CONJUNTOS

CONJUNTO - ELEMENTO – PERTINÊNCIA

O ***conjunto*** geralmente está associado a um determinado agrupamento, mas não pode ser definido como sendo um agrupamento.

O ***elemento*** é usado para formar um determinado conjunto.

Os conjuntos podem ser descritos de duas formas:
- Descrição através dos elementos

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

- Descrição através de uma propriedade

$$A = \{x \,/\, x \text{ tem a propriedade P}\}$$

$$\text{Ex: Conjunto das vogais} \begin{cases} V = \{a, e, i, o, u\} \\ V = \{x \,/\, x \text{ é uma vogal}\} \end{cases}$$

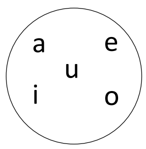
Para entendermos ***pertinência*** devemos primeiro gravar os seguintes símbolos:

$\in$: pertence
$\notin$: não pertence

$$\text{Ex: } A = \{-2, 1, 0, \{3\}\} \begin{bmatrix} 1 \in A \\ 3 \notin A \\ \{3\} \in A \end{bmatrix}$$

Notas
- Conjunto unitário: possui um único elemento
- Conjunto vazio $(\varnothing \text{ ou } \{\ \})$: não possui elemento algum.
- Conjunto universo: possui todos os elementos envolvidos num determinado assunto.
- O diagrama de Euler-Venn: é um círculo usado para representar um conjunto.

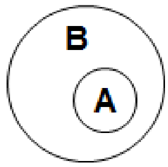
V



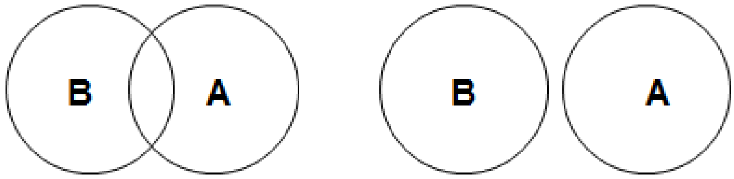
SUBCONJUNTOS

Um **conjunto A** é **subconjunto** de um **conjunto B** se, somente se, todo elemento de **A** pertence também a **B**. Neste caso, usamos a seguinte simbologia:

$A \subset B$: A está contido em B
$B \supset A$: B contém A



$A \not\subset B$: A não está contido em B



Notas

- Um conjunto A está contido nele mesmo.

$$A \subset A$$

- O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

$$\varnothing \subset A$$

- Conjunto das partes de um conjunto A $P(A)$: dada um conjunto A de n elementos, chama-se de conjunto das partes de A aquele formado por todos os subconjuntos de A.

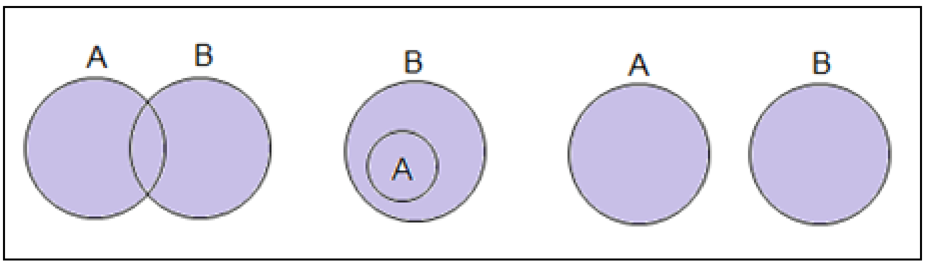
Ex: $A = \{0,1\} \therefore P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

O número de elementos do $P(A)$ é 2^n.

REUNIÃO DE CONJUNTOS

Sendo A e B dois conjuntos, temos:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

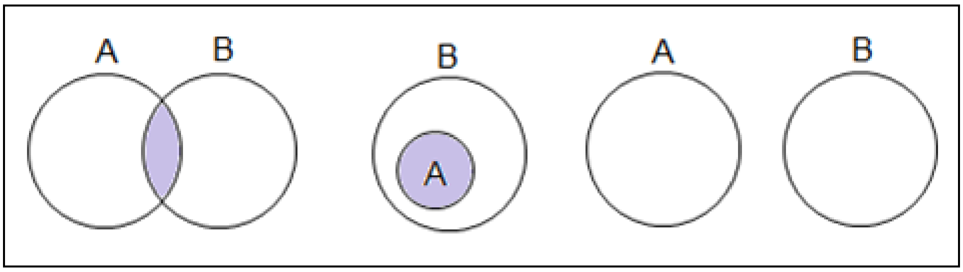


Ex: $A = \{0,1\}$ e $B = \{0,1,3,4\} \Rightarrow A \cup B = \{0,1,3,4\}$

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Sendo A e B dois conjuntos, temos:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Ex: $A = \{0,1\}$ e $B = \{0,1,3,4\} \Rightarrow A \cap B = \{0,1\}$

Nota

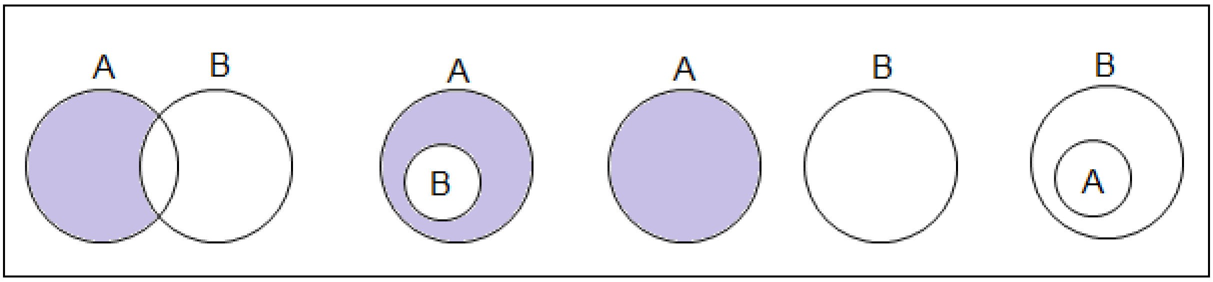
Sendo A e B dois conjuntos, temos:

Se $A \cap B = \varnothing$, A e B são ***conjuntos disjuntos.***

DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Sendo A e B dois conjuntos, temos:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

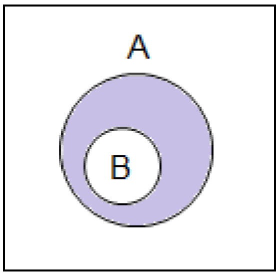


Ex: $A = \{0,1\}$ e $B = \{0,1,3,4\} \Rightarrow A - B = \varnothing$

COMPLEMENTAR DE B EM A

Se $B \subset A$, temos:

$$C_A^B = A - B$$



Ex: $A = \{0,1,3,4\}$ e $B = \{0,1\} \Rightarrow C_A^B = A - B = \{3,4\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Naturais $(\mathbb{N})$

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$

Notas

• Propriedades

$$\begin{cases} \text{Associativa} \begin{cases} \text{Adição:} \\ a+(b+c)=(a+b)+c \\ \text{Multiplicação:} \\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \end{cases} \\ \text{Comutativa} \begin{cases} \text{Adição:} \\ a+b=b+a \\ \text{Multiplicação:} \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases} \\ \text{Elemento neutro} \begin{cases} \text{Adição:} \\ a+0=a \\ \text{Multiplicação:} \\ a\cdot 1=a \end{cases} \\ \text{Distributiva}: a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \end{cases}$$

• Números primos são números naturas que têm apenas dois divisores o 1 e ele mesmo.

Exemplos: 2,3,5,7,...

Inteiros $(\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ inteiros

$\mathbb{Z}^* = \{...,-3,-2,-1,1,2,3,...\}$ inteiros não nulos

$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,...\}$ inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{1,2,3,...\}$ inteiros positivos

$\mathbb{Z}_- = \{...,-3,-2,-1,0\}$ inteiros não positivos

$\mathbb{Z}_-^* = \{...,-3,-2,-1\}$ inteiros negativos

Notas

• Divisão Euclidiana

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} D: \text{dividendo} \\ d: \text{divisor} \\ q: \text{quociente} \\ r: \text{resto} \end{array}\right\} \boxed{D = d\cdot q + r}, 0 \le r < d$$

• Os múltiplos e divisores de um número estão relacionados entre si da seguinte forma:

Quais os múltiplos de 5?

$$\begin{cases} 5\cdot 0 = 0 \\ 5\cdot(\pm 1) = \pm 5 \\ 5\cdot(\pm 2) = \pm 10 \\ 5\cdot(\pm 3) = \pm 15 \end{cases} \Rightarrow \{\cdots -15,-10,-5,0,+5,+10,+15,\cdots\}$$

Quais são os divisores de 6?

$$\begin{cases} \dfrac{6}{\pm 1} = \pm 6 \\ \dfrac{6}{\pm 2} = \pm 3 \\ \dfrac{6}{\pm 3} = \pm 2 \\ \dfrac{6}{\pm 6} = \pm 1 \end{cases} \Longrightarrow \left\{\underbrace{-6,-3,-2,-1,+1,+2,+3,+6}_{\text{8 divisores}}\right\}$$

• Decomposição em fatores primos

Quantos são os divisores de 6 e 18?

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 6 = 2^1\cdot 3^1 \therefore d(6) = 2\cdot(1+1)\cdot(1+1) = \underline{8|}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 18 = 2^1\cdot 3^2 \therefore d(18) = 2\cdot(1+1)\cdot(2+1) = \underline{12|}$$

• Mínimo múltiplo comum (MMC)

Calcule o MMC de

$$\begin{array}{r|l} 2,4,9 & 2 \\ 1,2,9 & 2 \\ 1,1,9 & 3 \\ 1,1,3 & 3 \\ 1,1,1 & \end{array} \quad MMC = 2^2\cdot 3^2 = \underline{36|}$$

• Máximo divisor comum (MDC)

Calcule o MDC aos números:

a) 32 e 24

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{MDC} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

a) 52,90 e 102

$$\begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad \text{MDC} = 2$$

Racionais $(\mathbb{Q})$

São números escritos na forma de fração irredutível.

$$\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*$$

Nota

• Dízimas periódicas

$$\text{Ex}_1 \begin{cases} 0{,}333... = 0{,}\overline{3} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} \\ 0{,}545454... = 0{,}\overline{54} = \dfrac{54}{99} = \dfrac{6}{11} \end{cases}$$

$$\text{Ex}_2 \begin{cases} 0{,}1333... = 0{,}1\overline{3} = \dfrac{13-1}{90} = \dfrac{12}{90} = \dfrac{2}{15} \\ 0{,}123131... = 0{,}12\overline{31} = \dfrac{1231-12}{9900} = \dfrac{1219}{9900} \end{cases}$$

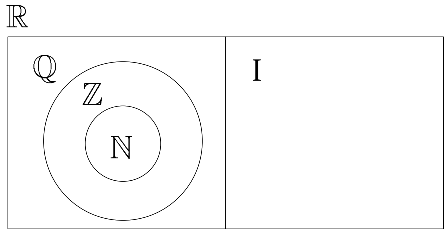
Irracionais (I)

São números que não podem ser escritos na forma de fração.

$$\text{Exemplos} \begin{cases} \sqrt{2} \cong 1{,}41... \\ \sqrt{3} \cong 1{,}73... \\ \pi \cong 3{,}14... \quad \text{Decimais infinitos não periódicos} \\ e \cong 2{,}71... \\ \Phi \cong 1{,}61... \end{cases}$$

Reais $(\mathbb{R})$

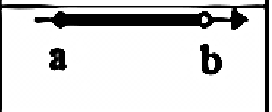
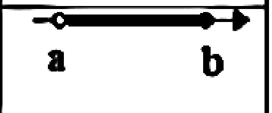
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$



INTERVALOS REAIS

1. Bolinha "Fechada" $(\bullet)$ em um extremo de um intervalo indica que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo;

2. Bolinha "Aberta" $(\circ)$ em um extremo de um intervalo indica que o número associado ao extremo não pertence ao intervalo.

Subconjuntos de R	Símbolo	Representação no eixo real
$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	[a,b]	
$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	]a,b[	
$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	[a,b[	
$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	[a,b]	
$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	[a,+ ∞)	
$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	]a,+ ∞)	
$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	(−∞ ,a]	
$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	(−∞ ,a[	

Testes de fixação

01. (EFOMM) Em uma cidade, 50% dos habitantes sabem dirigir automóvel, 15% sabem dirigir motocicleta e 10% sabem dirigir ambos. Qual a porcentagem de habitantes que não sabe dirigir nenhum dos sois veículos?
a) 15%
b) 55%
c) 25%
d) 65%
e) 45%

02. (EFOMM) Seja $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Considere as afirmações:
I) $1 \in A$
II) $2 \in A$
III) $\varnothing \in A$
IV) $\{1, 2\} \subset A$
Estão corretas a(s) afirmação(ões):
a) I e II
b) I e III
c) III e IV
d) III
e) I

03. (EFOMM) Sejam $A =]3, 4[$, $B =]-1, 5[$ e $C =]2, 5[$. O conjunto $C_B^A \cup (C - A)$ é:
a) $\{x \in R / -1 \leq x < 3 \text{ ou } 4 \leq x < 5\}$
b) $\{x \in R / -1 < x \leq 3 \text{ ou } 4 \leq x < 5\}$
c) $\{x \in R / -1 \leq x \leq 3 \text{ ou } 4 < x \leq 5\}$
d) $\{x \in R / -1 < x < 3 \text{ ou } 4 < x < 5\}$
e) $\{x \in R / -1 < x \leq 3 \text{ ou } 4 \leq x \leq 5\}$

04. (EFOMM) Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam Vôlei; 20 jogam Vôlei e Futevôlei; 22 jogam Futevôlei e Basquete; 11 jogam as 3 modalidades. O número de pessoas que jogam Futevôlei é igual ao número de pessoas que jogam Basquete. O número de pessoas que jogam Futevôlei ou Basquete e não jogam Vôlei é:
a) 55
b) 57
c) 59
d) 56
e) 58

05. (EFOMM) Sabendo que:
$p \in \mathbb{N}$ e $A = \{x / x = 3p\}$, $B = \{x / x = 5p\}$ e $C = \{x / x = 15p\}$, podemos afirmar que:
a) $A \cup B = C$
b) $A - B = C$
c) $C - A = B$
d) $A \cap B = C$
e) $B \cup C = A$

06. (EFOMM) Na Bienal do Livro realizada no Riocentro, Rio de Janeiro, os livros A, B e C de um determinado autor apresentaram os seguintes percentuais de vendas aos leitores:
1) 48% compraram o livro A;
2) 45% compraram o livro B;
3) 50% compraram o livro C;
4) 18% compraram o livro A e B;
5) 25% compraram o livro B e C;
6) 15% compraram o livro A e C;
7) 5% compraram nenhum dos livros.

Qual o percentual dos leitores que compraram um e apenas um dos três livros?
a) 12%
b) 18%
c) 29%
d) 38%
e) 57%

07. (EFOMM) Sejam os conjuntos $U = \{1,2,3,4\}$ e $A = \{1,2\}$. O conjunto B tal que $B \cap A = \{1\}$ e $B \cup A = U$ é:
a) $\varnothing$
b) $\{1\}$
c) $\{1,2\}$
d) $\{1,3,4\}$
e) U

08. (EFOMM) Numa companhia de 496 alunos, 210 fazem natação, 260 musculação e 94 estão impossibilitados de fazer esportes. Neste caso, o número de alunos que fazem só natação é:
a) 116
b) 142
c) 166
d) 176
e) 194

09. (EFOMM) Analise as afirmativas abaixo.

I- Seja K o conjunto dos quadriláteros planos, seus subconjuntos são:
X = {$x \in K$ / x possui lados opostos paralelos}
Y = {$x \in K$ / x possui 4 lados congruentes}
Z = {$x \in K$ / x possui 4 ângulos retos}
Q = {$x \in K$ / x possui 4 lados congruentes e 2 ângulos adjacentes com medidas iguais}
Logo, $Y \cap Z = Y \cap Q$.

II- Seja o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, nota-se que a possui somente 4 subconjuntos.

III- Observando as seguintes relações entre conjuntos:
$\{a,b,c,d\} \cup Z = \{a,b,c,d,e\}$, $\{c,d\} \cup Z = \{a,c,d,e\}$, $\{b,c,d\} \cap Z = \{c\}$; pode-se concluir que $Z = \{a,c,e\}$

Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta.
a) apenas a afirmativa I é verdadeira
b) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras
c) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras
d) apenas a afirmativa III é verdadeira
e) apenas a afirmativa II é verdadeira

10. (EFOMM) Se X é um conjunto com um número finito de elementos, $n(X)$ representa o número de elementos do conjunto X. Considere os conjuntos A, B e C com as seguintes propriedades:
01. $n(A \cup B \cup C) = 25$
02. $n(A - C) = 13$
03. $n(B - A) = 10$
04. $n(A \cap C) = n(C - (A \cup B))$
O maior valor possível de $n(C)$ é igual a:
a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

11. (EFOMM) Considerando-se o conjunto universo U, formado por uma turma de cálculo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM) e composta por alunos e alunas. São dados os subconjunto de U:
A: Conjunto formado pelos alunos; e
B: Conjunto formado por todos os alunos e alunas aprovados.
Pode-se concluir que $C_U^B - (A - B)$ é a quantidade de:
a) alunos aprovados
b) alunos reprovados
c) todos os alunos e alunas aprovados
d) alunas aprovados
e) alunas reprovados

12. (EFOMM) Denotemos por n(x) o número de elementos de um conjunto finito x. Sejam A, B, C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 14$, $n(A \cup C) = 14$ e $n(B \cup C) = 15$, $n(A \cup B \cup C) = 17$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a:
a) 18
b) 20
c) 25
d) 29
e) 32

13. (EFOMM) Na Escola de Marinha Mercante, há alunos de ambos os sexos (130 mulheres e 370 homens), divididos entre os Cursos Básico, de Máquinas e de Náutica. Sabe-se que do total de 130 alunos do Curso de Máquinas, 20 são mulheres. O Curso de Náutica tem 270 alunos no total e o Curso Básico tem o mesmo número de homens e mulheres. Quantas mulheres há no Curso de Náutica?
a) 50
b) 55
c) 60
d) 65
e) 70

14. (EFOMM) Um garrafão contém 3 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea. Retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. A quantidade de vinho, em litros, que resta no garrafão, após 5 dessas operações, é aproximadamente igual a a) 0,396
a) 0,396
b) 0,521
c) 0,676
d) 0,693
e) 0,724

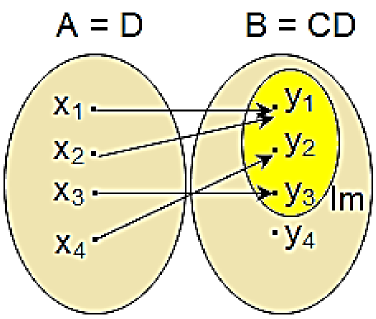
GABARITO

01. e	**02. e**	**03. e**	**04. c**	**05. d**	**06. e**	**07. d**	**08. b**	**09. b**	**10. d**	**11. e**	**12. d**
13. c	**14. a**										

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists | y \in B \,/\, (x,y) \in f\right)$$



$$D = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\left.\begin{array}{l} CD = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \\ Im = \{y_1, y_2, y_3\} \end{array}\right\} Im \subset CD$$

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_3)\}$$

D: domínio
CD: contradomínio
Im: Imagem
f: função

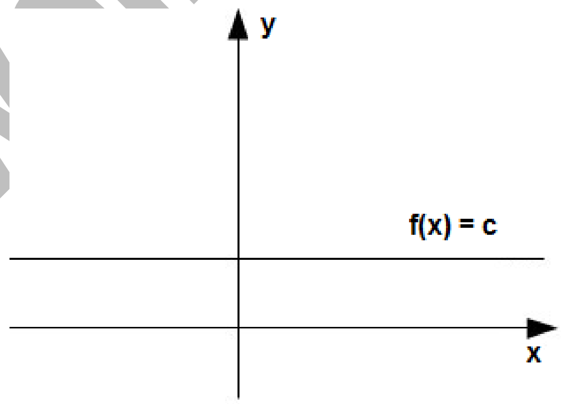
FUNÇÃO CONSTANTE

Representação

$f : \Re \to \Re$

$$\boxed{f(x) = c} \begin{cases} x \in \Re \\ c \in \Re \end{cases} \Rightarrow Im = \{c\}$$

Gráfico



FUNÇÃO IDENTIDADE

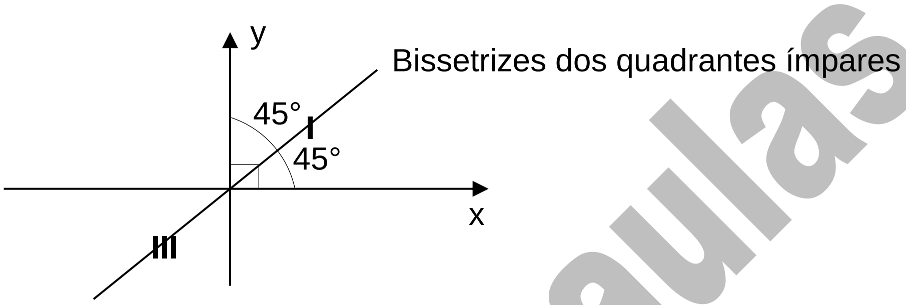
Representação

$f: \Re \to \Re$

$\boxed{f(x) = x}\ \{x \in \Re \Rightarrow Im = \Re$

Gráfico

O gráfico da função identidade é uma ***reta que coincide com as bissetrizes dos quadrantes ímpares.***



FUNÇÃO AFIM

Representação

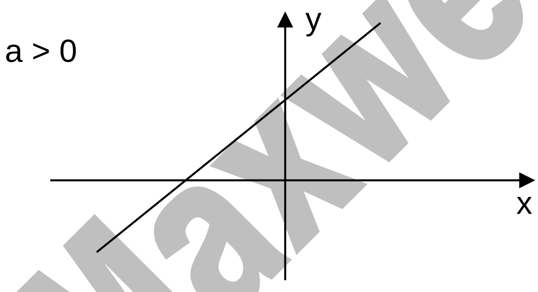
$f: \Re \to \Re$

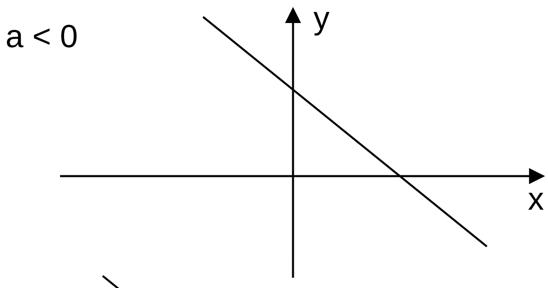
$$\boxed{f(x) = ax + b}\begin{cases} x \in \Re \\ a \in \Re^* \Rightarrow Im = \Re \\ b \in \Re \end{cases}$$

a: coeficiente angular ou declive
b: coeficiente linear

Gráfico

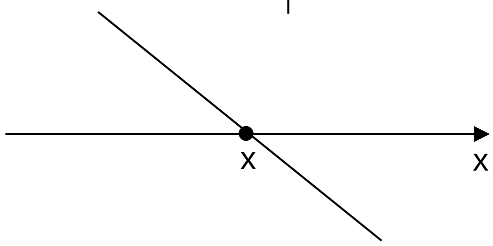
O gráfico da função afim é uma ***reta***





Zero da função afim

$$f(x) = ax + b = 0 \therefore ax = -b \therefore \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$



Nota:

❖ Um caso particular da função afim é **função linear**:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = ax + b \\ \text{Se } b = 0 \end{matrix}\right\} \boxed{f(x) = ax}$$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

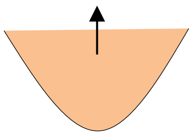
Representação

$$f(x) = ax^2 + bx + c \begin{cases} f : \Re \to \Re \\ a \in \Re^* \\ b,\ c \in \Re \end{cases}$$

Gráfico

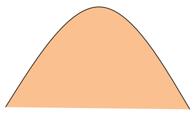
O gráfico da função quadrática é uma ***parábola***

a > 0



Concavidade para cima

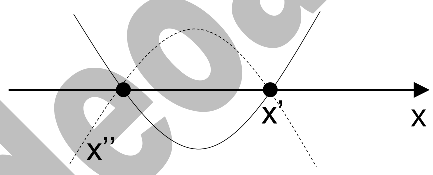
a < 0



Concavidade para baixo

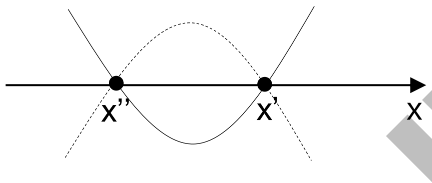
Zeros da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Delta = b^2 - 4ac \end{cases}$$

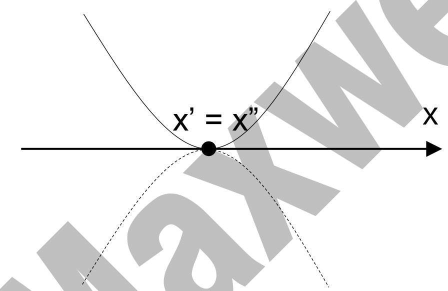


Notas

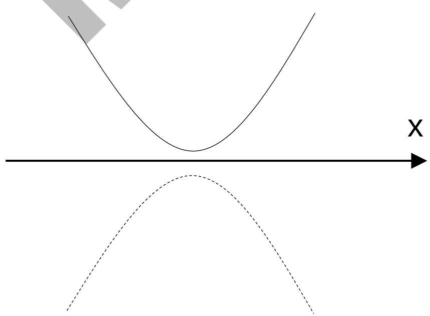
- ❖ $\Delta > 0 \therefore$ **Raízes reais e distintas**



- ❖ $\Delta = 0 \therefore$ **Raízes reais e iguais**



- ❖ $\Delta < 0 \therefore$ **Não existem raízes reais**

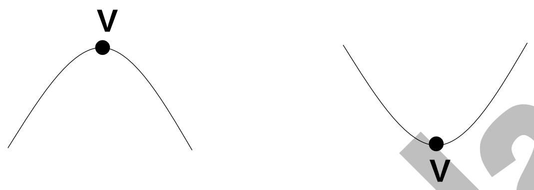


❖ Soma e produto das raízes

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \\ x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

❖ Vértice

$$V(x_V, y_V)\begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$



❖ Mínimo e máximo

O valor máximo e mínimo da função quadrática é determinado pela ordenada do vértice.

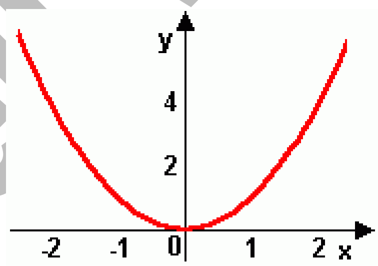
$$\boxed{f(x)_{máx} = f(x)_{máx} = -\dfrac{\Delta}{4a}}$$

PARIDADE

Função par $\Rightarrow \begin{cases} f(-x) = f(x) \\ \text{O gráfico desta função é simétrico em relação ao eixo y} \end{cases}$

Ex.:

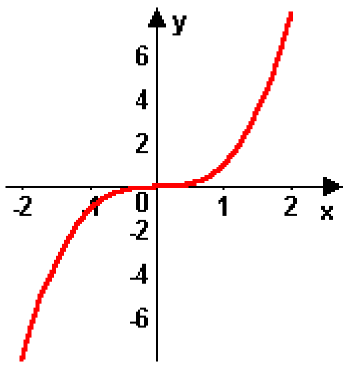
$f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 \therefore f(-x) = x^2 \therefore \underline{f(-x) = f(x)|}$



Função par $\Rightarrow \begin{cases} f(-x) = f(x) \\ \text{O gráfico desta função é simétrico em relação ao eixo y} \end{cases}$

Ex.:

$f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 \therefore f(-x) = -x^3 \therefore \underline{f(-x) = -f(x)|}$

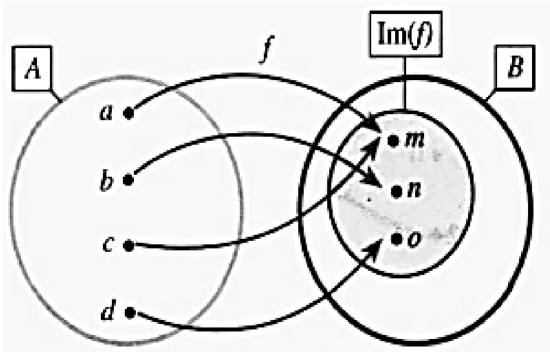


TIPOLOGIA DAS FUNÇÕES

Função sobrejetora

$f: A \to B$

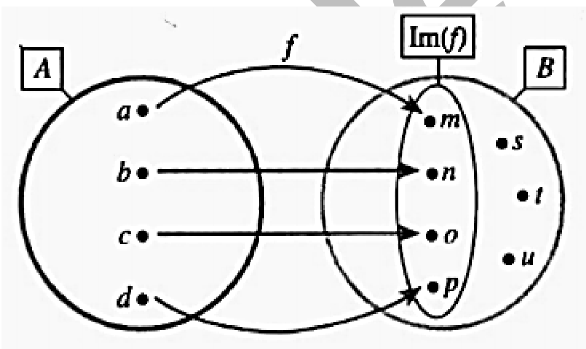
f é sobrejetora $\Leftrightarrow \left(\forall y \in B, \exists x \in A \,/\, f(x) = y\right)$



Função injetora

$f: A \to B$

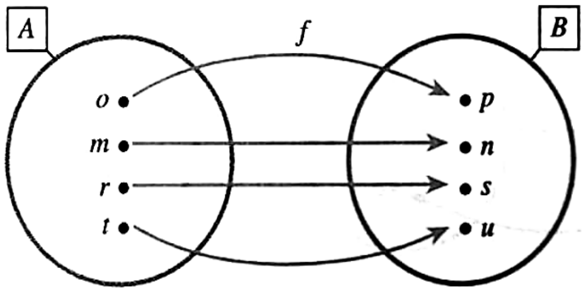
f é injetora $\Leftrightarrow \left(x_1, x_2 \in A, \text{se } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right)$



Função bijetora

$f: A \to B$

f é bijetora $\Leftrightarrow \left(\forall y \in B, \exists | x \in A \,/\, f(x) = y\right)$



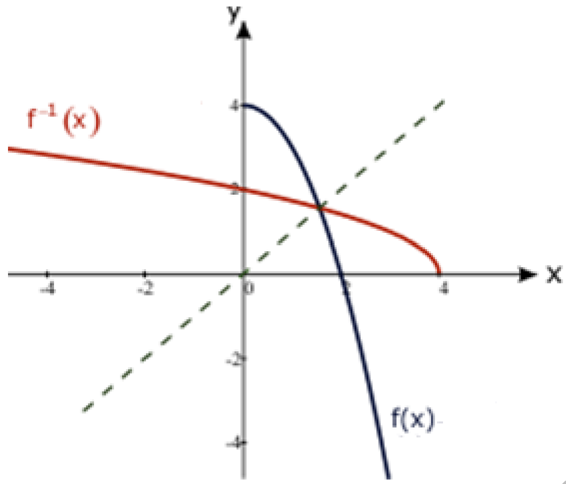
FUNÇÃO INVERSA

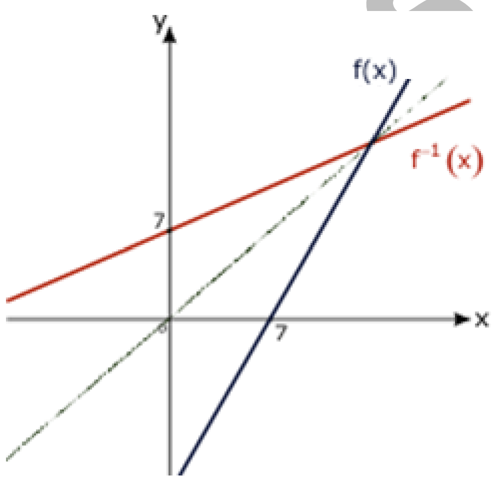
$$f \text{ é inversível} \Leftrightarrow f \text{ for bijetora} \begin{cases} f: A \to B \\ f^{-1}: B \to A \end{cases}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Nota

❖ Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos a y = x (bissetriz dos quadrantes ímpares)



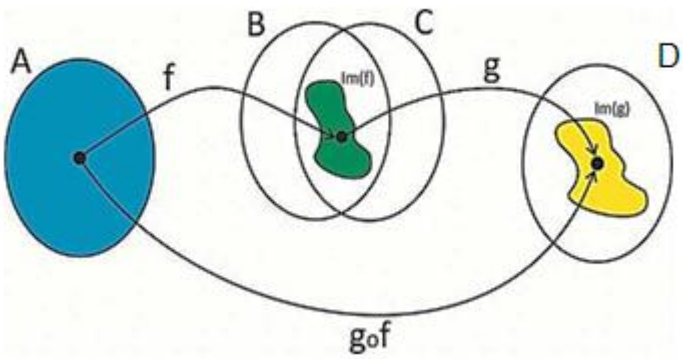


$$\begin{cases} f: A \to B \quad \Rightarrow \text{decrescente} \\ f^{-1}: B \to A \Rightarrow \text{decrescente} \end{cases} \qquad \begin{cases} f: A \to B \quad \Rightarrow \text{crescente} \\ f^{-1}: B \to A \Rightarrow \text{crescente} \end{cases}$$

FUNÇÃO COMPOSTA

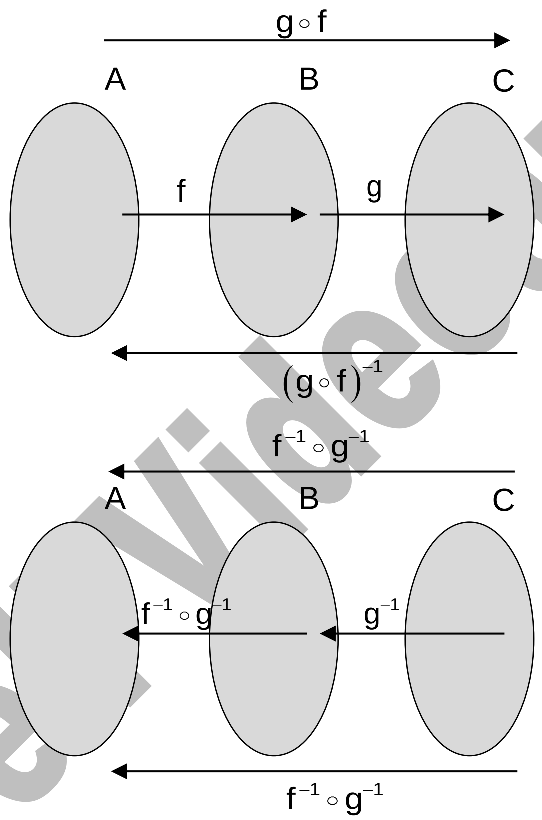
$$\begin{cases} f: A \to B \\ g: C \to D \end{cases} \Rightarrow Im(f) \subset C \Rightarrow \begin{cases} 1^{o}) \text{ aplica} - \text{se } x \text{ em } f, \text{ obtem} - \text{se } f(x) \\ 2^{o}) \text{ aplica} - \text{se } f(x) \text{ em } g, \text{ obtem} - \text{se } g(f(x)) \text{ ou } (g \circ f)(x) \end{cases} \Rightarrow g \circ f: A \to D$$

Esquema da função composta



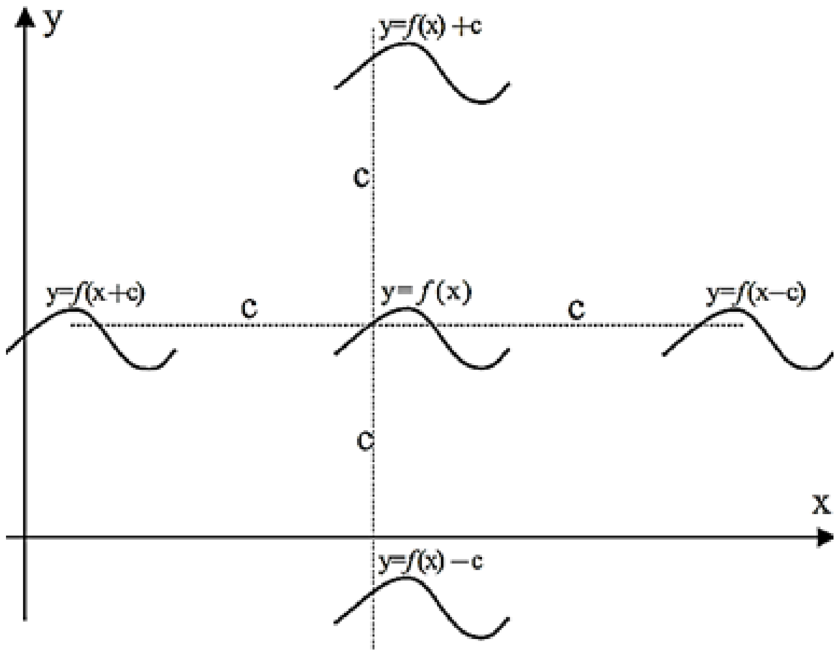
$$\boxed{g(f(x)) = (g \circ f)(x)}$$

Notas

- $g \circ f \Rightarrow$ Lê – se g composta com f ou g círculo f
- Geralmente $\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$
- Associativa $\Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- $\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \\ (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(y)) = f(x) \end{cases}$
- 

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

TRANSLAÇÃO DO GRÁFICO NO PLANO CARTESIANO



1) $y = f(x) + c \Rightarrow$ O gráfico desloca – se c unidades para cima

2) $y = f(x) - c \Rightarrow$ O gráfico desloca – se c unidades para baixo

3) $y = f(x + c) \Rightarrow$ O gráfico desloca – se c unidades para esquerda

4) $y = f(x - c) \Rightarrow$ O gráfico desloca – se c unidades para direita

OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Representação

$f : \mathfrak{R}^* \to \mathfrak{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

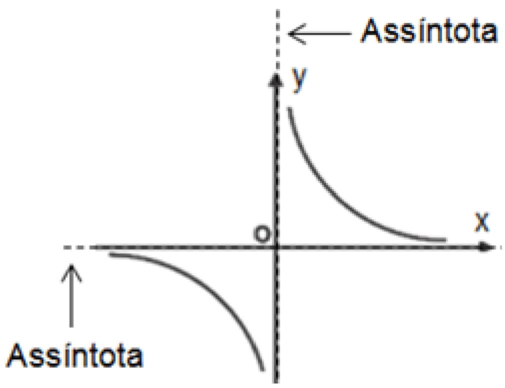
$f : \mathfrak{R}^* \to \mathfrak{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

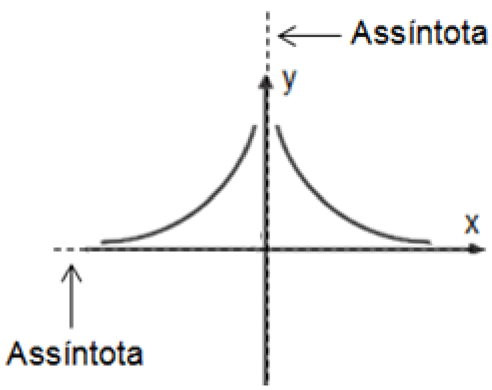
$f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$

$f(x) = x^3$

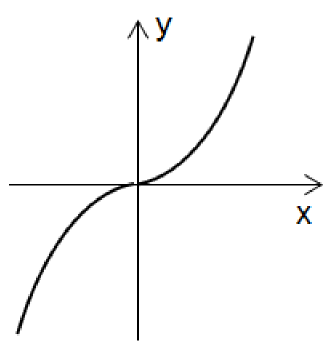
Gráfico



Gráfico



Gráfico



EQUAÇÃO IRRACIONAL

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geq 0$$

Resolva as equações, no conjunto dos números reais:

a) $\sqrt{2x-5} = 5$

$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 = 5^2 \therefore 2x-5 = 25 \therefore \boxed{x = 15}$

$S = \{15\}$

b) $\sqrt{x^2+5x+1}+1 = 2x$

$\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2} \therefore \left(\sqrt{x^2+5x+1}\right)^2 = (2x-1)^2 \therefore x^2+5x+\cancel{1} = 4x^2-4x+\cancel{1}$

$3x^2-9x = 0 \therefore 3x(x-3) = 0 \begin{cases} 3x = 0 \therefore \cancel{x' = 0} \\ x-3 = 0 \therefore \boxed{x'' = 3} \end{cases}$

$S = \{3\}$

FUNÇÃO MODULAR

Definição

Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se módulo ou valor absoluto de x, que se indica por $|x|$, por meio da relação:

$$\begin{cases} |x| = x \text{ se } x \geq 0 \\ |x| = -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Propriedades

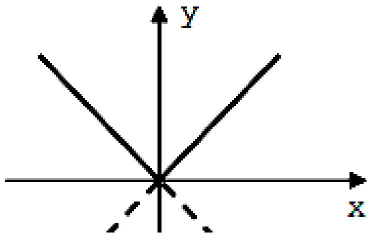
01. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
02. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
03. $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
04. $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$
05. $|x|.|y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
06. $|x+y| \leq |x|+|y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
07. $|x-y| \geq |x|-|y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
08. $|x| \leq k \text{ e } k > 0 \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
09. $|x| \geq k \text{ e } k > 0 \Leftrightarrow x \leq -k \text{ ou } x \geq k$

Função modular
Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função módulo ou modular quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = |x|$$

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



A imagem desta função é $Im = \mathbb{R}_+$, isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

Equações modulares
Lembremos da propriedade do módulo dos números reais, para K > 0:

$$|x| = k \Leftrightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Nota

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$$

Ex_1

$$|x-3| = 5 \begin{cases} x-3=5 \therefore \boxed{x=8} \\ x-3=-5 \therefore \boxed{x=-2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\{-2,8\}}$$

Ex_2

$$|x-2| = |2x-1| \begin{cases} x-2=2x-1 \therefore \boxed{x=-1} \\ x-2=-(2x-1) \therefore x-2=-2x+1 \therefore \boxed{x=1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\{-1,1\}}$$

Ex_3

$$|2x-1| = x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \begin{cases} 2x-1=x+3 \therefore \boxed{x=4} \\ 2x-1=-(x+3) \therefore 2x-1=-x-3 \therefore \boxed{x=-\frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\left\{-\frac{2}{3},4\right\}}$$

Ex_4

$$|3x-1| = -3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \begin{cases} 3x-1 = -3x+1 \therefore \boxed{x = \frac{1}{3}} \\ 3x-1 = -(-3x+1) \therefore 3x-1 = 3x-1 \therefore \boxed{x \in \Re} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \left\{ x \in \Re \,/\, x \leq \frac{1}{3} \right\}}$$

Testes de fixação

01. (EFOMM) Determine o domínio da função:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{5-x}}$$

a) $D(f)=[3,+\infty)$

b) $D(f)=]3,+\infty[$

c) $D(f)=]3,5[$

d) $D(f)=(-\infty,5)$

e) $D(f)=(5,+\infty)$

02. (EFOMM) Qual das relações abaixo, de A em B, constitui uma função? Considere $A=\{a_1,a_2\}$ e $B=\{b_1,b_2,b_3\}$.

a) $\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$

b) $\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$

c) $\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3)\}$

d) $\{(a_1,b_2),(a_2,b_2)\}$

e) $\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_3)\}$

03. (EFOMM) Que valores deve apresentar o coeficiente "a" da função $f(x)=ax^2-2x+1$, para que ela tenha concavidade voltada para cima e vértice no 1º quadrante?

a) $a>0$

b) $0<a\leq 1$

c) $0<a<1$

d) $a>1$

e) $a\geq\frac{1}{2}$

04. (EFOMM) O intervalo onde a função $f(x)=\frac{ax-2}{ax^2-x}$, com $a\in\mathbb{R}_-^*$, apresenta sinal positivo é:

a) $\left]-\infty,\frac{2}{a}\right[$

b) $\left]\frac{1}{a},0\right[$

c) $\left[\frac{1}{a},+\infty\right)$

d) $\left]\frac{2}{a},\frac{1}{a}\right[$

e) $\left[\frac{2}{a},0\right)$

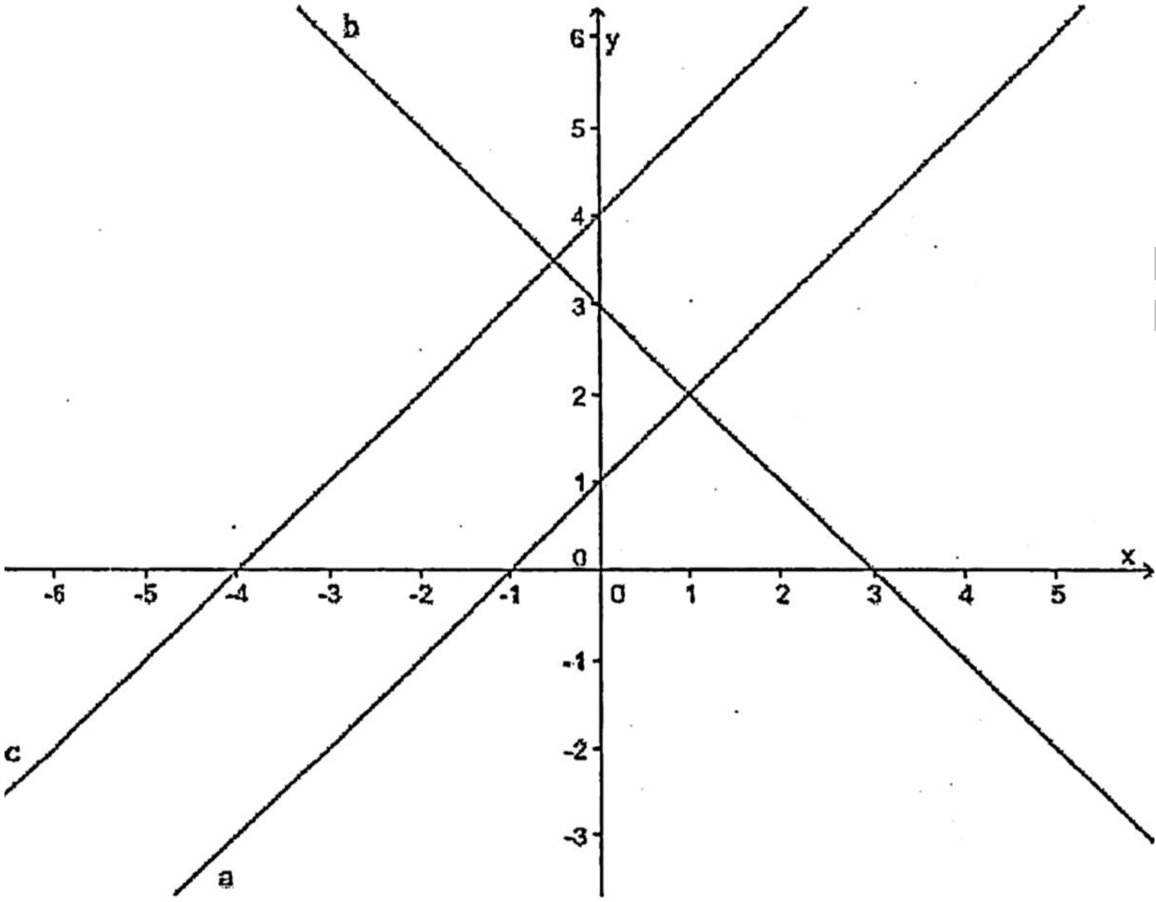
05. (EFOMM) Uma empresa mercante A paga R$ 1000,00 fixos mais R$ 600,00 por dia de viagem e uma empresa B R$ 400,00 fixos mais R$ 800,00 por dia de viagem. Sabe-se que Marcos trabalha na empresa A e Cláudio na B e obtiveram o mesmo valor salarial. Quantos dias eles ficaram embarcados?
a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

06. (EFOMM) Uma churrascaria cobra, num almoço, R$ 10,00 por pessoa. Após 15h, esse valor cai para R$ 8,00. Estima-se que o custo total de um almoço seja de R$ 6,00 por pessoa. Em certo dia, na churrascaria almoçaram 100 pessoas, x dos quais permaneceram até 15h. Assinale a alternativa que representa o intervalo de variação de x a fim de que seu lucro fique entre 300 e 400.
a) maior que 100
b) menor que 50
c) entre 50 e 100
d) menor que 50 ou maior que 100
e) maior que 50

07. (EFOMM) Seja $f: R \to R$ uma função estritamente decrescente, quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.
I- f é injetora
II- f pode ser função par
III- Se f possui inversa, então sua inversa é estritamente decrescente.
Analise a opção correta.
a) apenas a afirmativa I é verdadeira
b) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras
c) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras
d) as afirmativas I, II e III são verdadeiras
e) apenas a afirmativa II é verdadeira

08. (EFOMM) A equação
$\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217 - 13 \cdot \sqrt[3]{x}}$ tem uma solução inteira positiva R. O número de divisores positivos de R é:
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

09. (EFOMM) O gráfico das três funções polinomiais do 1º grau a, b e c definidas, respectivamente, por a(x), b(x) e c(x) estão representadas abaixo.



Nessas condições, o conjunto solução da inequação $\dfrac{[a(x)]^5 \cdot [b(x)]^6}{[c(x)]^3} \geq 0$ é:

a) $(-4,-1) \cup [3,+\infty)$
b) $[-4,-1] \cup [3,+\infty)$
c) $(-\infty,-4) \cup [-1,+\infty)$
d) $[4,+\infty)$
e) $\mathbb{R} - \{4\}$

10. (EFOMM) Seja a função $f: Z \to Q$ (sendo Z o conjunto dos números inteiros e Q o conjunto dos números racionais) com a seguinte propriedade definida por $f(x-1)+1 = \dfrac{f(x-1)-1}{f(x)}$.

Sabendo-se que $f(0)=4$, o valor de $f(1007)$ é igual a:

a) – 1
b) 4
c) – 1/4
d) – 5/3
e) 3/5

11. (EFOMM) O conjunto solução da inequação $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$ é:

a) $[0,+\infty]$

b) $[0,1)$

c) $(1,+\infty)$

d) $[0,1]$

e) $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

12. (EFOMM) O lucro obtido pela venda de cada peça de roupa é x – 10, sendo x o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida por mês é igual a 70 – x. O lucro mensal máximo obtido com a venda do produto é:
a) 1200 reais
b) 1000 reais
c) 900 reais
d) 800 reais
e) 600 reais

13. (EFOMM) A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de 2 cm. Se a sua área é menor ou igual a 35 cm², então o valor de x, em cm, será:
a) 0 < x < 7
b) 0 < x < 5
c) $2 < x \leq 5$
d) $2 < x \leq 7$
e) $2 < x < 7$

14. (EFOMM) Se $g(x) = 9x - 11$ e $f(g(x)) = g\left(\frac{x}{9}+1\right)$ são funções reais, então $f(16)$ vale:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

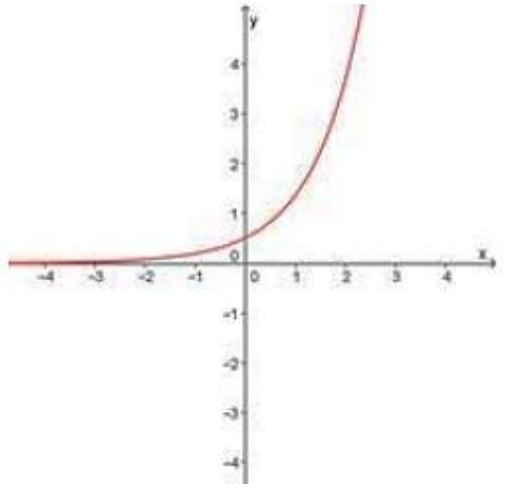
15. (EFOMM) Sejam as funções f : IR $\rightarrow$ IR e g : IR $\rightarrow$ IR. Sabendo que f é bijetora e g é sobrejetora, considere as sentenças a seguir:
I- g o f é injetora;
II- f o g é bijetora;
III- g o f é sobrejetora.
Assinalando com verdadeiro (V) ou falso (F) a cada sentença, obtém-se
a) V-V-V
b) V-V-F
c) F-V-F
d) F-F-V
e) V-F-V

16. (EFOMM) Um aluno precisa construir o gráfico da função real f, definida por $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$. Ele percebeu que a função possui a seguinte característica:

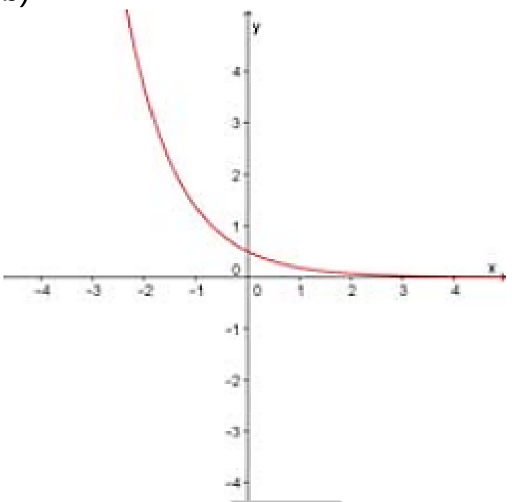
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = f(x).$$

Assinale a alternativa que representa o gráfico dessa função

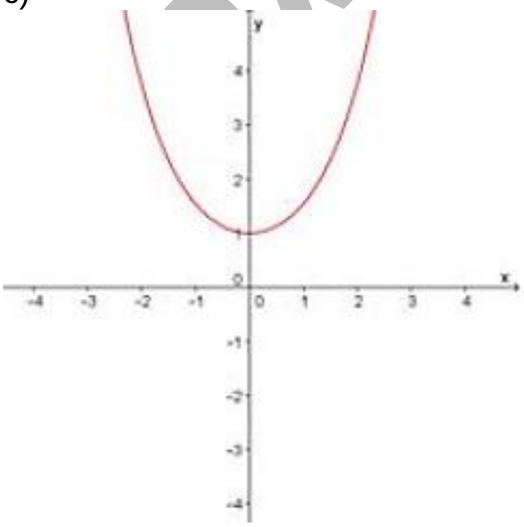
a)



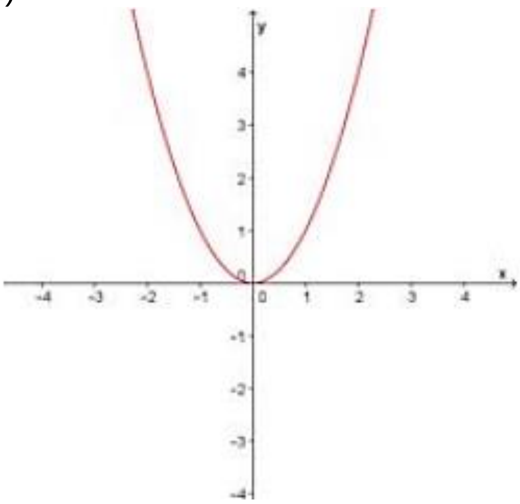
b)



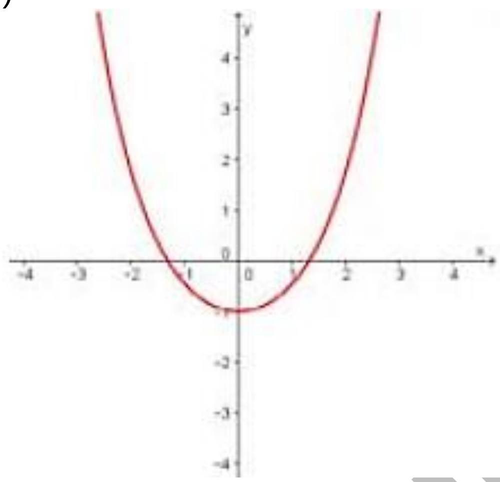
c)



d)



e)



17. (EFOMM) Dado $f(x)=x+a$, $f(g(x))=\dfrac{\text{sen}x+a^2+a}{a+1}$ e $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. Determine o valor de a.

a) a = 0
b) a = 1
c) a = 2
d) a = 3
e) a = 4

18. (EFOMM) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.
a) 625
b) 781150
c) 1000
d) 250
e) 375

19. (EEAR) Sendo a inequação $|x-2|+|x-4| \geq 6$, em U = $\Re$ é o conjunto

a) $\{x \in \Re \,/\, x \geq 6\}$

b) $\{x \in \Re \,/\, x \leq 0\}$

c) $\{x \in \Re \,/\, x \leq 0 \text{ e } x \geq 6\}$

d) $\{x \in \Re \,/\, x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$

20. (EEAR) Sendo S o conjunto-solução da equação em $\Re$ $|3x-1| = -3x+1$, pode-se afirmar que

a) 1/2 $\in$ S
b) 2/3 $\in$ S
c) $\left\{\frac{3}{5}, \frac{1}{3}\right\} \subset S$
d) $\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{7}\right\} \subset S$

21. (EEAR) A equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

a) só tem uma solução.
b) tem duas soluções, tais que seu produto é = -6.
c) tem duas soluções, tais que seu produto é = -4.
d) tem duas soluções, tais que seu produto é igual a 0.

22. (EEAR) Seja a função f: $\Re \rightarrow \Re$, definida por $f(x) = |2x^2 - 3|$. O valor de 1 + f(–1) é

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2

23. (EFOMM) Os valores de $x \in \Re$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{4 - ||2x-1| - 6|}$ está definida, formam o conjunto

a) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

b) $\left[-\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$

c) $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$

d) $\left[-\frac{5}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{7}{2}\right)$

e) $\left[-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right]$

24. (EFOMM) A área entre o gráfico de $y = ||3x + 2| - 3|$ e a reta y = 3, em unidades de área, vale:

a) 6
b) 3
c) 1,5
d) 2
e) 0,5

25. (EFOMM) Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = ||x + 2| - |x - 2||$, para todo $x \in \mathfrak{R}$, conjunto dos números reais.

a) $Im(f) = \mathfrak{R}$
b) $Im(f) = \{y \in \mathfrak{R} / y \geq 0\}$
c) $Im(f) = \{y \in \mathfrak{R} / 0 \leq y \leq 4\}$
d) $Im(f) = \{y \in \mathfrak{R} / y \leq 4\}$
e) $Im(f) = \{y \in \mathfrak{R} / y > 0\}$

GABARITO

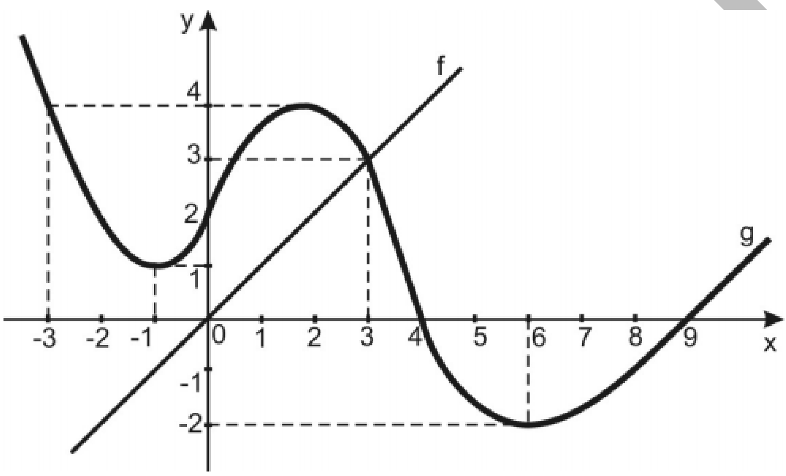
01. d	02. d	03. d	04. d	05. b	06. c	07. b	08. d	09. c	10. d	11. b	12. c
13. d	14. a	15. b	16. c	17. d	18. a	19. d	20. d	21. c	22. d	23. e	24. a
25. c											

TESTES DE APRENDIZAGEM – CONJUNTOS E FUNÇÕES

01. (AFA) Uma fábrica produz casacos de determinado modelo. O preço de venda de um desses casacos é de R$ 200,00,quando são vendidos 200 casacos. O gerente da fábrica, a partir de uma pesquisa, verificou que, para cada desconto de R$ 2,00 no preço de cada casaco, o número de casacos vendidos aumenta de 5. A maior arrecadação possível com a venda dos casacos acontecerá se a fábrica vender cada casaco por um valor, em reais, pertencente ao intervalo.

a) [105, 125]
b) [125, 145]
c) [165, 145]
d) [185, 165]

02. (AFA) Considere as funções reais $f : \Re \to \Re$ e $g : \Re \to \Re$ cujos gráficos estão representados abaixo.



Sobre essas funções, é correto afirmar que

a) $\forall x \in [0,4]$, g(x) – f(x) > 0
b) f (g(0)) – g (f(0)) > 0
c) $\dfrac{g(x).f(x)}{[f(x)]^2} \leq 0\ \forall\ x \in]-\infty,0[\cup [4,9]$
d) $\forall\ x \in [0,3]$ tem-se $g(x) \in [2,3]$

03. (AFA) Considere as funções reais f, g e h tais que:

$f(x) = mx^2 - (m + 2)x + (m + 2)$

$g(x) = \dfrac{1}{2}$

$h(x) = \sqrt{x}$

Para que a função composta h o g o f(x) tenha domínio D = $\Re$, deve-se ter:

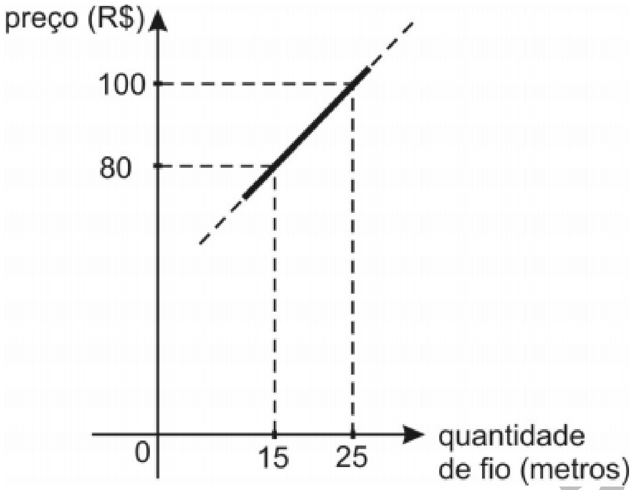
a) $m > \dfrac{2}{3}$

b) $-2 < m < \dfrac{2}{3}$

c) $0 < m < \dfrac{2}{3}$

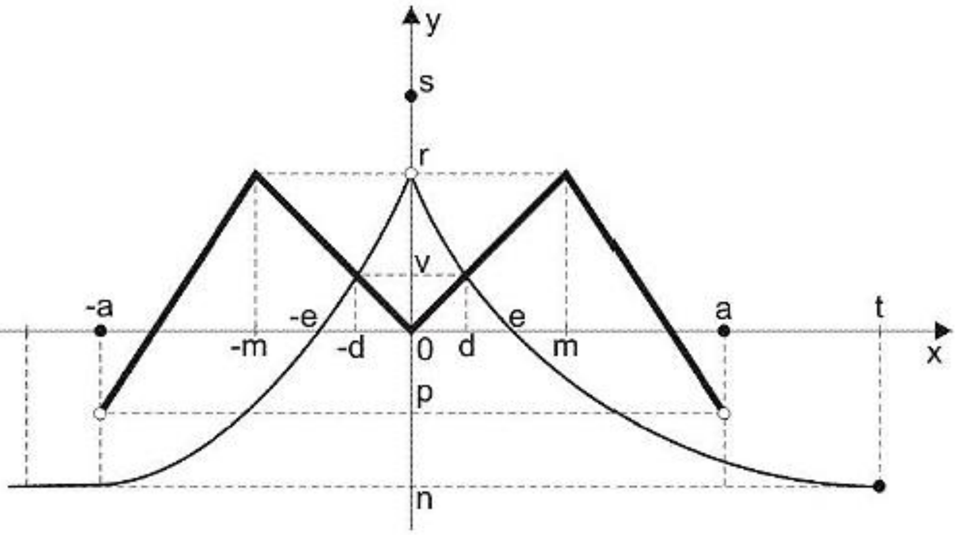
d) $-2 < m < 0$

04. (AFA) Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contratou dois eletricistas. O Sr. Luiz, que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:



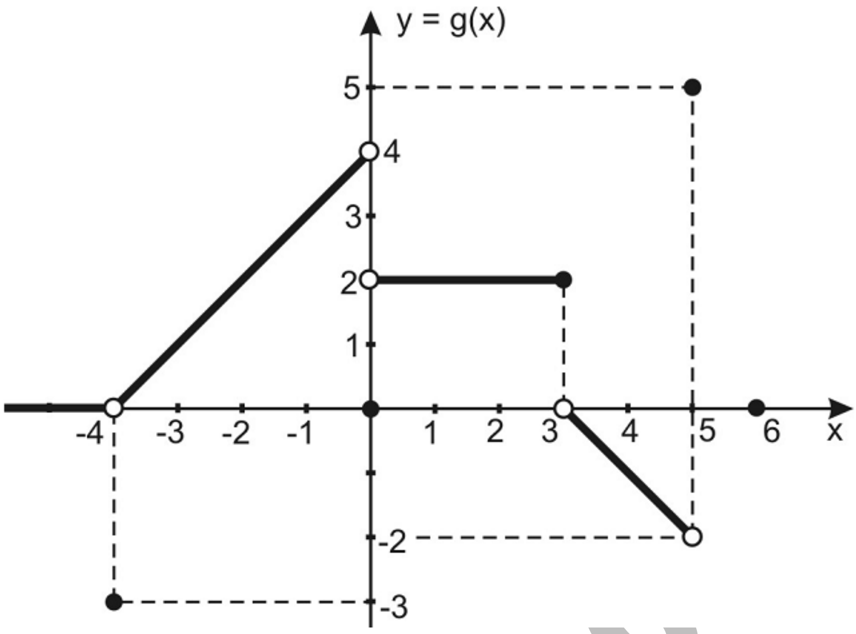
Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento.
Com relação às informações acima, é correto afirmar que:
a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

05. (AFA) Considere os gráficos abaixo das funções reais $f : A \to \Re$ e $g : B \to \Re$.
Sabe-se que A = [-a, a]; $B = \left]-\infty, t\right]$; g(-a) < f (-a); g(0) > f(0); g(a) < f(a) e g(x) = n para todo $x \leq -a$



Analise as afirmativas abaixo e marque a **FALSA**.
a) A função f é par.
b) Se x]d,m[, então $f(x) \cdot g(x) < 0$
c) Im (g) = [n,r[$\cup$ {s}
d) A função $h : E \to \Re$ dada por $h(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ está definida se $E = \{x \in \Re \mid -a \leq x < -d \text{ ou } d < x \leq a\}$

06. (AFA) Considere o gráfico da função real $g : A \to A$ abaixo e marque (V) verdadeiro ou (F) falso.



( ) A função g exatamente duas raízes.

( ) $g(4) = -g(-3)$

( ) $\mathrm{Im}(g) = \{-3\} \cup]-2, 4[$

( ) A função definida por $h(x) = g(x) + 3$ não possui raízes.

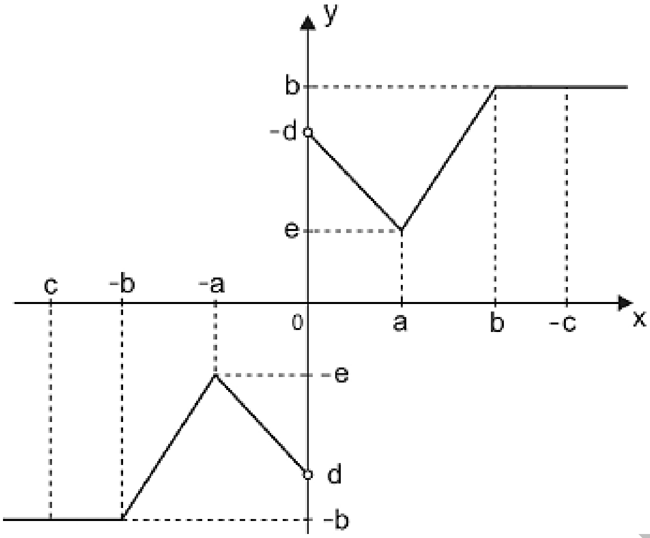
( ) $(g \circ g \circ g \circ \cdots \circ g)(-2) = 2$

A sequência correta é:
a) F-V-F-F-V
b) F-F-V-F-V
c) F-V-F-V-F
d) V-V-F-F-V

07. (AFA) Seja f uma função quadrática tal que:
- f (x) > 0 $\forall x \in \Re$
- tem gráfico interceptando o gráfico da função g, dada por g(x) = 2 , num único ponto cuja abscissa é 2
- seu gráfico possui o ponto Q, simétrico do ponto R (0, -3) em relação à origem do sistema cartesiano.

Seja h uma função afim cujo gráfico intercepta o gráfico de f no eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e no ponto de menor ordenada de f. Assim sendo, o conjunto solução da inequação $\dfrac{[f(x)]^3 \cdot [g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}} \geq 0$ contém o conjunto
a) [0,8]
b) [1,7]
c) [2,6]
d) [3,5]

08. (AFA) O gráfico abaixo descreve uma função



Analise as proposições que seguem.
I) A = $\mathbb{R}^*$
II) f é sobrejetora se B = $\mathbb{R}$ – [–e, e]
III) Para infinitos valores de x $\in$ A, tem-se f(x) = – b
IV) f(– c) – f(c) + f(– b) + f(b) = 2b
V) f é função par.
VI) $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -d$
São verdadeiras apenas as proposições
a) I, III e IV
b) I, II e VI
c) III, IV e V
d) I, II e IV

09. (AFA) Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$A = (\mathbb{N} \cup \mathrm{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$

$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$

$D = (\mathbb{N} \cup \mathrm{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos A, B e D, nesta ordem, é

a) –3; 0,5 e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}; \sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10}; -5$ e 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3 e $2,\overline{31}$

10. (AFA) O gráfico de uma função polinomial do segundo grau y = f(x), que tem como coordenadas do vértice (5, 2) e passa pelo ponto (4, 3), também passará pelo ponto de coordenadas
a) (1, 18)
b) (0, 26)
c) (6, 4)
d) (–1, 36)

11. (AFA) Para angariar fundos de formatura, os cadetes do 1º ano da AFA vendem camisas de malha com o emblema da turma. Se o preço de venda de cada camisa é de 20 reais, eles vendem por mês 30 camisas.
Fizeram uma pesquisa e verificaram que, para cada 2 reais de desconto no preço de cada camisa, são vendidas 6 camisas a mais por mês.
Dessa forma, é correto afirmar que
a) é possível fazer mais de 10 descontos de 2 reais.
b) tanto faz vender as camisas por 12 reais cada uma ou 18 reais cada uma que o faturamento é o mesmo.
c) o máximo faturamento ocorre se são vendidas menos de 40 camisas por mês.
d) se o preço de venda de cada camisa é de 14 reais, então o faturamento é maior que 680 reais.

