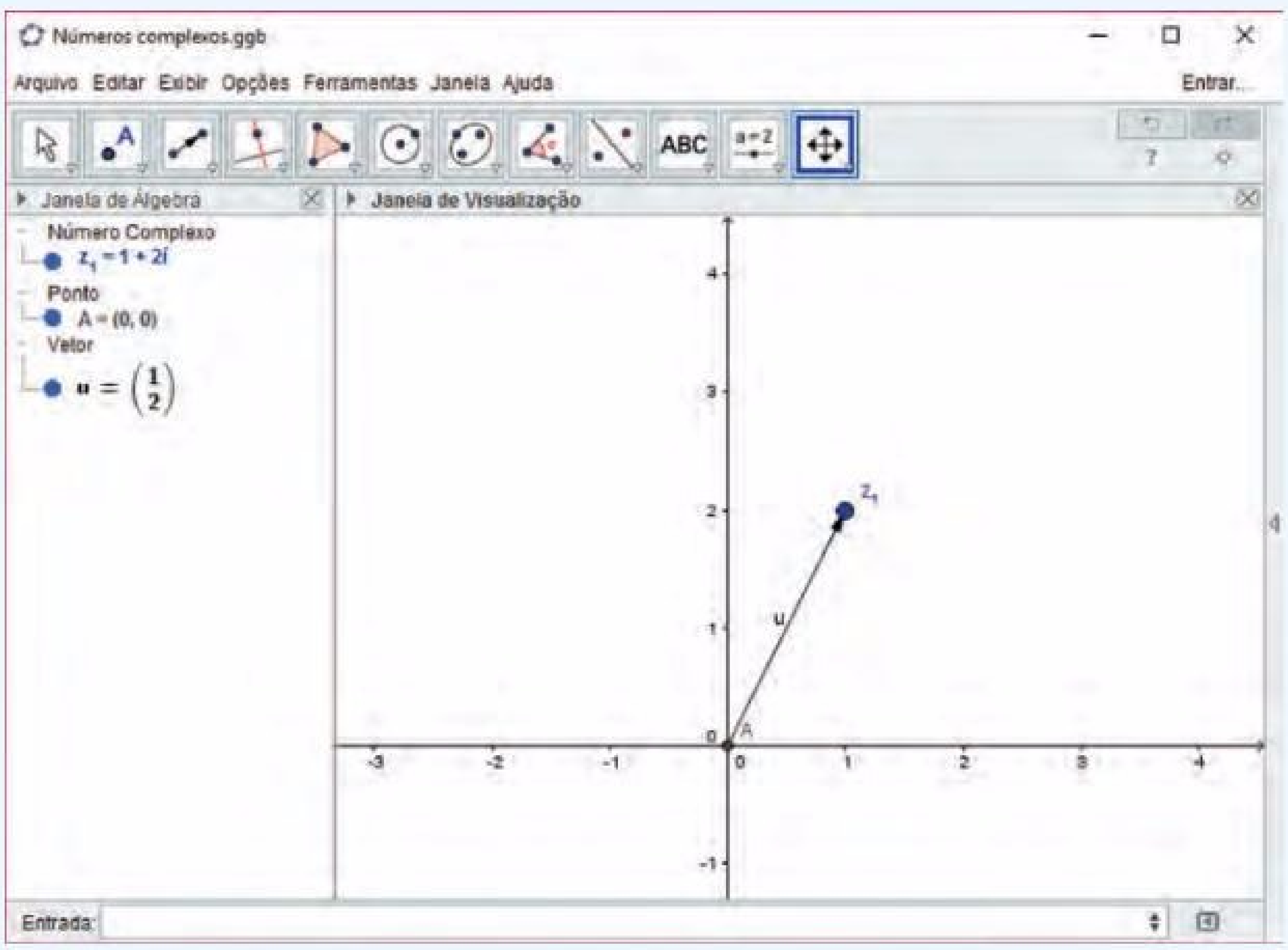
Números complexos

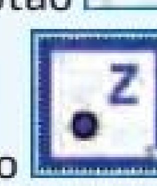
Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 5.

No *GeoGebra*, é possível realizar cálculos com números complexos e representá-los geometricamente. Para isso, podemos considerar o plano cartesiano da **Janela de Visualização** como o plano de Argand-Gauss. No exemplo a seguir, representaremos geometricamente o produto de dois números complexos.

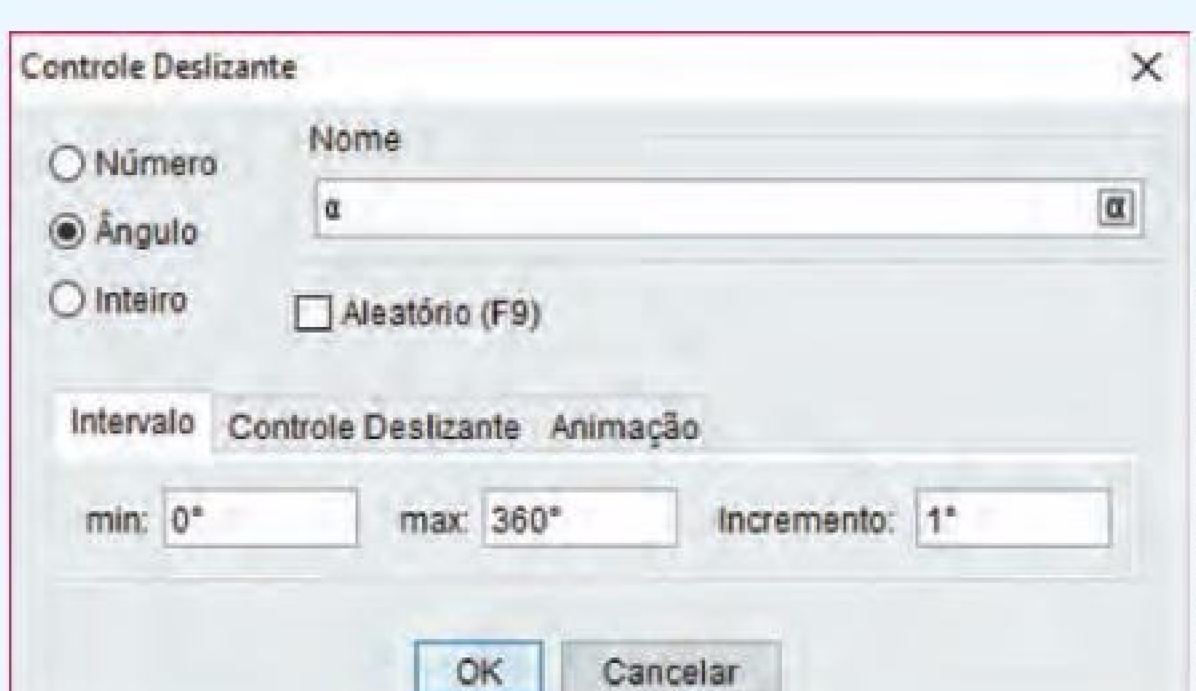
1. Para inserir um número complexo, digite, no campo **Entrada**, uma expressão numérica qualquer contendo a unidade imaginária (i) como, por exemplo, 1+2i, e pressione **Enter**. Note que o número $z_1 = 1+2i$ é exibido na Janela de Álgebra e é representado por um ponto no plano cartesiano.

   Depois, clique no canto inferior direito do botão , selecione a ferramenta **Vetor** em  e crie um vetor com a origem na origem do sistema cartesiano e a outra extremidade no ponto cujo afixo é z_1.



Podemos também inserir um número complexo utilizando a ferramenta **Número Complexo**, que pode ser acessada clicando no canto inferior direito do botão  e selecionando .

2. Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** no botão  e dê um clique na **Janela de Visualização**. Aparecerá uma caixa na qual deve ser selecionada a opção **Ângulo**. Na sequência, verifique se o intervalo começa em 0° e termina em 360° e se o incremento é 1°, e clique em **OK**. Com isso, criamos a variável α, cujo valor pode ser alterado pelo controle deslizante, variando de 0° a 360°.

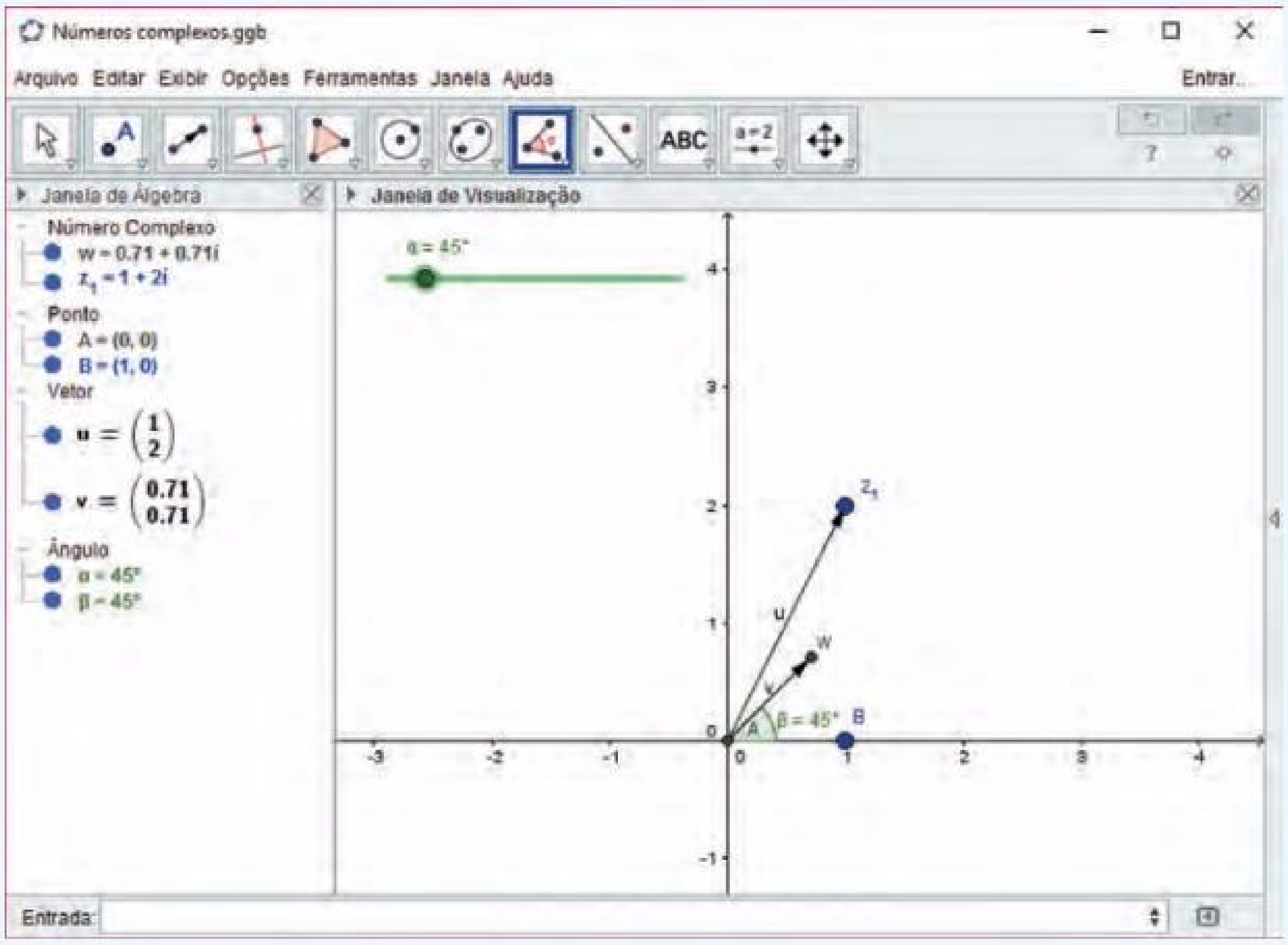


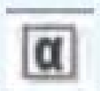
Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/ International GeoGebra Institute

〈3〉 Insira um número complexo w de módulo igual a 1 e argumento α. Para isso, digite no campo **Entrada** $w = \cos(\alpha) + i * \sin(\alpha)$ e pressione a tecla **Enter**.

De maneira semelhante à etapa **1**, trace o vetor correspondente a w.

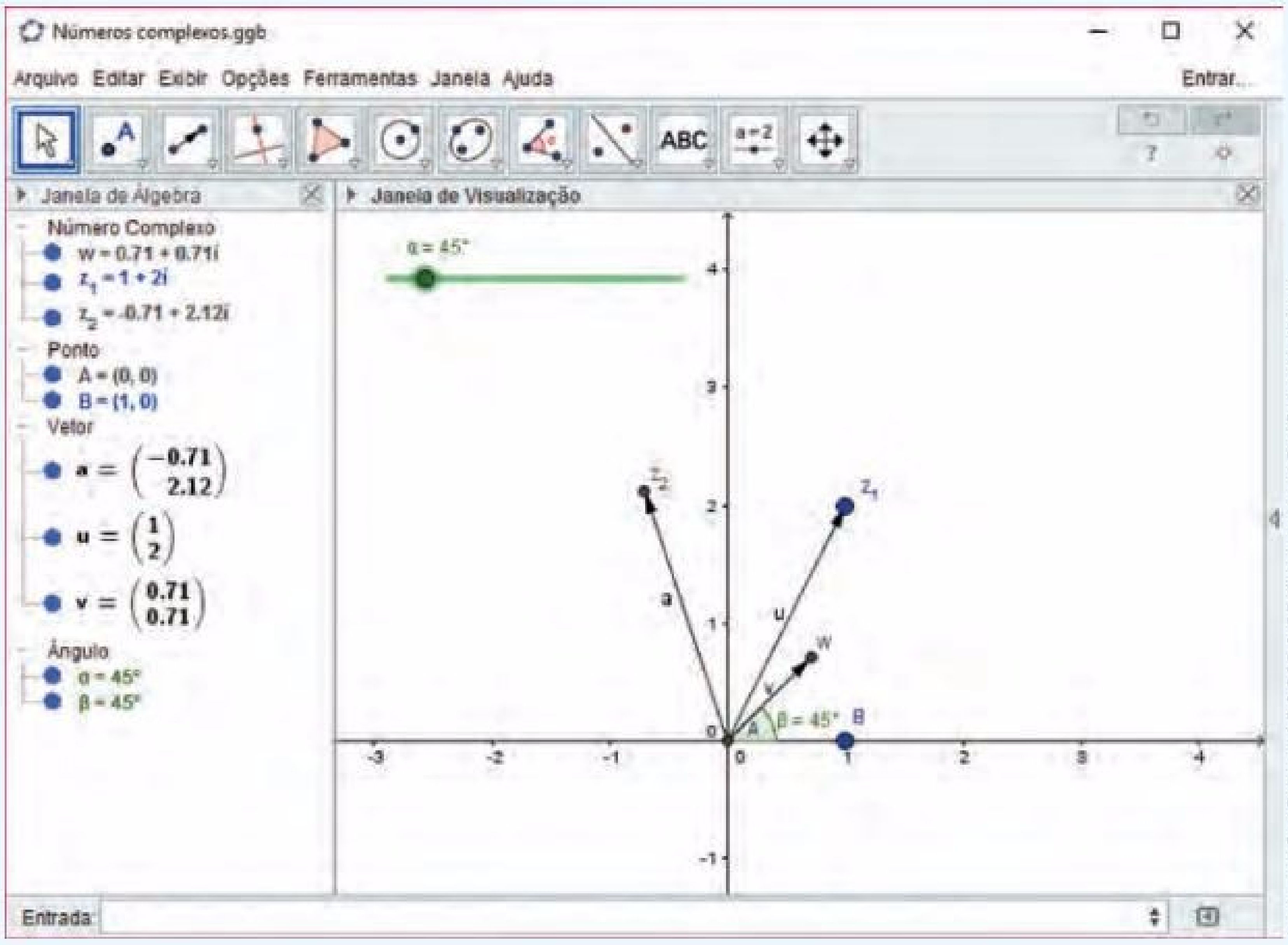
Com a ferramenta **Ponto**, selecionada no botão , marque o ponto $B(1,0)$ e, com a ferramenta **Ângulo**, selecionada no botão , clique em B, A e no ponto que representa w, nessa ordem.



Observe que, na expressão, o asterisco (*) representa a multiplicação, e a função trigonométrica seno é inserida com o comando "sin".
Para inserir o símbolo α, você deve clicar no botão , que aparece no lado direito do campo **Entrada** quando este está selecionado.

〈4〉 Ao realizar o produto de z_1 por w, o resultado corresponderá à rotação de z_1 em um ângulo α em torno da origem, em sentido anti-horário.

Para verificar esse fato, digite no campo **Entrada** o produto $=(z\_1) * w$* e pressione a tecla **Enter**. Trace também o vetor correspondente ao produto (z_2).
Observe o que ocorre com o produto, quando o ponto correspondente a z_1 é movido ou o valor de α é alterado. *Diga aos alunos que (z_1) corresponde ao vetor z_1.



Observe que o ponto correspondente a z_1 pode ser movido com a ferramenta **Mover**, selecionada no botão . Porém, somente é possível alterar w por meio do controle deslizante, uma vez que depende de α.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Abra uma nova janela e represente no *GeoGebra* dois números complexos arbitrários por meio de vetores. Depois, represente geometricamente a soma desses números por meio da regra do polígono.

Dica: Utilize a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** para obter um vetor equivalente a outro, mas com a origem transladada. Para isso, clique no canto inferior direito do botão , selecione a opção , clique sobre o vetor e o ponto de origem para o qual deseja transladá-lo.

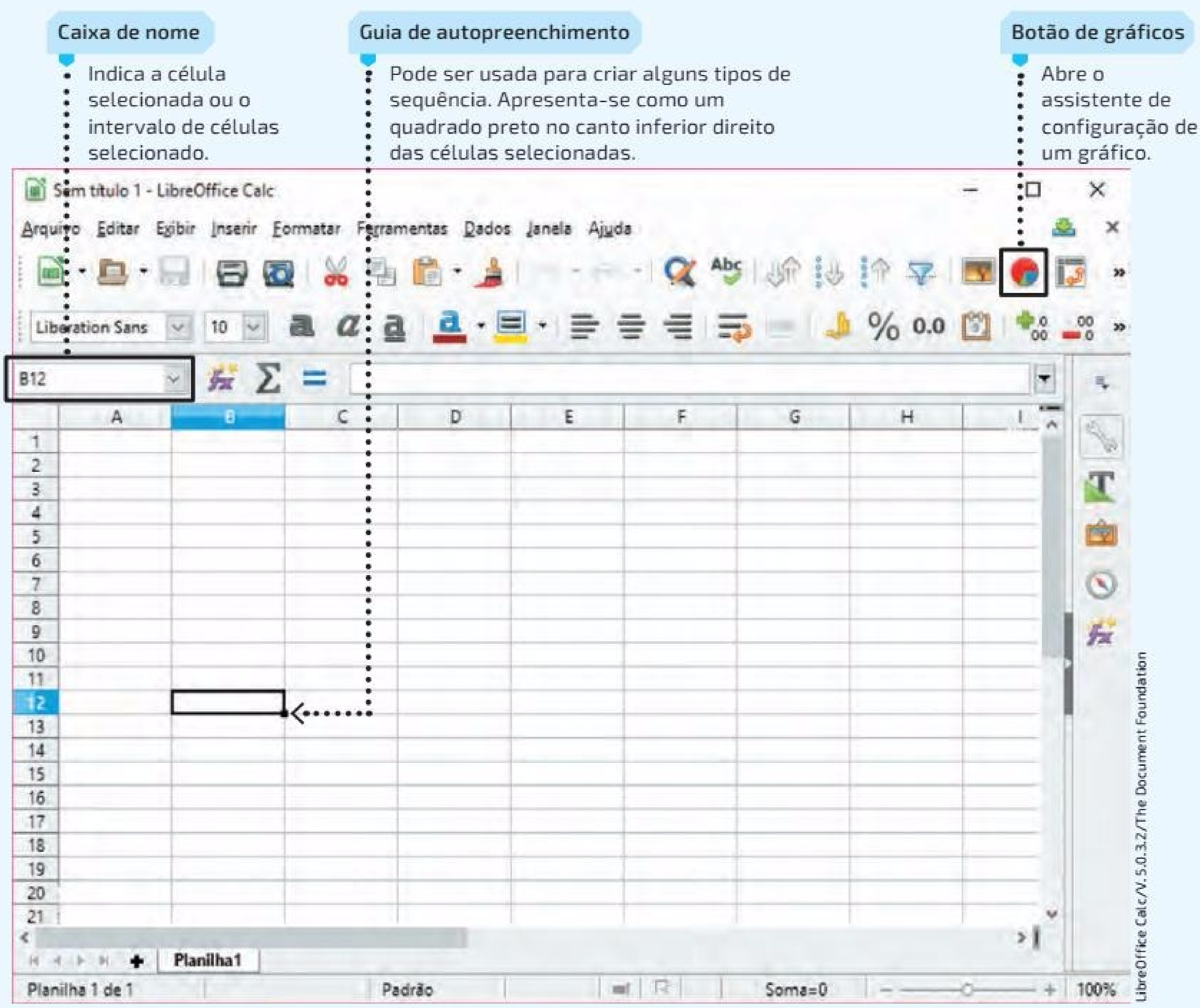
Imagens: GeoGebra/V. 5.0.209.0-3D/ International GeoGebra Institute

LibreOffice Calc

O programa *Calc* é uma planilha eletrônica do pacote *LibreOffice*, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-la, basta acessar o *site* <http://tub.im/bixzay>.

