MB.S01.L1 – Sistemas Numéricos Decimal e Binário

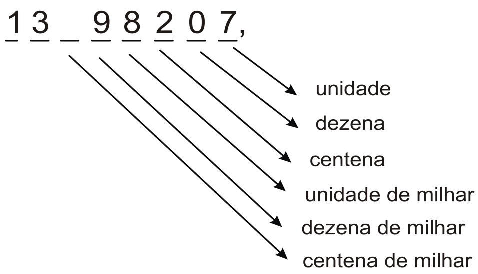
Profs. Fredão e Lobo

================ **Exercícios** =================

- Parte 1: Exercícios de Fixação

Exercício 01 (ENEM 2012)

Analisando o número apresentado na questão da direita para a esquerda, e iniciando pela ordem das unidades, temos a seguinte distribuição:



Como comentário adicional: neste número temos, ainda, a unidade de milhão e a dezena de milhão. Portanto, temos representadas 8 ordens de 3 classes diferentes (unidades, milhares e milhões).

Exercício 02 (ENEM 2011)

Para essa questão, analisaremos da mesma forma que um relógio de ponteiro: se um ponteiro passou de uma unidade e ainda não chegou na outra, ele apresenta o valor do algarismo que passou, e não do próximo.

Por exemplo: num relógio, se numa tarde o ponteiro das horas passou do número 1 e ainda não chegou ao número 2, ainda não são 14h, certo? A hora exata dependerá do ponteiro dos minutos, mas sabemos que se trata de 13h e alguns minutos.

A lógica dessa questão é a mesma: basta observar a posição dos ponteiros e concluir que o número apresentado tem 2 unidades de milhar, 6 centenas, 1 dezena e 4 unidades (cuidado com as setas que indicam os sentidos de rotação). Portanto, o número será 2614 kWh.

Exercício 03 (IFSUL 2017)

Para ordenar números que têm a mesma quantidade de ordens (neste caso, 8 ordens, ou números da ordem das dezenas de milhões), deve-se observar da esquerda para a direita. É o mesmo processo para representar palavras em ordem alfabética, por exemplo.

Portanto, os menores números serão os que têm apenas 1 dezena de milhão, em seguida os que têm a menor unidade de milhão: $14.050.340 < 15.865.678$

Em seguida, virá o que tem 2 dezenas de milhão: 27.384.815. Depois, o que tem 5 dezenas de milhão: 53.078.137. Por último, o que tem 8 dezenas de milhão: 80.353.724.

Portanto, ordenando em ordem crescente, temos:

14.050.340 < 15.865.678 < 27.384.815 < 53.078.137 < 80.353.724.

Ou, com as regiões referentes aos números, temos, em ordem crescente de população: Centro-Oeste, Norte, Sul, Nordeste, Sudeste.

Exercício 04 (UECE 2017)

Como o algarismo x representa um valor do Sistema de Numeração Decimal, temos que o valor de x deve ser de 1 a 9, ou seja: $1 \le x \le 9$.

Portanto, teremos que: 11x + 1x1 + x11 = 777

Decompondo cada um dos números em potências de 10, temos:

$$\begin{cases} 11x = 100 + 10 + x \\ 1x1 = 100 + 10x + 1 \\ x11 = 100x + 10 + 1 \end{cases}$$

Somando os três números, teremos:

$$11x + 1x1 + x11 = 100 + 10 + x + 100 + 10x + 1 + 100x + 10 + 1$$

$$\Rightarrow 11x + 1x1 + x11 = 200 + 100x + 20 + 10x + 2 + x$$

$$\Rightarrow 11x + 1x1 + x11 = 222 + 111x$$

Como $222 + 111x = 777$, temos:

$$111x = 777 - 222$$

$$111x = 555$$

$$x = \frac{555}{111}$$

$$\therefore x = 5$$

Exercício 05 (UNICAMP 2019)

Como o enunciado diz que o número tem dois algarismos, vamos chamar o algarismo das dezenas de "a" e o das unidades de "b". Então teremos o número "ab", que pode ser reescrito como 10a + b.