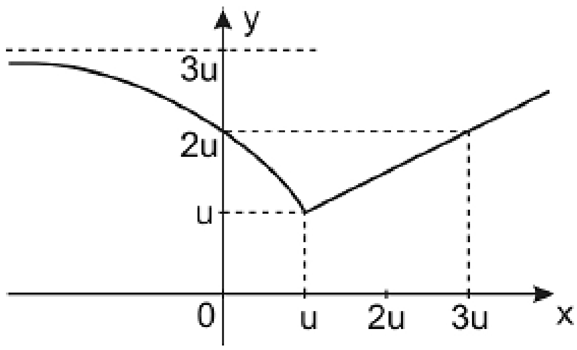
12. (AFA) Considere f uma função quadrática de raízes reais e opostas. O gráfico de f intercepta o gráfico da função real g definida por g(x) = - 2 em exatamente um ponto.
Se f ($\sqrt{3}$)= 4 e D(f) = D(g) = $\mathbb{R}$, então, é **INCORRETO** afirmar que
a) f (x) - g(x) > 0 , $\forall$ x $\mathbb{R}$
b) o produto das raízes de f é um número ímpar.
c) a função real h definida por h(x) = g(x) - f (x) admite valor máximo.
d) f é crescente $\forall$ x $\in$[1, + ∞[

13. (AFA) Luiza possui uma pequena confecção artesanal de bolsas. No gráfico abaixo, a reta c representa o custo total mensal com a confecção de x bolsas e a reta f representa o faturamento mensal de Luiza com a confecção de x bolsas.
Com base nos dados acima, é correto afirmar que Luiza obtém lucro se, e somente se, vender
a) no mínimo 2 bolsas.
b) pelo menos 1 bolsa.
c) exatamente 3 bolsas.
d) no mínimo 4 bolsas.

14. (AFA) Sr. Osvaldo possui certa quantia com a qual deseja adquirir um eletrodoméstico. Caso a loja ofereça um desconto de40%, ainda lhe faltarão 1000 reais. Se o Sr. Osvaldo aplicar sua quantia a juros (simples) de 50% ao mês, ajunta, em três meses, o montante correspondente ao valor do eletrodoméstico sem o desconto. Assim, o valor do eletrodoméstico e da quantia que o Sr. Osvaldo possui somam, em reais,
a) 4000
b) 5000
c) 7000
d) 800

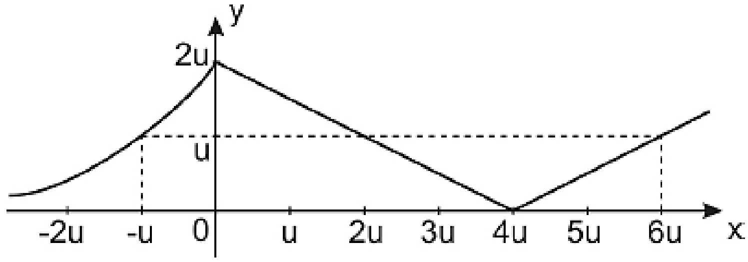
15. (AFA) Dadas as funções reais f e g definidas por $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-5x+6}$ e $g\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$, sabendo-se que existe (gof)(x), pode-se afirmar que o domínio de gof é
a) IR -]2, 3[
b) IR - [2, 3]
c) IR - {2, 3}
d) IR* - [2, 3]

16. (AFA) Considere a figura abaixo que representa um esboço do gráfico da função real f

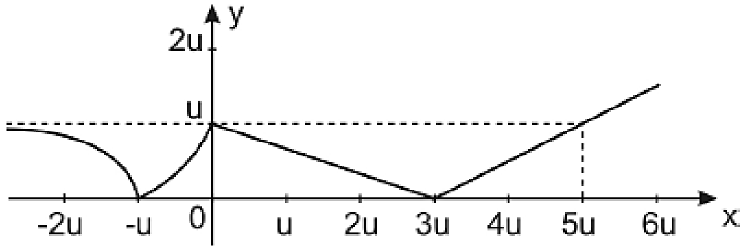


Sabe-se que g(x) = f (x) - 3u , h(x) = g(x + u) e j(x) = h(x□. Um esboço do gráfico que melhor representa a função j é

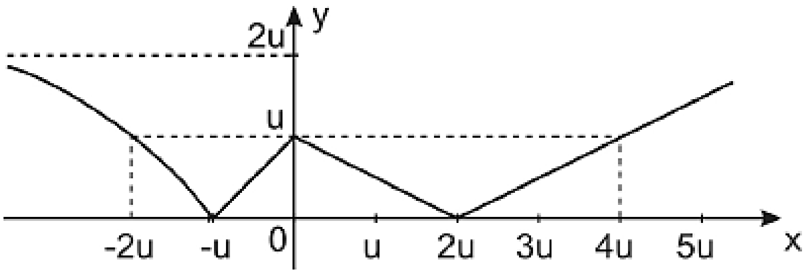
a)



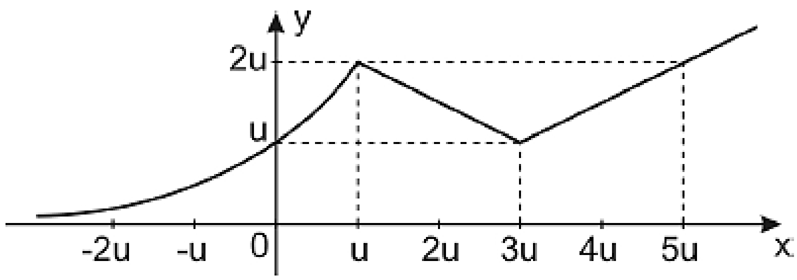
b)



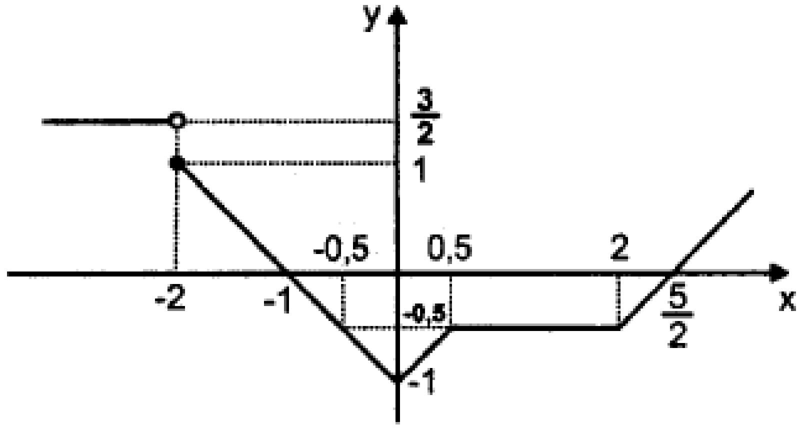
c)



d)



17. (AFA)
Seja f a função real cujo gráfico se apresenta a seguir:



Analisando o gráfico, é INCORRETO afirmar que:
a) f(f(1)) = f(0,5)
b) f(x) + 1 > 0, $\forall x \in \mathbb{R}$
c) f(x) $\leq$ g(x), $\forall x \in \mathbb{R}$
d) se g(x) = f(x) – 1, então g (-2) = $f\left(\frac{5}{2}\right)$

18. (AFA) Os valores de x que satisfazem a equação $\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|}=2$ têm produto igual a:

a) $-\frac{81}{256}$
b) $-\frac{27}{64}$
c) $-\frac{9}{16}$
d) $-\frac{3}{4}$

19. (AFA) A soma dos números inteiros que satisfazem a sentença $3 \leq |2x-3| < 6$ é um número:
a) ímpar;
b) primo;
c) divisível por 3;
d) que é divisor de 7

20. (AFA) Se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax - 1, a $\in \mathbb{R}^*$, for crescente e f(f(4)) = 32, então pode-se afirmar que a mesma
a) é positiva para x < 0
b) é negativa para x < 1/3
c) é nula para x = 3
d) admite o valor -2/3 quando x = 1

21. (AFA) Considere as funções reais

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 4x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases} \text{ e } g(x) = 2x - 3$$

Com base nessas funções classifique as afirmativas abaixo em VERDADEIRA(S) ou FALSA(S).

I - f(x) é par.

II - f(x) admite inversa em todo seu domínio.

III - f(x) é crescente em $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq -1\}$

IV - se $x < -6$ então $f(x) > -3$

A sequência correta é:

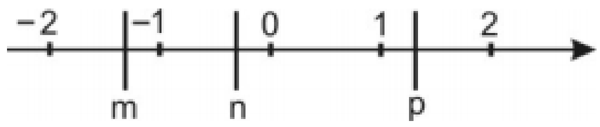
a) V, V, F, V

b) F, F, V, F

c) F, F, V, V

d) F, V, V, F

22. (AFA) Na reta dos números reais abaixo, estão representados os números m, n e p.



Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) $\sqrt{\dfrac{m-n}{p}}$ não é um número real.

( ) $(p+m)$ pode ser um número inteiro.

( ) $\dfrac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

a) V – V – F

b) F – V – V

c) F – F – F

d) V – F – V

23. (AFA) Considere a função real $f(x) = \dfrac{1}{2x+2}$, $x \neq -1$. Se $f(-2+a) + \dfrac{1}{5} = f(-a)$, então $f\left(\dfrac{a}{2} - 1\right) + f(4+a)$ é igual a

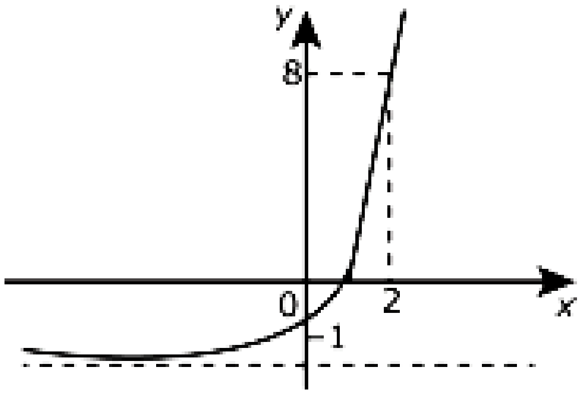
a) 1

b) 0,75

c) 0,5

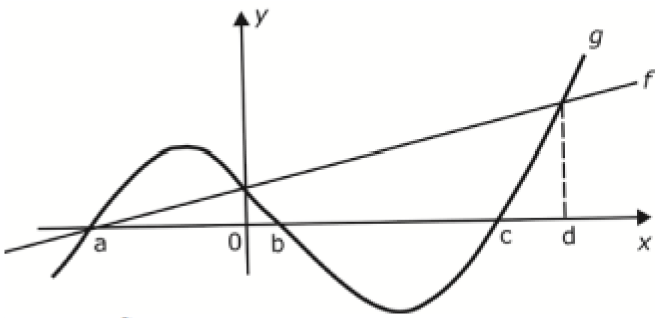
d) 0,25

24. (AFA) A função real f definida por f(x) = a·3^x + b, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



Pode-se afirmar que o produto (a·b) pertence ao intervalo real
a) [– 4, –1[
b) [–1, 2[
c) [2,5[
d) [5,8]

25. (AFA) No gráfico abaixo estão representadas as funções f: R → R e g: R → R.



Sobre estas funções é correto afirmar que:

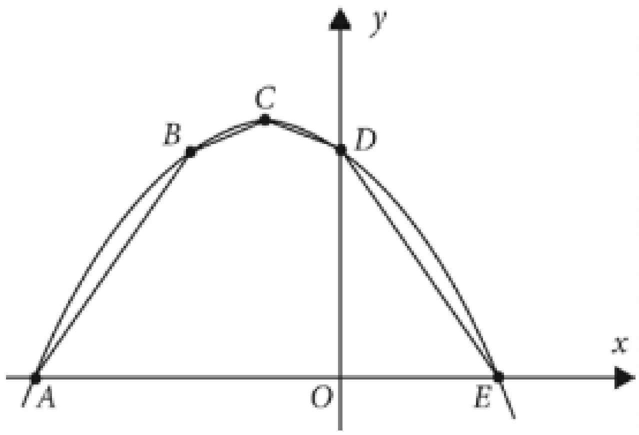
a) $\dfrac{g(x)}{f(x)} \leq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x \leq d$

b) $f(x) > g(x)$ apenas para $0 < x < d$

c) $\dfrac{f(a)+g(f(a))}{g(c)+f(d)} > 1$

d) $f(x) \cdot g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ ou $x \geq b$

26. (AFA) No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função real f definida por $f(x) = -x^2 - x + 2$ e o polígono ABCDE



Considere que:
- o ponto C é vértice da função f;
- os pontos B e D possuem ordenadas iguais;
- as abscissas dos pontos A e E são raízes da função f.

Pode-se afirmar que a área do polígono ABCDE, em unidades de área, é

a) $8\frac{1}{6}$

b) $4\frac{1}{8}$

c) $4\frac{1}{4}$

d) $8\frac{1}{2}$

27. (AFA) Sejam os números reais

a = $\dfrac{\sqrt{(-1)^2}\cdot 0{,}1222..}{(1{,}2)^{-1}}$.

b = comprimento de uma circunferência de raio 1

c = $\sqrt{12}\cdot\sqrt{90}\cdot\sqrt{160}\cdot\sqrt{147}$

Sendo N, Z, Q e R os conjuntos numéricos, assinale a alternativa FALSA.

a) {a,c} está contido em Q

b) c ϵ (Z ∩ N)

c) (R – Q) contém {b, c}

d) {a,c} está contido em (R ∩ Q)

28. (AFA) Durante 16 horas, desde a abertura de certa confeitaria, observou-se que a quantidade q(t) de unidades vendidas do doce “amor em pedaço”, entre os instantes (t - 1) e t, é dada pela lei $q(t) = \left|\,|t-8| + t-14\right|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$
É correto afirmar que
a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de “amor em pedaço”.
b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.
c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.
d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

29. (AFA) Um tanque com capacidade de 300 litros de água possui duas torneiras I e II.
A torneira I despeja água no tanque a uma vazão de 2l por minuto. Já a torneira II retira água do tanque a uma vazão de $\frac{1}{2}\ell$ por minuto.
Às 8h de certo dia, com o tanque vazio, a torneira I foi aberta e, após 15 minutos, foi fechada.
Às 9h e 30min as duas torneiras foram abertas, e assim permaneceram até 11h e 30min.
Neste horário a torneira II é fechada, mas a torneira I permanece aberta até o momento em que a água atinge a capacidade do tanque.
Este momento ocorre às
a) 12h e 10min
b) 12h e 15min
c) 12h e 20min
d) 12h e 25min

EXPONENCIAL E LOGARITMOS

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Representação

$$y = y_0 \cdot a^x \begin{cases} y = y_0 \to x = 0 \\ a : \text{base}(0 < a \neq 1) \\ x \in \Re \end{cases}$$

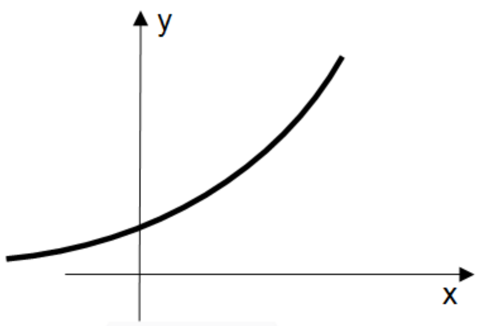
Atenção !

Uma situação muito comum de ***função exponencial*** é aquela em que uma determinada grandeza, que pra um instante t = 0 ela apresenta uma medida $y = y_0$, a partir deste instante, começa a apresentar um k crescimento (k > 0) ou decrescimento (k < 0) por unidade de tempo. Sendo assim fica mais prático representar a função da seguinte forma:

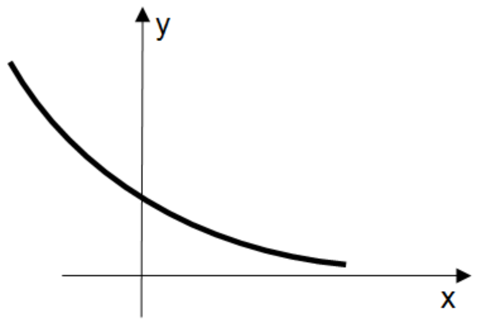
$$y = y_0 \cdot (1 + k)^t$$

Análise gráfica

Se a base a > 1 ∴ Função crescente



Se a base 0 < a < 1 ∴ Função decrescente



FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Representação

$$y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x \begin{cases} y : \text{logaritmo} \\ a : \text{base}(0 < a \neq 1) \\ x : \text{logaritmando}(x > 0) \end{cases}$$

Consequências

I. $\log_a 1 = 0$

II. $\log_a a = 1$

III. $\log_a a^{\alpha} = \alpha$

IV. $a^{\log_a b} = b$

V. $\log_a b = \log_a c \to b = c$

Propriedades

I. $\log_a[b \cdot c] = \log_a b + \log_a c$

II. $\log_a\left[\dfrac{b}{c}\right] = \log_a b - \log_a c$

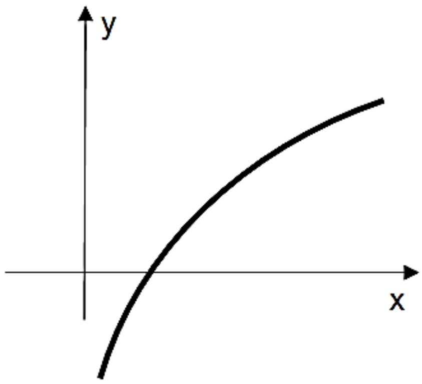
III. $\log_a b^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a b$

IV. $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$

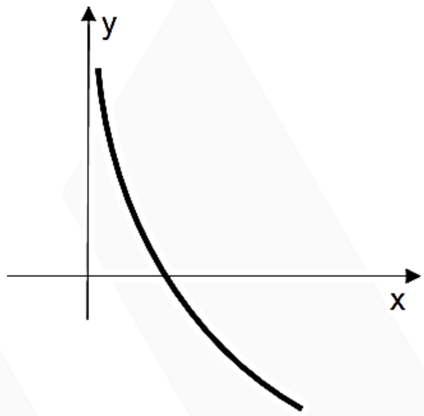
V. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (mudança de base)

Análise gráfica

Se a base a > 1 $\therefore$ Função crescente



Se a base 0 < a < 1 $\therefore$ Função decrescente



Inequações ou desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} a^b > a^c \\ \log_a b > \log_a c \end{array}\right\} \text{se} \begin{cases} a > 1 \therefore b > c \\ 0 < a < 1 \therefore b < c \end{cases}$$

Comentários finais

I. base decimal (a = 10)

$\log_{10} b = \log b$

II. base neperiano (a = e)

$\log_e b = \ln b$

III. cologaritmo

$\text{co}\log_a b = -\log_a b$

IV. Antilogaritmo

$y = \log_a x \rightarrow x = \text{anti}\log_a y$

Testes de fixação

01. (EFOMM) O valor de *x* para resolver a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

02. (EFOMM) O número de bactérias B, numa cultura, após t horas, é $B = B_0 e^{k \cdot t}$ onde k é uma constante real. Sabendo-se que o número inicial de bactérias é 100 e que essa quantidade duplica em $t = \frac{\ln 2}{2}$ horas, então o número N de bactérias, após 2 horas, satisfaz:
a) 800 < N < 1600
b) 1600 < N < 8100
c) 8100 < N < 128000
d) 128000 < N < 256000
e) 256000 < N < 512000

03. (EFOMM) O conjunto solução da inequação $\dfrac{\log_{10}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)}{(x+1)^3 \cdot (1-x)^2} \geq 0$ é:

a) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

b) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

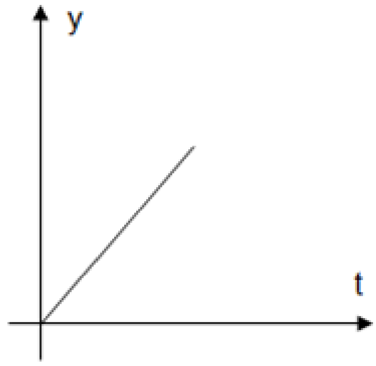
c) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

d) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

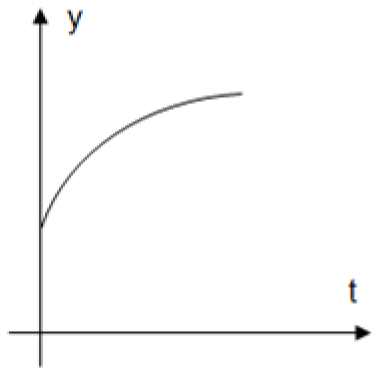
e) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

04. (EFOMM) Em radioatividade, na função $A(t) = A_0 \cdot e^{-\varphi \cdot t}$, temos que:
I. A é a quantidade da substância radioativa ainda existente, no instante t;
II. φ é a constante de desintegração e $\varphi > 0$
III. A_0 é a amostra inicial no instante t_0; e
IV. t é o tempo.
De acordo com as informações acima, o gráfico que melhor representa a função $y(t) = \ln[A(t)]$ é:

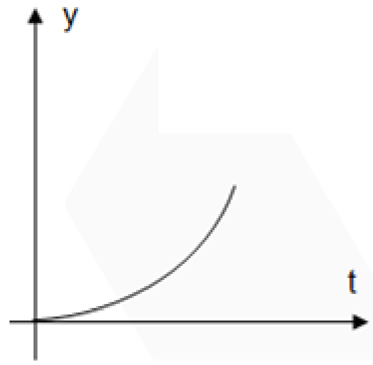
a)



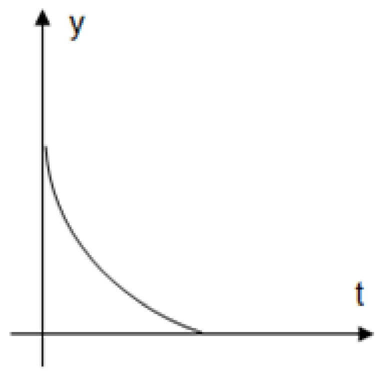
b)



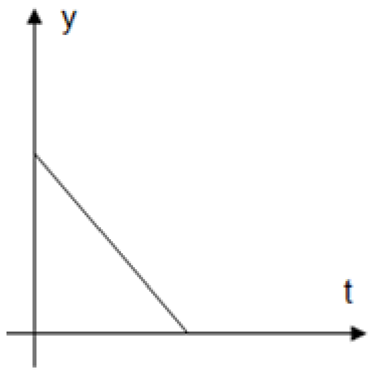
c)



d)



e)



05. (EFOMM) Sabendo que o $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$**,** que opção representa $\log_{10} 2$?

a) $\dfrac{1-a-b}{2+a}$

b) $\dfrac{1-a-b}{2+a}$

c) $\dfrac{1-a-b}{1+a}$

d) $\dfrac{1-a-b}{2-a}$

e) $\dfrac{1-a-b}{1-a}$

06. (EFOMM) Numa embarcação é comum ouvirem-se determinados tipos de sons. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um desses sons esteja relacionado com a equação logarítmica $\beta = 12 + \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I em watts por metro quadrado. Qual é a razão $\dfrac{I_1}{I_2}$, sabendo-se que I_1 corresponde ao ruído sonoro de 8 decibéis de uma aproximação de dois navios e que I_2 corresponde a 6 decibéis no interior da embarcação?

a) 0,1
b) 1
c) 10
d) 100
e) 1000

07. (EFOMM) Os domínios das funções reais f(x) = log x^2 e g(x) = 2.log x são D_1 e D_2, respectivamente. Sendo assim, pode-se afirmar que:
a) $D_1 = D_2$
b) $D_1 \neq D_2$, mas $D_1 \subset D_2$
c) $D_1 \neq D_2$, mas $D_2 \subset D_1$
d) $D_1 \neq D_2$, e $D_1 \cap D_2 = \varphi$
e) $D_1 \not\subset D_2$, $D_2 \not\subset D_1$ e $D_1 \cap D_2 \neq \varphi$

08. (EFOMM) [...] A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imagine que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante, nesse caso, o tempo (t) é sempre o logaritmo decimal da altura (h) em metros.

Revista Superinteressante, pg.: 86 de 2000 maio.

A partir das informações dadas, analise as afirmativas abaixo:
I. Pode-se representar a relação descrita por meio da função: h= log t.
II. Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.
III. Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros.
Dentre as respostas, assinale a alternativa correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) As afirmativas I e II são falsas.
d) As afirmativas I e III são verdadeiras.
e) Apenas a afirmativa III é falsa.

09. (EFOMM) Em uma certa região, ocorreu uma infecção viral que se comportou de acordo com a função: $N(t) = a \cdot 2^{b \cdot t}$, em que N(t) são pessoas infectadas em t dias após a realização do estudo; a e b constantes reais. Sabe-se que, ao iniciar o estudo, havia 3000 pessoas infectadas e que, após 2 dias, esse número chegava a 24000 pessoas. Assinale a alternativa que representa o número de pessoas infectadas após 16 horas.
a) 5000
b) 6000
c) 7000
d) 8000
e) 9000

10. (EFOMM) Sendo $\log_a b = 10$ e $\log_a c = 20$, podemos afirmar que $\log_a \sqrt[3]{bc} + \log_c a\sqrt{c}$ é igual a:
a) 211/20
b) 200
c) 30
d) 10
e) 135/7

11. (EFOMM) São conhecidas que as indicações R_1 e $R_{2,}$ na escala Richter, em relação aos dois terremotos que estão relacionados pela fórmula: $R_2 - R_1 = \log (M_2/M_1)$ onde encontram-se M_1 e M_2, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Considerando os 9 pontos na escala Richter do terremoto de San Francisco (R_2) e 7 pontos no de Lisboa (R_1), assinale a alternativa correta que define a razão entre as energias liberadas pelos abalos sísmicos.

a) 10^3
b) 10^2
c) 0,001
d) 10
e) 0,1

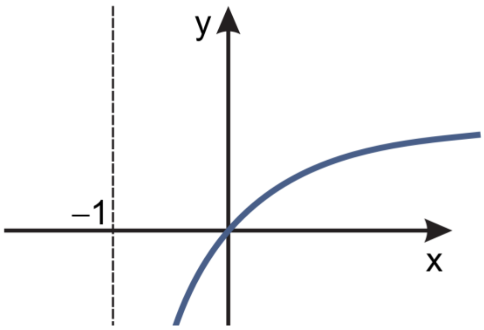
12. (EFOMM) Se $\log a = 0{,}4771$ e $\log b = 0{,}3010$, então o $\log \frac{a}{b}$ é:

a) 0,1761
b) - 0,1761
c) 0,7781
d) 0,8239
e) -0,8239

13. (EFOMM) Determine o domínio da função real $y = \sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}} x + 2\right)}$.

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq 4\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 > x \geq 4\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq 2\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 > x \geq 4\}$
e) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 4\}$

14. (EFOMM) Considere o gráfico abaixo. A função mais bem representada por ele é a:



a) $f(x) = \log_2 (x+1)$
b) $f(x) = \log_{1/2} (x+1)$
c) $f(x) = \log_2 (x-1)$
d) $f(x) = \log_{1/2} (x-1)$
e) $f(x) = \log_2 (-x+1)$

15. (EFOMM) Determine o valor de x na equação: $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1}=2$.

a) 7/2
b) – 7/2
c) 1/2
d) 13
e) 2

16. (EFOMM) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de I = 0 até I = 8,9 para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula: $I=\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$, onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7\cdot 10^{-3}\,\text{kwh}$. Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 6 na escala Richter? Considere $10^{0,845} = 7$.

a) $E = 10^{6,845}$
b) $E = 10^{8}$
c) $E = 10^{8,747}$
d) $E = 10^{9,496}$
e) $E = 10^{9,845}$

17. (EFOMM) Sabendo-se que $3^x - 3^{2-x} = 2^3$, calcule $15 - x^2$.

a) 11
b) 9
c) 8
d) 7
e) 3

18. (EFOMM) O domínio da função $\Re$ em $\Re$, definida por $y=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243}}$, é:

a) $D=\{x\in\mathbb{R} / x>5\}$
b) $D=\{x\in\mathbb{R} / x<5\}$
c) $D=\{x\in\mathbb{R} / x<-5\}$
d) $D=\{x\in\mathbb{R} / x>-5\}$
e) $D=\{x\in\mathbb{R} / x>-3\}$

19. (EFOMM) Dada a função real $y=\log\left(\sqrt{x-3}-3\right)$, determine seu domínio.

a) $D(f)=]12,+\infty[$
b) $D(f)=]9,12[$
c) $D(f)=]9,+\infty[$
d) $D(f)=[30,+\infty[$
e) $D(f)=]30,+\infty[$

20. (EFOMM) Calcule os valores de x na expressão $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$.

a) $S = \{1;2\}$

b) $S = \{0;1\}$

c) $S = \{-1;2\}$

d) $S = \{0;2\}$

e) $S = \{1;-1\}$

21. (EFOMM) Calcule o valor de x na expressão $2^{3x+5} - 2^{3x+1} = 3^{3x+5} - 3^{3x+4} - 142 \cdot 3^{3x}$.

a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) 0

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

22. (EFOMM) Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, o valor de $\log_5 \left[\frac{(a+b)^2}{ab}\right]$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$, é:

a) n + m
b) 2n + m
c) 3n + m
d) 2n + 2m
e) 2n + 3m

23. (EFOMM) A igualdade $7^x + 7^{x-1} = 8x$ se verifica:
a) apenas para os valores irracionais de x
b) apenas para x = 1
c) para x = 0 e x = 1
d) para x = 1 e x = -16
e) para x = -1 e x = 0

24. (EFOMM) Sendo a = 8 e $b = \sqrt{2}$, o valor de $\log_2 \sqrt{\frac{8a^2b}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}}}$ é igual a:

a) 65/12
b) 57
c) 38/15
d) 32
e) 47/12

25. (EFOMM) A base do sistema de logaritmos, no qual o logaritmo de $2\sqrt{5}$ vale – 0,5 é:
a) 2
b) 1,5
c) 3/7
d) 0,05
e) 2,5

26. (EFOMM) Dados log2 = 0,301, log3 = 0,477 e $p = 0{,}72^3 \cdot \sqrt{5}$, podemos afirmar que $\log\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$ é:

a) 1,159
b) 3,238
c) 0,159
d) 3,238
e) 1,637

27. (EFOMM) Sabendo que $\log_p a = n \cdot \log_q a$, a relação estabelecida entre as bases p e q é:

a) $q = p^n$
b) $q = p$
c) $p = nq$
d) $q = p^{n-1}$
e) $q = np$

28. (EFOMM) Sabendo-se que $P = \log_{\sqrt{0{,}1}} \sqrt[3]{16}$, então o valor de $\sqrt[3]{P}$ é:

Dado: $\log 2 = 0{,}3$.

a) – 0,8
b) – 0,2
c) 0,02
d) $2\sqrt[3]{10}$
e) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{10}}$

29. (EFOMM) Se $\log_c a = 3$ e $\log_c b = 5$, então o valor de $\log_c\left(\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[5]{b^2}}}{c\sqrt{c}}\right)$ é:

a) 1/6
b) 7/6
c) 3/2
d) 5/6
e) 4/3

30. (EFOMM) Se log200 = 2,30103, o valor de $\log 0{,}008^{1/4}$ é:

a) - 0,2242275
b) - 0,3242275
c) - 0,4242275
d) - 0,5242275
e) - 0,6242275

31. (EFOMM) Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, $\log_5 18$ vale:

a) 0,778
b) 0,068
c) 1,795
d) 1,255
e) 2,510

GABARITO

01. a	**02. b**	**03. a**	**04. e**	**05. e**	**06. d**	**07. c**	**08. b**	**09. b**	**10. a**	**11. b**	**12. a**
13. a	**14. a**	**15. d**	**16. a**	**17. a**	**18. c**	**19. a**	**20. b**	**21. d**	**22. e**	**23. b**	**24. e**
25. d	**26. c**	**27. a**	**28. e**	**29. a**	**30. d**	**31. c**					

TESTES DE APRENDIZAGEM – LOGARITMOS

01. (AFA) Considere a função real f definida por f(x) = a^x com a ∈] 0, 1[. Sobre a função real g definida por com g(x) = - b – f (x) com b ∈] $-\infty$, 1[, é correto afirmar que
a) possui raiz negativa e igual $\log_a$ (-b)
b) é crescente em todo o seu domínio.
c) possui valor máximo.
d) é injetora.

02. (AFA) Considere a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x - b$ em que $0 < a < 1$ e $b > 1$.
Analise as alternativas abaixo e marque a **FALSA**.
a) Na função **f**, se x > 0, então –b < f(x) < 1 – b.
b) Im(f) contém elementos menores que o número real – b.
c) A raiz da função **f** é um número negativo.
d) A função real **h**, definida por h(x) = $f(|x|)$ não possui raízes.

03. (AFA) Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de 2013, a população de pássaros da espécie A era 12 vezes a população de pássaros da espécie B.
Sabe-se que a população de pássaros da espécie A cresce a uma taxa de 5% ao ano, enquanto que a população de pássaros da espécie B cresce a uma taxa de 20% ao ano.
Com base nesses dados, é correto afirmar que, essas duas populações de pássaros serão iguais,
(Considere: log 7= 0,85; log 6= 0,78; log 2=0,3)
a) no 1º semestre do ano de 2034.
b) no 2º semestre do ano de 2034.
c) no 1º semestre do ano de 2035.
d) no 2º semestre do ano de 2035.

04. (AFA) No plano cartesiano, seja P(a, b) o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais f e g definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

É correto afirmar que

a) $a = \log_2 \left(\dfrac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)} \right)$

b) $a = \log_2 (\log_2 a)$

c) $a = \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$

d) $a = \log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} a \right)$

05. (AFA) garitmos196 e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de
N = $-\log_{\frac{1}{9}} 14$

A razão entre os juros mensais M e N, nessa ordem, é

a) 70%

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) 80%

06. (AFA) Um médico, apreciador de logaritmos, prescreveu um medicamento a um de seus pacientes, também apreciador de logaritmo, conforme a seguir

Tomar **x** gotas do medicamento α de 8 em 8 horas. A quantidade de gotas **y** diária deverá ser calculada pela fórmula $\log_8 y = \log_2 6$

Considerando $\log 2 = \frac{3}{10}$ e log 3 = 0,48, é correto afirmar que $\log_2 x$ é um número do intervalo

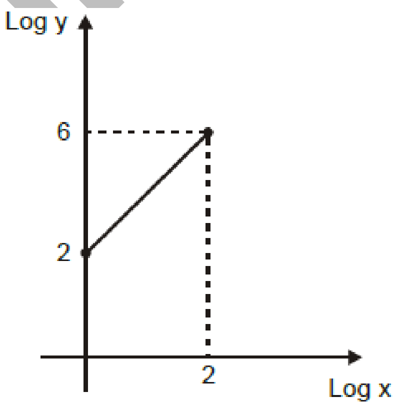
a) $[3,4[$

b) $[4,5[$

c) $[5,6[$

d) $[6,7[$

07. (AFA) O gráfico abaixo expressa a variação de log y em função de log x onde log é o logaritmo na base decimal.



A relação correta entre x e y é igual a:

a) $y = 2 + 2x$

b) $y = \frac{3}{2} + x$

c) $y = 100x^2$

d) $y = \frac{5}{2} + x$

08. (AFA) Considere as funções reais f e g definidas por f(x) $\log_3 x =$ e g(x) = f(x+1). Sabendo-se que existem f^{-1} e g^{-1}, é correto afirmar que o conjunto solução da equação $g^{-1}(x) + f(x)^{-1} = 2$ é

a) {1}

b) $\varnothing$

c) $\{\log_3 2 - 1\}$

d) $\{1 - \log_3 2\}$

09. (AFA) O domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{x^{1+\log_a x} - a^2 x}$

a) $a^{\sqrt{2}} \le a \le a^{-\sqrt{2}}$ se $0 < a < 1$

b) $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ ou $x \ge a^{\sqrt{2}}$ se $0 < a < 1$

c) $a^{\sqrt{2}} \le x \le a^{-\sqrt{2}}$ se $a > 1$

d) $x < a^{-\sqrt{2}}$ ou $x > a^{\sqrt{2}}$ se $a > 1$

10. (AFA) Todos os valores reais de x para os quais existe $f(x) = \sqrt{x^{4x-1} - x}$ são tais que:

a) $x > 1$

b) $0 < x \le \frac{1}{2}$ ou $x \ge 1$

c) $0 < x < \frac{1}{2}$

d) $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$

SEQUÊNCIAS

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

É toda sequência em que é **sempre constante a diferença r (razão)** entre um termo qualquer da sequência (a partir do segundo, claro!) e seu anterior, logo dada a sequência.

$$PA\left(\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n}^{\text{n termos}}}_{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = r}\right)$$

a) Fórmula do Termo Geral: cada progressão possui uma fórmula que nos possibilita encontrar qualquer termo através da sua posição, chamada fórmula do termo geral. A fórmula do termo geral de QUALQUER progressão aritmética é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad ☞ \quad \begin{cases} a_n : \text{enésimo termo da PA} \\ a_1 : 1^\text{º} \text{ termo da PA} \\ r : \text{razão da PA} \\ n : \text{posição de } a_n \end{cases}$$

b) Soma dos Termos de uma PA: a soma dos **n** primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

É toda sequência em que é **sempre constante a razão q** entre um termo qualquer da sequência (a partir do segundo, claro!) e seu anterior.

$$PG\left(\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n}^{\text{n termos}}}_{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q}\right)$$

a) Fórmula do Termo Geral: cada progressão possui uma fórmula que nos possibilita encontrar qualquer termo através da sua posição, chamado fórmula do termo geral. A fórmula do termo geral de **QUALQUER** progressão geométrica é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad ☞ \quad \begin{cases} a_n : \text{enésimo termo da PG} \\ a_1 : 1^\text{º} \text{ termo da PG} \\ q : \text{razão da PG} \\ n : \text{posição de } a_n \end{cases}$$

b) Soma dos Termos de uma PG: a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = a_n \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

c) Produto dos Termos de uma PG: o produto dos n primeiros termos de uma PG é dado por:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

d) Soma dos infinitos termos de uma PG: quando uma PG apresenta a razão no intervalo $-1 < q < 1$, a soma dos seus infinitos termos admite um valor limite dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

CLASSIFICAÇÃO DA PA E PG

a) Classificação da PA: As progressões aritméticas são classificadas em:

$$PA \begin{cases} \text{Crescente}: & r > 0 \\ \text{Constante}: & r = 0 \\ \text{Decrescente}: & r < 0 \end{cases}$$

b) Classificação da PG: As progressões geométricas são classificadas em:

$$PG ☞ \begin{cases} a_1 > 0: \begin{cases} \text{Crescente}: & q > 1 \\ \text{Decrescente}: & 0 < q < 1 \end{cases} \\ a_1 < 0: \begin{cases} \text{Crescente}: & 0 < q < 1 \\ \text{Decrescente}: & q > 1 \end{cases} \\ q = 1 \text{ ou } a_1 = 0 \text{ e } q = \text{qualquer}: \text{Cosntate} \\ q < 0: \text{Alternante} \\ a_1 \neq 0 \text{ e } q = 0: \text{Estacionária} \end{cases}$$

1. (EFOMM) Determine a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética cujos dois primeiros termos são 5 e 9, nesta ordem.
a) 157
b) 205
c) 207
d) 230
e) 270

2. (EFOMM) Dada uma progressão aritmética onde o 1° termo é 12 e a sua razão é 4, qual o valor de n, se a média aritmética dos **n** primeiros termos dessa progressão é 50?
a) 30
b) 20
c) 18
d) 15
e) 14

3. (EFOMM) Em uma PA o sétimo termo é o quádruplo do segundo termo. Calcule o décimo segundo termo, sabendo que a soma do quinto com o nono termo é 40.
a) 35
b) 37
c) 40
d) 45
e) 47

4. (EFOMM) Dada uma progressão aritmética, e, que o 5° termo é 17 e o 3° é 11, calcule a soma dos sete primeiros termos dessa PA.
a) 90
b) 92
c) 94
d) 96
e) 98

5. (EFOMM) Calcule a razão de uma PG decrescente de cinco termos, sendo o 1° termo igual a 2/3 e o último igual a 2/243.
a) – 1/3
b) – 2/3
c) 1/3
d) 2/3
e) 4/3

6. (EFOMM) A soma os termos da progressão $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \cdots, 2^{-10}$ é:
a) $2^{-(1+2+3+\cdots+10)}$
b) 2^{-1024}
c) 1024^{-1}
d) $\frac{513}{1024}$
e) $\frac{1023}{1024}$

7. (EFOMM) Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O quarto termo é:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) 1
c) $\sqrt[8]{2}$
d) $\sqrt[9]{2}$
e) $\frac{1}{2}$

8. (EFOMM) Todos os anos uma fábrica aumenta a produção em uma quantidade constante. No 5° ano de funcionamento, ela produziu 1460 peças, e no 8° ano, 1940. Quantas peças, então, ela produziu no 1° ano de funcionamento?
a) 475
b) 520
c) 598
d) 621
e) 820

9. (EFOMM) A progressão geométrica $(x-3, x+1, \cdots)$ de termos reais não nulos admite um limite para a soma dos seus infinitos termos e, e somente se:
a) x > 1
b) x < 1
c) x > 3
d) x < 3
e) 1 < x < 3

10. (EFOMM) A expressão $6n + n^2$ representa a soma dos **n** primeiros termos de uma sequência numérica. É correto afirmar que essa sequência é uma progressão:
a) aritmética de razão 3
b) aritmética de razão 4
c) aritmética de razão 2
d) geométrica de razão 4
e) geométrica de razão

11. (EFOMM) Se a sequência de inteiros positivos $(2, x, y)$ é uma Progressão Geométrica e $(x+1, y, 11)$ uma Progressão Aritmética, então, o valor de x + y é:
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

12. (EFOMM) Numa progressão geométrica crescente, o 3° termo é igual à soma do triplo do 1° termo com o dobro do 2° termo. Sabendo que a soma desses três termos é igual a 26, determine o valor do 2° termo.
a) 6
b) 2
c) 3
d) 1
e) $\frac{26}{7}$

13. (EFOMM) Os números reais positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q. Nesse caso, é correto afirmar que a sequência $\log a_1, \log a_2, \cdots, \log a_n$ forma:

a) uma progressão geométrica crescente, se $q > 1$.
b) uma progressão aritmética crescente, se $q > 1$.
c) uma progressão geométrica decrescente, se $0 < q < 1$.
d) uma progressão aritmética crescente, se $0 < q < 1$.
e) uma progressão aritmética crescente, desde que $q > 0$.

14. (EFOMM) O limite da soma da expressão $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\cdots$ é igual a:

a) 1/7
b) 2/7
c) 3/7
d) 4/7
e) 5/7

15. (EFOMM) Sabendo-se que $f(0) = 3$ e $f(n+1) = f(n) + 7$, então $f(201)$ é igual a:

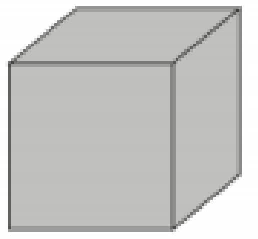
a) 1206
b) 1307
c) 1410
d) 1510
e) 1606

GABARITO

01. d **02. b** **03. a** **04. e** **05. c** **06. e** **07. b** **08. e** **09. b** **10. c** **11. b** **12. a**
13. b **14. c** **15. c**

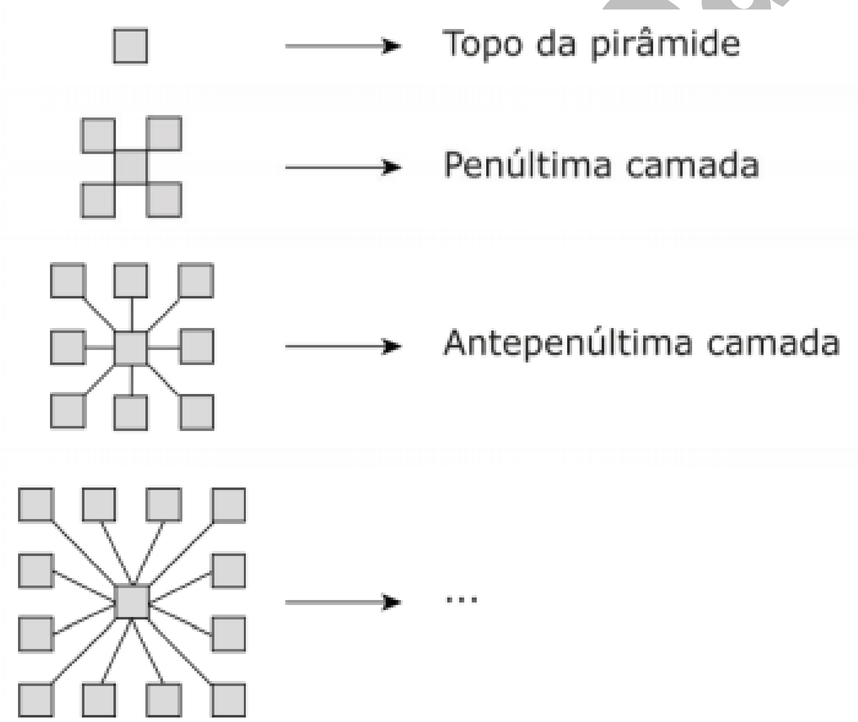
TESTES DE APRENDIZAGEM – SEQUÊNCIAS

01. (AFA) Constrói-se um monumento em formato de pirâmide utilizando-se blocos cúbicos:



Para a formação piramidal os blocos são dispostos em uma sequência de camadas, sendo que na última camada, no topo da pirâmide, haverá um único bloco como mostra a figura a seguir.

Sequência de camadas
(vista de cima)



A disposição total, foram utilizados 378 blocos, do topo à base da pirâmide. Havendo necessidade de acrescentar uma nova camada de blocos abaixo da base da pirâmide, obedecendo à sequência já estabelecida, serão gastos x blocos nesta camada. A quantidade total de divisões positivos do número x é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

02. (AFA) Considere as expressões
$A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + ... + 5^2 - 3^2$ e
$B = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ ...$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre:

a) 117 e 120
b) 114 e 117
c) 111 e 114
d) 108 e 111

03. (AFA) A sequência $\left(x, 6, y, y + \frac{8}{3}\right)$ é tal, que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética, e os três últimos formam uma progressão geométrica. Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é

a) $\frac{92}{3}$
b) $\frac{89}{3}$
c) $\frac{86}{3}$
d) $\frac{83}{3}$

04. (AFA) A solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} - \frac{x-y}{54} + \cdots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

é tal que x + y é igual a

a) 11/3
b) 10/3
c) -7/3
d) -8/3

05. (AFA) Considere uma PG onde o 1° termo é a, a > 1, a razão é q, q > 1, e o produto dos seus termos é c. Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, então a soma dos termos da PG é:

a) $\frac{a^{41} - a}{a^2 - 1}$
b) $\frac{a^{40} - a}{a^2 - 1}$
c) $\frac{a^{41} - 1}{a^2 - 1}$
d) $\frac{a^{40} - 1}{a^2 - 1}$

MATRIZES

1. NOÇÃO DE MATRIZ

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se de matriz m por n (indica-se m x n) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

$$M = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{m por n}}$$

2. MATRIZES ESPECIAIS

2.1 MATRIZ LINHA

É toda matriz do tipo 1 x n, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo

1°) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1\,\text{por}\,4}$

2.2 MATRIZ COLUNA

É toda matriz do tipo m x 1, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo

1°) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{4\,\text{por}\,1}$

2.3 MATRIZ NULA

É toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo

1°) $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2\,\text{por}\,3}$

2.4 MATRIZ QUADRADA

É a matriz do tipo n x n ou matriz de ordem n, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.

Exemplos

1°) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

ordem 2

2°) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

ordem 3

3°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ordem 4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária   Diagonal Principal

2.5 MATRIZ DIAGONAL

É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

1°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.6 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz unidade (ou matriz identidade) de ordem n (indica-se I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos que pertencem a diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. IGUALDADE

Para que duas matrizes sejam iguais é necessário que elas sejam de mesma ordem e todos os elementos correspondentes sejam iguais.

Exemplo

Determine x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$.

Resolução $\begin{cases} 2x = x+1 \therefore \underline{x=1} \\ y+4 = 4 \therefore \underline{y=0} \end{cases}$

4. ADIÇÃO

A soma de duas matrizes A e B do tipo m x n é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo

Determine os valores de α, β, γ e θ afim de que se tenha $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \theta \end{bmatrix}$.

Resolução $\begin{cases} \alpha + 2 = 3 \therefore \underline{\alpha = 1} \\ 1+\beta = 2 \therefore \underline{\beta = 1} \\ 1+0 = \gamma \therefore \underline{\gamma = 1} \\ 2-1 = \theta \therefore \underline{\theta = 1} \end{cases}$

5. PRODUTO DE NÚMERO POR MATRIZ

Multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo

$$2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. MATRIZ OPOSTA

Chama-se matriz oposta de A (indica-se –A) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

Exemplo

$$1°)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

7. PRODUTO DE MATRIZES

Definição

Dadas duas matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n \times p}$ chama-se de produto AB a matriz $C = \left(c_{ik}\right)_{m \times p}$ tal que

Exemplo

$$1°)\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{2 \times \boxed{2}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\boxed{2} \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}}_{2 \times 3}$$

Teorema

Se $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ então $\boxed{AI_n = A \text{ e } I_m A = A}$

Propriedades:

$\circ$ é associativa: $(AB)C = A(BC)$

$\circ$ é distributiva à direita $(A + B)C = AC + BC$

$\circ$ é distributiva à esquerda $C(A + B) = CA + CB$

$\circ$ $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Notas

- Para duas matrizes A e B não quadradas, temos:
$AB \neq BA$

- Para duas matrizes A e B quadradas geralmente, temos:
$AB \neq BA$

- Se duas matrizes A e B comutarem elas necessariamente são quadradas e de mesma ordem.

- A implicação $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ é falsa

Exemplo

1º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Quando A e B são tais que AB = BA, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma *condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas de mesma ordem*.

Se A e B são matrizes comutáveis então valem as igualdades:

$$\begin{cases} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \\ (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \\ (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 \\ (AB)^n = A^nB^n \end{cases}$$

8. MATRIZ TRANSPOSTA

Para encontrarmos matriz transposta A^t de uma matriz A é só transformamos cada linha da matriz A em uma coluna.

Exemplo

1°) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Propriedades:

$\circ \left(A^t\right)^t = A$

$\circ (A+B)^t = A^t + B^t$

$\circ (kA)^t = kA^t$

$\circ (AB)^t = B^tA^t$

9. MATRIZ SIMÉTRICA

Chama-se de matriz simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que

$$\boxed{A^t = A}$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo

$$1°)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Define-se como matriz antissimétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que

$$\boxed{A^t = -A}$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplo

$$1°)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

10. MATRIZES INVERSÍES

Definição

Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = I_n}$$

É evidente que A^{-1} deve ser quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.,

Se A não é inversível, dizemos que A é uma *matriz singular*.

Aplicações

Sendo A, B e C matrizes inversíveis de ordem n, isole o X a partir de cada equação abaixo:

a) $AX = B$

b) $AXB = I_n$

c) $(AX)^{-1} = B$

d) $BAX = A$

e) $(AX)^t = B$

f) $(A + X)^t = B$

g) $AXB = C$

DETERMINANTES

1. DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE DE ORDEM ≤ 3

1.1 Se M é uma matriz de ordem n = 1, então o det M é o único elemento de M.

$$\boxed{M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = |a_{11}| = a_{11}}$$

Exemplo

$$M = [-2] \Rightarrow \det M = |-2| = -2$$

1.2 Se M é uma matriz de ordem n = 2, então o det M é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = \underline{4|}$$

1.3 Se M é uma matriz de ordem n = 3, então o det M é calculado pela Regra de Sarrus.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemplo

$$1°)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 3 + 4 + 6 - 6 - 3 - 4 = \underline{0|}$$

2. MATRIZ VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

Chamamos de matriz de Wandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo, por exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{bmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{x \quad y \quad z \quad w} \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = \boxed{(y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y)\cdot(w-x)\cdot(w-y)\cdot(w-z)}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2 \quad 3 \quad 4} \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (3-2)\cdot(4-2)\cdot(4-3) = \underline{2|}$$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE LAPLACE)

O determinante da matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det M = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + ... + a_{nn}C_{nn}}$$

Exemplo

$$1°)\ M = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1 \quad 3} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = 1\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{11}} + 2\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{12}} + 1\cdot\underbrace{(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{13}} + 3\cdot\underbrace{(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{14}}$$

Nota

O Teorema de Laplace torna-se prático quando pegamos uma fila qualquer (linha ou coluna) com a maior quantidade de zeros possíveis.

4. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

4.1 Matriz transposta

Se M é uma matriz de ordem n e M^t sua transposta, então

$$\boxed{\det M^t = \det M}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{-3|}$

2°) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{9|}$

4.2 Fila nula

Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então

$$\boxed{\det M = 0}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0|}$

2°) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & x & 0 \\ 3 & 7 & y & 0 \\ 4 & -2 & z & 0 \\ 2 & 3 & t & 0 \end{vmatrix} = \underline{0|}$

4.3 Multiplicação de uma fila por uma constante

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número K, o determinante da nova matriz M' obtida será o produto K pelo determinante de M, isto é,

$$\boxed{\det M' = k \det M}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

2°) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 28 & 8 \\ 15 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 140 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

Nota

Se A é uma matriz de ordem n, então

$$\boxed{\det\left(k \cdot A\right) = k^n \cdot \det M}$$

4.4 Trocas de filas paralelas

Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou colunas), obteremos uma nova matriz M' tal que

$$\boxed{\det M' = -\det M}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \underline{22|} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-22|}$

2°) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-37|} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{37|}$

4.5 Filas paralelas iguais

Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então

$$\boxed{\det M = 0}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \underline{0|}$

2°) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 7 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0|}$

4.6 Filas proporcionais

Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\boxed{\det M = 0}$$

Exemplo

1°) $\begin{vmatrix} 1 & 2x & x \\ 2 & 2y & y \\ 3 & 2z & z \end{vmatrix} = \underline{0|}$

4.7 Matriz Triangular

Chamamos de *matriz triangular* a matriz M quadrada de ordem n cujos elementos situados "de um mesmo lado" da diagonal principal são iguais a zero. O determinante da matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se sucessivamente o teorema de Laplace, através da 1ª linha, é imediato que:

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplos

$$1º)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15|}$$

$$2º)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = \underline{36|}$$

Nota

O determinante de uma matriz diagonal é calculado da mesma forma que o determinante da matriz triangular.

Exemplos

$$1º)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15|}$$

4.8 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então:

$$\boxed{\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

Consequência

$$A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \det\left(A^{-1} \cdot A\right) = \det I_n \therefore \det\left(A^{-1}\right) \cdot \det(A) = 1$$

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}}$$

Desse modo, uma matriz A só admite inversa se e somente si o $\boxed{\det(A) \neq 0}$.

5. TEOREMA DE JACOBI

Adicionando a uma fila de uma matriz M, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M', tal que

$$\boxed{\det M' = \det M}$$

Exemplos

$$1^o)\ -3C_1 + C_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\cdot(-3)+3 & 5 \\ 4 & 4\cdot(-3)+2 & 7 \\ 4 & 4\cdot(-3)+1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$$

$$2^o)\ \begin{array}{r} -L_4 + L_1 \\ -3L_4 + L_2 \\ -2L_4 + L_3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\cdot(-1)+1 & 3\cdot(-1)+2 & 3\cdot(-1)+3 & 5\cdot(-1)+4 \\ 1\cdot(-3)+3 & 3\cdot(-3)-2 & 3\cdot(-3)+5 & 5\cdot(-3)+7 \\ 1\cdot(-2)+2 & 3\cdot(-2)+1 & 3\cdot(-2)+4 & 5\cdot(-2)+6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

6. REGRA DE CHIÓ

Como consequência do teorema de Jacobi, veremos agora um processo útil bastante prático, para reduzirmos em uma unidade a ordem de um determinante de ordem $n \geq 2$ e que apresenta pelo menos um elemento igual a 1, sem alterá-lo, e facilitar seu cálculo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underset{a_{11}}{1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-2\cdot 1 & 2-1\cdot 1 & 1-3\cdot 1 \\ 1-2\cdot 2 & 1-1\cdot 2 & 2-3\cdot 2 \\ 2-2\cdot 1 & 1-1\cdot 1 & 1-3\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{-8}|$$

SISTEMAS LINEARES

1. INTRODUÇÃO

1.1 Equação linear

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b.$
Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... a_{1n}$, todos reais, são chamados de *coeficientes* n e b, também real, é o termo independente da equação.

Exemplos

1°) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$
2°) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
3°) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$
4°) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

1.2 Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais é solução da equação linear

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$$

É uma solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b.$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + ... + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplos

1°) Seja a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$
Tem como solução a sequência $(1, 2, 3, -2) \Rightarrow 2(1) + 3(2) - (3) + (-2) = 3$ é setença verdadeira

2°) Seja a equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$
Tem como solução qualqer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$

3°) Seja a equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$
Qualqer quadrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ não satisfaz a equação $\Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$

1.3 Sistema linear

É um conjunto de m $(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Assim, o sistema

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é linear. Notemos que o sistema S pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplos

1°) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

2°) $\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.4 Solução de um sistema linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema S, se for solução de todas as equações de S.

Exemplos

1°) $S\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

Admite como solução a tripla ordenada $(1, 2, 3)$, pois $\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4 \end{cases}$

2°) $S\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y + 4z = 1 \\ 0x - 0y + 0z = 6 \end{cases}$

Não admite como solução a tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pois a última equação não é satisfeita.

Nota

Se um sistema admite pelo menos uma solução ele é ***possível*** e caso não tenha nenhuma solução ele é ***impossível***.

1.5 Sistema linear homogêneo

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele que o termo independente de todas as equações vele ***zero***.

Exemplo

$$1^{\circ})\ S\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Notas

Um sistema linear homogêneo admite sempre como solução Trivial a sequência (0,0,0,...,0). Logo este sistema nunca será impossível.

Um sistema linear homogêneo pode ser classificado apenas como:
***Possível e determinado**:* tem como única solução a sequência (0,0,0,...,0)
***Possível e indeterminado**:* infinitas soluções

2. TEOREMA DE CRAMER

Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Nestas condições a matriz incompleta é quadrada.

Para facilitar a compreensão do Teorema de Cramer, vamos usar o sistema abaixo:

$$S\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}}$$

De acordo com o Teorema de Cramer um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas poderá ser

$$\text{Sistema}\begin{cases}\text{Possível Determinado}\left(\text{Única solução}\right)\Rightarrow D\neq 0\\ \text{Possível Indeterminado}\left(\text{Infinitas soluções}\right)\Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0\\ \text{Impossível}\left(\text{Nenhuma solução}\right)\Rightarrow D=0\ \text{e}\ D_x\neq 0, D_y\neq 0\ \text{e}\ D_z\neq 0\end{cases}$$

T.01 (EFOMM) O determinante da matriz $A=\left(a_{ij}\right)$, de ordem 2, onde: $a_{ij}=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2i-j}\right), i=j\\ tg\left(\dfrac{\pi}{i+j}\right), i\neq j\end{cases}$ é igual a:

a) 1/3
b) – 1/3
c) – 3
d) 3
e) – 1

T.02 (EFOMM) Seja $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei $a_{ij}=\begin{cases}-i+j, \text{ se } i+j \text{ é par}\\ i-j, \text{ se } i+j \text{ é ímpar}\end{cases}$. Pode-se afirmar que o valor de det A é:

a) 0
b) – 12
c) 12
d) 4
e) – 4

T.03 (EFOMM) Sejam A, B e C matrizes de ordem 3 x 3 imersíveis tais que $\det A^{-1}=3$ e $\det\left(\left(AB\right)^{-1}+\frac{1}{2}I\right)=4$. Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que $I=-3C^{-1}\left(2B^{-1}+A\right)^t$, o determinante de C é igual a

a) $-8/3$
b) $-32/3$
c) -9
d) -54
e) -288

T.04 (AFA) Sejam a e b números positivos tais que o determinante da matriz $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 2 & a & 0 & 1\\ 1 & -1 & b & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ vale 24. Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix}\sqrt{b} & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & \sqrt{a}\end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0
b) 6
c) -6
d) $\sqrt{6}$

T.05 (AFA) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Considere a função $f : \Re \to \Re$ definida por f(x) = det A Sobre a função $g : \Re \to \Re$ definida por $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$, em que $|f(x)|$ é o módulo de f(x), é correto afirmar que

a) possui período π

b) seu conjunto imagem é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

c) é par.

d) é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

T.06 (AFA) A solução do sistema $\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} + ... = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ é tal que x + y é igual a

a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $-\frac{7}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

T.07 (AFA) Considere A, B, C e X matrizes quadradas de ordem n e inversíveis. Assinale a alternativa FALSA.

a) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

c) $AXC = B \Rightarrow X = A^{-1}C^{-1}B$

d) $\det\left(2AB^{-1}\right) = 2^n \frac{\det A}{\det B}$

T.08 (AFA) Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Sabe-se que $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{\text{n vezes}}$. Então, o determinante da matriz S = A + A^2 + A^3 + ... + A^{11} é igual a

a) 1

b) -31

c) -875

d) -11

T.09 (AFA) Considere as funções reais f e g definidas por: $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\operatorname{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$g(x)=\frac{1}{2}-f(x)$ e marque a alternativa INCORRETA.

a) O conjunto imagem da função fé o intervalo [0,1]
b) A função g é ímpar.
c) A função real h definida por $h(x)=-\frac{1}{2}+g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
d) O período da função real j definida por $j(x)=\left|-\frac{1}{2}+g(x)\right|$ é $\frac{\pi}{2}$

T.10 (AFA) O sistema linear nas incógnitas x, y e z abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a)x+y-z=0 \\ x-(\operatorname{sen} a)y+z=1 \\ x+y=\cos a \end{cases}$$

Sobre o parâmetro a, $a\in\Re$, pode-se afirmar que
a) $a=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
b) $a=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
c) $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
d) $a=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

T.11(AFA) Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem n, bem como a matriz identidade I. Sabendo que det (A) = 5 e $\det\left(I.B^{-1}.A\right)=\frac{1}{3}$,então o $\det\left[3\left(B^{-1}.A^{-1}\right)^{t}\right]$ é igual a

a) $5\cdot 3^{n}$
b) $\frac{3^{n-1}}{5^{2}}$
c) $\frac{3^{n}}{15}$
d) 3^{n-1}

T.12 (AFA) Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i, com um litro de combustível, à velocidade 10j km/ h.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7,6 & 7,2 & 8,9 & 8,2 & 11 & 10 & 12 & 11,8 \\ 5 & 7,5 & 7 & 8,5 & 8 & 10,5 & 9,5 & 11,5 & 11 \\ 3 & 2,7 & 5,9 & 5,5 & 8,1 & 7,4 & 9,8 & 9,4 & 13,1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

a) para motoristas que somente trafegam a 30 km/ h, o carro 1.4 é o mais econômico.
b) se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/ h, o 1.4 será o mais econômico.
c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/ h, o carro 1.8 é o de maior consumo.
d) para motoristas que somente trafegam a 80 km/ h, o carro 1.0 é o mais econômico.