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e possuem recursos para realizar cálculos, construir gráficos, restringir dados, preencher automaticamente, entre outras funções. É importante destacar que uma planilha é dividida em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra).

No esquema a seguir, são apresentados alguns recursos da planilha eletrônica *Calc*, que serão utilizados nos exemplos e nas atividades propostas na seção.



LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Juro e sistema Price

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 1.

A planilha eletrônica *Calc* é útil para abordar diversos conteúdos relativos à Matemática financeira. Apresentaremos dois exemplos, sendo que em um deles calcularemos juro simples e juro composto e, no outro, criaremos um demonstrativo de amortização no sistema Price.

Exemplo 1: Juro simples e juro composto.

Para este exemplo, vamos considerar uma aplicação de R$ 15 000,00, com taxa de juro de 0,8% a.m., pelo período de 10 meses. Calcularemos o juro simples, o juro composto e os montantes, referentes aos dois casos, ao final de cada período.

1. Inicialmente, preencha os campos como apresentado a seguir.

Selecione a célula **A2**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento**, no quadrado do canto inferior direito da célula, e arraste até a célula **A12** para obter a sequência dos números naturais de 0 a 10 no intervalo **A2:A12**.

	A	B	C	D	E
1	Período	Juro composto	Montante 1	Juro simples	Montante 2
2	0	R$ 0,00	R$ 15.000,00	R$ 0,00	R$ 15.000,00
3	1				
4	2				
5	3				
6	4				
7	5				
8	6				
9	7				
10	8				
11	9				
12	10				

2. Para calcular o juro simples e o juro composto ao final do primeiro mês, digite =0,008*C2 na célula **B3** e pressione a tecla **Enter**; e digite =0,008*C$2 na célula **D3** e pressione **Enter**.

   Digite =C2+B3 na célula **C3** e pressione **Enter**; e digite =E2+D3 na célula **E3** para calcular os dois montantes ao final do primeiro mês.

   Selecione o intervalo **B3:E3** e utilize a **Guia de autopreenchimento**, arrastando-a até a linha 12 (correspondente ao 10º mês) para preencher automaticamente o juro simples, o juro composto e os montantes ao final de cada período.

	A	B	C	D	E
1	Período	Juro composto	Montante 1	Juro simples	Montante 2
2	0	R$ 0,00	R$ 15.000,00	R$ 0,00	R$ 15.000,00
3	1	R$ 120,00	R$ 15.120,00	R$ 120,00	R$ 15.120,00
4	2	R$ 120,96	R$ 15.240,96	R$ 120,00	R$ 15.240,00
5	3	R$ 121,93	R$ 15.362,89	R$ 120,00	R$ 15.360,00
6	4	R$ 122,90	R$ 15.485,79	R$ 120,00	R$ 15.480,00
7	5	R$ 123,89	R$ 15.609,68	R$ 120,00	R$ 15.600,00
8	6	R$ 124,88	R$ 15.734,55	R$ 120,00	R$ 15.720,00
9	7	R$ 125,88	R$ 15.860,43	R$ 120,00	R$ 15.840,00
10	8	R$ 126,88	R$ 15.987,31	R$ 120,00	R$ 15.960,00
11	9	R$ 127,90	R$ 16.115,21	R$ 120,00	R$ 16.080,00
12	10	R$ 128,92	R$ 16.244,13	R$ 120,00	R$ 16.200,00

Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/ The Document Foundation

Para que o juro simples calculado na célula **D3**, relativo ao capital de R$ 15 000,00 (célula **E2**), seja mantido nas células abaixo, quando utilizamos a **Guia de autopreenchimento**, utilizamos o símbolo $ (cifrão) em = 0,008*C$2.

Exemplo 2: Demonstrativo de amortização no sistema Price.

Considere um empréstimo de R$ 10 000,00, para ser pago em 12 prestações mensais à taxa de juros de 1,8% a.m., no sistema Price. Utilizando a fórmula apresentada no capítulo **1**, temos que o valor de cada prestação é dado por:

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{10\,000 \cdot 0,018}{1-(1+0,018)^{-12}} \approx 934,02 \longrightarrow \text{aproximadamente R\$ } 934,02$$

1 Abra uma planilha e preencha os campos como indicado a seguir, digitando o saldo devedor inicial R$ 10 000,00 na célula **E2**.

	A	B	C	D	E
1	n	Pagamento	Juro	Amortização	Saldo devedor
2	0	-	-	-	R$ 10.000,00
3	1				
4	2				
5	3				
6	4				
7	5				
8	6				
9	7				
10	8				
11	9				
12	10				
13	11				
14	12				

2 Digite o valor R$ 934,02 na célula **B3**; preencha =E2*0,018 na célula **C3** e pressione a tecla **Enter**. Digite ainda =B3-C3 na célula **D3** e pressione a tecla **Enter**, e =E2-D3 na célula **E3** e pressione **Enter**.

Observe que os resultados das células **C3**, **D3** e **E3** correspondem, respectivamente, ao juro, à amortização e ao saldo devedor relativos à primeira parcela.

E3 =E2-D3

	A	B	C	D	E
1	n	Pagamento	Juro	Amortização	Saldo devedor
2	0	-	-	-	R$ 10.000,00
3	1	R$ 934,02	R$ 180,00	R$ 754,02	R$ 9.245,98
4	2				

3 Como os valores das parcelas são os mesmos, é possível copiar o valor R$ 934,02 da célula **B3** para as células seguintes, selecionando-a, pressionando a tecla **Ctrl**, e mantendo-a pressionada, e utilizando a **Guia de autopreenchimento** até a linha 14 (correspondente à 12ª parcela).

Selecione o intervalo **C3:E3** e utilize novamente a **Guia de autopreenchimento** arrastando-a até a linha 14.

	A	B	C	D	E
1	n	Pagamento	Juro	Amortização	Saldo devedor
2	0	-	-	-	R$ 10.000,00
3	1	R$ 934,02	R$ 180,00	R$ 754,02	R$ 9.245,98
4	2	R$ 934,02	R$ 166,43	R$ 767,59	R$ 8.478,39
5	3	R$ 934,02	R$ 152,61	R$ 781,41	R$ 7.696,98
6	4	R$ 934,02	R$ 138,55	R$ 795,47	R$ 6.901,50
7	5	R$ 934,02	R$ 124,23	R$ 809,79	R$ 6.091,71
8	6	R$ 934,02	R$ 109,65	R$ 824,37	R$ 5.267,34
9	7	R$ 934,02	R$ 94,81	R$ 839,21	R$ 4.428,13
10	8	R$ 934,02	R$ 79,71	R$ 854,31	R$ 3.573,82
11	9	R$ 934,02	R$ 64,33	R$ 869,69	R$ 2.704,13
12	10	R$ 934,02	R$ 48,67	R$ 885,35	R$ 1.818,78
13	11	R$ 934,02	R$ 32,74	R$ 901,28	R$ 917,50
14	12	R$ 934,02	R$ 16,52	R$ 917,50	-R$ 0,00

Imagens: LibreOffice Calc/V.5.0.3.2/ The Document Foundation

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Faça a simulação de uma aplicação de R$ 5 000,00 à taxa de juro composto de 0,95% a.m. e outra de mesmo capital a uma taxa de juro simples de 1% a.m.

a) Em qual das duas aplicações o montante será maior ao final do 8º mês? Aplicação à taxa de juro simples de 1% a.m.

b) Qual dos dois tipos de aplicação é mais vantajoso? Resposta esperada: Se o montante for retirado até o 11º mês, a aplicação à taxa de juro simples de 1% a.m. é a mais vantajosa; a partir do 12º mês, a aplicação à taxa de juro composto de 0,95% a.m. passa a ser a mais vantajosa.

2. Construa um demonstrativo de amortização no sistema Price de um empréstimo realizado no valor de R$ 35 000,00 a uma taxa de juro de 1,25% a.m. no período de 60 meses.

a) Se, ao final de dois anos, o cliente quiser quitar o restante de sua dívida, qual será o saldo devedor? Neste caso, quanto ele já terá pago de juro? R$ 24 019,54; R$ 9 003,14

b) Observando a coluna dos juros, percebemos que os valores são decrescentes ao longo do tempo. Por que isso ocorre? Resposta esperada: Porque o saldo devedor, pelo qual se calcula o juro, diminui ao longo do tempo, enquanto a taxa de juro se mantém.

Construção de gráficos

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo **4**.

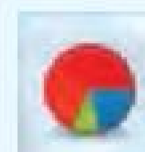
Por meio do *Calc* podemos construir diferentes tipos gráficos, com base em dados inseridos na planilha. Veja nos exemplos a seguir, como procedemos para construir um gráfico de barras verticais e um de setores.

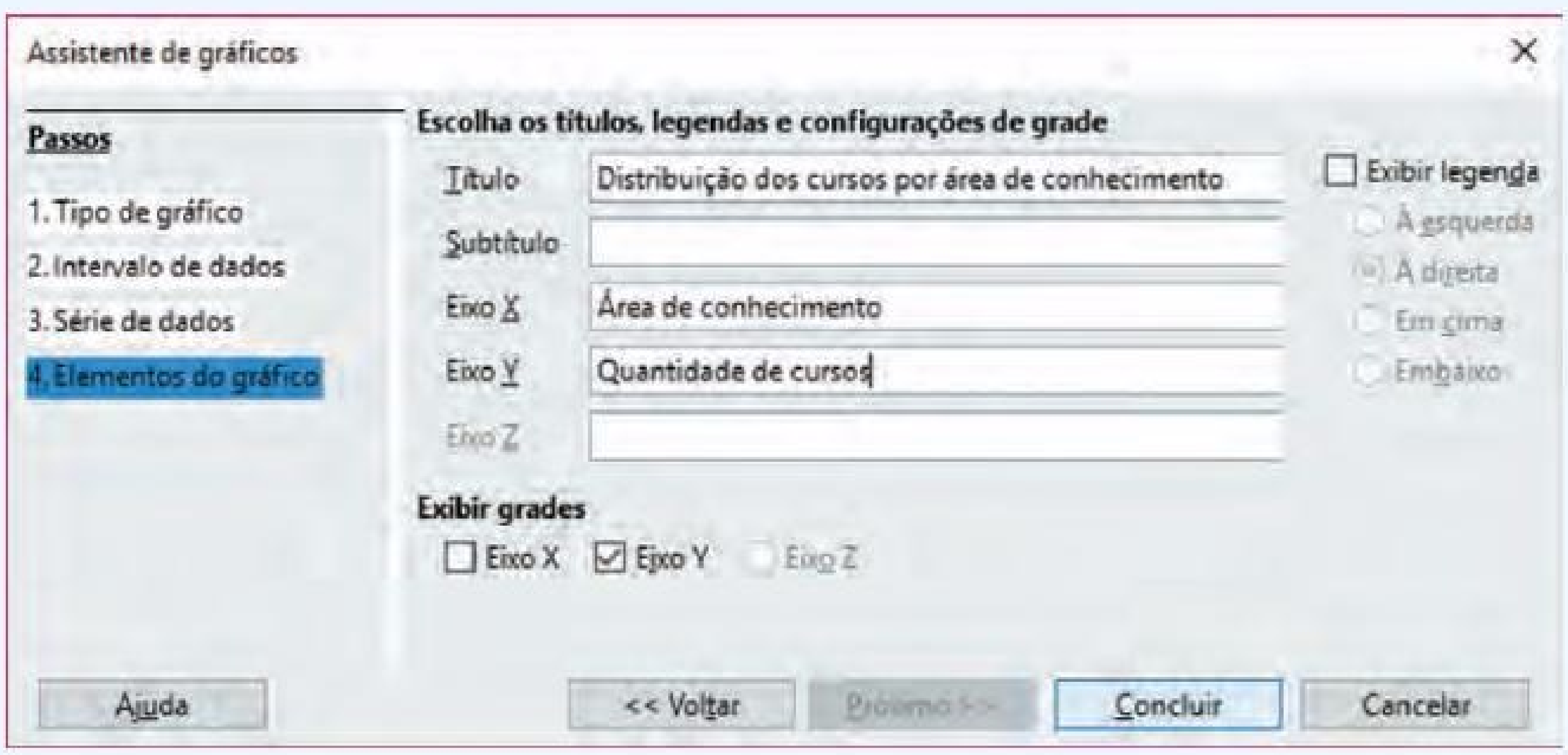
Exemplo 1: Construção de gráfico de barras.

1 Utilizaremos a tabela da atividade **15** da página **121** para realizar este exemplo.

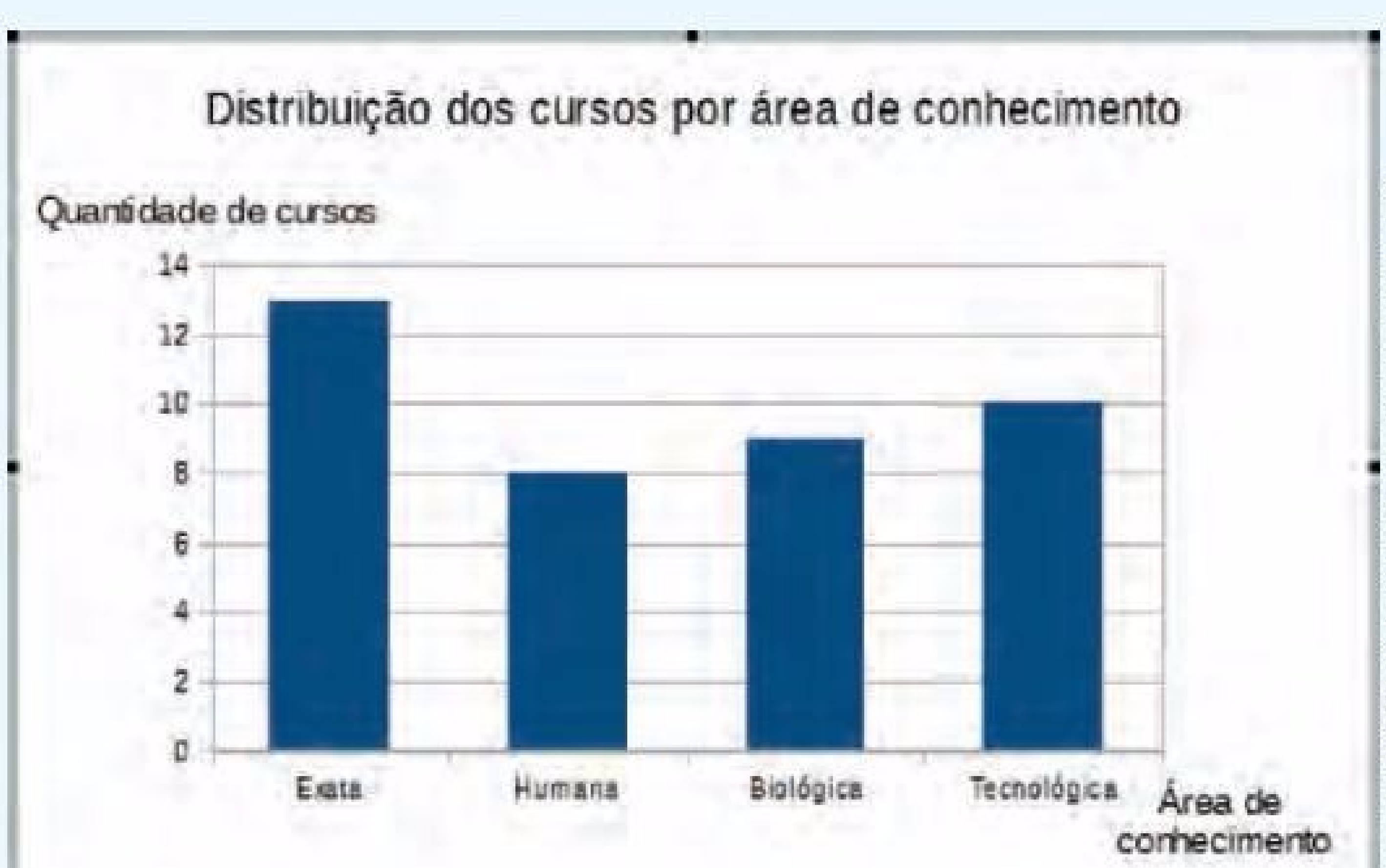
Inicialmente, preencha as células com os dados dessa tabela, conforme segue.

	A	B
1	Exata	13
2	Humana	8
3	Biológica	9
4	Tecnológica	10

2 Selecione o intervalo **A1:B4** e clique sobre o botão  para abrir a janela **Assistente de gráficos**. No campo **Tipo de gráfico**, selecione a opção **Coluna**. Clique em **Elementos do gráfico**, preencha o título do gráfico e dos eixos, como apresentado a seguir, e clique em **Concluir**.



3 Para alterar algum elemento do gráfico, basta clicar sobre ele com o botão direito do *mouse* e selecionar a opção desejada. É possível ainda reposicionar e/ou redimensionar um elemento clicando sobre ele e fazendo os ajustes.



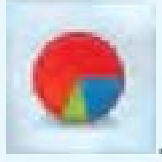
Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Exemplo 2: Construção de gráfico de setores.

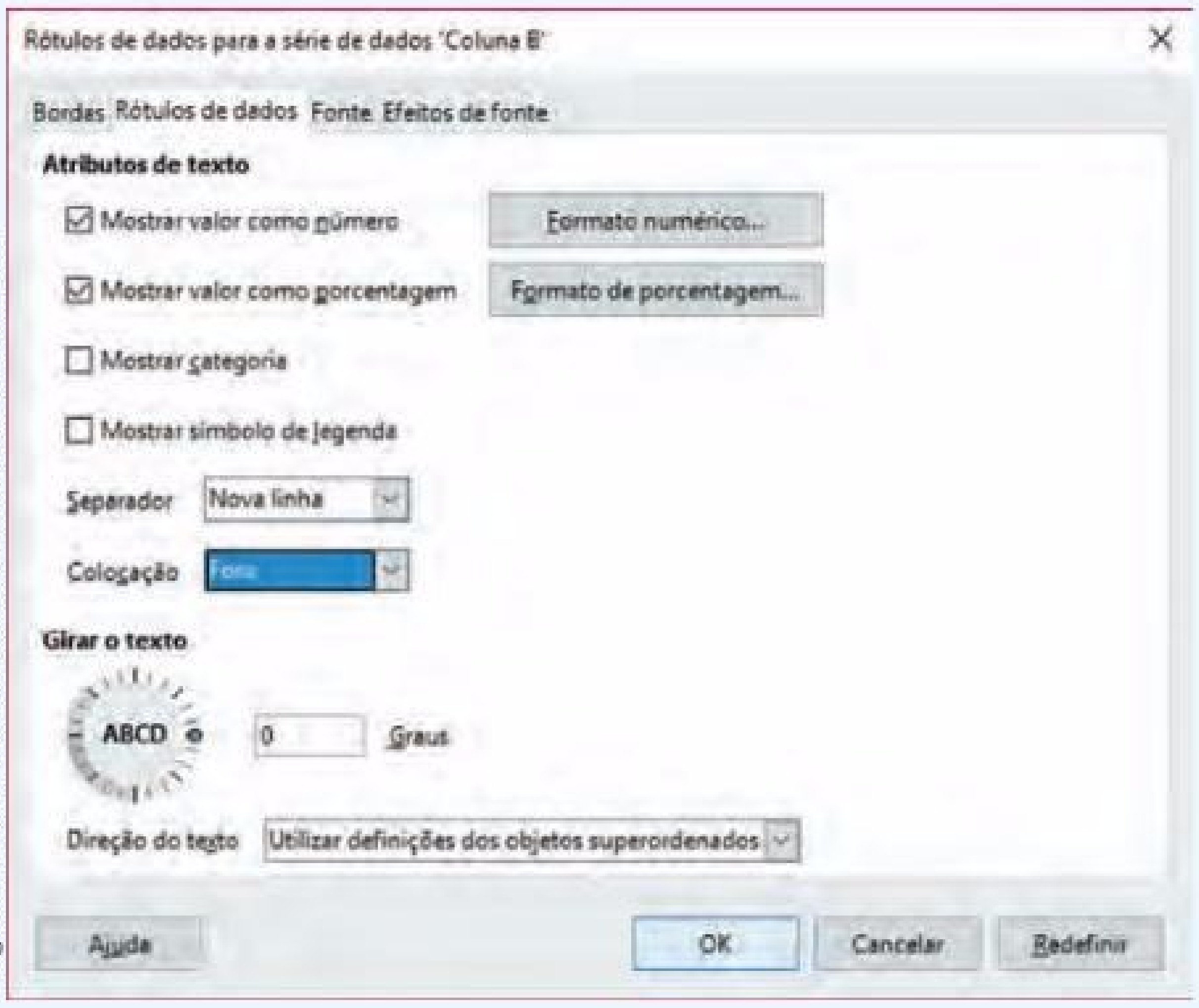
1 Para este exemplo, utilizaremos dados da tabela de frequências apresentada na atividade **36** da página **138**.

