OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 1– (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

***PARTE OBJETIVA** (10 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

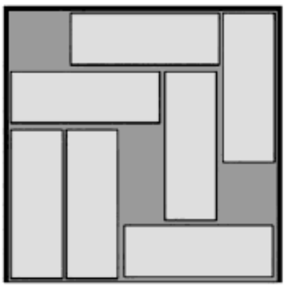
Em uma fase secreta do famoso jogo God of War, o personagem Kratos se deparou com um mapa escrito por Daedalus explicando – o como sair do perigoso Labirinto no qual ele estava perdido. O mapa mandava Kratos ficar de frente para a estátua de Athena e, a partir daí, alternar passos para o norte e para o sul da seguinte maneira: um passo para o norte, dois passos para o sul, três passos para o norte, quatro passos para o sul, e continuar desse modo até concluir a caminhada com 2011 passos para o norte e 2012 para o sul. Kratos pensou um pouco e foi da estátua até a saída do labirinto andando sempre na mesma direção. Quantos passos deu e em que direção?

QUESTÃO 2

Rafaelito Galvón decidiu comprar uma casa para cada um de seus filhos, os gêmeos Cleuber e Gleuber, na única rua da pequena cidade de Tribobó do Norte. Porém, como sabia que os dois nunca haviam se dado muito bem, preferiu que as casas compradas fossem do mesmo lado da rua mas que não fossem vizinhas. Nesta calçada da rua, do lado direito da casa de Cleuber há 19 casas e, do lado esquerdo, 31 casas. Gleuber mora na casa que fica exatamente no meio da série de casas. Quantas casas há entre as dos irmãos Cleuber e Gleuber?

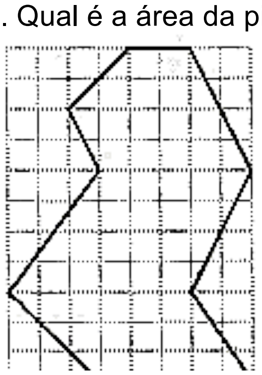
QUESTÃO 3

Tentando fazer uma adaptação para a vida real de um famoso jogo de raciocínio, Taka Nakombi, o mago chinês da Matemática, colocou 7 tacos de madeira dentro de um caixa, conforme mostra a figura abaixo. Da forma como os tacos foram arrumados, seria possível Taka deslizá-los na caixa, de modo a conseguir espaço para acrescentar um novo taco dentro da caixa. Qual o número mínimo de tacos que devem ser movidos para que nosso valente mago consiga colocar o oitavo taco nesta caixa?



QUESTÃO 4

Fred G. Neen usou toda sua paixão por Matemática para desenhar o traçado da revolucionária pista de Mountain Bike dos Jogos Olímpicos Rio 2012. Na figura a seguir, cada quadrícula representa uma unidade de área. Qual é a área da pista que aparece no interior do quadriculado?



OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

<u>Nível 1– (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)</u>

PARTE DISCURSIVA (20 pontos por questão)

QUESTÃO 5

No Reino de Racionópolis, o Rei Numm E. Rhador II estava preocupado com a taxa de natalidade do local. Na pesquisa que ele encomendou a seus conselheiros, verificou – se que em um grupo de 1000 habitantes, $\frac{4}{5}$ eram casados. Entre os casados, $\frac{3}{5}$ eram homens, $\frac{1}{8}$ eram mulheres com filhos e o restante eram mulheres sem filhos. Quantas mulheres casadas, nesse grupo, não têm filhos?

QUESTÃO 6

Contrariando os conselhos de sua mãe, a cientista Ângela Poo Eira, o pescador Wilson Hanks Poo Eira se perdeu no mar e notou que seu velho barquinho estava afundando. A cada 12 min, entravam 180 litros de água. Com um pequeno balde, ele começou a jogar a água para fora do barquinho, mas só conseguia tirar 9 litros a cada 6 minutos. A lancha de socorro mais próxima estava a 70 Km do local e sua velocidade máxima era de 170 Km/h. Determine qual deveria ser velocidade mínima para que a lancha chegasse a tempo de ajudar nosso teimoso pescador, sabendo que seu velho barquinho afundaria se entrassem 378 litros de água.

QUESTÃO 7

Querendo andar sempre “na moda”, as amigas Jupira e Jandira compraram por um preço baixíssimo um relógio da famosa marca Sul Uóti em uma loja nem um pouco confiável. Assim que chegaram a suas casas, perceberam que ambos os ponteiros estavam avariados. Após algum tempo de observação, elas perceberam que o relógio de Jupira atrasa – se 1 minuto por dia enquanto o de Jandira, 1 minuto e meio por dia. Após essa conclusão, elas acertaram o relógio ao mesmo tempo. Quantos dias depois os relógios vão marcar a mesma hora simultaneamente, pela primeira vez?