T.13 (AFA) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3, det A = d, $\det(2A \cdot A^t) = 4k$, onde A^t é a matriz transposta de A, e d é a ordem da matriz quadrada B. Se det B = 2 e det 3B = 162, então o valor de k + d é:

a) 4
b) 8
c) 32
d) 36

T.14 (AFA) O valor do determinante de uma matriz de ordem n é 21. Se dividirmos a segunda linha desta matriz por 7 e multiplicarmos a matriz por 3, o valor do novo determinante será:

a) 3n
b) 3^{n+1}
c) 3^n
d) 3^{n+3}

T.15 (EN) A equação

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16}$$

Com $x \in \left]0, \pi/2\right[$ possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado **l** e altura $h = \sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de l é igual **a:**

a) $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$ b) $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$ c) $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$

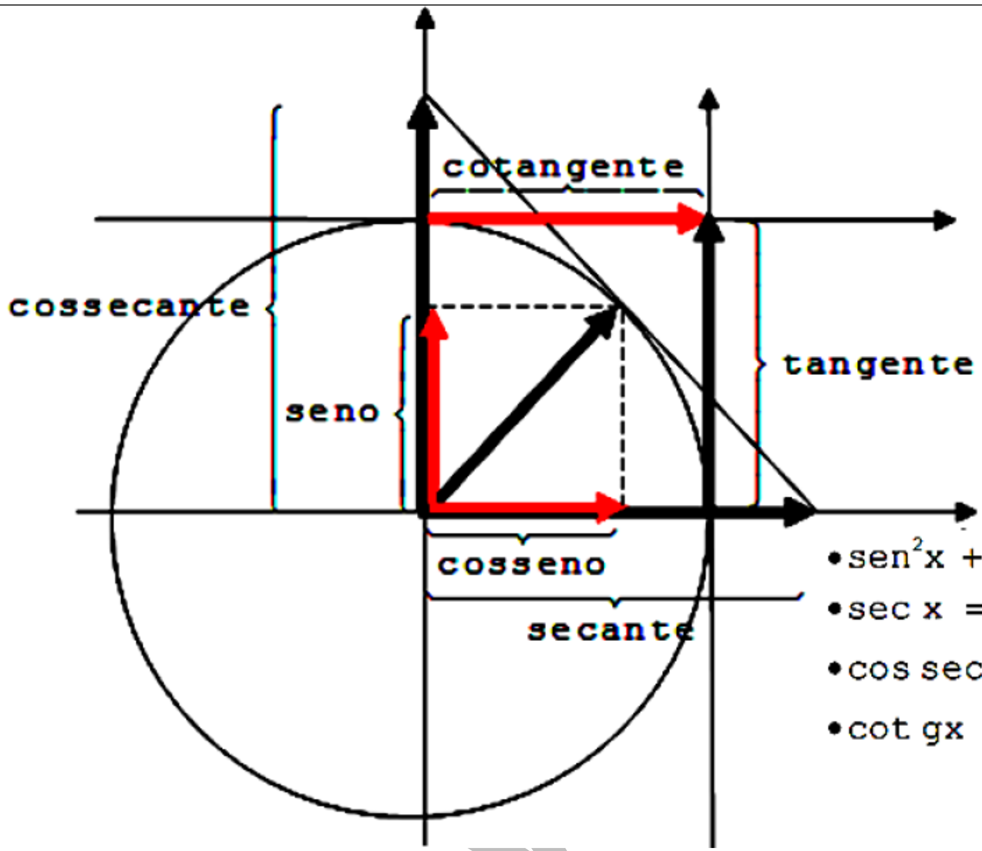
d) $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$ e) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

T.16 (EN) Se $a=\sqrt{3+\sqrt{2}}$ e $b=\sqrt{3-\sqrt{2}}$ seja k o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$, sendo assim, é correto afirmar que o coeficiente de x^{k-1} no desenvolvimento de $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^3\cdot\left(x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 21
b) 22
c) 23
d) 24
e) 25

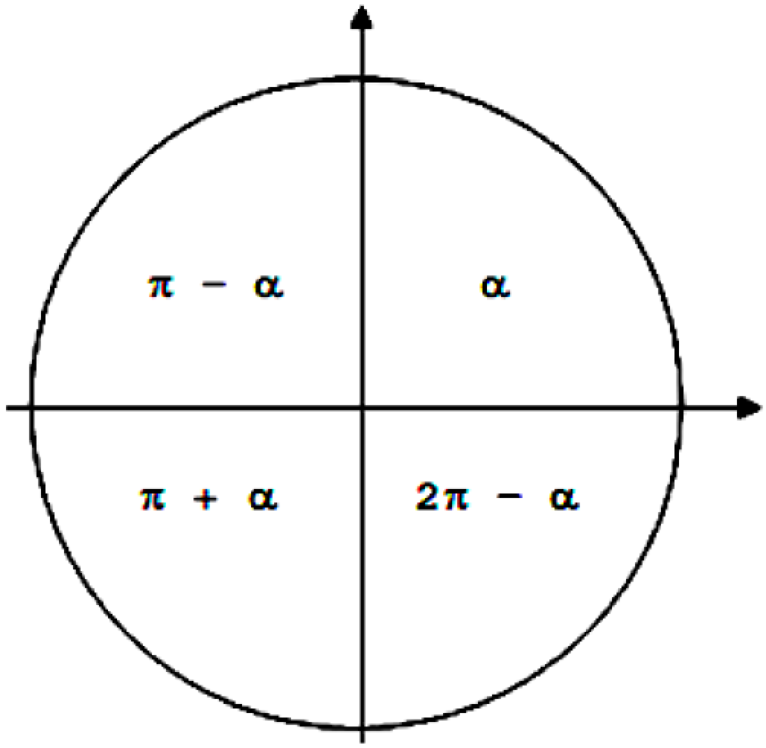
TRIGONOMETRIA

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sec x = (\cos x)^{-1}$
- $\operatorname{cos\,sec} x = (\operatorname{sen} x)^{-1}$
- $\operatorname{cot\,g} x = (\operatorname{tg} x)^{-1}$

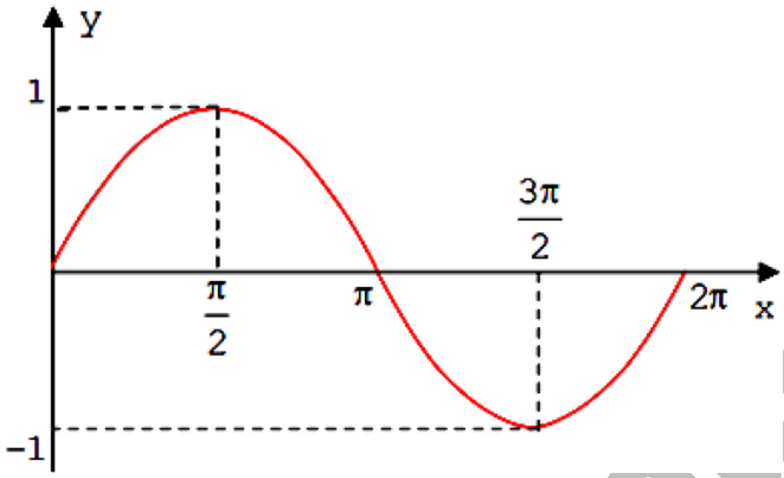
REDUÇÃO DE QUADRANTE



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO SENO

$f(x) = \text{sen}x$



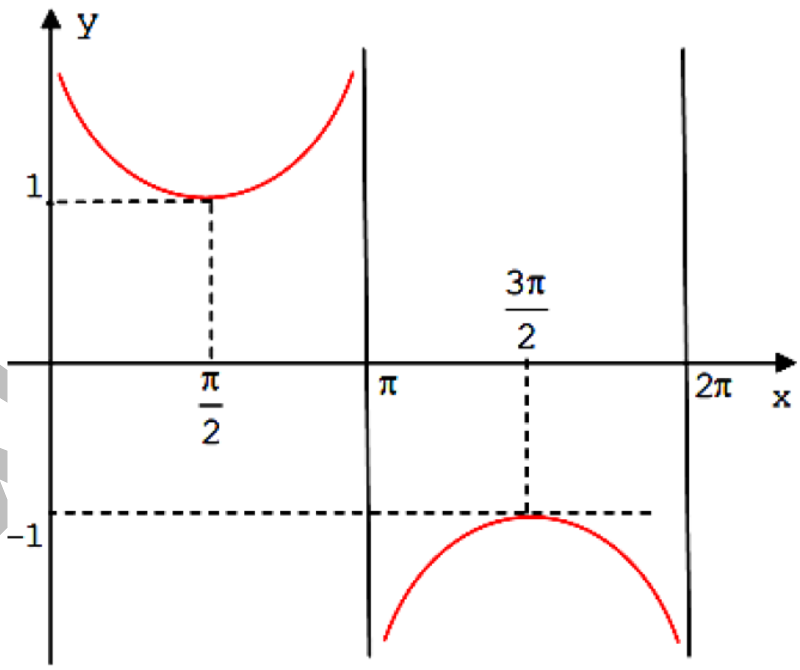
$D(f) = \mathbb{R}$

$I(f) = [-1;1]$

$P(f) = 2\pi$

FUNÇÃO COSSECANTE

$f(x) = \text{cossec}\,x$



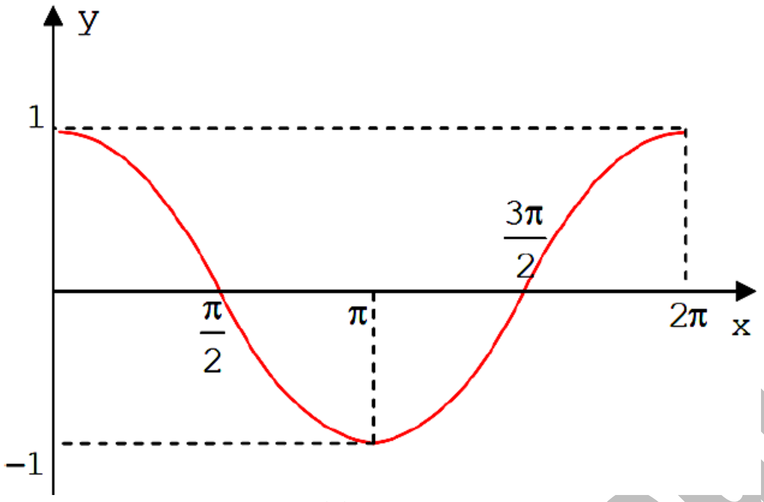
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq k\pi\}$

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$P(f) = 2\pi$

FUNÇÃO COSSENO

$f(x) = \cos x$



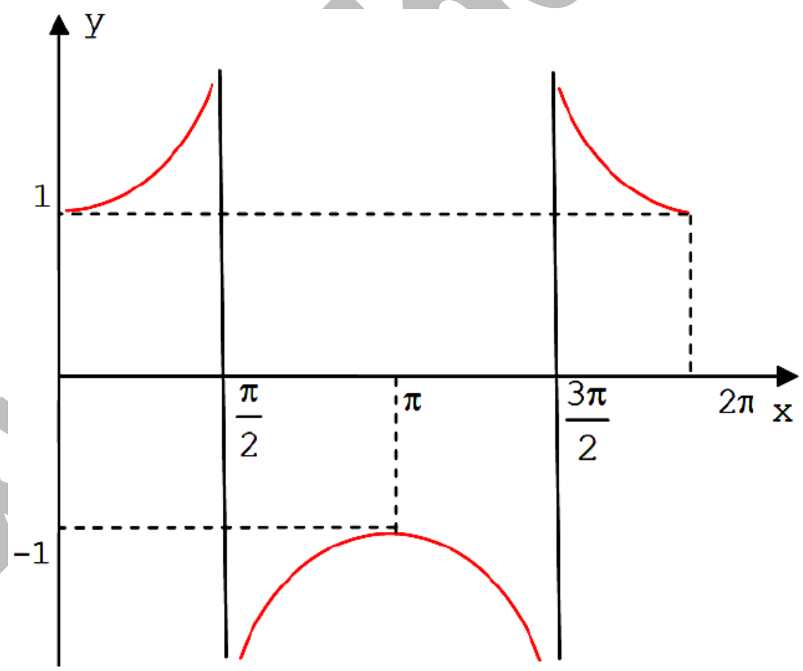
$D(f) = \mathbb{R}$

$I(f) = [-1;1]$

$P(f) = 2\pi$

FUNÇÃO SECANTE

$f(x) = \sec x$



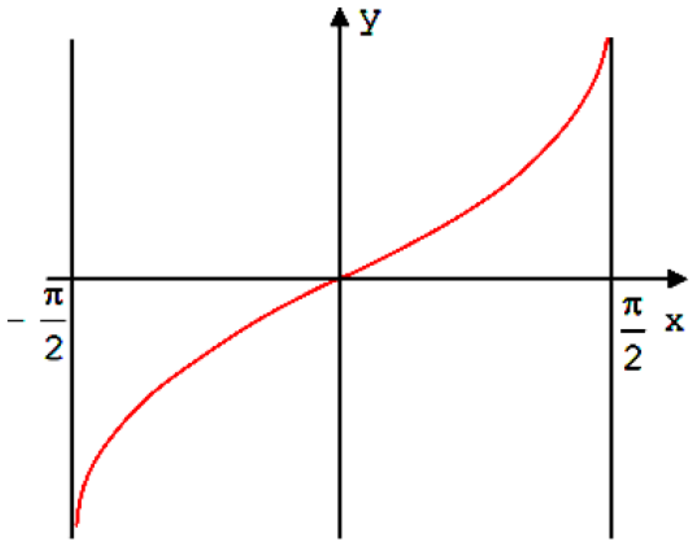
$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$P(f) = 2\pi$

FUNÇÃO TANGENTE

$f(x) = \text{tg}x$



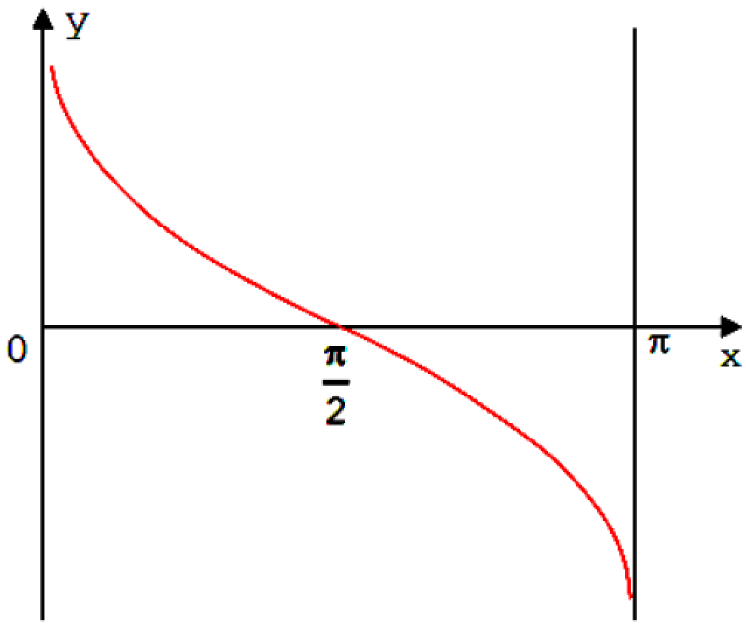
$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$I(f) = \mathbb{R}$$

$$P(f) = \pi$$

FUNÇÃO COTANGENTE

$f(x) = \text{cotg}x$



$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq k\pi \}$$

$$I(f) = \mathbb{R}$$

$$P(f) = \pi$$

FÓRMULAS DE SOMA

- $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen}b \cdot \cos a$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$
- $\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg}a \pm \operatorname{tg}b}{1 \mp \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$

FÓRMULAS DE MULTIPLICAÇÃO

- $\operatorname{sen}2a = 2\operatorname{sen}a \cdot \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
- $\operatorname{tg}2a = \dfrac{2\operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

FÓRMULA DA DIVISÃO

- $\operatorname{sen}\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$
- $\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$
- $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

FÓRMULAS DE WERNER

- $\operatorname{sen}p \pm \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\dfrac{p \pm q}{2} \cdot \cos\dfrac{p \mp q}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$
- $\operatorname{tg}p \pm \operatorname{tg}q = \dfrac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cdot \cos q}$

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \therefore \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$
- $\cos\alpha = \cos\beta \therefore \alpha = \pm\beta + 2k\pi$
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \therefore \alpha = \beta + k\pi$

CÁLCULO DO PERÍODO

- $f = A + Bg(Cx + D) \therefore P(f) = \dfrac{P(g)}{|C|}$
- $f = g + h$ ou $f = g \cdot h$ sendo $P(g) \neq P(h)$

  $\dfrac{P(g)}{P(h)} = \dfrac{m}{n}$ (m e n primos entre si) $\therefore P(f) = n \cdot P(g) = m \cdot P(h)$

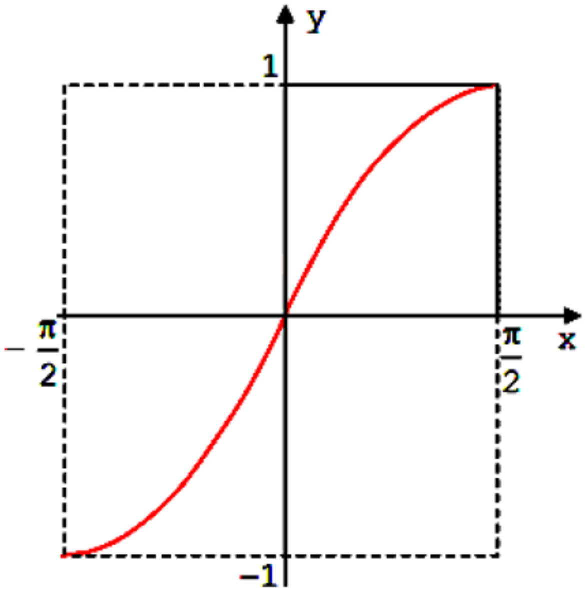
- $P(\text{sen}x) = P(\cos x) = P(\sec x) = P(\text{cossec}\,x) = 2\pi$
  $P(\text{tg}x) = P(\text{cotg}x) = \pi$

PARIDADE

- $\cos(-x) = \cos x \therefore$ função par
- $\sec(-x) = \sec x \therefore$ função par
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x \therefore$ função ímpar
- $\text{cossec}(-x) = -\text{cossec}\,x \therefore$ função ímpar
- $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x \therefore$ função ímpar
- $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}x \therefore$ função ímpar

FUNÇÕES INVERSAS

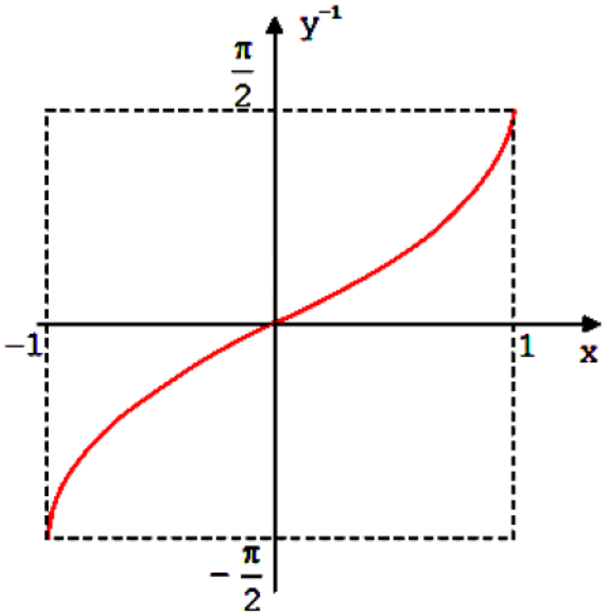
FUNÇÃO ARCO-SENO



$f(x) = \text{sen}x$

$D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$CD(f) = I(f) = [-1;1]$

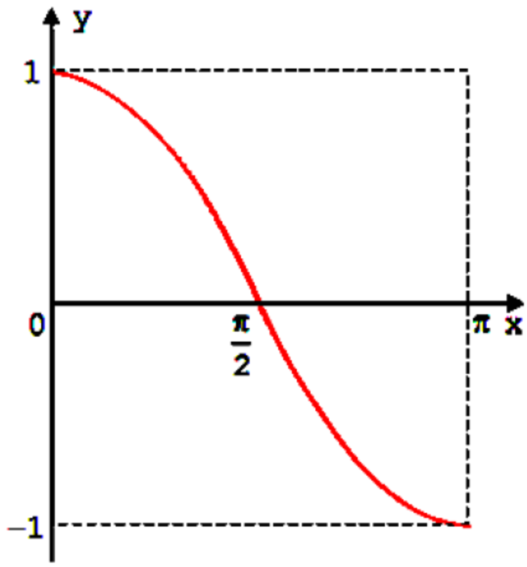


$f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$

$D(f^{-1}) = [-1;1]$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

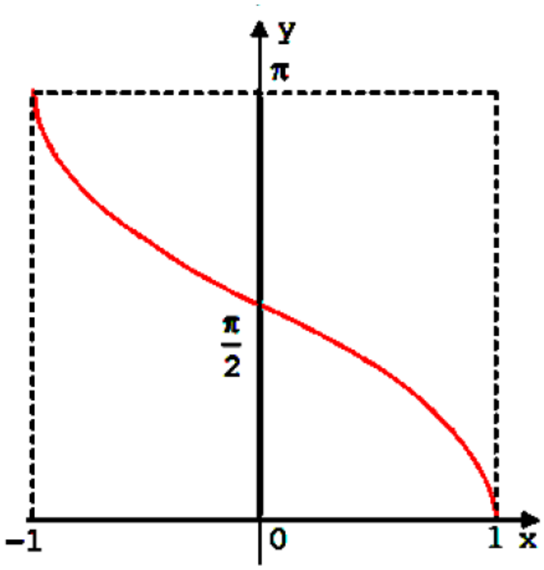
FUNÇÃO ARCO-COSSENO



$f(x) = \cos x$

$D(f) = [0; \pi]$

$CD(f) = I(f) = [-1; 1]$

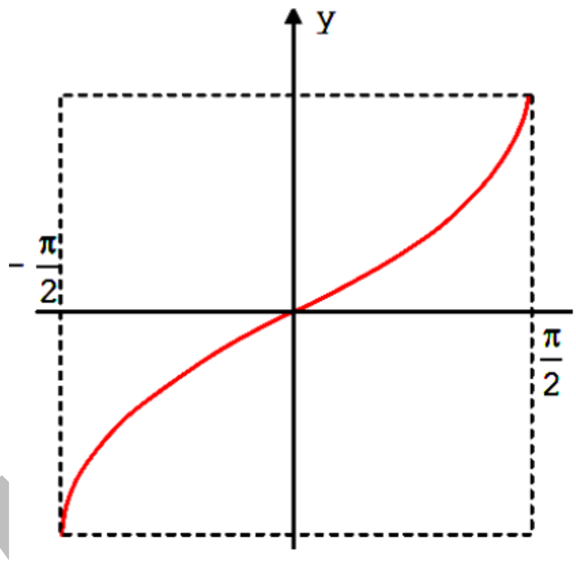


$f^{-1}(x) = \arccos x$

$D(f^{-1}) = [-1; 1]$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = [0; \pi]$

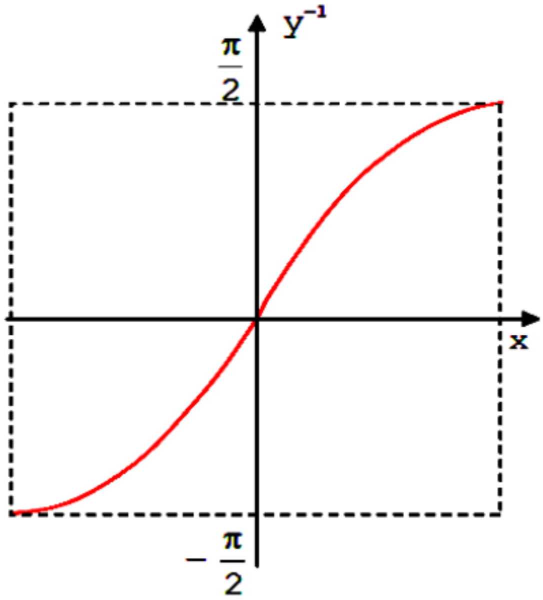
FUNÇÃO ARCO-TANGENTE



$f(x) = tgx$

$D(f) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$CD(f) = I(f) = \mathbb{R}$

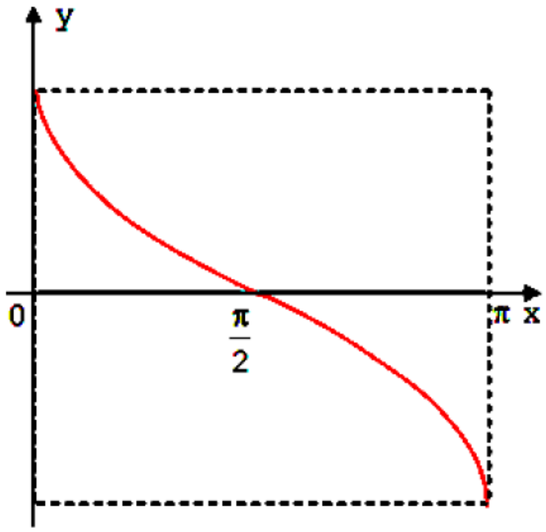


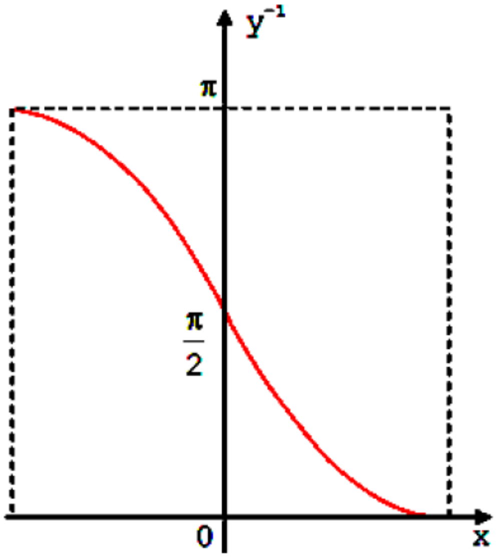
$f^{-1}(x) = arctgx$

$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

FUNÇÃO ARCO-COTANGENTE





$f(x) = \cot gx$

$D(f) =]0;\pi[$

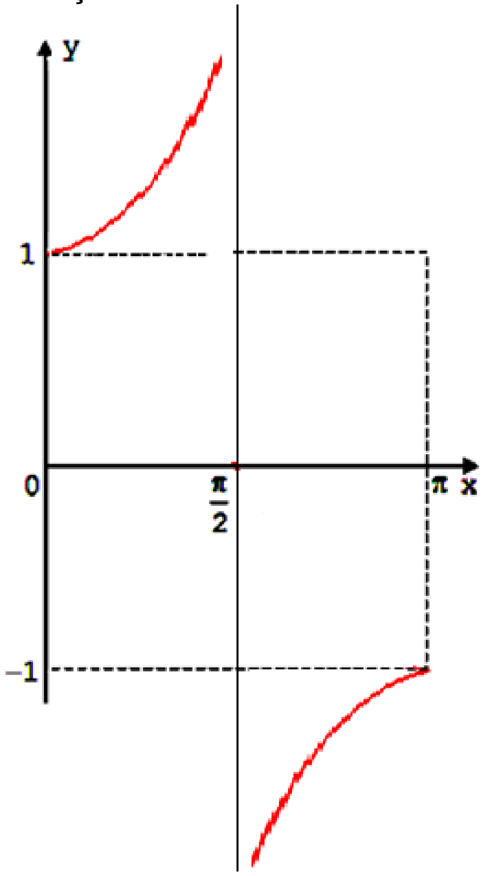
$CD(f) = I(f) = \mathbb{R}$

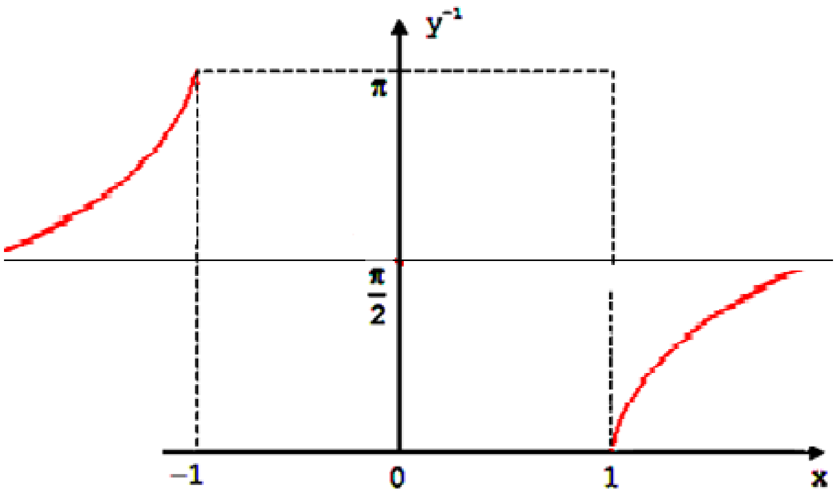
$f(x) = \text{arc}\cot gx$

$D(f) = \mathbb{R}$

$CD(f) = I(f) =]0;\pi[$

FUNÇÃO ARCO-SECANTE





$f^{-1}(x) = \text{arc}\sec x$

$D(f^{-1}) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

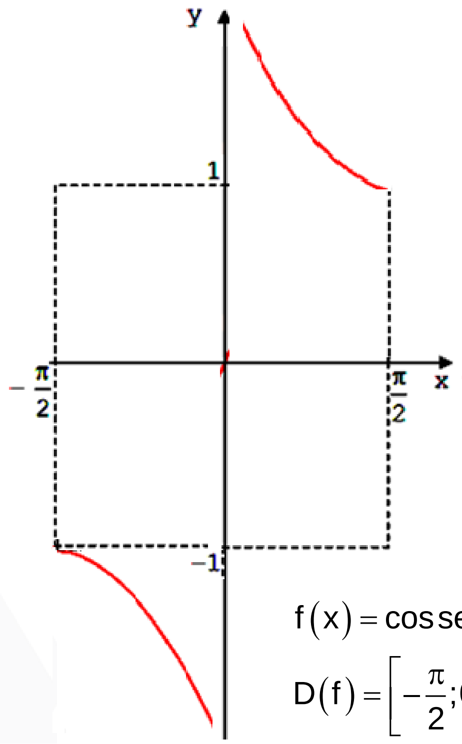
$CD(f^{-1}) = (f^{-1}) = \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$

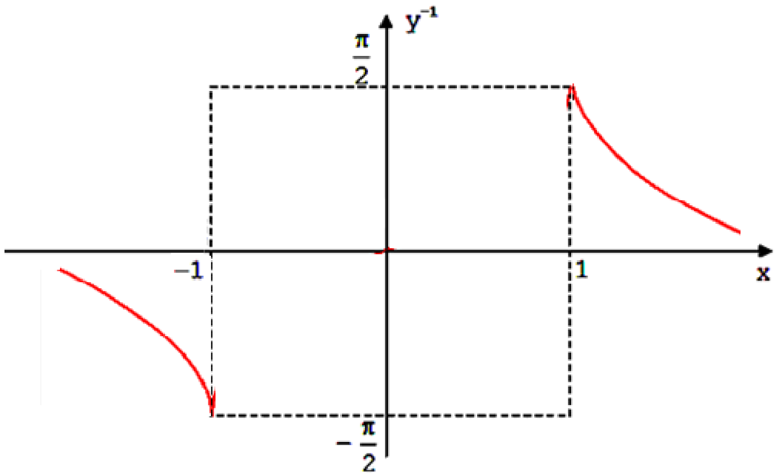
$f(x) = \sec x$

$D(f) = \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$CD(f) = I(f) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

FUNÇÃO ARCO-COSSECANTE





$f(x) = \text{cossec}\, x$

$D(f) = \left[-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$

$CD(f) = I(f) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f^{-1}(x) = \text{arc cossec}\, x$

$D(f^{-1}) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$

01. (EFOMM) Seja $x \in [0;2\pi]$ tal que $\text{sen}x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$. Então, o produto P e a soma S de todos os possíveis valores da $\text{tg}x$ são, aproximadamente,

a) P = 1 e S = 0
b) P = 1 e S = 5
c) P = -1 e S = 0
d) P = -1 e S = 5
e) P = 1 e S = -5

02. (EFOMM) Se $\det\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}x \\ \text{sen}y & \cos y \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$, estão o valor de $3\text{sen}(x+y) + \text{tg}(x+y) - \sec(x+y)$, para $\frac{\pi}{2} \le x+y \le \pi$, é igual a:

a) 0
b) 1/3
c) 2
d) 3
e) 1/2

03. (EFOMM) Se $\text{tg}x + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $\text{sen}x + \cos x$ vale

a) -7/13
b) 5/13
c) 12/13
d) 15/13
e) 17/13

04. (EFOMM) O gráfico da função $f(x) = \left[\text{arctg}\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right) - \frac{\pi}{5}\right] \cdot \left[-x - \frac{\pi}{7}\right]$ intercepta o eixo x nos pontos de coordenadas:

a) $\left(-\frac{\pi}{7};0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{5};0\right)$
b) $\left(-\frac{\pi}{7};0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5};0\right)$
c) $\left(\frac{\pi}{7};0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5};0\right)$
d) $\left(0;-\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0;\frac{\pi}{5}\right)$
e) $\left(0;-\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0;-\frac{\pi}{5}\right)$

05. (EFOMM) Sejam x, y e z números reais positivos onde $x+y=1-z$, e sabendo-se que existem ângulos α e β onde $x=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$ e $y=\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta$, é correto afirmar que o valor mínimo da expressão $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}-2\sqrt{2}\frac{z}{x+y}$ é:

a) 6
b) $6+2\sqrt{2}$
c) 12
d) $9+2\sqrt{2}$
e) $12+2\sqrt{2}$

06. (EFOMM) O valor numérico da expressão $\dfrac{\cos\frac{44\pi}{3}-\sec 2400^{o}+\text{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\text{cossec}^2\left(-780^{o}\right)}$ é igual a

a) 1
b) -3/4
c) 4/3
d) 1/2
e) 3/8

07. (EFOMM) A equação $2^{-x}+\cos(\pi-x)=0$ tem quantas raízes no intervalo $[0;2\pi]$?

a) zero
b) uma
c) duas
d) três
e) quatro

08. (EFOMM) Considerando-se a função $f(x)=\text{arcsen}x$ e sua inversa $g(x)=f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de fog e gof são

a) iguais.
b) diferentes, mas o de fog está contido no de gof.
c) diferentes, mas o de gof está contido no de fog.
d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.
e) diferentes e de intersecção vazia.

09. (EFOMM) Até o final do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia esbarrava em cálculos longos e tediosos. Nessa época, os astrônomos passaram a usar as fórmulas de Prostaféreses, que transformam a multiplicação em adição ou subtração. Afinal, adicionar ou subtrair é geralmente mais rápido do que multiplicar, porém existem casos que nos provam o contrário.
Portanto, qual o valor do produto sen12º . cos8º ? O resultado encontrado foi
(dado: sen 20º = 0,342, sen 8º = 0,139, cos 12º = 0,978)

a) maior que sen 30º.
b) maior que sen 60º.
c) menor que tg 30º.
d) maior que cos 30º.
e) igual ao quociente do sen 30º pelo cos 60º.

10. (EFOMM) Se sen2x = senx e $0 < x < \pi$, então x é

a) $\pi/6$
b) $\pi/4$
c) $\pi/3$
d) $\pi/2$
e) $2\pi/3$

11. (EFOMM) O valor de $\cos\left[\frac{29\pi}{4}\right]+\text{tg}\left[-\frac{16\pi}{3}\right]$ é

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$
c) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$
d) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$
e) $-\left[\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. (EFOMM) Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante, tais que $\cos\alpha = 0{,}8$ e $\text{sen}\alpha = 0{,}6$. O valor de $\text{sen}(\alpha+\beta)$ é

a) 1,00
b) 0,96
c) 0,70
d) 0,48
e) 0,00

13. (EFOMM) O período e o conjunto imagem da função $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)$ são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{2};[1{,}5;2{,}5]$
b) $\pi;[-0{,}5;2]$
c) $2\pi;[-0{,}5;2]$
d) $\frac{\pi}{2};[-0{,}5;0{,}5]$
e) $2\pi;[1{,}5;2{,}5]$

14. (EFOMM) A menor determinação positiva do ângulo $\frac{-14\pi}{3}$ mede

a) 60º
b) 120º
c) 240º
d) 270º
e) 300º

15. (EFOMM) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2x - \text{sen}x = 0$, para $0 \le x \le \pi$, é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}$
b) π
c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{3\pi}{2}$
e) $\frac{5\pi}{3}$

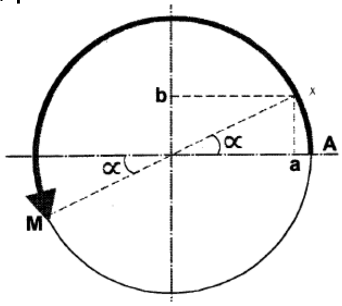
16. (EFOMM) Para todo x real, o valor da expressão $\frac{1}{1+\text{tg}^2x} + \frac{1}{1+\text{cotg}^2x}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) $2 + \text{tg}^2x + \text{cotg}^2x$
d) $\sec^2 x + \text{cossec}^2 x$
e) $\frac{1}{\sec^2 x + \text{cossec}^2 x}$

17. (EFOMM) Sabendo-se que $\text{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ calcule $\frac{\text{tg}22^o30'}{\sqrt{2}}$

a) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
c) $\sqrt{2}+1$
d) $\sqrt{2}-1$
e) $\sqrt{2}+2$

18. (EFOMM) Considerando as especificações constantes no ciclo trigonométrico do desenho abaixo, a expressão geral para as medidas dos arcos côngruos a AM e os valores de seus seno e cosseno são, respectivamente, para $k \in \mathbb{N}$.



a) $\alpha + (1+2k)\pi$, b e a
b) $\alpha + 2k\pi$, b e a
c) $\alpha + (1+k)\pi$, b e a
d) $\alpha + (1+k)\pi$, –b e –a
e) $\alpha + (1+2k)\pi$, –b e –a

19. (EFOMM) O resultado da simplificação da expressão $\sec^2 x - \dfrac{tgx \cdot cotgx}{cossec^2 x - 1}$ é:

a) senx
b) cosx
c) -1
d) 1
e) 0

20. (EFOMM) Determine o domínio da função $y = \arccos(2x - 5)$.

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\dfrac{1}{2} \le x \le 1\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{1}{2} \le x \le 1\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \le x \le 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \le x \le 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \le x \le 4\}$

21. (EFOMM) O conjunto solução da equação $\operatorname{sen}x + \cos x = 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pi + 2h\pi,\ h \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = h\pi \text{ ou } x = \pi + 2h\pi,\ h \in \mathbb{Z}\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = h2\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} + 2h\pi,\ h \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \dfrac{3\pi}{2} + 2h\pi,\ h \in \mathbb{Z}\right\}$

22. (EFOMM) A solução da equação $\cos(2\arccos x) = 0$ é:

a) $S = \varnothing$

b) $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

c) $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

d) $S = \left\{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

e) $S = \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$

23. (EFOMM) O valor numérico de $y = \text{sen}\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{11\pi}{12}$ é:

a) $\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)$

b) $\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$

c) $\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

d) $\text{tg}^2\frac{\pi}{11}$

e) $\frac{\pi}{12}$

24. (EFOMM) O valor de $x \in [0;2\pi]$ tal que $2\text{sen}x = 1$

a) $\left\{\frac{\pi}{5};-\frac{\pi}{6}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{5};-\frac{5\pi}{6}\right\}$

25. (EFOMM) A soma das raízes da equação valor de $4\cos^2\theta = 1$ tal que $0 < \theta < \pi$

a) π

b) $\frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{7}$

e) $\frac{\pi}{2}$

26. (EFOMM) Uma das soluções da equação $4\text{sen}x\cos x + \sqrt{3} = 0$ é:

a) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

b) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

c) $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

d) $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$

e) $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$

27. (EFOMM) Sabendo-se que $\theta = 67^o30'$ o valor de $sen^4\left(\frac{\theta}{3}\right)+cos^4\left(\frac{\theta}{3}\right)$ é:

a) $5\sqrt{2}$
b) $3/4$
c) $2\sqrt{2}/3$
d) $4/3$
e) $3\sqrt{2}/4$

28. (EFOMM) Se $x \in [0;2\pi]$, o número de soluções da equação $2sen^3x - senx + 1 = cos2x$ é igual a:

a) 1
b) 3
c) 6
d) 5
e) 7

29. (EFOMM) Se $sen2a = x$ e $sen2b = y$, então $sen(a+b)cos(a-b)$ é igual a:

a) $x+y$
b) x^2-y^2
c) $2(x+y)$
d) $\frac{x+y}{2}$
e) $x-y$

30. (EFOMM) Os arcos cuja tangente vale $\sqrt{3}$ podem estar no
a) 1º e 2º quadrantes
b) 3º e 4º quadrantes
c) 1º e 3º quadrantes
d) 2º e 4º quadrantes
e) Não existe arco com tangente igual a $\sqrt{3}$.

31. (EFOMM) Sendo $0 < x < \pi/2$ e $senx = 3sen2x$, então tgx vale:
a) 0
b) $\sqrt{6}$
c) 1
d) $\sqrt{35}$
e) π

GABARITO

01. b	02. d	03. e	04. a	05. e	06. e	07. d	08. a	09. c	10. c	11. e	12. e
13. e	14. c	15. d	16. a	17. b	18. e	19. d	20. c	21. c	22. c	23. b	24. d
25. a	26. a	27. b	28. d	29. d	30. c	31. d					

TESTES DE APRENDIZAGEM – TRIGONOMETRIA

01. (AFA) Considere a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$.
Sobre f é FALSO afirmar que:

a) O conjunto A é $\left\{x \in \Re \middle| x \neq \frac{k\pi}{2} k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) f é par.
c) f é injetora.
d) B = { 2}

02. (AFA) Considere as funções reais f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\,\text{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$$

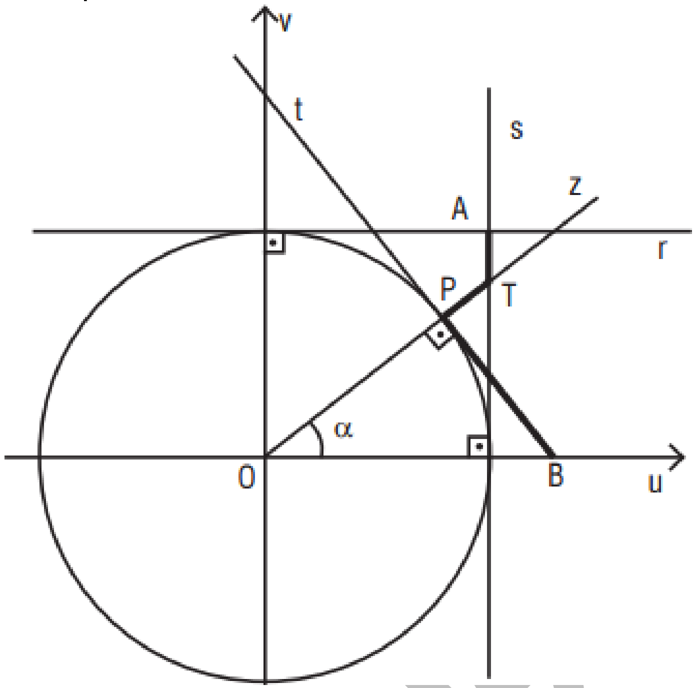
e marque a alternativa INCORRETA.
a) O conjunto imagem da função fé o intervalo [0,1]
b) A função g é ímpar.
c) A função real h definida por $h(x) = -\frac{1}{2} + g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

d) O período da função real j definida por $j(x) = \left|-\frac{1}{2} + g(x)\right|$ é $\frac{\pi}{2}$

03. (AFA) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = \left|\frac{\text{sen}2x}{\cos x}\right|$ e g(x) = 2 , cada uma definida no seu domínio mais amplo possível.
Analise as afirmações abaixo.
I) O conjunto solução da equação f(x) = g(x) contém infinitos elementos.
II) No intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, a função f é crescente.
III) O período da função f é p = π

Sobre as afirmações é correto afirmar que
a) apenas III é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) todas são falsas.
d) apenas II e III são verdadeiras.

04. (AFA) No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z. Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB, pode ser calculado, como função de α, por



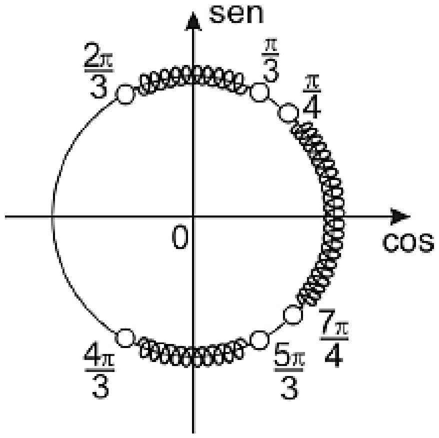
a) secα
b) cossecα
c) tgα + cotgα
d) cossecα + sec α

05. (AFA) Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x) = 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que y = f (x) é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.
Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão NÃO condiz com o modelo proposto.
a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.
b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

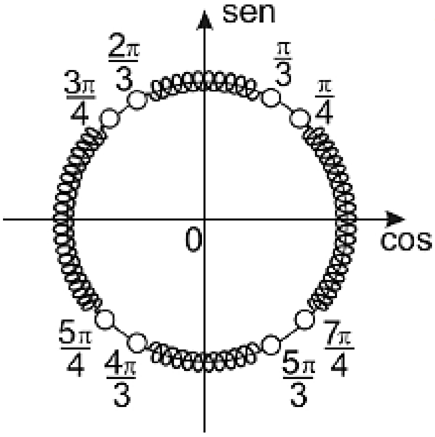
06. (AFA) Sejam as funções reais f, g e h definidas por $f(x) = \frac{\text{sen}x}{\text{cossec}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x}$, $g(x) = |\sec x|$ e $h(x) = |\text{cossec}\,x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo [0,2π].
A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de f e g; f e h; g e h é(são), respectivamente
a) 0, 0 e 4
b) 3, 1 e 4
c) 2, 3 e 4
d) 0, 2 e 3

07. (AFA) Sendo x $\in$ [0, 2π], a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação $-8\,\text{sen}^4 x + 10\,\text{sen}^2 x - 3 < 0$ é dada por

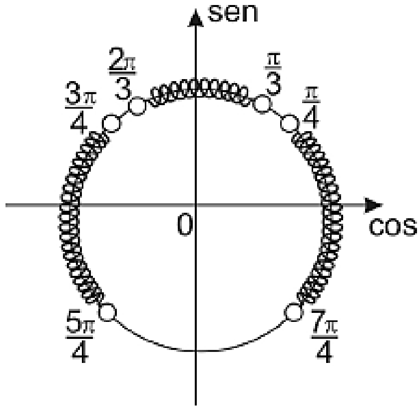
a)



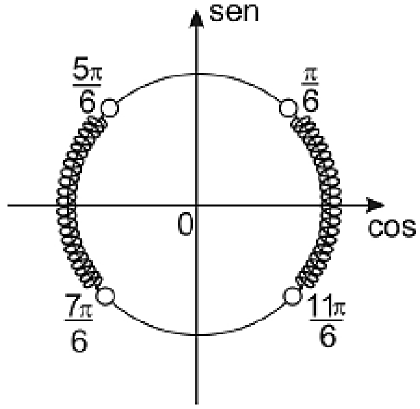
b)



c)



d)



08. (AFA) Considere A o conjunto mais amplo possível na função real f : A $\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$.

Sobre a função f é correto afirmar que:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) é periódica com período igual a

c) é decrescente se $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) é impar

09. (AFA) O período da função real f definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π
b) π
c) $\dfrac{\pi}{4}$
d) $\dfrac{\pi}{2}$

10. (AFA) Considere $\alpha \in [0, 2\pi[$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e in x o logaritmo neperiano de x (x > 0).

Calcule o valor do determinante

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\ln x}{\sec \alpha} & \ln x \operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos(-\alpha) \end{vmatrix}$$

É correto afirmar que o valor de D
a) depende do ângulo α
b) nunca será nulo.
c) será positivo $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
d) será negativo se 0 < x < 1.

11. (AFA) Sabendo que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) Se $\alpha + x2\pi$, então, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} \alpha$

( ) Se $\alpha + x = \dfrac{\pi}{2}$, então, $\sec x = \operatorname{cossec} \alpha$

( ) Sendo $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{3}{5}$, então $\cos(\pi - x) = \dfrac{3}{5}$

( ) A função $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função g(x) = 2 –cos x

Tem-se a sequência:
a) V, V, V, V.
b) V, F, F, F.
c) F, V, F, F.
d) V, V, F, V.

12. (AFA) Considere m a raiz da equação $\cos 2x + 3\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x - 3 = 0$ no intervalo $]0,2\pi[$ O número cotg m – sec 2m é:

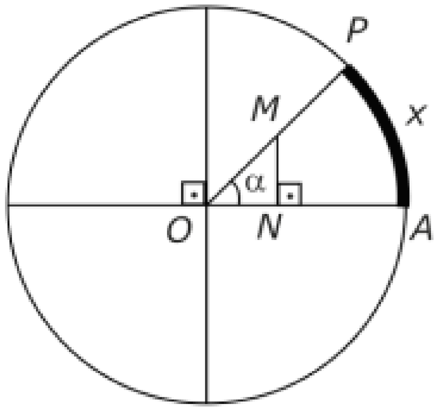
a) 0

b) -1

c) 1

d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

13. (AFA) No círculo de centro O a seguir, $\overline{OA} = 2$ m, M é o ponto médio de $\overline{OP}$ e a área y do triângulo retângulo ONM é dada em função do comprimento x do arco AP, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.



Assim sendo, é correto afirmar que y:

a) é decrescente se $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) assume valor máximo 0,125 m².

c) pode assumir valor igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) é sempre um numero racional.

14. (AFA) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \text{sen}x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \text{sen}x & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Considere a função f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \det A$, sobre a função g: $\Re \to \Re$ definida por $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}|f(x)|$, em que $|f(x)|$ é o módulo de $f(x)$, é correto afirmar que:

a) possui período π.

b) seu conjunto imagem é $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

c) é par.

d) é crescente no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

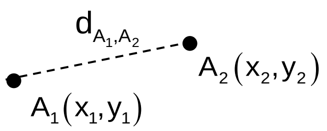
15. (AFA) Dado que $\operatorname{sen}x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tem-se que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ vale:

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3}\,/\,6$
c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{6}\,/\,6$

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

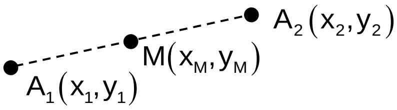
A distância entra dos pontos $A_1(x_1,y_1)$ e $A_2(x_2,y_2)$ é dada por:



$$d_{A_1,A_2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

COORDENADAS DO PONTO MÉDIO

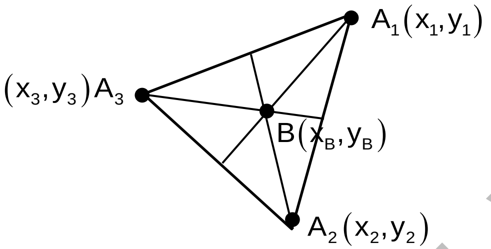
As coordenadas do ponto médio M entre os postos coordenados $A_1(x_1,y_1)$, e $A_2(x_2,y_2)$ são:



$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

COORDENADAS DO BARICENTRO

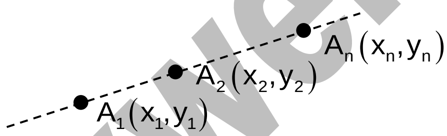
Sendo $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ e $A_3(x_3,y_3)$ os vértices de um triângulo. Então as coordenadas do baricentro B deste triângulo são:



$$B\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE PONTOS

A condição para que os postos coordenados $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$**,...,** $A_n(x_n,y_n)$ estejam alinhados é que**:**

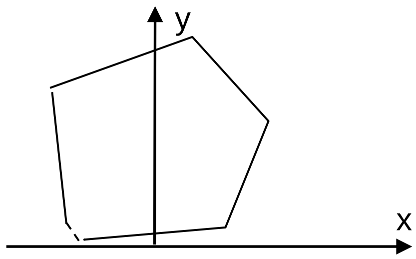


$$\det = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = 0$$

ÁREA DE UM POLÍGONO

A área de um polígono de n de vértices dados por $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$**,** $A_3(x_3,y_3)$**,** $A_4(x_4,y_4)$ **,...,** $A_n(x_n,y_n)$ é dada por:

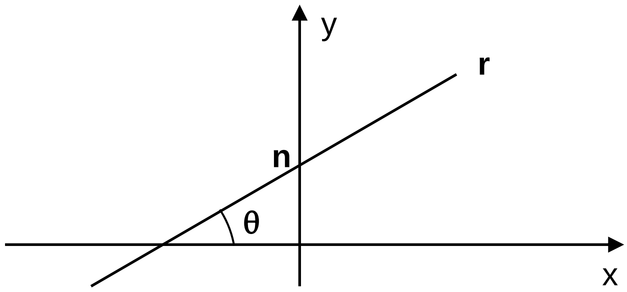
Atenção!
Para um polígono de vértices maior que 3 é necessário antes de calcular a área do polígono desenhar o mesmo no plano cartesiano.
Para montar a matriz pode-se escolher qualquer vértice e em um sentido arbitrário na ordem deve-se escolher os demais pontos.



$$A = \frac{1}{2}|\det|, \text{ sendo } \det = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

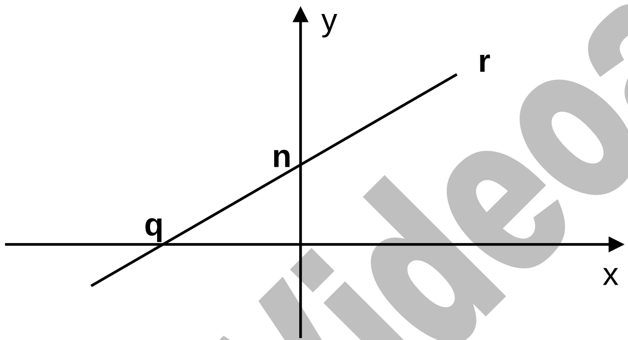
EQUAÇÃO DE UMA RETA

Equação reduzida



$$\begin{cases} y = mx + n \\ m = tg\theta \end{cases}$$

Equação segmentária



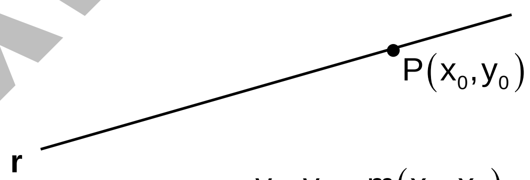
$$\frac{x}{q} + \frac{y}{n} = 1$$

Equação geral

$$ax + by + c = 0$$

Equação ponto inclinação

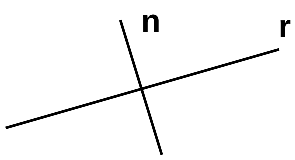
Se uma reta **r** de coeficiente angular **m** passa polo ponto de coordenadas (x_0, y_0). Então, temos:



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

RETA NORMAL

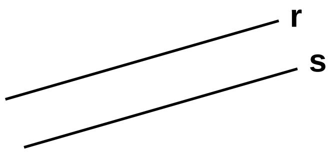
Uma reta **n** é normal a uma reta **r** se:



$$m_n \cdot m_t = -1$$

RETA PARALELA

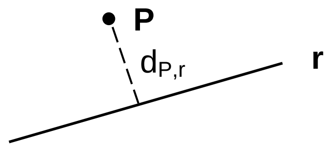
Uma reta **s** é paralela a uma reta **r** se:



$$\begin{cases} r: ax + by + c_r = 0 \\ s: ax + by + c_s = 0 \end{cases}$$

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

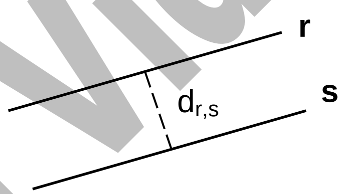
A distância entre o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta **r** $ax + by + c = 0$ é dada por:



$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS

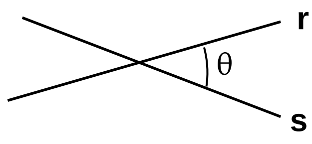
A distância entre o ponto r de equação $ax + by + c_r = 0$ e a reta s de equação $ax + by + c_s = 0$ é dada por:



$$d_{r,s} = \frac{|c_r - c_s|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ÂNGULO AGUDO ENTRE RETAS

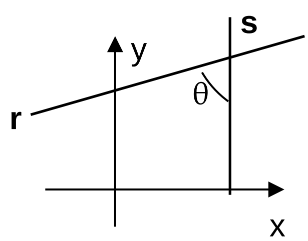
O ângulo agudo θ formado por duas retas de coeficientes angulares m_r e m_S é determinado por:



$$tg\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_s \cdot m_t} \right|$$

Nota:

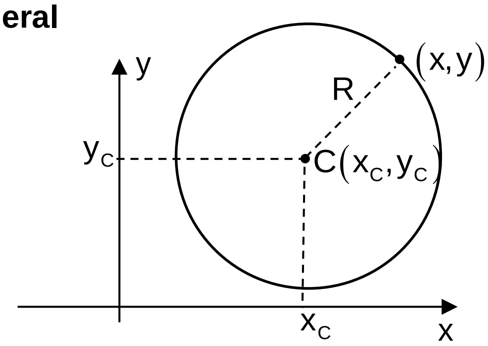
O ângulo agudo θ formado por duas retas **r** de coeficiente angular m_r e a reta **s** perpendicular ao eixo dos x é determinado por:



$$tg\theta = \left| \frac{1}{m_r} \right|$$

EQUAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Equação reduzida e equação geral



$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

Equação reduzida

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$$

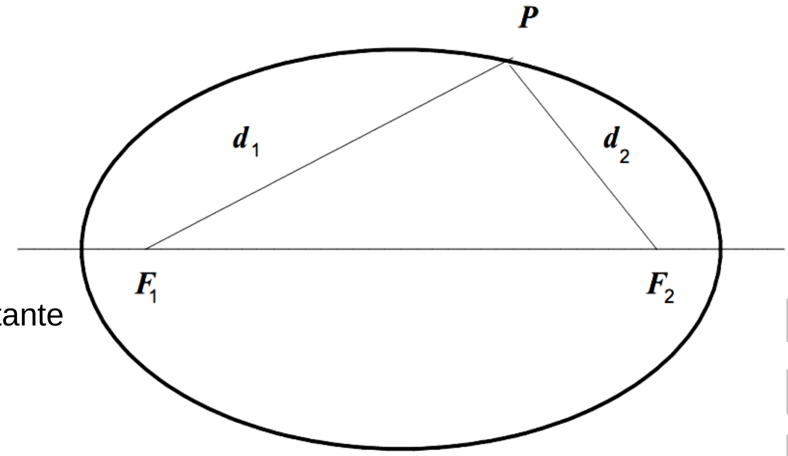
Equação geral

Atenção!

Para uma circunferência de centro (0,0), temos que $x^2 + y^2 = R^2$.

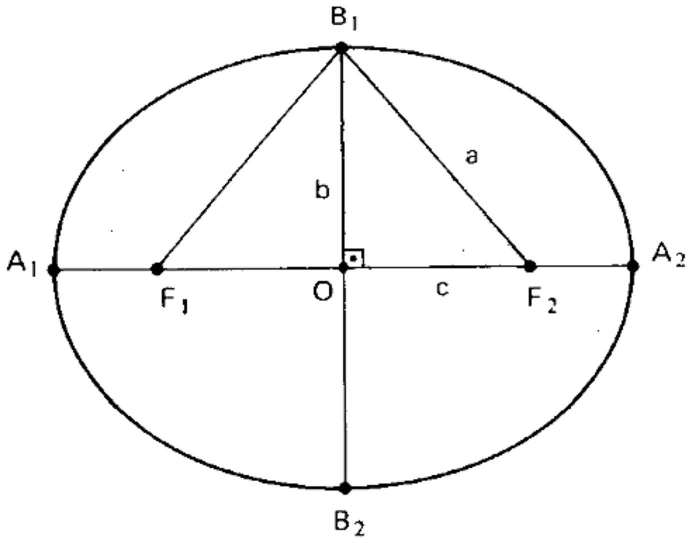
SECÇÕES CÔNICAS

Elipse: Considere dois pontos fixos F_1 e F_2. Elipse é o conjunto de todos os pontos P do plano, tais que é sempre constante a soma das distâncias de P aos pontos F_1 e F_2 chamados de focos da elipse.



$d_1 + d_2$ = constante

Elementos da Elipse:

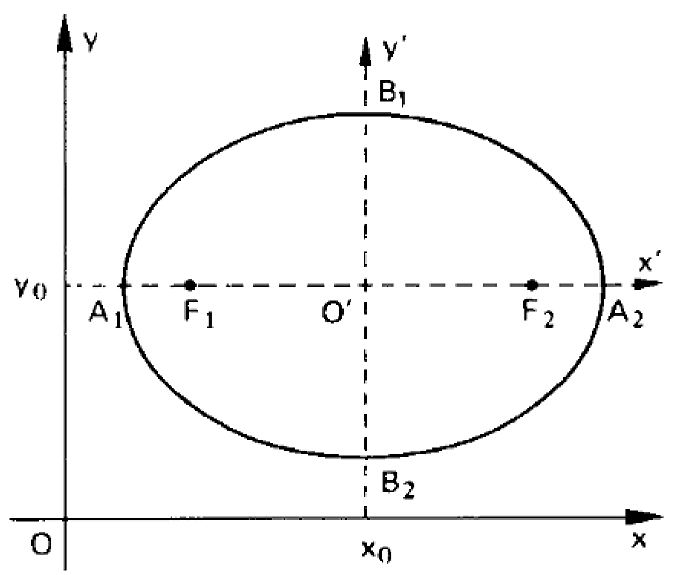


F_1 e F_2: focos
O: centro
A_1A_2: eixo maior
B_1B_2: eixo menor
2c: distância focal
2a: medida do eixo maior / a: semieixo maior
2b: medida do eixo menor / b: semieixo menor
E = c/a: excentricidade

Note pela figura que é sempre válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$*. Como **a** é hipotenusa e **c**, cateto, a excentricidade E = c/a será sempre um número do intervalo* $0 \leq E < 1$*. Quando E se aproxima de zero, seu formato é mais arredondado, de modo que quando E = 0, a elipse é uma circunferência.*

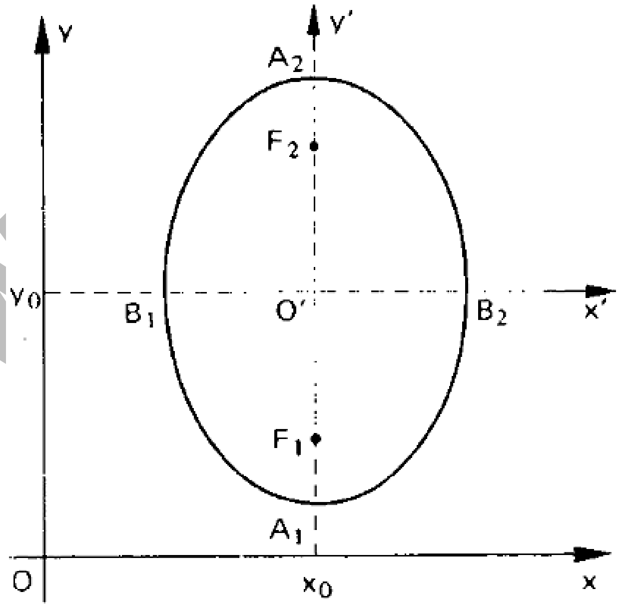
Equação Reduzida da Elipse: As equações reduzidas da Elipse possuem duas formas, dependendo da posição do eixo maior em relação aos eixos coordenados.

*1° caso: eixo maior paralelo ao eixo **x**:*



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

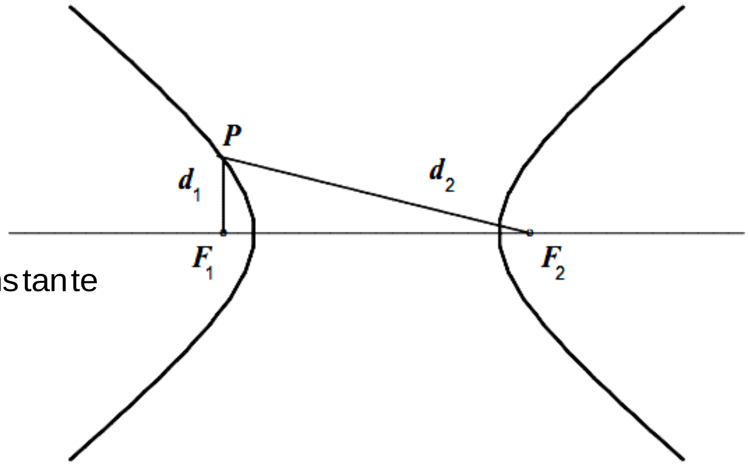
*2° Caso: eixo maior paralelo ao eixo **y**:*



$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

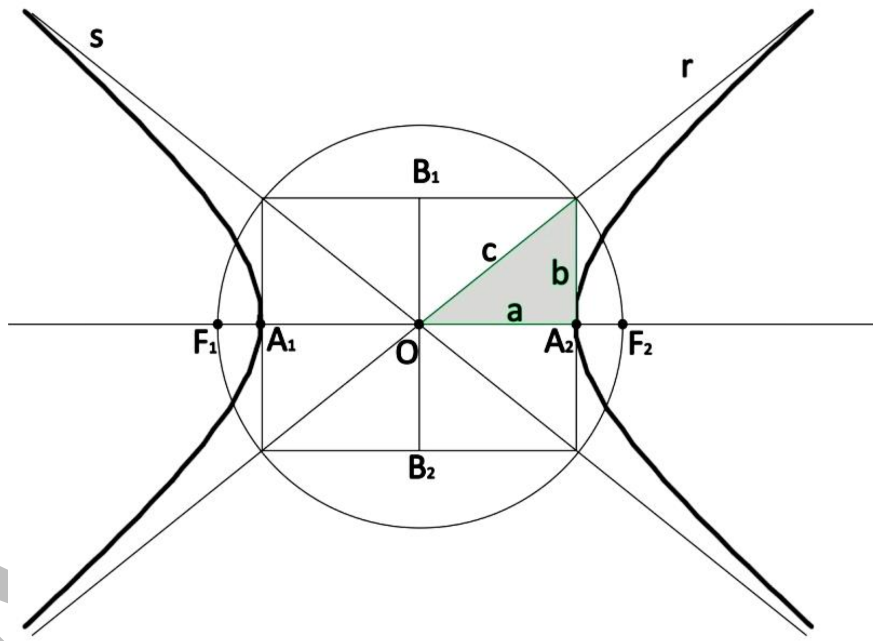
Perceba que para determinar à qual dos eixos coordenados o eixo maior é paralelo, basta observar em qual das variáveis, x ou y, está o termo a² (que é sempre maior que b²) no denominador.

Hipérbole: Considere dois pontos fixos F_1 e F_2. Hipérbole é o conjunto de todos os pontos P do plano, tais que é sempre constante o módulo da diferença entre as distâncias de P aos pontos F_1 e F_2 chamados de focos da hipérbole.



$|d_1 - d_2| = \text{constante}$

Elementos da Hipérbole:

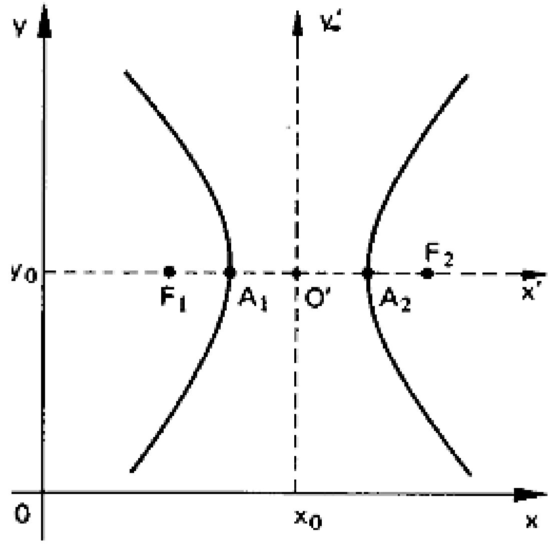


F_1 e F_2: focos; O: centro;
A_1A_2: eixo real ou transverso;
B_1B_2: eixo imaginário ou não transverso;
A_1 e A_2: vértices; 2c: distância focal;
2a: medida do eixo real / a: semi eixo real;
2b: medida do eixo imaginário / b: semi eixo imaginário; r e s: assíntotas;
E = c/a: excentricidade

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos vértices, ou seja, a hipérbole tende a tangenciar as assíntotas. Pelo triângulo destacado é possível facilmente perceber que $c^2 = a^2 + b^2$*. Como **c** é hipotenusa e **a**, cateto, a excentricidade E = c/a será sempre E > 1. Entenda a hipérbole como uma só curva formada por dois ramos, e não duas curvas.*

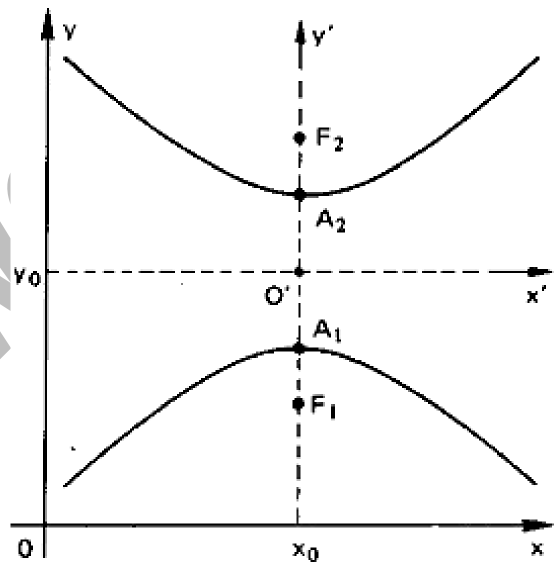
Equação Reduzida da Hipérbole: As equações reduzidas da hipérbole apresentam também duas formas dependendo da posição do eixo real em relação aos eixos coordenados.

*1° caso: eixo real paralelo ao eixo **x**:*



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

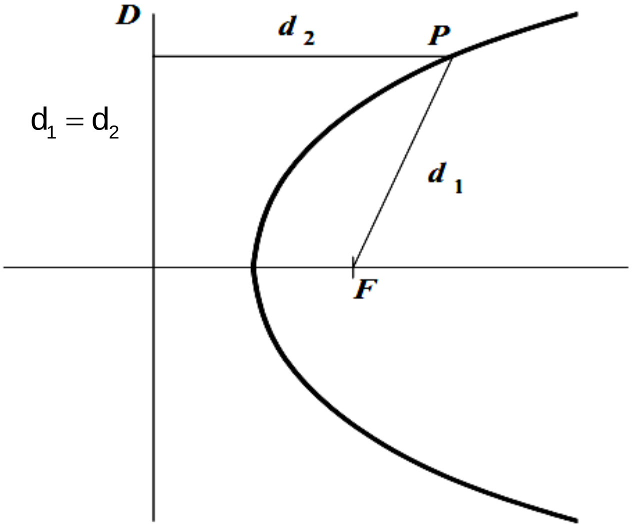
*2° Caso: eixo real paralelo ao eixo **y**:*



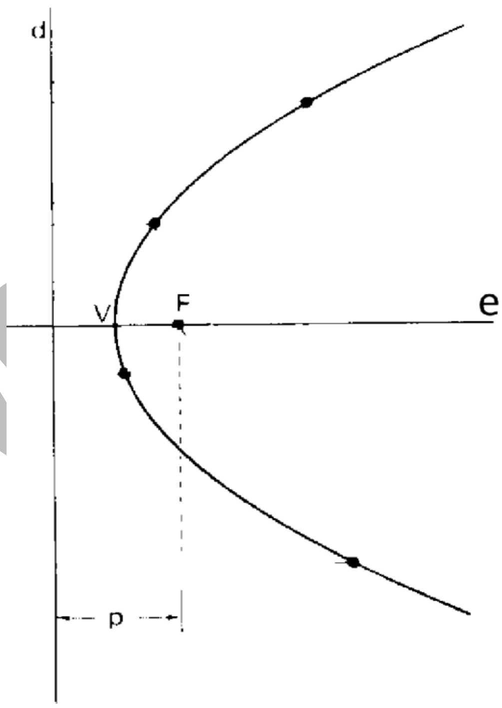
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Observe que o termo positivo da equação da hipérbole indica a qual dos eixos coordenados o eixo real está paralelo.

Parábola: Considere um ponto F e uma reta D. Parábola é o conjunto de todos os pontos P tais que a distância de P ao ponto F seja igual à distância de P à reta D. O ponto F é chamado de foco da parábola e a reta D é chamada de diretriz.



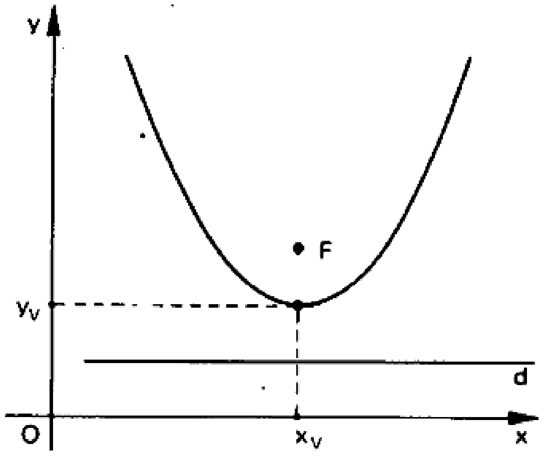
Elementos da Parábola



F: foco; V: vértice ; e: eixo
d: diretriz; p: parâmetro; FV = p/2

Equação Reduzida da Parábola: As equações reduzidas da parábola apresentam também duas formas dependendo da posição da diretriz em relação aos eixos coordenados.

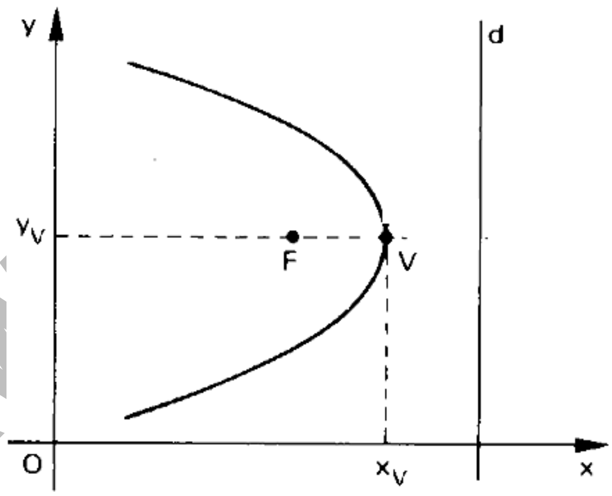
*1° caso: diretriz paralela ao eixo **x**:*



$$(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)$$

Neste caso para p > 0, a parábola tem concavidade voltada para cima, logo para p < 0, tem concavidade voltada para baixo.

*2° caso: diretriz paralela ao eixo **y**:*



$$(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)$$

Neste caso para p > 0, a parábola tem concavidade voltada para direita, logo para p < 0, tem concavidade voltada para esquerda. Perceba que o termo que estiver elevado ao quadrado, irá indicar a qual dos eixos coordenados a diretriz é paralela.