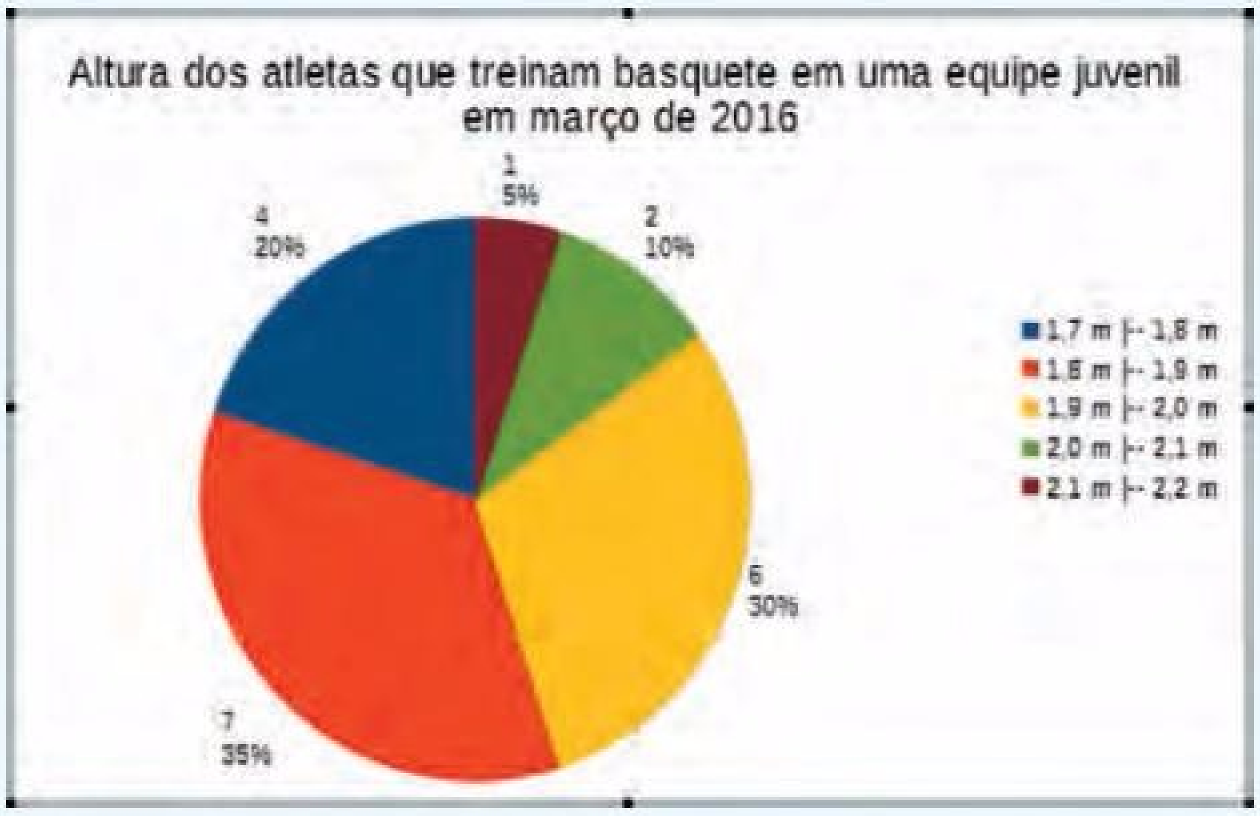
Inicialmente, preencha os dados correspondentes às classes e à frequência absoluta, como apresentado ao lado.

	A	B
1	Altura	Frequência (f)
2	1,7 m |-- 1,8 m	4
3	1,8 m |-- 1,9 m	7
4	1,9 m |-- 2,0 m	6
5	2,0 m |-- 2,1 m	2
6	2,1 m |-- 2,2 m	1

2 Com o intervalo **A2:B6** selecionado, clique sobre o botão . No **Assistente de gráficos**, selecione a opção *Pizza* no campo **Tipo de gráfico**, preencha o título no campo **Elementos do gráfico** e clique em **Concluir**.

3 Clique no gráfico de setores com o botão direito do *mouse* e selecione a opção **Inserir rótulo de dados**. Clique novamente com o botão direito no mesmo local e selecione **Formatar rótulo de dados**. Ajuste o campo **Rótulo de dados** como apresentado a seguir e clique em **OK**.





Note que, de acordo com esses ajustes, é possível visualizar a frequência absoluta e a frequência relativa de cada uma das classes.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Com base nos dados da atividade **38** da página **139**, relativos à projeção da população brasileira para 2025, segundo a faixa etária, construa dois gráficos: um de barras verticais e outro de setores.
   Em sua opinião, qual desses gráficos melhor representa as informações? Por quê? Resposta pessoal.
2. Com o professor e os colegas faça uma pesquisa sobre a área de conhecimento que deseja estudar no Ensino Superior: exata, humana, biológica ou tecnológica. Depois, construa um gráfico de setores no *Calc* para representar os dados obtidos. Resposta pessoal.

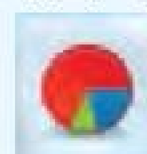
Modelos polinomiais

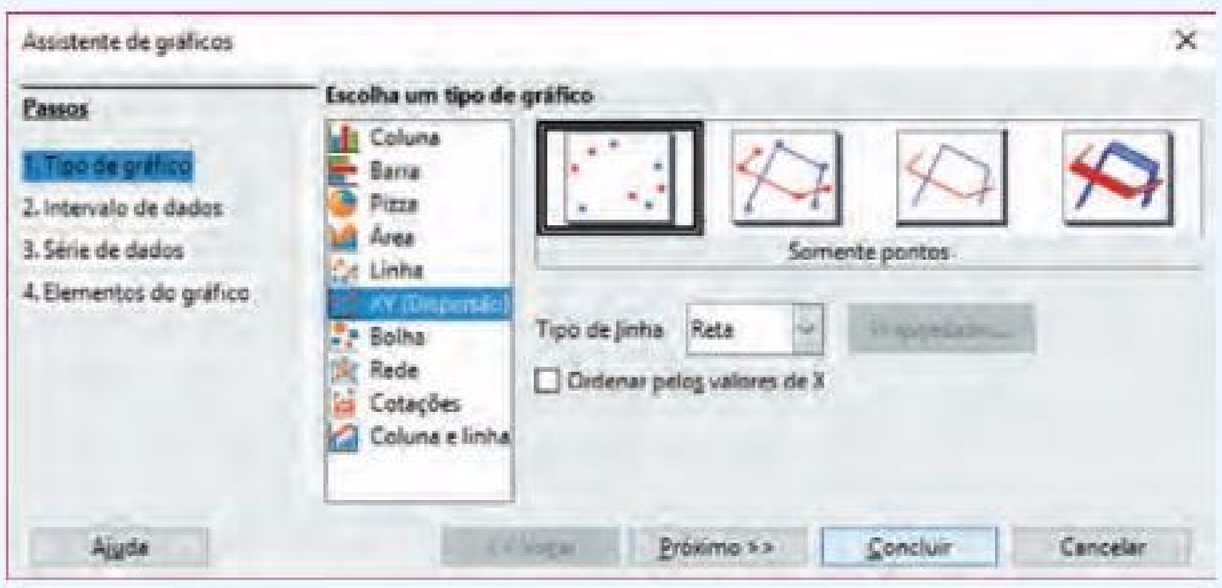
Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 6.

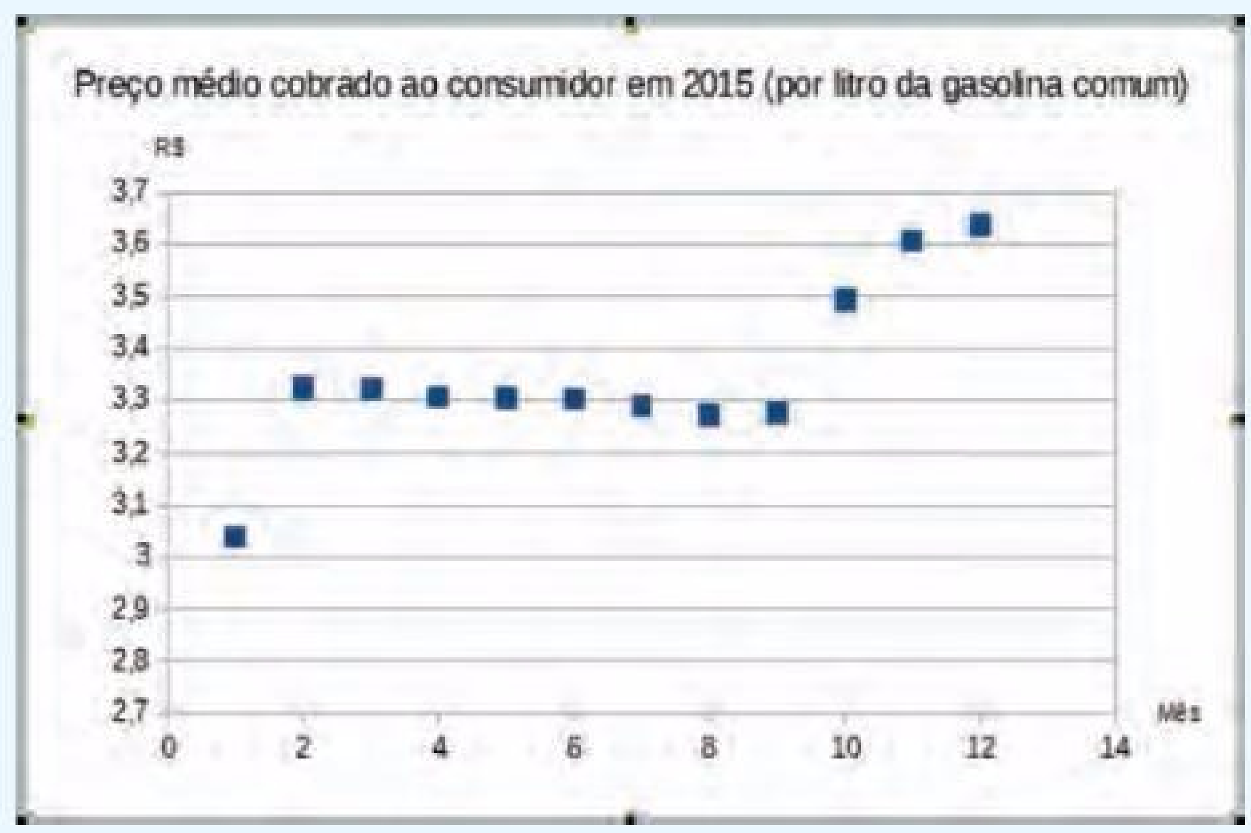
No exemplo a seguir, utilizaremos os preços médios cobrados pela gasolina comum no ano de 2015, a fim de construirmos modelos polinomiais de diferentes graus na planilha eletrônica *Calc*, semelhante ao realizado na atividade **24** das páginas **176** e **177**.

1. Inicialmente, preencha os campos com os dados a seguir.

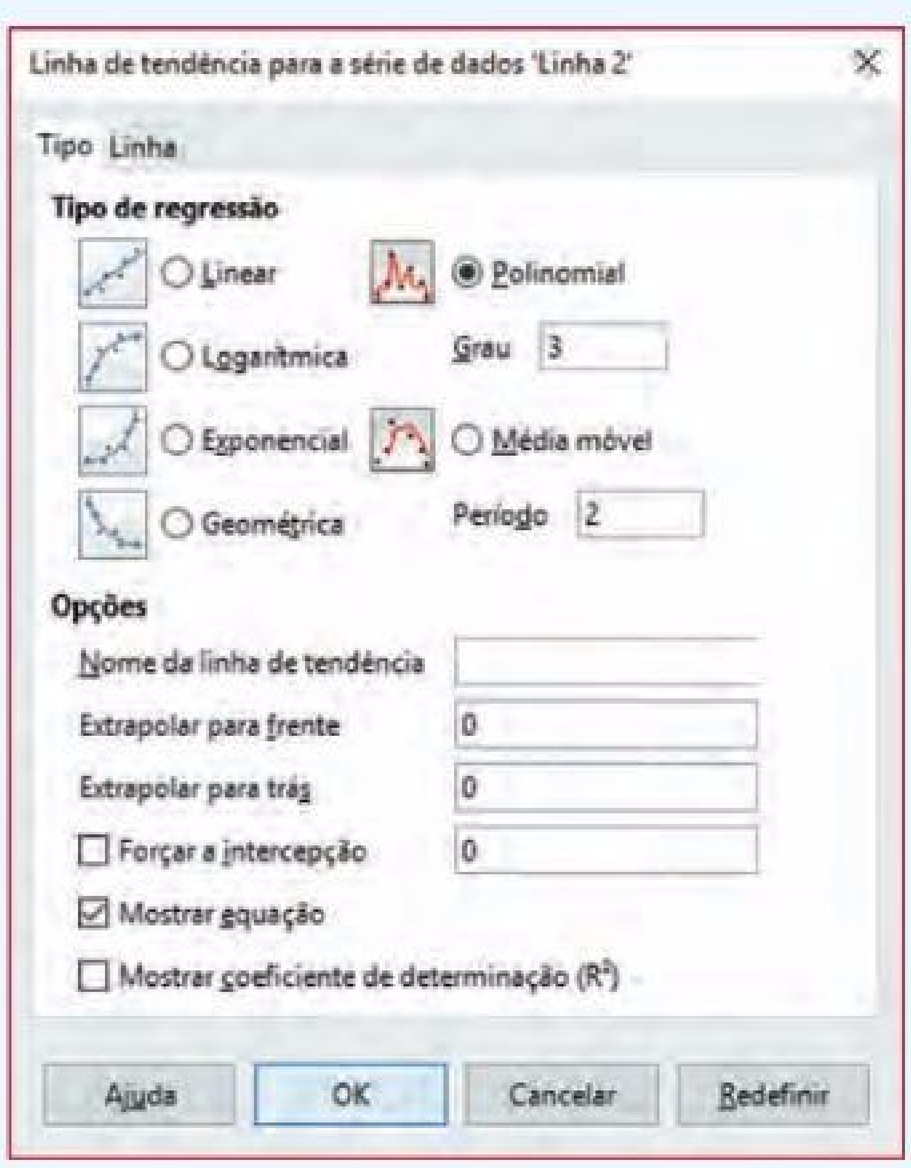
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Mês**	jan.	fev.	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.	dez.
2	**R$**	3,038	3,324	3,322	3,306	3,303	3,301	3,29	3,271	3,274	3,493	3,605	3,636

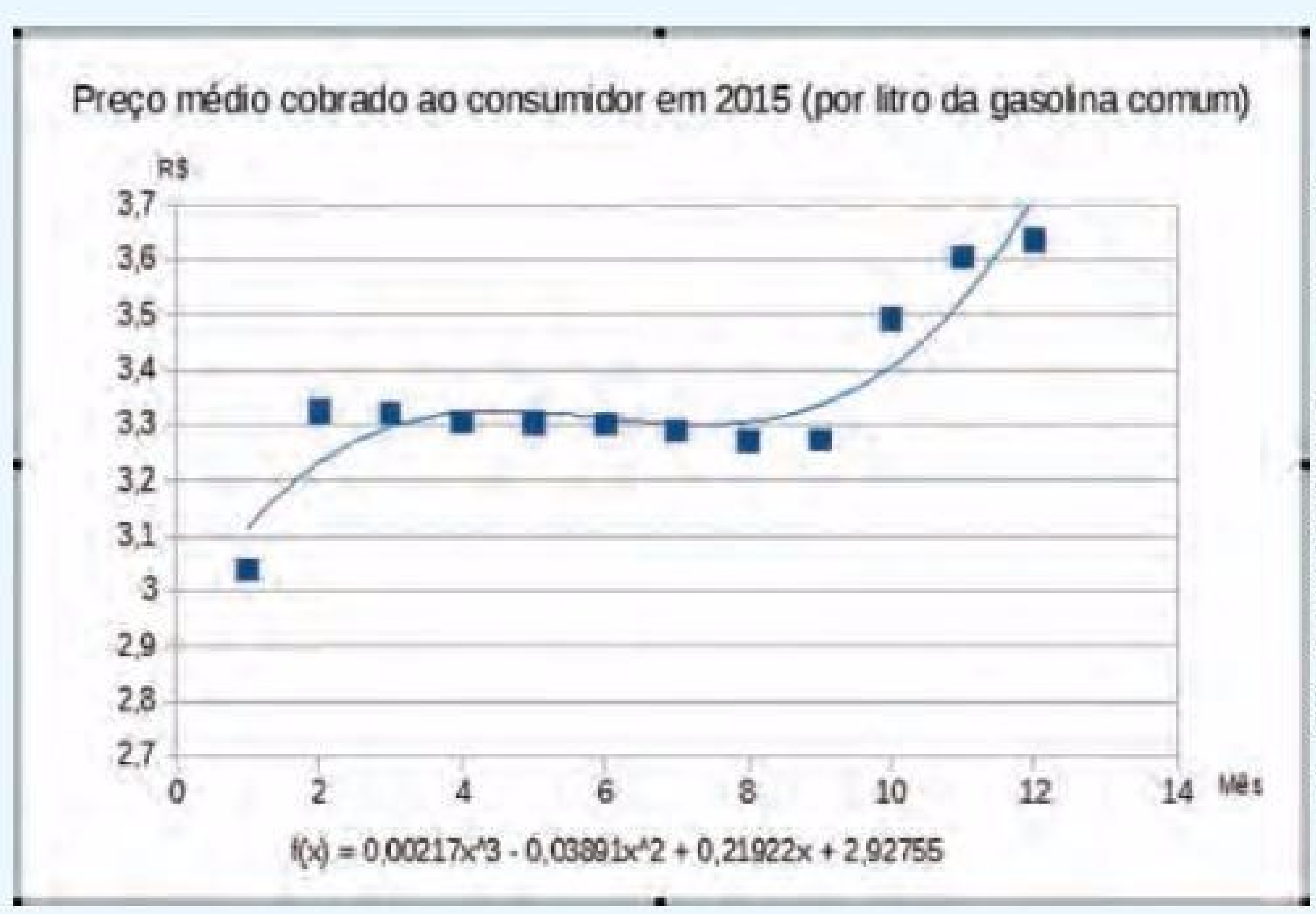
2. Selecione os dados clicando na célula **B1**, segurando o clique e arrastando até a célula **M2**. Depois, clique na opção **Gráfico**, no botão , para abrir o **Assistente de gráficos**. Selecione a opção **XY(Dispersão)** no passo **Tipo de gráfico**, escreva o título do gráfico e dos eixos no passo **Elementos do gráfico** e clique em **Concluir**.





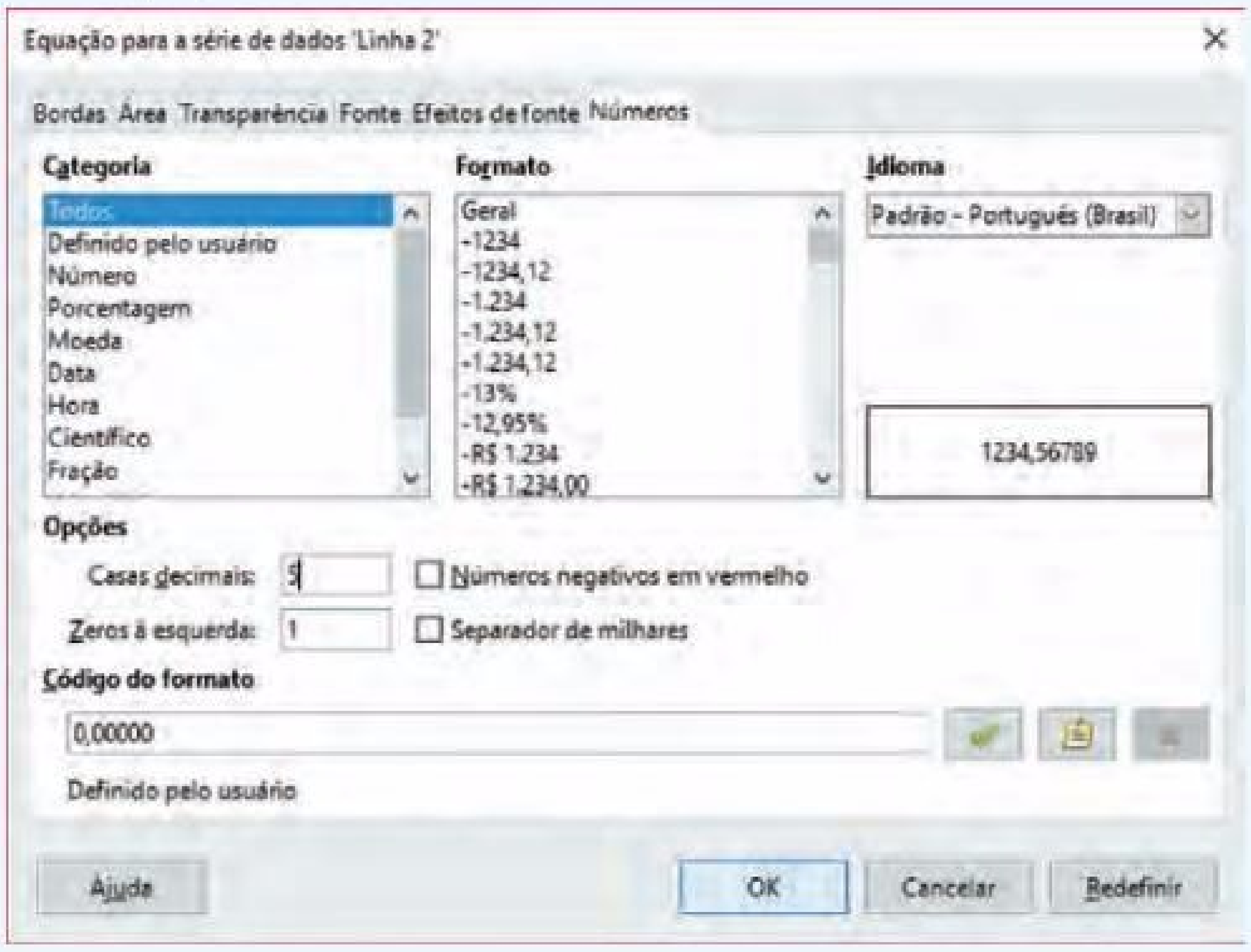
3. Clique com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico e selecione a opção **Inserir linha de tendência**. Na aba **Tipo**, selecione a opção **Polinomial**, digite 3 no campo **Grau**, ative a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.