QUESTÃO 8

O **googol** (lê-se gugol - sua forma de escrita em Portugal) é o número $\mathbf{10^{100}}$, ou seja, o dígito 1 seguido de cem zeros. Em 1938, o matemático Edward Kasner, da Universidade da Columbia, pediu ao seu sobrinho Milton Sirotta (1929-1981), então com oito anos, que inventasse um nome para dar a um número muito grande, mais precisamente à centésima potência do número 10. Um número muito grande mas não infinito. Desde o suposto surgimento da Terra, há aproximadamente 4,5 bilhões de anos, ainda não se passaram um googol de segundos, nem um googol de milésimos, na verdade não é nem perto disso, se passaram "apenas" aproximadamente 10^{17} segundos. Edward Kasner apresentou o googol em seu livro "Matemática e Imaginação". O googol não tem qualquer utilidade prática a não ser como explicação da diferença entre um número imenso e o infinito. Na verdade, ele está tão longe do infinito como o 1. Devido à sua grande magnitude, foi adaptado para batizar um famoso motor de busca, o Google.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Googol

Sendo assim, responda:

a) qual a soma dos algarismos obtidos ao se subtrair uma unidade de um googol?

b) Ao dividir o googol por 7, obtém – se um quociente e um resto. Qual é a soma dos algarismos do quociente desta divisão?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

***PARTE OBJETIVA** (10 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

Um gafanhoto quer subir uma escadaria com muitos degraus, mas só consegue dar dois tipos de saltos: três degraus para cima ou quatro degraus para baixo. Começando no chão, qual é o menor número de saltos que o gafanhoto tem que dar para poder descansar no 22º degrau?

QUESTÃO 2

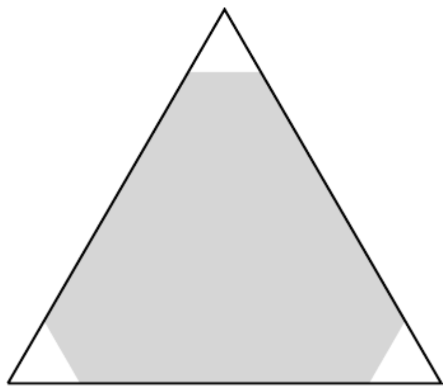
No dia 1º de abril (dia da mentira) de 2014 deu no jornal que o Brasil ia ganhar a copa do mundo. Em qual dia da semana isso ocorrerá?

QUESTÃO 3

Encontre um número inteiro de dois algarismos não nulos que é igual ao dobro do produto desses algarismos.

QUESTÃO 4

A partir de um triângulo eqüilátero (maior) com 6 cm de lado, cortam-se três triângulos equiláteros (menores) iguais, como se pode ver na figura.



A soma dos perímetros dos três triângulos pequenos é igual ao perímetro do hexágono cinzento. Qual é o comprimento do lado de um desses triângulos pequenos?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

<u>Nível 2– (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)</u>

<u>PARTE DISCURSIVA</u> ***<u>(20 pontos por questão)</u>***

QUESTÃO 5

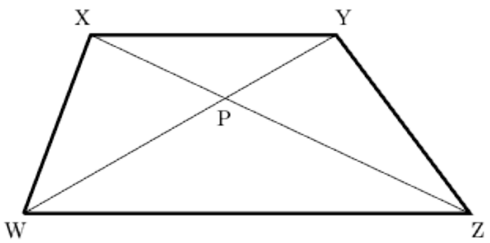
Guilherme tem hoje, dois anos a menos que Sérgio, seu pai, tinha, quando seu primo Junior nasceu. Também se sabe que hoje, a idade de Sérgio é igual a soma das idades de Giuseppe, irmão mais velho de Guilherme, e de Junior. Há 14 anos, a idade de Junior era igual ao dobro da idade de Giuseppe. Quando Giuseppe nasceu, Junior tinha um quarto de sua idade atual. Sabendo que todos já fizerem aniversário esse ano, diga qual a idade que Sérgio tinha quando Guilherme nasceu?

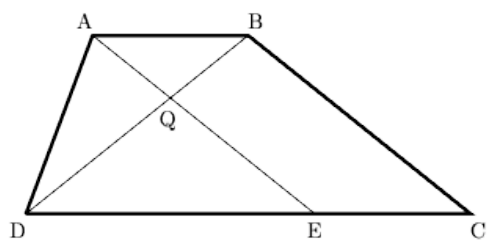
QUESTÃO 6

Para dinamizar ainda mais suas aulas de matemática, a professora Estelita Chapéu de Couro trouxe um desafio para seus alunos. Eles deveriam escrever 12 números naturais em uma fila. O quarto número deveria ser 7 e o décimo segundo, 10. A soma de três quaisquer números vizinhos deveria ser 102. Nessas condições, quais os números que estariam nessa fila?

QUESTÃO 7

a) Considere um trapézio XYWZ, sendo P o ponto de encontro de suas diagonais. Se XY e ZW são as bases desse trapézio, mostre que as áreas dos triângulos XPW e YPZ são iguais.