Testes de fixação

01. (EFOMM) As circunferências C_1 e C_2 de equações $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ e $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$ são tais que:
a) C_2 é tangente interior a C_1
b) C_1 e C_2 são tangentes exteriores
c) C_1 e C_2 são concêntricas
d) C_1 e C_2 são secantes
e) C_2 é interior a C_1

02. (EFOMM) Considere uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = (r+a)(r-a) - b^2$ e um ponto exterior (c,d). O comprimento das tangentes tiradas do ponto à circunferência é:
a) $a - c + b - d - r$
b) $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 - r^2}$
c) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - r^2}$
d) $\sqrt{a^2 + b^2 - (c+d) + r^2}$
e) $r + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

03. (EFOMM) Sabendo-se que $P \in r: 2x - y = 0$ e $Q \in s: 3x + 4 = 0$ e R(3,10) é o ponto médio do segmento PQ, então, podemos afirmar que a distância entre os pontos P e Q vale:
a) $\sqrt{7}$
b) $\frac{2}{3}\sqrt{365}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $\sqrt{37}$
e) $2\sqrt{37}$

04. (EFOMM) A área do quadrilátero de vértices A(0,1), B(1,0), C(3,2) e D(2,4) é:
a) 11/2
b) 13/2
c) 15/4
d) 17/4
e) 19/4

05. (EFOMM) Determine o coeficiente angular da reta cujas equações são dadas por $x = 2t - 1$ e $y = t + 2$, sendo $t \in \Re$.
a) – 1
b) – 1/2
c) 2/5
d) 1/2
e) 1

06. (EFOMM) A interseção da reta y + x – 1 = 0 com a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ determina uma corda cujo comprimento é:

a) 7

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5}$

e) 6

07. (EFOMM) Dadas as seguintes retas $r: y = \frac{2x}{3} + 5$; $s: 3x + 2y - 1 = 0$; $t: x - 5 = 0$; $u: y - 2 = 0$ e $v: y = 4x + 1$.

a) t e u são paralelas

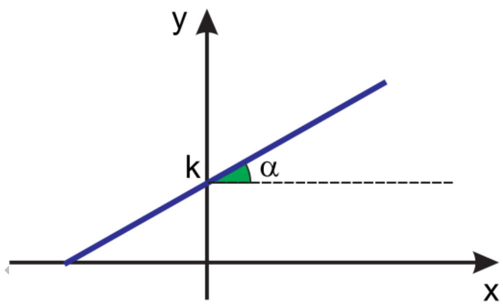
b) r e v são paralelas

c) t e v são perpendiculares

d) r e s são perpendiculares

e) s e v são perpendiculares

08. (EFOMM) Uma equação que representa a reta da figura abaixo é:



a) $y \cdot \cos\alpha - x \cdot \operatorname{sen}\alpha - k \cdot \cos\alpha = 0$

b) $y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\alpha - k \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$

c) $y \cdot \cos\alpha + x \cdot \operatorname{sen}\alpha - k \cdot \cos\alpha = 0$

d) $y \cdot \operatorname{sen}\alpha - x \cdot \cos\alpha - k \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$

e) $y \cdot \operatorname{sen}\alpha + x \cdot \cos\alpha - k \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$

09. (EFOMM) O ângulo agudo que a reta x – y = 15 faz com o eixo Ox é:

a) 75° b) 60° c) 45°

d) 30° e) 15°

10. (EFOMM) O centro da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 + 16x - 4y + 12 = 0$ é ponto de coordenadas:

a) $(-8, 2)$

b) $(-16, 4)$

c) $(8, -2)$

d) $(4, -1)$

e) $(16, -4)$

11. (EFOMM) Uma embarcação destinada à pesca deparou-se com a situação de homem ao mar (DHM), iniciando rapidamente uma manobra de resgate, cuja trajetória é dada pela função $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$. A razão da área varrida e o comprimento da manobra é:
a) 1,0
b) 1,5
c) 2,0
d) 2,5
e) 3,0

12. (EFOMM) Sabendo-se que suas circunferências secantes são ortogonais quando as respectivas retas tangentes nos seus pontos de interseção são perpendiculares, qual é a equação da circunferência centrada em (3,5) que é ortogonal à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$?
a) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 20 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 28 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

13. (EFOMM) Dois dos lados de um hexágono regular estão contidos nas retas definidas pelas equações 4x + 3y + 28 = 0 e 8x + 6y + 15 = 0, respectivamente. A área desse hexágono é um número entre:
a) 13 e 14
b) 14 e 15
c) 15 e 16
d) 16 e 17
e) 17 e 18

14. (EFOMM) Dada a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$, assinale a opção que apresenta a distância do centro da curva à origem do sistema de coordenadas.
a) 5
b) 6
c) 8
d) $\sqrt{24}$
e) $\sqrt{29}$

15. (EFOMM) A circunferência de equação $\left(x - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ intercepta o eixo das abscissas em dois pontos A e B. Sabendo que o segmento AB é lado de um polígono regular convexo que possui centro coincidente com o centro da circunferência, calcule o perímetro desse polígono.
a) 24
b) 16
c) 15
d) $6\left(\sqrt{2} + 1\right)$
e) $6\left(\sqrt{2} + 2\right)$

16. (EFOMM) Se θ é o menor ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência $x^2+y^2=9$ nos pontos $P\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$ então o valor de θ, em radianos, é:

a) $\frac{\pi}{12}$
b) $\frac{\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{12}$
e) $\frac{7\pi}{12}$

17. (EFOMM) Quanto à posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ e $x^2+y^2-8x+15=0$ como:

a) secantes
b) tangentes internas
c) tangentes externas
d) externas
e) internas

18. (EFOMM) Dado os pontos $A(-2,5)$, $B(1,1)$ e $C(-1,-1)$, o valor da altura do triângulo ABC em relação a base AC é igual a:

a) $\sqrt{37}$
b) 5
c) $\sqrt{8}$
d) $\frac{14\sqrt{37}}{37}$
e) 7

19. (EFOMM) O valor de $2\text{sen}^2\theta-\cos\theta+\text{cotg}^2\theta$ sendo $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, a medida do ângulo formado pelas retas r: $2\sqrt{3}x-y+8=0$ e s: $\sqrt{3}x-7y+3=0$ é:

a) $7/3$
b) $5/2$
c) 8
d) 6
e) $2/3$

20. (EFOMM) Sejam as circunferências: $C_1: x^2+y^2=16$ e $C_2: (x-2)^2+(y+2)^2=4$. Considere A e B os pontos de intersecção dessas circunferências. Determine a distância entre A e B.

a) $2\sqrt{7}$
b) $\sqrt{14}$
c) $2\sqrt{14}$
d) $\sqrt{7}$
e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

GABARITO

01. e	**02. b**	**03. b**	**04. a**	**05. d**	**06. b**	**07. d**	**08. a**	**09. c**	**10. a**	**11. b**	**12. c**
13. b	**14. e**	**15. b**	**16. d**	**17. a**	**18. d**	**19. a**	**20. b**				

TESTES DE APRENDIZAGEM – GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

01. (AFA) Considere no plano cartesiano as retas $r:\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$ e $s:(k+1)x - y - \frac{k}{2} = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Sobre as retas r e s é correto afirmar que NUNCA serão
a) concorrentes perpendiculares.
b) concorrentes oblíquas.
c) paralelas distintas.
d) paralelas coincidentes.

02. (AFA) No plano cartesiano, a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, determina no eixo das ordenadas uma corda de comprimento $\ell = 8$
Dessa forma, é correto afirmar que
a) λ é tangente ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$
b) o raio de λ é igual a $\sqrt{k}$
c) $P(k, -1) \in \lambda$
d) λ é secante à reta x = k

03. (AFA) Sejam a e b dois números reais positivos. As retas r e s se interceptam no ponto (a,b) Se $\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in r$ e $\left(0, \frac{b}{2}\right) \in s$ então uma equação para a reta t, que passa por (0 , 0) e tem a tangente do ângulo agudo formado entre r e s como coeficiente angular, é
a) $3abx + (2a^2 - b^2)y = 0$
b) $3bx - b(a^2 + b^2)y = 0$
c) $3ax - a(a^2 + b^2)y = 0$
d) $3abx - 2(a^2 + b^2)y = 0$

04. (AFA) Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse de equação $x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0$ é correto afirmar que
a) tem raio igual a 1
b) tangencia o eixo das abscissas.
c) é secante ao eixo das ordenadas.
d) intercepta a reta de equação 4x – y = 0

05. (AFA) Considerando $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ a circunferência de equação é correto afirmar que
a) λ é concêntrica com $\alpha: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) o ponto O (0,0) é exterior a λ
c) a reta r : x – y + 3 = 0 é tangente a λ
d) λ é simétrica da circunferência $\beta: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, em relação ao ponto O (0, 0)

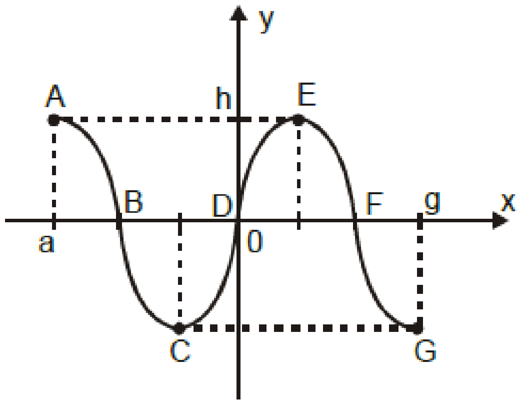
06. (AFA) A circunferência λ é tangente à reta $x : y = \frac{3}{4}$ e também é tangente ao eixo das abscissas no ponto de abscissa 6.
Dentre as equações abaixo, a que representa uma parábola que contém a origem do plano cartesiano e o centro de λ é
a) $12(y - x) + x^2 = 0$
b) $3y^2 - 12y + 2x = 0$
c) $2y^2 - 3x = 0$
d) $12y - x2 = 0$

07. (AFA) Considere os pontos A = (4, -2), B = (2,0) e todos os pontos ( ) y ,x P , sendo x e y números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo.
É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos P (x, y) são tais que:
a) são equidistantes de C (2, -1)
b) o maior valor de x é $3 + \sqrt{2}$
c) o menor valor de y é - 3
d) x pode ser nulo

08. (AFA) Analise as proporções abaixo e escreva V para a (s) verdadeira (s) e F para a (s) falsa (s).
I) ( ) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2 + 4x - 4 = 0$ é igual a 1 unidade de comprimento.
II) ( ) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.
III) ( ) A equação $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto P(1, 4)
A sequência correta é
a) F – F – V
b) V – F – V
c) F – V – F
d) V – V – F

09. (AFA) Na figura abaixo, tem-se a representação gráfica da função real f(x) = 2 sen x/2 para $x \in [a, g]$. É correto afirmar que o baricentro do triângulo DEF é o ponto:

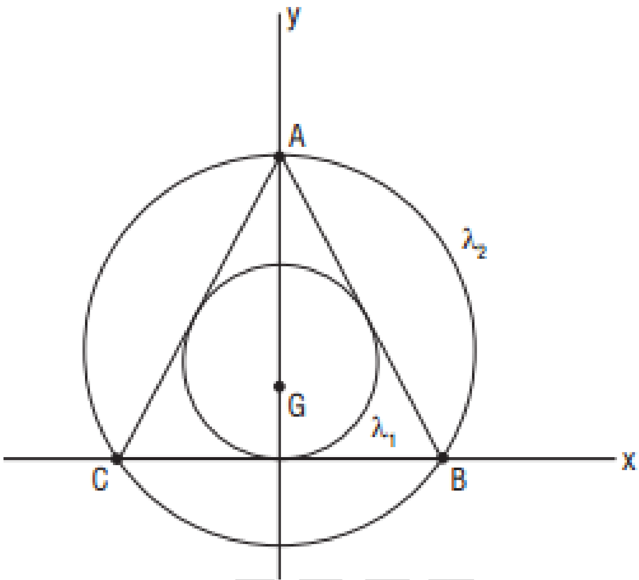
a) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$
b) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right)$
c) $\left(\pi, \frac{1}{3}\right)$
d) $\left(\pi, \frac{2}{3}\right)$



10. (AFA) Considere no plano cartesiano um triângulo equilátero ABC em que:

- os vértices **B**, de abscissa positiva, e **C**, de abscissa negativa, estão sobre o eixo $\overline{OX}$
- possui baricentro no ponto $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Considere também, nesse mesmo plano cartesiano, a circunferência λ_1 inscrita e a circunferência λ_2 circunscrita ao triângulo **ABC**.



Analisando as proposições abaixo e escreva (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) A reta **r**, suporte do lado **AB**, passa pelo ponto (-1,b) em que b é o dobro do oposto do coeficiente angular de **r**.

( ) O círculo delimitado por λ_2 contém o ponto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$

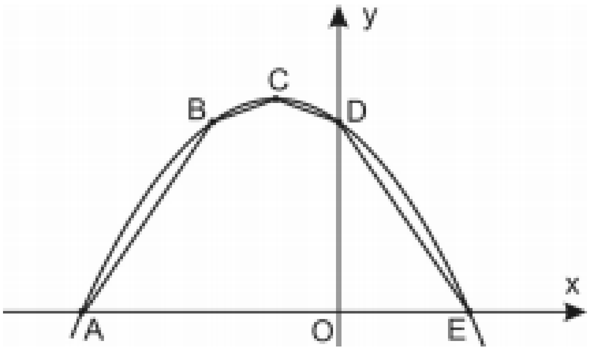
( ) O ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$ pertence a λ_1

A sequencia correta é
a) V - F - V
b) F - F - V
c) V - F - F
d) F - V - F

11. (AFA) Seja $\lambda : 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + k = 0$ uma circunferência que no plano cartesiano tem interseção vazia com os eixos coordenados. Considere $k \in \Re$, é correto afirmar que:

a) $P\left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right)$ é interior a λ.
b) existem apenas dois valores inteiros para k.
c) a reta r: x = k intersecta λ.
d) se c é o comprimento de λ, então c > 2π unidades de comprimento.

12. (AFA) No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos da função real f definida por $f(x) = -x^2 - x + 2$ e o polígono ABCDE.



Considerando que:

- o ponto C é o vértice da função f
- os pontos B e D possuem ordenadas iguais
- as abscissas dos pontos A e E são raízes da função f.

Pode-se afirmar que a área do polígono ABCDE, em unidades de área, é:

a) $8\frac{1}{16}$

b) $4\frac{1}{8}$

c) $4\frac{1}{4}$

d) $8\frac{1}{2}$

13. (AFA) Considere no Plano de Argand-Gauss os números complexos $z_1 = -x - 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -2 + 3i$ e $z_4 = x + yi$, onde x e y são números reais quaisquer e $i^2 = -1$. Sobre o conjunto desses números complexos que atendem simultaneamente às condições:

I) $\mathrm{Re}(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) \le \mathrm{Im}(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2)$

II) $|\bar{z}_3 + \bar{z}_4| \le 2$

É correto afirmar que:

a) representa uma região plana cuja área é menor que 6 unidades de área.

b) possui vários elementos que são números imaginários puros.

c) possui vários elementos que são números reais.

d) seu elemento de menor módulo possui afixo que pertence à reta $(r)\,3x + 2y = 0$.

14. (AFA) Sejam $z = x + yi$ $(x \in \mathbb{R}^*$ e i a unidade imaginária$)$, $\bar{z}$ o conjugado de z e λ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano para os quais $z \cdot \bar{z} = 2x + 3$. Se A e B são os pontos de interseção de λ com o eixo Oy e se A' é o ponto de interseção de λ com o eixo Ox que possui a menor abscissa, então a área do triângulo A'AB é, em unidades de área, igual a:

a) $2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2}$

COMPLEXOS

FORMA ALGÉBRICA

$$\boxed{z = x + y.i}$$

$$x \text{ e } y \in \Re \begin{cases} x: \text{parte real}\left[\operatorname{Re}(z)\right] \\ y: \text{parte imaginária}\left[\operatorname{Im}(z)\right] \end{cases}$$

$i = \sqrt{-1}$: unidade imaginária

Notas:

- Número complexo:

✓ real ☞ $\operatorname{Im}(z) = 0$

✓ imaginário puro ☞ $\begin{matrix} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) \neq 0 \end{matrix}$

✓ imaginário ☞ $\begin{matrix} \operatorname{Re}(z) \neq 0 \\ \operatorname{Im}(z) \neq 0 \end{matrix}$

POTÊNCIAS DE i

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

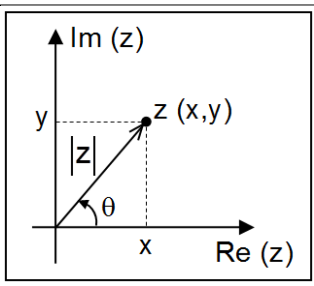
$$\boxed{i^n = i^r}$$

Onde r é o resto da divisão de n por 4

IDENTIDADE

$$\left.\begin{matrix} z_1 = x_1 + y_1.i \\ z_2 = x_2 + y_2.i \end{matrix}\right] \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{bmatrix}$$

PLANO DE ARGAND-GAUSS



θ: argumento principal

MÓDULO DE Z

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)}$$

ou

$$\boxed{z = |z|\text{cis}\theta}$$

FORMA EXPONENCIAL

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$

CONJUGADO DE UM COMPLEXO

$$z = x + y.i \;☞\; \boxed{\bar{z} = x - y.i}$$

PROPRIDADES DE MÓDULO

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z.w| = |z|.|w|$
- $|z| + |w| \geq |z + w|$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

PROPRIDADES DE CONJUGADO

- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z.\bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

POTENCIAÇÃO DE COMPLEXOS

$$\boxed{z^n = |z|^n \text{cis} n\theta} \quad n \in \mathbb{Z}$$

RADICIAÇÃO DE COMPLEXOS

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \; k \in \mathbb{Z}_+$$

Nota:

Os n afixos da $\sqrt[n]{z}$ pertencem a uma mesma circunferência de centro (0,0) e raio R = $\sqrt[n]{|z|}$. Sendo que para n > 2 os afixos correspondem aos vértices de um polígono regular inscrito nessa circunferência.

Testes de fixação

01. (EFOMM) Sabendo-se que a raiz quadrada do número complexo $-16+30i$ é $(a+bi)$ ou $(c+di)$, pode-se afirmar que o valor de $a+d$ é:

a) $+2$
b) $+1$
c) 0
d) -1
e) -2

02. (EFOMM) Se os números reais x e y são soluções da equação $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+iy}=1+i$, então $5x+15y$ é igual a:

a) 0
b) -1
c) 1
d) $\sqrt{2}$
e) $-\sqrt{2}$

03. (EFOMM) A solução da equação $|z|+z=1+3i$ é um número complexo de módulo:

a) $5/4$
b) 5
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{5}/2$
e) $5/2$

04. (EFOMM) Sejam os números complexos z tais que $\frac{1}{3}|z|=|\overline{z+1}|$. O lugar geométrico das imagens desses números complexos é uma

a) parábola
b) reta
c) circunferência de raio 3/8
d) circunferência de raio 3/2
e) hipérbole

05. (EFOMM) Considere o conjunto dos números complexos z com a propriedade $|z+169i|\leq 65$, admitindo que i é a unidade imaginária. O elemento desse conjunto que possui o maior argumento θ, $0\leq\theta<2\pi$, é igual a

a) $60-144i$
b) $65-169i$
c) $-104i$
d) $-65-169i$
e) $65-156i$

06. (EFOMM) Qual o menor valor do número natural positivo n para que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$, onde i é a unidade imaginária, seja um número real?
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

07. (EFOMM) É bem conhecida a relação $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, onde θ é um ângulo em radiano e $i=\sqrt{-1}$. Dada a relação podemos concluir que se θ é um imaginário puro da forma bi onde $b \in \Re$, $\cos\theta$ é um número
a) entre -1 e 1
b) maior que -1 e menor que 0
c) maior que 1
d) igual a 1
e) imaginário puro

08. (EFOMM) O argumento do número complexo $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ é
a) 45^o
b) 60^o
c) 90^o
d) 135^o
e) 225^o

09. (EFOMM) O inverso do complexo 2i é
a) $\frac{1}{2}-i$
b) $\frac{1}{2}+i$
c) i/2
d) – i/2
e) – 2

10. (EFOMM) Qual o valor de e, que é um escalar real, em que a parte imaginária no número $\frac{2+i}{e+2i}$ é nula?
a) -4
b) -2
c) 1
d) 2
e) 4

11. (EFOMM) Determine o valor de x para que o produto $(12-2i)\left[18+(x-2)i\right]$ seja um número real.
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 7

12. (EFOMM) Dado o número complexo z = 1 - i e considerando ser ele uma das raízes da equação $x^{10} - p = 0$, o valor de p é:

a) 8i
b) – 4i
c) – 8i
d) – 16i
e) – 32i

13. (EFOMM) O quociente de $\frac{i^{31} - i^{110}}{i^{13}}$ é:

a) -1 - i
b) 1 - i
c) -1 + i
d)
e) i

14. (EFOMM) Sabendo-se que $z_1 = (1 - 2i)^4$ e $z_2 = (2 + 2i)^3$, o resultado $z_1 - z_2$ é:

a) 5 + 22i
b) 15 + 22i
c) 3 + 24i
d) 13 - 24i
e) 9 + 8i

15. (EFOMM) O quociente de A por B, sendo $A = 2 - \sqrt{3}i$ e $B = 2\left[\cos(2\pi/3) + i\operatorname{sen}(2\pi/3)\right]$ é:

a) 4 - 2i

b) $\frac{3}{2} - \frac{4}{5}i$

c) $5 + \sqrt{3}i$

d) $-\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i$

e) $-\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

16. (EFOMM) O valor de $\left(\sqrt{3} + i\right)^7$ é igual a:

a) $-64\sqrt{3} - 64i$

b) $128 - 64i$

c) $64\sqrt{3} + 64i$

d) $-8\sqrt{3} - 8i$

e) $-128\sqrt{3} - 128i$

17. (EFOMM) Sabendo-se que $z = \frac{i^{26} - 3i^{14} + 5i^{23}}{4i^{15} + i^4 - i^{124}}$, então, podemos afirmar que o dobro de $\frac{z}{1 - i}$ vale:

a) $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}i$

b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$

d) $\frac{3}{8} + \frac{7}{8}i$

e) $1 - \frac{7}{4}i$

18. (EFOMM) Escrevendo-se na forma trigonométrica o complexo $z = \dfrac{3 - \sqrt{3}i}{2i}$, encontra-se:

a) $\cos(7\pi/6) + i\operatorname{sen}(7\pi/6)$

b) $\sqrt{3}\left[\cos(7\pi/6) + i\operatorname{sen}(7\pi/6)\right]$

c) $\cos(\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/6)$

d) $\sqrt{3}\left[\cos(\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/6)\right]$

e) $\sqrt{3}\left[\cos(4\pi/3) + i\operatorname{sen}(4\pi/3)\right]$

19. (EFOMM) A solução da equação $z^2 = -8 + 8\sqrt{3}i$ são:

a) $2 + 2\sqrt{3}i$ e $2 - 2\sqrt{3}i$

b) $-2 + 2\sqrt{3}i$ e $-2 - 2\sqrt{3}i$

c) $2 + \sqrt{3}i$ e $-2 - \sqrt{3}i$

d) $2 + 2\sqrt{3}i$ e $-2 - 2\sqrt{3}i$

e) $2 + \sqrt{3}i$ e $-2 + \sqrt{3}i$

20. (EFOMM) O módulo do número complexo z, tal que $iz - 2\bar{z} + 3 - i = 0$ é:

a) $\sqrt{\dfrac{26}{3}}$

b) $2\sqrt{\dfrac{13}{3}}$

c) $\dfrac{2\sqrt{13}}{9}$

d) $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$

21. (EFOMM) Reduzindo o complexo $z = \dfrac{\sqrt{1+m} + i\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m} - i\sqrt{1-m}} - \dfrac{\sqrt{1-m} + i\sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m} - i\sqrt{1+m}}$ a uma forma simples teremos:

a) $z = i$

b) $z = 1 + mi$

c) $z = 2m$

d) $z = 1 - mi$

e) $z = -2mi$

22. (EFOMM) O valor da equação $i^{-11} + i^{-12} + i^{-13} + i^{-101} + i^{-103}$ é:

a) 1

b) $-\dfrac{1}{i}$

c) $-i$

d) $-2i$

e) $2i$

23. (EFOMM) Sendo $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, a expressão que melhor representa $z^n - z^{-n}$ é:

a) $\cos(n\theta)$

b) $2i\operatorname{sen}(n\theta)$

c) $-2i\operatorname{sen}(n\theta)$

d) $2\cos(n\theta)$

e) $2\operatorname{sen}(n\theta)$

24. (EFOMM) Considere o número complexo $z_1 \neq 1$, tal que z_1 seja solução da equação $z^6 = 1$, com menor argumento positivo. A solução z_2 da mesma equação, cujo argumento é o triplo do argumento de z_1, é igual a:

a) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) -1

d) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. (EFOMM) O número complexo, $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, sendo i a unidade imaginária e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que satisfaz a inequação $|z + 3i| \leq 2$ e que possui o menor argumento θ, é:

a) $z = -\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

b) $z = -\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

c) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{5}{3}i$

d) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{5}{3}i$

e) $z = -2\sqrt{5} + 5i$

26. (EFOMM) Seja o número complexo $z = -1 - \sqrt{3}i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:

a) $z = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $z = 256\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z = 256\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z = 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z = 256(\cos 2\pi + i\text{sen}2\pi)$

GABARITO

01. a/e	**02. b**	**03. b**	**04. c**	**05. a**	**06. e**	**07. c**	**08. e**	**09. d**	**10. e**	**11. b**	**12. e**
13. a	**14. e**	**15. e**	**16. a**	**17. a**	**18. e**	**19. d**	**20. e**	**21. c**	**22. a**	**23. b**	**24. c**
25. c	**26. d**										

TESTES DE APRENDIZAGEM – COMPLEXOS

01. (AFA) Considere no Plano de Argand-Gauss os números complexos z = x + yi, onde i = $\sqrt{-1}$ e cujos afixos são os pontos P(x,y) ∈ $\Re^2$, Dada a equação $(z - 1 + i)^4 = 1$, sobre os elementos que compõem seu conjunto solução, é INCORRETO afirmar que

a) apenas um deles é imaginário puro.
b) todos podem ser escritos na forma trigonométrica.
c) o conjugado do que possui maior argumento é 1 + 2i
d) nem todos são números imaginários.

02. (AFA) Considere os números complexos $z_1 = x - 1$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = -1 + 2i$ e $z_4 = x + yi$ em que $x \in \Re$, $y \in \Re_+^*$, e $i^2 = -1$, e as relações:

I. $\text{Re}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \le \text{Im}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$

II. $\left|z_3 . z_4\right| = \sqrt{5}$

O menor argumento de todos os complexos que satisfazem, simultaneamente, as relações I e II é

a) $\frac{\pi}{6}$
b) 0
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{3}$

03. (AFA) Nas expressões x, y e z, considere a simbologia:

- Log é o logaritmo decimal;
- i é a unidade imaginária dos números complexos;
- sen é o seno de um arco; e
- n! é o fatorial de n.

Se $x = \frac{3\log(100!)}{\log 1 + \log 8 + \log 27 + ...\log 100}$, $y = \frac{i + i^2 + i^3 + ... + i^{100}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot ... \cdot i^{100}}$ e

$z = \text{sen}\alpha + \text{sen}(\alpha + \pi) + \text{sen}(\alpha + 2\pi) + ... + \text{sen}(\alpha + 99\pi)$ então o valor de $x^y + z$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

04. (AFA) Considere no plano complexo, o conjunto dos número $z = x + yi; \{x, y\} \subset \Re$ e $i^2 = -1$ que satisfazem a condição $|z| \geq |2z + 1|$

É FALSO afirmar que

a) este conjunto pode ser representado por um círculo de raio igual a $\frac{1}{3}$

b) z = -1 é o elemento de maior módulo, neste conjunto.

c) z = - $\frac{1}{3}$ é o elemento de maior argumento, neste conjunto.

d) não existe z, neste conjunto, que seja imaginário puro.

05. (AFA) Considerando os números complexos z_1 e z_2, tais que:

- z_1 é a raiz cúbica de 8i que tem afixo no segundo quadrante
- z_2 é raiz da equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e $Im(z_2) > 0$

Pode-se afirmar que $|z_1 + z_2|$ é igual a

a) $2\sqrt{3}$

b) $3 + \sqrt{3}$

c) $1 + 2\sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{2}$

06. (AFA) O valor de n tal que $\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = 31 + i$ sendo i a unidade imaginaria, é

a) par menor que 10
b) primo maior que 8
c) ímpar menor que 7
d) múltiplo de 9

07. (AFA) Considere todos os números complexos z = x + yi , onde x e y $\in \Re, i = \sqrt{-1}$, tal que $|z - i| \leq \left|\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right|$. Sobre esses números complexos z, é correto afirmar que

a) nenhum deles é imaginário puro.
b) existe algum número real positivo.
c) são todos imaginários.
d) apenas um é número real.

08. (AFA) Resolva a equação $z^3 - 1 = 0$ no conjunto dos números complexos. Considerando as raízes encontradas, analise as proposições abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) A equação possui três raízes de multiplicidade 1
( ) Os afixos das raízes formam um triângulo equilátero cuja área é 3 3 2 unidades de área.
( ) Duas das raízes são conjugadas.
( ) Todas as raízes têm o mesmo módulo. A sequência correta é:

a) V – F – V – V
b) V – V – F – V
c) F – F – V – F
d) V – F – V – F

POLINÔMIOS

INTRODUÇÃO

Uma função é dita polinomial quando ela é expressa da seguinte forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \text{, onde } \begin{cases} a_0, a_1, a_2, ..., a_n : \text{coeficientes} \in \mathbb{C} \\ a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n : \text{termos} \\ n \in \mathbb{N} \\ a_0 : \text{termo independente} \\ a_n : \text{coeficiente do termo de maior expoente} \end{cases}$$

Atenção!

- $P(0) = a_0$
- $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$

DEFINIÇÕES

Dizemos que o grau de um polinômio é dado pela ordem do maior expoente com coeficiente não nulo.

Dois polinômios são idênticos quando todos os seus coeficientes correspondentes são iguais.

Um polinômio é dito identicamente nulo quando e só quando todos seus coeficientes forem nulos.

Dizemos que um número α é raiz do polinômio P(x) quando P(α) = 0.

RAÍZES DE UM EQUAÇÃO POLINOMIAL

Número de raízes: para uma equação polinomial de grau $n \geq 1$ temos n raízes complexas ou no máximo n raízes reais.

Raízes complexas: se uma equação polinomial de **coeficientes reais** admite como raiz o número complexo $z = a + bi(b \neq 0)$, então essa equação também admite como raiz o número complexo $\bar{z} = a - bi$, conjugado de z.

Raízes múltiplas: uma equação polinomial tem multiplicidade n quando apresenta n raízes iguais.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Soma e Multiplicação de Polinômios

A soma e multiplicação de polinômios são feitas algebricamente como qualquer outra expressão numérica.

Divisão de Polinômios

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$

$P(x)$: Dividendo

$D(x)$: Divisor

$Q(x)$: Quociente

$R(x)$: Resto

$Grau_{R(x)} < Grau_{D(x)}$

Atenção!
Quando um polinômio é divisível por outro o resto é igual a zero.

Divisão de Polinômios pelo método das chaves
Veja o exemplo abaixo:
Se a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + px^2 - qx + 3$ por $f(x) = x^2 - x + 1$ for exata, quais os valores de p e q?

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} + px^2 - qx + 3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{\cancel{-x^3} + x^2 - x} & x + p + 1 \\
\cancel{(p+1)x^2} - (q+1)x + 3 & \\
\underline{\cancel{-(p+1)x^2} + (p+1)x - (p+1)} & \\
\underbrace{(-q+p)x - p + 2}_{R(x)=0} &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases} -p + 2 = 0 \therefore p = 2 \\ -q + p = 0 \therefore \boxed{p = q = 2} \end{cases}
$$

Teorema do resto
O resto da divisão de P(x) por (x - a) é dado por P(a)

R(x) = P(a)

Teorema de D' Alembert
Um polinômio P(x) é divisível por (x - a) se, e somente se, a é raiz de P(x).

De acordo com o teorema do resto, temos R(x) = P(a). Então:

R(x) = 0 $\Rightarrow$ P(a) = 0
(divisão exata) (a é uma raiz de P(x))

Divisibilidade de Polinômios
P(x) é divisível por Q(x) se todas as raízes de Q(x) forem também raízes de P(x).

Algoritmo de Briot-Ruffini
Geralmente é usado para baixar o grau de um polinômio, veja o exemplo abaixo:
Quais as raízes do polinômio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$, sendo que o mesmo apresenta duas raízes iguais a -1.

4º GRAU	2	1	1	-3	1	-1
3º GRAU	2	-1	-2	1	0	-1
2º GRAU	2	-3	1	0		

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \therefore x = \frac{-\left(-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}\right)}{2 \cdot 2} \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 1/2 \end{cases}$$

$$S = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

FATORAÇÃO DE D' ALEMBERT

De forma geral, podemos fatorar o polinômio de raízes α_1, α_2, α_3, ..., α_n e coeficiente do termo de maior grau na da seguinte forma:

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1).(x-\alpha_2).(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n)$$

RELAÇÕES DE GIRARD

Aplicação:

$$x^4 \underset{1A1}{\overset{-}{+7x^3}} \underset{2A2}{\overset{+}{-5x^2}} \underset{3A3}{\overset{-}{+11x}} \underset{4A4}{\overset{+}{+1}} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-7}{1} = -7$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{-11}{1} = -11$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{1} = 1$$

01. (EFOMM) O valor da soma de a e b, para que a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$ seja exata, é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

02. (EFOMM) P(x) é um polinômio de coeficientes reais e menor grau com as propriedades abaixo:
- os números $r_1 = 1$, $r_2 = i$ e $r_3 = 1 - i$ são raízes da equação P(x) = 0
- P(0) = -4
Então, P(-1) é igual a:
a) 4
b) -2
c) -10
d) 10
e) -40

03. (EFOMM) Um professor escreveu no quadro-negro uma equação do segundo grau e pediu que os alunos a resolvessem. Um aluno copiou errado o termo constante da equação e achou as raízes – 3 e -2. Outro aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau e achou as raízes 1 e 4. A diferença positiva entre as raízes da equação correta é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

04. (EFOMM) O valor de λ na equação $\gamma^3 - 61\gamma^2 + \lambda\gamma - 5832 = 0$ de modo que suas raízes estejam em progressão geométrica, é:
a) 1017
b) 1056
c) 1078
d) 1098
e) 1121

05. (EFOMM) Sabendo que o polinômio $P(x) = x^3 + kx^2 + px - 9$ é divisível por $D(x) = x^2 - 3$, podemos afirmar que:
a) $p + k = -3$
b) $\frac{p}{k} = -1$
c) $p + k = -9$
d) $p \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{k} \in \Re$
e) $p^k = \sqrt[4]{3}$

06. (EFOMM) A divisão de um polinômio P(x) por (x - 4) deixa resto 3, por (x + 1) deixa resto 8 e por (x - 2) deixa resto -1. O resto da divisão de P(x) pelo produto (x - 4).(x + 1).(x - 2) tem como soma dos coeficientes:
a) -24
b) 9
c) -3
d) 0
e) -4

07. (EFOMM) Se $\{a,b,c\}$ é o conjunto solução da equação $x^3 - 13x^2 + 47x - 60 = 0$, qual o valor de $a^2 + b^2 + c^2$?
a) 263
b) 240
c) 169
d) 75
e) 26

08. (EFOMM) A equação $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217 - 13\sqrt[3]{x}}$ tem solução inteira positiva x_1. O número de divisores inteiros positivos de x_1 é:
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

09. (EFOMM) Após a determinação dos valores numéricos: P(-1), P(0) e P(1), verifica-se que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - x - 0,5$ tem:
a) apenas uma raiz real.
b) apenas duas raízes reais.
c) três raízes reais, todas de mesmo sinal.
d) três raízes reais, duas positivas e uma negativa.
e) três raízes reais, duas negativas e uma positiva.

10. (EFOMM) Dividindo-se o polinômio $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + mx + t$ por $g(x) = x^2 + 2$, obtém-se resto $r(x) = 4x - 2$. Nessas condições, m e t são números reais tais que:
a) m = -3 e t = 6
b) m = -2 e t = -10
c) m = -1 e t = -2
d) m = 1 e t = -5
e) m = 2 e t = 10

11. (EFOMM) No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$, obtém-se um polinômio P(x) cujos coeficientes somam 32. Considerando que a soma dos coeficientes de um polinômio P(x) é igual a P(1). Se 0 e -1 são raízes de P(x), estão a soma de a + b + c é igual a:
a) -1/2
b) -1/4
c) 1/2
d) 1
e) 3/2

12. (EFOMM) Analise as afirmativas abaixo, sendo $z \in \mathbb{C}$:

I. Se $w = \dfrac{3i + 6\bar{z} - iz^2}{2 + 2\bar{z}^2 + 3iz + 3|z|^2 + |z|}$ então podemos afirmar que $\bar{w} = \dfrac{-3i + 6z + i\bar{z}^2}{2 + 2z^2 - 3i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + |\bar{z}|}$.

II. Dado $|z - 3i| = 2$ podemos afirmar que o lugar geométrico dos valores de z que satisfazem a igualdade é uma circunferência de centro (0;3) e raio 2.

III. A forma trigonométrica de z = 6i e z = $6\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + i\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$.

IV. Sabe-se que -1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$. Logo, as outras raízes são números inteiros.

a) As afirmativas I e IV são verdadeiras.
b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
c) As afirmativas II e IV são falsas.
d) As afirmativas I e II são verdadeiras.
e) Apenas a afirmativa II é falsa.

13. (EFOMM) Para que valor de K o polinômio $P(x) = Kx^3 + x^2 - 5$ é divisível por $x + 1/3$?

a) – 132
b) – 100
c) 132/100
d) 100
e) 132

14. (EFOMM) Dadas as relações de Girard abaixo, assinale somente a alternativa que estiver correta de acordo com a equação $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 1 = 0$:

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2/3$
b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 5/3$
c) $x_1x_2x_3x_4 = 1$
d) $x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = 0$
e) $x_1x_3 + x_2x_4 = -1/3$

15. (EFOMM) Determine as raízes da equação $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$, sabendo-se que elas estão em P.G.

a) $S = \{1, 2, 4\}$
b) $S = \{2, 3, 4\}$
c) $S = \{2, 3, 6\}$
d) $S = \{2, 4, 6\}$
e) $S = \{2, 4, 8\}$

16. (EFOMM) Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$ calcule $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} + \dfrac{1}{r_3^2}$.

a) 3/2
b) 2
c) 17/4
d) 17
e) -1/2

17. (EFOMM) Calcule a e b, de modo que $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}=\frac{2x+6}{x^2-1}$:

a) a = 2 e b = 4
b) a = 2 e b = -4
c) a = -2 e b = 4
d) a = -2 e b = -4
e) a = 2 e b = -2

18. (EFOMM) Que termo se deve acrescentar ao binômio $\frac{x^2}{4}+\frac{b^3x}{3}$ de modo a se obter um trinômio que seja um quadrado perfeito.
a) $b^6/3$
b) $b^4/9$
c) $b^6/2$
d) $b^3/3$
e) $b^6/9$

19. (EFOMM) As raízes da equação $x^3+mx^2+nx=0$ formam uma progressão aritmética de razão 2. O valor de m + n é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

20. (EFOMM) Se o resto da divisão do polinômio $P(x)=2x^n+5x-30$ por $Q(x)=x-2$ é igual a 44, n é igual a:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

21. (EFOMM) O valor de m na equação $x^2-6x+m=0$ a fim de que uma raiz seja o dobro da outra é:
a) m = 12
b) m = 8
c) m = 5
d) m = 4
e) m = 3

22. (EFOMM) Dividindo-se o polinômio $f=-2x^3+4x^2+kx+t$ onde k, t $\in \Re$, por x + 1, obtém-se o resto 12. Se f é divisível por x - 2, então k + t é igual a?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

23. (EFOMM) Sendo $P(x) = bx^2 - ax + 6$ e $Q(x) = ax^3 - bx^2 + 3x - 1$, o valor de a + b, para $P(2) = Q(-1) = 0$ é:

a) 3/2
b) -6
c) 2
d) -5/3
e) -4

24. (EFOMM) O valor de k para que a divisão de $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2kx + 2$ por $2x^2 - 1$ seja exata é:

a) 1/2
b) -2
c) -1/2
d) 2
e) 6

25. (EFOMM) Se o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$ é divisível pelo polinômio $Q(x) = px + q$, então:

a) $bpq = p^2c + q^2a$
b) $bpq = a^2c$
c) $a + b + c = p + q$
d) $a(p+q)^2 + b(p+q) + c = 0$
e) $abc = pq$

26. (EFOMM) O polinômio $P(x) = x^4 - mx^3 + nx^2 + x - 1$ é divisível por $Q(x) = x^2 + x + 1$. O quociente da divisão é o polinômio:

a) $x^2 + x + 1$
b) $x^2 - x - 1$
c) $x^2 + 2x - 1$
d) $x^2 - 2x - 1$
e) $x^2 - 2x + 1$

27. (EFOMM) Um polinômio $P(x)$ dividido por $(x - 2)$ da resto 13, e dividido por $(x + 2)$ da resto 5. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x^2 - 4)$ é:

a) $x - 13$
b) $x - 5$
c) $2x + 9$
d) $x + 18$
e) $2x - 1$

28. (EFOMM) Se $P(x) = x^4 + ax^2 + b$ é divisível por $Q(x) = x^2 + 5x + 6$. Então a + b é:

a) 5
b) 30
c) 23
d) 36
e) 12

29. (EFOMM) A solução do sistema: $\begin{cases} x+y+zw=7 \\ xy+xz+xw+yz+yw+zw=4 \\ xyz+xyw+xzw=6 \\ xyzw=1 \end{cases}$, pode ser representada pelas raízes do polinômio:

a) x^3+6x^2+4x+7
b) x^3-6x^2+4x-7
c) $2x^4-14x^3+8x^2-12x+2$
d) $7x^4-4x^3+6x^2+x$
e) $x^4+7x^3+4x^2+6x$

30. (EFOMM) Sabendo que $\frac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x)=2x^3-3x^2-9x+10$, a soma das outras raízes é igual a: a

a) -2
b) 0
c) 10
d) 1
e) -1

31. (EFOMM) Assinale a alternativa que apresenta o polinômio P de grau mínimo, com coeficientes reais, de modo que P(i) = 2 e P(1+i) = 0.

a) $\frac{1}{5}\left(x^2-2x+2\right)$
b) $\frac{2}{5}\left(x^2-2x+2\right)$
c) $\frac{2}{5}\left(x^2-2x+3\right)$
d) $\frac{1}{5}\left(x^2-2x+2\right)$
e) $\frac{2}{3}\left(x^2-2x+3\right)$

32. (EFOMM) Considere a equação $x^4-2ax^3+9ax^2-6ax+9a=0$, sabendo-se que **<u>a</u>** é raiz dupla $a\neq 0$. Determine o valor de a.

a) -1
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

33. (EFOMM) Sobre uma equação linear de grau n é **INCORRETO** afirmar:

a) terá n raízes complexas.
b) se n for ímpar, sempre terá, ao menos, uma raiz real.
c) se o número complexo z = a +bi, $b\neq 0$. for raiz, então seu conjugado também o será.
d) a equação não pode ter raízes repetidas.
e) uma equação acima de grau 4 pode ter todas as raízes reais.

Gabarito

01. a	02. e	03. c	04. d	05. b	06. d	07. d	08. d	09. e	10. b	11. d	12. a
13. a	14. d	15. e	16. d	17. c	18. e	19. b	20. d	21. b	22. c	23. e	24. c
25. a	26. c	27.	28.	29. c	30. e	31. x	32. d	33. d			

TESTES DE APRENDIZAGEM – POLINÔMIOS

01. (AFA) Considere os polinômios
$Q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $P(x) = x^3 - 3x^2 - ax + b$ sendo a e b números reais tais que $a^2 - b^2 = -8$
Se os gráficos de Q(x) e P(x) têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então é INCORRETO afirmar sobre as raízes de P(x) que
a) podem formar uma progressão aritmética.
b) são todas números naturais.
c) duas são os números a e b
d) duas são números simétricos.

02. (AFA) Considere o polinômio $p(x) = ax^4 + bx^3 + 2x^2 + 1$, $\{a, b\} \subset \Re$ e marque a alternativa FALSA.
a) x = 0 não é raiz do polinômio p(x)
b) Existem valores distintos para a e b tais que x = 1 ou x = −1são raízes de p(x).
c) Se a = 0 e b = 3, o resto da divisão de p(x) por $3x^2 - x + 1$ é zero.
d) Se a = b = 0 tem-se que $x = -\frac{1}{2}i$ é uma raiz de p(x), considerando que $i^2 = -1$

03. (AFA) A equação $x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ possui as raízes m, p e q. O valor da expressão $\frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp}$ é
a) -2
b) - 3
c) 2
d) 3

04. (AFA) As raízes da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$ formam uma progressão geométrica. Se a, $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ é igual a:
a) $\frac{2}{3}$
b) 3
c) $-\frac{3}{2}$
d) $-\frac{1}{3}$

05. (AFA) O polinômio $P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x$ tem uma raiz dupla. Em relação à P(x) é correto afirmar que
a) apenas uma de suas raízes é negativa.
b) a sua raiz dupla é negativa.
c) três de suas raízes são negativas.
d) nenhuma de suas raízes é negativa.

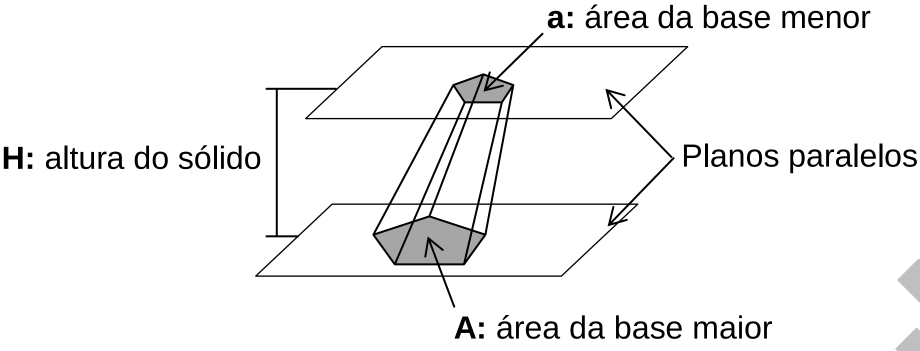
06. (AFA) Sejam $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$ uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, respectivamente, ambas com a mesma soma dos termos e ambas crescentes.
Se a razão r da progressão aritmética é o dobro da razão q da progressão geométrica, então, o produto r.q é igual a
a) 15
b) 18
c) 21
d) 24

07. (AFA) O polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 12$ é tal que $P(x) = 0$ admite as raízes x_1, x_2 e x_3. Se $x_1 \cdot x_2 = -3$ e $x_2 + x_3 = 5$, então é correto afirmar que
a) $P(m) = 0$
b) $m - n = -13$
c) $m \cdot n = 20$
d) $n - 2m = -7$

GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

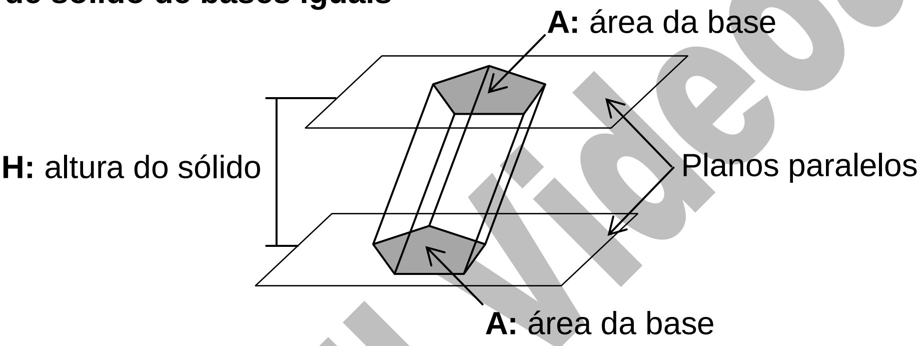
CONHECIMENTOS BÁSICOS

Volume de sólido de bases diferentes ou tronco



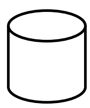
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\left(A + a + \sqrt{Aa}\right) \cdot H}$$

Volume de sólido de bases iguais

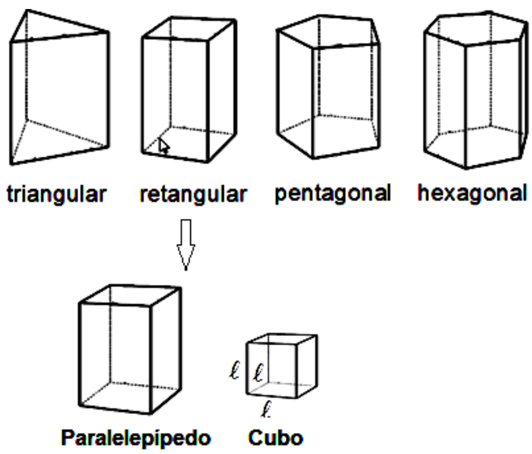


$$\boxed{V = A \cdot H}$$

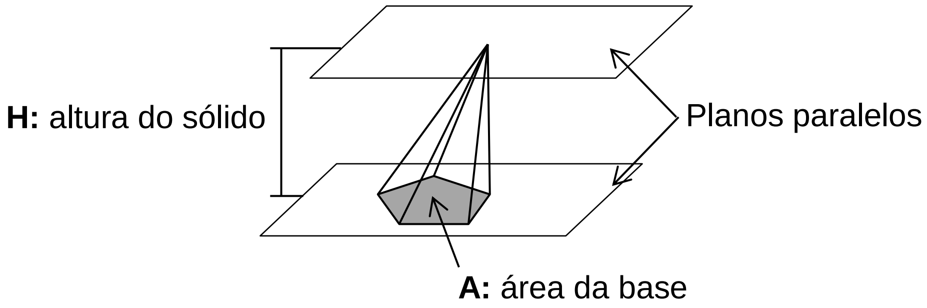
Exemplos:
Base circular: cilindro



Base um polígono: prisma

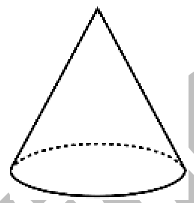


Volume de sólido de uma base

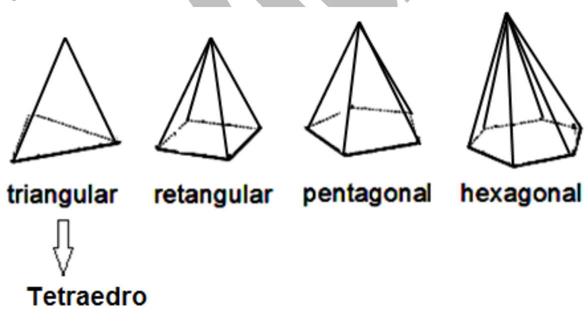


$$\boxed{V = \frac{1}{3} A \cdot H}$$

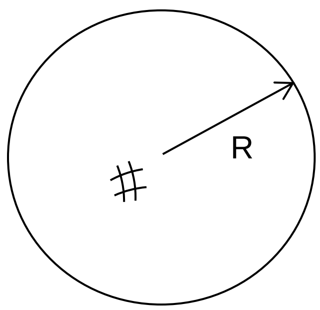
Exemplos
Base circular: cone



Base um polígono: pirâmide

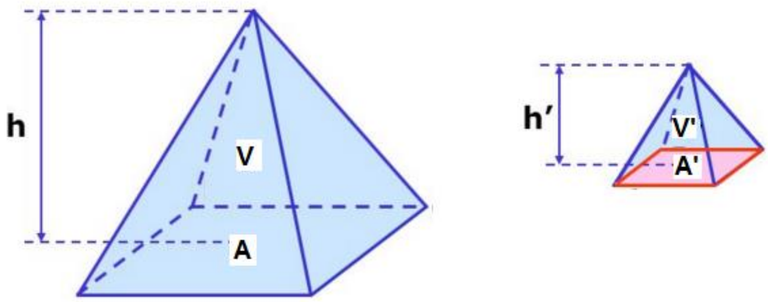


Esfera



$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \quad \text{e} \quad \boxed{A = 4 \cdot \pi \cdot R^2}$$

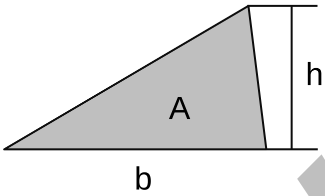
Semelhança de sólidos

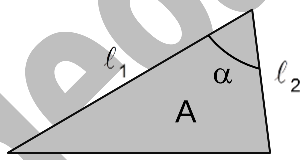


$$\boxed{\frac{h}{h'}=k,\ \frac{A}{A'}=k^2 \text{ e } \frac{V}{V'}=k^3}$$

FERRAMENTAS INDISPENSÁVEIS

Triângulo

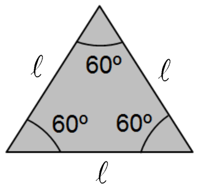




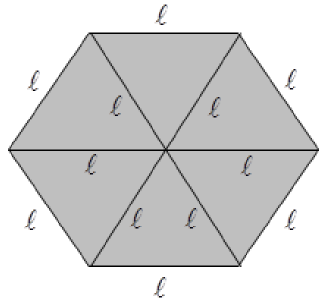
$$\boxed{A=\frac{b\cdot h}{2}}$$

$$\boxed{A=\frac{\ell_1\cdot\ell_2}{2}\operatorname{sen}\alpha}$$

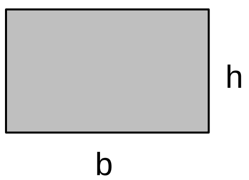
Atenção!
Triângulo equilátero



Hexágono regular



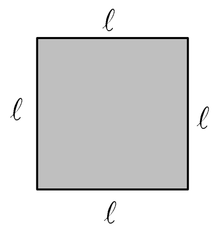
Retângulo



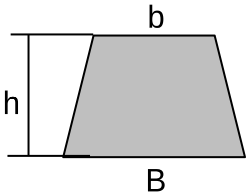
$$\boxed{A=b\cdot h}$$

Notas:

Quadrado

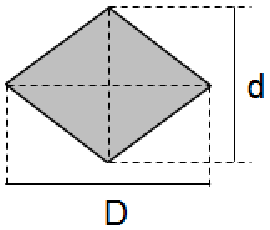


Trapézio



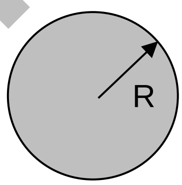
$$\boxed{A = \frac{(B+b)h}{2}}$$

Losango



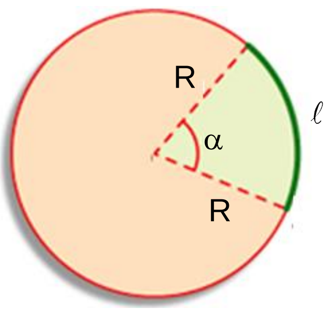
$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Círculo



$\boxed{A = \pi R^2}$ e $\boxed{C = 2\pi R}$

Relação entra ângulo(α) , arco(ℓ) e raio (R)

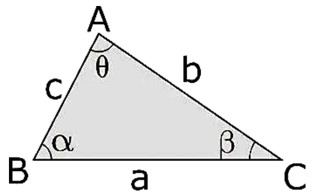


$$\ell \underset{\text{rad}}{=} \alpha \cdot R$$

$$\pi \text{ rad} \rightarrow 180^o$$

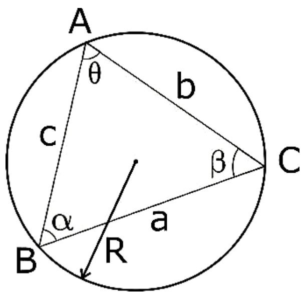
Relações trigonométricas num triângulo:

Lei dos Cossenos:



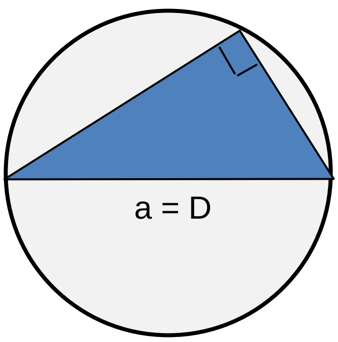
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$$

Lei dos Senos:



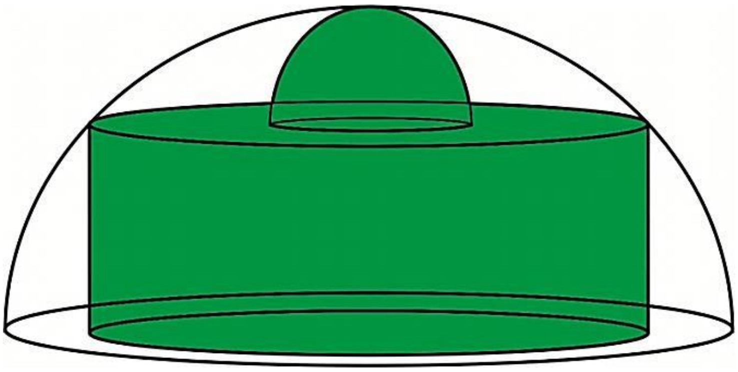
$$\frac{a}{\text{sen}\theta} = \frac{b}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\beta} = 2R$$

Dica valiosíssima ☞ Quando uma circunferência está circunscrita a um triângulo retângulo seu diâmetro coincide com a hipotenusa deste triângulo retângulo.



Testes de fixação

01. (EFOMM) Constrói-se um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio 4 m. O depósito é formado por uma semiesfera de raio 1 m sobreposta a um cilindro circular, dispostos conforme a figura. Então a área da superfície total de V, em m², é igual a:



a) $\left(20+14\sqrt{2}\right)\pi$
b) $\left(17+4\sqrt{10}\right)\pi$
c) $\left(8+4\sqrt{7}\right)\pi$
d) $\left(21+7\sqrt{6}\right)\pi$
e) $\left(15+6\sqrt{7}\right)\pi$

02. (EFOMM) Um cubo de lado 2a possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

a) $\dfrac{\pi}{6}$
b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$
c) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$
d) $\dfrac{2\pi}{6\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{1}{2}$

03. (EFOMM) Num triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida 50°. Calcule o ângulo interno do vértice A.
a) 110°
b) 90°
c) 80°
d) 50°
e) 20°

04. (EFOMM) Qual é a área da circunferência inscrita em um triângulo equilátero, sabendo-se que esse triângulo está inscrito em uma circunferência de comprimento igual a 10π cm?

a) $\frac{75\pi}{4}$

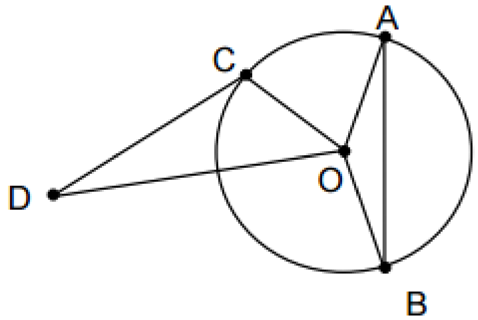
b) $\frac{25\pi}{4}$

c) $\frac{5\pi}{2}$

d) $\frac{25\pi}{16}$

e) $\frac{5\pi}{4}$

05. (EFOMM) Determine o comprimento do menor arco AB na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento OD mede 12 cm, os ângulos CÔD = 30° e OÂB = 15° e que a área do triângulo CDO é igual a 18 cm^2.



a) 5π cm
b) 12 cm
c) 5 cm
d) 12π cm
e) 10π cm

06. (EFOMM) Num quadrado de lado **a**, inscreve–se um círculo; nesse círculo se inscreve um novo quadrado e nele um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, tem-se que a soma dos raios de todos os círculos é:

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

b) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

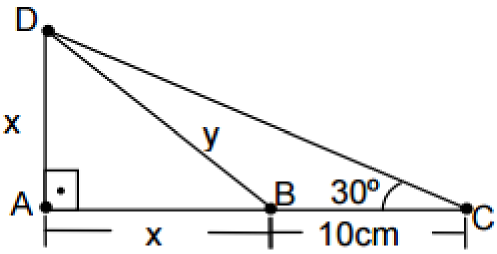
d) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

e) $2a\left(\sqrt{2}-1\right)$

07. (EFOMM) Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médios de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

a) $2^{-\frac{9}{2}}$
b) $2^{-\frac{25}{2}}$
c) $2^{-\frac{45}{2}}$
d) 2^{-45}
e) 2^{-25}

08. (EFOMM) Determine o perímetro do triângulo ABD, em cm, representado na figura abaixo:



a) $5\sqrt{3}+5$
b) $5\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$
c) $20+4\sqrt{5}$
d) 45
e) 50

09. (EFOMM) Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta a, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

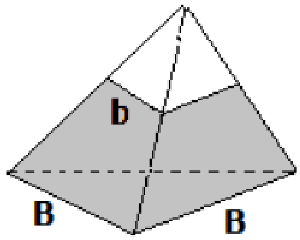
a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$
c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$
d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

10. (EFOMM) Um tanque em forma de cone circular de altura h encontra-se com vértice para baixo e com eixo na vertical. Esse tanque, quando completamente cheio, comporta 6000 litros de água. O volume de água, quando o nível está a $\frac{1}{4}$ da altura, é igual a

a) 1500 litros.
b) 3500 litros.
c) 3375 litros.
d) 3000 litros.
e) 1250 litros.

11. (EFOMM) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar em certo momento exatamente $\frac{1}{6}$ da superfície de um planeta. Determine a que distância ele está da superfície desse planeta. Considere o raio do planeta igual a 12800 km.
a) 1300 km.
b) 1500 km.
c) 1600 km.
d) 3200 km.
e) 6400 km

12. (EFOMM) A área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular cujas bases tem áreas $25\sqrt{3}\,cm^2$ e $4\sqrt{3}\,cm^2$ e altura 4cm é, em cm^2 ,



a) $19\sqrt{3}$.
b) $25\sqrt{3}$.
c) $15\sqrt{19}$
d) $21\sqrt{19}$
e) $25\sqrt{15}$

13. (EFOMM) Considere um triângulo retângulo de catetos 9 cm e 12 cm. A bissetriz interna relativa à hipotenusa desse triângulo mede:
a) $\frac{36}{7}\sqrt{2}$
b) $\frac{25}{7}\sqrt{2}$
c) $\frac{4}{15}\sqrt{2}$
d) $\frac{7}{5}\sqrt{2}$
e) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

14. (EFOMM) Considere a equação de incógnita real x:

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x$$

Se $x_0 \in (0;\pi)$ é uma das soluções e x_0 centímetros é a medida da diagonal de um cubo, então área da superfície total desse cubo, em cm^2, é igual a

a) $3\pi^2 / 8$
b) $\pi^2 / 2$
c) 6
d) $27\pi^2 / 8$
e) $6\pi^2$

15. (EFOMM) Os números que exprimem o cateto, a hipotenusa e a área de um triângulo retângulo isósceles estão em progressão aritmética, nessa ordem. O cateto do triângulo, em unidades de comprimento, vale:

a) $2\sqrt{2}-1$
b) $2\sqrt{2}-2$
c) $4\sqrt{2}-2$
d) $4\sqrt{2}-4$
e) $4\sqrt{2}-1$

16. (EFOMM) Um triângulo obtusângulo ABC tem 18 cm de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente (AB,AC,BC). Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, **r** e **R**. Se $\text{sen}\hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{sen}\hat{B} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto **r.R**, em cm², é igual a:

a) 35/9
b) $6\sqrt{6}$
c) $3\sqrt{15}$
d) 16/3
e) 1

17. (EFOMM) As medidas dos lados AC, BC e AB de um triângulo ABC formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade:

$$\text{sen}^2\hat{A} + \text{sen}^2\hat{B} - \text{sen}^2\hat{C} - 2\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = \cos^2\hat{C}$$

Se o perímetro do triângulo ABC mede $3\sqrt{3}\,m$, sua área, em m², é igual a:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
b) 3/4
c) 9/8
d) 2
e) 4

18. (EFOMM) Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médios de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é:

a) $2^{-\frac{9}{2}}$
b) $2^{-\frac{25}{2}}$
c) $2^{-\frac{45}{2}}$
d) 2^{-45}
e) 2^{-25}

19. (EFOMM) O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais $a_1, a_2, \cdots, a_n$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, com primeiro termo 2 e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:

a) $\left]-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$
b) $\left]1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$
c) $\left]1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right[$
d) $\left]1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right[$
e) $\left]1, 1+\sqrt{5}\right[$

20. (EFOMM) Num quadrado de lado a, inscreve–se um círculo; nesse círculo se inscreve um novo quadrado e nele um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, tem-se que a soma dos raios de todos os círculos é:

a) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$
b) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$
c) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$
d) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$
e) $2a\left(\sqrt{2}+1\right)$

21. (EFOMM) Considere a função f, definida por $f(x) = -\frac{2}{x}$ e duas circunferências C_1 e C_2, centradas na origem. Sabe-se que C_1 tangencia o gráfico de f, e que um ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ pertence a C_2 e ao gráfico de f. Nessas condições, a área da coroa circular, definida por C_1 e C_2, é igual a:

a) $\frac{65}{4}\pi$

b) $\frac{49}{4}\pi$

c) $\frac{25}{4}\pi$

d) $\frac{9}{4}\pi$

e) $\frac{1}{4}\pi$

GABARITO

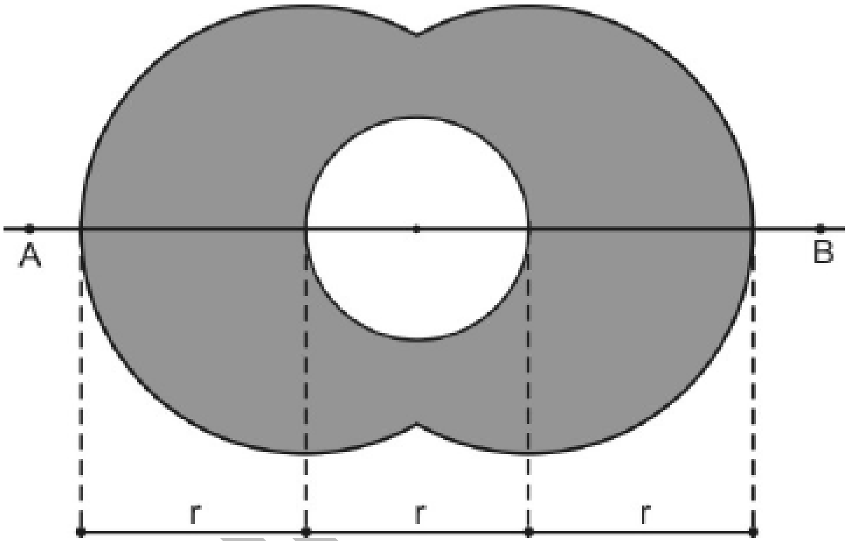
01. e	02. b	03. c	04. b	05. a	06. c	07. e	08. b	09. e	10. x	11. e	12. d
13. a	14. b	15. c	16. d	17. c	18. e	19. b	20. c	21. b			

TESTES DE APRENDIZAGEM – GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

01. (AFA) Considere uma pirâmide regular ABCDV de base ABCD. Sendo $2\sqrt{2}$ cm a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}$ cm a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de A à aresta lateral VC é

a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) 4
d) $\sqrt{3}$

02. (AFA) Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A expressão que fornece o valor da área sombreada é

a) $\dfrac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}r^3$
b) $\dfrac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12}r^2$
c) $\dfrac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9}r^2$
d) $\dfrac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}r^2$

03. (AFA) Considere a região E do plano cartesiano dada por

$$E = \begin{cases} \dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{3} \le 1 \\ y + x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de 270° em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a:

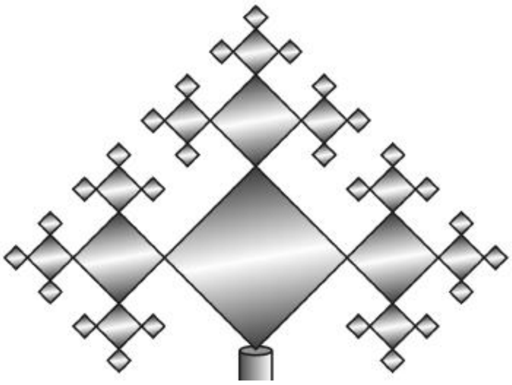
a) $26\pi / 3$
b) 26π
c) $13\pi / 2$
d) $13\pi / 3$

04. (AFA) Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre um tubo cilíndrico.
A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres do quadrado foi construído um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ metro.

2ª) Em cada um dos vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado $\frac{1}{4}$ de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior.
A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.



Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$

05. (AFA) Considere um sólido geométrico obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC entorno da reta que passa por C e é paralela ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se que este triângulo é isósceles, com $\overline{AC} = \overline{BC} = R\sqrt{2}$ m, $\overline{AB} = 2R$ m (sendo R uma constante real não nula), e que o volume do sólido obtido é $V = 4\pi\sqrt{3}$ m³.
A medida de R, em metros, é igual a:

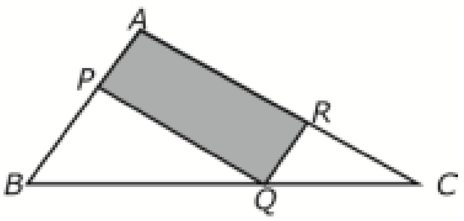
a) $\sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{3}$

06. (AFA) Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$ e os seguimentos p$\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Sabendo-se que $\overline{BQ} = 3$ cm, $\overline{QC} = 1$ cm e que a área do triângulo ABC é 8 cm², então a área do paralelogramo hachurado, em cm², é igual a



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

07. (AFA) Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\dfrac{10\sqrt{3}}{7}$ cm³, então o volume dessa pirâmide, em cm³, é igual a

a) $\dfrac{45}{7}$

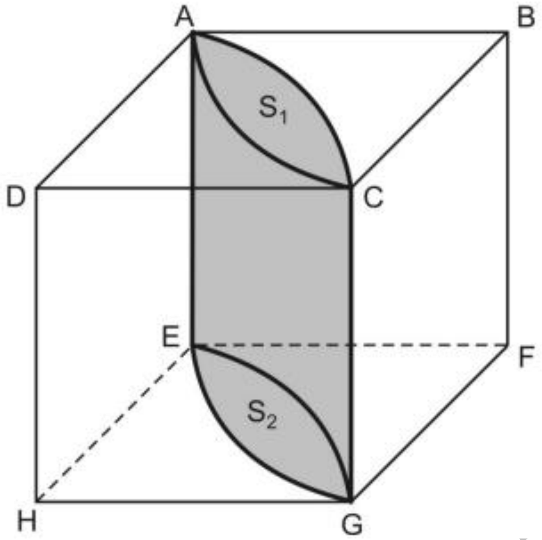
b) $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$

c) $\dfrac{30\sqrt{3}}{7}$

d) $\dfrac{135}{7}$

08. (AFA) Seja o quadrado ABCD e o ponto E pertencente ao segmento $\overline{AB}$. Sabendo-se que a área do triângulo ADE, a área do trapézio BCDE e a área do quadrado ABCD formam juntas, nessa ordem, uma Progressão Aritmética (P.A) e a soma das áreas desses polígonos é igual a 800 cm^2, tem-se que a medida do segmento $\overline{EB}$
a) é fração própria.
b) é decimal exato.
c) é decimal não-exato e periódico.
d) pertence ao conjunto $A = \Re_+^* - \mathbb{Q}_+$

09. (AFA) Na figura abaixo, tem-se um cubo cuja aresta mede k centímetros; as superfícies S_1 e S_2, contidas nas faces desse cubo, são limitadas por arcos de circunferências de raio k centímetros e centros em, respectivamente, D e B, H e F.