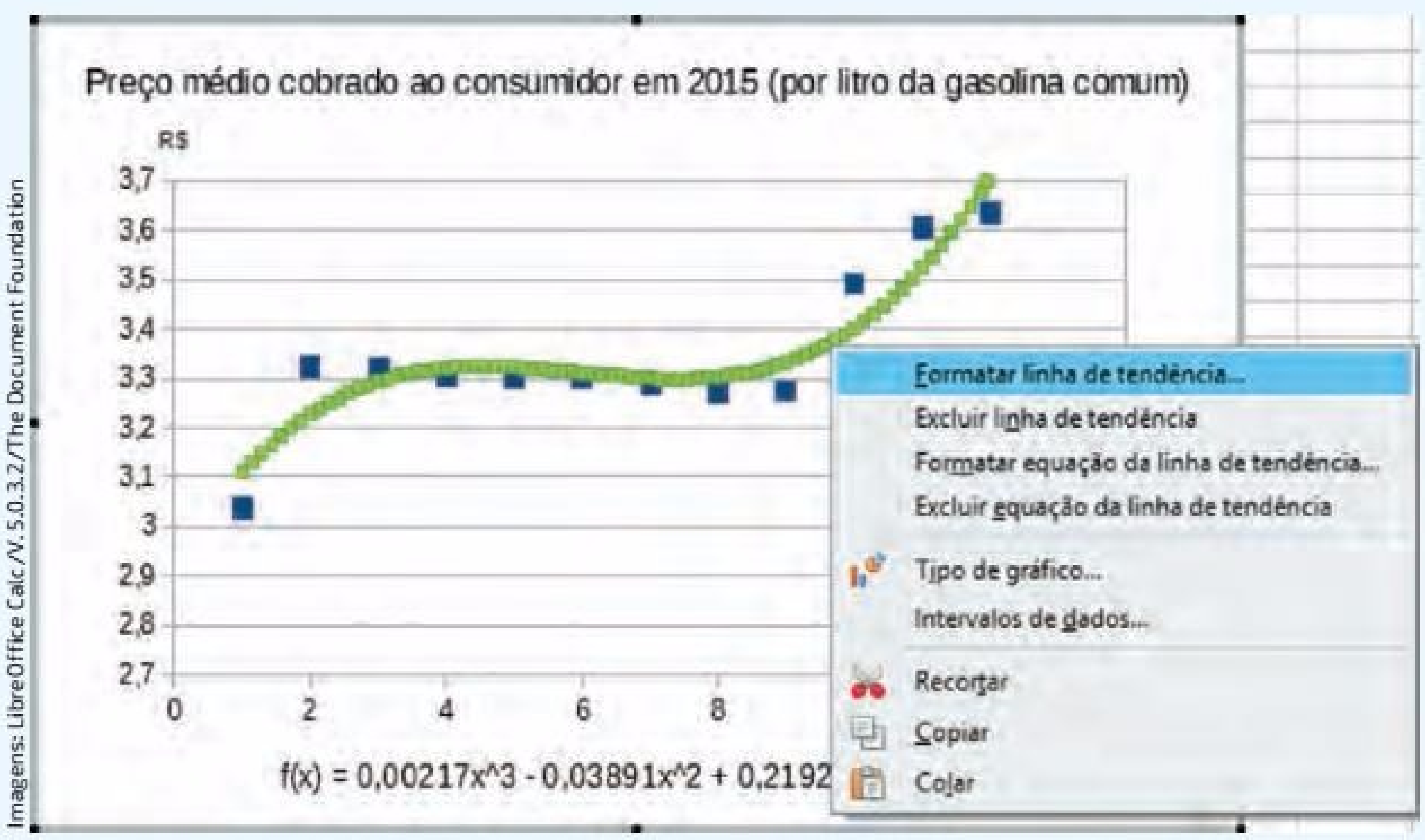


Imagens: LibreOffice Calc/V. 5.0.3.2/The Document Foundation

Para arredondar os coeficientes da função polinomial à quantidade de casas decimais desejada, clique com o botão direito sobre a equação da função e em **Formatar equação da linha de tendência**. Na aba **Números**, selecione a categoria **Todos**, indique a quantidade de casas decimais desejada e clique em **OK**. No exemplo, arredondamos os coeficientes à 5ª casa decimal.



4. O modelo polinomial apresentado é de grau 3, porém podemos alterar o seu grau, clicando com o botão direito sobre a linha de tendência e selecionando a opção **Formatar linha de tendência**. A mesma janela do passo anterior abrirá e, então, basta mudar o valor do campo **Grau**.



Imagens: LibreOffice Calc/V.5.0.3.2/The Document Foundation

2. Resposta esperada: Na coluna A insere-se a sequência de números naturais de 1 à 8, que corresponde aos anos de 2008 à 2015 e, na coluna B, os valores correspondentes às áreas desmatadas da Amazônia Legal neste período. Seleciona-se o intervalo de dados, cria-se o gráfico de dispersão e insere-se uma linha de tendência com tipo de regressão polinomial ao grau da função polinomial desejado. Em seguida, arredonda-se os coeficientes da função polinomial à 6 casas decimais. Para alterar o grau da função polinomial apresentada, basta realizar o passo 4.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Crie o gráfico de dispersão apresentado no exemplo e altere o grau do modelo polinomial para 5 e, depois, para 7.

a) Quais foram os modelos polinomiais obtidos? Aproxime os coeficientes à 7ª casa decimal.

b) O que você percebeu ao aumentar o grau do modelo polinomial? Resposta esperada: Que quanto maior for o grau do polinômio, mais os dados apresentados se aproximam dos valores da função polinomial, aumentando sua precisão. Contudo, o polinômio passa a ter mais termos.

2. Construa um gráfico de dispersão com os dados apresentados na atividade **17** da página **121** sobre o desmatamento na Amazônia Legal. Considere 2008 como $x = 1$, 2009 como $x = 2$, e assim por diante.

Em seguida, crie modelos polinomiais de diferentes graus que se aproximem aos dados do gráfico, com arredondamento dos coeficientes à 6ª casa decimal.

1. a) Modelo polinomial de grau 5: $f(x) = -0{,}0000229x^5 + 0{,}0002404x^4 + 0{,}0064732x^3 - 0{,}1056979x^2 + 0{,}4765468x + 2{,}6805$; modelo polinomial de grau 7: $f(x) = 0{,}0000055x^7 - 0{,}0003022x^6 + 0{,}0065688x^5 - 0{,}0732949x^4 + 0{,}4520584x^3 - 1{,}5365327x^2 + 2{,}6502794x + 1{,}5383333$

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos sugestões de livros que propiciam melhor compreensão acerca dos conteúdos tratados nesta coleção, que de maneira geral abordam a Matemática de forma lúdica, curiosa e interessante. São apresentadas também sugestões de *sites* que trazem tópicos matemáticos e programas de computador relacionados à Matemática.

Para ler

- A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos

  SMULLYAN, Raymond. **A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos**. Tradução Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

  O livro narra a história fictícia de uma princesa que deve escolher o destino de seu enamorado, tendo de solucionar diferentes problemas lógicos matemáticos que vão se tornando cada vez mais complexos com o decorrer da história.

- A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço.

  MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução Enézio E. de Almeida Filho. 6. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

  Com esse livro, o leitor poderá conhecer melhor a história da Geometria, contada pelo autor de maneira clara e divertida.

- A Matemática das coisas

  CRATO, Nuno. **A Matemática das coisas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento, como a Arte.

- A Matemática nas profissões

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Orgs.). **A Matemática nas profissões**. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática

  GARBI, Gilberto G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da História da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos

  SZPIRO, George. **A vida secreta dos números**: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Tradução J. R. Souza. Rio de Janeiro: DIFEL, 2008.

  Por meio de histórias, anedotas e outros tipos de textos, este livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos de nossas vidas. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

- Cartas a uma jovem matemática

  STEWART, Ian. **Cartas a uma jovem matemática**. Tradução Pedro Ferreira. Relógio D'Água: Lisboa, 2006.

  O livro apresenta um conjunto de cartas trocadas entre a jovem Meg e um matemático, por meio das quais discutem sobre o que é Matemática, o que faz um matemático e a comunidade científica, abordando questões e curiosidades desde o filosófico ao prático.

- O homem que calculava

  TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

  O livro expõe alguns problemas, quebra-cabeças e curiosidades matemáticas, por meio das aventuras fictícias de um sábio calculista persa e de suas soluções para problemas aparentemente sem solução.

- O instinto matemático

  DEVLIN, Keith. **O instinto matemático**. Tradução Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

  O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, que é exclusiva do homem; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

- O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática

  BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

  O autor busca revelar segredos e mistérios da Matemática e mostrar sua presença em nossas vidas, desde a ciência até as artes. Ilustrado com fotografias, gravuras, pinturas, entre outros, o livro é organizado de maneira a facilitar a compreensão de situações em que a Matemática está envolvida.

- O teorema do papagaio

  GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  O livro narra a história fictícia de uma família parisiense que se vê obrigada a estudar, entender e organizar fatos históricos e pensamentos da história da Matemática, desde a Antiguidade até os dias atuais, para explicar diversos acontecimentos. O livro apresenta passagens da vida de vários estudiosos, como Tales, Pitágoras e Pierre de Fermat.

- O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos

  SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 7. ed. Tradução Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2000.

O livro faz um apanhado histórico, desde a origem até os dias atuais, sobre o enigma que confundiu as mentes de estudiosos por 358 anos, o Teorema de Fermat. Relatando a busca épica por sua demonstração, o livro enfoca a importância do teorema para o desenvolvimento da Matemática durante mais de três séculos.

- O universo e a xícara de chá

COLE, K. C. **O universo e a xícara de chá**. Tradução Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

- Os números governam o mundo: folclore da Matemática

TAHAN, Malba. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

"Os números governam o mundo" é uma citação de Pitágoras que o autor deste livro a trouxe à tona para narrar mais detalhes sobre o assunto. O livro traz histórias dos números, mistérios, simbologia e origem mística que os envolvem.

- Pitágoras e seu teorema em 90 minutos

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. (Cientistas em 90 minutos).

Por meio de textos informativos, o livro apresenta um panorama da vida e da obra de Pitágoras, comentando suas descobertas.

- Qual o problema?

MORICONI, Marco. **Qual o problema?** Alicia Ivanissevich (Org.). Rio de Janeiro: Instituto Ciência Hoje, 2009.

O livro apresenta 40 enigmas que desafiam e instigam o leitor a explorar, de maneira lúdica, conceitos e ideias matemáticas frequentemente utilizadas por profissionais de diferentes áreas.

Para navegar

- Arte & Matemática

<http://tub.im/hwz85d>

Um *site* interativo que apresenta temas variados, de diferentes épocas, que relacionam Arte e Matemática.

- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem da Matemática e Estatística

<http://tub.im/7au5uc>

Desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense, este *site* contém diferentes aplicativos educacionais interativos que abordam diferentes conteúdos matemáticos, como geometria, matrizes e funções trigonométricas.

- Domínio Público

<http://tub.im/ebgwue>

Este *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

- EDUMATEC

<http://tub.im/xt9vnq>

Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- Enem

<http://tub.im/fjoj8r>

Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

- IBGE

<http://tub.im/9cqokk>

Neste *site* é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

- Khan Academy

<http://tub.im/s5odbu>

Plataforma educacional, de acesso livre, que disponibiliza recursos como exercícios e vídeos de aulas sobre diversos conteúdos.

- Laboratório de Matemática – UNESP

<http://tub.im/qeoihf>

Este *site* divulga as atividades que são desenvolvidas no laboratório de Matemática da Universidade Estadual de São Paulo. Na seção História da Matemática são apresentadas informações sobre a vida e a obra de alguns matemáticos.

- Matemática essencial

<http://tub.im/evze5y>

Este *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios que possuem respostas, sendo que, em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções detalhadas.

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

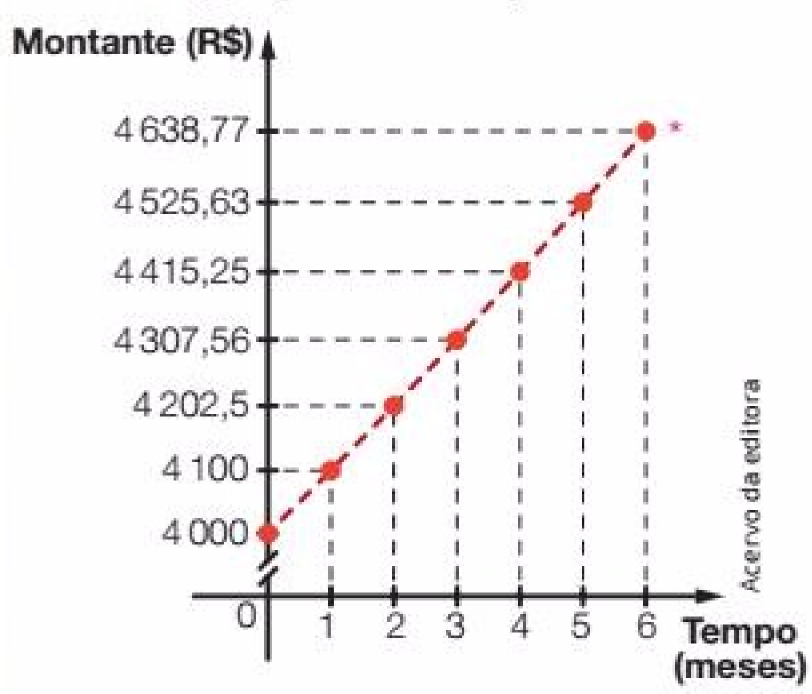
<http://tub.im/roe3dx>

Neste *site* é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, por exemplo, a maneira de se efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

capítulo 1

Matemática financeira

1. a) 30% c) 14% e) 12,5%
   b) 68% d) 32%
2. a) 0,07 c) 0,9 e) 0,6138
   b) 0,48 d) 0,045
3. 40%
4. R$ 695,75
5. a) R$ 35,40 b) 36 pessoas
6. c
7. a) 60%
   b) Conhecimentos gerais; Informática
   c) Informática; Uma possível resposta: pois nessa matéria ele obteve o pior desempenho.
8. loja B; R$ 1 161,00
9. R$ 355,00
10. a) R$ 15 000,00
    b) 20%
    c) Não, pois R$ 3 000,00 corresponde a uma taxa de 25% referente a R$ 12 000,00 e a uma taxa de 20% referente a R$ 15 000,00 e essas taxas são diferentes.
11. R$ 21 000,00
12. R$ 2 124,40
13. 927
14. 110 e 70
15. a) 12,5%; 25%
    b) 50%
16. c
17. sofá: R$ 2 400,00; mesa de jantar: R$ 1 275,00; cama de casal: R$ 1 080,00
18. 1,8%
19. e
20. aproximadamente 463,30 liras de Módena
21. a) acréscimo de 12,32%
    b) desconto de 18,22%
    c) acréscimo de aproximadamente 15,76%
    d) acréscimo de aproximadamente 0,68%
22. aproximadamente R$ 1,64
23. aproximadamente R$ 66,10
24. aproximadamente R$ 232,72
25. a) R$ 66,00
    b) 10%
26. e
27. março; 0,3%
28. Um único desconto de 60%.
29. lucro de aproximadamente R$ 5 554,52
30. aproximadamente 2%
31. 25%
32. a) 9,2%; 14,66%
    b) aproximadamente R$ 4,06
33. 10%
34. a) Uma possível resposta: o aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços.
    c) R$ 2 380,00
    d) aproximadamente 19,28%
35. a) R$ 66,00 c) R$ 19,25
    b) R$ 297,00 d) R$ 16,50
36. R$ 10,08
37. 5%
38. a) R$ 8 625,00
    b) R$ 8 366,25
39. a) R$ 480,76
    b) R$ 971,04
40. 6 meses
41. 25 meses
42. 3,5%
43. R$ 1 176,00
44. a) investimento B
    b) aproximadamente 3,24%
45. 0,06% a.d.
46. Algumas possíveis respostas: $t = 5$ e $i = 6\%$; $t = 4$ e $i = 7,5\%$
47. 7 meses
48. a) 10%
    b) R$ 268,00
49. aproximadamente R$ 4 271,88
50. aproximadamente R$ 595,00
51. a) aproximadamente R$ 568,00
    b) aproximadamente 28,37%
52. 8%
53. 70 meses
54. 4%
55. c
56. c
57. a) aproximadamente R$ 695,84
    b) aproximadamente R$ 1 000,25
58. b
59. a) $f(t) = 4\,000 \cdot (1{,}025)^t$
    b) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 6\}$

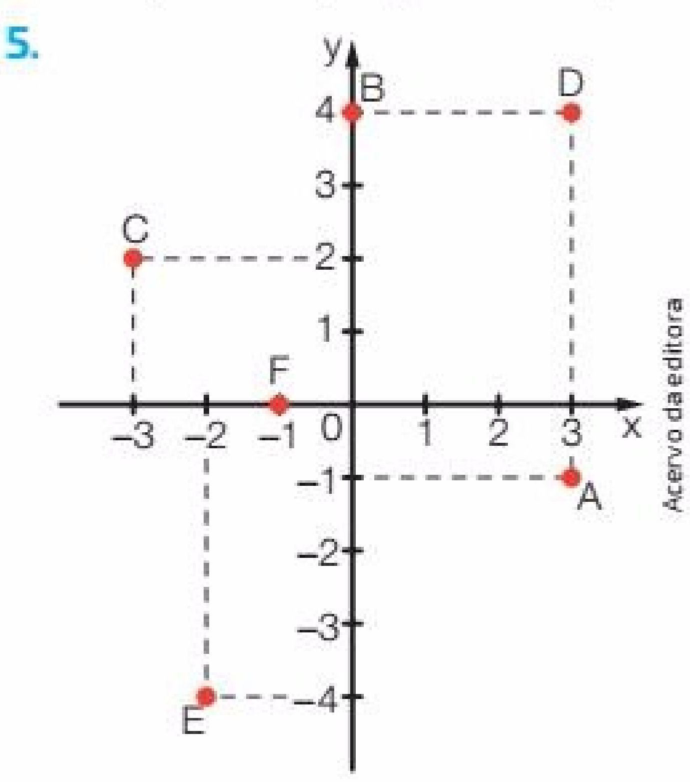


60. $f(t) = 0{,}07ct$; $g(t) = c \cdot (1 + 0{,}07t)$
61. a) investimento B
    b) investimento A
    c) *b* reais
62. a) $f(t) = 20 + 80 \cdot (1{,}04)^t$ e $g(t) = 30 + 70 \cdot (1 + 0{,}05t)$
    b) I; II
64. Sim, pois o valor da prestação (R$ 281,90) é menor que 25% do salário líquido (R$ 287,50).
65. aproximadamente R$ 7 800,00
66. a) aproximadamente R$ 605,74
    b) R$ 6 075,52
67. 10 prestações
68. a) R$ 965,11 c) R$ 19 873,90
    b) R$ 9 459,28
69. b) aproximadamente R$ 224,92; aproximadamente R$ 2 699,04
    c) Sim, pois quanto maior for o número de parcelas, menor a amortização e maior o juro, consequentemente, maior será o valor pago pelo produto.

capítulo 2

O ponto e a reta

1. $A(3, 2)$; $B(-6, 0)$; $C(-1, -5)$; $D(4, -4)$; $E(-3, 3)$, $F(5, 6)$; $G(-6, -5)$
2. a) $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$
   b) Uma possível resposta: $(3, 1)$, $(4, 1)$ e $(5, 1)$
   c) $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$
3. a) 1º e 4º quadrantes
   b) 3º e 4º quadrantes
   c) 2º quadrante
   d) 4º quadrante
4. a) 20°
   b) 40°
   c) $B(-100°, 0°)$; $E(-40°, -40°)$
5.



6. a) • $A(-2, -2)$ • $D(-1, 1)$
   • $B(1, 1)$ • $E(1, -1)$
   • $C(3, 3)$ • $F(2, -2)$
   b) $x = -9$; $y = 7$
7. • $\sqrt{2}$ • $3\sqrt{2}$
   • 7 • 15

*No gráfico apresentado, as escalas dos eixos são diferentes entre si.

8. a) 3 triângulos
b) $\triangle ABD$: isósceles; $\triangle ACD$: escaleno; $\triangle BCD$: isósceles

9. $x=-3$

10. b; c

11. perímetro: 16 u.c.; área: 12 u.a.

12. *B*, *D* e *E*

13. $\text{sen}\,\hat{C}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. $D(-9,-3)$

15. $P\left(\frac{1}{2},\frac{21}{6}\right)$

16. e

17. a) $\left(\frac{5}{2},5\right)$
b) $(-1,2)$
c) $\left(-\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)$
d) $(4,7)$

18. a) Sim, pois
$M_{\overline{AC}}=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{7+(-5)}{2}\right)=M_{\overline{AC}}(1,1)$.
b) • $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2},4\right)$
• $M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2},-2\right)$

19. 5 u.c.