O "triplo da soma desses algarismos", como falado no enunciado, é $3 \cdot (a+b)$. E quando o enunciado fala que esse triplo da soma é "igual ao próprio número", podemos igualar as duas equações! Portanto, teremos:

$$10a + b = 3 \cdot (a + b)$$

$$\Rightarrow 10a + b = 3a + 3b$$

$$\Rightarrow 10a - 3a = 3b - b$$

$$\Rightarrow 7a = 2b$$

$$\Rightarrow a = \frac{2b}{7}$$

Bom, chegamos a um ponto em que vamos precisar analisar as hipóteses. Como “a” e “b” são valores do Sistema Numérico Decimal, só podem assumir valores de 0 a 9.

Como 7, que é o divisor, é um número primo, a única possibilidade para “b” é b = 7, para que a divisão resulte em um valor inteiro.

Substituindo o valor de “b”, teremos que a = 2. E a multiplicação dos valores, portanto, será $a \cdot b = 2 \cdot 7 = 14$.

- Parte 2: Testando seus Conhecimentos

Exercício 06 (ENEM PPL 2015)

Seguindo a lógica maia, tem-se na primeira posição o número $19 \cdot 20^0 = 19 \cdot 1 = 19$.

Na segunda posição, tem-se o número zero, e $0 \cdot 20^1 = 0$ (0 multiplicado por qualquer outro número será zero).

Por fim, na terceira posição o número $13 \cdot 20^2 = 5200$.

Somando os resultados de cada posição tem-se que o número representado no sistema decimal será 5219.

Exercício 07 (ENEM 2ª Aplicação 2014)

Cada símbolo egípcio tem um valor, como na tabela apresentada. Deve-se substituir cada símbolo pelo valor correspondente a ele.

Assim, teremos:

 = 1.000.000

 = 200.000

 = 30.000

 = 700

|| = 2

Portanto, a resposta é dada pela soma 1.000.000 + 200.000 + 30.000 + 700 + 2 = 1.230.702.

Exercício 08 (ENEM Libras 2017)

O tempo obtido pelo nadador foi de 21,320 segundos. Decompondo-se a parte inteira desse número, teremos:

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

Já a parte decimal do número (0,320) pode ser decomposta por potências de 10, mas frações das potências de 10:

$$0{,}320 = 0{,}3 + 0{,}02 = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01$$

$$\Rightarrow 0{,}320 = 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100}$$

(Nota: as potências de 10 que são fracionárias podem ser reescritas com expoentes negativos, da seguinte forma:

$$0{,}320 = 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

Estudaremos melhor essas representações de potências em uma aula posterior.)

Portanto, o 3 tem um valor relativo de 0,3 que, decomposto em potências de 10, é $3 \cdot \frac{1}{10}$, ou “3 vezes um décimo”. Como é uma multiplicação por um décimo de segundo, ocupa a casa dos décimos de segundo.

Exercício 09 (UERJ 2013)

Considere a figura.

5	a	b	c	8	d	e	f	g	x					

Sabendo que a soma de três algarismos consecutivos é sempre igual a 20, vem

$$5 + a + b = 20 \Leftrightarrow a + b = 15$$
$$\Rightarrow 15 + c = 20$$
$$\Leftrightarrow c = 5$$
$$\Rightarrow 5 + 8 + d = 20$$
$$\Leftrightarrow d = 7$$
$$\Rightarrow 8 + 7 + e = 20$$
$$\Leftrightarrow e = 5$$
$$\Rightarrow 7 + 5 + f = 20$$
$$\Leftrightarrow f = 8$$
$$\Rightarrow 5 + 8 + g = 20$$
$$\Leftrightarrow g = 7$$
$$\Rightarrow 8 + 7 + x = 20$$
$$\Leftrightarrow x = 5.$$

Portanto, como $125 = 5^3$, segue que x é divisor de 125.