O volume do sólido formado por todos os segmentos de reta com extremidades em S_1 e S_2, paralelos a $\overline{CG}$ e de bases S_1 e S_2, é, em cm^3, igual a:

a) $\dfrac{k^3(\pi-1)}{2}$

b) $\dfrac{k^3(\pi-2)}{2}$

c) $\dfrac{k^3(\pi-1)}{4}$

d) $\dfrac{k^3(\pi-2)}{4}$

10. (AFA) Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.
Dessa maneira, esse triângulo NÃO é
a) acutângulo.
b) equilátero.
c) obtusângulo.
d) isósceles.

11. (AFA) Uma pirâmide regular ABCV, de base triangular ABC, é tal, que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede 3 cm. Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BCV é igual a

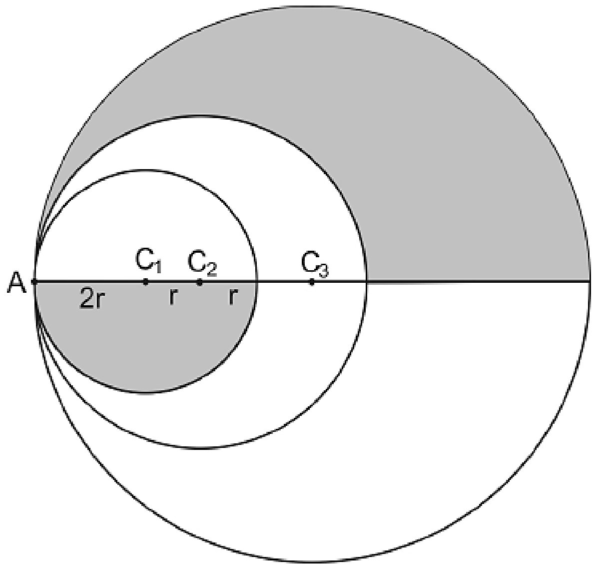
a) $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

12. (AFA) Conforme a figura abaixo, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.



Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, 2r e 3r, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

a) $\frac{55}{8}\pi r^2$

b) $\frac{29}{4}\pi r^2$

c) $\frac{61}{8}\pi r^2$

d) $8\pi r^2$

13. (AFA) Os vértices de um triângulo ABC são os centros das circunferências:

(λ_1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$

(λ_2) $4x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 15 = 0$

(λ_3) $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 8$

O tetraedro cuja base é o triângulo ABC e cuja altura, em metros, é igual à média aritmética dos quadrados dos raios das circunferências acima, também em metros, possui volume, em m^3, igual a

a) $\frac{21}{2}$

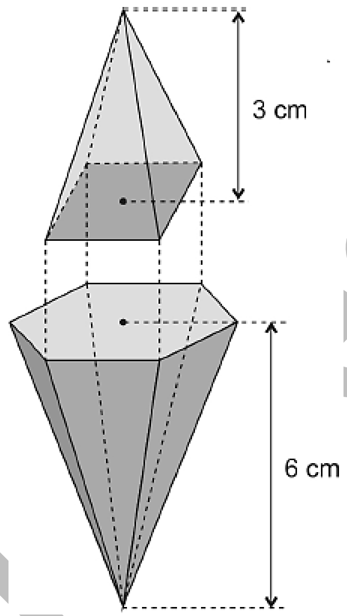
b) $\frac{21}{4}$

c) $\frac{49}{2}$

d) $\frac{49}{4}$

14. (AFA) Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.
Dessa maneira, esse triângulo NÃO é
a) acutângulo.
b) equilátero.
c) obtusângulo.
d) isósceles.

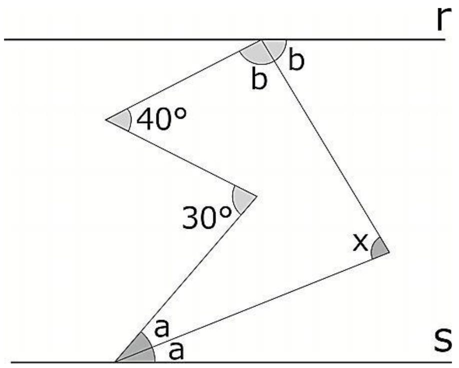
15. (AFA) Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3 cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura.



Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}$ cm, então, o volume do sólido obtido, em cm^3, é igual a
a) $15\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $25\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$

Exercícios de Propostos

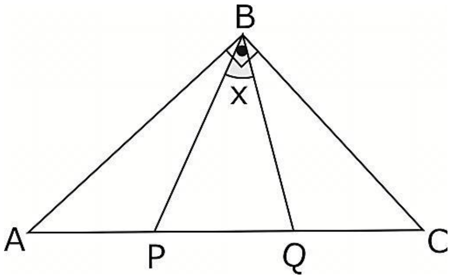
01. Na figura mostrada abaixo temos r //s. Determine o valor de x.



A) 85° B) 80° C) 75°
D) 60° E) 45°

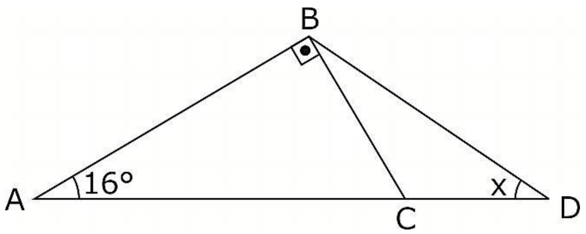
02. Na figura abaixo temos AB = BC e AP = PQ = QC. Determine o valor de x.

Dado: $\text{sen}18{,}5^\circ = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



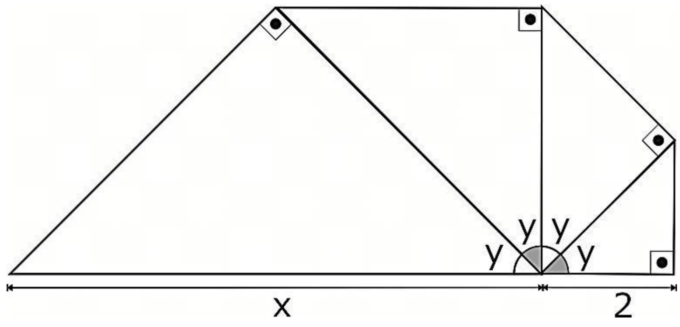
A) 26,5 ° B) 18,5° C) 37°
D) 53° E) 45°

03. Calcule o ângulo x, sabendo que AC = 2(BD).



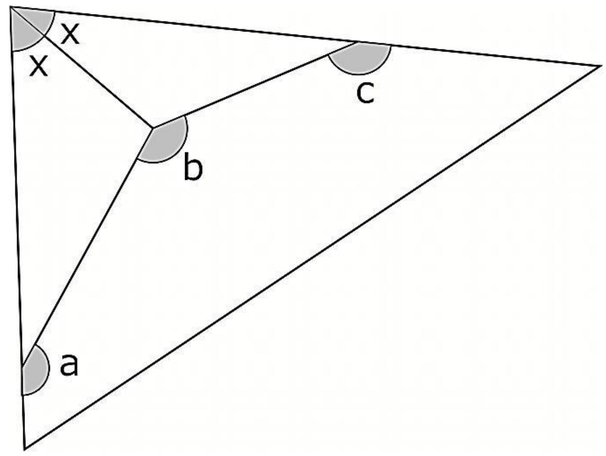
A) 15° B) 16° C) 24°
D) 32° E) 8°

04. Na figura abaixo, determine x.



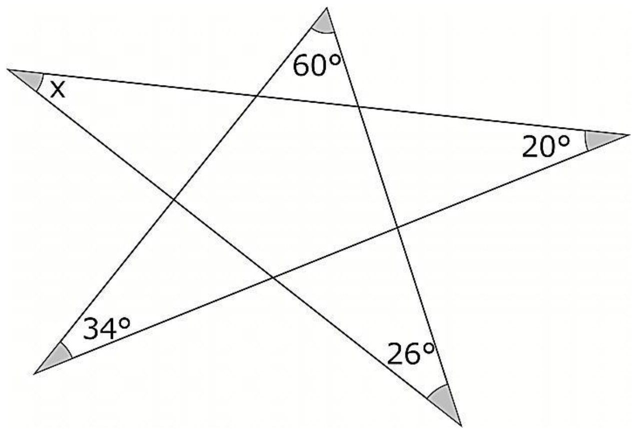
A) 6 B) 8 C) 10
D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

05. Determine x, se a + b + c = 400°.



A) 30° B) 40° C) 15°
D) 20° E) 25°

06. Calcule x na figura abaixo.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 45° E) 60°

07. O suplemento da diferença entre o suplemento e o complemento de um ân-

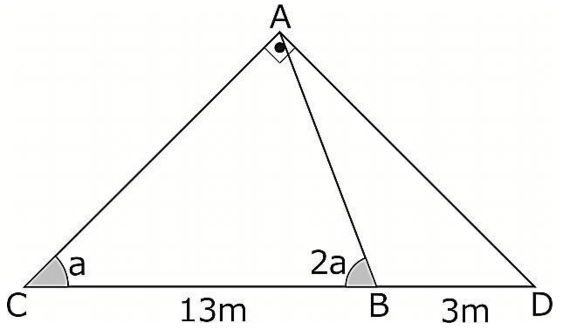
gulo é igual a 2/3 da diferença entre o suplemento do ângulo e o suplemento do suplemento desse mesmo ângulo. Calcule a medida desse ângulo.

A) 20° B) 30° C) 25°
D) 22,5° E) 40°

08. Se ao suplemento de um ângulo for diminuído o dobro do complemento, encontramos 3/7 do suplemento desse ângulo. Calcule a medida desse ângulo.

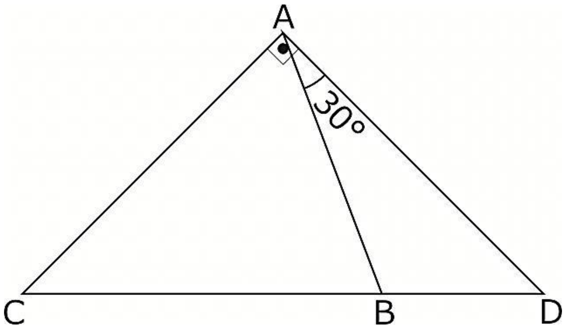
A) 50° B) 45° C) 60°
D) 48° E) 54°

09. Calcule o comprimento de AB na figura abaixo, sabendo que BC = 13 m e BD = 3m.



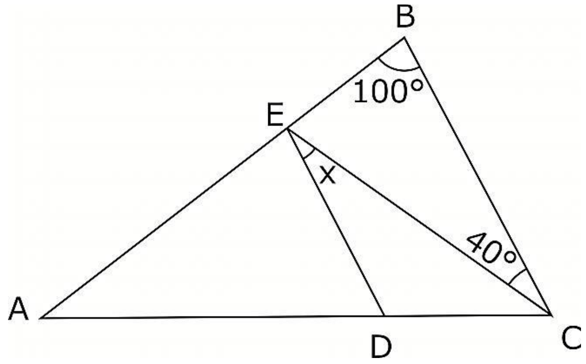
A) 6m B) 7m C) 8m
D) 9m E) 10m

10. Na figura abaixo, calcule AB, sabendo que AD = 2 e $AC = \sqrt{3}$.



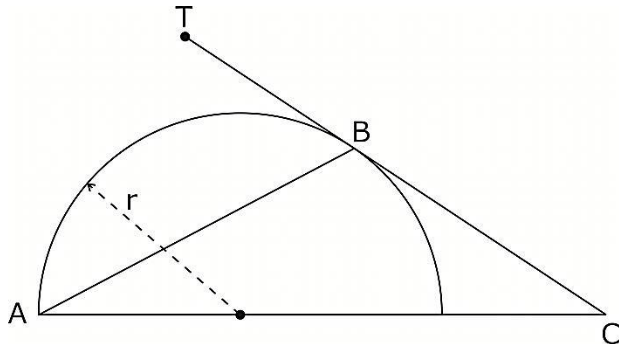
A) $\frac{2}{5}\sqrt{2}$ B) $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ C) $\frac{2}{7}\sqrt{3}$
D) $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ E) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

11. Na figura abaixo, calcule x, se AE = EC e EB = CD.



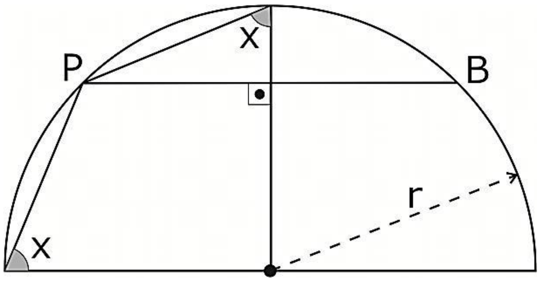
A) 30° B) 20° C) 40°
D) 35° E) 25°

12. Na figura abaixo, calcule a medida do ângulo BCA, se o ângulo TBA mede 55°, B é ponto de tangência e r é o raio da semicircunferência.



A) 15° B) 30° C) 35°
D) 20° E) 10°

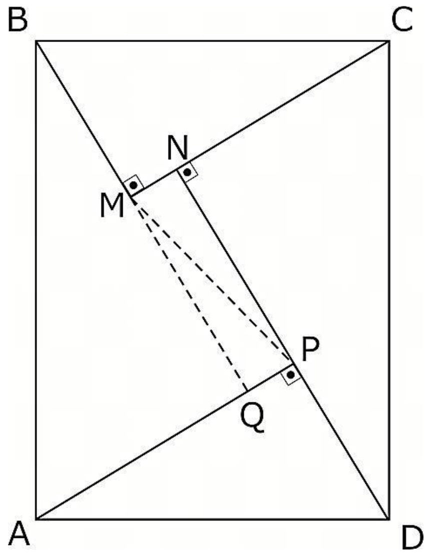
13. Na figura abaixo, calcule a medida do arco menor PB.



A) 140° B) 120° C) 90°

D) 100° E) 135°

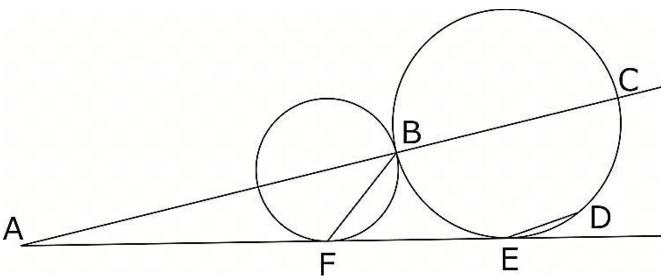
14. Se ABCD é um retângulo, AB = 25, BC = 20 e PD = 12, calcule (MP)².



A) 60 B) 55 C) 81

D) 80 E) 65

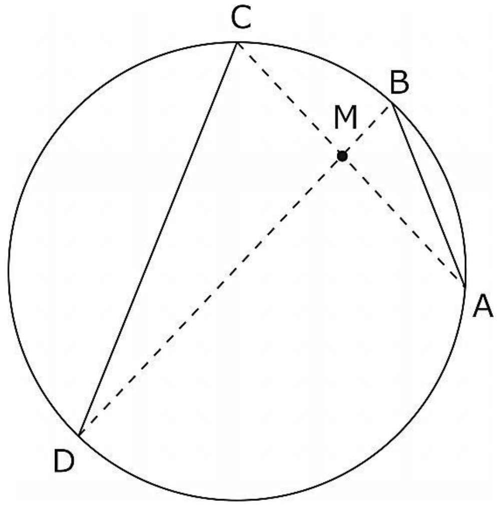
15. Na figura abaixo, calcule a medida do arco BED, se o ângulo BAE mede 20°, AF = FB e AC é paralela à ED (B, F e E são pontos de tangencia).



A) 70° B) 140° C) 150°

D) 100° E) 120°

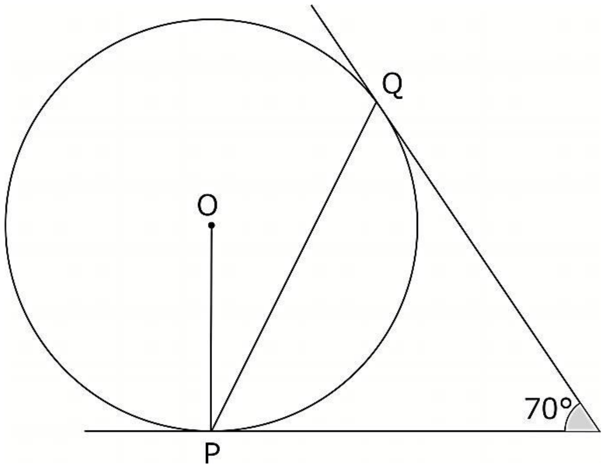
16. Na figura abaixo temos que AB é o lado de um hexágono regular inscrito e CD, o lado de um triângulo equilátero inscrito. Determine o ângulo AMD.



A) 80° B) 100° C) 110°

D) 90° E) 70°

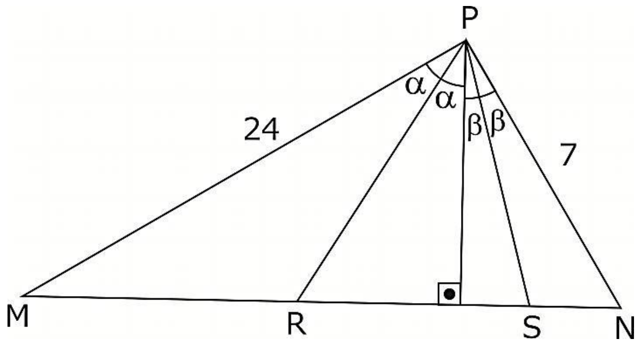
17. Dada figura, determine o ângulo OPQ, se O é o centro da circunferência e P e Q são pontos de tangência.



A) 45° B) 35° C) 30°

D) 40° E) 50°

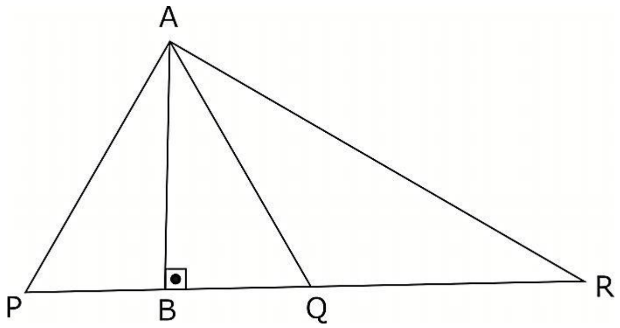
18. Na figura abaixo, tem-se um triângulo retângulo reto em P. Determine o comprimento RS.



A) 4 B) 8 C) 10

D) 7 E) 6

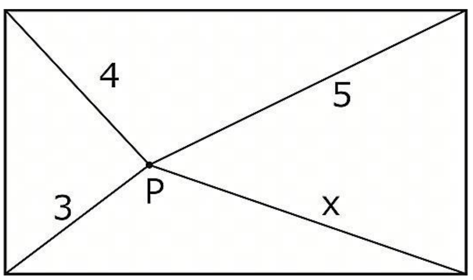
19. No triângulo ABC mostrado abaixo, retângulo em A, determine o comprimento AB, se PQ = 2, QR = 7 e AP = AQ.



A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) 2,5

D) 5 E) 4

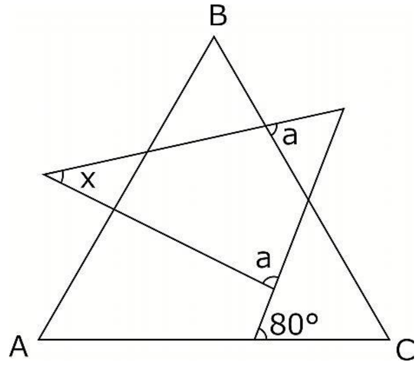
20. No retângulo da figura abaixo, do ponto P traçam-se segmentos aos vértices como mostra a figura abaixo. Determine o comprimento x.



A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$

D) 3,5 E) 5

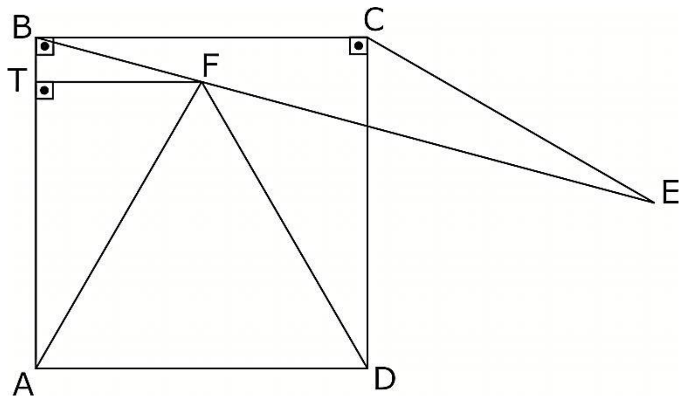
21. Na figura abaixo AB = BC = AC. Determine o valor do ângulo x.



A) 30° B) 40° C) 45°

D) 50° E) 35°

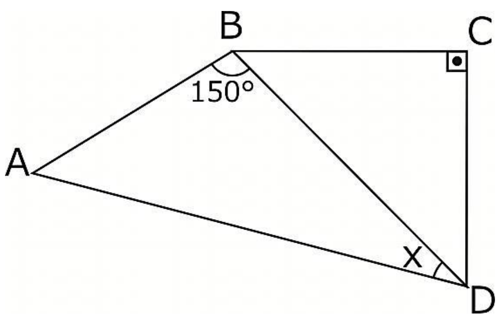
22. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e AFD é um triângulo equilátero. Sabendo que TF = 5cm e CE = 10cm, calcule o comprimento FE.



A) 10cm B) 12cm C) 15cm

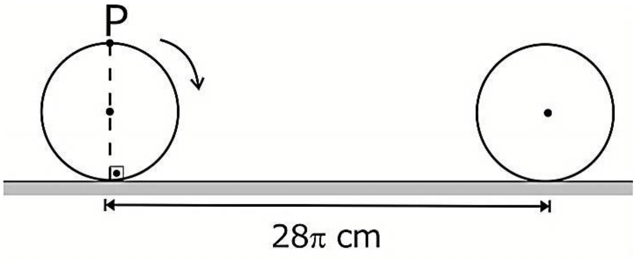
D) $10\sqrt{2}$ cm E) $10\sqrt{3}$ cm

23. Na figura abaixo, calcule x, se AB = BC = CD.



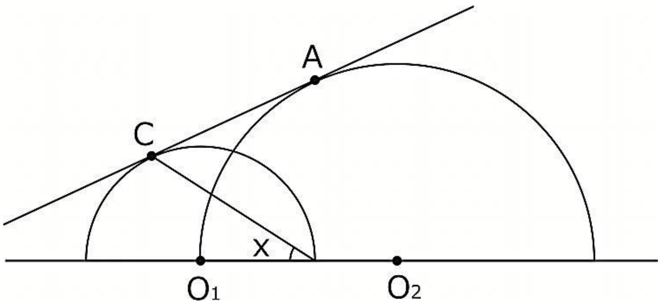
A) 30° B) 45° C) 20°
D) 15° E) 25°

24. Na figura abaixo, tem-se um círculo de diâmetro 2cm. Se o círculo girar, sem escorregar, uma distância de 28πcm, a que distância o ponto P estará do solo?



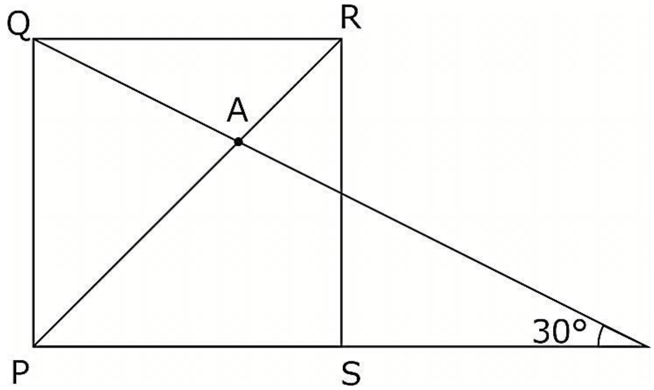
A) 1 cm B) 1/2 cm C) 3/2 cm
D) 2 cm E) 3/4 cm

25. Na figura abaixo, o arco AB mede 100°, O_1 e O_2 são centros das semicircunferências. Sabendo que A e C são pontos de tangência, calcule x.



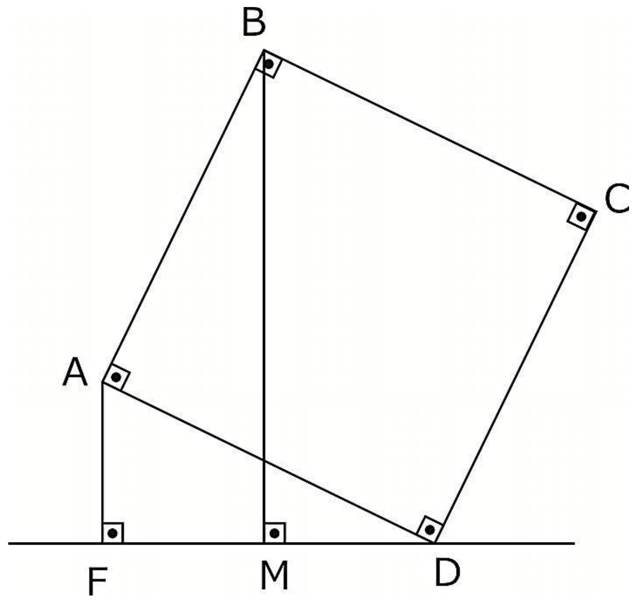
A) 80° B) 50° C) 40°
D) 45° E) 30°

26. Deseja-se que a área da região quadrada PQRS seja $\left(4+2\sqrt{3}\right)$cm², então o segmento AP deverá medir:



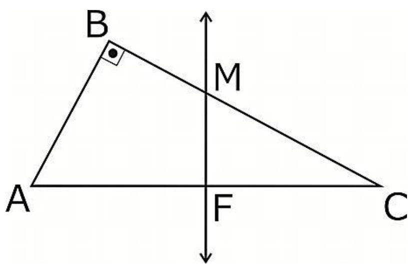
A) $\sqrt{2}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm C) $\sqrt{5}$ cm
D) $\sqrt{6}$ cm E) $\sqrt{7}$ cm

27. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, onde AF = 2m e FD = 5m. Calcule BM.



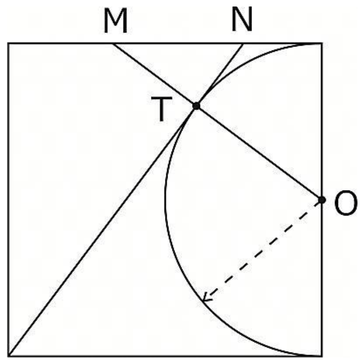
A) 6m B) 8m C) 9m
D) 7m E) 10m

28. Calcule BM, se MF é mediatriz de AC, AC = 12m e BC = 10m.



A) 2,5m B) 3m C) 4m
D) 2m E) 2,8m

29. O lado do quadrado mostrado na figura abaixo mede 12m. Calcule MN, se T é ponto de tangência. Dados: tg26,5° = 0,5 e sen37° = 0,6.



A) 3m B) 4m C) 5m
D) 6m E) 7m

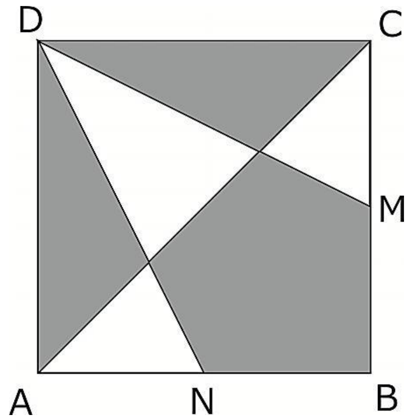
30. Sobre o solo existe um polígono de n lados. Um atirador de cada vértice dá um tiro nos outros vértices. Se o atirador deu um total de 90 tiros, quantos lados tem esse polígono?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

31. Tem-se duas circunferências ortogonais de 5cm e 12cm de raio, então a distância entre seus centros é:

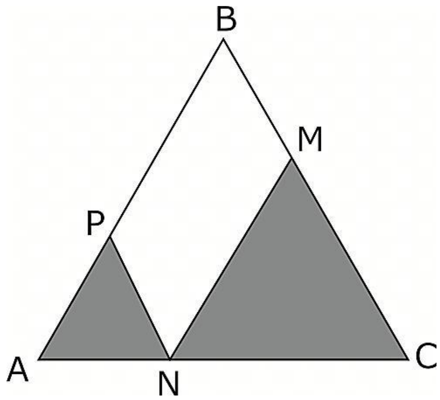
A) 13 B) 10 C) 17
D) 0 E) 9

32. Calcule a área da região sombreada, se ABCD é uma região quadrada de área 120 cm², M e N são pontos médios.



A) 20cm² B) 40cm² C) 60cm²
D) 80cm² E) 70cm²

33. Em um triângulo equilátero ABC, PN é paralelo à BC e MN é paralelo à AB. Determine a razão entre o perímetro da superfície sombreada e o perímetro da região não sombreada.

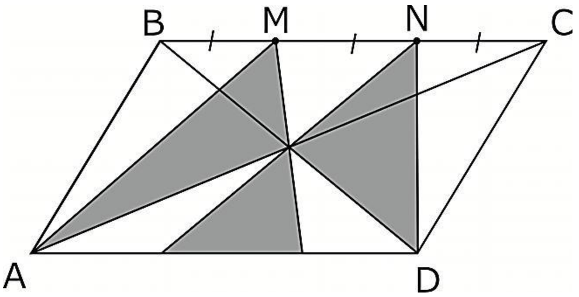


A) 1/2 B) 3/2 C) 2/3
D) 1/4 E) 1/3

34. Em um trapézio retângulo, o perímetro é 18m e o lado maior não paralelo é 7m. Determine a área da região que limita a circunferência inscrita nesse trapézio.

A) π^2m² B) πm² C) $\frac{\pi^2}{2}$m²
D) $\frac{\pi}{2}$m² E) 4πm²

35. Se x é a área do paralelogramo ABCD e BM = MN = NC, então a área da região sombreada é:



A) $\frac{1}{4}x$ B) $\frac{3}{4}x$ C) $\frac{1}{3}x$

D) $\frac{7}{12}x$ E) $\frac{5}{12}x$

36. Seja ABCD um quadrado de lado L, sobre os lados AB e AD, constroem-se triângulos equiláteros EAD e FAB, respectivamente, com E e F internos ao quadrado. Calcule a área do triângulo EFA.

A) $\frac{L^2}{10}$ B) $\frac{L^2}{8}$ C) $\frac{L^2}{6}$

D) $\frac{L^2}{4}$ E) $\frac{L^2}{2}$

GABARITO

1. A	15. B	29. C
2. C	16. D	30. D
3. D	17. B	31. A
4. B	18. E	32. D
5. D	19. A	33. B
6. A	20. B	34. B
7. D	21. B	35. E
8. E	22. D	36. D
9. C	23. A	
10. B	24. D	
11. A	25. C	
12. D	26. D	
13. C	27. D	
14. E	28. E	

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Se um hexágono regular de lado **a** gira em torno de um eixo que une dois vértices diametralmente opostos, a área da superfície gerada vale:

A) $\pi\sqrt{3}a^2$ B) $2\pi a^2$ C) $3\pi a^2$
D) $2\pi\sqrt{3}a^2$ E) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\pi a^2$

02. Calcule o volume de uma pirâmide de base triangular em que duas de suas faces são triângulos equiláteros de lado L e as outras duas faces são triângulos retângulos isósceles.

A) $\dfrac{L^3\sqrt{2}}{12}$ B) $\dfrac{L^3\sqrt{2}}{10}$ C) $\dfrac{L^3\sqrt{2}}{8}$
D) $\dfrac{L^3\sqrt{5}}{12}$ E) $\dfrac{L^3\sqrt{5}}{8}$

03. Em um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero, inscreve-se um cilindro. A razão entre a área lateral do prisma e a área lateral do cilindro é:

A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\pi}$ C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}$
D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

04. As bases de um tronco de cone de revolução são dois círculos de raios 3 e 6, respectivamente. Determine o raio da esfera circunscrita, se a geratriz mede 5.

A) $\dfrac{5\sqrt{96}}{7}$ B) $\dfrac{3\sqrt{97}}{8}$ C) $\dfrac{5\sqrt{96}}{8}$
D) $\dfrac{3\sqrt{96}}{8}$ E) $\dfrac{5\sqrt{97}}{8}$

05. Seja um triângulo equilátero de lado a, onde um de seus lados está sobre o eixo **x** e um de seus vértices se encontra na origem. Então o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo em torno do eixo **y** é:

A) $\dfrac{\pi}{24}\sqrt{3}a^3$ B) $\dfrac{\pi}{12}\sqrt{3}a^3$ C) $\dfrac{\pi}{6}\sqrt{3}a^3$
D) $\dfrac{\pi}{4}\sqrt{3}a^3$ E) $\dfrac{3\pi}{4}\sqrt{3}a^3$

06. Seja uma pirâmide SABC cuja altura traçada de S coincide com o centro O da circunferência inscrita na base ABC. Se AB = 120 m, AC = 111 m, BC = 139 m e $SA = 4\sqrt{1217}\,m$. O volume do sólido, em m³, é:

A) 72000 B) 72400 C) 72480
D) 72640 E) 72810

07. A razão entre o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular, de áreas das bases 4a² e 16a² e o volume da esfera inscrita é:

A) $\dfrac{11}{\pi}$ B) $\dfrac{9}{\pi}$ C) $\dfrac{8}{\pi}$
D) $\dfrac{7}{\pi}$ E) π

08. A área da superfície total de um cone de revolução é **x** e o triangulo retângulo gerador é isósceles. Calcule seu volume

A) $\dfrac{\pi}{3}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}\right)^3$ B) $\dfrac{\pi}{3}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\pi\sqrt{2}}}\right)^3$
C) $\dfrac{\pi}{6}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\pi\sqrt{2}+2}}\right)^3$ D) $\dfrac{\pi}{3}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\pi\sqrt{2}+1}}\right)^3$
E) $\dfrac{\pi}{2}\left(\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}\right)^3$

09. O número de poliedros de platão, somado com o número de poliedros de platão que possuem faces triangulares é:

A) 5 B) 6 C) 8

D) 9 E) 10

10. Considere um cilindro circular reto inscrito em um cone circular reto, o volume do cone menor formado é igual ao volume do cilindro. Que fração do volume do cone total é o volume da região compreendida entre o cilindro e o tronco de cone?

A) 5/32 B) 7/32 C) 9/32

D) 11/32 E) 13/32

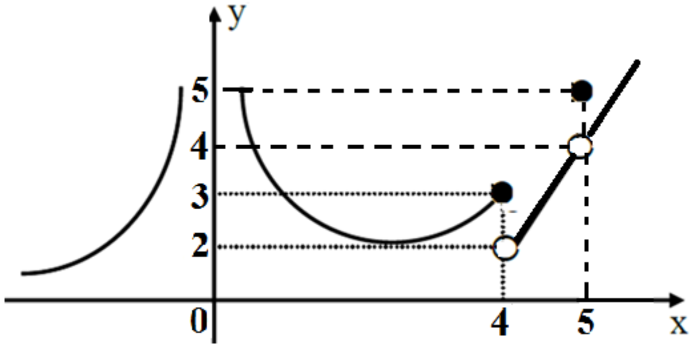
Gabarito

01.D	02. A	03. D	04. E	05. D
06. A	07. D	08. D	09. C	10. A

LIMITES

NOÇÕES DE LIMITE

Sendo f a função representada pelo gráfico abaixo:



Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

c) $f(0)$

d) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

f) $f(4)$

g) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

i) $f(5)$

Nota:

Só existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, ou seja, quando os limites laterais forem iguais.

CONTINUIDADE

○ Seja $f(x)$ uma função em que $a \in D(f)$ e f é **contínua em a.** Então:

✓ existe $f(a)$

✓ existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

✓ $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

○ Seja $f(x)$ uma função em que $a \in D(f)$ e f é **descontínua em a.** Então:

✓ existe $f(a)$

✓ não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

✓ $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$

○ Se existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mas $a \notin D(f)$ então f é **descontínua** mas não podemos afirmar que é em **a**.

PROPRIEDADES

$\lim\limits_{x\to a} c = c$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\div g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \div \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} fog(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$

Infinito

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(+b)\cdot(+\infty)=+\infty$	$(+b)\cdot(-\infty)=-\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$(-b)\cdot(+\infty)=-\infty$	$(-b)\cdot(-\infty)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$	

Atenção!

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

INDETERMINAÇÕES

$(+\infty)-(+\infty)$	$0\div 0$	$0\cdot\infty$	0^0
$(-\infty)-(-\infty)$	$\infty\div\infty$	∞^0	1^∞

LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

REGRA DE L'HÔPITAL

Para o limite de frações nos casos em que há indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ usa-se a regra:

DERIVADAS FUNDAMENTAIS

FUNÇÃO	DERIVADA
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

REGRAS DE DERIVADAS

SOMA	$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$	$f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x)$
PRODUTO	$f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x)$	$f'(x) = u_1'(x) \cdot u_2(x) + u_1(x) \cdot u_2'(x)$
CONSEQUÊNCIAS	$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$
	$f(x) = \left[u(x)\right]^n$	$f'(x) = n \cdot \left[u(x)\right]^{n-1} \cdot u'(x)$
DIVISÃO	$f(x) = \dfrac{u_1(x)}{u_2(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u_1'(x) \cdot u_2(x) - u_1(x) \cdot u_2'(x)}{\left[u_2(x)\right]^2}$
CADEIA	$f(x) = g\left[h(x)\right]$	$f'(x) = g'\left[h(x)\right] \cdot h'(x)$

T.01 (EFOMM) A única alternativa **INCORRETA** é:

a) $\lim\limits_{x \to 2}\left(3x^2 - 5x + 2\right) = 4$

b) $\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}\right) = \dfrac{4}{7}$

c) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x^2 - x + 2}{3x - 2}\right) = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 4x}\right) = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} = 2$

T.02 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{t \to 0}\dfrac{\sqrt[3]{5+t} - \sqrt[3]{5}}{t}$ é

a) 0
b) 1/10
c) $1/\sqrt[3]{5^2}$
d) $1/3\sqrt[3]{5^2}$
e) ∞

T.03 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{t \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 + x}\right)$ é

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

T.04 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}\right)$ é

a) $1/\sqrt{a}$
b) $\sqrt{a}$
c) $1/2\sqrt{a}$
d) $2\sqrt{a}$
e) 0

T.05 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}\right)$ é

a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 8

T.06 (EFOMM) Analise a função a seguir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2\\ 3p-5, x=2\end{cases}$$

Para que a função f seja contínua em x = 2 devemos ter:
a) 1/3
b) 1
c) 3
d) -1
e) -3

T.07 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$ é

a) -1/4
b) -1/2
c) 0
d) 1/4
e) 1/2

T.08 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x^2-4}\right)$ é

a) -1/8
b) -1/16
c) 0
d) 1/16
e) 1/8

T.09 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^3-5x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1}\right)$ é

a) 1
b) ∞
c) e
d) 3/4
e) 4/3

T.10 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log(x+1)-\log x\right]$ é

a) $+\infty$
b) 0
c) 1
d) -1
e) $-\infty$

T.11 (EFOMM) Seja f uma função de domínio $D(f)=\Re-\{a\}$. Sabe-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a **a**, é L e escreve-se $\lim_{x\to a} f(x)=L$, se para todo $\varepsilon>0$, existir $\delta>0$, tal que, se $0<|x-a|<\delta$ então $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I. Seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 3 & \text{se } x=1\end{cases}$, logo, $\lim_{x\to 1} f(x)=0$.

II. Na função $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{se } x<1\\ -1 & \text{se } x=1\\ 3-x & \text{se } x>1\end{cases}$, logo, $\lim_{x\to 1} f(x)=-3$.

III. Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim_{x\to a}(f\cdot g)^n(x)=(L\cdot M)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, se $\lim_{x\to a} f(x)=L$ e $\lim_{x\to a} g(x)=M$.

Analise a opção **CORRETA**.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmativas III é verdadeira.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

T.12 (EFOMM) Analise as afirmativas abaixo:

I. $\lim_{a\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

II. $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[x]{\dfrac{k+x}{k-x}}\right)=e^{\frac{2}{k}}$

III. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\text{tg}2x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=1$

Assinale a alternativa **CORRETA**:

a) Apenas a afirmativa III é falsa.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) As afirmativas II e III são verdadeiras.
d) As afirmativas II e III são falsas.
e) As afirmativas I e III são verdadeiras.

T.13 (EFOMM) O valor do $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$ é

a) $-\infty$
b) 0
c) 1
d) 2
e) $+\infty$

T.14 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ é

a) e^5
b) 0
c) e
d) 1
e) 5

T.15 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$ é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

T.16 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ é

a) e^{-3}
b) e^{-1}
c) e
d) e^2
e) e^3

T.17 (EFOMM) Das afirmativas abaixo:

I. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=+\infty$.

II. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=+\infty$.

III. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=+\infty$.

IV. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

Estão **INCORRETAS**:
a) II e IV
b) I e IV
c) III e IV
d) apenas II
e) II e III

T.18 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3-4x^2+5}{6x^3+3x-7}$ é

a) $-\infty$
b) $+\infty$
c) 0
d) 2/3
e) 4

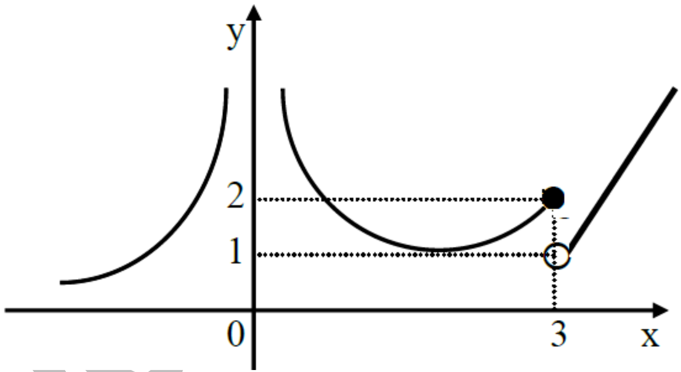
T.19 (EFOMM) Sabendo que $y = \lim\limits_{x \to 0} e^{\sqrt[x]{1+2x}}$, o logaritmo neperiano de y vale:

a) e^2
b) $\sqrt{e}$
c) e^e
d) 2e
e) -3e

T.20 (EFOMM) Sendo $A = \lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{2\sqrt{x\operatorname{sen}6x}}{\operatorname{cossec}6x\left(1-\cos^2 6x\right)}\right]$ e $B = \lim\limits_{x \to \log_2 3}\left[2^{(2x+1)}\right]$, então $\dfrac{A^2B}{2}$ vale:

a) $2\sqrt{3}$
b) 6
c) 12
d) $6\sqrt{3}$
e) 18

T.21 (EFOMM) Em relação a função $y = f(x)$, representada pelo gráfico abaixo, podemos afirmar que:



I. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$
II. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$
III. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
IV. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

a) apenas II é verdadeira.
b) apenas I e III são verdadeiras.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) apenas I, II e IV são verdadeiras.
e) todas são verdadeiras.

T.22 (EFOMM) Dada a função $f(p)=e^{\sqrt[2p]{1+p}}$, podemos afirmar que $\lim\limits_{p\to 0} f(p)$ é igual a:

a) e^e

b) $\left(\sqrt{e}\right)^e$

c) $e^{\sqrt{e}}$

d) $\left(\sqrt[3]{e}\right)^e$

e) $e^{\sqrt[3]{e}}$

T.23 (EFOMM) Dada a função

$f(x)=\begin{cases}10^x+5, & \text{se } x\neq \log 2\\ 2, & \text{se } x=\log 2\end{cases}$, então, o valor de $\lim\limits_{x\to \log 2} f(x)$ é igual a:

a) 7
b) 2
c) $5\log 2$
d) $\log 2$
e) 8

T.24 (EFOMM) Dadas as afirmações:

I. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a\ln x}{1-x}\right)=a$

II. Se $f(x)=3x-4$ e $f\left[g(x)\right]=7x-1$, logo $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$

III. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\cos x\cdot \operatorname{cossec} x\cdot \operatorname{tg} x\cdot \operatorname{sen}^2 x\right)=\dfrac{1}{2}$

Podemos afirmar que:
a) todas as afirmações são verdadeiras
b) todas as afirmações são falsas.
c) somente I e II são falsas.
d) somente II e III são verdadeiras.
e) somente I e III são verdadeiras.

T.25 (EFOMM) Sabendo-se que $f(x)=a^{x+2}$, então, $\lim\limits_{x\to \sqrt{a}} f^{-1}(x)$ vale:

a) -1/3
b) 3/2
c) -3/2
d) 1/2
e) -1/2

T.26 (EFOMM) O valor de $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}x}\right)$ é:

a) $\pi/12$
b) $\pi/4$
c) $3\pi/4$
d) $\pi/6$
e) $\pi/3$

T.27 (EFOMM) O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2+2\cos^2 x}{x^3-x^2}$ é:

a) -2
b) 0
c) 2
d) -1
e) 1

T.28 (EFOMM) O valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left(x+\sqrt{x^2-3x}\right)}$ é:

a) 1
b) $e^{1/2}$
c) $e^{-1/2}$
d) $e^{3/2}$
e) $e^{-3/2}$

T.29 (EFOMM) Calculando o limite, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}2x + x\cos\sec 2x\right)$ é:

a) $1/2$
b) $+\infty$
c) 1
d) não existe
e) 0

T.30 (EFOMM) Sabe-se que $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ pode-se afirma que o ângulo θ, em radiano, tal que a $\mathrm{tg}\theta = \ln a - 1$.

a) $-\pi/4$
b) $-\pi/2$
c) $3\pi/4$
d) $\pi/4$
e) $\pi/2$

T.31 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$ é:

a) 1
b) 1/4
c) 1/3
d) 1/2
e) 2

T.32 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ é:

a) 1/3
b) 3/2
c) 3/5
d) 2/3
e) 2/5

T.33 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2+x}}$ é:

a) -1
b) $+\infty$
c) 1
d) $-\infty$
e) 1/3

T.34 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}$ é:

a) 0
b) 1/3
c) 1/2
d) 2/3
e) $+\infty$

T.35 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2+2\cos^2 x}{x^3-x^2}$ é:

a) 0
b) 1/3
c) 1/2
d) 2/3
e) $+\infty$

T.36 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$ é:

a) $-\infty$
b) $+\infty$
c) $\sqrt{3}$
d) 0
e) $\sqrt{3}/3$

T.37 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{x}$ é:

a) e^5
b) 0
c) e
d) 1
e) 5

T.38 (EFOMM) O valor do $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$ é:

a) e^5
b) e^2
c) $e^{1/3}$
d) e^3
e) e^{-3}

T.39 (EFOMM) O valor do $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$ é:

a) 2/3
b) 5/3
c) 3/5
d) 3/2
e) 2

T.40 (EFOMM) Para que a função $f(x)=\begin{cases}\frac{5x^3-10x^2}{x-2}, x\neq 2\\ k \quad , x=2\end{cases}$ seja contínua para todo valor de x.

Qual será o valor de k?
a) 2
b) 10
c) 20
d) 40
e) 50

T.41 (EFOMM) Sobre a função $f(x)=\frac{1+x}{x^2}$, analise as afirmativas.

I - f(x) é contínua em todo x $\in \Re$.
II - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
III - $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$
Então podemos dizer que
a) todas as afirmativas são verdadeiras.
b) todas as afirmativas são falsas.
c) somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
e) somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

T.42 (EFOMM) Os valores de **A**, sabendo-se que a função abaixo é contínua para todos os valores de **x**, será

$$f(x)=\begin{cases}A^2x-A, x\geq 3\\ 4 \quad , x<3\end{cases}$$

a) 1 ou -1/2
b) 1 ou -2
c) 2 ou 4
d) 2 ou 3/4
e) -1 ou 4/3

GABARITO

01. e	02. d	03. d	04. c	05. e	06. c	07. e	08. b	09. e	10. b	11. a	12. a
13. d	14. e	15. a	16. e	17. a	18. d	19. a	20. b	21. c	22. c	23. a	24. d
25. c	26. d	27. c	28. d	29. a	30. d	31. b	32. b	33. a	34. e	35. e	36. d
37. e	38. b	39. b	40. c	41. e	42. e						

DERIVAÇÃO

FUNÇÃO DERIVADA

Define-se função derivada de f no ponto x_0 o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

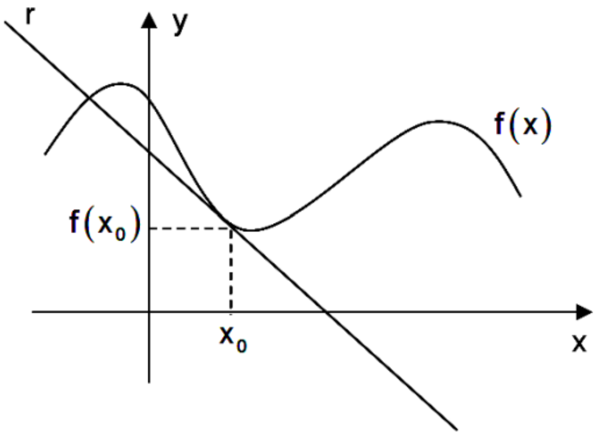
se este existir e for finito.

Notações

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{\sigma y}{\sigma x}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A equação da reta r tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0; y_0)$, em que f derivável, é



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- $v = \dfrac{dx}{dt}$
- $a = \dfrac{dv}{dt}$
- $F = \dfrac{dp}{dt}$

DERIVADAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES

$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$		
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$		
$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$	**CONSEQUÊNCIA**	$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = \text{sen}x \Rightarrow f'(x) = \cos x$		
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}x$		

REGRAS DE DERIVADAS

SOMA	$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ $f'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)$			
PRODUTO	$f(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)$ $f'(x)=u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)\cdot u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n'(x)$			
CONSEQUÊNCIAS	$f(x)=c\cdot g(x)\Rightarrow f'(x)=c\cdot g'(x)$	$f(x)=\left[u(x)\right]^n\Rightarrow f'(x)=n\cdot\left[u(x)\right]^{n-1}\cdot u'(x)$		
DIVISÃO	$f(x)=\dfrac{u_1(x)}{u_2(x)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{u_1'(x)\cdot u_2(x)-u_1(x)\cdot u_2'(x)}{\left[u_2(x)\right]^2}$			
CONSEQUÊNCIA	$f(x)=\text{tg}x\Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$			
CADEIA	$f(x)=g\left[h(x)\right]\Rightarrow f'(x)=g'\left[h(x)\right]\cdot h'(x)$			
FUNÇÃO INVERSA	$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$	**CONSEQUÊNCIA**	$f(x)=\log_a x$ $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	
CONSEQUÊNCIAS	$f(x)=\text{arcsen}x$ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos x$ $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\text{arc tg}x$ $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\text{arc cotg}x$ $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

DERIVADAS SUCESSIVAS

A derivada de ordem n de uma função f é representada por $f^{(n)}$

Ex.1 A derivada de ordem **n** da função $f(x)=x.e^x$ para x = 1 é:

$$f(x)=x.e^x\begin{cases}f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x\therefore f'(x)=e^x\cdot(1+x)\\ f''(x)=e^x\cdot(1+x)\therefore f''(x)=e^x(1+x)+e^x\cdot 1\therefore f''(x)=e^x(2+x)\Rightarrow \boxed{f^{(n)}=e\cdot(n+1)}\\ f^{(n)}=e^x(n+x)\end{cases}$$

DERIVADA E CONTINUIDADE

Se uma função f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0. Mas, nem todas as funções contínuas em x_0 são deriváveis em x_0.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\end{cases}$$

VARIAÇÕES DAS FUNÇÕES

I. Através do estudo do sinal da primeira derivada da função $f(x)$ conseguimos analisar:

○ **crescimento** $\left(f'(x)>0\right)$ ou **decrescimento** $\left(f'(x)<0\right)$

○ **máximo relativo** $\left(f'(x)=0\right)$ ou **mínimo relativo** $\left(f'(x)=0\right)$

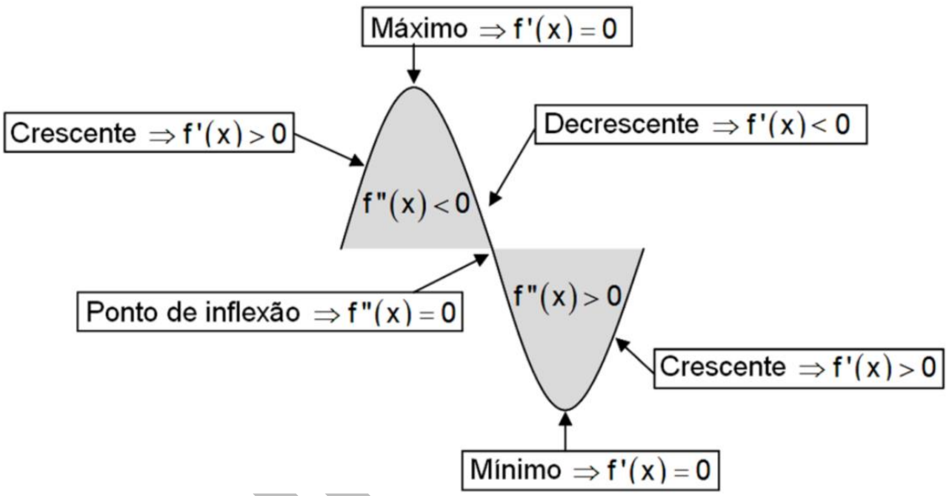
○ **extremantes** que são geralmente as raízes de $f'(x)=0$

II. Através do estudo do sinal da segunda derivada da função $f(x)$ conseguimos analisar:

○ **a concavidade**

para cima $\left(f''(x)>0\right)$ ou **para baixo** $\left(f''(x)<0\right)$

○ **pontos de inflexão** (são pontos onde a curva muda de concavidade) que têm como abscissas as raízes da segunda derivada da função $f(x)$.



DERIVADA DE UMA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Seja uma função implícita do tipo:

$$f(x;y)=0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_y}$$

f_x : derivada parcial em relação a x. Deve – se, considerar $y=\text{cte}$

f_y : derivada parcial em relação a y. Deve – se, considerar $x=\text{cte}$

Ex. 1 - $f(x,y)=2x^2-5y^3+2=0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=?$

Ex. 2 - $f(x,y)=4x^2-6xy=0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=?$

Ex. 3 - $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = ? \end{cases}$

DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Se f é uma função de duas variáveis x e y, suas derivadas parciais são $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Se derivarmos essas derivadas mais uma vez, obteremos as derivadas parciais de segunda ordem, que são representadas por:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ex. 1 - $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \\ f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ? \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ? \\ f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ? \end{cases}$

Ex. 2 - $f(x,y) = e^{2x+5y} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \\ f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ? \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ? \\ f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ? \end{cases}$

T.01 (EFOMM) A razão da função $f(x)=a^{\frac{x}{2}}$ para a sua derivada de ordem n é:

a) $2^n \ln a$
b) $2^{-n} \ln a^n$
c) $2^n (\ln a)^{-n}$
d) $2^{n-1} \ln a$
e) $2^n \ln(a \cdot n)$

T.02 (EFOMM) A derivada primeira da função $f(x)=\frac{e^{3x}}{9}(3\operatorname{sen}x-\cos x)$ tem a seguinte expressão:

a) $e^{3x}(\cos x+\operatorname{sen}x)$
b) $\frac{e^{3x}\cos x}{3}$
c) $\frac{4}{3}e^{3x}\operatorname{sen}x$
d) $\frac{10e^{3x}\operatorname{sen}x}{9}$
e) $\frac{e^{3x}\operatorname{sen}x}{3}$

T.03 (EFOMM) A reta tangente à curva $y=7x-3x^2$ no ponto P faz um ângulo de 45^o com o eixo x. O ponto P da curva tem coordenadas:

a) (0;0)
b) (3;6)
c) (2;2)
d) (1;4)
e) (-1;-10)

T.04 (EFOMM) A equação da reta normal do gráfico da função $y=e^{\operatorname{sen}(x^2-1)}$ no ponto (1;1) é:

a) $2y-x+3=0$
b) $y+2x-3=0$
c) $2y+x-3=0$
d) $y-2x+3=0$
e) $2y-x-3=0$

T.05 (EFOMM) As equações das retas tangentes à curva $y-2x+\frac{1}{x}=0$ que são paralelas à reta $y-3x+1=0$ são:

a) $y+3x+2=0$ e $y-3x-2=0$
b) $y-3x+2=0$ e $y-3x-2=0$
c) $y-3x+2=0$ e $y+3x-2=0$
d) $y+3x+2=0$ e $y+3x-2=0$
e) $y-3x-2=0$ e $y+3x-2=0$

T.06 (EFOMM) Sabendo que $f(x)=tg^2(3x+1)$, o valor de $f''\left(-\frac{1}{3}\right)$ é

a) 24
b) 20
c) 16
d) 22
e) 18

T.07 (EFOMM) Sabendo-se que $A=sen^2(2x)$ e $B=cos^2(2x)$, então, a derivada de $f(x)=4A-2A.B+\sqrt{B}$ no ponto $x=\frac{\pi}{6}$rad vale

a) $3\sqrt{3}/2$
b) $\left(\sqrt{3}-1\right)/2$
c) $\left(\sqrt{3}+1\right)/2$
d) $4\sqrt{3}$
e) $-4\sqrt{3}$

T.08 (EFOMM) O gráfico de $f(x)=(x-3)^2e^x$, $x\in\mathbb{R}$ tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto $P=(a;b)$, então $a^2+be^{sen^2a}-4a$ é igual a:

a) -3
b) -2
c) 3
d) 2
e) 1/2

T.09 (EFOMM) Sabendo que a velocidade de uma partícula é dada pela equação $v(t)=2+3t+5t^2$, pode-se afirmar que, no instante t = 5 s, sua aceleração é:

a) $28\ m/s^2$
b) $30\ m/s^2$
c) $36\ m/s^2$
d) $47\ m/s^2$
e) $53\ m/s^2$

T.10 (EFOMM) A deriva primeira da função $y=arctg\left[\frac{1-\cos x}{senx}\right]$ é

a) 1
b) $\cos x$
c) $senx$
d) $\sec x$
e) $1/2$

T.11 (EFOMM) Se $y = \log_e \sqrt{\frac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}}$. Determine a primeira derivada de y.

a) 1
b) $\cos x$
c) $\text{sen}x$
d) $\sec x$
e) $1/2$

T.12 (EFOMM) A derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\text{cossec}\,x - \text{sen}x}{\sec x - \cos x}}$ no ponto $x = -\pi/3$ é

a) -1
b) -3
c) $-1/3$
d) $-2/3$
e) $-4/3$

T.13 (EFOMM) Sendo $f(x) = \ln x$. Calcule $\left[f^{-1}(x)\right]'$.

a) x
b) e^x
c) ex
d) $1/e^x$
e) x^e

T.14 (EFOMM) Sabe-se que $f(x) = (x^2 - 1)^2$ e $g(x) = x \cdot \ln x$. É correto afirmar

I) $f'(1) = 0$

II) $g'(2) = \ln 2$

III) $f'(2) = g''(1/2) = -2$

IV) $f'(1) = f''(-1)$

V) $g'(2) = g''(2)$

a) apenas a firmação I é correta
b) todas as afirmações são incorretas
c) apenas I e III são afirmações corretas
d) todas as afirmações são corretas
e) apenas as afirmações I, II, IIII e IV

T.15 (EFOMM) A deriva de terceira ordem da função $f(x) = tg3x$ para $x = \pi/3$ é

a) 24
b) 34
c) 54
d) 64
e) 74

T.16 (EFOMM) Um carro em movimento obedece a seguinte função $S(t) = 5t^3 + 12t^2 - 8t$, t está em horas (h) e S está em quilômetros (km). Calcule a velocidade para t = 180 min.

a) $199\ km/h$

b) $299\ km/h$

c) $399\ km/h$

d) $499\ km/h$

e) $599\ km/h$

T.17 (EFOMM) Sabe-se que uma partícula move-se segundo a equação $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t - 2$, onde t é o tempo em segundos e S é a posição em metros. Pode-se afirmar que a aceleração da partícula, quando $t = 2s$, é

a) 3 m/s.

b) 5 m/s.

c) 7 m/s.

d) 8 m/s.

e) 10m/s.

T.18 (EFOMM) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625

b) 781150

c) 1000

d) 250

e) 375

T.19 (EFOMM) Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy. Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP, onde O é a origem, que forma um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

a) $x + y - 2 = 0$.

b) $\sqrt{2}x + y - 1 = 0$.

c) $-\sqrt{2}x + y - 2 = 0$

d) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

e) $x - y - 2\sqrt{2} = 0$.

T.20 (EFOMM) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 5^{senx}$ no ponto x = 0 é:

a) $y = (\ln 5)x + 1$

b) $y = (-\ln 5)x - 1$

c) $y = 5x + 1$

d) $y = x + 1$

e) $y = -x + 1$

T.21 (EFOMM) A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto de coordenadas $\left(5, \frac{1}{5}\right)$ será

a) $25y + x - 10 = 0$
b) $25y + 2x - 10 = 0$
c) $25y - x + 10 = 0$
d) $25y + x + 10 = 0$
e) $25y - 2x - 10 = 0$

T.22 (EFOMM) Seja $C = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ com $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$, o conjunto das n raízes da equação

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^3 - 4\right) + \frac{5}{(x-2)^{-1}} = -4(x+1) + 4x.$$

Determine o valor de $a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_n^n$.

a) -5
b) 7
c) 25
d) 36
e) 37

T.23 (EFOMM) Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a R$9,00, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de R$1,00 no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de
a) R$ 8,00.
b) R$ 7,00.
c) R$ 6,00.
d) R$ 5,00.
e) R$ 4,00.

GABARITO

01. c	**02. d**	**03. d**	**04. c**	**05. b**	**06. e**	**07. d**	**08. a**	**09. e**	**10. e**	**11. d**	**12. e**
13. b	**14. a**	**15. c**	**16. a**	**17. b**	**18. a**	**19. d**	**20. a**	**21. a**	**22. e**	**23. c**	

INTEGRAÇÃO

INTEGRAL INDEFINIDA

$$\int f(x)\,dx = \overbrace{F(x)+c}^{\text{Primitiva}} \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

INTEGRAIS IMEDIÁTAS

$\int k\,dx = kx + c$	$\int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x + c$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x + c$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg}x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}x + c = -\arccos x + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}x + c = -\operatorname{arc\,cotg}x + c$

PROPRIEDADES DE INTEGRAÇÃO

- Sendo k = cte $\Rightarrow \int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

INTEGRAL DEFINIDA

$$\int_a^b f(x) = \left[F(x)+c\right]_a^b = F(b)+c-(F(a)+c) = F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x) = F(b)-F(a)$$

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

- **POR SUBSTITUIÇÃO**

Ex.1 $\int \operatorname{tg}x\,dx$

Ex.2 $\int \operatorname{sen}(ax)\,dx$

Ex.3 $\int \left(x + \sec^2 3x \right) dx$

• **POR PARTES**

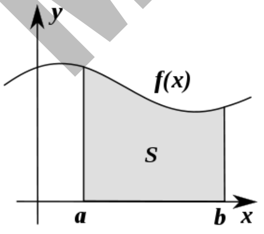
$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

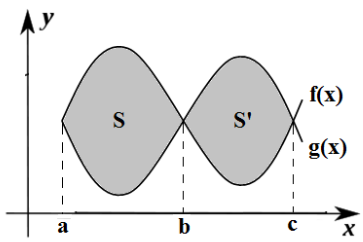
Ex.1 $\int \ln x \, dx$

Ex.2 $\int x e^{-2x} \, dx$

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

• **CÁLCULO DE ÁREA**

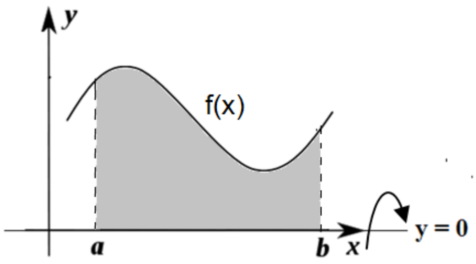




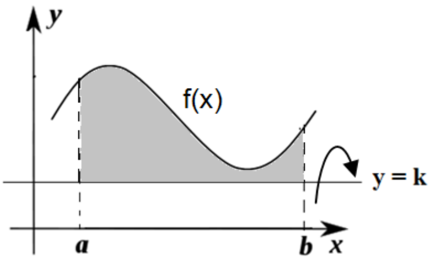
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$S + S' = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx + \int_b^c g(x) - f(x) \, dx$$

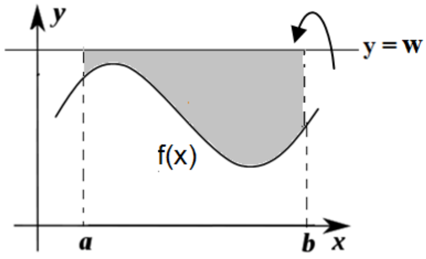
• **VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO**



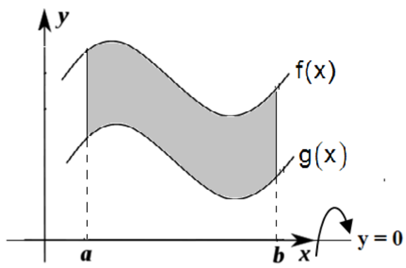
$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$$



$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)-k\right]^2dx$$

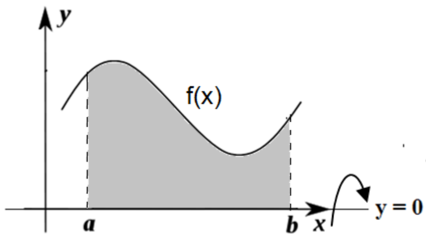


$$V=\pi\int_a^b\left[w-f(x)\right]^2dx$$



$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2dx$$

• **ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO**



$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (EDO) DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Ex.1 $y'=2x\sqrt{y-1}$

Ex.2 $y' = -\frac{y}{x}$

Ex.3 $y' = -\frac{(1+x)y}{(1-y)x}$

T.01 (EFOMM) Encontre-se para $\int \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ a expressão:

a) $-\frac{1}{2}\cos x + c$

b) $\frac{1}{2}\cos x + c$

c) $-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$

d) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

e) $\frac{1}{2}(1 - \cos x) + c$

T.02 (EFOMM) A primitiva da função $f(x) = (x-1)^4$, que se anula para x = 2, tem a seguinte expressão:

a) $\frac{(x-1)^5}{5}$

b) $\frac{(x-1)^4}{4}$

c) $4(x-1)^5$

d) $\frac{(x-1)^5 - 1}{5}$

e) $4(x-1)^3$

T.03 (EFOMM) A solução de $\int \frac{e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}dy$ é:

a) $\frac{1}{2}\left(e^{3y}+3\right)^{3/2} + c$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(e^{3y}+3\right)^2} + c$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(e^{3y}+3\right)^2} + c$

d) $\frac{1}{3}\left(e^{3y}+3\right)^{3/2} + c$

e) $\frac{1}{2}\left(e^{3y}+3\right)^{-2/3} + c$

T.04 (EFOMM) Sabendo que $f'(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+11}$ e que $f(1)=0$, então o valor de $f(0)$ é:

a) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{11}}{4}\right)$
b) $\dfrac{\ln 4}{\ln\sqrt{11}}$
c) $\dfrac{\ln\sqrt{11}}{\ln 4}$
d) $\sqrt{11}\ln 4$
e) $\ln\left(4\sqrt{11}\right)$

T.05 (EFOMM) O gráfico da função contínua $y=f(x)$, no plano xy, é uma curva situada acima do eixo x para $x > 0$ e possui a seguinte propriedade:
"A área da região entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x no intervalo $a\le x\le b(a>0)$ é igual à área entre a curva e o eixo x no intervalo $ka\le x\le kb(k>0)$".
Se a área da região entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $1\le x\le 3$ é número A então a área entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $9\le x\le 243$ vale:

a) 2A
b) 3A
c) 4A
d) 5A
4) 6A

T.06 (EFOMM) Uma pesquisa indica a taxa decrescimento populacional de uma cidade através da função $P(x)=117+200x$, por pessoas anualmente há x anos. Passados 10 anos, o crescimento é dado pela integral $\int_0^{10}(117+200x)dx$. Pode-se afirmar que esse crescimento será de

a) 10130 pessoas
b) 11170 pessoas
c) 11200 pessoas
d) 11310 pessoas
e) 12171 pessoas

T.07 (EFOMM) O valor da integral $\int x\cdot e^{x^2}dx$ é

a) $\dfrac{1}{4}\cdot e^{x^2}+c.$
b) $\dfrac{x}{2}\cdot e^{x^2}+c.$
c) $\dfrac{1}{2}\cdot e^{x^2}+c.$
d) $\dfrac{1}{2}\cdot e^{x}+c.$
e) $\dfrac{1}{4}\cdot e^{x}+c.$

T.08 (EFOMM) Dada uma função F: $\Re \rightarrow \Re$, sabe-se que:
i) F'(x) = sem(3x)cos(5x), onde F'(x) é a derivada da função F, em relação à variável independente x;
ii) F(0) = 0.

O valor de $F\left(\frac{\pi}{16}\right)$ é

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$.

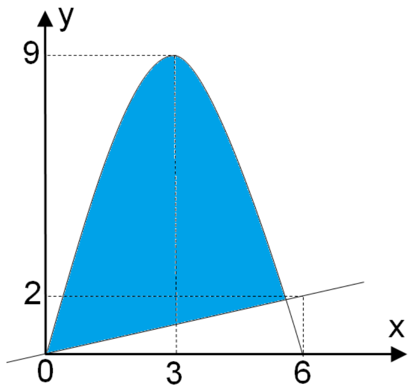
b) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$.

c) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$.

d) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$.

e) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$.