20. a) $C(3,4)$; $D(6,8)$
b) 1 800 m

21. $A(6,0)$; $B(0,8)$

22. $x=0$; $y=4$

23. $Q\left(-\frac{13}{7},\frac{31}{7}\right)$

24. a) $AM_{\overline{BC}}=\sqrt{17}$; $BM_{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{149}}{2}$; $CM_{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{65}}{2}$
b) $\left(-\frac{8}{3},-\frac{5}{3}\right)$

25. $x=3$; $y=-7$

26. $B(9,4)$; $C(8,0)$

27. a) $\left(-\frac{4}{3},2\right)$
b) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

28. a) $P\left(\frac{11}{2},7\right)$; $Q\left(\frac{5}{2},7\right)$; $R(4,4)$
b) $G(4,6)$; $H(4,6)$

30. $m=4$

31. $A(4,6)$; $B(7,4)$

32. a; c; d

33. $E\left(-\frac{1}{3},\frac{10}{3}\right)$

34. $r=-9$

35. 6 u.a.

36. 10 u.a.

37. a) 11 u.a.
b) $\frac{7}{2}$ u.a.
c) 4 u.a.
d) 30 u.a.

38. $m=7$ ou $m=-\frac{3}{5}$

39. $\frac{27}{5}$ u.a.

40. a) $a=11$
b) $T(12,16)$; sim; eclipse solar

41. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $-2-\sqrt{3}$

42. a) -4
b) -1

43. $x=\frac{3}{2}$

44. a) 135°
b) 60°

45. a) r: 30°; s: 120°
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\sqrt{3}$

46. $-\frac{1}{2}$

47. -1; 1

48. Resposta esperada: calcularia o coeficiente angular da reta que passa por esses pontos dois a dois e compararia os resultados, caso o coeficiente angular seja o mesmo, então os pontos são colineares. Não são colineares.

49. a) $y=4-x$
b) $y=x+5$
c) $y=-\sqrt{3}x$

50. a) $y=2x-3$
b) $y=-4x-8$
c) $x=12$
d) $y=5x+6$

51. $p=\frac{8}{5}$

52. a) $m=6$
b) $y=6x$
c) $y_1=18$; $y_2=-12$

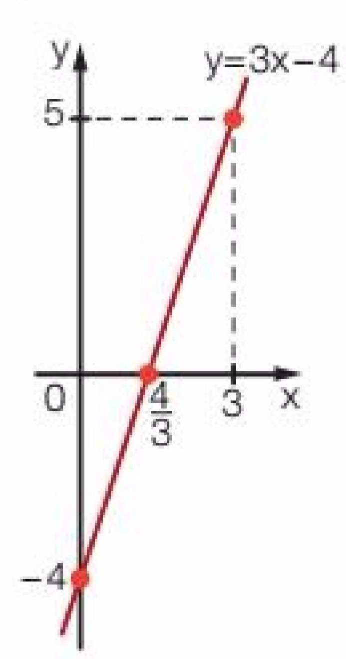
53. b

54. a) $y=-\frac{1}{6}x+\frac{17}{6}$
b) $y=10x-4$
c) $y=\frac{9}{7}x+\frac{59}{7}$
d) $y=\frac{1}{4}x-5$

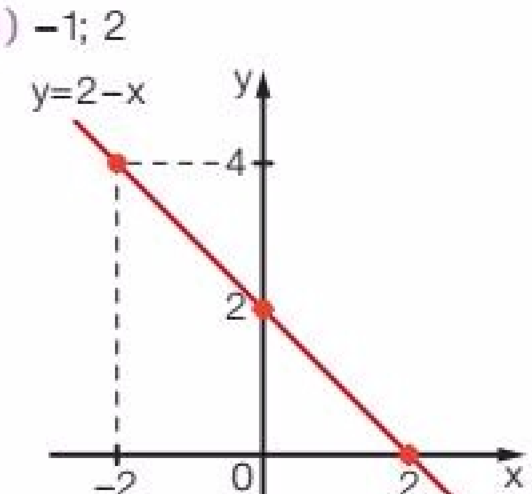
55. d

56. a) $y=1\,500+0{,}15x$
b) $y_1=1\,725$; $y_2=1\,920$
c) 7 000

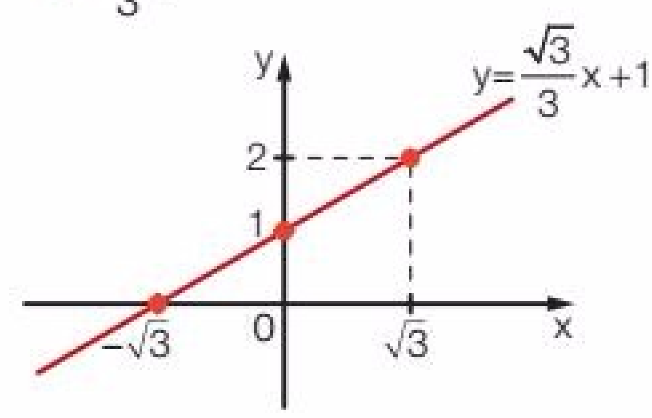
57. a) 3; -4



b) -1; 2



c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 1



Ilustrações: Acervo da editora

58. a) $y=6x+4$
b) $f(x)=6x+4$
c) $x<-\frac{2}{3}$; 3º quadrante

59. b

60. sim; Resposta esperada: pois o ângulo α, formado entre o eixo *x* e a reta que representa uma função decrescente, pertence ao intervalo $90°<\alpha<180°$ e nesse intervalo a tangente é negativa.

61. a) $-x+8y-32=0$
b) $4x-3y-14=0$
c) $x-5y+19=0$
d) $-x+y+7=0$

62. $2x-y=0$; $x+2y-5=0$

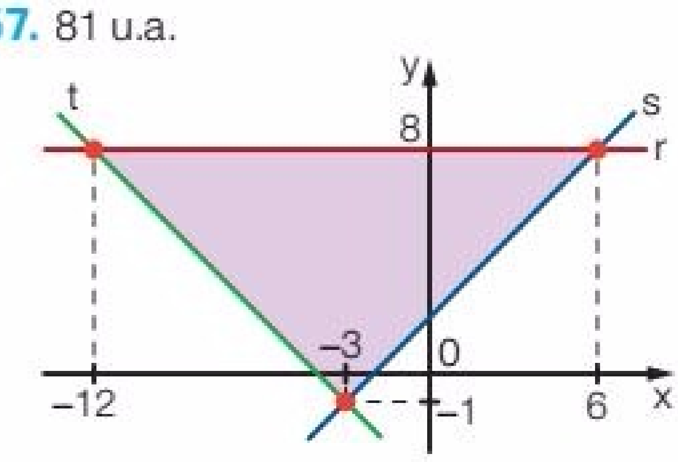
63. a) 3
b) $-\frac{3}{2}$
c) Uma possível resposta:
$\left(-4,-\frac{27}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2},6\right)$ e $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

64. a) 1; -2
b) decrescente
c) $-2x-y+1=0$

65. a) $-12x+y=0$
b) não
c) 96
d) 13

66. a) concorrentes
b) perpendiculares
c) coincidentes
d) concorrentes

67. 81 u.a.



Acervo da editora

68. a) $r: y=\frac{1}{2}x+25$; $t: y=\frac{1}{4}x+35$
b) $(40,45)$

69. $k=4$

71. $-3x+y+7=0$

72. a) $y=-2x+8$
b) $\left(\frac{21}{5},-\frac{2}{5}\right)$

73. $S=\{a\in\mathbb{R}\mid a\neq-2 \text{ e } a\neq 1\}$

74. *r* e *s*: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; *r* e *t*: $(6,3)$;
u e *t*: $(-10,-5)$; *u* e *s*: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$;
s e *t*: $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

75. a) $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ b) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$

76. s: $2x-y-4=0$; t: $2x-y-6=0$

77. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

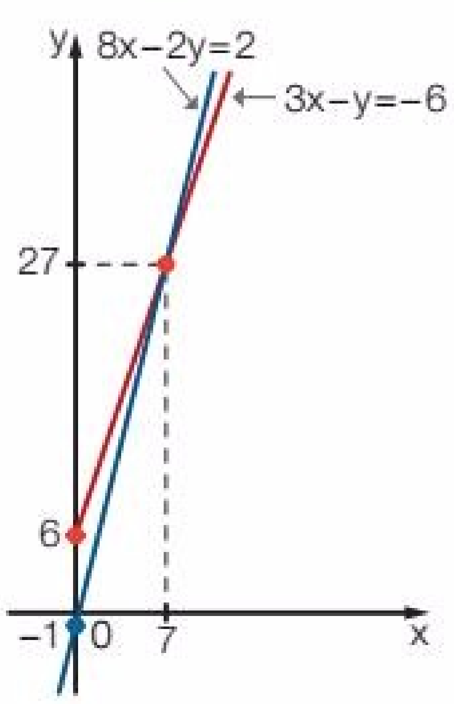
78. $x=-5$

79. a) SPI c) SPD
b) SPD d) SI

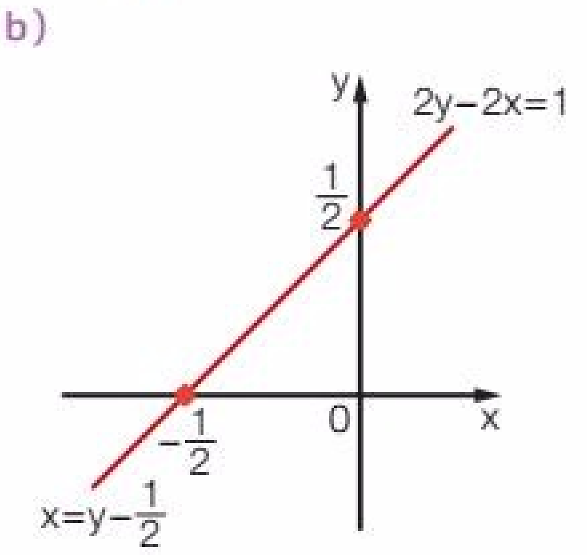
80. a) $\begin{cases} 8A+12B=324 \\ A+B=33 \end{cases}$
b) SPD
c) frango: 18 unidades; vegetariano: 15 unidades

81. $m=-4$

82. a) $(7, 27)$



b)



Ilustrações: Acervo da editora

83. a) SPD c) SPI
b) SI d) SPD

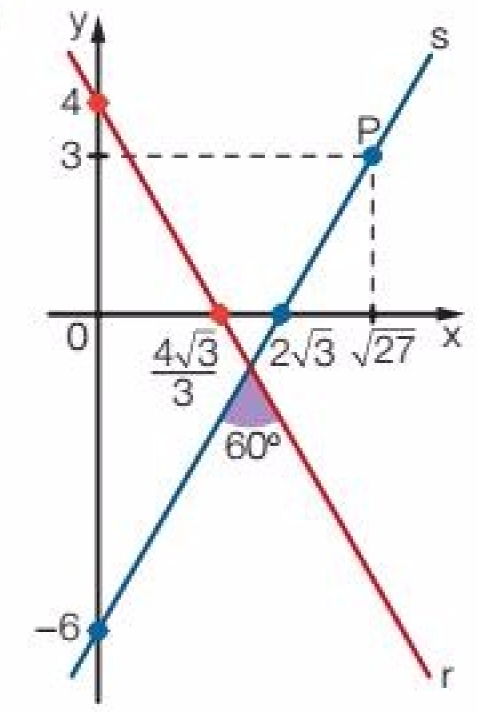
84. a) $a=3$; $b=2$
b) $a\neq 3$; $b\in\mathbb{R}$
c) $a=3$; $b\neq 2$

85. a) não existe solução
b) $x=\frac{6}{19}$; $y=\frac{23}{19}$
c) $x=-\frac{12}{5}$; $y=\frac{4}{5}$

86. a) 3 b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{7}{4}$

87. $m=\frac{2}{3}$ ou $m=-6$

88. a) s: $-\sqrt{3}x+y+6=0$
b)



Acervo da editora

89. $\frac{3}{4}$

90. aproximadamente 40°

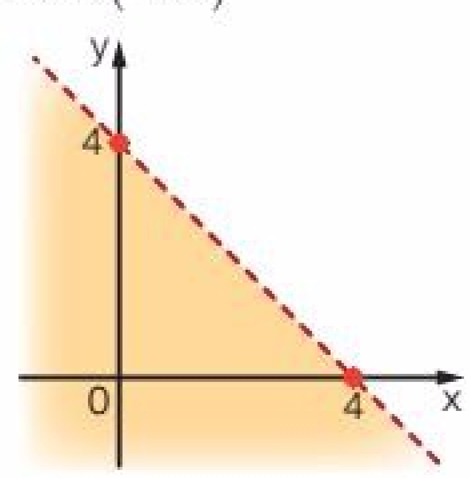
91. a) $\sqrt{5}$
b) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{7\sqrt{41}}{41}$

92. a) sim b) $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

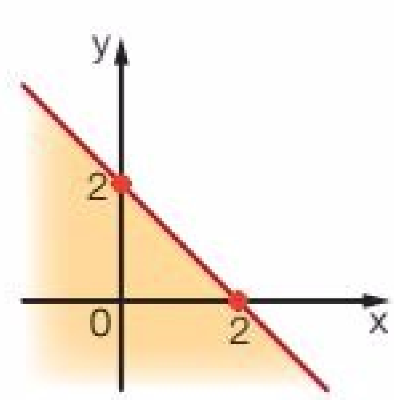
93. $y=-x+1$ ou $y=-x+5$

94. 50 u.a.; $C(-6, 0)$

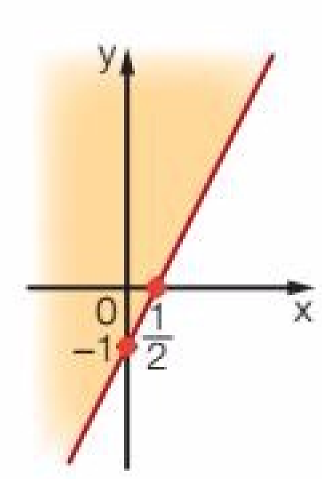
95. a)



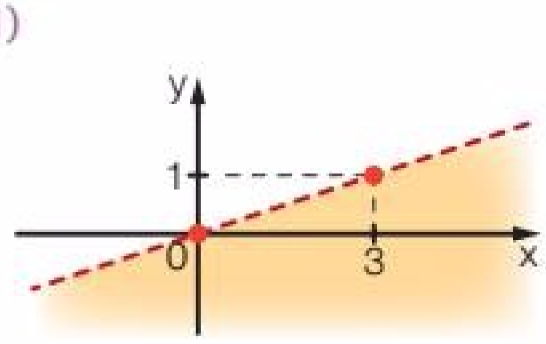
b)



c)



d)



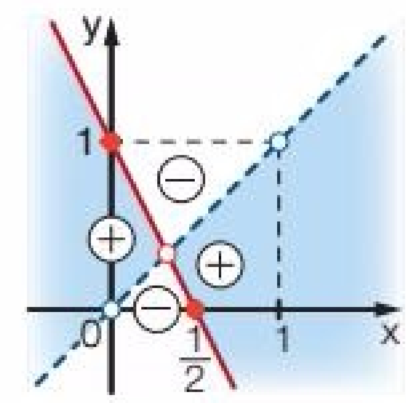
Ilustrações: Acervo da editora

96. c

97. a) $y+3x-3>0$
b) $y-\frac{5}{2}\leqslant 0$
c) $y-\frac{1}{2}x+1>0$
d) $x-4\geqslant 0$

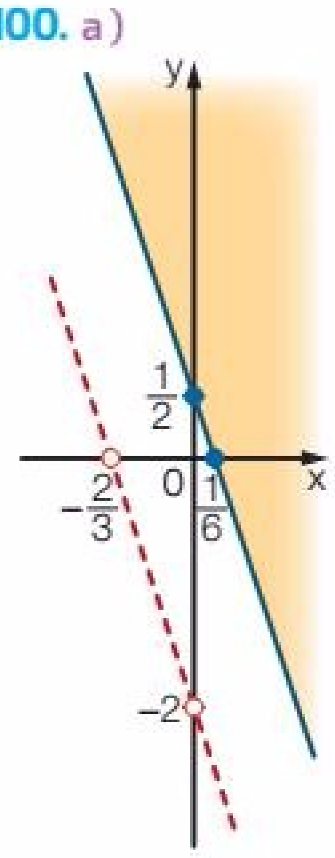
98. a

99.

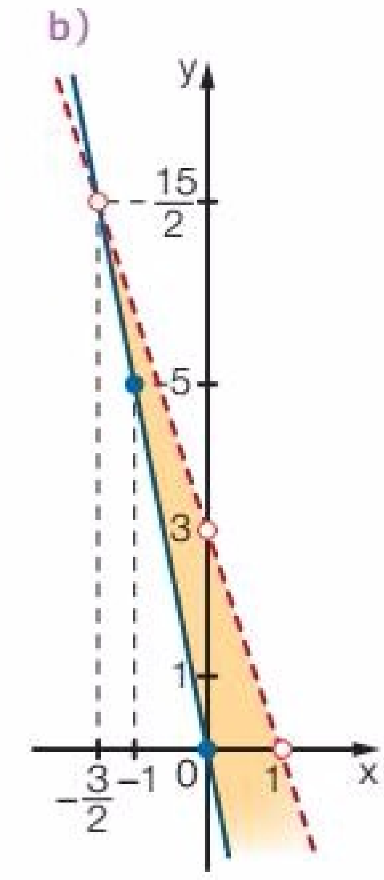


Acervo da editora

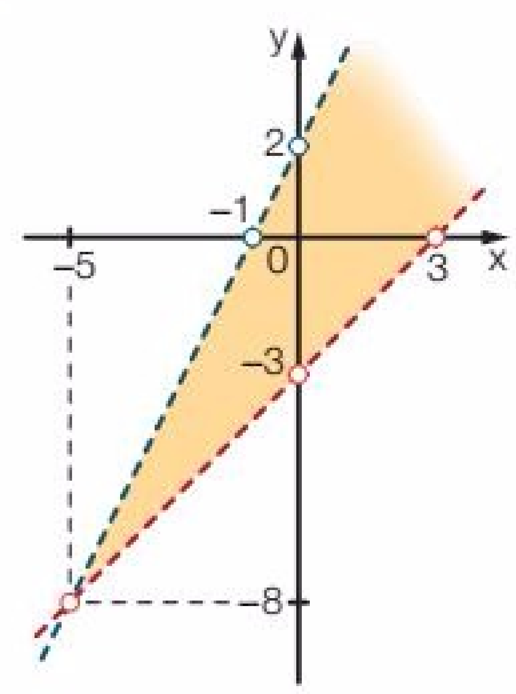
100. a)



b)

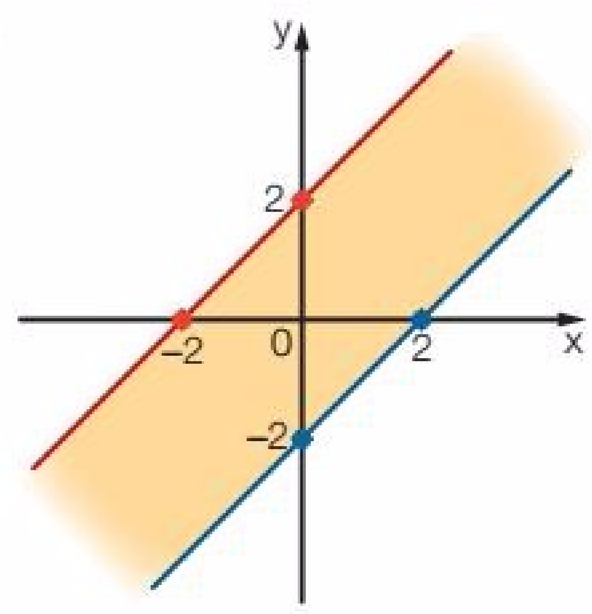


c)



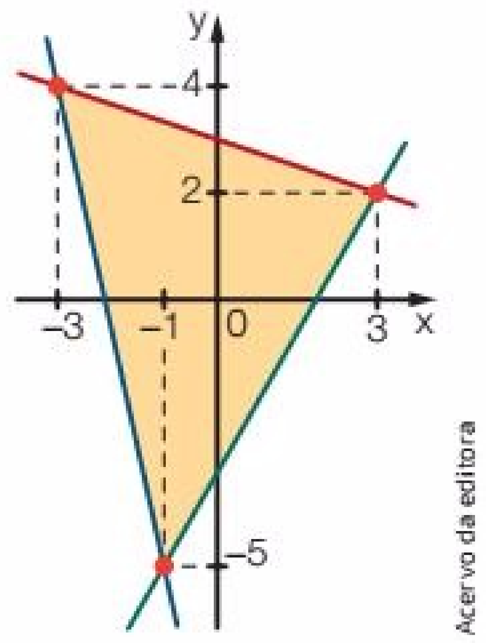
Ilustrações: Acervo da editora

101.



Acervo da editora

102. 25 u.a.