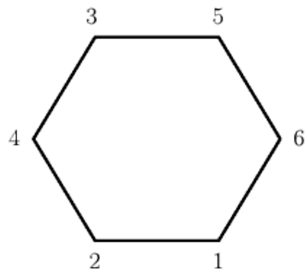


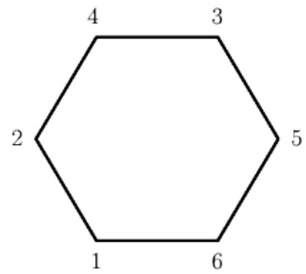


b) Considere agora um trapézio ABCD de bases AB e CD. O ponto E está no lado CD e AE é paralelo a BC. As áreas dos triângulos ABQ e ADQ são respectivamente iguais a 2m² e 3m², onde Q é o ponto de encontro de BD e AE. Qual é a área do quadrilátero BCEQ?

QUESTÃO 8

Considere um hexágono regular. Deseja-se colocar os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sobre seus vértices de maneira que: (i) cada número só pode ser utilizado uma vez; (ii) a soma de números em posições diametralmente opostas não pode ser um múltiplo de 3. As figuras abaixo ilustram duas maneiras distintas de distribuir esses números sobre os vértices.





De quantas maneiras isso pode ser feito?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 3 – (1º e 2º ano do Ensino Médio)

1. Ao efetuarmos a divisão do número 10^{100} por 7, encontramos quociente q e resto r. Determine a soma dos algarismos de q.

2. Ache todos os números de dois dígitos (ab) tais que (ab) divide $(a0b)$.

   Obs.: (ab) é a representação decimal, a é o dígito das dezenas e b o dígito das unidades.

3. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. De quantas maneiras podemos colocar os números de 1 a 6 nos vértices do hexágono de modo que cada número apareça exatamente uma vez e a soma dos números em quaisquer dois vértices opostos não seja múltipla de 3.

4. Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos no lado BC tal que $2\overline{BD} = 2\overline{DE} = \overline{EC}$. Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos ABD, ADE e AEC tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo $A\hat{C}B$.

5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

   $$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

   para todos x, y reais.

6. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo 1 número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

   Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números a, b e c dentre os 4 números originais e monta a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

   Seja d o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar d números inteiros (possivelmente negativos) distintos $t_i (i = 1, 2, ..., d)$ tais que a equação

   $$(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$$

   tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

   Obs.: Se $d = 0$ Bernaldo ganha. E uma equação da forma $0x^2 + 0x + 0 = 0$ tem raiz real.

   Exemplo: Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação $4x^2 + x + 4 = 0$. E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros -3 e -4 tais que as equações $(4-3)x^2 + (1-3)x + (4-3) = 0$ e $(4-4)x^2 + (1-4)x + (4-4) = 0$ têm raiz real.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)

1. Considere os polinômios:

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

Em geral,

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1)}{j!}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots.$$

É sabido que para qualquer natural n, existem $a_0, a_1, \ldots, a_n$ satisfazendo

$$x^n = a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + \ldots + a_n\binom{x}{n}.$$

Além disso, esses $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dependem apenas de n (não dependem de x) e são únicos para cada n. Por exemplo:

$$\begin{aligned} x^2 &= \binom{x}{1} + 2\binom{x}{2} \\ x^3 &= \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3} \end{aligned}$$

Para $n = 2012$, determine os valores de a_0, a_1, a_2, a_3 e a_{2012}.

2. Uma permutação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ é dita boa se não existem inteiros $1 \leq i < j < k \leq n$ tal que x_i, x_j, x_k formam uma sequencia crescente ou decrescente, por exempo a permutação $(4, 1, 5, 2, 3)$ não é boa pois $x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$ estão em ordem crescente. Para cada n, quantas permutações boas existem?

3. Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos no lado BC tal que $2\overline{BD} = 2\overline{DE} = \overline{EC}$. Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos ABD, ADE e AEC tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo $A\hat{C}B$.

4. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x, y reais.

5. Dado um número natural n seja $P(n)$ o produto de seus dígitos. Determine a menor razão inteira de $\dfrac{n}{P(n)}$ onde n percorre todos os números naturais de 3 dígitos.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2012

20 de outubro de 2012.

Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)

6. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo 1 número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

   Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números a, b e c dentre os 4 números originais e monta a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

   Seja d o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar d números inteiros (possivelmente negativos) distintos $t_i (i = 1, 2, ..., d)$ tais que a equação

$$(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$$

   tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

   Obs.: Se $d = 0$ Bernaldo ganha. E uma equação da forma $0x^2 + 0x + 0 = 0$ tem raiz real.

   Exemplo: Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação $4x^2 + x + 4 = 0$. E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros -3 e -4 tais que as equações $(4 - 3)x^2 + (1 - 3)x + (4 - 3) = 0$ e $(4 - 4)x^2 + (1 - 4)x + (4 - 4) = 0$ têm raiz real.