T.09 (EFOMM) A área de uma figura plana é dada pelo cálculo da integral $\int_a^b \left[g(x)-h(x)\right] dx$, onde g(x) é a função que limita a figura superiormente, h(x) limita a figura inferiormente e os valores a, b $\in \Re$representam o início e o fim da figura em relação ao eixo x, no plano cartesiano. Com isso, determine a área hachurada abaixo, definida superiormente por uma parábola e inferiormente por uma reta.



a) 42,7
b) 4913/162
c) 27
d) 21
e) 46π/7

T.10 (EFOMM) O valor da integral $\int\left[\sqrt{2}\cdot \operatorname{tg}^3(2x)\cdot \sec(2x)\right]^2 dx,$ sem **c** uma constante, é:

a) $\sec^2(2x)+\operatorname{tg}^2(2x)+c$

b) $\dfrac{\sec^2(2x)+\operatorname{tg}^2(2x)+c}{\operatorname{tg}(2x)}$

c) $\operatorname{arctg}(\ln x)+c$

d) $\dfrac{\operatorname{tg}^7(x)}{7}+c$

e) $\sqrt{\operatorname{tg}(2x)}+\operatorname{sen}(2x)+c$

T.11 (EFOMM) Seja $g(x)=4-\cos x$ e $f'(x)=4x-e^{2x}$. sabendo-se que $f(0)=g(0)$, determine $f(x)$.

a) $f(x)=3-2x$

b) $f(x)=2x^2-\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{7}{2}$

c) $f(x)=e^{-2x}-6x-\dfrac{2}{3}$

d) $f(x)=e^{2x}-x^2+2$

e) $f(x)=e^{2x}+\operatorname{sen}x-3$

T.12 (EFOMM) Calcule a integral indefinida $\int \operatorname{tg}x\cdot\left(1+(\operatorname{sen}x\cdot\sec x)^2\right)dx$.

a) $\dfrac{\sec^2 x}{2}+c$

b) $\operatorname{tg}x\cdot\sec x+2x+c$

c) $\cos x+2\operatorname{sen}x-\sec x+c$

d) $\dfrac{2\cos x-\operatorname{sen}2x}{3}+c$

e) $\dfrac{\cos^2 x}{2}+c$

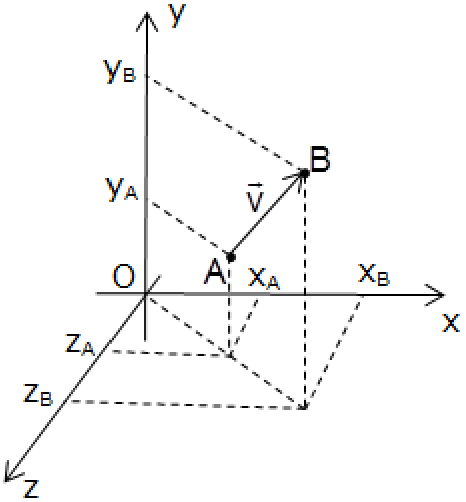
GABARITO

01. a	02. d	03. c	04. a	05. b	06. b	07. c	08. c	09. b	10. d	11. b	12. a

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

CONCEITOS FUNDAMENTAIS NO R³

Eixos coordenados



Ox: Eixo das abscissas
Oy: Eixo das ordenadas
Oz: Eixo das cotas

Distância entre dois pontos

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Representação de um vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) = \left(\overbrace{x_B - x_A}^{x}, \overbrace{y_B - y_A}^{y}, \overbrace{z_B - z_A}^{z}\right) = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

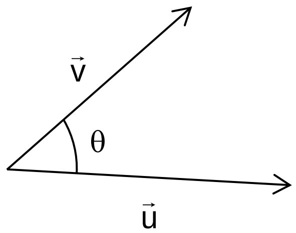
$$\text{Ex.:}\begin{cases} C = (2, 0, -1) \\ D = (0, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = D - C = (0, -1, 2) - (2, 0, -1) = \left[0 - 2, -1 - 0, 2 - (-1)\right] = (-2, -1, 3) = -2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

OPERAÇÕES COM VETORES

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \begin{cases} \vec{u} = \vec{v} \therefore x_1 = x_2, y_1 = y_2 \text{ e } z_1 = z_2 \\ \vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \\ \vec{w} = t \cdot \vec{u}, t \in \Re^* \therefore \vec{w} = t \cdot (x_1, y_1, z_1) \therefore \vec{w} = (tx_1, ty_1, tz_1) \\ \vec{w} \parallel \vec{u} \therefore \dfrac{tx_1}{x_1} = \dfrac{ty_1}{y_y} = \dfrac{tz_1}{z_1} = t \\ \text{Ex.:}\begin{cases} \vec{a} = (2, 4, 6) \\ \vec{b} = (-4, -8, -12) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{-4} = \dfrac{4}{-8} = \dfrac{6}{-12} = -\dfrac{1}{2} \therefore \vec{a} \parallel \vec{b} \therefore \vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b} \end{cases}$$

$$\text{Ponto médio M de um segmento AB} \begin{cases} A = (x_A, y_A, z_A) \text{ e } B = (x_B, y_B, z_B) \\ M = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right) \end{cases}$$

PRODUTO ESCALAR



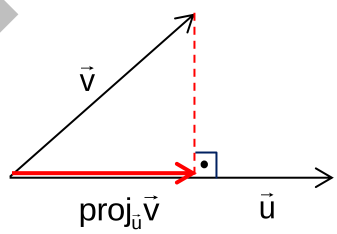
$$\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)\text{ e }\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\begin{cases}\text{Definição algébrica} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2\\ \text{Definição geométrica} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta\end{cases}$$

$$\text{Propriedades}\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\\ (\vec{u})^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2\\ |\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\\ |\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|\end{cases}$$

ÂNGULOS DIRETORES

$$\text{São ângulos entre um vetor }\vec{v}\text{ e os eixos coordenados}\begin{cases}\cos\beta=\dfrac{x}{|\vec{v}|}\\ \cos\gamma=\dfrac{y}{|\vec{v}|}\Rightarrow\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\phi=1\\ \cos\phi=\dfrac{z}{|\vec{v}|}\end{cases}$$

PROJEÇÃO DE UM VETOR $\vec{v}$ SOBRE OUTRO VETOR $\vec{u}$



$$proj_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}$$

Demonstração

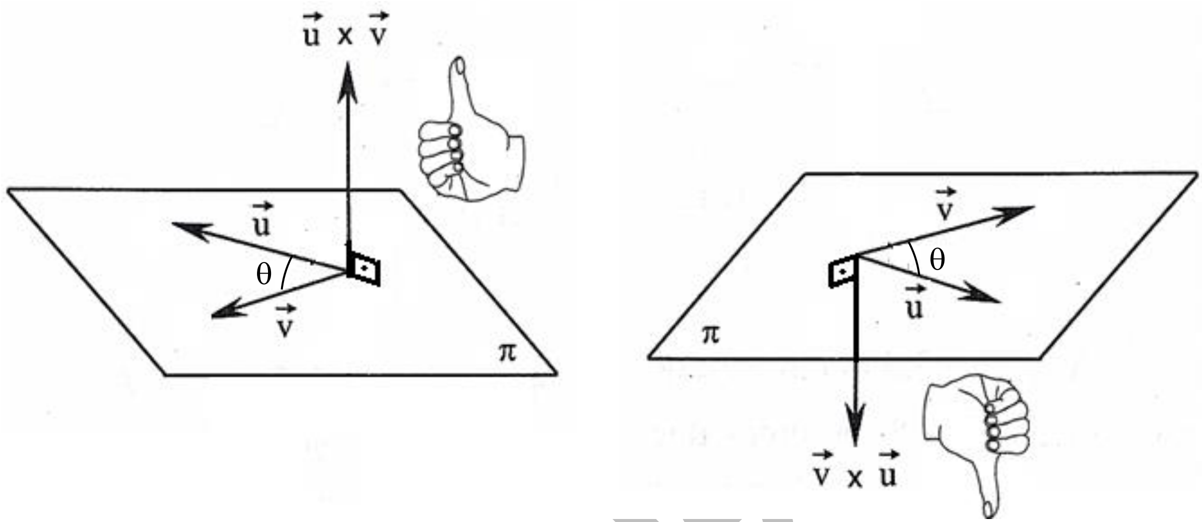
$$\begin{cases}|proj_{\vec{u}}\vec{v}|=|\vec{v}|\cdot\cos\theta\\ proj_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{v}=|proj_{\vec{u}}\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta\end{cases}\Rightarrow proj_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot\cos\theta\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta\therefore \boxed{proj_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2\cdot\cos^2\theta}$$

$$\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\theta\\ \cos\theta=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|}\end{cases}\Rightarrow proj_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2\cdot\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|}\right)^2\therefore proj_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\cancel{\vec{v}}=\cancel{|\vec{v}|^2}\cdot\frac{\cancel{\vec{v}}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}}{\cancel{|\vec{v}|^2}\cdot|\vec{u}|^2}\therefore proj_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}$$

PRODUTO VETORIAL

$$\vec{u}=\left(x_1,y_1,z_1\right) \text{ e } \vec{v}=\left(x_2,y_2,z_2\right)\Rightarrow \vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

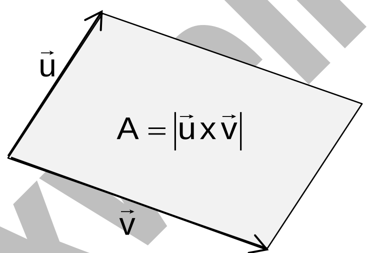
Direção e sentido

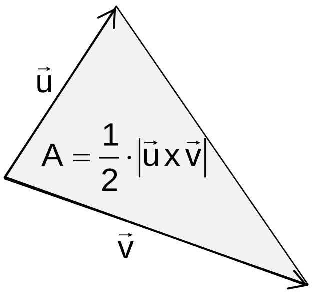


Módulo

$$\left|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\text{sen}\theta$$

Aplicação





Nota:
IDENTIDADE DE LAGRANGE

$$\begin{cases}\left|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\text{sen}\theta \therefore \text{sen}\theta=\dfrac{\left|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\theta \therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\end{cases}\Rightarrow \text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1 \therefore \left(\dfrac{\left|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\right)^2+\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\right)^2=1$$

$$\left|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right|^2+\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2=\left|\vec{u}\right|^2\cdot\left|\vec{v}\right|^2$$

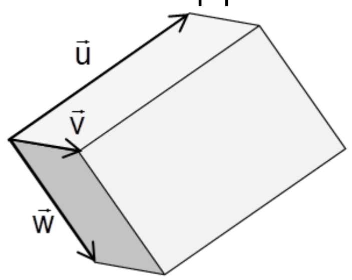
PRODUTO MISTO

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \text{ e } \vec{w} = (x_3, y_3, z_3) \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Propriedades} \begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ são coplanares} \end{cases}$$

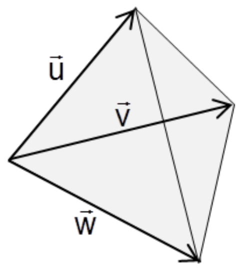
Aplicação

Paralelepípedo



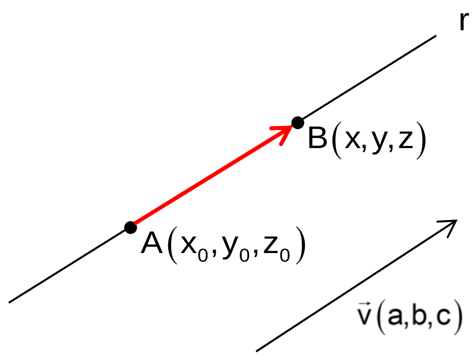
$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Tetraedro



$$V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

EQUAÇÕES DA RETA NO R³



$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Equação simétrica

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t,\ \text{sendo } t\in\Re$$

$$r\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

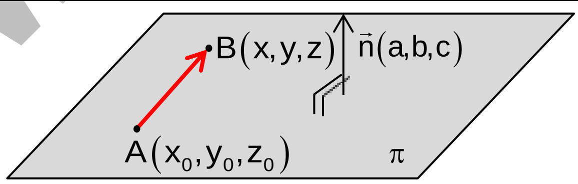
Equação paramétrica

$$\overrightarrow{AB}=t\cdot\vec{v},\ t\in\Re\ \therefore\ (x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=(a,b,c)t$$

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+(a,b,c)t$$

Equação da reta

EQUAÇÃO DO PLANO NO R³



$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$$

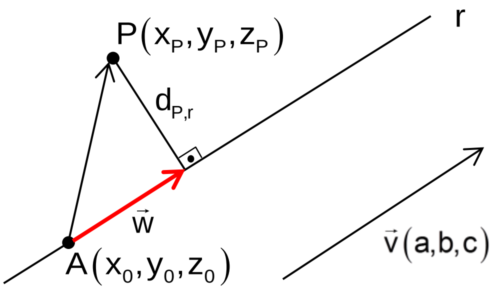
$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0\ \therefore\ ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0\ \therefore\ ax+by+cz\overbrace{-ax_0-by_0cz_0}^{d}=0$$

$$ax+by+cz+d=0$$

Equação geral do plano

DISTÂNCIAS NO R³

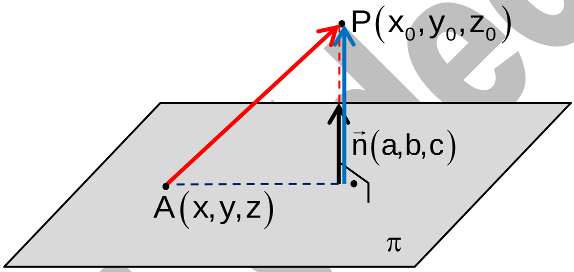
Distância entre um ponto e uma reta



$$\frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{w}\right|}{\cancel{2}} = \frac{|\vec{w}| \cdot d_{p,r}}{\cancel{2}} \therefore \left|\cancel{t} \cdot \vec{v}\right| \cdot d_{p,r} = \left|\overrightarrow{AP} \times \cancel{t} \cdot \vec{v}\right|$$

$$d_{P,r} = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Distância entre um ponto e um plano



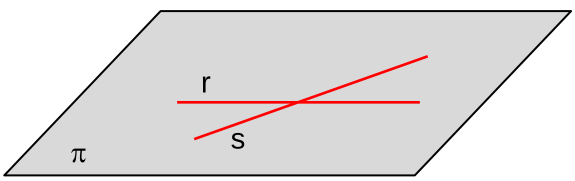
$$d_{P,\pi} = \left|\text{Proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right| \therefore d_{P,\pi} = \left|\left[\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right] \cdot \vec{n}\right| \therefore d_{P,\pi} = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\right|}{\cancel{|\vec{n}|^2}}\cancel{|\vec{n}|} \therefore d_{P,\pi} = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \therefore d_{P,\pi} = \frac{\left|(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot (a,b,c)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d_{P,\pi} = \frac{\left|ax_0 - ax + by_0 - by + cz_0 - cz\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \therefore d_{P,\pi} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + \overbrace{(-ax - by - cz)}^{d}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d_{P,\pi} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

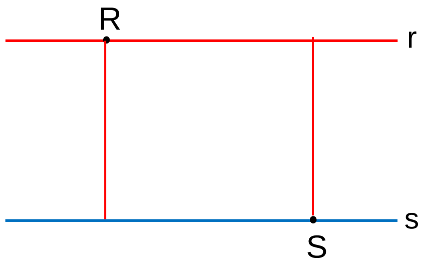
Distância entre retas

Retas concorrentes



$$d_{r,s} = 0$$

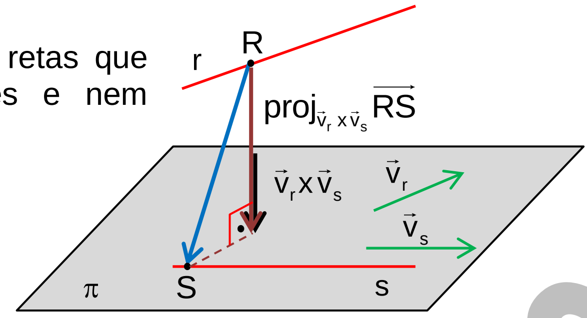
Retas paralelas



$$d_{r,s} = d_{R,s} = d_{S,r}$$

Retas reversas

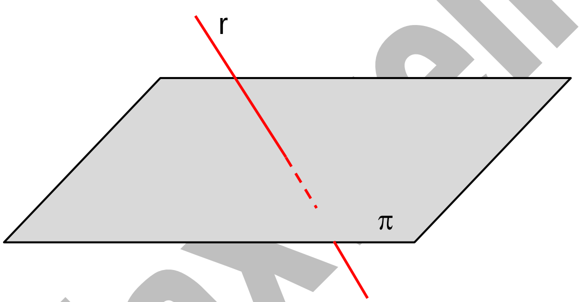
Retas reversas: são retas que não são concorrentes e nem paralelas

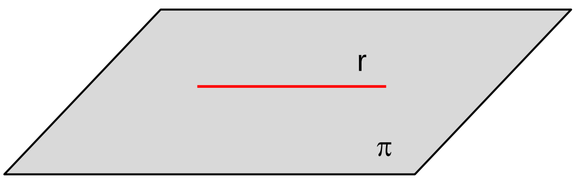


$$d_{r,s} = \left|\text{proj}_{\vec{v}_r \times \vec{v}_s} \overrightarrow{RS}\right| \therefore d_{r,s} = \left|\left[\frac{\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s)}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|^2}\right] \cdot \vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \therefore d_{r,s} = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s)\right|}{\cancel{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|^2}} \cdot \cancel{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

$$d_{r,s} = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s)\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

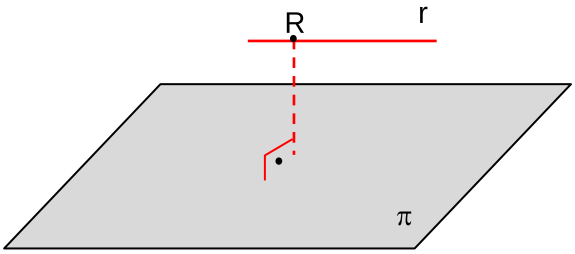
Distância entre reta e plano concorrentes ou a reta sobre no plano





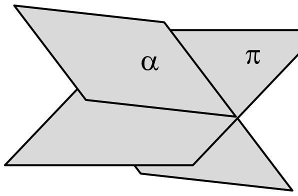
$$d_{r,\pi} = 0$$

Distância de uma reta paralela ao plano



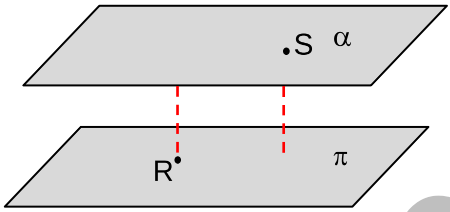
$$d_{r,\pi} = d_{R,\pi}$$

Distância entre planos
Planos concorrentes



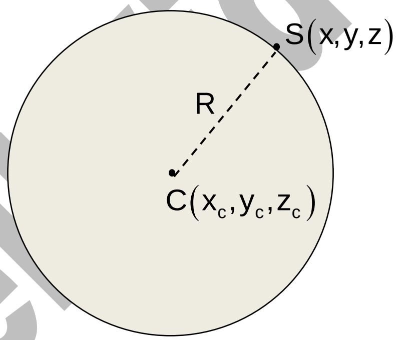
$$d_{\alpha,\pi} = 0$$

Planos paralelos



$$d_{\alpha,\pi} = d_{R,\pi} = d_{S,\alpha}$$

ESFERA



$$R^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2$$

Equação reduzida da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_c x - 2x_c x - 2x_c x + x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - R^2 = 0$$

Equação geral da esfera

Testes de fixação

T.01 Considere o segmento AB com extremidades nos pontos $A(1,-1,3)$ e $B(3,1,5)$. Prolongando-se o segmento AB, no sentido de A para B, até um ponto C, de modo que o segmento quadruplique de valor. A soma das coordenadas do ponto C vale:
a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

T.02 Dado o vetor $\vec{w}=(3,2,5)$, determinar a soma a + b de modo que os vetores $\vec{u}=(3,2,-1)$ e $\vec{v}=(a,6,b)+2\vec{w}$ sejam paralelos.
a) – 2
b) – 3
c) – 4
d) – 5
e) – 6

T.03 Dados os pontos $A(1,0,-1)$, $B(4,2,1)$ e $C(1,2,0)$, determine o produto dos possíveis valores de **m** para que $|\vec{v}|=7$, sendo $\vec{v}=m\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
a) – 39/5
b) – 35/8
c) 37/5
d) 4
e) 5

T.04 O produto escalar entre o vetor unitário $\vec{v}$ que possui a 2° coordenada positiva, que é ortogonal ao eixo Oz e que forma 60° com o vetor $\vec{i}$, e o vetor $\vec{w}=\left(2,2\sqrt{3},24\right)$ vale:
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
d) 4
e) 5

T.05 Dados vetores $\vec{a}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, $\vec{b}=(1,0,3)$ e $\vec{c}=(2,-1,1)$, o valor do módulo de $\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é um vetor perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tal que $\vec{v}\cdot\vec{c}=8$ é:
a) $\sqrt{11}$
b) $\sqrt{13}$
c) $\sqrt{15}$
d) $\sqrt{17}$
e) $\sqrt{19}$

T.06 O cosseno do ângulo que a reta que passa pelos pontos $A(3,-1,4)$ e $B(1,3,2)$ forma com a sua projeção sobre o plano xy vale:

a) $\frac{\sqrt{35}}{6}$
b) $\frac{\sqrt{30}}{6}$
c) $\frac{\sqrt{29}}{6}$
d) $\frac{\sqrt{31}}{6}$
e) $\frac{1}{2}$

T.07 Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares e $\vec{c}$ forma com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ângulos iguais a $\frac{\pi}{3}$rad. Se $\vec{a}$ e $\vec{c}$ são unitários, $|\vec{b}|=2$ e $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, então $|\vec{p}|$ é igual a:

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{15}$
d) $\sqrt{17}$
e) $\sqrt{19}$

T.08 Se $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ e $|\vec{w}|=\sqrt{5}$, o valor da soma dos produtos escalares $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ é igual a:
a) 6
b) – 6
c) 5
d) – 5
e) 0

T.09 Dados os pontos $A(2,1,-1)$ e $B(0,2,1)$, determine a soma das coordenadas de todos os possíveis pontos C do eixo Ou de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 u.a.
a) 1/2
b) 9/2
c) 7/2
d) 5/2
e) 3/2

T.10 O volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são os vetores $\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$; $3\vec{i}-\vec{j}$ e $5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ é:
a) 2
b) 14
c) 18
d) 26
e) 28

T.11 Considere o plano $\pi: 3x+2y+4z-12=0$. Determine, em unidades de volume, o volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados.
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

T.12 (EFOMM) Seja $ax+by+cz+d=0$ a equação do plano que passa pelos pontos $(4,-2,2)$ e $(1,1,5)$ e é perpendicular ao plano $3x-2y+5z-1=0$. A razão $\frac{d}{b}$ é

a) $-\frac{5}{4}$.

b) $\frac{4}{7}$.

c) 8.

d) $-\frac{1}{2}$.

e) $\frac{2}{5}$.

T.13 (EFOMM) Assinale a alternativa que apresenta equações paramétricas da reta r, sabendo-se que o ponto A, cujas coordenadas são $(2,-3,4)$, pertence a r e que r é ortogonal às retas

$$r_1: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y=-x-1 \\ z=3 \end{cases}$$

a) $r: \frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{6}=4-z$

b) $r: \begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+5t \\ z=4 \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} y=x-5 \\ z=6-x \end{cases}$

d) $r: \begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+3t \\ z=4 \end{cases}$

e) $r: \begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+6t \\ z=4-t \end{cases}$

14. (EFOMM) O volume da pirâmide delimitada pelos planos coordenados e pelo plano π: $5x - 2y + 4z = 20$ é:
a) 20/3 u.v.
b) 50/3 u.v.
c) 100/3 u.v.
d) 100 u. v.
e) 200 u.v

15. (EFOMM) Seja A o ponto de intersecção entre as retas $r_1: \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -2z - 1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ 2y = -3 + 2t \\ z = 5 + 9t \end{cases}$ e seja B o ponto de intersecção entre as retas $r_3: \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-3} = z + 1$ e $r_4: \begin{cases} 2x = 15 + 5t \\ 2y = 8 + 3t \\ 2z = 2 + t \end{cases}$. Defina a equação do plano mediador entre os pontos A e B.
a) $3x - 2y - 2z - 6 = 0$
b) $\dfrac{3}{2}x + 5y - \dfrac{3}{4}z - 1 = 0$
c) $55x - 37y + 12z = 1$
d) $2x - 3y + z - 12 = 0$
e) $-28x + 12y - 8z + 64 = 0$

16. (EFOMM) Para descrever um código que permite transformar uma palavra P de três letras em um vetor $w \in \Re^3$, inicialmente, escolhe-se uma matriz 3x3. Por exemplo, a nossa "matriz código" será:

$$A == \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da correspondência:
A $\to$1 / B $\to$ 2 / C $\to$ 3 / D$\to$ 4 / E$\to$ 5 / F $\to$ 6 / G $\to$ 7 /H $\to$ 8 / I $\to$ 9 / J$\to$ 10/ L $\to$ 11 / M $\to$ 12 / N $\to$ 13 /O $\to$ 14 / P $\to$ 15/ Q $\to$ 16 / R $\to$ 17 / S $\to$ 18 / T $\to$19 / U $\to$ 20/ V $\to$ 21 / X $\to$ 22 / Z $\to$ 23

a palavra P é transformada em vetor v do $\Re^3$. Em seguida, o código da palavra P é obtido pela operação w = A v. Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor (12,1,17) = v , a qual é codificada com w = Av = (26,56,19).
Usando o processo acima para decodificar w = (64,107,29), teremos
a) x = 18, y = 14, z = 11 / SOL
b) x = 12, y = 5, z = 11 / MEL
c) x = 12, y = 1, z = 20 / M AU
d) x = 11, y = 20, z = 1 / LUA
e) x = 20, y = 21, z = 1 / UVA

17. (EFOMM) Um paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}=(a,a,a), \vec{v}=(2a,2a,3a)$ e $\vec{w}=(2a\ a,\ a)$ com a ∈ R tem volume igual a 8. Determine o valor de a.
a) 1.
b) 2.
c) 3/2.
d) 3.
e) 5/2

18. (EFOMM) A projeção ortogonal de A sobre a reta BC, sabendo-se que A = (3,7), B = (1,1) e C = (9,6), terá as coordenadas da projeção
a) x = 468/85; y = 321/89.
b) x = 478/87; y = 319/87.
c) x = 487/84; y = 321/87.
d) x = 457/89; y = 319/89.
e) x = 472/89; y = 295/89.

19. (EFOMM) A matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{3x3}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ define em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{v}_i=a_{i1}\vec{i}+a_{i2}\vec{j}+a_{i3}\vec{k}, 1\le i\le 3$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo:
$\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido $\vec{v}_2$ e $|\vec{u}|=3$;
$\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido $\vec{v}_3$ e $|\vec{v}|=2$;
Então, o produto vetorial $\vec{u}\,x\,\vec{v}$ é dado por:
a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}-\left(\sqrt{2}+1\right)\vec{k}\right)$
b) $3\sqrt{2}\left(\vec{i}-\vec{j}+\left(\sqrt{2}-1\right)\vec{k}\right)$
c) $3\left(\sqrt{2}\vec{i}+\vec{j}-\left(\sqrt{2}-1\right)\vec{k}\right)$
d) $2\sqrt{2}\left(\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\left(1-\sqrt{2}\right)\vec{k}\right)$
e) $-3\sqrt{2}\left(\vec{i}+\vec{j}-\left(\sqrt{2}-1\right)\vec{k}\right)$

GABARITO

01. c	**02. e**	**03. a**	**04. d**	**05. e**	**06. b**	**07. c**	**08. b**	**09. c**	**10. d**	**11. c**	**12. a**
13. e	**14. c**	**15. e**	**16. a**	**17. b**	**18. d**	**19. a**					

1. Análise combinatória

INTRODUÇÃO E CONCEITO:

Análise combinatória é a parte da matemática que estuda os diversos tipos de ***agrupamentos*** que podemos formar com os elementos de um conjunto, e também, métodos de contagem indiretos. De forma bem sucinta, podemos dizer que é o número de maneiras distintas (nº de possibilidades) pelas quais um evento poderá se realizar.

Por exemplo, podemos analisar os elementos de um conjunto qualquer, podemos agrupá-los de dois em dois, de três em três, de vinte em vinte, alternar sua ordem de todas as maneiras possíveis, levar em consideração sua ordem ou não, atribuir alguma restrição específica para um ou mais elementos do conjunto, etc. De imediato, pode-se pensar que resolver os exemplos dados, bem como muitos outros, é uma tarefa fácil e ligeira. Todavia, sem os conhecimentos das propriedades desses agrupamentos ou das fórmulas desenvolvidas para estes fins, você verá que, em muitos casos, é humanamente impossível executar tais procedimentos.

A contagem das várias possibilidades de um evento se realizar, pode ser feita através de 4 técnicas muito conhecidas: O PFC (Princípio Fundamental da Contagem, os Arranjos, as Permutações e as Combinações).

Com esta noção inicial de análise combinatória, você já pode notar a importância do estudo dos ***conjuntos*** neste tópico. De fato, no decorrer de nosso estudo, trabalharemos com vários tipos de conjuntos: numéricos, não numéricos, finitos e infinitos assim como suas propriedades. Portanto, faça uma boa revisão de conjuntos!

É importante você notar que, somente em alguns poucos casos bem salientados, estaremos interessados em "***quais***" agrupamentos podemos formar. Na maioria esmagadora das vezes o que estudaremos em análise combinatória é o total desses agrupamentos, ou seja, seu número, sua quantidade.

A análise combinatória tem seu alicerce fundamentado em apenas um princípio que é, como veremos a seguir, muitíssimo importante: o ***Princípio Fundamental da Contagem*** ou ***Princípio Multiplicativo*** **(P.F.C.)**.

Vamos a alguns exemplos de casos estudados em Análise Combinatória:

Exemplo 1: Jogar uma moeda para cima 3 vezes. Quais as possíveis sequências de possibilidades?

Através do Diagrama Sequência ou do Diagrama da Árvore, chegaremos às seguintes sequências:

(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C);(C, K, K); (C, K, C); (C, C, C); (C, C, K).

Percebemos um montante de 8 possibilidades de sequências para o evento citado. Poderíamos chegar nesta mesma quantidade pelo PFC, onde bastaria multiplicar o número de possibilidades em cada etapa do evento principal: 2 . 2 . 2 = 8 possibilidades de sequência.

Yves 1: **CUIDADO!!!** Sequências de Tamanhos Diferentes. Devemos observar que em alguns casos, não poderemos utilizar o princípio fundamental da contagem, sob determinadas restrições impostas pelas questões. Por exemplo: Quais as sequências de resultados possíveis, quando uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram 2 caras consecutivas ou 4 lançamentos feitos, o que ocorrer primeiro. Após montar o Diagrama da Árvore percebemos uma coisa curiosa, além do exemplo não obedecer ao PFC, as sequências apresentam tamanhos diferentes. Como são 4 lançamentos, deveríamos esperar 16 possibilidades de sequência, no entanto fazendo uma a uma, percebemos apenas 12 possibilidades, e 2 delas (em negrito) são de tamanhos distintos:

(K, K); (K, C, K, K); (K, C, K, C); (K, C, C, K); (K, C, C, C); **(C, K, K)**; (C, K, C, K); (C, K, C, C); (C, C, K, K); (C, C, K, C); (C, C, C, K); (C, C, C, C).

Exemplo 2: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Neste exemplo, percebemos facilmente que a **ORDEM É IMPORTANTE**, pois o número "12" é diferente do número "21", logo, estamos diante de um caso de ***Arranjos***, e o número de possibilidades será igual a 81! Resolveremos a questão em momento oportuno. Queríamos apenas salientar a questão da importância da **ORDEM**.

Exemplo 3: Quantas duplas de algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Neste exemplo, percebemos facilmente que a **ORDEM NÃO** é importante, pois a dupla "1 e 2" é igual à dupla "2 e 1", logo, estamos diante de um caso de ***Combinações***, e o número de possibilidades será igual a 45! Resolveremos a questão em momento oportuno. Queríamos apenas salientar a questão da **ORDEM NÃO** ser importante!

☞ **ESTUDO ESPECÍFICO DAS TÉCNICAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA:**

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (P.F.C.):

Antes de enunciarmos este princípio, preste bem atenção no tipo de situação em que você deverá usá-lo. Suponha que você irá realizar uma ação qualquer (qualquer coisa). Suponha também que há efetivamente possibilidades distintas para o seu propósito. O princípio fundamental se faz útil lhe mostrando o total de maneiras de concluir sua ação. Para isso você deve decompor a ação em *etapas independentes*, verificar *quantas* são as possibilidades *de cada etapa* e, em seguida, *multiplicar* os números de possibilidades de todas as etapas.

Seja uma experiência que pode ser dividida em "**n**" etapas sucessivas e independentes entre si ($E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$), sendo $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n$ os números de possibilidades de cada etapa, respectivamente. Então o total de modos de se realizar esta experiência é $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_n$. Logo, pelo P.F.C., temos:

$$\boxed{\textbf{PFC} = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_n}$$

O princípio fundamental da contagem é necessário em análise combinatória, mas não é suficiente. Há certos tipos de problemas nos quais a simples aplicação direta deste princípio ou é pouco prática (muito demorada e complicada) ou é impossível. Tais problemas exigem uma abordagem mais específica. É aí que entram em ação as fórmulas!

Entretanto, como dissemos antes, o princípio fundamental é a base de tudo em análise combinatória, por isso todas as fórmulas que veremos têm suas deduções feitas a partir deste princípio. As fórmulas que estudaremos fazem referência aos três tipos mais importantes de agrupamentos: Arranjos, Permutações e Combinações. Estudaremos com detalhes Arranjos Simples, Arranjos com Repetição, Permutações Simples, Permutações com Repetição, Permutações Circulares, Combinações Simples e Combinações com elementos repetidos.

Exemplo 1: Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}?

Como temos 10 possibilidades de escolha e podemos ter elementos repetidos, basta fazermos: 9 . 10 . 10 = 900 números.

Exemplo 2: Quantas senhas de um programa de computador podemos formar utilizando a seguinte sequência de caracteres LLNNN?

Como temos 26 possibilidades de escolha para cada letra e 10 possibilidades de escolha para cada algarismo e também não temos restrição quanto a repetição de elementos, basta fazermos: 26 . 26 . 10 . 10 . 10 = 26^2 . 10^3 = 676.000 possibilidades.

ARRANJOS SIMPLES:

São *agrupamentos* que podemos formar com os elementos de um conjunto levando em consideração sua ordem e sua natureza sem repetirmos nenhum deles. Portanto, dois arranjos quaisquer se distinguem pela ordem ou pela natureza de seus elementos. Note que a ordem e a natureza **SÃO** importantes!

$$\boxed{\mathbf{A_{n,p}} = n.(n-1).(n-2)._{...}.(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Lê-se: arranjos simples de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p***.

Exemplo 1: Um baralho apresenta 52 cartas. Se tirarmos 3 cartas de forma sucessiva e sem reposição, de quantas maneiras distintas podemos retirá-las?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada retirada de uma carta, diminui o montante de cartas a serem novamente escolhidas. Logo, bastaria fazermos: 52.51.50 = 132.600 maneiras.

Exemplo 2: De quantas maneiras poderíamos preencher 3 lugares disponíveis em uma fila dispondo de 7 pessoas?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada preenchimento de um lugar disponível com uma pessoa, diminui o número de pessoas disponíveis para a próxima escolha. Logo, bastaria fazermos: 7.6.5 = 210 maneiras.

Exemplo 3: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Chegou o momento de solucionarmos este exemplo que foi comentado no início do material. Poderíamos resolver a questão por PFC ou pela aplicação da fórmula de arranjos:

- Pelo PFC, teríamos: 10 . 9 = 90 números.

- Pela fórmula, teríamos:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90 \text{ números}$$

Arranjos com Repetição:

É quando se permite a repetição de elementos no arranjo. Mas lembre-se que a ordem e a natureza devem ser consideradas. Eis a formula:

$$\boxed{(\mathbf{AR})_{\mathbf{n,p}} = \mathrm{n}^{\mathrm{p}}}$$

Exemplo 1: Quantos números de 3 algarismos conseguimos formar com os seguintes algarismos {1, 2, 3, 4, 5}?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada escolha de um algarismo, temos sempre a mesma quantidade para fazer a nova escolha, visto que os elementos podem se repetir. Logo, bastaria fazermos: 5 . 5 . 5 = 125 algarismos. Aplicando a fórmula, teríamos: $(AR)_{5,3} = 5^3 = 125$ algarismos.

Exemplo 2: Considerando uma urna com bolas de mesmo material e cores diferentes, deseja-se retirar 2 bolas para observarmos a cor. Se a retirada for feita com reposição, de quantas maneiras poderíamos observar a sequência de cores, considerando que a urna apresenta 10 bolas?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada escolha de uma bola, temos sempre a mesma quantidade para fazer a nova escolha, visto que os elementos podem se repetir. Logo, bastaria fazermos: 10 . 10 = 100 maneiras. Aplicando a fórmula, teríamos: $(AR)_{10,2} = 10^2 = 100$ maneiras.

Permutações Simples:

São *agrupamentos* que podemos formar com os elementos de um conjunto de modo que todos os elementos deste conjunto *apenas* trocam de lugar entre si. Portanto o que distingue duas permutações é apenas a ordem dos elementos. Note que a ordem é importante! Os elementos devem ser distintos, e não é permitida a repetição.

$$\boxed{\mathbf{P_n} = \mathrm{n}!}$$

Obs.: Permutações simples são na realidade arranjos simples quando "n" é igual a "p".

Exemplo 1: De quantas maneiras 3 crianças conseguem ocupar 3 cadeiras?

Esta questão pode ser feita de 3 maneiras distintas.

☞ **1ª Maneira:** Descrevendo todas as possibilidades:

A – B – C	B – C – A
A – C – B	C – A – B
B – A – C	C – B – A

2ª Maneira: Pelo PFC: 3 . 2 . 1 = 6 maneiras.

3ª Maneira: Pela fórmula: $\mathbf{P_n = n!}$ $\therefore P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$ maneiras.

Exemplo 2: De quantas maneiras 3 pessoas podem sentar-se em 4 poltronas no cinema?

Esta questão pode ser feita de forma mais prática, de 2 maneiras distintas.

1ª Maneira: Pelo PFC: 4.3.2.1 = 24 maneiras.

2ª Maneira: Pela fórmula: $\mathbf{P_n = n!}$ $\therefore P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ maneiras.

Exemplo 3: De quantas maneiras podemos organizar 5 quadros de 2 pintores, enfileirados numa parede? Deve-se levar em consideração que Antônio tem 2 quadros e Beto, 3 quadros. Os quadros de um mesmo pintor tem de permanecer juntos.

Neste exemplo devemos perceber que temos várias permutações em um mesmo evento. O resultado final será igual ao produto das permutações das etapas. Temos a permutação entre os 2 quadros de Antônio (P_2), temos a permutação dos 3 quadros do Beto (P_3) e temos a permutação entre os 2 quadros de Antônio e os 3 quadros de Beto (P_2), logo nosso cálculo ficará: $P = P_2 . P_3 . P_2 = 2! . 3! . 2! = 2 . 1 . 3 . 2 . 1 . 2 . 1 = 24$ maneiras.

Exemplo 4: Quantos anagramas conseguimos formar com a palavra **AMO?**

$P_3 = 3! = 3 . 2 . 1 = 6$ anagramas.

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO:

É quando se permite a repetição de elementos no arranjo. Mas lembre-se de que todos os elementos devem apenas trocar de lugar entre si. Eis a fórmula:

$$\boxed{\mathbf{P_n^{\alpha,\beta,\gamma}} = \frac{n!}{\alpha!\ .\ \beta!\ .\ \gamma!\ .\ ...}}$$

Exemplo 1: De quantas maneiras podemos organizar 5 livros em uma estante sendo 2 livros iguais?

Faremos a permutação de 5 elementos, sendo que 1 deles se repete 2 vezes, então teremos:

$$\mathbf{P_5^2} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60 \text{ maneiras}$$

Exemplo 2: De quantas maneiras 3 pessoas poderiam ocupar 6 cadeiras em um cinema?

Faremos a permutação de 6 elementos, onde cada cadeira vazia conta como elemento e eles ainda são repetidos. Então teremos:

$$\mathbf{P_6^3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120 \text{ maneiras}$$

Exemplo 3: Quantos anagramas conseguimos formar com a palavra **JEFFERSSON?**

Temos uma palavra com 10 letras e as letras **"E", "F" e "S"** se repetem 2 vezes cada. Então teremos:

$$\mathbf{P_{10}^{2,2,2}} = \frac{10!}{2!\ .\ 2!\ .\ 2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}.2.1.2.1}$$

$$\mathbf{P_{10}^{2,2,2}} = 453.600 \text{ anagramas}$$

PERMUTAÇÕES CIRCULARES:

Dá-se esse nome às permutações em que os elementos estão dispostos de maneira circular ou aproximadamente circular. Lembre-se novamente que, sendo uma permutação, os elementos envolvidos apenas trocarão de lugar entre si.

Eis a fórmula:

$$\boxed{(\mathbf{PC})_{\mathbf{n}} = (n-1)!}$$

Lê-se: Permutações circulares de n elementos.

Obs.: Não abordaremos *Permutações Circulares com Elementos Repetidos* neste material.

Exemplo 1: De quantas maneiras 6 pessoas poderiam se organizar a redor de uma mesa circular?

Faremos a permutação de 6 elementos diretamente pela fórmula:
$(PC)_6 = (6 – 1)! = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ maneiras.

Exemplo 2: Quantas são as maneiras possíveis de organizar 4 crianças ao redor de uma mesa quadrada de bordas iguais?

Faremos a permutação de 4 elementos diretamente pela fórmula:
$(PC)_4 = (4 – 1)! = 3! = 3 . 2 . 1 = 6$ maneiras.

COMBINAÇÕES SIMPLES:

Chamamos de combinações simples os agrupamentos que podemos formar com os elementos de um conjunto levando em consideração apenas sua natureza *sem repetir elemento algum*. Portanto, duas combinações diferem entre si apenas pela natureza e não pela ordem de seus elementos. Então agora, a **ORDEM NÃO** é importante!

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Lê-se: Combinações simples de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p***.

Exemplo 1: Quantas duplas de algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Este exemplo foi comentado no início da nossa exposição e agora chegou o momento oportuno de solucioná-lo. Faremos a combinação de 10 elementos tomados 2 a 2, pela fórmula da combinação:

$$\mathbf{C_{10,2}} = \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} = \frac{10!}{2!\,.\,(10-2)!} = \frac{10!}{2!\,.\,8!}$$

$$\mathbf{C_{5,2}} = \frac{10.9.\cancel{8!}}{2.1\,.\cancel{8!}} = 45 \text{ duplas}$$

Exemplo 2: Quantas vitaminas distintas são possíveis preparar com as seguintes frutas {banana, mamão, abacate, maçã, melão e uva}, levando-se em consideração que a vitamina deva apresentar 3 frutas?

$$\mathbf{C_{6,3}} = \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \frac{6!}{3!\,.\,(6-3)!} = \frac{6!}{3!\,.\,3!}$$

$$\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{3.2.1.\cancel{3!}} = 20 \text{ vitaminas}$$

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO:

É quando se permite que todos os n elementos possam aparecer repetidos em cada agrupamento até p vezes. Lembre-se novamente que, sendo uma combinação, apenas a natureza dos elementos interessa!
Eis a fórmula:

$$(\mathbf{CR})_{\mathbf{n,p}} = C_{n+p-1,p} = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Exemplo 1: Quantas duplas podemos formar com o seguinte conjunto S = {A, B, C, D}?

Aplicaremos a fórmula da combinação com repetição para **n=4** e **p=2**:

$$(\boldsymbol{CR})_{\mathbf{4,2}} = \mathrm{C}_{4+2-1;2} = \mathrm{C}_{5,2} = \frac{5!}{2!\ .\ (5-2)!}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{5,2}} = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{2.1.\cancel{3!}} = 10 \text{ duplas}$$

Exemplo 2: De quantas maneiras poderíamos comprar 3 guloseimas num mercadinho que disponibilizasse os seguintes produtos {chiclete, bala, pirulito, pipoca, rosquinha}?

Aplicaremos a fórmula da combinação com repetição para **n=5** e **p=3**:

$$(\mathbf{CR})_{\mathbf{5,3}} = \mathrm{C}_{5+3-1;3} = \mathrm{C}_{7,3} = \frac{7!}{3!\ .\ (7-3)!}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{7,3}} = \frac{7!}{3!\,.\,4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{3.2.1.\cancel{4!}} = 35 \text{ maneiras}$$

Testes de fixação

T.01 (EFOMM) Um decorador contemporâneo vai usar quatro "objetos" perfilados lado a lado como decoração de um ambiente. Ele dispõe de 4 copos transparentes azuis, 4 copos transparentes vermelhos, duas bolas amarelas e 3 bolas verdes. Cada "objeto" da decoração pode ser um copo vazio ou com 1 bola dentro. Considerando que a cor altera a opção do "objeto", quantas maneiras distintas há de perfilar esses 4 "objetos", levando-se em conta que a posição em que ele se encontra altera a decoração?
a) 1296
b) 1248
c) 1152
d) 1136
e) 1008

T.02 (EFOMM) Quantos anagramas é possível formar com a palavra **CARAVELAS**, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?
a) 24
b) 120
c) 480
d) 1920
e) 3840

T.03 (EFOMM) A quantidade de anagramas da palavra MERCANTE que não possui vogais juntas é
a) 40320.
b) 38160.
c) 37920.
d) 7200.
e) 3600.

T.04 (EFOMM) Uma turma de alunos do 1º ano da EFOMM tem aulas às segundas, quartas e sextas, de 8h40 às 10h20 e de 10h30 às 12h. As matérias são Arquitetura Naval, Inglês e Cálculo, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?
a) 9.
b) 18.
c) 36.
d) 48.
e) 54.

T.05 (EFOMM) O código Morse, desenvolvido por Samuel Morse, em 1835, é um sistema de representação que utiliza letras, números e sinais de pontuação através de um sinal codificado intermitentemente por pulsos elétricos, perturbações sonoras, sinais visuais ou sinais de rádio. Sabendo-se que um código semelhante ao código Morse trabalha com duas letras pré-estabelecidas, ponto e traço, e codifica com palavras de 1 a 4 letras, o número de palavras criadas é:
a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 30.

T.06 (EFOMM) Uma pessoa fará uma viagem e em cada uma de suas duas malas colocou um cadeado contendo um segredo formado por cinco dígitos. Cada dígito é escolhido dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Na primeira mala, o segredo do cadeado começa e termina com dígito par e os demais são dígitos consecutivos em ordem crescente. Na segunda mala, o segredo do cadeado termina em dígito ímpar e apenas o 1º e o 2º dígitos são iguais entre si. Dessa maneira, se ela esquecer:

a) o segredo do cadeado da sua primeira mala deverá fazer no máximo $5^2 \times 8^3$ tentativas para abri-lo.

b) o segredo do cadeado da segunda mala, o número máximo de tentativas para abri-lo será de 1.890

c) apenas os três dígitos consecutivos em ordem crescente do cadeado da primeira mala, ela conseguirá abri-lo com, no máximo, 8 tentativas.

d) apenas os dois primeiros dígitos do cadeado da segunda mala, deverá tentar no máximo 10 vezes para abri-lo.

2. Probabilidade

INTRODUÇÃO E CONCEITO:

Probabilidade é a parte da matemática que estuda quantitativamente as chances ou possibilidades de algo ocorrer. Esta parte da matemática é a responsável por quantificar a possibilidade de realização de um evento aleatório, ou seja, é a quantificação de uma incerteza. Para compreendermos de forma plausível o conteúdo de Probabilidade, se faz necessário conhecer alguns conceitos importantes que nortearão todo o conteúdo. Esses conceitos são: experimentos, espaço amostral e eventos.

EXPERIMENTO:

Chamamos de ***experimento***, em probabilidade, tudo (qualquer coisa) que pode ser feito ou realizado. Os experimentos podem ser de dois tipos: ***experimentos determinísticos*** e ***experimentos aleatórios***.

• ***Experimentos determinísticos*** são aqueles cujos resultados são previsíveis, isto é, podemos saber seus resultados mesmo antes de realizá-los.

Exemplo: De quantas maneiras poderíamos escolher 3 bolas pretas e 2 bolas vermelhas em uma urna?

• ***Experimentos aleatórios*** não podem ter seus resultados previstos antes de sua realização, isto é, mesmo se repetirmos esses experimentos nas mesmas condições, os resultados podem ser distintos. As leis que regem os experimentos aleatórios são as leis do acaso.

Exemplo: Retirar uma bola de uma urna contendo 3 bolas pretas e 2 bolas vermelhas e observar a sua cor.

ESPAÇO AMOSTRAL:

É o conjunto cujos elementos são todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Um espaço amostral pode ser de dois tipos: ***equiprovável*** ou ***não-equiprovável***, ambos podendo ser finitos ou infinitos. Não abordaremos, neste material, problemas que envolvam espaço amostral infinito.

• ***Espaço amostral equiprovável*** é aquele no qual todos os seus elementos, individualmente, têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Exemplo 1: lançar um dado para cima e observar o número da face voltada para cima. (Espaço amostral equiprovável finito).

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \therefore n(U) = 6$

Exemplo 2: Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima. (Espaço amostral equiprovável finito).

$U = \{K, C\} \therefore K = \text{cara}; C = \text{coroa} \therefore n(U) = 2$

Exemplo 3: Lançar uma moeda até sair a face “cara” voltada para cima. Observaremos em qual lançamento isto ocorrerá. (Espaço amostral equiprovável infinito).

U = {1, 2, 3, 4, ...}

• ***Espaço amostral não-equiprovável*** é aquele no qual nem todos os elementos, individualmente, têm a mesma probabilidade de ocorrência. Alguns têm mais ou menos probabilidade de ocorrer que outros.

Exemplo 1: lançar um dado para cima e observar o número da face voltada para cima. Sabe-se que a probabilidade de ocorrência da face 6 é o dobro da face 1 (Espaço amostral não – equiprovável finito).

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\therefore$ n(U) = 6
P(6) = 2.P(1)

EVENTO:

Chamamos de *evento*, em probabilidade, qualquer subconjunto de um espaço amostral. Naturalmente um evento pode ser um conjunto vazio (*evento impossível*) ou até mesmo o próprio espaço amostral (*evento certo*). É importante o aluno notar, neste momento, que sendo todos os eventos conjuntos, podemos realizar as operações tradicionais de conjuntos entre eles (união, intersecção, subtração, complementação, etc.) formando assim novos conjuntos ou eventos.

Exemplos: consideremos o seguinte experimento aleatório: lançamento de um dado não-viciado e a observação do número contido na sua face superior.

⇨ Para esse experimento, temos o seguinte espaço amostral: U = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Note que esse espaço amostral é equiprovável e tem seis elementos, ou seja, n(U) = 6. Dizemos, nesse exemplo, que são seis casos possíveis.

- Agora sejam os seguintes eventos:

a) Evento A: saída de número par.
A = {2; 4; 6} e n(A) = 3. Dizemos, nesse exemplo, que são três os casos favoráveis à ocorrência do evento A.

b) Evento B: saída de número maior que dois.
B = {3; 4; 5; 6} e n(B) = 4. Dizemos, nesse exemplo, que são quatro os casos favoráveis à ocorrência do evento B.

c) Evento C: saída de número primo.
C = {2; 3; 5} e n(C) = 3. Dizemos, nesse exemplo, que são três os casos favoráveis à ocorrência do evento C.

d) Evento A $\cup$ C (lê-se: A ou C): saída de número par ou primo.
A $\cup$ C = {2; 3; 4; 5; 6} e n(A $\cup$ C) = 5. Dizemos, nesse exemplo, que são cinco os casos favoráveis à ocorrência do evento A $\cup$ C.

e) Evento $A \cap C$ (lê-se: A e C): saída de número par e primo.
$A \cap C = \{2\}$ e $n(A \cap C) = 1$. Dizemos, nesse exemplo, que há apenas um caso favorável à ocorrência do evento $A \cap C$.

f) Evento $\bar{A} = U - A$ (lê-se: não A ou complementar de A): saída de número que não seja par.

$\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ e $n(\bar{A}) = 3$. Dizemos, nesse exemplo, que são três os casos favoráveis à ocorrência do evento $\bar{A}$. Note que o evento $\bar{A}$ equivale a saída de número ímpar, que $A \cup \bar{A} = U$ e que $A \cap \bar{A} = \varnothing$.

Obs.:
a) quando dois eventos de um espaço amostral qualquer forem *exaustivos* (sua união é o próprio espaço amostral) e *disjuntos (sua intersecção é o vazio)*, dizemos que eles são complementares. Os eventos A e $\bar{A}$ são, portanto, complementares.

b) quando dois eventos de um espaço amostral qualquer forem disjuntos, eles são chamados de *mutuamente exclusivos*. Os eventos A e $\bar{A}$ são, portanto, mutuamente exclusivos e os eventos B e C não.

DEFINIÇÃO GERAL DE PROBABILIDADE:

Seja $U = \{x_1; x_2; x_3; \ldots ; x_n\}$ o espaço amostral de um experimento qualquer que pode ser equiprovável ou não. Sejam $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, ... ,
{xn} os eventos unitários, individuais ou elementares desse espaço amostral.

• $0 \leq P(\{x_i\}) \leq 1$, para todo x_i com i = 1, 2, 3, ... , n.

• **<u>Definição</u>:**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(\{X_1\}) = 1}$$

$$\boxed{P(\{X_1\}) + P(\{X_2\}) + P(\{X_3\}) + \cdots + P(\{X_n\})}$$

A probabilidade de qualquer evento unitário está sempre entre 0 (zero) e 1 (um), inclusive.
O somatório das probabilidades dos eventos unitários é constante e vale 1 (um).

A probabilidade de um evento qualquer ocorrer, é a soma das probabilidades de ocorrência de seus elementos (eventos unitários).

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE NUM ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Num espaço equiprovável, onde os todos os eventos unitários têm a mesma chance, a probabilidade de um evento A ocorrer é dada por:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número de casos possíveis}}}$$

Exemplo 1: Uma moeda foi lançada. Qual a probabilidade de sair a face cara (K)?

U = {K, C} $\therefore$ n(U) = 2
A = {K} $\therefore$ n(A) = 1

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{2}}$$

Exemplo 2 Considere um baralho com 52 cartas. Qual a probabilidade de:

a) Sair um rei de copas?

U = $\{2_C, 3_C, 4_C, ..., K_E\}\therefore$52 cartas $\therefore$ n(U) = 52
A = $\{K_C\}\therefore$rei de copas$\therefore$n(A) = 1

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{52}}$$

b) Sair um rei?

U = $\{2_C, 3_C, 4_C, ..., K_E\}\therefore$52 cartas $\therefore$ n(U) = 52
A = $\{K_C, K_P, K_O, K_E\}\therefore$n(A) = 4

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL OU CONDICIONADA

Sejam A e B ($B \neq \emptyset$) dois eventos de um espaço amostral U equiprovável. Denomina-se probabilidade de **A condicionada a B** ou **probabilidade de A dado B**, indicada por P(A/B), a probabilidade de ocorrência de A sendo que B já ocorreu. Note que, nesse caso, temos um novo espaço amostral igual ao evento B e os únicos casos favoráveis a ocorrência de A, estão em $A \cap B$. Segue, portanto, a definição:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

ou, de maneira equivalente:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemplo 1: Qual a probabilidade de lançarmos um dado honesto e obtermos a face 1, sabendo que a face será ímpar?

P(face 1|face ímpar) = 1/3

ou de maneira semelhante:

$$P(A|B) = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$$

Note que o espaço amostral foi reduzido exatamente ao 2º evento.

Exemplo 2: Uma cidade cadastrou 400 pessoas pelo sexo e pelo estado civil. Os dados do cadastro estão na tabela abaixo:

	(S)	(C)	(D)	(V)
(M)	150	30	20	20
(F)	50	50	50	30

a) Ao sortear uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade que seja do sexo masculino, sabendo-se que é solteira e vice-versa?

P(M|S) = 150/200 = **3/4**
P(S|M) = 150/220 = **15/22**

b) Ao sortear uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade que seja desquitada, sabendo-se que é do sexo feminino e vice-versa?

P(D|F) = 50/180 = **5/18**
P(F|D) = 50/70 = **5/7**

T.01 (EFOMM) Um programa de auditório tem um jogo chamado "Porta Premiada", que funciona da seguinte maneira:

1º - há três portas: uma tem prêmios e duas estão vazias;

2º - o apresentador pede ao convidado que escolha uma das portas;

3º - após a escolha, o apresentador abre uma das duas portas não escolhidas. Como ele sabe qual é a premiada, abre uma vazia;

4º - depois de aberta uma das portas, ele pergunta ao convidado se deseja trocar de porta;

5º - finalmente, abre a porta do convidado para verificar se ganhou ou perdeu.

Analisando o jogo de forma puramente probabilística, verifique qua(l)(is) das estratégias abaixo tem a maior probabilidade de vencer o jogo.

I – Após escolher a porta, não trocá-la até o final do jogo.
II – Todas as probabilidades são iguais; não há estratégia melhor que a outra, ou seja, tanto faz trocar ou não a porta.
III – A melhor estratégia é sempre trocar a porta.
Sobre as estratégias I, II e III apresentadas, é correto afirmar que
a) somente a alternativa I está correta.
b) somente a alternativa II está correta.
c) somente a alternativa III está correta.
d) nenhuma alternativa está correta.
e) todas as alternativas apresentam circunstâncias com a mesma probabilidade de vencer.

T.02 (EFOMM) Um garoto dispõe de um único exemplar de cada poliedro de Platão existente. Para brincar, ele numerou cada vértice, face e aresta de cada poliedro sem repetir nenhum número. Em seguida, anotou esses números no próprio poliedro. Se ele sortear um dos números usados, aleatoriamente, qual será a probabilidade de o número sorteado representar um vértice?
a) 5/9
b) 5/14
c) 1/3
d) 5/19
e) 1/10

T.03 (EFOMM) Um atleta de tiro ao prato tem probabilidade de 0,9 de acertar o prato a cada novo lançamento. Analisando esse jogador antes do início da competição, após quantos lançamentos de pratos, a probabilidade de ele não ter acertado todos os tiros se tornará maior que a probabilidade de acertar todos?
a) 9
b) 8
c) 7
d) 6
e) 5

T.04 (EFOMM) Seis alunos da EFOMM – três paranaenses, dois cariocas e um alagoano – são colocados em uma fila aleatoriamente. Qual é a probabilidade, então, de que nenhum conterrâneo fique ao lado do outro?
a) 3/31
b) 1/36
c) 1/24
d) 1/12
e) 1/6

T.05 (EFOMM) Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que *b* seja sucessor de *a* e que *c* seja sucessor de *b* OU que *a*, *b* e *c* sejam primos?
a) 4/216
b) 27/216
c) 108/216
d) 31/216
e) 10/216

T.06 (EFOMM) Um juiz de futebol trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma outra face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, a probabilidade de a face voltada para o juiz ser vermelha será
a) 1/6
b) 1/3
c) 2/3
d) 1/2
e) 3/2

T.07 (EFOMM) Suponha um lote com dez peças, sendo duas defeituosas. Testam-se as peças, uma a uma, até que sejam encontradas as duas defeituosas. A probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste é igual a
a) 1/45.
b) 2/45.
c) 1/15.
d) 4/45.
e) 1/9.

T.08 (EFOMM 2017) Um cubo de lado 2a possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?
a) $\pi / 6$
b) $2\sqrt{3} / 3\pi$
c) $\pi\sqrt{3} / 6$
d) $2\pi / 6\sqrt{3}$
e) $1/2$

Gabarito

1. Análise Combinatória

01. d	02. c	03. d	04. d	05. e	06. c

2. Probabilidade

01. c	02. d	03. c	04. e	05. d	06. b	07. b	08. b

TESTES DE APRENDIZAGEM – COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

T.01 (AFA) Uma pessoa fará uma viagem e em cada uma de suas duas malas colocou um cadeado contendo um segredo formado por cinco dígitos. Cada dígito é escolhido dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Na primeira mala, o segredo do cadeado começa e termina com dígito par e os demais são dígitos consecutivos em ordem crescente. Na segunda mala, o segredo do cadeado termina em dígito ímpar e apenas o 1º e o 2º dígitos são iguais entre si. Dessa maneira, se ela esquecer:
a) o segredo do cadeado da sua primeira mala deverá fazer no máximo $5^2 \times 8^3$ tentativas para abri-lo.
b) o segredo do cadeado da segunda mala, o número máximo de tentativas para abri-lo será de 1.890
c) apenas os três dígitos consecutivos em ordem crescente do cadeado da primeira mala, ela conseguirá abri-lo com, no máximo, 8 tentativas.
d) apenas os dois primeiros dígitos do cadeado da segunda mala, deverá tentar no máximo 10 vezes para abri-lo.

T.02 (AFA) Para evitar que João acesse site não recomendados na Internet, sua mãe quer colocar uma senha no computador formada apenas por m letras A e também m letras B (sendo m par). Tal senha, quando lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, não deverá se alterar (Ex.: ABBA). Com essas características, o número máximo de senhas distintas que ela poderá criar para depois escolher uma é igual a:

a) $\dfrac{(2m)!}{m! \cdot m!}$

b) $\left[\dfrac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m}{2}\right)!}\right]^2$

c) $\dfrac{(2m)!}{\left(\frac{m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{3m}{2}\right)!}$

d) $\dfrac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m}{2}\right)!}$

T.03 (AFA) Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo: 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco. Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra tão somente pela cor dos carros, o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as dez vagas é igual a
a) 12 600
b) 16 200
c) 21 600
d) 26 100

T.04 (AFA) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A).
Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a
a) 612
b) 613
c) 614
d) 615

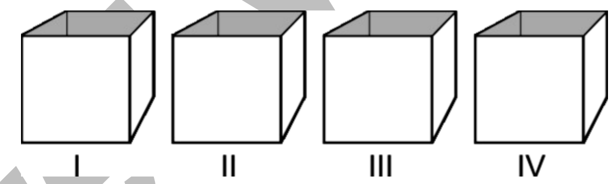
T.05 (AFA) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração.
A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é
a) 8.7 !
b) 7 !
c) 5.4 !
d) 10 !

T.06 (AFA) Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:

I. obrigatoriamente, conhecer o Estádio do Maracanã.
II. se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em 12 estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação I e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação II, nessa ordem, é
a) 11/26
b) 13/25
c) 13/24
d) 11/24

T.07 (AFA) Sr. José deseja guardar 4 bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em 4 caixas numeradas:



O número de maneiras de Sr. José guardar todas as 4 bolas de forma que uma mesma caixa NÃO contenha mais do que duas bolas, é igual a
a) 24
b) 36
c) 144
d) 204

T.08 (AFA) Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados 10 soldados, dentre eles o soldado A e o soldado B, de tal maneira que fiquem 4 soldados na barraca I, 3 na barraca II e 3 na barraca III.
Se o soldado A deve ficar na barraca I e o soldado B NÃO deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a
a) 1120
b) 560
c) 1680
d) 2240

T.09 (AFA) Um colecionador deixou sua casa provido de R$ 5,00, disposto a gastar tudo na loja de miniaturas da esquina. O vendedor lhe mostrou três opções que havia na loja, conforme a seguir.

- 5 diferentes miniaturas de carros, custando R$ 4,00 cada miniatura;
- 3 diferentes miniaturas de livros, custando R$ 1,00 cada miniatura;
- 2 diferentes miniaturas de bichos, custando R$ 3,00 cada miniatura.

O número de diferentes maneiras desse colecionador efetuar a compra das miniaturas, gastando todo o seu dinheiro, é
a) 15
b) 21
c) 42
d) 90

T.10 (AFA) Numa sala de aula, estão presentes 5 alunos e 6 alunas. Para uma determinada atividade, o professor deverá escolher um grupo de 3 dessas alunas e 3 dos alunos. Em seguida, os escolhidos serão dispostos em círculo de tal forma que alunos do mesmo sexo não fiquem lado a lado. Isso poderá ocorrer de **n** maneiras distintas.
O número **n** é igual a:
a) 24000
b) 2400
c) 400
d) 200

T.11 (AFA) As senhas de acesso a um determinado arquivo de um microcomputador de uma empresa deverão ser formadas apenas por 6 dígitos pares, não nulos.
Sr. José, um dos funcionários dessa empresa, que utiliza esse microcomputador, deverá criar sua única senha.
Assim, é **INCORRETO** afirmar que o Sr. José
a) poderá escolher sua senha dentre as 2^{12} possibilidades de formá-las.
b) terá 4 opções de escolha, se sua senha possuir todos os dígitos iguais.
c) poderá escolher dentre 120 possibilidades, se decidir optar por uma senha com somente 4 dígitos iguais.
d) terá 480 opções de escolha, se preferir uma senha com apenas 3 dígitos iguais.

T.12. (AFA) Considere que:

I) em uma urna encontram-se p bolas vermelhas e q bolas azuis;

II) duas bolas são retiradas dessa urna, sucessivamente e com reposição.

Sabe-se que x é a variável que indica o número de bolas azuis observadas com as retiradas, cuja distribuição de probabilidade está de acordo com a tabela a seguir:

x	0	1	2
P(x)	0,36	0,48	0,16

Nessas condições, é correto afirmar que:

a) a probabilidade de se observar no máximo uma bola azul é 64%

b) se p = 6, então q = 9
c) se p = 18, então q = 12
d) p + q é necessariamente menor ou igual a 100

T.13 (AFA) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem o dobro da probabilidade de vencer que o estudante C. Admitindo-se que não haja empate na competição, é FALSO afirmar que a probabilidade de:
a) A ou B vencer é igual a 0,8
b) A vencer é igual a 0,4
c) C vencer é maior que 0,2
d) B ou C vencer é igual a 0,6

T.14 (AFA) No lançamento de um dado viciado, a face 6 ocorre com o dobro da probabilidade da face 1, e as outras faces ocorrem com a probabilidade esperada em um dado não viciado de 6 faces numeradas de 1 a 6. Dessa forma, a probabilidade de ocorrer a face 1 nesse dado viciado é:
a) 1/36
b) 2/3
c) 1/9
d) 2/9

T.15 (AFA) Dentro de uma caixa há nove etiquetas. Cada etiqueta recebe um número de 01 a 09, sem repetir nenhum. Retira-se três delas, uma a uma, sem reposição. A probabilidade de que os três números correspondentes às etiquetas retiradas sejam, nesta ordem: ÍMPAR – PAR – ÍMPAR ou PAR – ÍMPAR – PAR é de:
a) 1/28
b) 20/81
c) 5/18
d) 5/36

T.16 (AFA) Durante o desfile de Carnaval das escolas de samba do Rio de Janeiro em 2017, uma empresa especializada em pesquisa de opinião entrevistou 140 foliões sobre qual agremiação receberia o prêmio de melhor do ano que é concedido apenas a uma escola de samba.

Agrupados os resultados obtidos, apresentaram-se os índices conforme o quadro a seguir:

Agremiação escolhida	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A,B e C
Nº de foliões que escolheram	77	73	70	20	25	40	5

A respeito dos dados colhidos, analise as proposições a seguir e classifique-as em V(VERDADEIRA) ou F(FALSA).

( ) Se A for a agremiação vencedora em 2017 e se um dos foliões que opinaram for escolhido ao acaso, então a probabilidade de que ele NÃO tenha votado na agremiação que venceu é igual a 45%.

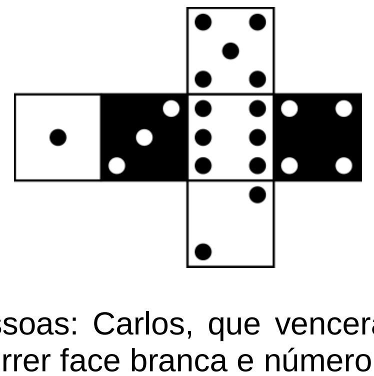
( ) Escolhido ao acaso um folião, a probabilidade de que ele tenha indicado exatamente duas agremiações é de 50%.
( ) Se a agremiação B for a campeã em 2017, a probabilidade de que o folião entrevistado tenha indicado apenas esta como campeã é menor que 10%.

A sequência correta é
a) V – V – F
b) F – V – V
c) F – V – F
d) V – F – V

T.17 (AFA) Num auditório da Academia da Força Aérea estão presentes 20 alunos do Curso de Formação de Oficiais Aviadores dos quais apenas 10 usam agasalho. Estão presentes, também, 25 alunos do Curso de Formação de Oficiais Intendentes dos quais apenas 15 usam agasalho. Um dos alunos presentes é escolhido ao acaso.
É correto afirmar que é igual a 2/9 a probabilidade de que o aluno escolhido
a) seja do Curso de Formação de Oficiais Intendentes ou use agasalho.
b) use agasalho, sabendo que é do Curso de Formação de Oficiais Intendentes.
c) seja do Curso de Formação de Oficiais Aviadores que não use agasalho.
d) não use agasalho, sabendo que é do Curso de Formação de Oficiais Aviadores.

T.18 (AFA) Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 tem espinhos e o vaso B contém 8 rosas sendo que exatamente 6 não tem espinhos.
Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B.
A probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos é
a) 8/81
b) 15/81
c) 18/81
d) 23/81

T.19 (AFA) Um jogo é decidido com um único lançamento do dado cuja planificação está representada abaixo.



Participam desse jogo quatro pessoas: Carlos, que vencerá o jogo se ocorrer face preta ou menor que 3; José vencerá se ocorrer face branca e número primo; Vicente vencerá caso ocorra face preta e número par; Antônio vencerá se ocorrer face branca ou número menor que 3.

Nessas condições, é correto afirmar que
a) Vicente não tem chance de vencer.
b) Carlos tem, sozinho, a maior probabilidade de vencer.
c) a probabilidade de José vencer é o dobro da de Vicente.
d) a probabilidade de Antônio vencer é maior do que a de Carlos.