Acervo da editora

capítulo 3 A circunferência e as cônicas

1. a) $O(0,2)$; 3

b) $O(-1,0)$; $2\sqrt{2}$

c) $O\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$; 1

d) $O(4,-4)$; 2

2. a) $(x-1)^2+(y-4)^2=49$

b) $(x+5)^2+y^2=16$

c) $(x+2)^2+(y+6)^2=3$

d) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

3. $(x+2)^2+(y-3)^2=10$

4. a) $1\,962{,}5\ m^2$

b) $(x-5)^2+(y-2)^2=625$

5. $(x+4)^2+(y-1)^2=6$

6. $x^2+y^2-2x-3=0$

7. *Q* e *S*

8. a) $(x-3)^2+(y-1)^2=4$

b) $x^2+(y+3)^2=25$

9. a) 2 u.c.

b) $(x-2)^2+(y-3)^2=2$

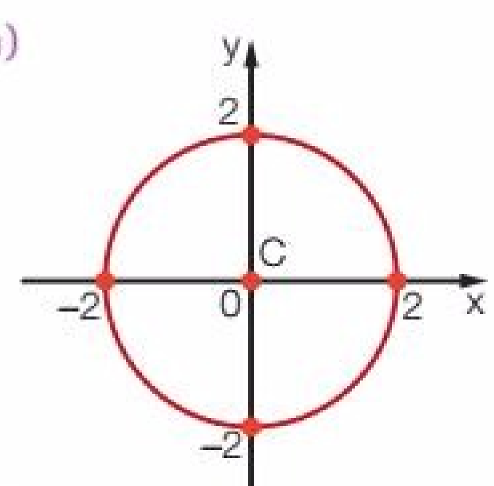
c) $\frac{\pi}{2}$

10. $x^2+y^2+8x-4y=0$

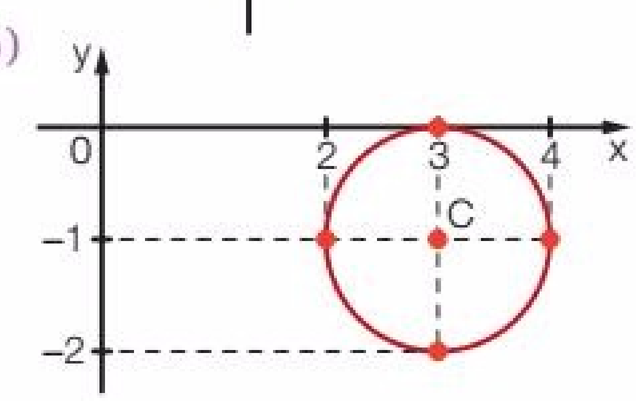
11. $(x+1)^2+(y-5)^2=10$; 2º quadrante

12. $m<34$

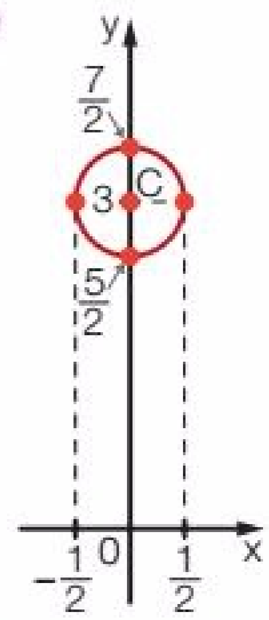
13. a)



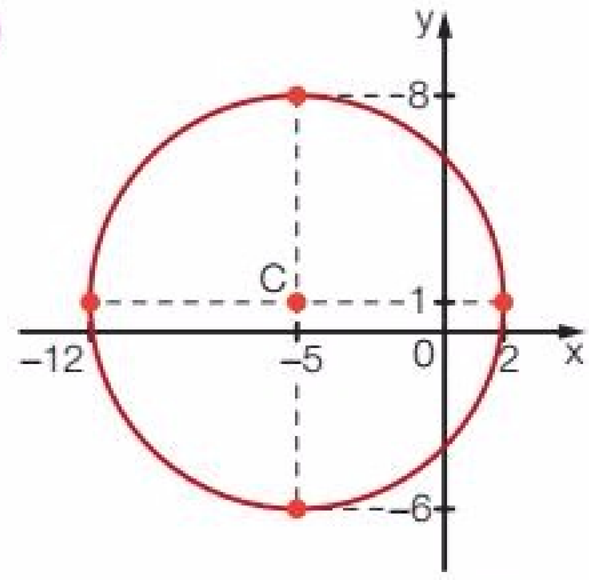
b)



c)



d)



Ilustrações: Acervo da editora

14. $k=3$ ou $k=5$

15. $\sqrt{5}$

16.
- externo
- pertencente
- interno
- externo

17. a) vermelha: $(x-5)^2+(y-8)^2=1$;

verde: $(x-5)^2+(y-8)^2=9$;

azul: $(x-5)^2+(y-8)^2=36$

b)
- 30 pontos
- 10 pontos
- 30 pontos
- 50 pontos

c) 70 pontos

d) Uma possível resposta: $A(6,3)$, $B(4,10)$ e $C(5,8)$.

18. *Q*; *R*; *T*

19.
- A: 5
- B: $3\sqrt{2}$
- D: $\sqrt{29}$
- E: 5
- F: $\sqrt{29}$
- G: $2\sqrt{5}$

a) igual; menor

b) pontos internos: *B* e *G*; pontos externos: *D* e *F*; pontos pertencentes: *A* e *E*

c) sim; Resposta esperada: se CP for menor, igual ou maior que a medida do raio, então ele será, respectivamente, interno, pertencente ou externo.

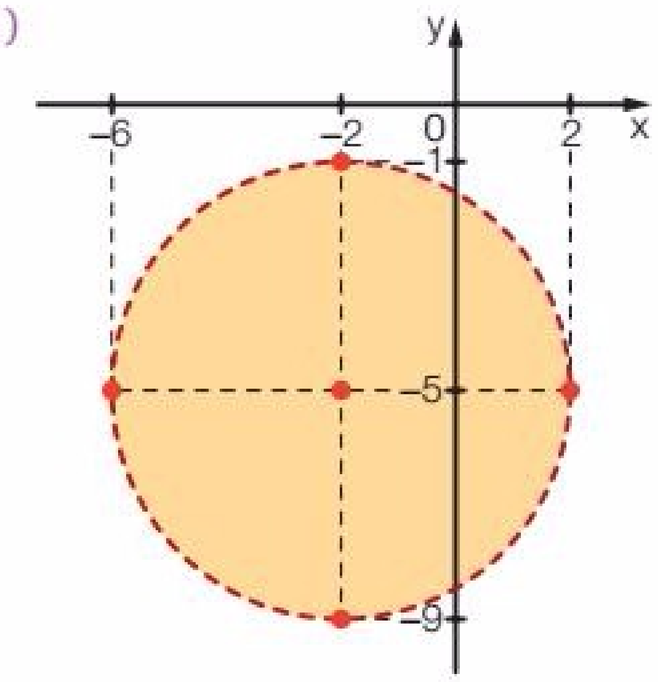
20. pertencente

21. $m\in\left]-\infty,-11\right[\cup\left]-3,+\infty\right[$

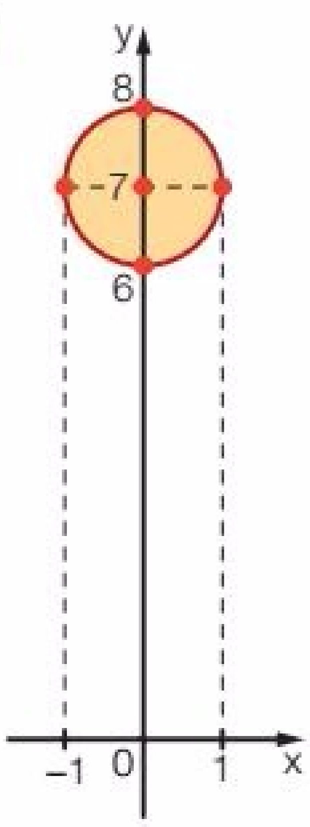
22. *P*: *A*, *B*; *Q*: *B*; *R*: nenhum; *S*: nenhum; *T*: *A*; *U*: *A*, *B*; *V*: *A*, *B*

23. *A*; *B*; *E*; *F*

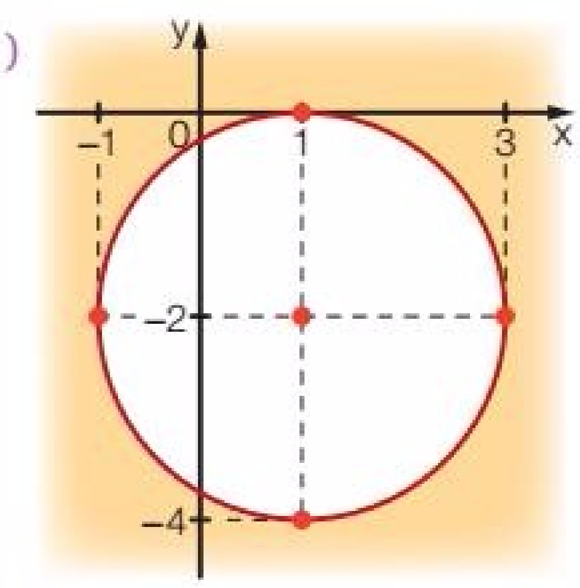
24. a)



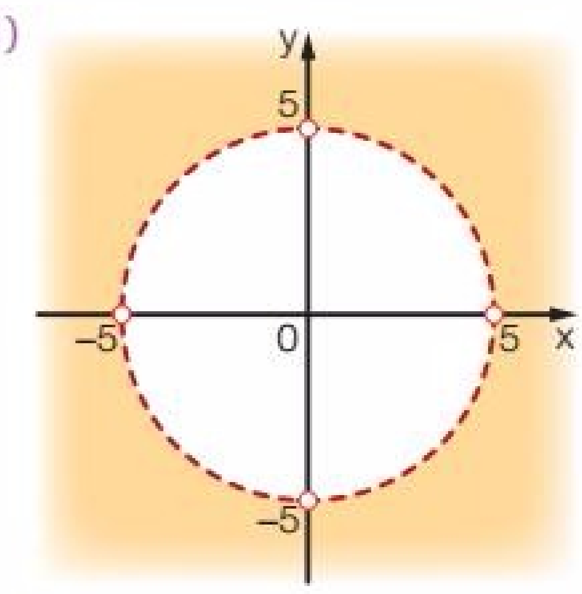
b)



c)



d)



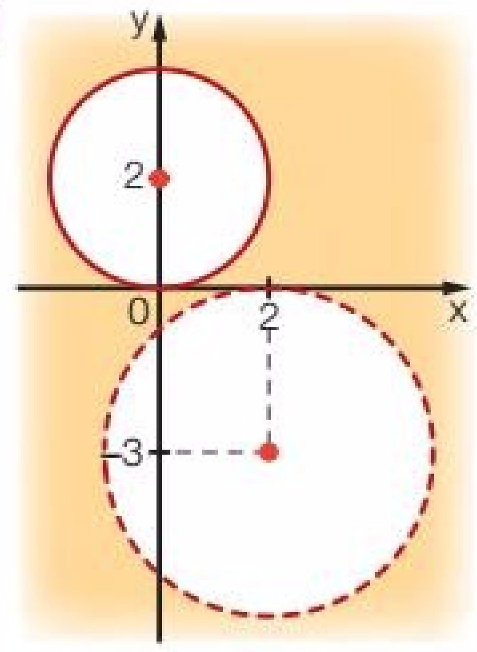
Ilustrações: Acervo da editora

25. a) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-6)^2\leqslant 16\\(x-3)^2+(y-4)^2>9\end{cases}$

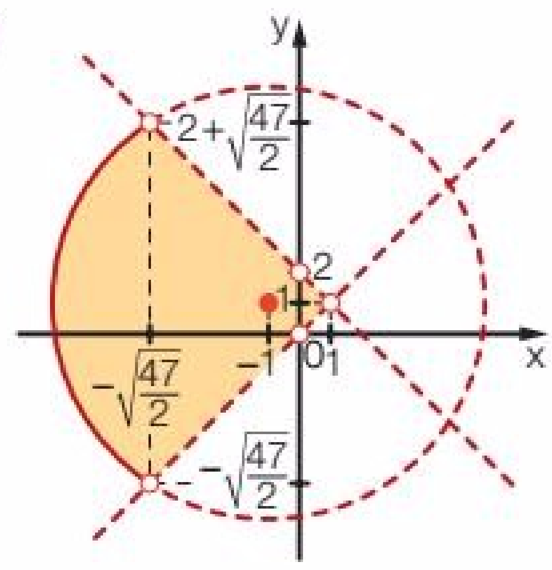
b) $\begin{cases}(x+4)^2+(y-6)^2\geqslant 16\\(x+4)^2+(y-3)^2\leqslant 9\end{cases}$

Respostas

26. a)



b)



Ilustrações: Acervo da editora

27. a) externa
b) secante
c) tangente
d) secante

28. 2 pontos

29. $y+x+7=0$; $y+x-1=0$

30. $2\sqrt{2}$

31. a) 15; tangente
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; secante
c) $20\sqrt{2}$; externa
d) $\frac{7}{10}$; secante

32. $\frac{27}{5}$ u.a.

33. $y-x-1=0$; $y+x-5=0$

34. $c<-2$ ou $c>8$

35. $x^2+y^2-12x-2y+28=0$

36. a) $(1,1)$
b) Não existem pontos de interseção.
c) $(0,6)$ e $(0,10)$
d) $(-2,1)$ e $\left(-\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$

37. a) $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$
b) $a<-\sqrt{3}$ ou $a>\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

38. $(-6,-3)$

39. a) $x^2+y^2-625=0$
b) $a=6{,}25\ m/s^2$
c) $4y-3x-125=0$

40. a) tangentes internas
b) internas
c) secantes
d) externas

41. $x^2+y^2+10x+16=0$

42. b

43. concêntricas

44. a) $(-5,2)$ e $(-1,-2)$
b) $(7,4)$
c) não possuem pontos de interseção

45. $\lambda_1: (x+7)^2+(y+4)^2=9$

46. $(3,6)$

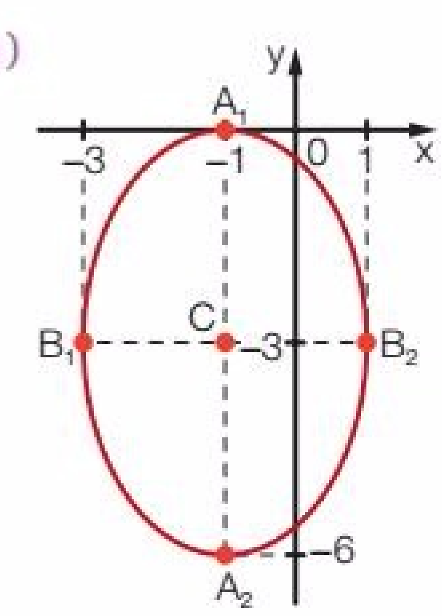
47. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$
b) $x^2+\frac{(y-3)^2}{10}=1$
c) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$
d) $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

48. a) $F_1(-12,6)$ e $F_2(4,6)$
b) $F_1(0,-1+\sqrt{7})$ e $F_2(0,-1-\sqrt{7})$

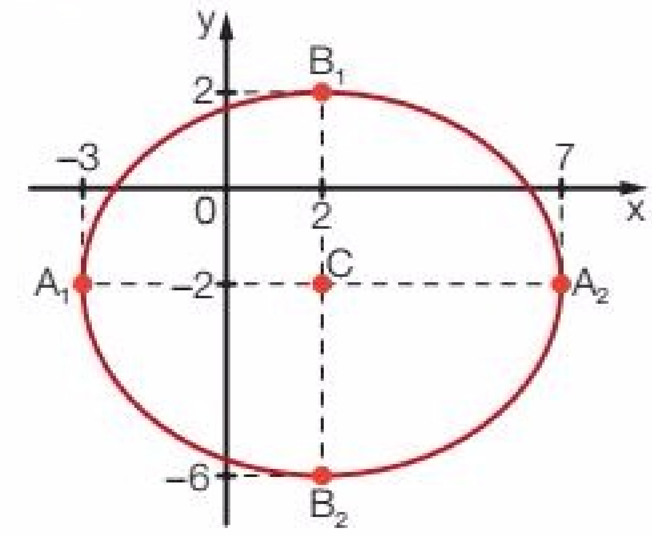
49. a) afélio; periélio
b) $e\cong 0{,}967$
c) $\frac{x^2}{(2{,}694\cdot 10^9)^2}+\frac{y^2}{(0{,}683\cdot 10^9)^2}=1$
d) Desacelerando, pois o cometa estará se afastando do Sol, ou seja, indo em direção ao afélio.
e) 2062; Resposta esperada: pois o cometa pode ser visto da Terra a cada 76 anos, e sua mais recente aparição foi em 1986.

50. a) $2a=4\sqrt{2}$; $2b=2\sqrt{3}$; $2c=2\sqrt{5}$; $e=\frac{\sqrt{10}}{4}$
b) $2a=2\sqrt{5}$; $2b=4$; $2c=2$; $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$
c) $2a=12$; $2b=8$; $2c=4\sqrt{5}$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$
d) $2a=6$; $2b=2\sqrt{6}$; $2c=2\sqrt{3}$; $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $2a=6$; $2b=2$; $2c=4\sqrt{2}$; $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
f) $2a=4\sqrt{34}$; $2b=20$; $2c=12$; $e=\frac{3\sqrt{34}}{34}$

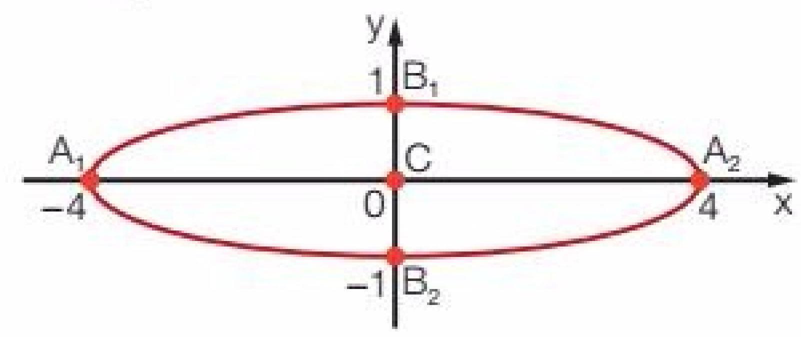
51. a)



b)



c)



Ilustrações: Acervo da editora

52. b

53. a) $F_1(0,2\sqrt{10})$ e $F_2(0,-2\sqrt{10})$
b) $F_1(-1-3\sqrt{5},2)$ e $F_2(-1+3\sqrt{5},2)$

54. $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

55. b; Resposta esperada: pois é a elipse mais semelhante a uma circunferência; logo, sua excentricidade está mais próxima de 0.

56. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1$

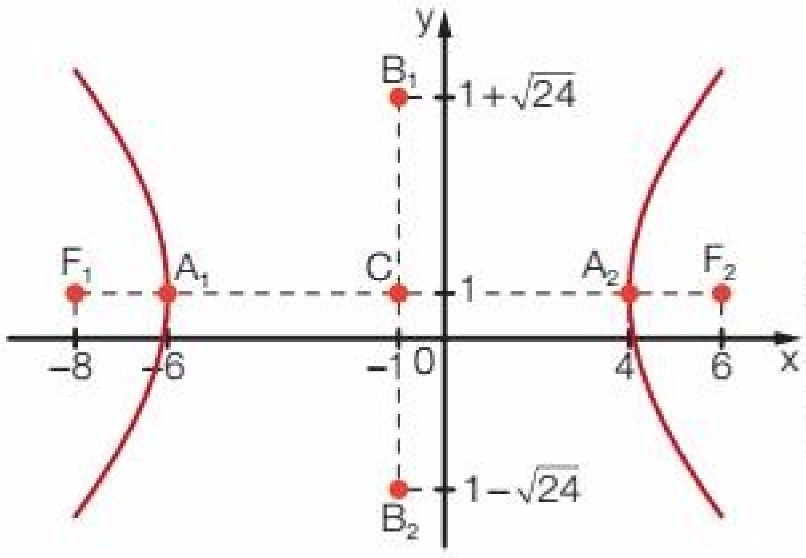
57. b

58. a) sobre o eixo *x*
b) paralelo ao eixo *y*
c) sobre o eixo *y*
d) sobre o eixo *x*

59. b; c; d; f
b) $\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y-3)^2}{8}=1$
c) $\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(x-4)^2}{5}=1$
d) $\frac{y^2}{2}-\frac{(x+8)^2}{6}=1$
f) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

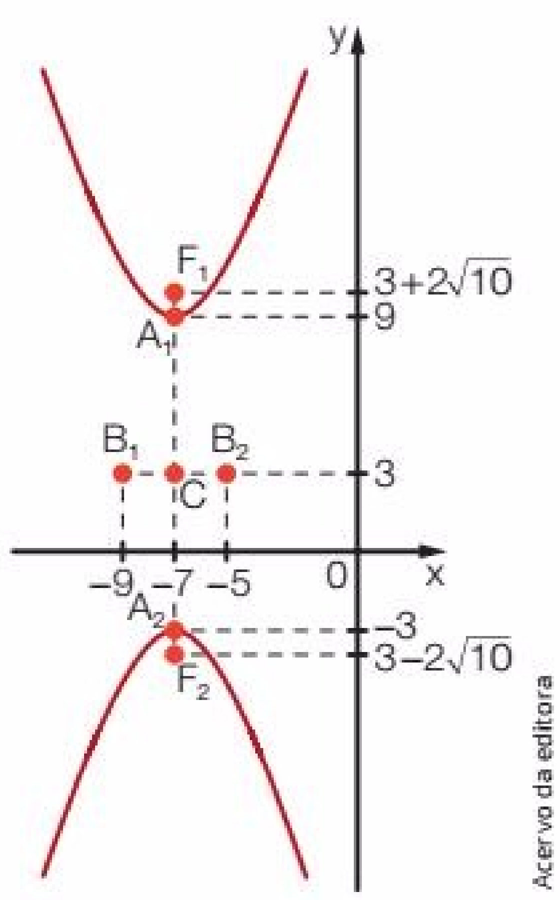
60. a) $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$; sobre o eixo *y*
b) $\frac{(x-10)^2}{27}-\frac{(y-10)^2}{9}=1$; paralelo ao eixo *x*

61. $\frac{(x+1)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$;



Acervo da editora

62. $3x+y+18=0$ e $3x-y+24=0$;



Acervo da editora

63. a) $4\sqrt{3}$

b) 6

c) $2\sqrt{21}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

64. $\frac{(y-4)^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$

65. a) $e=\frac{3}{2}$ c) $e=\sqrt{2}$

b) $e=2$ d) $e=\frac{7}{4}$

66. $F_1(0, 2\sqrt{13})$ e $F_2(0, -2\sqrt{13})$; $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$

67. $\frac{(x-8)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{7}=1$

68. c

69. a) 260 km c) 240 km

b) $e=1{,}08\overline{3}$ d) $\frac{x^2}{120^2}-\frac{y^2}{50^2}=1$

70. a) $x^2=8(y-1)$

b) $(y+2)^2=-12(x+2)$

c) $y^2=16x$

d) $(x-5)^2=-20(y-3)$

71. a) $F\left(-\frac{9}{2}, 8\right)$; $x=-\frac{3}{2}$

b) $F(8, 11)$; $y=5$

c) $F(-3, 5)$; $y=-3$

72. *B*; *D*

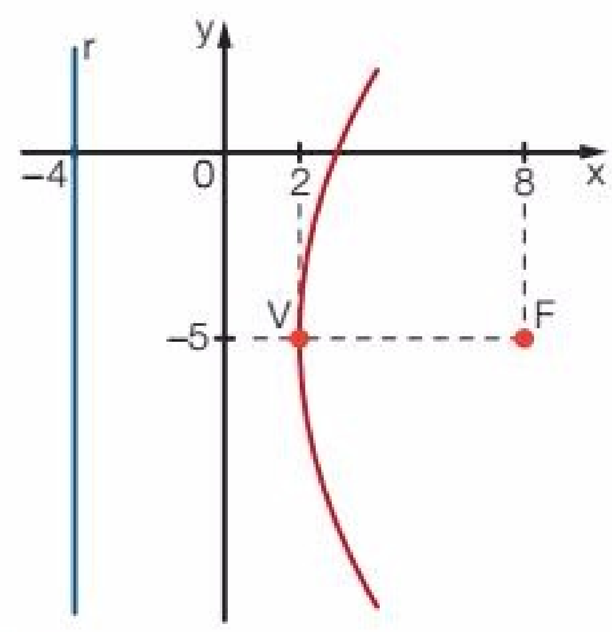
73. $V\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

74. a) $V\left(45, \frac{45}{2}\right)$; a altura máxima atingida pela bola de golfe

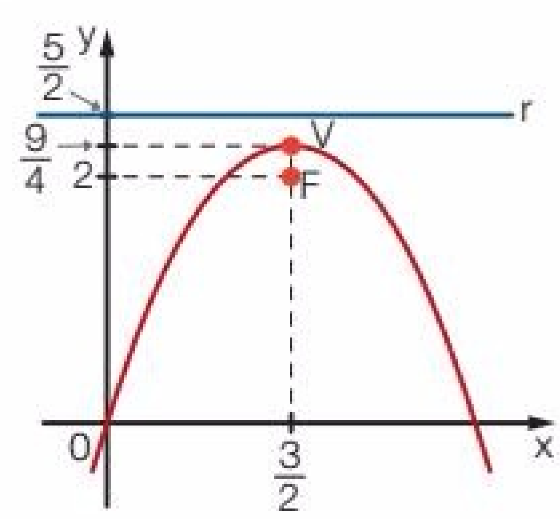
b) 45 m

c) 90 m

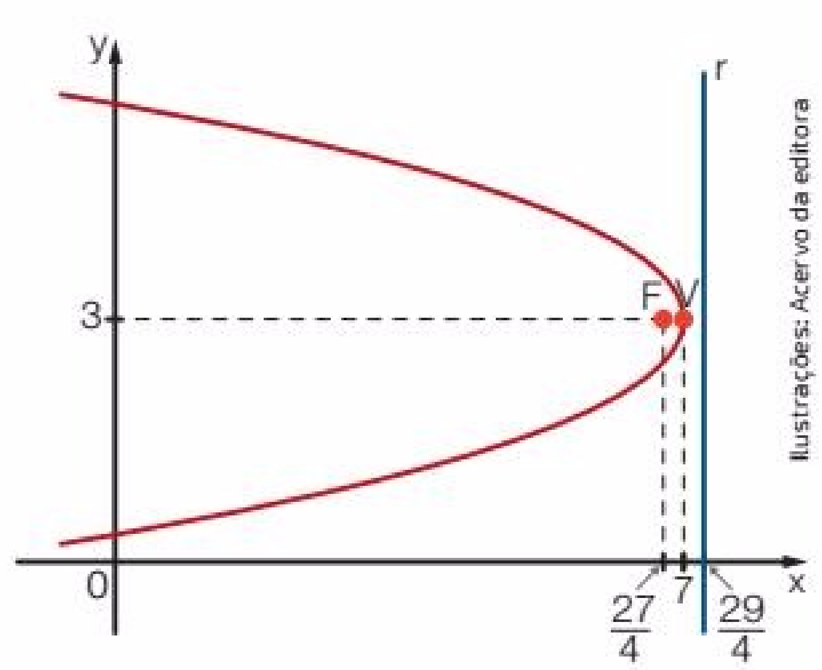
75. a)



b)



c)



Ilustrações: Acervo da editora

76. a) $(-7, 4)$ c) $x=-\frac{57}{8}$

b) $p=\frac{1}{4}$

77. $(x-4)^2=4(y+1)$

78. a; b

79. e

capítulo 4 A estatística

1. quantitativa discreta: idade (em anos) e número de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução e classe social; qualitativa nominal: sexo e estado civil

3. Quando todo elemento da população *P* também é elemento da amostra *A*, ou seja, quando todos os elementos da população serão pesquisados.

4. Resposta esperada: o fabricante utilizará uma amostra, uma vez que é inviável realizar a simulação com todas as 5 000 unidades produzidas mensalmente desse modelo de automóvel.

5. a) Na tabela I é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2013. Na tabela II é apresentada a quantidade de água necessária para produzir alguns produtos.

b) Nordeste; Sudeste

c) 33 366 000 000 L

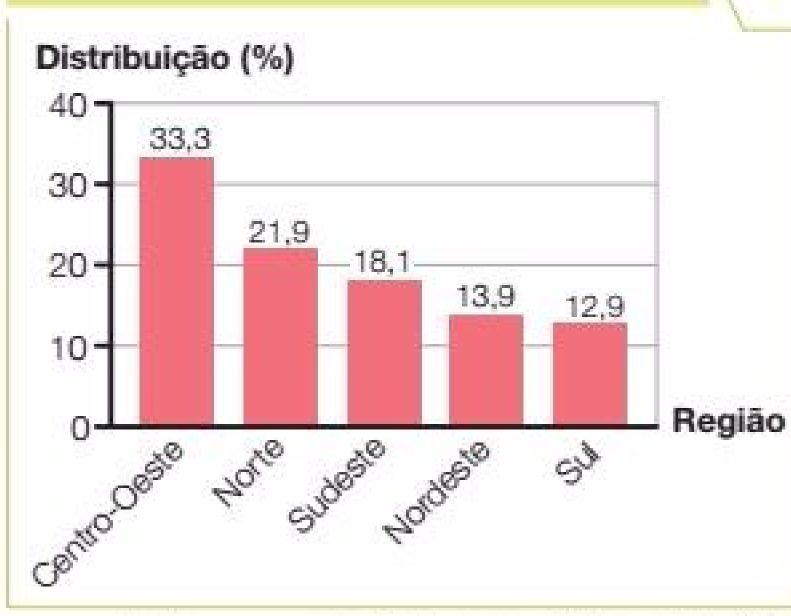
d) açúcar; leite; trigo

e) 15 913 L

6. b

7.

Distribuição do rebanho bovino nas regiões brasileiras em 2014



Acervo da editora

Fonte: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/file/Dados%20de%20rebanho%20bovino%20e%20bubalino%20do%20Brasil%202014.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

8. a) Resposta esperada: não, pois o gráfico apresenta a quantidade de resíduos sólidos urbanos produzida por dia por pessoa; para afirmarmos algo sobre a quantidade total de resíduos sólidos urbanos produzida no estado, temos que saber a quantidade de habitantes em cada estado e multiplicá-la pela quantidade de resíduos sólidos urbanos que cada uma produz.

b) 6 144 648 kg

9. a) câncer de estômago; câncer de bexiga; câncer de esôfago; câncer de pulmão

b) 28 220 novos casos

c) 74,46%

10. a) Yanomámi e Tenetehara

b) 677,1 mil

11. a) 2010

b) entre 2010 e 2011; 18,8 celulares por grupo de 100 habitantes

12. a

13.

População do Brasil de 1940 a 2010

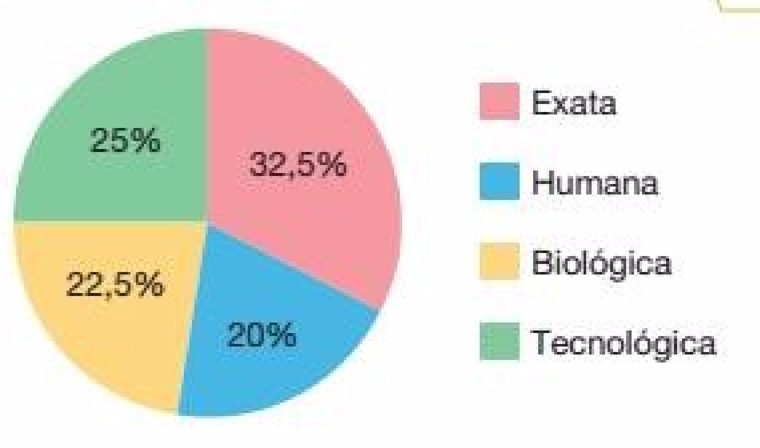
Acervo da editora

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/popul/default.asp?t=3&z=t&o=25&u1=1&u2=1&u3=1&u4=1&u5=1&u6=1>. Acesso em: 22 jan. 2016.

14. a) cestas de 2 pontos
b) 84 pontos

15.

Distribuição dos cursos por área de conhecimento



Acervo da editora

Fonte: Catálogo da instituição.

16. a) 20 a 24 anos e 25 a 29 anos
b) homens; mulheres

17. a) 2008
b) não; Resposta esperada: entre os anos de 2012 e 2013, 2014 e 2015 a área desmatada foi crescente.
c) aproximadamente 16,34%

18. a) média: 8; moda: 3; mediana: 7,5
b) média: 6,8; moda: 10 e 9; mediana: 8
c) média: −9,2; moda: −7; mediana: −7
d) média: 0; moda: −1; mediana: 0

19. a) média: 550 m; amodal; mediana: 508 m
b) Burj Khalifa; 480,5 m

20. Carlos: 42 anos; filho: 21 anos; pai: 84 anos

21. 67

22. a) Não, pois sua média aritmética final será de aproximadamente 6,8, que é inferior à nota média mínima.
b) 7,3
c) Sim, pois para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5, nota com a qual sua média final ficará acima de 7.

23. 7,7

24. d

25. b) aproximadamente 1,4 dispositivo por habitante
c) sim; Resposta esperada: pois em 2020 estima-se que a população mundial seja de aproximadamente 7,8 bilhões de habitantes, enquanto a quantidade de dispositivos conectados à internet seja de mais de 50 bilhões, de maneira que a média desses dispositivos por habitante será de aproximadamente $\frac{50}{7,8} \simeq 6,4$.
d) O aparelho lançado em 2015 possui a tela cerca de 175% maior que a do lançado no ano 2000.

26. a) $\overline{x} = 62$; amodal; $Md = 63$; $Dm = 6$; $V = 50,25$; $Dp \simeq 7,09$
b) $\overline{x} = 24$; $Mo = 14$; $Md = 25$; $Dm \simeq 7,43$; $V = 74,29$; $Dp \simeq 8,62$
c) $\overline{x} = 6,15$; $Mo = 4,5$ e $Mo = 12$; $Md = 4,5$; $Dm = 3,9$; $V = 18,38$; $Dp = 4,29$
d) $\overline{x} = 2,5$; $Mo = 3$; $Md = 3$; $Dm = 6,375$; $V = 81$; $Dp = 9$

27. a) 1ª semana: 0,86%;
2ª semana: 0,85%
b) R$ 4,69; R$ 4,72
c) 1ª semana: $Dm = 0,01$; $V = 0,00017$; $Dp = 0,013$
2ª semana: $Dm = 0,013$; $V = 0,0002$; $Dp = 0,014$

28. Não, pois, apesar de sua média ser superior a 60 pontos ($\overline{x} = 61$), o desvio padrão foi superior a 5 pontos ($Dp = 5,7$).

29. a) piloto A
b) piloto B

30. d

31. a) R$ 2 360,00
b) aproximadamente R$ 773,12
c) aumentará R$ 100,00; continuará com o mesmo valor

32.

Nascimentos diários

Número de nascimentos	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0	1	1	3,3%	3,3%
1	3	4	10%	13,3%
2	9	13	30%	43,3%
3	6	19	20%	63,3%
4	8	27	26,7%	90%
5	3	30	10%	100%
Total	30		100%	

Fonte: Maternidade

33. a) 40 apartamentos; 6 apartamentos
b)

Número de moradores, por apartamento, em um condomínio residencial em janeiro de 2016

Número de moradores	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0	4	4	10%	10%
1	5	9	12,5%	22,5%
2	12	21	30%	52,5%
3	11	32	27,5%	80%
4	6	38	15%	95%
5	2	40	5%	100%
Total	40		100%	

Fonte: Administração do condomínio.

c) 21 apartamentos; 52,5%

34. a)

Número médio de horas de sono diário dos alunos de uma turma em fevereiro de 2016

Número de horas de sono	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
4	1	1	3,125%	3,125%
5	2	3	6,25%	9,375%
6	6	9	18,75%	28,125%
7	12	21	37,5%	65,625%
8	6	27	18,75%	84,375%
9	3	30	9,375%	93,75%
10	2	32	6,25%	100%
Total	32		100%	

Fonte: Resultado do questionário.

b) 32 alunos
c) 28,125%

35. a) 24 pacientes
b) 45%
c) 43 pacientes

36. a) 20 atletas
b) 1,8 ⊢ 1,9
c) 3 atletas
d) 55%
e) Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

37. a)

IDH dos países do continente americano em 2014

IDH	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0,480 ⊢ 0,560	1	1	2,86%	2,86%
0,560 ⊢ 0,640	4	5	11,43%	14,29%
0,640 ⊢ 0,720	7	12	20%	34,29%
0,720 ⊢ 0,800	19	31	54,29%	88,58%
0,800 ⊢ 0,880	2	33	5,71%	94,29%
0,880 ⊢ 0,960	2	35	5,71%	100%
Total	35		100%	

Fonte: <http://hdr.undp.org/en/composite/HDI>. Acesso em: 22 jan. 2016.

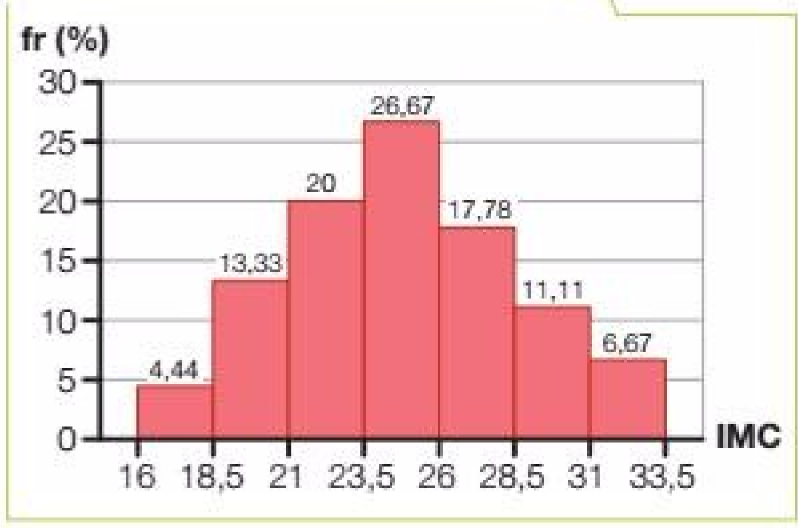
b) $0{,}720 \vdash 0{,}800$ d) 31 países
c) 20%

38. a) 126 800 271 habitantes; 124 715 280 habitantes
b) 3,42%
c) $0 \vdash 20$ anos e $20 \vdash 40$ anos

39. d

40. a)

IMC de algumas pessoas em março de 2016



Fonte: Pessoas do grupo.

41. a) 100 plantas
b) $\overline{x}=8{,}14$; Mo = 8; Md = 8
c) Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

42. a) 82 km/h b) acima

43. aproximadamente 6,08

44. a) 315 municípios
b) aproximadamente 8,15 raios/km²
c) Md = 9; Mo = 7

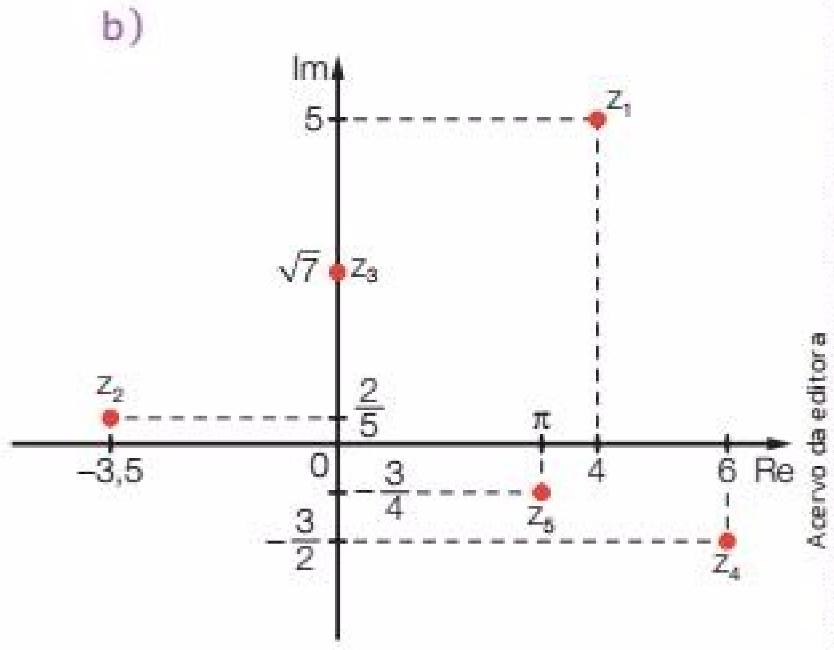
capítulo 5 Os números complexos

1. $a=3; b=-2; c=\frac{1}{2}; d=2+2i; e=2-2i$ (ou $d=2-2i$ e $e=2+2i$)

2. a) $Re(z_1)=3$; $Im(z_1)=2$
b) $Re(z_2)=0$; $Im(z_2)=-4$
c) $Re(z_3)=\sqrt{5}$; $Im(z_3)=0$
d) $Re(z_4)=-\frac{1}{2}$; $Im(z_4)=\sqrt{2}$
e) $Re(z_5)=0$; $Im(z_5)=0$

3. a)
- $z_1=4+5i$
- $z_2=-3{,}5+\frac{2}{5}i$
- $z_3=\sqrt{7}i$
- $z_4=6-\frac{3}{2}i$
- $z_5=\pi-\frac{3}{4}i$

b)



4. $z_1=4+2i$; $z_2=3+3i$; $z_3=-3+5i$; $z_4=-5-i$; $z_5=-2-5i$; $z_6=-4i$; $z_7=2-3i$; $z_8=7$

5. a) $S=\{2+i, 2-i\}$
b) $S=\{3+i, 3-i\}$
c) $S=\left\{\frac{1}{2}+3i, \frac{1}{2}-3i\right\}$
d) $S=\left\{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right\}$