MB.S01.L1 – Sistemas Numéricos Decimal e Binário
Profs. Fredão e Lobo

Exercício 10 (ESPM 2013)

Escolhendo-se os algarismos “a” e “b” para representar a dezena e a unidade do maior deles, que diremos que é o M, teremos:

$$M = ab = 10a + b$$

$$N = ba = 10b + a$$

Em seguida, o enunciado fala “a diferença entre o maior e o menor é uma unidade a menos que o menor deles”. Ou seja, a diferença entre M e N (M – N) é 1 unidade menor que o menor:

$$M - N = N - 1$$

Substituindo M e N pelas representações com “a” e “b” que optamos acima, temos:

$$\underset{M}{ab} - \underset{N}{ba} = \underset{N}{ba} - 1$$

$$\Rightarrow ab = 2ba - 1$$

$$\Rightarrow ab + 1 = 2ba$$

Trocando “ab” e “ba” pelas representações decimais, temos:

$$\begin{cases} ab = 10a + b \\ ba = 10b + a \end{cases} \quad \Rightarrow ab + 1 = 2ba \Rightarrow 10a + b + 1 = 2 \cdot (10b + a)$$

$$\Rightarrow 10a + b + 1 = 20b + 2a$$

$$\Rightarrow 8a + 1 = 19b$$

$$\Rightarrow 8a = 19b - 1$$

$$\therefore a = \frac{19b - 1}{8}$$

Quais são os valores possíveis de “b” de modo que “a” seja um algarismo de 0 a 9?

Se substituirmos os valores de 0 a 9 em “b”, a única possibilidade para que “a” seja inteiro é se b = 3, de modo que a = 7.

Portanto, os dois números são: M = 73 e N = 37 e, consequentemente, M + N = 110.

Exercício 11 (ESPM 2012)

Vamos interpretar o enunciado passo a passo:

1) *“Um número natural N é formado por 2 algarismos...”*

Utilizando as letras “a” e “b” para as posições das dezenas e das unidades de N, temos N = ab, ou seja, N = 10a + b.

2) *“...2 algarismos cuja soma é igual a 9.”*

Temos, portanto, que a + b = 9, pela informação de que a soma dos dois algarismos de N é igual a 9.

3) *“A diferença entre esse número e o número que se obtém invertendo-se a ordem dos seus algarismos é igual a 27.”*

Ou seja, se N = ab, chamaremos M = ba (número que se obtém invertendo a ordem dos algarismos de N).Dessa forma, M = 10b + a.

Teremos, portanto, que: N – M = ab – ba = 27.

$$\Rightarrow 10a + b - (10b + a) = 27$$

$$\Rightarrow 10a + b - 10b - a = 27$$

$$\Rightarrow 9a - 9b = 27$$

Dividindo os dois lados por 9, teremos:

$$a - b = 3$$

Além disso, como sabemos que a + b = 9, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Nota 1: estudaremos Sistemas de Equações com 2 incógnitas neste Módulo de Matemática Básica. Caso você tenha ficado com dúvida, haverá uma aula para você logo mais.

Daí, $N = ab = 63 = 3^2 \cdot 7$ e, portanto, segue que a quantidade de divisores naturais de N é $(2+1)(1+1) = 3 \cdot 2 = 6$ ou, fazendo manualmente, encontraremos os divisores 1, 3, 7, 9, 21, 63 (6 divisores).