TESTES DE GERAIS DA ESCOLA NAVAL

1. (EN) O conjunto das soluções $x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0$ é:

a) $(-\infty, -1) \cup [4, +\infty)$

b) $[4, +\infty)$

c) $[2, +\infty)$

d) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

e) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2. (EN) Considere os conjuntos $A = \{x\}$ e $B = \{x, \{A\}\}$ e as proposições:

I. $\{A\} \in B$

II. $\{x\} \in A$

III. $A \in B$

IV. $B \subset A$

V. $\{x, A\} \subset B$

As proposições FALSAS são:

a) I,III e V
b) II,IV e V
c) II,III,IV e V
d) I,III,IV e V
e) I,III e IV

3. (EN) Considere f a função real de variável real tal que:

(1) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

(2) $f(1) = 3$

(1) $f(\sqrt{2}) = 2.$

Então $f(2 + 3\sqrt{2})$ é igual a

a) 108
b) 72
c) 54
d) 36
e) 12

4. (EN) Considere a equação $x^2 + bx + c = 0$, onde c representa a quantidades de valores inteiros que satisfazem a inequação $|3x - 4| \leq 2$. Escolhendo-se o número b, ao acaso, no conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, qual é a probabilidade da equação acima ter raízes reais?

a) 0,50
b) 0,70
c) 0,75
d) 0,80
e) 1

5. (EN) O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite partículas alfa, se transformando no elemento Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t) = N_0 e^{-\alpha t}$, onde N_0 é a quantidade de partículas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra; N(t) é a quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante, chamada constante de desintegração. Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre

a) 500 e 1000 anos.
b) 1000 e 1500 anos.
c) 1500 e 2000 anos.
d) 2000 e 2500 anos.
e) 2500 e 3000 anos.

6. (EN) Considere as funções reais $f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$ e $g(x) = 2^{\frac{x}{2}}, x \in \Re$. Qual é o valor da função composto $(g \circ f^{-1})(90)$?

a) 1
b) 3
c) 9
d) $1/10$
e) $1/3$

7. (EN) Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \Re / \left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4\right\}$ e $B = \left\{x \in \Re / \log_9 (x^2 - 5x + 7) > 0\right\}$.Pode-se afirmar que $A \cap B$ é:

a) $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{26}{7}, +\infty\right[$

b) $\left]-\infty, \frac{10}{9}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

c) $\left]-\infty, -3\right[\cup \left]-2, \frac{10}{9}\right[$

d) $\left]-\infty, \frac{10}{9}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

e) $\left]-\infty, -3\right[\cup \left]\frac{26}{7}, +\infty\right[$

8. (EN) Após o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$, onde Q_0 é a capacidade de limite de carga e t é medido em segundos. Qual o tempo, em segundos, para recarregar o capacitor de 90% de capacidade limite?

a) $\ln 10$
b) $\ln(10)^2$
c) $\sqrt{\ln 10}$
d) $\sqrt{(\ln 10)^{-1}}$
e) $\sqrt{\ln(10)^2}$

9. (EN) Seja b a menor das abscissas dos pontos de intersecção das curvas definidas pelas funções reais de variável real f(x) = x^5 -ln 2x e g(x) = x^5 - $\ln^2$ 2x. O produto das raízes da equação $\sqrt[5]{\dfrac{x^{\log_5 \sqrt[5]{x}}}{2+\log_2 b}} = 5$ é:

a) -1

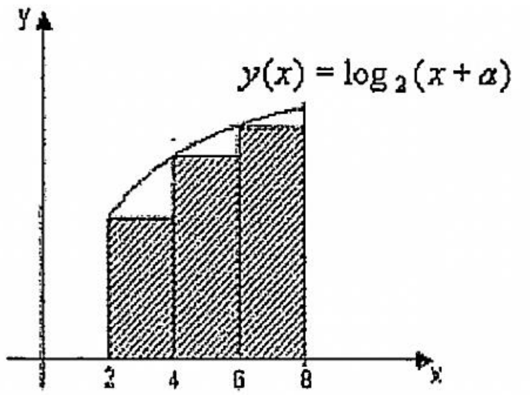
b) $-\dfrac{1}{5}$

c) $\dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{3}{5}$

e) 1

10. No sistema cartesiano abaixo está esboçada uma porção do gráfico de uma função $y(x) = \log_2(x+a)$ restrita ao intervalo $[2,8]$, $a \in \mathfrak{R}_+^*$. Se $y(2) = 2$, então o valor da área hachurada é:



a) $6+\dfrac{3}{2}\log_4 3$

b) $12+\log_2 3$

c) $8+2\log_2 3$

d) $6+8\log_{\frac{1}{2}} 3$

e) $12+\log_{\sqrt{2}} 3$

11. (EN) O quinto termo da progressão aritmética $3-x; -x; \sqrt{9-x}; \ldots, x \in \mathfrak{R}$ é

a) 7

b) 10

c) -2

d) $-\sqrt{14}$

e) -18

12. (EN) Considere f uma função definida no conjunto dos números naturais tal que $f(n+2) = 3 + f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(0) = 10$ e $f(1) = 5$. Qual o valor de $\sqrt{f(81) - f(70)}$?

a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{10}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{15}$

e) $3\sqrt{2}$

13. (EN) Um progressão geométrica infinita te, o 4° termo igual a 5. O logaritmo na base 5 do produto de seus 10 primeiros termos vale $10-15\log_5 2$. Se S é a soma desta progressão, então o valor de $\log_2 S$ é:

a) $2+3\log_2 5$

b) $2+\log_2 5$

c) $4+\log_2 5$

d) $1+2\log_2 5$

e) $4+2\log_2 5$

14. (EN) O valor de $tg\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$ é

a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $-\frac{4}{25}$

c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$

e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

15. (EN) A soma das soluções da equação trigonométrica $\cos 2x+3\cos x=-2$, no intervalo $[0,2\pi]$ é

a) π

b) 2π

c) 3π

d) $\frac{5\pi}{3}$

e) $\frac{10\pi}{3}$

16. (EN) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x)=2\operatorname{sen}^2 x+6\cos x$ e $g(x)=k+\cos 2x$, $k\in\Re$. Se $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{19}{2}$, então a soma das soluções da equação $f(x)=g(x)$ no intervalo $\left]\frac{21\pi}{11},\frac{16\pi}{5}\right[$ é:

a) $\frac{13\pi}{6}$

b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) $\frac{25\pi}{6}$

e) $\frac{16\pi}{3}$

17. (EN) Qual o valor da expressão $\sqrt{\operatorname{cossec}^2 \pi x + \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\Re - \{-1\}$?

a) $\sqrt{3}$
b) -1
c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$
d) 2
e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

18. (EN) Seja *q* = (cos 5º).(cos 20°).(cos 40°).(cos 85°) a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = \frac{1}{4}$. Sendo assim, é correto afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

a) $\frac{1}{15}$
b) $\frac{2}{15}$
c) $\frac{3}{15}$
d) $\frac{4}{15}$
e) $\frac{7}{15}$

19. (EN) Seja x um ângulo que possui tangente e tal que $\operatorname{sen}x + 2\cos x = 1$. O valor que tg x é:
a) 3/4
b) 4/3
c) – 3/4
d) – 4/3
e) 0

20. (EN) Se $\operatorname{sen}x + \cos x = \frac{1}{2}$ então sen2x é igual a:

a) $\frac{-1-\sqrt{7}}{4}$
b) $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$
c) $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$
d) $\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$
e) $\frac{-3}{4}$

21. (EN) A equação $\sec^3 x - 2tg^2 x = 2$, no intervalo $[0,2\pi]$:

a) não possui solução
b) possui uma solução
c) possui duas soluções
d) possui três soluções
e) possui quatro soluções

22. (EN) No intervalo $[0,2\pi]$, o número de soluções da equação senx = cos2x é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

23. (EN) Se $\dfrac{\text{senx} + \cos x}{\cos x - \text{senx}} = \text{tgy}$, então um possível valor y é:
a) $x - \pi/4$
b) x
c) $x + \pi/4$
d) $x + 3\pi/4$
e) $x + \pi$

24. (EN) O número de soluções da equação $\cos^2(x+\pi) + \cos^2(x-\pi) = 1$, no intervalo $[0,2\pi]$, igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

25. (EN) Seja x = arc cos3/5, $x \in [0,\pi]$. Então sen2x é igual a:

a) 24/25
b) 4/5
c) 16/25
d) 6/5
e) 2/5

26. (EN) Se $f(x-1) = \text{sen}^2(x-2)$ então $f(x+1)$ é igual a:

a) $\text{sen}^2(x-1)$
b) $\text{sen}^2(x+1)$
c) $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$
d) $\dfrac{1-\cos 2x}{2}$
e) $\dfrac{1+\text{sen}2x}{2}$

27. (EN) A menor solução positiva da equação $\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$ é:

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{84}$

c) $\frac{\pi}{42}$

d) $\frac{\pi}{84}$

e) $\frac{\pi}{294}$

28. (EN) As retas $r_1 : 2x - y + 1 = 0$; $r_2 : x + y + 3 = 0$ e $r_3 : \alpha x + y - 5 = 0$ concorrentes em um mesmo ponto **p** para determinado valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) - 3\operatorname{sen}^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] - \frac{5\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)$ é

a) $3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $2-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $2+\frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $3+\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

29. (EN) Os pontos A = (x_1,y_1) e B = (x_2,y_2) são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 2 \end{cases}$$

onde $x \in [0, 2\pi]$ e $y \in [0, 2\pi]$. A distância desde A até B é:

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

c) π

d) 2π

e) 3π

30. (EN) Seja $z = \frac{2+3i}{1-i} + \left(i - \sqrt{3}\right)^3$. Se θ é o argumento de z, podemos afirmar que $\operatorname{tg}\theta$ é igual a:

a) -23

b) -21

c) -19

d) 17

e) 19

31. (EN) O menor valor de n, n $\in \mathbb{N}$, para o qual $\left(-\sqrt{3}+i\right)^n$ é imaginário puro, é:

a) 0
b) 2
c) 3
d) 5
e) 7

32. (EN) Sabendo que z é o número complexo $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, qual o menor inteiro positivo n, para o qual o produto $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot ... \cdot z^n$ é um número real positivo?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

33. (EN) Seja **p** a soma dos módulos das raízes da equação $x^3+8=0$ e **q** o módulo do número complexo z, tal que $z \cdot \overline{z}=108$, onde $\overline{z}$ é o conjugado de z. Uma representação trigonométrica do número complexo **p + qi** é:

a) $12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

b) $20\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $12\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

d) $20\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

e) $10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

34. (EN) O conjunto **S** formado por todos os números complexos 2 que satisfazem a equação |z - 1| = 2|z + 1| é representado geometricamente por uma
a) reta vertical.
b) circunferência de centro ($\frac{5}{3}$,0) e raio $\frac{4}{3}$
c) parábola com vértice na origem e eixo de simetria Ox.
d) elipse de centro (-3,0) e eixo maior horizontal.
e) circunferência de centro (-$\frac{5}{3}$,0) e raio $\frac{4}{3}$.

35. (EN) O resto da divisão do polinômio $P(x)=x^3+4x^2-5x$ pelo polinômio $Q(x)=x^2+x$ é:

a) - 8x
b) - 8
c) - 8x - 8
d) 8x
e) 8

36. (EN) O valor de **a** para o qual duas das raízes da equação $x^3 + ax^2 - 2x + 6 = 0$ são simétricas é:
a) -3
b) -1
c) 0
d) 1
e) 3

37. (EN) Seja n menor inteiro pertencente ao domínio da função real de variável real $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{e^3+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{27}{64}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)^{(x+1)}}}}$. Podemos afirmar que $\log_n 3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots}}}$ é raiz da equação:

a) $x^3-2x^2-9=0$
b) $x^3+x-1=0$
c) $x^4-4x^2-x+2=0$
d) $x^2-4x+3=0$
e) $x^4-4x^2+x+1=0$

38. (EN) Seja r_1, r_2 e r_3 as raízes do polinômio $P(x)=x^3-x^2-4x+4$. Sabendo-se que as funções $f_1(x)=\log(4x^2-kx+1)$ e $f_2(x)=x^2-7\text{arcsen}(wx^2-8)$, com $k, w\in\Re$, são tais que $f_1(r_1)=0$ e $f_2(r_2)=f_2(r_3)=4$, onde r_1 é a menor raiz positiva do polinômio $P(x)$, é correto afirmar que os números $(w+k)$ e $(w-k)$ são raízes da equação:

a) $x^2-6x-2=0$
b) $x^2-4x-12=0$
c) $x^2-4x+21=0$
d) $x^2-6x+8=0$
e) $x^2-7x-10=0$

39. (EN) As raízes a, b, c da equação $x^3 + mx^2 - 6x + 8 = 0$ representam os três primeiros termos de uma progressão aritmética crescente. Se $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=-\frac{3}{8}$, o valor do 17º termo da progressão aritmética vale:

a) 38
b) 41
c) 46
d) 51
e) 57

40. (EN) Considere x_1, x_2 e $x_3\in\Re$ raízes da equação $64x^3-56x^2+14x-1=0$. Sabendo que x_1, x_2 e x_3 são termos consecutivos de um P.G e estão em ordem decrescente, podemos afirmar que o valor da expressão $\text{sen}\left[(x_1+x_2)\pi\right]+\text{tg}\left[(4x_1x_3)\pi\right]$ vale?

a) 0
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$
d) 1
e) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

41. (EN) A área da região limitada pelos gráficos da função $y=\sqrt{9-x^2}, y=|x|$ e $y=\dfrac{3\sqrt{2}+2x}{4}$ é igual a:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}(3\pi-2)$

b) $\dfrac{3}{4}(\pi-2)$

c) $\dfrac{3}{4}\left(\pi-2\sqrt{2}\right)$

d) $\dfrac{3}{4}(3\pi-2)$

e) $\dfrac{3}{4}\left(3\pi-2\sqrt{2}\right)$

42. (EN) A equação

$$\begin{vmatrix} sen^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16}$$

Com $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado **L** e altura $h=\sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de **L** é igual **a:**

a) $\sqrt{\dfrac{2\pi^2}{9}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\pi}{18}}$

c) $\sqrt{\dfrac{8\pi}{9}}$

d) $\sqrt{\dfrac{32\pi}{9}}$

e) $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$

43. (EN) Um triângulo inscrito em um circulo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de 15°. 0 produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse circulo é igual a:

a) $3\left(\sqrt{3}+2\right)$

b) $4\left(2\sqrt{3}+3\right)$

c) $\sqrt{8\sqrt{3}+12}$

d) $\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)$

e) $6\left(\sqrt{2}+1\right)$

44. (EN) Um prisma quadrangular regular tem área lateral $30\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de 60° com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{1/6}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$

b) $\frac{81\pi}{8}$

c) $\frac{8\pi}{81}$

d) $\frac{8\pi}{27}$

e) $\frac{81}{8\pi}$

01. (ITA) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a
a) −5.
c) 1.
b) −1.
d) 2.
e) 5.

02. (ITA) Sejam $A = \{x \in \Re / |x - 4| \leq 2\}$ e $\{x \in \Re / x^2 - 14x + 40 < 0\}$. A diferença A – B é igual a:
a) $\{x \in \Re / 2 \leq x < 4\}$
b) $\{x \in \Re / 2 \leq x \leq 4\}$
c) $\{x \in \Re / 4 < x \leq 6\}$
d) $\{x \in \Re / 6 < x < 10\}$
e) $\{x \in \Re / 6 \leq x < 10\}$

03. (ITA) Uma imprensa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor flex. Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor flex sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, apos esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o numero de carros tricombustíveis é igual a:
a)246
b)252
c)260
d)268
e)284

04. (ITA) Sobre a equação na varável real x,

$$|||x - 1| - 3| - 2| = 0,$$

Podemos afirmar que
a) ela não admite solução real.
b) a soma de todas as soluções positivas é 6.
c) ela admite apenas soluções positivas.
d) a soma de todas as soluções é 4.
e) ela admite apenas duas soluções reais.

05. (ITA) A soma de todos os valores de x que satisfazem à identidade $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$, é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) n.r.a.

06. (ITA) Denotemos por $\log x$ e $\log_a x$ os logaritmos de x nas bases 10 e a, respectivamente. As raízes reais da equação $2\left[1+\log_{x^2}(10)\right] = \left[\frac{1}{\log\left(x^{-1}\right)}\right]^2$ são:

a) 10 e $\sqrt{10}$
b) 10 e $1/\sqrt{10}$
c) 1/10 e $\sqrt{10}$
d) 1/10 e $1/\sqrt{10}$
e) n.r.a.

07. (ITA) O conjunto verdade da desigualdade $\log_2\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-2x+1\right)\right) < 0$ é:

a) $(0,1/2)\cup(3/2,2)$
b) $(-2,0)\cup(3/2,2)$
c) $(1/2,3/2)$
d) $(-\infty,1/2)\cup(3/2,+\infty)$
e) $\varnothing$

08. (ITA) Dada à equação $3^{2x} + 5^{2x} - 15^x = 0$ podemos afirmar que:
a) Não existe x real que a satisfaça.
b) $x = \log_3 5$ é uma solução desta equação.
c) $x = \log_5 3$ é uma solução desta equação.
d) $x = \log_3 15$ é uma solução desta equação.
e) $x = 3\log_5 15$ é uma solução desta equação.

09. (ITA) Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Esse número é:
a) 5
b) 8
c) 2
d) 4
e) 3

10. (ITA) Considere $u = x \cdot \ln 3$, $v = x \cdot \ln 2$ e $e^u \cdot e^v = 36$. Nestas condições, temos:
a) x = -4
b) x = 12
c) x = -3
d) x = 9
e) x = 2

11. (ITA) Sejam $a \in \Re, a > 1$ e $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$. A função inversa de f é dada por:
a) $\log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, para $x > 1$
b) $\log_a\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, para $x \in \Re$
c) $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, para $x \in \Re$
d) $\log_a\left(-x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, para $x < -1$
e) n.d.a.

12. (ITA) O domínio da função:
$f(x) = \log_{2x^2-3x+1}\left(3x^2 - 5x + 2\right)$
a) $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$
b) $(-\infty, 1/2) \cup (1, 5/2) \cup (5/2, +\infty)$
c) $(-\infty, 1/2) \cup (1/2, 2/3) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$
d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
e) n.d.a.

13. (ITA) Um acidente de carro foi presenciado por 1/65 da população de Votuporanga (SP). O número de pessoas que soube do acontecimento **t** horas após é dado por: $f(t) = \dfrac{B}{1 + Ce^{-kt}}$, onde B é a população da cidade. Sabendo-se que 1/9 da população soube do acidente 3 horas após, então o tempo que se passou até que 1/5 da população soubesse da notícia foi de:
a) 4 horas
b) 5 horas
c) 6 horas
d) 5 horas e 24 min
e) 5 horas e 30 min

14. (ITA) Seja $a \in \Re, a > 1$. Para que $]4,5[= \left\{x \in \Re_+^*; \left[\log_{1/a} \log_a\left(x^2 - 15\right)\right] > 0\right\}$. O valor de **a** é:
a) 2
b) 3
c) 5
d) 9
e) 10

15. (ITA) Se x é um número real positivo com $x \neq 1$ e $x \neq 1/3$, satisfazendo $\frac{2+\log_3 x}{\log_{(x+2)} x} - \frac{\log_x (x+2)}{1+\log_3 x} = \log_x (x+2)$ então x pertence ao intervalo I, onde:

a) $I = (0, 1/9)$

b) $I = (0, 1/3)$

c) $I = (1/2, 1)$

d) $I = (1, 3/2)$

e) $I = (3/2, 2)$

16. (ITA) Sejam $f, g: \Re \to \Re$ funções definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Considere as informações:

I – Os gráficos de f e g não se interceptam.
II – As funções f e g são crescentes.
III - $f(-2) \cdot g(-1) = f(-1) \cdot g(-2)$.
Então:
a) Apenas a afirmação (I) é falsa.
b) Apenas a afirmação (III) é falsa.
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
d) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
e) Todas as afirmações são falsas.

17. (ITA) Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação $\log_{1/4}(x+1) = \log_4(x-1)$. Então:

a) S é um conjunto unitário e $S \subset [2, +\infty)$.

b) S é um conjunto unitário e $S \subset]1, 2[$.

c) S possui dois elementos distintos e $S \subset]-2, 2[$.

d) S possui dois elementos distintos e $S \subset]1, +\infty[$.

e) S é um conjunto vazio.

18. (ITA) Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $\left|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x\right| = \left|5^x - 1\right|$ é

a) $\left\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\right\}$

b) $\left\{0, 1, \log_5\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$

c) $\left\{0, \frac{1}{2}\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

d) $\left\{0, \log_5\left(2+\sqrt{5}\right), \log_5\left(2+\sqrt{3}\right), \log_5 \sqrt{3}\right\}$

e) A única solução é $x = 0$

19. (ITA) Considere uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é a, a > 1, a razão é q, q > 1 e o produto de seus termos é c. Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, quantos termos tem esta progressão geométrica?
a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

20. (ITA) Sejam os números reais x > 0, a > b > 1. Os três números reais

$$x,\ \sqrt{x\log_a b},\ \log_a(bx)$$

São, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica infinita. A soma S desta progressão vale:
a) $S = 2x/\left(1-\log_a b\right)$
b) $S = \left(x+1\right)/\left(1-1/2\log_a b\right)$
c) $S = x/\left(1-\sqrt{\log_a b}\right)$
d) $S = 1/\left(1-\sqrt{\log_a b}\right)$
e) impossível determinar S, pois é infinita.

21. (ITA) Sejam a, b, c constantes reais com $a \neq 0$ formando, nesta ordem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é igual a $-\sqrt{2}$. Então uma relação válida entre b e c é:
a) $c = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)$
b) $c = b\left(2-\sqrt{2}\right)$
c) $c = b\left(\sqrt{2}-1\right)$
d) $c = b\sqrt{2}$
e) $c = \dfrac{b}{2}\left(4-\sqrt{2}\right)$

22. (ITA) Numa progressão geométrica de três termos a razão é e^{-2a}, a soma dos termos é 7 em quanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de **a** é
a) $\ln\sqrt{2}$
b) $-\ln\dfrac{5}{2}$
c) $\ln\sqrt{3}$
d) $-\ln\sqrt{2}$
e) não existe um número real **a** nestas condições

23. (ITA) Numa progressão geométrica de razão inteira q > 1. Sabe-se que $a_1 \cdot a_n = 243$, $\log_q P_n = 20$ e $\log_q a_n = 6$, onde a_n é o enésimo termo da progressão geométrica e P_n é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\frac{3^9 - 1}{6}$

b) $\frac{3^{10} - 1}{6}$

c) $\frac{3^8 - 1}{6}$

d) $\frac{3^9 - 1}{3}$

e) N.D.A.

24. (ITA) Os números reais x, y e z formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r. Seja a um números real com a > 0 e a $\neq$ 1 satisfazendo $3a^x + 2a^y - a^z = 0$. Então r é igual a:

a) a^2

b) $(1/2)^a$

c) $\log_{2a} 4$

d) $\log_a (3/2)$

e) $\log_a 3$

25. (ITA) Numa progressão geométrica de razão q sabemos que $a_1 = 1/q, a_1 \cdot a_n = (2/3)^5$ e o produto dos n primeiros termos é q^{20}. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\frac{1}{2} \frac{3^8 - 2^8}{3^6}$

b) $\frac{1}{2} \frac{3^6 - 2^6}{3^6}$

c) $\frac{1}{4} \frac{3^8 - 2^8}{3^6}$

d) $\frac{1}{4} \frac{3^6 - 2^6}{3^6}$

e) $\frac{1}{4} \frac{3^6 - 2^6}{3^8}$

26. (ITA) Seja $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. O conjunto solução da desigualdade $2^{\text{sen}x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

a) $]0, \pi/3] \cup [2\pi/3, 2\pi)$
b) $[0, 7\pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi)$
c) $[0, 4\pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi)$
d) $[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 2\pi)$
e) n.d.a.

27. (ITA) Sejam *f* e *g* duas funções definidas por $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\ \text{sen}\ x - 1}$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\ \text{sen}^2\ x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

A soma do valor mínimo de *f* com o valor mínimo *g* é igual a:
a) 0
b) $-\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

28. (ITA) Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 3}{\log 3 - \log 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a:

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$
c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$
d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$
e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

29. (ITA) Seja α um número real tal que $\alpha > 2\left(1 + \sqrt{2}\right)$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes dessa equação são cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:
a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 135°
e) 120°

30. (ITA) A soma das raízes da equação:

$$\sqrt{3}\text{tg}x - \sqrt{3}\text{sen}2x + \cos 2x = 0$$

que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $\frac{17\pi}{4}$

b) $\frac{16\pi}{3}$

c) $\frac{15\pi}{4}$

d) $\frac{14\pi}{3}$

e) $\frac{13\pi}{4}$

31. (ITA) Se $D = \left\{x \in \Re \,/\, x \neq \ln\frac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, ...\right\}$. Com respeito à função $f: D \to \Re$, definida por $f(x) = \frac{\text{sen}(3e^x)}{\text{sen}(e^x)} - \frac{\cos(3e^x)}{\cos(e^x)}$, podemos afirmar que:

a) $f(x) = 2$ para todo x em D

b) $f(x) = 3$ para todo x em D

c) $f(x) = e^3$ para todo x em D

d) $f(x)$ não é constante em D

e) n.d.a.

32. (ITA) Resolvendo a equação $\text{tg}\left(2\ln x - \frac{\pi}{6}\right) - \text{tg}\left(\ln x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, temos:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k = 0, 1, 2, ...$

b) $x = e^{\frac{\pi}{2} \pm k\pi}; k = 0, 1, 2, ...$

c) $\ln x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi; k = 0, 1, 2, ...$

d) $x = e^{\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi}; k = 0, 1, 2, ...$

e) n.d.a.

33. (ITA) Seja θ um valor fixado no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabe-se que $a_1 = \text{cotg}\theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \text{sen}^2\theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é:

a) $\text{cossec}\theta \cdot \text{tg}\theta$

b) $\sec\theta \cdot \text{tg}\theta$

c) $\sec\theta \cdot \text{cossec}\theta$

d) $\sec^2\theta$

e) $\text{cossec}^2\theta$

34. (ITA) O produto dos números complexos $z = x + yi$, que tem módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta y = 2x -1 contida no plano complexo, é igual a:

a) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$

b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

c) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$

d) $2 + 2i$

e) não existe nem um número complexo que pertença a reta y = 2x -1 e cujo módulo seja $\sqrt{2}$

35. (ITA) Considere o número complexo **z = a + 2i** cujo argumento principal está no intervalo $(0, \pi/2)$. Sendo S o conjunto dos valores de **a** para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

a) 4

b) $4\sqrt{3}$

c) 8

d) $8/\sqrt{3}$

e) n.d.a.

36. (ITA) Sabe-se que $2(\cos\pi/20 + i\operatorname{sen}\pi/20)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$ Um subconjunto de S é:

a) $\{2^{1/2}(\text{cis}7\pi/8), 2^{1/2}(\text{cis}\pi/8)\}$

b) $\{2^{1/2}(\text{cis}9\pi/8), 2^{1/2}(\text{cis}5\pi/8)\}$

c) $\{2^{1/4}(\text{cis}7\pi/8), 2^{1/2}(\text{cis}\pi/4)\}$

d) $\{2^{1/4}(\text{cis}7\pi/8), 2^{1/4}(\text{cis}\pi/8)\}$

e) n.d.a.

37. (ITA) Seja **a** o módulo do número complexo $(2 - 2\sqrt{3}i)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

a) 10/11

b) -2

c) 5/8

d) 3/8

e) 11/15

38. (ITA) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2 + z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:

a) nenhuma delas é um número inteiro.

b) a soma delas é 2

c) estas são em número de 2 e são distintas.

d) estas são em número de quatro e são 2 a 2 distintas.

e) uma delas é da forma z = bi com b real não-nulo.

39. (ITA) Seja z um número complexo satisfazendo $\mathrm{Re}(z) > 0$ e $(z+i)^2 + |\bar{z}+i|^2 = 6$. Se **n** é o menor natural inteiro para o qual z^n é um número imaginário puro, então **n** é igual a:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

40. (ITA) Considere no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente $z_1, z_2, \cdots z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$ é igual a:
a) $2+4i$
b) $\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+3\right)i$
c) $\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+2\right)i$
d) $\left(2\sqrt{3}-1\right)+\left(2\sqrt{3}+3\right)i$
e) $\sqrt{2}+\left(\sqrt{6}+2\right)i$

41. (ITA) Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem simultaneamente, às equações:

$$|z-3i| = 3 \text{ e } |z+i| = |z-2-i|$$

O produto de todos os elementos de é igual a:
a) $-2+i\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}+3i\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}-2i\sqrt{3}$
d) $-3+3i$
e) $-2+2i$

42. (ITA) A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

43. (ITA) Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z-5+3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é:
a) $\sqrt{29}$
b) $\sqrt{41}$
c) $3\sqrt{5}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{6}$

44. (ITA) Sejam $z = n^2\left(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ\right)$ e $w = n\left(\cos 15^\circ + i\,\text{sen}\,15^\circ\right)$, em que *n* é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a:

a) $\sqrt{3} + i$
b) $2\left(\sqrt{3} + i\right)$
c) $2\left(\sqrt{2} + i\right)$
d) $2\left(\sqrt{2} - i\right)$
e) $2\left(\sqrt{3} - i\right)$

45. (ITA) Se arg $z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é:

a) $-\frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{4}$
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{3\pi}{4}$
e) $\frac{7\pi}{4}$

46. (ITA) Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a:

a) $\frac{7\pi}{4}$
b) – 1
c) 0
d) 1
e) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$

47. (ITA) Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I. $|z_1 - z_2| \leq \left||z_1| - |z_2|\right|$
II. $|\bar{z}_1 . z_2| = \left||\bar{z}_2| . |\bar{z}_2|\right|$
III. Se $z_1 = |\bar{z}_1|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$.

É (são) sempre verdadeira (s).
a) apenas I
b) apenas II
c) apenas III
d) apenas I e II
e) todas

48. (ITA) A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2+|z|^2+iz-1=0$ é igual a:

a) 2
b) 0,5i
c) 0
d) – 0,5
e) – 2i

49. (ITA) Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$, $z-\bar{z}+|z|^2=-\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}-i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$

a) $i(z-\bar{z})<0$

b) $i(z-\bar{z})>0$

c) $|z|\in[5,6]$

d) $|z|\in[6,7]$

e) $\left|z+\frac{1}{z}\right|>8$

50. (ITA) Os argumentos principais das soluções da equação em z, $iz+3\bar{z}+(z+\bar{z})^2-i=0$ pertencem a:

a) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$

b) $\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$

c) $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right[$

e) $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4},2\pi\right[$

51. (ITA) Se $a=\cos\frac{\pi}{5}$ e $b=\text{sen}\frac{\pi}{5}$, então o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a:

a) $a+bi$
b) $-a+bi$
c) $(1-2a^2b^2)+ab(1+b^2)i$
d) $a-bi$
e) $1-4a^2b^2+2ab(1-b^2)i$

52. (ITA) Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tais que $|\alpha|=|\beta|=1$ e $|\alpha-\beta|=\sqrt{2}$ Então $\alpha^2+\beta^2$ é igual a:

a) – 2
b) 0
c) 1
d) 2
e) 2i

53. (ITA) Considere a equação:

$$16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3=\left(\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)^4.$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é:
a) 3
b) 6
c) 9
d) 12
e) 15

54. (ITA) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo : $\frac{1}{1+i\,\text{cotg}\,x}$, $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

a) $|\cos x|$

b) $(1+\text{sen}\,x)/2$

c) $\cos^2 x$

d) $|\text{cossec}\,x|$

e) $|\text{sen}\,x|$

55. (ITA) Se para todo $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então para todo $z\in\mathbb{C}$, $\overline{f(1)}.f(z)+f(1).\overline{f(z)}$ é igual a:
a) 1
b) 2z
c) 2Re(z)
d) 2Im(z)
e) $|\text{sen}\,x|$

56. (ITA) Se $\alpha\in[0,2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z\neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n=i\,\text{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que
a) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π
b) $2n\alpha$ - π é múltiplo de 2π
c) $n\alpha-\pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$
d) $2n\alpha-\pi$ é múltiplo não nulo de 2
e) $n\alpha-2\pi$ é múltiplo não nulo de π

57. (ITA) Seja $z\in\mathbb{C}$ com $|z|=1$. Então a expressão $\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor:

a) maior que 1, para todo *w* com $|w|>1$

b) menor que 1, para todo *w* com $|w|<1$

c) maior que 1, para todo *w* com $w\neq z$
d) igual a 1, independente de *w* com $w\neq z$

e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w|<|z|$

58. (ITA) A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0, \quad z \in \mathbb{C}$, é igual a:

a) – 2
b) – 1
c) 0
d) 1
e) 2

59. (ITA) A identidade $\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ é valida para todo $x \neq -1$. Então $a+b+c$ é igual a:
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

60. (ITA) Se a, b, c são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde r é um número real, podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:
a) -60
b) 62 + r
c) $62 + r^2$
d) $62 + r^3$
e) 62 - r

61. (ITA) Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?
a) $p^2 = rq$
b) $2p + r = q$
c) $3p^2 = r^2q$
d) $p^3 = rq^3$
e) $q^3 = rp^3$

62. (ITA) Sabendo-se que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por $(x+1)$ e por $(x+2)$ podemos afirmar que
a) a e b tem sinais opostos e são inteiros
b) a e b tem o mesmo sinal e são inteiros
c) a e b tem sinais opostos e são racionais não inteiros
d) a e b tem mesmo sinal e são racionais não inteiros
e) somente a é inteiro

63. (ITA) Sejam a, b e c números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ por x – 2 e x + 2 são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:
a) 1
b) $28/5$
c) $37/5$
d) $44/15$
e) -3

64. (ITA) Os valores de **m** de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas raízes somando 1, são:
a) 0
b) $\sqrt{3}$ e 3
c) 1 e -1
d) 2 e -2
e) n.d.a.

65. (ITA) Se dividirmos um polinômio P(x) por (x - 2), o resto é 13, e, se dividirmos P(x) por (x + 2), o resto é 5. Supondo que R(x) é o resto da divisão de P(x) por (x² - 4), podemos afirmar que o valor de R(x) para x = 1 é ?
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

66. (ITA) Considere $a, b \in \Re$ e a equação:
$$2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^{x} + b = 0$$
Sabendo que as três raízes reais x_1, x_2, x_3 desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, cuja soma é igual a zero, então **a – b** vale:
a) 5
b) -7
c) -9
d) -5
e) 9

67. (ITA) Seja $P(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $P(x) = P(x+2) - x^2 - 2$, para todo $x \in \Re$. Se -2 é uma raiz de $P(x)$, então o produto de todas as raízes de $P(x)$ é:
a) 10
b) 18
c) -36
d) -18
e) 1

68. (ITA) Sabendo-se que $z_1 = i$, z_2 e z_3 são as raízes da equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, onde a,b,c são reais e não nulos, podemos afirmar que
a) z_1, z_2 e z_3 são imaginários puros
b) z_2 e z_3 são reais
c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = c$
d) $z_1 + z_2 + z_3 = a$
e) pelo menos uma das raízes é real

69. (ITA) Se **a > 1**, o valor real de **m** para o qual a equação $x^3 - 9x^2 + (\ln a^m + 8)x - \ln a^m = 0$ tenha raízes em progressão aritmética, é dado por:
a) $m = \ln a - 8$ ou $m = -9a$
b) $m = \ln a - 9$
c) $m = \dfrac{15}{\ln a}$
d) $m = -\dfrac{9}{8}\ln a$
e) N.D.A.

70. (ITA) Seja **R** o corpo dos números reais. Em relação à equação $5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0$, $x \in R$, podemos afirmar que:
a) não tem solução inteira
b) tem somente uma solução
c) tem somente duas soluções distintas
d) tem três soluções distintas
e) N.D.A

71. (ITA) Considere $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é x = -1. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a
a) -25
b) -27
c) -36
d) -39
e) -40

72. (ITA) Seja C uma circunferência tangente simultaneamente ás retas $r: 3x+4y-4=0$ e $s: 3x+4y-19=0$. A área do círculo determinado por C é igual a

a) $5\pi/7$
b) $4\pi/5$
c) $3\pi/2$
d) $8\pi/3$
e) $9\pi/4$

73. (ITA) Dados o ponto A = $\left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x+4y-12=0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são respectivamente, iguais a

a) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$
b) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$
c) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$
d) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$
e) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$

74. (ITA) Sejam C uma circunferência de raio R > 4 e centro (0; 0) e AB uma corda de C. Sabendo que (1; 3) é ponto médio de AB; então uma equação da reta que contém AB é :

a) y + 3x - 6 = 0
b) 3y + x - 10 = 0
c) 2y + x - 7 = 0
d) y + x - 4 = 0
e) 2y + 3x - 9 = 0.

75. (ITA) Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a

a) -3/5
b) -3/7
c) -2/5
d) -4/5
e) -1/7

76. (ITA) Se a reta de equação x = a divide o quadrilátero cujos vértices são (0, 1), (2, 0), (4, 0) e (6, 4) em duas regiões de mesma área, então o valor de a é igual a

a) $2\sqrt{5}-1$
b) $2\sqrt{6}-1$
c) $3\sqrt{5}-4$
d) $2\sqrt{7}-2$
e) $3\sqrt{7}-5$

77. (ITA) Seja $m \in \Re_{+}^{*}$, tal que a reta $x - 3y - m = 0$ determina, na circunferência $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de **m** é**:**

a) $10 + 4\sqrt{10}$
b) $2 + \sqrt{3}$
c) $5 - \sqrt{2}$
d) $6 + \sqrt{10}$
e) 3

78. (ITA) Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente, pelas equações $x + y = 3$ e $x - y = -3$. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $d_{(AB)} = d_{(A,C)} = \sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:
a) $2x + 3y = 1$
b) $y = 1$
c) $y = 2$
d) $x = 1$
e) $x = 2$

79. (ITA) Seja *C* o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}y = 0$. Considere *A* e *B* os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y = \sqrt{2}x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices *A, B* e *C* é:
a) $6\sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) $4\sqrt{3} + \sqrt{2}$
c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3} + \sqrt{2}$
e) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

80. (ITA) Sabe-se que o ponto $(2,1)$ é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:
a) $y = 2x - 3$
b) $y = x - 1$
c) $y = -x + 3$
d) $y = 3x/2 - 2$
e) $y = -x/2 + 2$

81. (ITA) Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm^2. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

82. (ITA) Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo PQR, em cm^2, é igual a

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

83. (ITA) Em um triângulo equilátero ABC de lado 2, considere os pontos P, M e N pertencentes aos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que

a) P é o ponto médio de $\overline{AB}$;

b) M é o ponto médio de $\overline{BC}$;

c) P N é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$.

Então, o comprimento do segmento MN é igual a

a) $\sqrt{10-4\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{10-5\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{5\sqrt{3}-5}$

84. (ITA) Um triângulo retângulo tem perímetro igual a $\ell\sqrt{5}$, em que ℓ é o comprimento da hipotenusa. Se α e β são seus ângulos agudos, com α < β, então sen(β − α) é igual a

a) $5-2\sqrt{5}$
b) $-6+3\sqrt{5}$
c) $\sqrt{16\sqrt{5}-35}$
d) $\sqrt{20\sqrt{5}}-44$
e) $\sqrt{18\sqrt{5}}-40$

85. (ITA) Uma esfera S_1, de raio R > 0, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com 0 < r < R, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\dfrac{\pi R^5}{3r(R-r)}$
b) $\dfrac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$
c) $\dfrac{\pi R^5}{r(R-r)}$
d) $\dfrac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$
e) $\dfrac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$

86. (ITA) Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado BC tais que BM = MN = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de cos α é

a) $\dfrac{13}{14}$
b) $\dfrac{14}{15}$
c) $\dfrac{15}{16}$
d) $\dfrac{16}{17}$
e) $\dfrac{17}{18}$

87. (ITA) Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60^o de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a:

a) $416\pi/9$
b) $480\pi/9$
c) $500\pi/9$
d) $512\pi/9$
e) $542\pi/9$

88. (ITA) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede x cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triangulo ABC inscritível no circulo de raio x cm. Cabendo-se que o triangulo é semelhante ao triangulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma, em cm cubico é?

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$

d) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$

e) N.R.A

1° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)**

Hotel Fazenda B
Chalés com acomodação para até 10 pessoas.
Diária do Chalé: 80 reais
Refeição Opcional (14 reais por dia por pessoa)

O Sr. Souza, esposa e filhos optaram pelo passeio acima anunciado e, aproveitando as férias escolares, passaram 5 dias hospedados no Hotel Fazenda B fazendo todas as refeições, gastando ao todo 1100 reais, dos quais 280 reais cobriram despesas com telefone, frigobar e lazer. É correto afirmar que:
A) a família levou 6 filhos.
B) as despesas com refeição totalizaram 400 reais.
C) no chalé sobraram 4 acomodações.
D) se não tivessem ocorrido as despesas extras com frigobar, telefone e lazer, eles poderiam ter ficado mais 1 dias e teriam economizado ainda 120 reais.

02. **(AFA)** Em julho de 2001, uma pessoa gastava 27,3% do seu salário com o pagamento da prestação da casa própria. Em 2002, houve dois reajustes no seu salário: 40% em janeiro e 30% em julho. Se, em julho de 2002, o aumento daquela prestação foi de 130%, que porcentagem de seu salário a pessoa passou a gastar?
A) 29,7%
B) 32,7%
C) 34,5%
D) 36,9%

03. **(AFA)** Dado o número complexo z tal que $z+2\overline{z}-9=3i$, é correto afirmar que:
A) $|z|=3\sqrt{10}$
B) $z=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$
C) $\overline{z}=9-3i$
D) $z^{-1}=\frac{1+i}{3}$

04. **(AFA)** Analise as alternativas e marque a correta.
A) Dado o complexo $z=m+mi$, onde $m\in\mathbb{R}^*$ e i é a unidade imaginária, pode-se dizer que o afixo $\left(\overline{z}\right)^2$ é, em relação à origem, simétrico do afixo $\left(-2m^2,0\right)$.
B) No plano de Argand-Gauss os complexos z, tais que $|z-1|=1$, são representados pelos pontos do círculo de centro (0,1) e raio unitário.
C) Se $n\in\mathbb{N}$ e i é a unidade imaginária, então $\left(i^{n+1}+i^n\right)^8$ é um número real maior do que zero.
D) Se $z=a+bi$ ($a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária) é um complexo, então $z-\overline{z}$ é sempre um número complexo imaginário puro.

05. **(AFA)** Uma PA cujo primeiro termo é zero e uma PG cujo primeiro termo é 1 possuem a mesma razão. O nono termo da PG é igual a quadrado do nono termo da PA. Então:
A) uma das razões comum é – 2
B) a razão comum é – 1
C) a razão comum é 1
D) não existem as duas progressões

06. **(AFA)** Considere uma PG onde o 1° termo é a, a > 1, a razão é q, q > 1, e o produto dos seus termos é c. Se $\log_a b=4$, $\log_q b=2$ e $\log_c b=0{,}01$, então a soma dos termos da PG é:
A) $\frac{a^{41}-a}{a^2-1}$
B) $\frac{a^{40}-a}{a^2-1}$
C) $\frac{a^{41}-1}{a^2-1}$
D) $\frac{a^{40}-1}{a^2-1}$

07. **(AFA)** analise as proposições abaixo, classificando-as em V (verdadeiro) ou F (falso):
( ) Se $p(x)=2x^3-(p-1)x+4$ e $m(x)=qx^3+2+q$ são polinômios idênticos, então $p^2+q^2=5$.
( ) Dividindo-se $A(x)=x^3+x^2+x+1$ por $B(x)$, obtém-se o quociente $c(x)=1+x$ e resto

$R(x)=c(x)$. Pode-se afirmar que B(x) é tal que B(0) = 0.

( ) Se f, g e h são polinômios de grau m, n e q (m, n, q são naturais e m > n > q), então o grau de $(f+g)h$ é dado por m + q.

A sequência correta é:
A) FVV
B) VVF
C) VFV
D) VVV

08. **(AFA)** Marque a alternativa correta.
A) Se a unidade real é raiz de multiplicidade k da equação P(x) = 0, então P(x) é divisível por $(x-1)^m$, com $0<m\leq k$ e m inteiro.
B) A equação de coeficientes reais $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=0$, pode ter duas raízes NÃO reais conjugadas se $a_0=a_1=a_3=0$, $a_2>0$ e $a_4<0$.
C) Se $P(x)=0$ tem 1, 2 e 3 como raízes, e se $P(x)$ é um polinômio não nulo de grau m, então $m>3$.
D) Considerando i a unidade imaginária, se a equação $x^2+bx+c=0$, $\{b,c\}\subset\mathbb{C}$, admite $\alpha+\beta i\ (\alpha\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^*)$ como raiz, necessariamente admitirá também a raiz $\alpha-\beta i$.

09. **(AFA)** Seja **a > 1** e **e** a base dos logaritmos neperianos, o valor real de m para o qual a equação $x^3-9x^2+(\log_e a^m+8)x-\log_e a^m=0$ tenha raízes em progressão aritmética, é dado por:
A) $m=\log_e a-8$
B) $m=\log_e a-9$
C) $m=\dfrac{15}{\log_e a}$
D) $m=-\dfrac{9}{8}\log_e a$

10. **(AFA)** Marque V para verdadeiro, F para falso e, a seguir, assinale a opção correta.

( ) Sendo A um conjunto com x elementos e B um conjunto com y elementos, o número de funções $f:A\to B$ é xy.
( ) Uma urna contém n bolas numeradas (de 1 a n). Se s bolas são retiradas sucessivamente e com reposição, o número de resultados possíveis é n^s.
( ) Com n algarismos distintos, entre eles o zero, pode-se escrever n^4 números distintos de 4 algarismos.
A) FVV
B) VFV
C) VFF
D) FVF

2° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA(AFA)** No desenvolvimento de $\left(x^{r}+x^{-r}\right)^{n}$, ordenado pelas potências decrescentes de x, sendo r > 0 e n natural, o coeficiente do 5° termo que é independente de x é igual a:
A) 252
B) 70
C) 10
D) 8

02. **(AFA)** Em um balcão de supermercado, foram esquecidas 2 sacolas. Uma continha 3 latas de atum, 2 latas de ervilha e 5 de sardinha; a outra, x latas de atum, 3 latas de ervilha e 3 de sardinha. Escolhe-se ao acaso uma sacola e retira-se uma lata. Qual é o menor valor de x para que a probabilidade de tratar-se de uma lata de atum seja, no mínimo, 50%?
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

03. **(AFA)** Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.
Para que a matriz mA + nB seja NÃO inversível é necessário que:
A) m e n sejam positivos
B) m e n sejam negativos
C) n + 7m = 0
D) n² = 7m²

04. **(AFA)** O valor do determinante de uma matriz de ordem n é 21. Se dividirmos a segunda linha desta matriz por 7 e multiplicarmos a matriz por 3, o valor do novo determinante será:
A) 3^{n}
B) 3^{n+1}
C) 3n
D) $3n+3$

05. **(AFA)** A condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes a, b e c (reais não nulos) para que seja compatível o sistema $\begin{cases} x+2y-z=a \\ y+2z=b \\ x+3y+z=c \end{cases}$ é estabelecida por:
A) $c-a+b=0$
B) $a+b+c=0$
C) $c+a-b=0$
D) $a+b-c=0$

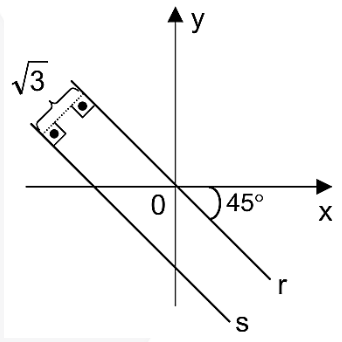
06. **(AFA)** As quantidades dos produtos que Elaine, Pedro e Carla compraram num mercado estão esquematizadas na tabela que segue.

	Produto A	Produto B	Produto C
Elaine	1	2	3
Pedro	3	6	2
Carla	2	4	1

Sabendo-se que Pedro gastou R$ 21,00 e Carla R$ 13,00, pode-se concluir, necessariamente, que:
A) Elaine gastou R$ 10,00
B) o preço do produto C é R$ 3,00
C) o preço do produto A é R$ 1,00
D) o preço do produto B é R$ 3,00

07. **(AFA)** Dadas as retas de equações $r: y=ax+b$, $r_1: y=a_1x+b_1$ determine a relação entre a, a_1, b e b_1 que está correta.
A) se $a=a_1$ e $b\neq b_1$ tem-se $r//r_1$
B) se $a=a_1$ e $b=b_1$ tem-se $r\neq r_1$
C) se $a\neq a_1$ tem-se $r=r_1$
D) se $a\neq a_1$ e $b\neq b_1$ tem-se $r//r_1$

08. **(AFA)** Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. Se $P(x,y)\in s$, então x + y é igual a:



A) $\sqrt{3}$
B) $-\sqrt{3}$
C) $-\sqrt{6}$
D) $\sqrt{6}$

09. **(AFA)** Considere as afirmativas abaixo:
I) as retas $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ e $s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \end{cases}$ são perpendiculares.
II) a equação $4x = y^2$ representa uma parábola com eixo de simetria horizontal.
III) $-\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ representa uma hipérbole.
É (são) correta(s) a(s) afirmativa(s):
A) I, II e III
B) I somente
C) III somente
D) II somente

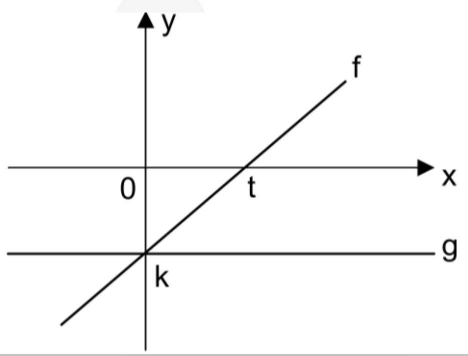
10. **(AFA)** A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ e centro C é tangente ao eixo das abscissas no ponto A e é tangente ao eixo das ordenadas no ponto B. A área do triângulo ABC vale:
A) 4
B) 8
C) 12
D) 16

3° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Sobre o triângulo PF_1F_2 onde $P(2,2)$ e F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, é correto afirmar que:
A) é isósceles
B) é obtusângulo
C) tem área igual a 16
D) tem perímetro igual a $2\sqrt{2}+8$

02. **(AFA)** Analise as proposições abaixo classificando-as em V (verdadeiro) ou F (falso), considerando funções reais.
( ) O domínio e a imagem da função g definida por $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ são, respectivamente, $[-3,3]$ e $[0,+\infty)$.
( ) Se $f(x)=x^2$ e $g(x)=f(x+m)-f(x)$ então $g(2)$ é igual a $m(4+m)$.
( ) Se $h(x)=\left|\frac{1}{x}\right|$, então $h^{-1}(x)=h(x)$.
A sequência correta é:
A) FVV
B) FVF
C) VFV
D) VVF

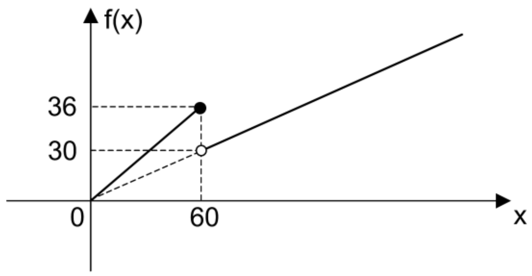
03. **(AFA)** Analise o gráfico abaixo das funções f e g e marque a opção correta.



A) O gráfico da função $h(x)=g(x)-f(x)$ é uma reta ascendente.
B) O conjunto imagem da função $s(x)=f(g(x))$ é $\mathbb{R}$.
C) $f(x)\cdot g(x)\geq 0$, $\forall x\geq t$
D) $g(f(x))=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$

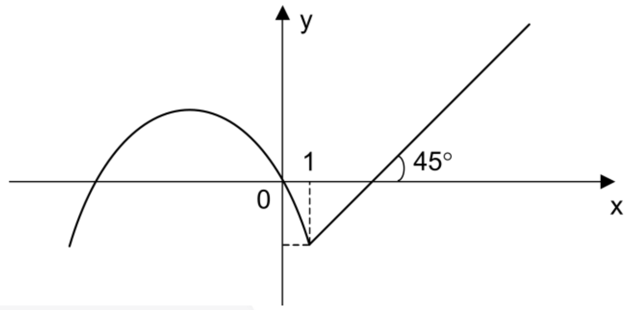
04. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ se } x\geq 1 \\ 1-x, \text{ se } x<1 \end{cases}$ e assinale a alternativa verdadeira.
A) f é sobrejetora
B) f é par
C) f não é par nem ímpar
D) Se f é definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, f é bijetora

05. **(AFA)** Na figura abaixo, tem-se o gráfico da função real f em que f(x) representa o preço, pago em reais, de x quilogramas de um determinado produto. ($f(x)\in\mathbb{R}$).



De acordo com o gráfico, é INCORRETO afirmar que:
A) o preço pago por 30 quilogramas do produto foi R$ 18,00.
B) com R$ 110,00, compra-se exatamente 55 quilogramas do produto.
C) com R$ 36,00, foi possível comprar 72 quilogramas do produto.
D) com R$ 32,00, compra-se tanto 53,333.... quilogramas, quanto 64 quilogramas do produto.

06. **(AFA)** Observe o gráfico da função f abaixo.



Sabendo que f é definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, \ x<1 \\ px+k, \ se\ x\geq 1 \end{cases}$ analise as alternativas e marque a opção correta.

A) $ac<0$
B) $pk\geq 0$
C) $p=-1$
D) $ab>0$

07. **(AFA)** O conjunto $\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)<0\}$, onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por $f(x)=ax^2+2a^2x+a^3$, com $a\in\mathbb{R}^*_-$, é:

A) $]-\infty,-a[$
B) $]-\infty,-a[\,\cup\,]-a,+\infty[$
C) $]-\infty,a[\,\cup\,]a,+\infty[$
D) $]-a,+\infty[$

08. **(AFA)** Analise os itens abaixo classificando-os em V(verdadeiro) ou F(falso).
(   ) Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $8\cdot(0,5)^x-1\leq 0$ é dado por $[4,+\infty)$.
(   ) A função real $y=e^{1-x}$ é crescente $\forall x\in\mathbb{R}$ (considere e a base dos logaritmos neperianos)
(   ) Se $f(x)=2^x$, então $f(a)\cdot f(b)$ é sempre igual a $f(a+b)$, onde a e b são reais quaisquer.
A sequência correta é:
A) FFV
B) VVF
C) FVV
D) VFF

09. **(AFA)** O conjunto solução da equação $\log_{x-2}(x+2)^2=2$ é:

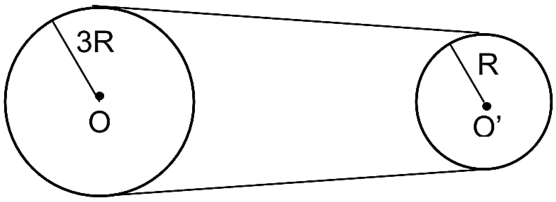
A) $\varnothing$
B) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>3\}$
C) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,2<x<3\}$
D) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>2 \ \text{e} \ x>3\}$

10. **(AFA)** “Na semana passada, a Secretaria Municipal de saúde do Rio de Janeiro anunciou que 5000 bombeiros participarão da campanha de combate à epidemia de dengue na cidade. É mais uma tentativa de deter o ritmo alucinante de crescimento da doença.” (Veja. Março/2012).
Suponha uma cidade com 128.000 habitantes e que, em determinada ocasião, fosse constatado que 8.000 habitantes estavam com dengue. Num estudo realizado, constatou-se que a taxa de aumento de pessoas contaminadas era de 50% ao mês. Com base nisso, pode-se afirmar que, caso não tomasse nenhuma providência:
Dados: log2 = 0,3 e log3 = 0,48

A) toda a população seria contaminada em dois meses.
B) em três meses, apenas 18.000 pessoas seriam contaminadas.
C) 40.500 pessoas seriam contaminadas em quatro meses
D) dez mil pessoas seriam contaminadas exatamente na metade de um mês.

4° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** As duas polias da figura giram simultaneamente em torno de seus respectivos centros O e O', por estarem ligadas por uma correia inextensível.



Quantos graus deve girar a menor polia para que a maior dê uma volta completa?
A) 1080°
B) 120°
C) 720°
D) 2160°

02. **(AFA)** Simplificando a expressão $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(4\pi-x)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$, obtém-se uma nova expressão E. O conjunto domínio, o conjunto imagem e o período da função $f(x)=E$ são, respectivamente:

A) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}$, π

B) $\mathbb{R}$, $[-1,1]$, 2π

C) $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\mathbb{R}$, π

D) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $[-1,1]$, 2π

03. **(AFA)** Considere a função real definida por $y=\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen}2x}$ e as seguintes afirmações:

I- A função é decrescente em todo seu domínio;
II- O gráfico da função apresenta assíntotas nos arcos $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
III- A função é negativa em $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$;
IV- A função admite inversa em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

São verdadeiras somente as afirmações contidas nos itens:
A) I e II
B) II e III
C) III e IV
D) I e IV

04. **(AFA)** Dado que $\operatorname{sen}x+\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, tem-se que $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ vale:

A) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

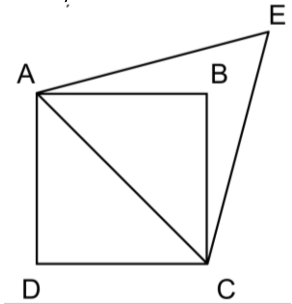
B) $-\frac{2}{3}$

C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

05. **(AFA)** ABC é um triângulo retângulo em A e CX é bissetriz do ângulo BCA, onde X é o ponto do lado AB. A medida CX é 4 cm e a de BC, 24 cm. Sendo assim, a medida do lado AC, em centímetros, é igual a:
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

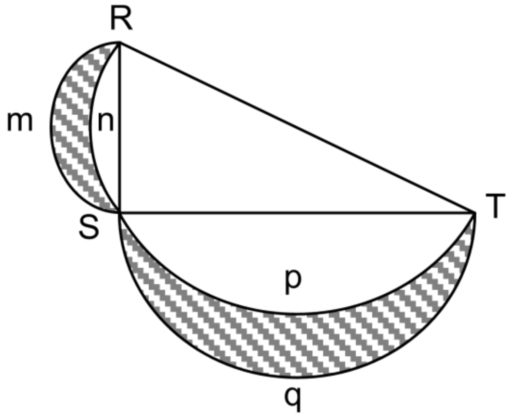
06. **(AFA)** Na figura, o triângulo AEC é equilátero e ABCD é um quadrado de lado 2cm. A distância BE, em cm, vale:



A) $2\sqrt{3}$
B) $\sqrt{6}-1$
C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

07. **(AFA)** Na figura, RST é um triângulo retângulo em S. Os arcos RnSpT, RmS e SqT são

semicircunferências cujos diâmetros são, respectivamente, RT, SR e ST. A soma das áreas das figuras hachuradas está para a área do triângulo RST na razão:

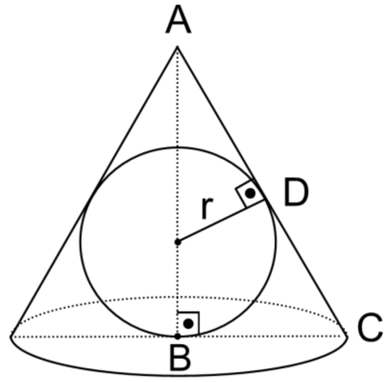


A) 1/3
B) 1/2
C) 1
D) 3/2

08. **(AFA)** Um poliedro platônico, cujas faces são triangulares, tem 30 arestas. Determine o número de arestas que concorrem em cada vértice.
A) 3
B) 5
C) 4
D) 6

09. **(AFA)** Seja P uma pirâmide cujo vértice é o centro de uma das faces de um cubo de aresta a e cuja base é a face oposta. Então, a área lateral dessa pirâmide é igual a:
A) $a^2\sqrt{5}$
B) $2a^2\sqrt{3}$
C) $a^2\sqrt{3}$
D) $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$

10. **(AFA)** Na figura seguinte, tem-se uma esfera de maior raio contida num cone reto e tangente ao plano da base do mesmo. Sabe-se que o raio da base e a altura desse cone são, respectivamente, iguais a 6cm e 8 cm. A metade do volume da região do cone exterior à esfera é, cm cm³, igual a:



A) 66π
B) 48π
C) 30π
D) 18π

5° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Analise as proposições abaixo, classificando-as em VERDADEIRA(S) ou FALSA(S).

I. Se $x \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{x^2} = x$ para $x \geq 0$ ou $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$.

II. Se a e b são número reais, a > 0, b > 0, p > 1 e $\frac{a+bp^2}{a+b} > p$, então $\frac{a}{b} > p$.

III. Se um mesmo serviço pode ser feito pelo operário A em 8 horas e por B em 12 horas, quando operam separadamente, então durante 3 horas, trabalhando juntos, executam uma parte correspondente a 62,5% do serviço.

Tem-se a sequência correta:
A) VFV
B) VFF
C) FFV
D) VVV

02. **(AFA)** No conjunto universo S dado por: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$, é definido o subconjunto $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$. Pode-se afirmar que C_S^M é igual a:

A) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 1 \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1\right\}$

B) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\}$

C) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$

D) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \frac{1}{2} < y \leq 1\right\}$

03. **(AFA)** Analise as sentenças abaixo, classificando-as em V (verdadeira) ou F (falsa), considerando $i = \sqrt{-1}$. A seguir, assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

I- A representação geométrica dos números complexos z tais que $|z - (1 - i)| \leq 2$ é um círculo de centro $C(1, -1)$ e raio 2.

II- A forma trigonométrica de $z = \frac{1+i}{i}$ é $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$.

III- Se $z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha$, então $z \cdot \bar{z} = -i^2$, $\forall \alpha \in \Re$.

A) VVV
B) VVF
C) FFV
D) VFV

04. **(AFA)** Num certo jogo de azar, apostando-se uma quantia x, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:
1º) perde-se a quantia x apostada
2º) recebe-se a quantia 2x.

Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na 1° vez apostou 1 centavo, na 2º vez apostou 2 centavos; na 3° vez apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior. Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21° vez, ela ganhou. Comparando a quantia total T perdida e a quantia Q recebida, tem-se que Q é igual a:
A) T/2
B) 2T
C) 2(T + 1)
D) T + 1

05. **(AFA)** Sendo $P(x) = x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + 9x^9 + \cdots + 999x^{999}$, o resto da divisão de P(x) por (x – 1) é:
A) 249.500
B) 250.000
C) 250.500
D) 251.000

06. **(AFA)** A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, onde m e n são números reais e $i^2 = -1$, admite 1 + i como raiz. Então m + n é igual a:
A) – 2
B) 0
C) 1
D) 2

07. **(AFA)** Se você vai comprar algo que custa cinquenta e cinco centavos, em uma máquina automática, e dispõe de oito moedas de cinco

centavos do mesmo modelo e cinco de dez centavos também do mesmo modelo, então, existem **n** sequencias possíveis de introduzir as moedas, totalizando cinquenta e cinco centavos. O valor de n é:
A) 133
B) 127.
C) 24
D) 4

08. **(AFA)** Sabendo-se que no desenvolvimento de $(1+x)^{26}$ os coeficientes dos termos de ordem (2r + 1) e (r + 3) são iguais, pode-se afirmar que r é igual a:
A) 8 ou 4
B) 8 ou 2
C) 4 ou 2
D) 2 ou 1

09. **(AFA)** Em uma urna contendo 12 bolas amarelas, 15 bolas brancas e 18 bolas pretas, a probabilidade de retirar três bolas de cores diferentes é:
A) 38%
B) 22,8%
C) 11,4%
D) 1/376

10. **(AFA)** Se $A=(a_{ij})_{2\times3}$ e $B=(b_{ij})_{3\times4}$, a expressão para encontrar o elemento c_{23}, onde $AB=(c_{ij})$, é igual a:
A) $a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33}$
B) $a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}$
C) $a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}$
D) $aa_{23}b_{32}$

6° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \text{sen}a & 1 \\ 4 & 1 & 2\text{sen}a \end{bmatrix}$ é igual ao menor valor da função $y = x^2 - 2x + 1$. Então, o maior valor de a no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

A) $\frac{\pi}{6}$
B) $\frac{5\pi}{6}$
C) $\frac{3\pi}{4}$
D) $\frac{7\pi}{4}$

02. **(AFA)** Analise as proposições abaixo, classificando-as em V (VERDADEIRA) e F (FALSA).

I- O sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$ é indeterminado para $m = -1$ e uma de suas soluções é a terna $(-1, 1, 1)$.

II- Para que o sistema $\begin{cases} (m+1)x + 7y = 10 \\ 4x + (m-2)y = 0 \end{cases}$ seja impossível deve-se ter $m = -5$, somente.

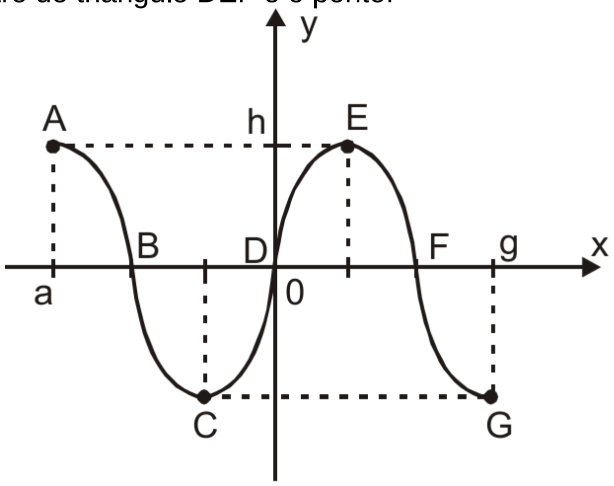
III- Na equação matricial: $\begin{bmatrix} x-1 & y+2 \\ z & x+y+z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ a soma $x + y + z$ é igual a 3.

Tem-se a sequência correta:
A) VVF
B) FVF
C) VFV
D) FFV

03. **(AFA)** Os pontos A(0,0) e B(3,0) são vértices consecutivos de um paralelogramo ABCS situado no primeiro quadrante. O lado AD é perpendicular à reta $y = -2x$ e o ponto D pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$. Então, a diagonal AC mede:

A) $\sqrt{38}$
B) $\sqrt{37}$
C) $\sqrt{34}$
D) $\sqrt{26}$

04. **(AFA)** Na figura abaixo, tem-se a representação gráfica da função real $f(x) = 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ para $x \in [a, g]$. É correto afirmar que o baricentro do triângulo DEF é o ponto:



A) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$
B) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right)$
C) $\left(\pi, \frac{1}{3}\right)$
D) $\left(\pi, \frac{2}{3}\right)$

05. **(AFA)** A equação $(x+y)(x-y) = 1$ representa:

A) uma hipérbole com excentricidade $e = \sqrt{2}$
B) duas retas perpendiculares entre si
C) uma elipse com centro na origem
D) uma hipérbole cuja distância focal é igual a 2

06. **(AFA)** Com relação ao conjunto de pontos P(x,y) equidistantes da reta y = 3 e da origem

do sistema cartesiano ortogonal, é INCORRETO afirmar que é uma curva:
A) representada por $x^2-6y-9=0$
B) cujas coordenadas do vértice têm soma igual a 1,5
C) que representa uma função par
D) cujo parâmetro é igual a 3

07. **(AFA)** Considere as funções reais:
$(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x^2-6x-1, \text{ se } x\geq 1\\ 4x+3, \text{ se } x<1\end{cases}$ e $g(x)=2x-3$
Com base nessas funções classifique as afirmativas abaixo em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).
I- $f(x)$ é par
II- $f(x)$ admite inversa em todo seu domínio
III- $f(x)$ é crescente em $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<-1 \text{ ou } x\geq -1\}$
IV- se $x<-6$ então $f(x)>-3$
A sequência correta é:
A) VVFV
B) FFVF
C) FFVV
D) FVVF

08. **(AFA)** Se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax-1$, $a\in\mathbb{R}^*$, for crescente e $f(f(4))=32$, então pode-se afirmar que a mesma:
A) é positiva para x < 0
B) é negativa para x < 1/3
C) é nula para x = 3
D) admite o valor -2/3 quando x = 1

09. **(AFA)** Seja $f(x)=ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ uma função definida para todo número real. Sabendo-se que existem dois números x_1 e x_2, distintos tais que $f(x_1)f(x_2)<0$, pode-se afirmar que:
A) f passa necessariamente por um máximo.
B) f passa necessariamente por um mínimo
C) $x_1\cdot x_2$ é necessariamente negativo
D) $b^2-4ac>0$

10. **(AFA)** Analise os itens abaixo classificando-os como V (VERDADEIRO) ou F (FALSO).
I- Se $\operatorname{sen}x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, então $\operatorname{sen}2x=-0,666\cdots$
II- Se $f(x)=x^2+\sqrt{2}x+\operatorname{sen}\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi]$, é positiva $\forall x\in\mathbb{R}$, então $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}$.
III- O gráfico de $f(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x)$ é uma reta.
A sequência correta é:
A) VVF
B) FVF
C) FVV
D) VFV

7° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Todos os valores reais de x para os quais existe $f(x)=\sqrt{x^{4x-1}-x}$ são tais que:

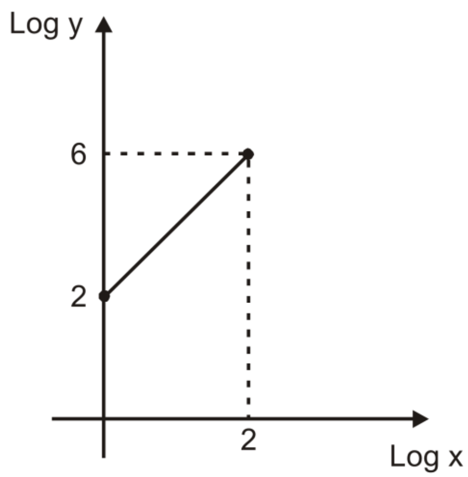
A) $x>1$

B) $0<x\le\frac{1}{2}$

C) $0<x<\frac{1}{2}$

D) $0<x\le\frac{1}{2}$ ou $x>1$

02. **(AFA)** O gráfico abaixo expressa a variação de $\log y$ em função de $\log x$, onde log é o logaritmo na base decimal.