6. a) $p=-4$
b) $p=-\frac{2}{3}$
c) $p=-2$

7. a) $a=1$
b) $a=12$
c) $a>4$

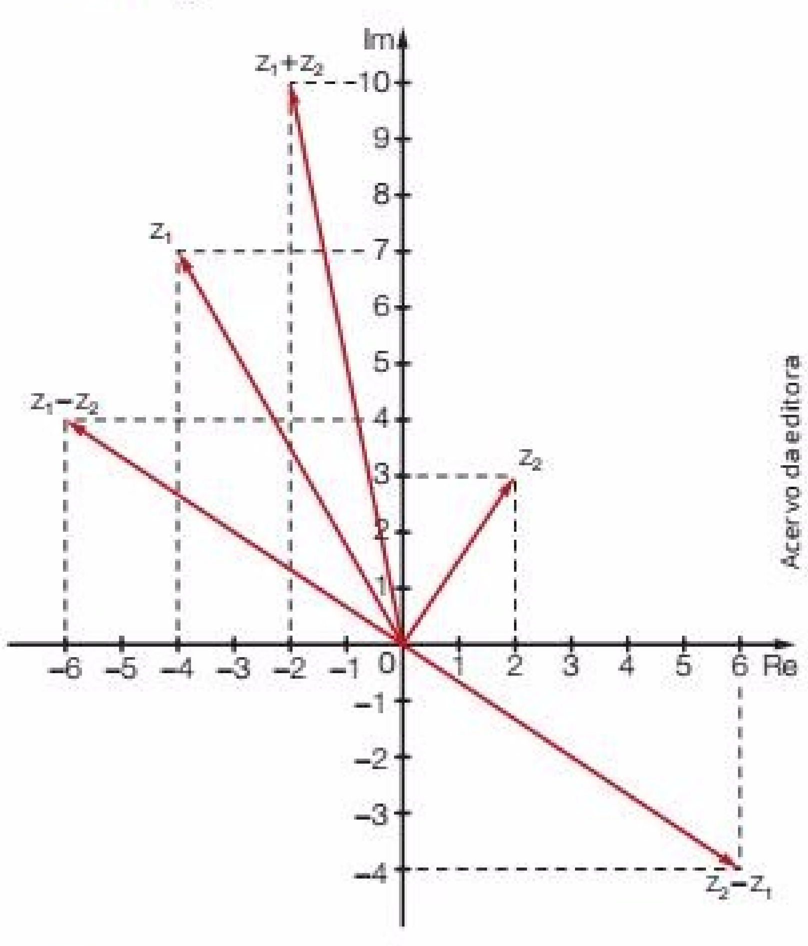
8. a) $x=3$; $y=-1$
b) $x=\frac{1}{2}$; $y=5$
c) $x=-3$; $y=4$

9. a) -10
b) $z=150i$

10. a) $a<5$; $b\leq 6$
b) $a\leq 4$; $b<7$
c) $a\in\mathbb{R}$; $b\leq 0$
d) $-4\leq a<3$; $b\leq 5$
e) $-1<a<6$; $-3\leq b<4$
f) $a\geq 0$; $b\geq 0$

11. a) $5+3i$
b) $-7-6i$
c) $9+8i$
d) $-2-15i$
e) $22+\sqrt{5}i$

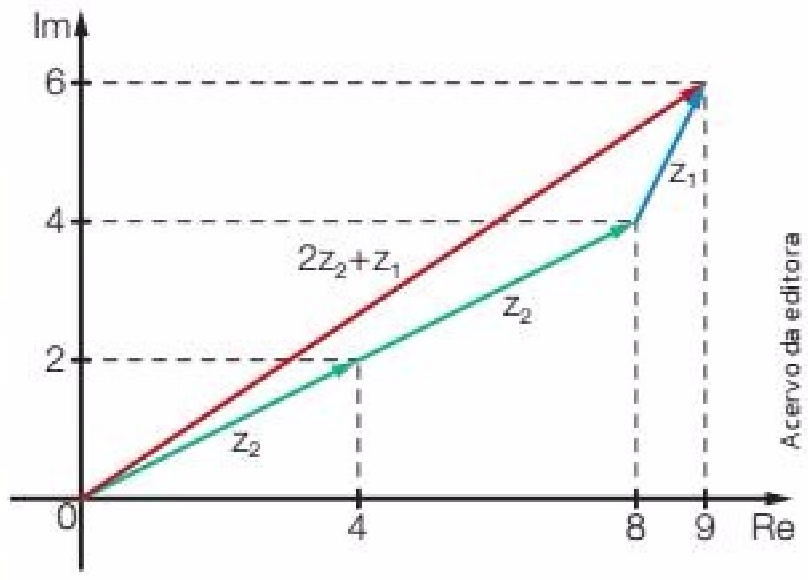
12. a) $z_3=-2+10i$
b) $z_3=-6+4i$
c) $z_3=6-4i$



13. $z_1=-1+9i$

14. b; e

15. a) $z_1=1+2i$; $z_2=4+2i$; $z_1+z_2=5+4i$
b) $9+6i$;



16. $z_1=2+7i$; $z_2=3-5i$; $z_3=4i$

17. a) $29-41i$
b) $-65-72i$
c) $-840-2\,378i$

18. $z=-3+4i$

19. $p=2$

20. $-11-4i$

21. $z_1=3-2i$, $z_2=\frac{20}{k}i$ e $z_3=k$, com $k\in\mathbb{R}^*$

22. b

23. a) 5 b) 20 c) 57 d) 25 e) 16

24. $m=\frac{3}{4}$; $n=2$

25. a) $-5-i$ b) $-5-i$ c) $-78-6i$ d) $-78-6i$

27. $z_1=-5+i$; $z_2=-5+4i$

29. a) $2-2i$
b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$
c) 4
d) $3+2i$

30. $z=\frac{9}{37}+\frac{77}{74}i$

31. a) $a=-\frac{15}{b}$ b) $a=\frac{3b}{5}$

32. a) $\frac{2}{5}-\frac{7}{5}i$
b) $-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}i$
c) $-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i$

33. a) $\frac{z}{w}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
b) $\frac{z}{\overline{w}}=\left(\frac{ac-bd}{c^2+d^2}, \frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)$

34. Quarto quadrante, pois considerando $z=a+bi$ e $w=c+di$ com *a*, *b*, *c* e *d* maiores que zero, ao desenvolver $\frac{z}{w}$, obtemos $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. Pela representação geométrica, temos que $a>c$ e $b<d$, portanto $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}>0$ e $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}<0$.

35. a) i b) -1 c) i d) 1 e) $-i$

36. $a=-\frac{9}{2}$; $b=-\frac{13}{2}$

37. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

38. a) quatro números
b) $-1-i$; $-1+i$; $1+i$; $1-i$

39. $w=-1$

40. a) 5 c) 17 e) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{5}{2}$ d) $\sqrt{51}$ f) 1

41. a) $2\sqrt{5}$ u.c. c) $\sqrt{34}$ u.c. e) $\sqrt{2}$ u.c.
b) $\sqrt{10}$ u.c. d) $\sqrt{2}$ u.c.

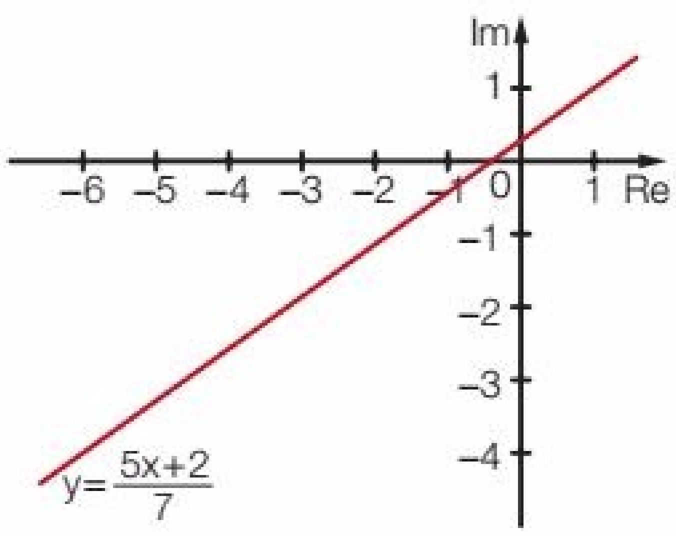
42. a) $\sqrt{53}$ u.c. b) 25 u.c. c) 39 u.c.

43. $x=-4$ ou $x=4$

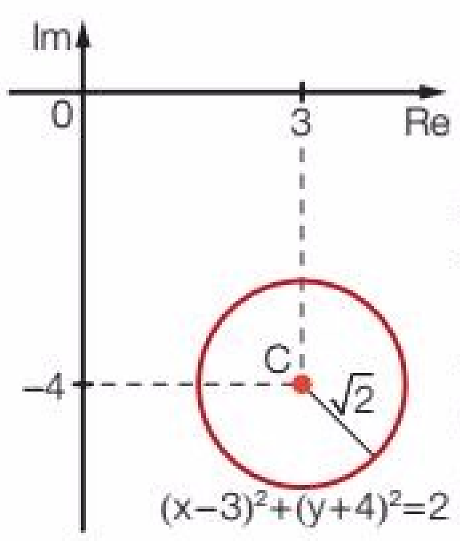
44. a) $z=3-11i$ c) $z=-3-5i$
b) $z=3+i$ d) $z=9-5i$

45. a) $z=6+8i$ b) $z=2$ ou $z=-1$

46. a)



b)



Ilustrações: Acervo da editora

47. a) $y=14$ ou $y=-18$
b) $2\sqrt{65}$ u.c.

50. a) $z_1=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$
b) $z_2=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$
c) $z_3=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$
d) $z_4=6\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$
e) $z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

51. a) $z_1=5-5\sqrt{3}i$ c) $z_3=10+10\sqrt{3}i$
b) $z_2=3-3i$ d) $z_4=-8$

52. $\frac{3\pi}{2}$

53. $z_1=1\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$;
$z_2=5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$; 165°

54. $w=1(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)$

55. 9 h ou 21 h

56. a) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$;
$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$;
$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$;
$z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$
b) $2(\pi-2)$ u.a.

57. forma trigonométrica:
$z_1=2(\cos 60°+i\,\text{sen}\,60°)$,
$z_2=2(\cos 135°+i\,\text{sen}\,135°)$,
$z_3=2(\cos 225°+i\,\text{sen}\,225°)$ e
$z_4=2(\cos 330°+i\,\text{sen}\,330°)$;
forma algébrica: $z_1=1+\sqrt{3}i$,
$z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_3=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ e
$z_4=\sqrt{3}-i$

58. a

59. a) $24(\cos 125°+i\,\text{sen}\,125°)$
b) $12(\cos 230°+i\,\text{sen}\,230°)$
c) $\frac{2}{3}(\cos 35°+i\,\text{sen}\,35°)$
d) $\frac{3}{2}(\cos 325°+i\,\text{sen}\,325°)$
e) $\frac{2}{9}(\cos 245°+i\,\text{sen}\,245°)$

60. $z_1=12(\cos 70°+i\,\text{sen}\,70°)$;
$z_2=4(\cos 80°+i\,\text{sen}\,80°)$

62. $z=-27$

63. $z^{-2}=\frac{1}{16}(\cos 240°-i\,\text{sen}\,240°)$

64. $z_1=6(\cos 330°+i\,\text{sen}\,330°)$

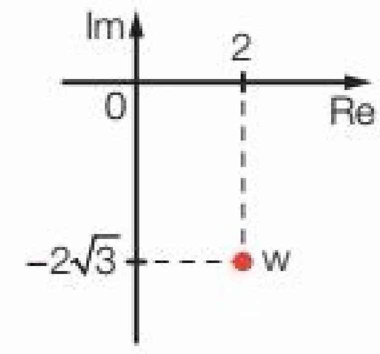
65. a) $v=220(\cos 30°+j\,\text{sen}\,30°)$;
$i=10(\cos 60°+j\,\text{sen}\,60°)$
b) $v=110\sqrt{3}+110j$; $i=5+5\sqrt{3}j$
c) $P=2\,200(\cos 90°+j\,\text{sen}\,90°)$;
$P=2\,200j$

66. a) $z^5=32(\cos 175°+i\,\text{sen}\,175°)$
b) $z^8=256(\cos 280°+i\,\text{sen}\,280°)$
c) $\frac{z^{12}}{z^8}=16(\cos 140°+i\,\text{sen}\,140°)$
d) $(z^3)^4=4\,096(\cos 60°+i\,\text{sen}\,60°)$

67. $z^6=2^6(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)$,
$z^{16}=2^{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ e
$z^{101}=2^{101}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$; $z^6=2^6$,
$z^{16}=-2^{15}+2^{15}\sqrt{3}i$ e
$z^{101}=-2^{100}-2^{100}\sqrt{3}i$

68. a) $S=\{n\in\mathbb{Z}\mid n=6k,\ k\in\mathbb{Z}\}$
b) $S=\{n\in\mathbb{Z}\mid n=6k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}$

69. $2-2\sqrt{3}i$;



Acervo da editora

70. $w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

71. a) $P'(0,-8)$ b) $P'(-8,0)$

72. c

capítulo 6 Os polinômios e as equações polinomiais

1. a) polinômio
b) polinômio
c) não polinômio
d) não polinômio
e) polinômio
f) não polinômio

2. a) $gr(p)=8$ c) $gr(g)=7$
b) $gr(q)=9$ d) $gr(h)=0$

3. a; c; f; g; h

4. $m=3$; $a(x)=-5$

5. $m=4$ e $n=-12$ ou $m=-4$ e $n=12$

6. $m=2$

7. $m=3$ ou $m=-3$

8. $gr(p)=\begin{cases}3, \text{ se } m=6\\ 4, \text{ se } m=-6\\ 6, \text{ se } m\neq 6 \text{ e } m\neq -6\end{cases}$

9. $a=1$; $b=-\frac{1}{6}$; $c=-1$

10. $p(x)=x^2+2x-8$; raízes: 2 e -4

11. $gr(p)=8$

12. a) $a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=4$
b) $b=-15$; $c=70$; $d=-120$
c) $p(x)=x^4-15x^3+70x^2-120x+64$

13. $a=1$; $b=3$

14. a) $r=3$
b) $a=3$; $b=6$; $c=9$; $d=12$; $e=15$; $f=18$
c) $p(x)=18x-18$ e $q(x)=18x-18$

15. -6

16. a) $gr(a)=4$; 0,0027
b) aproximadamente 4,23 milhões de hectares

17. a) $(f+g)(x)=5x^4+2x^3+3x^2+2x+2$
b) $(g-f)(x)=-5x^4+2x^3-3x^2+6x+4$
c) $(f\cdot g)(x)=10x^7+26x^5+11x^4+$
$+10x^3+x^2-10x-3$

18. a) $gr(q)=7$ c) $gr(q)=8$ e) $gr(q)=10$
b) $gr(q)=7$ d) $gr(q)=12$

19. $a=3$ ou $a=0$; para $a=3$, temos: $(p\cdot q)(x)=-45x-45$; para $a=0$, temos: $(p\cdot q)(x)=-36x+6$

20. $a=-4$; $b=5$; $c=8$

21. 0, 4 e -4

22. a) $v(x)=\frac{7}{4}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{63}{2}x^4-35x^3+$
$+\frac{735}{4}x^2+\frac{175}{2}x-350$
b) $196\ m^3$

23. a) $I(t)=\frac{1}{8}(t^3-13t^2+39t)$
b) Podemos afirmar que a fábrica teve prejuízo.
c) prejuízo; R\$ 2 625,00
d) maio, junho, julho e agosto

24. a) crescimento: janeiro a fevereiro, agosto a dezembro; decrescimento: fevereiro a agosto
b) Função polinomial de grau 6 (gráfico **C**), porque seus valores são os que mais se aproximam dos valores reais.
c) aproximadamente 0,00425; aproximadamente 0,00567
d) aproximadamente 30,3%
e) $m(x)-q(x)-0{,}0006x^4+$
$+0{,}0169x^3-0{,}1713x^2+$
$+0{,}6466x-0{,}67$;
essa diferença significa o quanto os valores dos polinômios estão distantes entre si para cada valor de *x*.

25. a) quociente: $2x^4-5$; resto: 10
b) quociente: $x^4+2x^3+5x^2+12x+29$; resto: $68x+29$
c) quociente: x^5+2x^3-3x; resto: $-10x+18$

26. $2x$ **27.** $a=-10$

28. $p(x)=x^5+2x^4+4x^3-5x^2+3x+1$

29. $gr(r)=0$; $gr(q)=7$

30. $m=5$; $n=-3$ **31.** $m-n=-6$

32. $k=-10$; $r(x)=69x$

33. $k=15-2i$; $a=2$; $r(x)=2i$

34. a) -13 b) 11 c) 20

35. $m=3$ **36.** $a=-12$; $b=29$; $c=-7$

37. 60 **38.** 1 300

39. 1 **40.** $9x+11$

41. a) $q(x)=6x^3-30x^2+147x-730$; $r(x)=3\,648$
b) $q(x)=2x^5-x^4-3x^3-9x^2-35x-100$; $r(x)=-299$
c) $q(x)=4x^4-8x^3+18x^2-39x+79$; $r(x)=-159$

42. $h(x)=x-2$;
$p(x)=3x^5-2x^4-3x^3+6x^2+2x-1$;
$q(x)=3x^4+4x^3+5x^2+16x+34$; $r(x)=67$

43. $r(x)=\frac{33}{8}$ **44.** $a=-3$

45. a) $h\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{95}{27}$; $h(2)=107$
b) $h(x)=7x^3+11x^2+5x-3$

46. quociente: $4x^4+2x^3+6x^2-3x-1$; resto: 0

47. $b=-4$ **48.** $m=7$

49. $a=6$; $b=4$

50. a) 3 raízes c) 5 raízes
b) 4 raízes d) 6 raízes

51. $S=\{-2, 1, 3\}$; grau: 9

52. $p(x)=3(x+5)(x-3)$

53. $p(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$

54. a) Uma possível resposta: $p(x)=3x^3-6x^2-27x+54$
b) Uma possível resposta: $p(x)=x^4-7x^3+14x^2+2x-20$

55. a) $S=\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 4\right\}$ b) $S=\left\{-2, \frac{1}{3}, 1, 3\right\}$

56. $x=2$ **57.** 9 min e 18 min

58. $a=-\frac{1}{4}$; $b=\frac{3}{2}$

59. $f(x)=4x^4-44x^3+180x^2-332x+240$

60. soma: 4; produto: -1

61.
- $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{3}{5}$
- $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_4+x_2\cdot x_3+$
$+x_2\cdot x_4+x_3\cdot x_4=\frac{2}{5}$
- $x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_1\cdot x_3\cdot x_4+$
$+x_2\cdot x_3\cdot x_4=\frac{1}{5}$
- $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=-\frac{3}{5}$

62. a) $-\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$ e 4 b) $a=\frac{77}{4}$

63. $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right)$

64. a) $r_1+r_2=\frac{10}{3}$ b) $a=25$

65. $a=1$; $b=-1$

66. $r_1=2$; $r_2=3$; $m=-5$

67. a) $m=3$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ e -6

68. a) $\frac{1}{2}$ b) $m=-1$ e $n=-4$

69. $-\frac{14}{3}$ **70.** $\frac{118}{9}$

71. $m<-5$ ou $m>5$ **72.** $\frac{25}{8}$

73. -1 com multiplicidade 2, 3 com multiplicidade 3 e 5 é raiz simples

74. a) Uma possível resposta: $p(x)=x^4+10x^3+36x^2+54x+27$
b) Uma possível resposta: $p(x)=x^5-14x^4+76x^3-200x^2+$
$+256x-128$

75. grau 13

76. multiplicidade 4

77. $x_1=-3$; $x_2=4$

78. $m=3$ e $n=-1$; $x^5+7x^4-5x^2=0$

79. $S=\{-2, 5\}$ **80.** 1 e 0

81. -3 e -1 são raízes de multiplicidade 2, e 2 é raiz de multiplicidade 3

82. $36x^4-72x^3-108x^2+144x+144=0$

83. a) $S=\{2, 3\}$
b) $x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$

84. a) 4 com multiplicidade 2; -2 é raiz simples
b) $a=-6$; $b=0$; $c=32$

85. grau mínimo: 8 **86.** $S=\{-i, i, 3\}$

87. Sim, pois se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação tem pelo menos uma raiz real.

88. Uma possível resposta: $x^5-11x^4+50x^3-118x^2+145x-75=0$.

89. $S=\{-3, -3i, 3i, 3\}$

90. *i* não é raiz e $-i$ é raiz; Não, pois os coeficientes da equação não são todos reais.

91. terceira raiz: $1+i$; $a=-6$; $b=10$; $c=-8$

92. $p(x)=x^5-7x^4+24x^3-32x^2+64$

93. a) $a=4$
b) $gr(q)=9$
c) $q(x)=(x+4-2i)^2\cdot(x+4+2i)^2\cdot$
$\cdot(x-3-i)^2\cdot(x-3+i)^2\cdot(x-4)$

94. a) Sim, pois ao menos um dos coeficientes da equação não é real, o que implica em não poder usar o teorema que trata das raízes complexas, podendo assim haver duas raízes complexas em que uma não seja o conjugado da outra.
b) $m=i-3$; $n=6$ c) $-2i$, i e 3

95. a) $S=\left\{-1, \frac{1}{5}, 7\right\}$ b) $S=\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

96. $\frac{1}{12}\ m^3$

97. a) 2 b) $S=\{-i, i, 2, 12\}$

98. $m=\frac{1}{3}$ **99.** c

100. 2 m **101.** 1 e -1

102. $h(x)=x^3-5x^2+x-5$

103. a) 3, 5 e 7 b) $m=-71$; $n=-5$

Bibliografia consultada

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: Unesp.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Tendências em educação matemática).

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, [s.d.].

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, 2000.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística básica**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

COLEÇÃO do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 22 v.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Perspectivas em educação matemática).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. São Paulo: SBEM.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento et al. **Noções de probabilidade e estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2007. (Coleção Acadêmica).

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2014. v. 1.

TÓPICOS de história da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual. 6 v.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

Lista de siglas

Enem-MEC Exame Nacional do Ensino Médio