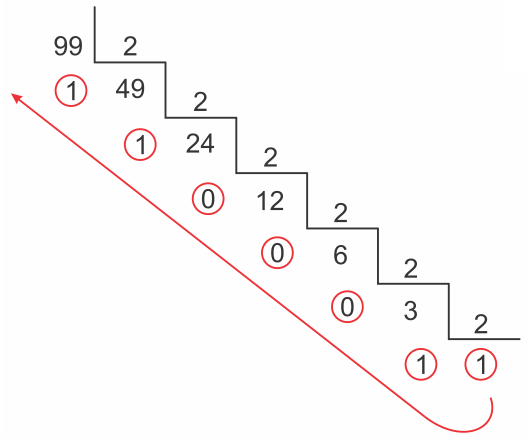
Nota 2: A quantidade de divisores de um número qualquer é dada pela <u>multiplicação dos sucessores dos expoentes dos fatores primos de um número</u>. “Professor, entendi foi nada!” São palavras dificílimas de entender, mas fáceis de aplicar hahaha olha só:

Quando fatoramos 63 ali em cima, encontramos $63 = 3^2 \cdot 7$. Os fatores primos são, portanto, 3 e 7. O expoente do 3 é 2 (3^2) e o expoente do 7 é 1 (7^1 ou 7). Os sucessores desses expoentes (2 e 1) são, respectivamente (2+1) e (1+1). A multiplicação deles resulta no 6, que é a quantidade de divisores, como fizemos acima.

MB.S01.L1 – Sistemas Numéricos Decimal e Binário
Profs. Fredão e Lobo

Exercício 12 (Col. Pedro II - 2017)

Utilizando o dispositivo de divisão por 2 que trabalhamos na aula de Sistema Binário, temos:



Lembrando que para escrever um número no sistema binário, é necessário ler "de trás pra frente" os restos da divisão. Portanto, temos $99_{(10)} = 1100011_{(2)}$.

Exercício 13 (UECE 2019)

Para escrever um número como soma de potências de 2, o primeiro passo é analisar qual é a maior potência de 2 que é menor que o número.

Por exemplo: se tivermos o número 7. Qual é a maior potência de 2 que é menor que ou igual a 7? É o número 4. Portanto, 4 é um dos termos que serão somados para chegar em 7.

Em seguida, tira-se a diferença entre o número original (neste caso, 7) e a potência que encontramos (neste caso, 4). A diferença 7 – 4 = 3.

E aí se inicia novamente o processo. Encontraremos a potência 2, que é menor que ou igual a 3, e subtrairemos 3 – 2 = 1. Portanto, poderemos escrever 7 = 4 + 2 + 1, ou $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Para o valor 2018, teremos:

1) A maior potência de 2 menor que 2018 é 1024.
2) 2018 – 1024 = 994
3) A maior potência de 2 menor que 994 é 512.
4) 994 – 512 = 482
5) A maior potência de 2 menor que 482 é 256.
6) 482 – 256 = 226.
7) A maior potência de 2 menor que 226 é 128.
8) 226 – 128 = 98.
9) A maior potência de 2 menor que 98 é 64.
10) 98 – 64 = 34.
11) A maior potência de 2 menor que 34 é 32.
12) 34 – 32 = 2
13) 2 é uma potência de 2, claro.

Portanto, poderemos escrever 2018 como:

2018 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 2

$\Rightarrow 2018 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1$, ou seja, 7 parcelas.

Nota 1: poderíamos, inclusive, escrever 2018 na forma binária, agora que sabemos as potências de 2 que constituem esse número. Teríamos 2018 da seguinte forma:

$$2018 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5$$
$$+ 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ou, observando os "uns e zeros" que multiplicam as potências de 2, teremos na forma binária:

2018 = 11111100010.

- Parte 3: Desafios para a Mente

Exercício 14 (ESPM 2017)

Vamos interpretar o enunciado parte a parte:

1) "Um número natural é formado por 3 algarismos..."

Seja abc o número natural formado pelos algarismos "a", "b" e "c". Podemos, inclusive, escrever abc na forma de multiplicação por potências de 10 como 100a + 10b + c.

2) "...que somam 10."

Ou seja, a + b + c = 10.

3) "Trocando-se entre si os algarismos das centenas e das unidades, ele aumenta 99 unidades."

Ou seja, cba = abc + 99. Decompondo-se os números em potências de 10, temos:

100c + 10b + a = 100a + 10b + c + 99

Organizando essa equação, teremos:

99c – 99a = 99

Dividindo os dois lados da equação por 99, teremos:

c – a = 1, ou então a = c – 1

4) "Trocando-se os algarismos das dezenas e das unidades, ele diminui 18 unidades."

Ou seja, acb = abc - 18. Decompondo-se os números em potências de 10, temos:

$$100a + 10c + b = 100a + 10b + c - 18$$

Organizando essa equação, teremos:

$$9c - 9b = -18$$

Dividindo os dois lados da equação por 9, teremos:

$$c - b = -2, \text{ ou então } b = c + 2$$

5) Substituindo os valores de "a" e de "b" que encontramos nos passos 3 e 4 na equação original do passo 2, teremos:

$$a + b + c = 10$$

$$\underbrace{(c-1)}_{a} + \underbrace{(c+2)}_{b} + c = 10$$

$$\Rightarrow 3c + 1 = 10$$

$$\Rightarrow 3c = 9$$

$$\Rightarrow c = \frac{9}{3}$$

$$\therefore c = 3$$

6) Substituindo o valor encontrado para "c" nas equações dos passos 3 e 4, teremos:

$$\begin{cases} a = c - 1 = 3 - 1 \Rightarrow a = 2 \\ b = c + 2 = 3 + 2 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

Dessa forma, o número "abc" do enunciado será 253.

7) Fatorando-se o número 253, temos $253 = 11 \cdot 23$, ou seja, 253 é um múltiplo de 11.

Exercício 15 (IME 2019 - Adaptada)

Do enunciado, utilizando os algarismos "a", "b", "c" e "d" do Sistema Numérico Decimal, teremos:

1) O ano de nascimento de Leirbag é 19ab e o ano de nascimento de seu irmão é 20cd, com a, b, c e d naturais e pertencentes ao intervalo $[0, 9]$.

Podemos, também, escrever 19ab como 1900 + 10a + b, e 20cd como 2000 + 10c + d.

2) A idade de Leirbag é dada pela subtração de 2018 e o seu ano de nascimento:

$$2018 - (1900 + 10a + b) = 118 - 10a - b$$

Como a idade dele é dada pela "soma dos 3 últimos algarismos de seu respectivo ano de nascimento", teremos:

$$9 + a + b = 118 - 10a - b$$

3) Já a idade de Ocirederf é dada por:

$$2018 - (2000 + 10c + d) = 18 - 10c - d$$

Da mesma forma que Leirbag, como a idade de Ocirederf é "a soma dos três últimos dígitos do ano" de seu nascimento, temos:

$$18 - 10c - d = 0 + c + d$$

4) Assim, temos:

$$\begin{cases} 118 - 10a - b = 9 + a + b \\ 18 - 10c - d = 0 + c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 109 = 2b + 11a & \text{(i)} \\ 18 = 2d + 11c & \text{(ii)} \end{cases}$$

5) Observando a equação (ii) e dividindo-a por 2, teremos:

$$9 = d + \frac{11c}{2}$$

Como "c" e "d" não podem ser negativos e $\frac{11c}{2}$ não pode ser maior que 9, a única solução possível para "c" é c = 0. Dessa forma, teremos d = 9.

6) Já na equação (i) não teremos como fazer uma divisão como fizemos na (ii), uma vez que 109 é um número primo. Neste caso, a solução é testar valores de "a" e "b" de modo que estes sejam números naturais de 0 a 9.

A única possibilidade é se a = 9 e b = 5, de modo que:

$$109 = 2 \cdot \underset{b}{5} + 11 \cdot \underset{a}{9}$$

7) Com base nisso, teremos que os valores de "a", "b", "c" e "d" serão:

$$a = 9, b = 5, c = 0 \text{ e } d = 9.$$

Portanto, a idade de Leirbag é $2018 - 1995 = 23$ e a de seu irmão Ocirederf é $2018 - 2009 = 9$.

Logo, a soma das idades dos dois irmãos é $23 + 9 = 32$.