A relação correta entre x e y é igual a:

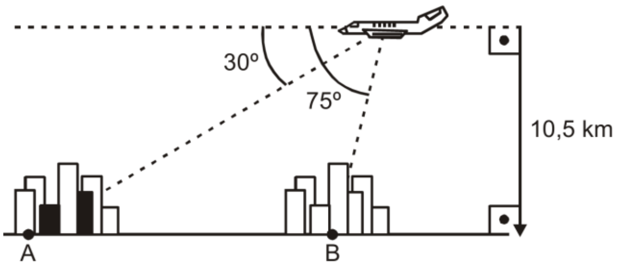
A) $y=2+2x$

B) $y=\frac{3}{3}+x$

C) $y=100x^2$

D) $y=\frac{5}{2}+x$

03. **(AFA)** Um passageiro em um avião voando a 10,5 km de altura avista duas cidades à esquerda da aeronave. Os ângulos de depressão em relação às cidades são 30° e 75° conforme a figura abaixo.



A distância, em km, entre os prédios A e B situados nessas cidades é igual a:

A) $21\left(\sqrt{3}-1\right)$

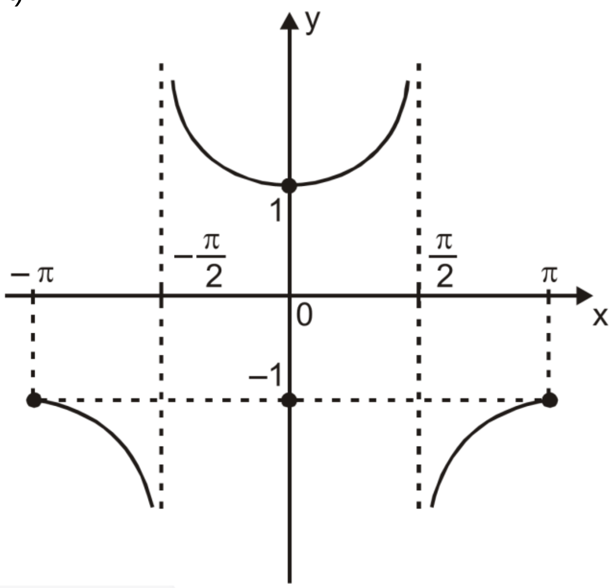
B) $\frac{21}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

C) $\frac{21}{2}\sqrt{3}$

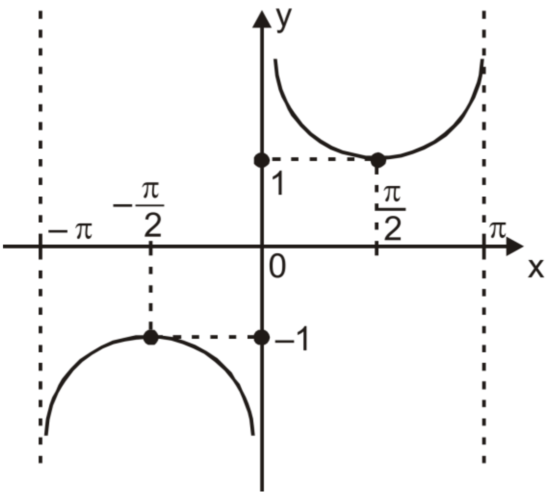
D) $\sqrt{3}-1$

04. **(AFA)** Seja $f:D\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}+\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$. O gráfico que MELHOR representa um período completo da função f é:

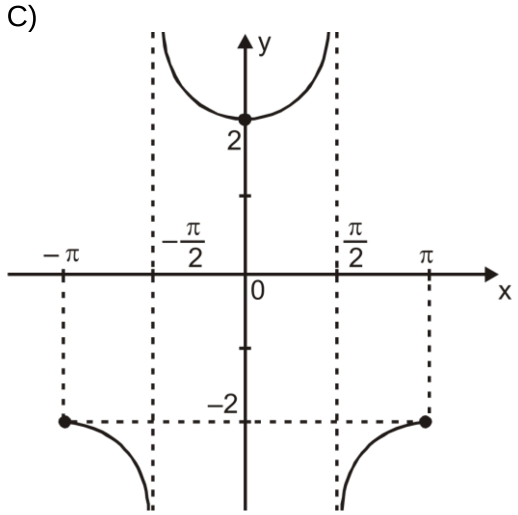
A)



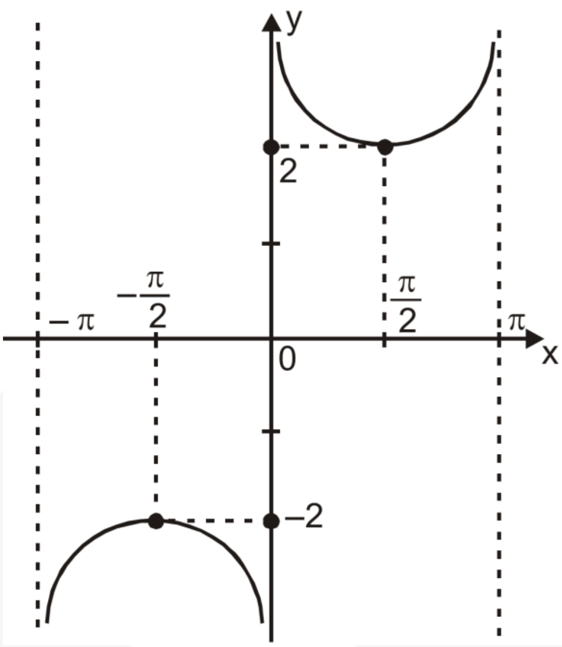
B)



C)

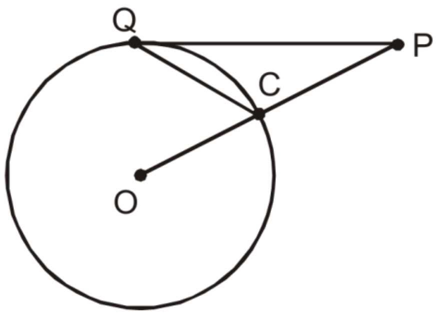


D)



05. **(AFA)** Um trapézio A tem por bases 80m e 60m e altura 24m. A 6m da base maior, traça-se uma paralela situada entre as duas bases do trapézio, determinando, assim, dois outros trapézios B e C. O módulo da diferença entre as áreas dos trapézios B e C é, em m², igual a:
A) 700
B) 750
C) 820
D) 950

06. **(AFA)** Seja PQ tangente à circunferência de centro O e raio r. Se CQ = r, pode-se afirmar que PQ + PC é igual a:



A) $r+\sqrt{3}$
B) $2r+r\sqrt{3}$
C) $r\sqrt{3}$
D) $r+r\sqrt{3}$

07. **(AFA)** Assinale a única alternativa FALSA.
A) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existem infinitas retas contidas em α e perpendiculares a β.
B) Se α e β são planos perpendiculares entre si e γ é um plano perpendicular à reta comum a α e β, então pode-se afirmar que as retas r, $r=\alpha\cap\gamma$ e s, $s=\beta\cap\gamma$, são perpendiculares entre si.
C) Se duas retas r e s são reversas, então não existem dois planos α e β, perpendiculares entre si, tais que $r\subset\alpha$ e $s\subset\beta$.
D) Duas retas do espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.

08. **(AFA)** Uma pirâmide regular de 6 faces laterais tem sua base inscrita num círculo de raio R. sabendo-se que suas arestas laterais têm comprimento L, então o volume dessa pirâmide é:

A) $R^2\sqrt{3\left(L^2 - R^2\right)}$

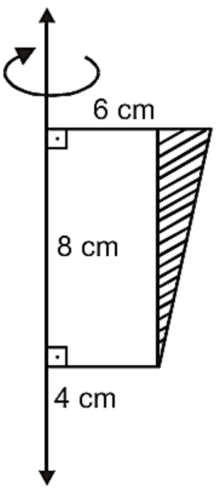
B) $\frac{R^2}{2}\sqrt{L^2 - R^2}$

C) $\frac{R^2}{3}\sqrt{2\left(L^2 - R^2\right)}$

D) $\frac{R^2}{2}\sqrt{3\left(L^2 - R^2\right)}$

09. **(AFA)** Uma esfera de 10 cm de raio e um cone reto de 10 cm de raio da base e altura 20 cm estão situados sobre um plano α. A distância x, de um plano β paralelo ao plano α, tal que as áreas das secções obtidas pela interseção do plano β com os sólidos, esfera e cone, sejam iguais, é, em cm, igual a:
A) 1
B) 2
C) 4
D) 6

10. **(AFA)** Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna abaixo. O volume do sólido gerado pela rotação de 360º da região hachurada da figura em torno do eixo é de _________ π cm³.



A) 230

B) $\frac{224}{3}$

C) 374

D) $\frac{608}{3}$

8° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Considere um subconjunto A contido em $\mathbb{N}^*$ e constituído por y elementos dos quais: 13 são múltiplos de 4, 7 são múltiplos de 10, 5 são múltiplos de 20 e 9 são números ímpares.
É correto afirmar que y é um número:
A) par menor que 19
B) ímpar entre 10 e 20
C) primo maior que 21
D) múltiplo de 12

02. **(AFA)** Seja $A=\left\{x\in\mathbb{N}^* / \frac{24}{x}=n, n\in\mathbb{N}\right\}$ e $B=\left\{x\in\mathbb{Z}_+ / \frac{3x+4}{2x+9}-1<0\right\}$. É correto afirmar que:
A) $B-A=\{0\}$
B) $A\cup B$ tem 8 elementos
C) $A\supset B$
D) $A\cap B=A$

03. **(AFA)** Considere $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ os **n** primeiros números naturais primos consecutivos com $n\geq 5$. Se $x=P_1\cdot P_2^2\cdot P_3^3\cdot P_4^4\cdot \cdots \cdot P_n^n$ e $y=P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4\cdot \cdots \cdot P_n$, então o número total de divisores positivos de $\frac{x}{y}$ é dado por:
A) $(n+1)!$
B) $n!$
C) $n!+1$
D) $(n-1)!$

04. **(AFA)** Considere $i^2=-1$, $\alpha\in[0,2\pi]$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ e $\alpha\neq\frac{3\pi}{2}$. Se $\overline{z}=tg\alpha+i$, então a soma dos valores de α para os quais $|z|=2$ é igual a:
A) 2π
B) 3π
C) 4π
D) 5π

05. **(AFA)** Considere o número complexo z tal que $\overline{|z|+z}=2-i$, onde $i=\sqrt{-1}$ e identifique entre as opções abaixo, as que são corretas.
(01) O afixo de z é o ponto do 1° quadrante.
(02) $\left(z-\frac{3}{4}\right)^{1002}$ é real positivo.
(03) O menor inteiro positivo **n** para o qual $\left(z+\frac{1}{4}\right)^{n}$ é real negativo pertence ao intervalo $]2,5[$.
A soma das opções corretas é igual a:
A) 6
B) 5
C) 3
D) 2

06. **(AFA)** Escolha a opção INCORRETA.
A) O polinômio $P(x)=x^5-12x^4+\sqrt{3}x^3-1$ tem pelo menos uma raiz real.
B) Toda equação polinomial de grau n admite, no máximo, n raízes reais
C) toda equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas
D) Se α e β são números reais positivos e a equação $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x-\beta=0$ admite duas raízes simétricas, então todas as suas raízes são reais.

07. **(AFA)** Três crianças, A, B e C vai dividir entre si 450 balas da seguinte maneira: **A** recebe uma bala; **B**, duas e **C** três. Repetindo-se o processo **A** recebe quatro balas, **B**, cinco e **C**, seis e, novamente, **A** recebe sete e assim por diante, até que não haja mais balas para continuar o processo. A criança seguinte receberá as balas restantes. Com base nessas informações, é correto afirmar que:
A) o número de balas restantes foi 29 e quem recebeu foi a criança B.
B) as crianças **A** e **C**, juntas, receberam 300 balas
C) a criança **B** recebe 10 balas a mais que a criança **A**
D) o maior número de balas que uma criança recebe antes da conclusão do processo é 15

08. **(AFA)** Uma prova consta de 3 partes, cada uma com 5 questões. Cada questão, independentemente da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção “certo ou errado”. O número de maneiras diferentes de se alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total, é igual a:
A) 75
B) 150
C) 1500
D) 1600

09. **(AFA)** Dentro de uma caixa há nove etiquetas. Cada etiqueta recebe um número de 01 a 09, sem repetir nenhum. Retira-se três delas, uma a uma, sem reposição. A probabilidade de que os três números correspondentes às etiquetas retiradas sejam, nesta ordem, ÍMPAR – PAR – ÍMPAR ou PAR – ÍMPAR – PAR é de:
A) 1/28
B) 5/18
C) 20/81
D) 5/36

10. **(AFA)** Analise as afirmativas abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA):

( ) No desenvolvimento de $(2x+k)^7$, $k \in \mathbb{R}^*$, o coeficiente numérico do termo em x^4 é quatro vezes o coeficiente numérico do termo em x^3. Então k vale $\frac{1}{4}$.

( ) Sejam m e p números inteiros positivos, tais que $m-1 \geq p$. Então, $\binom{m-1}{p-2}+\binom{m-1}{p-1}+\binom{m}{p}$ é igual a $\binom{m+1}{p}$.

( ) Se $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots\binom{n}{n}=1023$

A sequência correta é:
A) VVV
B) FFV
C) VFF
D) FVV

9° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Considere $\alpha \in [0,2\pi]$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e lnx, o logaritmo neperiano de x (x>0). Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\ln x}{\sec\alpha} & \ln x \cdot \operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos(-\alpha) \end{vmatrix}$$

É correto afirmar que o valor de D:
A) depende do ângulo α
B) nunca será nulo
C) será positivo $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
D) será negativo se $0 < x < 1$

02. **(AFA)** Considere o sistema $\begin{cases} 2x - 4y + 10z = 6 \\ 3x - 6y + mz = n \end{cases}$ em que m e n são números reais e x, y e z são incógnitas. Para que este sistema seja possível e indeterminado deve-se ter:
A) $m = 15$ e $n = 9$
B) $m = 15$ e n qualquer
C) $m \neq 15$ e $n \neq 9$
D) $m \neq 15$ e $n = 9$

03. **(AFA)** Considere duas circunferências de mesmo raio, sendo $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ a equação da primeira e $C_2(4,2)$, o centro da segunda. Se a reta **s** contém uma corda comum a ambas circunferências, é **FALSO** que **s**:
A) é perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares
B) tem declividade positiva
C) admite equação na forma segmentária
D) tem coeficiente linear nulo

04. **(AFA)** Dados os conjuntos A e B, tais que: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \leq m,\ m \in \Re\}$. É correto afirmar que:
A) A e B são disjuntos de $m = -3\sqrt{2}$
B) $A \cap B \neq \varnothing$, se $m \geq 3\sqrt{2}$
C) A é subconjunto de B de $|m| < 3\sqrt{2}$
D) A e B nunca terão apenas um ponto em comum

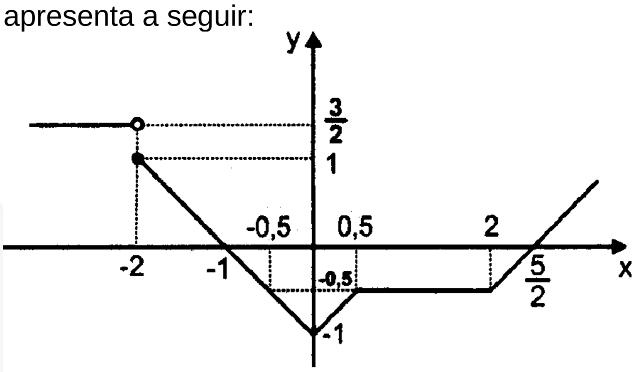
05. **(AFA)** Analise as proposições abaixo, classificando-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).
( ) Considere a circunferência λ e a hipérbole $2y^2 - x^2 = 8$ tendo mesmo centro. Se λ passa pelos focos da hipérbole, uma de suas equações é $x^2 + y^2 = 12$.

( ) Numa hipérbole equilátera, uma das assíntotas tem coeficiente angular igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

( ) A excentricidade da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

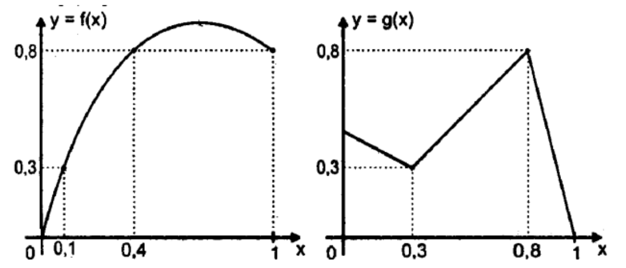
Tem-se a sequência:
A) VFV
B) FFV
C) FVF
D) VVF

06. **(AFA)** Seja f a função real cujo gráfico se apresenta a seguir:



Analisando o gráfico, é **INCORRETO** afirmar que:
A) $f(f(1)) = f(0,5)$
B) $f(x) + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
C) $f(0) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
D) se $g(x) = f(x) - 1$, então $g(-2) = f\left(\frac{5}{2}\right)$

07. **(AFA)** Observe os gráficos abaixo, das funções f e g, definidas no intervalo $[0,1]$.



Com base nos gráficos, assinale a alternativa FALSA.

A) $g(f(0,4)) \geq g(f(x)), \forall x \in [0,1]$

B) $g(f(0,05)) > g(f(0,1))$

C) $g(g(x)) = x, \ \forall x \in [0,3;\ 0,8]$

D) $g(f(0,6)) > g(f(1))$

08. **(AFA)** Dada a função real f definida por $f(x) = x^2$, considere a função real g definida por $g(x) = f(x+m) + k$, sendo $(m,k) \in \mathbb{R}$. É INCORRETO afirmar que:

A) o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f é deslocado k unidades cima, se k > 0, e m unidades para a direita, se m < 0.

B) a equação do eixo de simetria da parábola que representa g é dada por x = m.

C) se m = 0 e k = 1, então o conjunto imagem de g é dado por $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\}$.

D) se $m = -2$ e $k = -3$, então as coordenadas do vértice da parábola que representa g são $(-m, k)$.

09. **(AFA)** Os valores de x que satisfazem a equação $\sqrt{|x|+1} + \sqrt{|x|} = 2$ têm produto igual a:

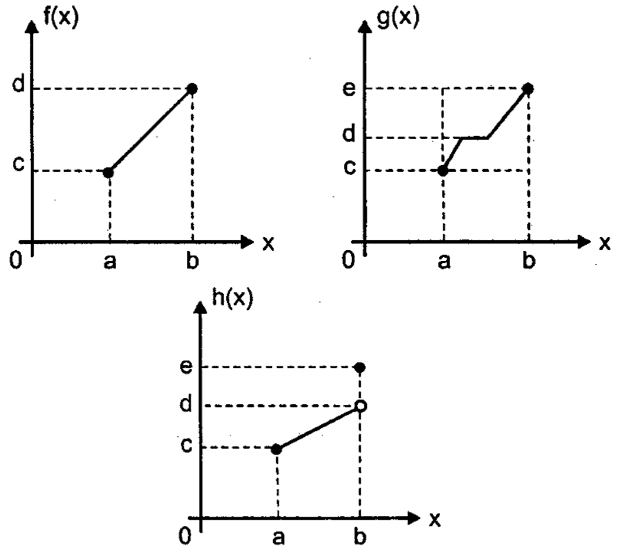
A) $-\frac{81}{256}$

B) $-\frac{27}{64}$

C) $-\frac{9}{16}$

D) $-\frac{3}{4}$

10. **(AFA)** Considere as funções f, g e h, todas de domínio $[a,b]$ e contra domínio $[c,d]$, representadas através dos gráficos abaixo.



Com base nos gráficos, é correto afirmar que:

A) f é uma sobrejeção, g não é uma injeção, h é uma sobrejeção.

B) f é uma sobrejeção, g é uma injeção, h não é sobrejeção.

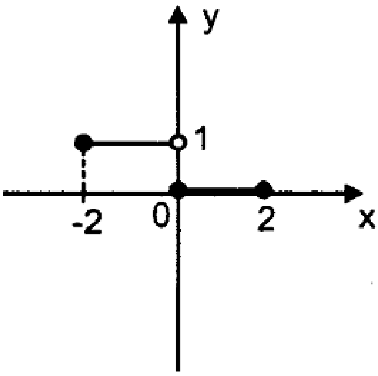
C) f é uma injeção, g não é sobrejeção, h é uma bijeção.

D) f é uma bijeção, g não é injeção, h não é uma sobrejeção.

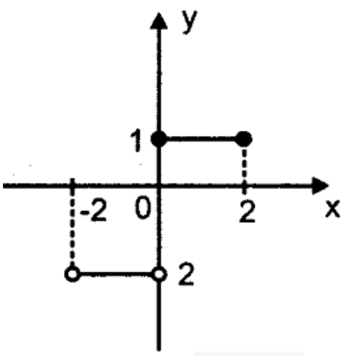
10° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Considere a função $f(x)=\begin{cases}1, \text{se } 0\le x\le 2\\ -2, \text{se } -2\le x<0\end{cases}$. A função $g(x)=\left|f(x)\right|-1$ terá o seguinte gráfico:

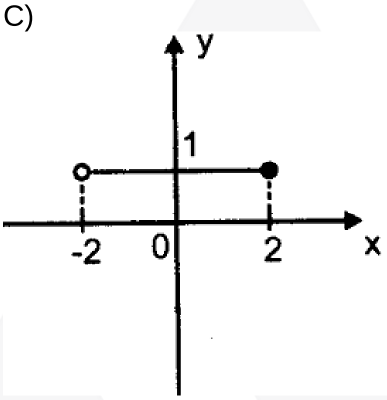
A)



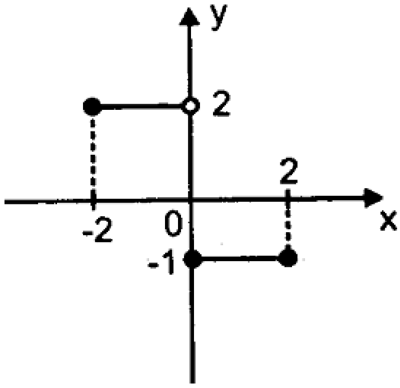
B)



C)



D)



02. **(AFA)** A soma dos números inteiros que satisfazem a sentença $3\le\left|2x-3\right|<6$ é um número:
A) ímpar
B) primo
C) divisível por 3
D) que é divisor de 7

03. **(AFA)** Uma casa que custa R$ 50.000,00 à vista pode ser comprada conforme um dos financiamentos abaixo:
I- 50% de entrada e o restante, ao final de 2 meses, com juros compostos de 5% ao mês.
II- R$ 20.000,00 de entrada e uma parcela de R$ 36.000,00, ao final de x meses com juros compostos de 10% ao mês.

De acordo com a situação acima, é FALSO afirmar que:
A) o financiamento I é mais vantajoso que o financiamento II;
B) o valor pago a prazo no financiamento II corresponde a 72,6% do preço da casa à vista;
C) o valor dos juros do financiamento I, corresponde a 5,2% do valor de casa à vista;
D) quem optar pelo financiamento II pagará a parcela de R$ 36.300,00 ao final de dois meses.

04. **(AFA)** O domínio da função real definida por $f(x)=\sqrt{x^{1+\log_a x}-a^2x}$ é:

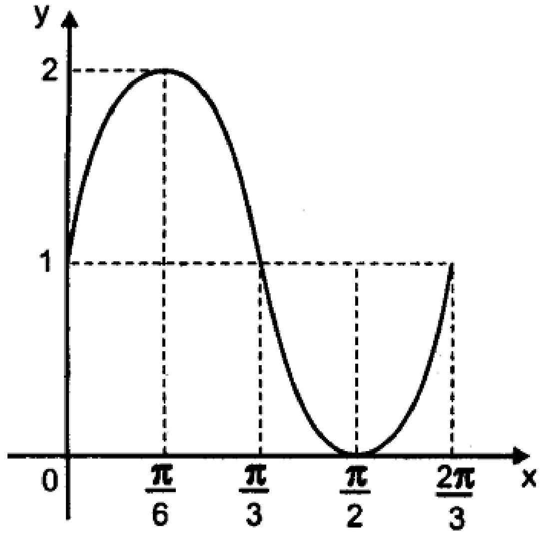
A) $a^{\sqrt{2}}\le x\le a^{-\sqrt{2}}$, se $0<a<1$

B) $0<x\le a^{-\sqrt{2}}$ ou $x\ge a^{\sqrt{2}}$, se $0<a<1$

C) $a^{\sqrt{2}}\le x\le a^{-\sqrt{2}}$, se $a>1$

D) $x<a^{-\sqrt{2}}$ ou $x>a^{\sqrt{2}}$, se $a>1$

05. **(AFA)** Sabendo que o gráfico abaixo é da função $y = a + \text{sen}bx$, pode-se afirmar que a + b é um número:



A) par
B) primo
C) divisor de 18
D) múltiplo de 7

06. **(AFA)** Sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, analise as proposições e classifique-as com verdadeiras (V) ou falsas (F).

(   ) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $\text{tg}x = -\text{tg}\alpha$

(   ) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sec x = \text{cossec}\alpha$

(   ) Sendo $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

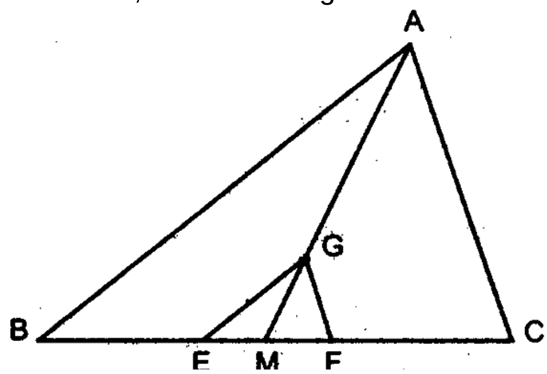
(   ) A função $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica à função $g(x) = 2 - \cos x$

Tem-se a sequência:
A) VVVV
B) VFFF
C) FVFF
D) VVFV

07. **(AFA)** Considere m a raiz da equação $\cos 2x + 3\text{sen}^2 x - \text{sen}x - 3 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$. O número $\text{cotg}m - \sec 2m$ é:

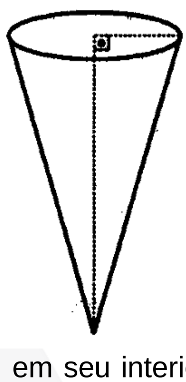
A) 0
B) – 1
C) 1
D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

08. **(AFA)** Considere o triângulo ABC, de lados AB = 15, AC = 10, BC = 12 e seu baricentro G. Traçam-se GE e GF paralelos a AB e AC, respectivamente, conforme a figura abaixo.



O perímetro do triângulo GEF é um número que, escrito na forma de fração irredutível, tem soma do numerador com o denominador igual a:
A) 43
B) 40
C) 38
E) 35

09. **(AFA)** Um recipiente no formato de uma superfície de um cone circular reto, conforme figura, tem sua superfície lateral desenvolvida em um semicírculo de área igual a $18\pi\ \text{cm}^2$.



Se tal superfície, em seu interior, armazena um líquido até os 2/3 de sua altura, pode-se dizer que o volume do líquido armazenado, em cm³, é igual a:

A) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$
B) $2\pi\sqrt{3}$
C) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$
D) $8\pi\sqrt{3}$

10. **(AFA)** A diagonal de um paralelepípedo reto retângulo mede $3\sqrt{35}$ cm e suas dimensões são proporcionais a 1, 3 e 5. A fração irredutível $\frac{\alpha}{\beta}$ que representa a razão entre a área total do paralelepípedo e seu volume é tal que:
A) α e β são dois números primos
B) $\alpha+\beta=100$
C) $\alpha-\beta=11$
D) $\beta-\alpha=-1$

11° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** Considere o número complexo $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e calcule z^n. No conjunto formado pelos quatro menores valores naturais de n para os quais z^n é um número real:
A) existem números que estão em progressão aritmética de razão igual a 4.
B) há elementos cuja soma é igual a 30.
C) existe um único número ímpar.
D) existe apenas um elemento que é número primo.

02. **(AFA)** Analise as afirmativas abaixo referentes aos números complexos $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ e $w=1-i$.
(01) $|z|\cdot w^{10}$ é um número imaginário puro.
(02) O afixo de w^{-1} é o ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
(04) A forma trigonométrica de $\overline{z}$ é $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.
(08) as raízes quartas de w são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $r=\sqrt[4]{2}$.

Somando-se os números associados às afirmativas verdadeiras obtém-se um total t, tal que:
A) $t\in[1,4]$
B) $t\in[5,8]$
C) $t\in[9,12]$
D) $t\in[13,15]$

03. **(AFA)** São dadas uma progressão aritmética e uma progressão geométrica alternante com primeiro termo igual a 1. Multiplicando-se os termos correspondentes das duas sequências obtém-se a sequência $(-1,1,3,\cdots)$. A soma dos 5 primeiros termos desta sequência é:
A) 61
B) 97
C) 103
D) 111

04. **(AFA)** Analise as proposições abaixo, classificando-as em (V) verdadeiras ou (F) falsas.
( ) O resto da divisão de $P(x)=5x^{2n}-4x^{2n+1}-2, n\in\mathbb{N}$ por $x+1$ varia de acordo com o valor de n.
( ) Se $P(x)+x\cdot P(3-x)=x^2+1$, então $P(3)=13$.
( ) Se $1+i$ é a raiz de $P(x)=x^3+bx^2+cx+d$, sendo $\{b,c,d\}\subset\mathbb{R}$, então uma das raízes tem forma trigonométrica igual a $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$.
Tem-se:
A) todas são falsas
B) apenas duas são falsas
C) apenas uma é falsa
D) todas são verdadeiras

05. **(AFA)** O conjunto solução S de $P(x)=0$, possui 3 elementos. Sabendo-se que $P(x)=x^6-mx^4+16x^3$, onde $m\in\mathbb{R}$, assinale a alternativa INCORRETA.
A) o número m é múltiplo de 3
B) os elementos de S formam uma progressão aritmética
C) S é constituído só de números pares
D) $R(x)$, resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)$, é um polinômio de grau zero.

06. **(AFA)** Com base no conhecimento sobre análise combinatória, é correto afirmar que:
(01) existem 2160 possibilidades de 8 pessoas ocuparem um veículo com 3 lugares voltados para trás e 5 lugares voltados para frente, sendo que 2 das pessoas preferem bancos voltados para trás, 3 delas preferem bancos voltados para frente e as demais não têm preferências.
(04) com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, pode-se formar 525 números ímpares com 4 algarismos e que não tenham zeros consecutivos.
(08) podem ser formados 330 paralelogramos a partir de 7 retas paralelas entre si, interceptadas por outra 4 retas paralelas entre si.
A soma das alternativas corretas é:
A) 05

B) 09
C) 12
D) 13

07. **(AFA)** Os três primeiros coeficientes do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$ segundo potências decrescentes de x estão em progressão aritmética. O valor de n é um número:
A) primo
B) quadrado perfeito
C) cubo perfeito
D) maior que 9 e menor que 15

08. **(AFA)** Numa caixa existem 6 canetas pretas, 4 azuis e 3 vermelhas. Se três canetas são retiradas ao acaso, e sem reposição, a probabilidade de que pelo menos duas tenham cores distintas é:
A) $\frac{261}{286}$
B) $\frac{1}{9}$
C) $\frac{C_{6,3}}{C_{13,3}}$
D) $1-\frac{C_{6,3}}{C_{13,3}}$

09. **(AFA)** Assinale as sentenças abaixo:
I. Seja a matriz $A=(a_{ij})_{3\times3}$ definida por $\begin{cases}\binom{2i}{j}, \text{ se } i=j\\(i+2j), \text{ se } i\neq j\end{cases}$. O elemento da terceira linha e segunda colune da matriz transposta de A é 8.
II. Seja a matriz $B=A-A^T$ (A^T é a transposta de A), onde a é uma matriz quadrada de ondem n. Então, a diagonal principal de B é nula.
III. A matriz $A=\begin{pmatrix}1 & \text{sen}\theta\\ \text{sen}\theta & 1\end{pmatrix}$ é inversível se $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
IV. Se a matriz $M=\begin{pmatrix}z & 2^{x+2} & \log(2z-4)\\ 4^x & x & (z+1)!\\ \log y & y! & y\end{pmatrix}$ é simétrica, então o produto dos elementos de sua diagonal principal é igual a 36.

É (são) falsa(s) apenas:
A) I e III
B) II e IV
C) IV
D) I e II

10. **(AFA)** Sendo $x=\begin{vmatrix}12 & 18 & 9\\ 21 & 17 & 15\\ 32 & 60 & 14\end{vmatrix}$ e $y=\begin{vmatrix}32 & 60 & 14\\ 63 & 51 & 45\\ 12 & 18 & 9\end{vmatrix}$, então:
A) $x=3y$
B) $x=-27y$
C) $y=-3x$
D) $y=27x$

12° REVISÃO GERAL 2014 ☞ EFOMM-AFA-EN

01. **(AFA)** (x, y, z) são as soluções do sistema $\begin{cases} 8x - y - 2z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \end{cases}$. Se x, y e z formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, então a razão dessa progressão aritmética é igual a:

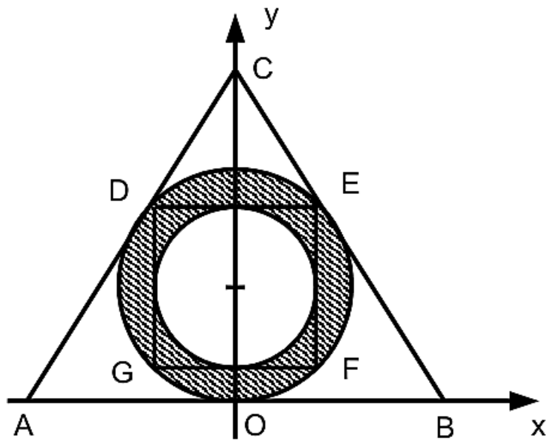
A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{3}{2}$

C) x

D) $\frac{x + y + z}{3}$

02. **(AFA)** Um cursinho tem representado na figura abaixo o seu logotipo que é contornado por um triângulo equilátero ABC, cujo baricentro é o ponto $P\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. No interior desse triângulo há o quadrado DEFG inscrito na circunferência λ_1 e, ao mesmo tempo, circunscrito à circunferência λ_2. Considerando os dados acima, classifique as alternativas abaixo em (V) verdadeiras ou (F) falsas.



( ) A equação geral de λ_1 é $x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 0$.

( ) A coroa circular sombreada na figura pode ser representada pelo conjunto de ponto $Q(x, y)$, tais que:

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{6} \end{cases}$$

( ) A reta suporte que contém o segmento BC pode ser representado por $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

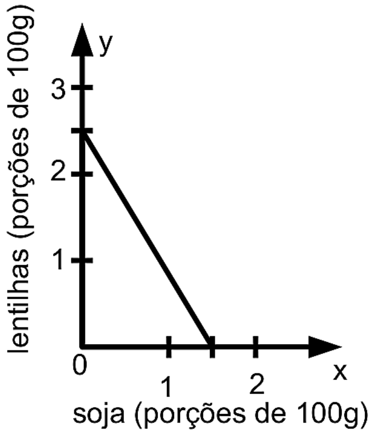
A sequência correta é:
A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) VVF

03. **(AFA)** Sabe-se que 100g de soja seca contém 39g de proteínas e que 100g de lentilha seca contém 26g de proteínas. Homens de estatura média, vivendo em clima moderado, necessitam de 65g de proteínas em sua alimentação diária. Suponha que um homem queira nutrir-se com esses 65g de proteínas alimentando-se de soja e/ou lentilha. Seja x a quantidade diária de soja e y quantidade diária de lentilha, x e y positivos e medidos em porções de 100g.
É INCORRETO afirmar que:

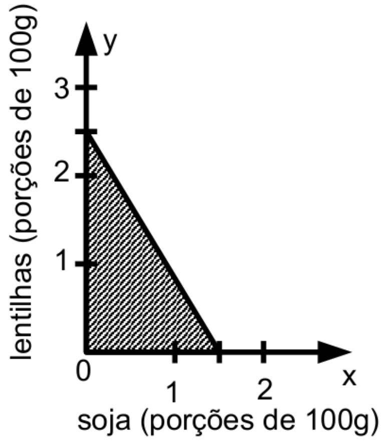
A) a relação estabelecida entre x e y é $3x + 2y = 5$.

B) se um homem deseja adquirir pelos menos 65g de proteínas, tem-se que $y \geq -1{,}5x + 2{,}5$.

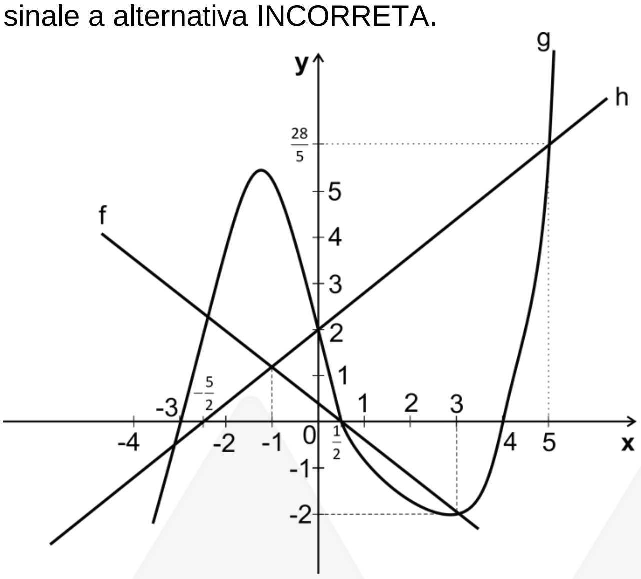
C) o esboço do gráfico que melhor representa o consumo mínimo de soja e/ou lentilha que um homem precisa é:



d) o esboço do gráfico que representa as possí1veis combinações de tais alimentos para fornecer pelo menos a quantidade de proteínas requerida é:



04. **(AFA)** Com relação às funções reais f, g e h, cujos gráficos estão representados abaixo, assinale a alternativa INCORRETA.



A) Se x é tal que $3 \le x \le 5$, então $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

B) Se x é tal que $-1 \le x \le \frac{1}{2}$, então $g(x) \ge h(x) \ge f(x)$.

C) Se x é tal que $\frac{1}{2} \le x \le 3$, então $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

D) Se x é tal que $-\frac{5}{2} \le x \le 4$, então $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \ge 0$.

05. **(AFA)** Dadas as funções reais f e g definidas por $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ e $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$, sabendo-se que existe $(g \circ f)(x)$, pode-se afirmar que o domínio de $g \circ f$ é:

A) $\mathbb{R} -]2,3[$

B) $\mathbb{R} - [2,3]$

C) $\mathbb{R} - \{2,3\}$

D) $\mathbb{R}^* - [2,3]$

1° MARATONA DE FÉRIAS ☞ GEOMETRIA PLANA, ESPACIAL E ANALÍTICA

PARTE I – GEOMETRIA PLANA

01. **(ESCOLA NAVAL)** Três circunferências de raios r, 2r e 3r são tais que, cada uma delas tangencia exteriormente as outras duas. O triângulo, cujos vértices são os centros dessas circunferências, tem área:

A) r^2 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$ C) $4r^2$ D) $6r^2$ E) $12r^2$

02. **(ESCOLA NAVAL)** ABC é um triângulo e M é um ponto sobre o lado BC, tal que MC = 2BM. A razão entre as áreas dos triângulos ABC e MAC é:

A) 4 B) 3 C) 2 D) 2,25 E) 1,5

03. **(ESCOLA NAVAL)** Os lados de um paralelogramo medem 4 cm e 6 cm e uma de suas diagonais mede 8 cm. O comprimento da outra diagonal é:

A) $2\sqrt{2}$ cm B) 8 cm C) 10 cm D) $10\sqrt{2}$ cm E) $2\sqrt{42}$ cm

04. **(ESCOLA NAVAL)** A, B e C são três pontos de uma circunferência de raio r, tais que B pertence ao menor dos arcos de extremidades A e C. AB e BC são iguais aos lados do quadrado e do hexágono regular inscritos na circunferência, respectivamente. A distância entre os pontos A e C é igual a:

A) r B) $r\sqrt{\sqrt{3}+2}$ C) $\frac{r}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$ D) $r\sqrt{\sqrt{5}}$ E) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$

05. **(ESCOLA NAVAL)** Uma tigela tem a forma de uma semiesfera de raio 30 cm e de encontra sobre uma mesa. Uma gota d'água se encontra na borda da tigela e começa a escorrer externamente sobre ela com uma velocidade de $2{,}5\pi$ cm/s. Após 2 segundos, a distância entre a gota d'água e a mesa é de:

A) $15\sqrt{3}$ cm B) 15 cm C) 10 cm D) $15\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm E) $\frac{30}{\pi}$ cm

06. **(ESCOLA NAVAL)** Um hexágono regular está inscrito num círculo de raio 5. Um dos lados do hexágono também é lado de um quadrado construído exteriormente ao hexágono. A distância entre o centro do círculo e a interseção das diagonais do quadrado é:

A) $\frac{5}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ B) $5\left(\sqrt{3}+1\right)$ C) 7,50 D) $5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ E) $\frac{5\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$

07. **(ESCOLA NAVAL)** Considere o triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas CM e BN. A área do quadrilátero AMGN é igual a:

A) $\frac{S}{2}$ B) $\frac{2S}{3}$ C) $\frac{S}{3}$ D) $\frac{S}{4}$ E) $\frac{3S}{4}$

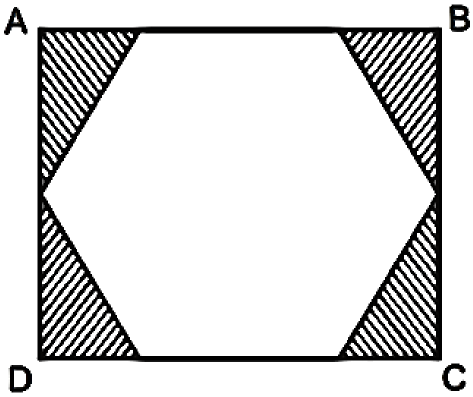
08. **(ESCOLA NAVAL)** O triângulo ABC é retângulo em A e o ângulo C mede 20°. O ângulo formado pela altura e a mediana relativas à hipotenusa é:

A) 10° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

09. **(ESCOLA NAVAL)** Num triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando α o ângulo oposto ao menor lado, podemos afirmar que $\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha$ é igual a:

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{12+\sqrt{2}}{4}$

10. **(ESCOLA NAVAL)** Do retângulo abaixo foram retirados os quatro triângulos retângulos hachurados hexágono regular de lado igual a 4 cm.



Que percentagem da área do retângulo ABCD é representada pela área do hexágono?

A) 50% B) 60% C) 75% D) 80% E) 90%

11. **(ESCOLA NAVAL)** Considere uma progressão geométrica de razão maior que 1 em que três de seus termos consecutivos representam as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Se o primeiro termo dessa progressão geométrica é 64, então seu décimo terceiro termo vale:

A) $2\left(1+\sqrt{3}\right)^{6}$ B) $\left(1+\sqrt{3}\right)^{12}$ C) $\left(1+\sqrt{5}\right)^{6}$ D) $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{12}}{2}$ E) $1+\sqrt{5}$

12. **(ITA)** Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam AE e AD a altura e a mediana relativa à hipotenusa BC, respectivamente. Se a medida BE é $\left(\sqrt{2}-1\right)\text{cm}$ e a medida de AD é 1 cm, então AC mede, em cm:

A) $4\sqrt{2}-5$ B) $3-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$ D) $3\left(\sqrt{2}-1\right)$ E) $3\sqrt{4\sqrt{2}-5}$

PARTE II – GEOMETRIA ESPACIAL

13. **(ESCOLA NAVAL)** Um poliedro convexo possui 11 faces. Sabemos que, de um de seus vértices partem 5 arestas, de 5 outros vértices partem 4 arestas e de cada vértice restante partem 3 arestas. O número de arestas do poliedro é:

A) 20 B) 25 C) 30 D) 37 E) 41

14. **(ESCOLA NAVAL)** Duas seções feitas em uma esfera, por dois planos paralelos distantes 3 cm entre si, situam-se em hemisférios diferentes e tem raios iguais a 1 cm e 2 cm. O raio da esfera é igual a:
A) $2\sqrt{2}$ cm B) $2\sqrt{3}$ cm C) $\sqrt{5}$ cm D) 3 cm E) $3\sqrt{2}$ cm

15. **(ESCOLA NAVAL)** Um plano secciona uma esfera de raio 30 cm, determinando um círculo que é a base de um cilindro e também de um cone de revolução inscritos nessa esfera. O centro da esfera, o cilindro e o cone estão situados num mesmo semiespaço em relação ao plano. Considerando que os volumes do cilindro e do cone são quais, qual a distância do centro da esfera ao plano, em cm?
A) 18 B) 15 C) 12 D) 6 E) 4

16. **(ESCOLA NAVAL)** A área total de uma pirâmide regular é $36\sqrt{3}\ cm^2$ e o raio do círculo inscrito na base mede 2 cm. A altura da pirâmide é, em cm:
A) $3\sqrt{12}$ B) $2\sqrt{15}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 4 E) $2\sqrt{3}$

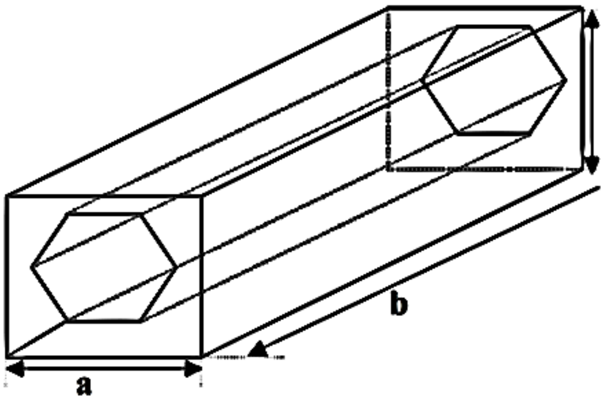
17. **(ESCOLA NAVAL)** A altura de um paralelepípedo retângulo mede 60 cm e sua base é um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do paralelepípedo retângulo é, em cm³:
A) 12000 B) 18000 C) 24000 D) 27000 E) 36000

18. **(ESCOLA NAVAL)** A esfera S_1 está inscrita em cilindro C, circular reto, cujo volume vale $18m^3$. A esfera S_2 está circunscrita a C. A diferença entre os volumes de S_2 e S_1 é, em cm³:
A) $6(2\sqrt{2}-2)$ B) $6(2\sqrt{2}-1)$ C) $12(2\sqrt{2}-2)$ D) $12(2\sqrt{2}-1)$ E) $12(\sqrt{2}-1)$

19. **(ESCOLA NAVAL)** Um tetraedro regular ABCD de arestas medindo 12 cm é cortado por um plano que passa pelo vértice D e pelos pontos M e N situados respectivamente sobre as arestas AB e AC. Se $AM = AN = \frac{1}{3}AB$, o volume da pirâmide AMND é, em cm³, igual a:
A) $64\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) 32 D) 24 E) $48\sqrt{2}$

20. **(ESCOLA NAVAL)** Um tanque cônico circular e reto está sendo construído em uma unidade naval e deverá armazenar 2592π litros de água. Sabendo que o raio da sua base, a sua altura e a sua geratriz, nesta ordem, estão em progressão aritmética, pode-se dizer que a altura do tanque, em metros, mede:
A) 2,6 B) 2,4 C) 2,2 D) 1,8 E) 1,2

21. **(ESCOLA NAVAL)** Um navio da Marinha Brasileira utiliza em sua praça de máquinas uma peça de aço maciça com a forma de um paralelepípedo retangular de dimensões a, b e c, trans-passada por um furo hexagonal, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $a = 14\,dm$, $b = 15\sqrt{3}\,dm$, $b = 15\sqrt{3}\,dm$, $c = 10\sqrt{3}\,dm$ e que o perímetro da seção transversal (hexágono) do furo é 24 dm, pode-se que o volume da peça é:



A) inferior a 4000 dm³
B) superior a 4000 dm³ e inferior a 4200 dm³
C) superior a 4200 dm³ e inferior a 4500 dm³
D) superior a 4500 dm³ e inferior a 5000 dm³
E) superior a 5000 dm³

22. **(ESCOLA NAVAL)** As dimensões das arestas de um paralelepípedo retângulo são dadas por três número pares consecutivos. Se a área total da superfície do paralelepípedo é 376 m², então a soma dos comprimentos de todas as arestas, em metros, é:
A) 24 B) 48 C) 96 D) 140 E) 150

23. **(ESCOLA NAVAL)** Um poliedro convexo de 25 arestas tem faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces quadrangulares vale o dobro do número de faces pentagonais e o número de faces triangulares excede o de faces quadrangulares em 4 unidades. Pode-se afirmar que o número de vértices deste poliedro é:
A) 14 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

24. **(ESCOLA NAVAL)** Com centros nos vértices de um cubo, traçamos oito esferas congruentes cujos raios são iguais à metade da aresta desse cubo. Com centro no ponto de interseção das diagonais do mesmo cubo, traçamos duas esferas com raios R e r (R > r) tangentes às oitos esferas anteriores. A razão $\frac{R}{r}$ é igual a:
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

PARTE III – GEOMETRIA ANALÍTICA

25. **(ESCOLA NAVAL)** Seja P o ponto da circunferência $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ mais próximo da origem. A soma das coordenadas de P é:
A) 3,60 B) 3,50 C) 4,50 D) 5,60 E) 6,50

26. **(ESCOLA NAVAL)** Os pontos A, B, C e D do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um retângulo de lados não paralelos aos eixos coordenados. O produto dos coeficientes angulares das quatro retas suportes dos lados deste retângulo vale:

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) – 2

27. **(ITA)** Seja ABC um triângulo de vértices A = (1,4), B = (5,1) e C = (5,5). O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento:

A) $\frac{15}{8}$ B) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$ D) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$ E) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$

28. **(ITA)** A equação da circunferência localizado no 1° quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às reta $r: 2x - 2y + 5 = 0$ e $s: x + y - 4 = 0$ é:

A) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right) = 4$

B) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4$

C) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

D) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$

E) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

29. **(ITA)** No sistema xOy os pontos A = (2,0), B = (2,5) e C = (0,1) são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidades de comprimento, é igual a:

A) 1 B) $\frac{100}{105}$ C) $\frac{10}{11}$ D) $\frac{100}{115}$ E) $\frac{5}{6}$

30. **(ITA)** Sejam A = (0,0), B = (0,6) e C = (4,3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{\sqrt{97}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{109}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{10}{3}$

31. **(ITA)** A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a:

A) $\frac{19}{2}$ B) 10 C) $\frac{25}{2}$ D) $\frac{27}{2}$ E) $\frac{29}{2}$

32. **(ESCOLA NAVAL)** Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são tais que $|\vec{u}+\vec{v}| = 10$ e $|\vec{u}-\vec{v}| = 4$. O produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vale:

A) -1 B) $2\sqrt{5}$ C) 21 D) 29 E) 40

33. **(ESCOLA NAVAL)** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são unitários e formam um ângulo de 30°. O módulo do vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ é:

A) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}+2$ E) $3+\sqrt{2}$

34. **(ESCOLA NAVAL)** A equação do plano que contém as retas de equação $\frac{x-4}{3} = y-3 = \frac{z-5}{4}$ e $\frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$ é igual a:

A) $4x+3y+5z = 13$
B) $6x+4y+3z = 12$
C) $6x-14y-z = 0$
D) $6x-14y-z = -23$
E) $4x+3y+5z = 12$

35. **(ESCOLA NAVAL)** A componente do vetor $\vec{u} = (5,6,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = (2,2,1)$ é o vetor:

A) $\left(\frac{5}{\sqrt{86}}, \frac{5}{\sqrt{86}}, \frac{5}{2\sqrt{86}}\right)$ B) $(6,6,3)$ C) $(10,10,5)$ D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ E) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$

36. **(ESCOLA NAVAL)** Nas proposições abaixo, coloque (V) no parênteses à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\Re^3$, então $|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

( ) Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do $\Re^3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{u}\cdot\vec{v}$ representa o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\Re^3$, então eles são paralelos se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

( ) Se $\vec{u} = (3,0,4)$ e $\vec{v} = \left(2, \sqrt{8}, 2\right)$, então $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 4$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$, onde θ representa o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) $|\vec{u}+\vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$ para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\Re^3$.

Lendo-se a coluna de parênteses da esquerda, de cima para baixo, encontra-se:

A) FFFVV
B) FVFFV
C) VFVVF
D) FFFVF
E) VVVFF

2° MARATONA DE FÉRIAS ☞ POLINÔMIOS, COMPLEXOS, MATRIZES E DETERMINANTES

PARTE I – POLINÔMIOS

01. **(ESCOLA NAVAL)** $2x^4 - x^3 + mx^2 + 2n$ é divisível por $x^2 - x - 2$. O valor de m.n é:
A) –8 B) –10 C) –12 D) –14 E) –16

02. **(ESCOLA NAVAL)** Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$. Sabendo-se que $P(x) + 3$ é divisível por $(x+1)$ e $P'(x) - 5$ é divisível por $(x-2)$, então $(a+b)$ é igual a:
A) –14 B) –12 C) –10 D) –8 E) –6

03. **(ESCOLA NAVAL)** Decompondo-se a fração $\frac{x+2}{x^3 - x}$ em uma soma de frações cujos denominadores são polinômios do 1° grau, podemos afirmar que a soma dos numeradores destas frações é:
A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

04. **(ESCOLA NAVAL)** A relação entre os coeficientes b e c para que a equação $x^3 + bx + c = 0$ possua duas raízes iguais é:
A) $4b^3 + 27c^2 = 0$ B) $b^3 + c^2 = 0$ C) $2b^3 + 3c^2 = 0$ D) $b^3 + c^2 = 0$ E) $3b = c$

05. **(ESCOLA NAVAL)** As raízes da equação $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$ estão em progressão geométrica. Podemos afirmar que essas raízes pertencem ao intervalo:
A) $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ B) $\left[-1, \frac{1}{10}\right]$ C) $\left[-2, -\frac{1}{6}\right]$ D) $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right]$

06. **(ESCOLA NAVAL)** Dividindo-se $(2x^3 - x^2 + mx + 8)$, onde $m \in \mathbb{R}$, por $(x+2)$ obtém-se resto igual a – 6. Qual o polinômio que representa o quociente da divisão de $(4x^3 - 7x + 3)$ por $(2x - m)$?
A) $-2x^2 + 3x + 1$
B) $2x^2 + 2x - 1$
C) $-x^2 + 2x - 1$
D) $x^2 + 3x + 1$
E) $2x^2 + -3x + 1$

07. **(ESCOLA NAVAL)** Sejam $a = 2 + i$, b e c as raízes do polinômio $3x^3 - 14x^2 + mx - 10$, onde c e m são números reais. O valor de $\log_2\left(ab + \frac{9}{2}c\right)$ é:
A) $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ B) $\left[-1, \frac{1}{10}\right]$ C) $\left[-2, -\frac{1}{6}\right]$ D) $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right]$

08. **(ESCOLA NAVAL)** Se uma das raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ é a média harmônica das outras duas, então $9pq - 2q^3$ é igual a:

A) 18 B) 24 C) 27 D) 36 E) 81

09. **(ITA)** Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que 2i é uma das raízes de $P(z) = 0$, as outras três raízes são:

A) $-3i, -1, 1$ B) $-i, i, 1$ C) $-i, i, -1$ D) $-2i, -1, 1$ E) $-2i, -i, i$

PARTE II – NÚMEROS COMPLEXOS

10. **(ESCOLA NAVAL)** As soluções da equação $(z - 1 + i)^4 = 1$ pertence à curva:

A) $x^2 - x + y^2 + y = 0$
B) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
D) $x^2 + y^2 = 1$
E) $x^2 - x + y^2 - y = 0$

11. **(ESCOLA NAVAL)** Sendo i a unidade imaginária dos números complexos, o valor do número natural n tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = 64i$ é:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

12. **(ESCOLA NAVAL)** Representando as raízes da equação $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1+x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1+x & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = -1 + i\sqrt{3}$, no plano complexo, temos dois afixo distintos no:

A) Eixo Real B) $1°$ Quadrante C) $2°$ Quadrante D) $3°$ Quadrante E) $4°$ Quadrante

13. **(ITA)** Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3|z|^4 (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6$ é igual a:

A) $(z^2 - \bar{z}^2)^3$ B) $z^6 - \bar{z}^6$ C) $(z^3 - \bar{z}^3)^2$ D) $(z - \bar{z})^6$ E) $(z - \bar{z})^2 (z^4 - \bar{z}^4)$

14. **(ITA)** Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I- $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

II- $(z + \bar{w})^2 - (z - \bar{w})^2 = 4z\bar{w}$

III- $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$

É (são) verdadeira (s):

A) apenas I B) apenas I e II C) apenas I e III D) apenas II e III E) todas

PARTE III – MATRIZES E DETERMINANTES

15. **(ESCOLA NAVAL)** Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, o determinante da transposta da matriz $2A - BC$ vale:

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

16. **(ESCOLA NAVAL)** Nas proposições abaixo A, B e C são matrizes quadradas de ordem n e A^T é a matriz transposta de A. Analise as proposições abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) Se $AB = AC$, então $B = C$

( ) $(AB)^T = A^T B^T$ quaisquer que sejam A e B

( ) $(A + B)^T = A^T + B^T$ quaisquer que sejam A e B

A sequência correta é:

A) VFV B) FFF C) FFV D) VVF E) FVF

17. **(ESCOLA NAVAL)** Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$, então a soma da matriz inversa de A com o dobro da matriz transposta de B é:

A) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. **(ITA)** Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade $\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M)$. Então, um valor possível para o determinante de M é:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

GEOMETRIA PLANA

1- (ITA - 1989) Dadas as afirmações:
I- Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares
II- Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares
III- Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzarem em seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango.
Podemos garantir que:
a) Todas são verdadeiras
b) Apenas I e II são verdadeiras
c) Apenas II e III são verdadeiras
d) Apenas II é verdadeira
e) Apenas III é verdadeira

2- (ITA - 1989) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:
a) 22 cm
b) 5,5 cm
c) 8,5 cm
d) 11 cm
e) 13 cm

3- (ITA - 1989) Numa circunferência de centro O, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero. Seja D um quarto ponto da circunferência, não coincidente com os demais. Sobre a medida x do ângulo ADC podemos afirmar que:
a) $0° < x < 30°$ ou $60° < x < 120°$
b) $x = 60°$ ou $x = 120°$
c) $x = 45°$ ou $x = 150°$
d) $x = 240°$ para qualquer posição de D na circunferência
e) $x = 30°$ para qualquer posição de D na circunferência

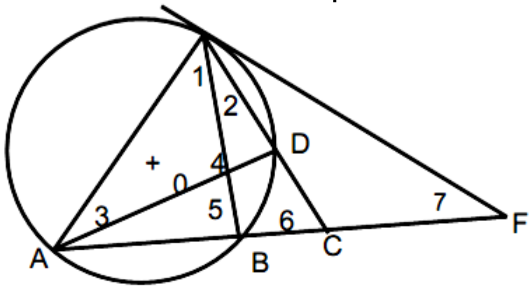
4- (ITA -1989) Considere uma circunferência de centro O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo **BCA** meça 60°. Seja D o ponto de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual a:
a) à metade da medida de AB
b) um terço da medida de AB
c) à metade da medida de DC
d) dois terços da medida de AB
e) à metade da medida de AE

5- (ITA - 1989) Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\frac{\pi}{6}$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:
a) S
b) 2S
c) 3S
d) 4S
e) 5S

6- (ITA - 1989) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir 20 cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a x, então a área do círculo, em cm², será igual a:
a) $50\pi / x^2$
b) $75\pi / x^2$
c) $100\pi / x^2$
d) $125\pi / x^2$
e) $150\pi / x^2$

7- (ITA - 1990) Na figura abaixo O é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente e esta circunferência e que a medida dos ângulos

1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49°, 18°, 34°, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e e7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.



a) 97°, 78°, 61°, 26°
b) 102°, 79°, 58°, 23°
c) 92°, 79°, 61°, 30°
d) 97°, 79°, 61°, 27°
e) 97°, 80°, 62°, 29°

8- (ITA - 1992) Num triângulo ABC, retângulo em A, temos $\hat{B} = 60°$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm
b) $1+\sqrt{3}$ cm
c) $2+\sqrt{3}$ cm
d) $1+2\sqrt{2}$ cm
e) nra

9- (ITA - 1992) A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cuja apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:
a) 1/2
b) 1
c) 1/3
d) 3/8
e) nra

10- (ITA - 1993) A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e o outro 2α. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo, é:

a) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$
b) $\frac{1}{\text{sen} 2\alpha}$
c) $\frac{1}{2\text{sen}\alpha}$
d) $\frac{1}{2\cos\alpha}$
e) $\text{tg}\alpha$

11- (ITA - 1994) Sejam, a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e A, B e C os ângulos internos opostos respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que a, b e c, nesta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{77}{240}$$

Então sua área, em cm², mede:

a) $\left(15\sqrt{7}\right)/4$
b) $\left(4\sqrt{5}\right)/3$
c) $\left(4\sqrt{5}\right)/5$
d) $\left(4\sqrt{7}\right)/7$
e) $\left(3\sqrt{5}\right)/4$

12- (ITA - 1994) Numa circunferência inscreve-se um quadrilátero convexo ABCD tal que $A\hat{B}C = 70°$. Se $x = A\hat{C}B + B\hat{D}C$, então:

a) $x = 120°$
b) $x = 110°$
c) $x = 100°$

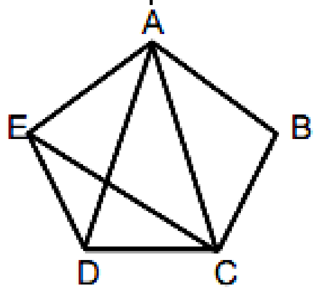
d) $x = 90°$
e) $x = 80°$

13- (ITA - 1994) Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Se $x = A\hat{B}C$ e **r** é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:
a) $S = r^2 \cos(2x)$
b) $S = 2r^2 \text{sen}(2x)$
c) $S = \frac{1}{2} r^2 \text{sen}(2x)$
d) $S = \frac{1}{2} r^2 \cos^2 x$
e) $S = \frac{1}{2} r^2 \text{sen}^2 x$

14- (ITA - 1995) Considere C uma circunferência centrada em O e raio 2r, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio OABT é igual a:
a) $r^2(2\cos\theta - \cos 2\theta)$
b) $2r^2(4\cos\theta - \text{sen}2\theta)$
c) $r^2(4\text{sen}\theta - \text{sen}2\theta)$
d) $r^2(2\text{sen}\theta + \cos\theta)$
e) $2r^2(2\text{sen}2\theta - \cos 2\theta)$

15- (ITA - 1995) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge a torre a uma altura H, a relação entre as suas altura será:
a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$
b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$
c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$
d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$
e) $H = hd^2/(d^2 + h^2)$

16- (ITA - 1995) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:



a) $x^2 + x - 2 = 0$
b) $x^2 - x - 2 = 0$
c) $x^2 - 2x + 1 = 0$
d) $x^2 + x - 1 = 0$
e) $x^2 - x - 1 = 0$

17- (ITA - 1996) Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:
a) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} R$
b) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2} R$
c) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2} R$
d) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2} R$
e) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} R$

18- (ITA - 1997) Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em cm²) igual a:

a) $2\text{sen}^2\alpha \cdot \cot g\beta + \text{sen}2\alpha$

b) $2\text{sen}^2\alpha \cdot \text{tg}\beta - \text{sen}2\alpha$

c) $2\cos^2\alpha \cdot \cot g\beta + \text{sen}2\alpha$

d) $2\cos^2\alpha \cdot \text{tg}\beta + \text{sen}2\alpha$

e) $2\text{sen}^2\alpha \cdot \text{tg}\beta - \cos 2\alpha$

19- (ITA - 1998) Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) 23°
b) 32°
c) 36°
d) 40°
e) 45°

20- (ITA - 1999) Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Seja D a interseção da bissetriz do ângulo A com o lado BC e E um ponto da reta suporte do cateto AC de tal modo que os segmentos de reta BE e AD sejam paralelos. Sabendo que AD mede $\sqrt{2}$ cm, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é:

a) $\pi\left(4-2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

b) $2\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$

c) $3\pi\left(4-2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

d) $4\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$

e) $\pi\left(4-2\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$

21- (I ITA - 2000) Num triângulo acutângulo ABC, o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede 5 cm. Sabendo: $\hat{A} = \arccos\frac{3}{5}$ e $\hat{C} = \text{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}}$, então a área do triângulo ABC é igual a:

a) $\frac{5}{2}$ cm²

b) 12 cm²

c) 15 cm²

d) $2\sqrt{5}$ cm²

e) $\frac{25}{2}$ cm²

22- (ITA - 2000) Considere uma circunferência inscrita num triângulo isósceles com base 6 cm e altura de 4cm. Seja t a reta tangente e esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede:

a) 1 cm
b) 1,5 cm
c) 2 cm
d) 2,5 cm
e) 3 cm

23- (ITA - 2000) Um triângulo tem lados medindo 3,4 e 5 centímetros. A partir dele, constrói-se uma sequencia de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguintes. Dentre as alternativas abaixo, o valor em centímetros quadrados que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e)12

24- (ITA - 2001) Sendo α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\text{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então $\text{sen}\alpha$ é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{4}$

e) zero

25- (ITA - 2001) De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 53
b) 65
c) 66
d) 70
e) 77

26- (ITA - 2001) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e **a** é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma **a + r** (em cm) é igual a:

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

27- (ITA - 2002) O triângulo ABC, inscrito numa circunferência , tem uma lado medindo $(20/\pi)$cm, cujo ângulo oposto é de 15°. O comprimento da circunferência, em cm, é:

a) $20\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

b) $400\left(2+\sqrt{3}\right)$

c) $80\left(1+\sqrt{3}\right)$

d) $10\left(2+\sqrt{3}+5\right)$

e) $20\left(1+\sqrt{3}\right)$

28- (ITA - 2003) Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm²,a:

a) $3\sqrt{15}$

b) $7\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{6}$

d) $\dfrac{15}{2}\sqrt{3}$

e) $\dfrac{7}{2}\sqrt{15}$

29- (ITA - 2003) Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63
b) 69
c) 90
d) 97
e) 106

30- (ITA - 2004) Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5°. Então, seu maior ângulo mede, em graus,
a) 120
b) 130
c) 140
d) 150
e) 160

31- (ITA - 2004) Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja **AB** uma corda de C_2, tangente a C_1. A área da menor região delimitada pela corda **AB** e pelo arco mede, em cm²:
a) $9(\pi - 3)$
b) $18(\pi + 3)$
c) $18(\pi - 2)$
d) $18(\pi + 2)$
e) $16(\pi + 3)$

32- (ITA - 2005) Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado **AB** e E um ponto do lado **AC**. Se $m(AB) = 8cm$, $m(AC) = 10cm$, $m(AD) = 4cm$ e $m(AE) = 6cm$, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é:
a) 1/2
b) 3/5
c) 3/8
d) 3/10
e) 3/4

33- (ITA - 2005) Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a:
a) $4/5$
b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$
c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
d) $\dfrac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

34- (ITA - 2005) A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm):
a) $3\sqrt{3}$
b) 6
c) 5
d) 4
e) $2\sqrt{5}$

35- (ITA - 2007) Considere: um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio:
a) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0$
b) $\pi^2x^3 + \pi^2x^2 + x + 1 = 0$
c) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0$
d) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0$
e) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0$

36- (ITA - 2007) Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r, então r pertence ao intervalo:

a) $\left(0, \left(1+\sqrt{2}\right)/2\right)$

b) $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)/2, \sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)/2}\right)$

c) $\left(\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)/2}, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$

d) $\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2, \sqrt{2+\sqrt{2}/2}\right)$

e) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}/2}, \left(2+\sqrt{3}\right)/2\right)$

37- (ITA - 2007) Seja P_n um polígono regular de **n** lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de **n** para o qual valem as desigualdades $b_n \le a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$, pertence ao intervalo:
a) $3 < n < 7$
b) $6 < n < 9$
c) $8 < n < 11$
d) $10 < n < 13$
e) $12 < n < 15$

38- (ITA - 2007) Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1 / A_2 é igual a:
a) $\sqrt{5/8}$
b) $9\sqrt{2}/16$
c) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$
d) $\left(4\sqrt{2}+1\right)/8$
e) $\left(2+\sqrt{2}\right)/4$

39- (ITA - 2008) Considere o quadrado ABCD com lados de 10m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado **AB** e **N** um ponto sobre o lado **AD**, equidistantes de A. Por M traça-se uma reta **r** paralela ao lado **AD** e por **N** uma reta **s** paralela ao lado **AB**, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a interseção de **s** com o lado **BC** e **Q** é a interseção de **r** com o lado **DC**. Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a:
a) $15+5\sqrt{5}$
b) $10+5\sqrt{5}$
c) $10+5\sqrt{5}$
d) $15-5\sqrt{5}$
e) $10-3\sqrt{5}$

40- (ITA - 2008) Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, **BAC**, mede 40°. Sobre o lado **AB**, tome o ponto **E** tal que **ACE = 15°**. Sobre o lado **AC**, tome o ponto **D** tal que **DBC = 35°**. Então, o ângulo **EDB** vale:
a) 35°
b) 45°
c) 55°
d) 75°
e) 85°

41- (ITA - 2008) Sejam **r** e **s** duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por **r** e **s** e exterior à região limitada por estas, distando 5 cm de **r**. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm² e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas **r** e **s**, são iguais a:
a) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

b) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$
c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$
d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$
e) 700 e $10\sqrt{21}$

42- (ITA - 2009) Considere o triângulo ABC de lados $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ e $c=\overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha=C\hat{A}B$, $\beta=A\hat{B}C$ e $\gamma=B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2-2bx\cos\alpha+b^2-a^2=0$ admite c como raiz dupla, pode afirmar que:
a) $\alpha=90°$
b) $\beta=60°$
c) $\gamma=90°$
d) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha=45°$
e) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa

43- (ITA - 2009) Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio $R=2\,cm$, sabe-se que o lado **BC** mede 2 cm e o ângulo **ABC** mede 30°. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a:
a) $2-\sqrt{3}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $2\sqrt{3}-3$
e) $\frac{1}{2}$

44- (ITA - 2011) Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos AB e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre AB e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento AD, em cm, é igual a:
a) 3/4
b) 15/6
c) 15/4
d) 25/4
e)25/2

45- (ITA – 2011) Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre AB. Considere as áreas do quadro ABCD, do trapézio BECD e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja área é 200 cm², a medida do segmento AE, em cm, é igual a:
a) $\frac{10}{3}$
b) 5
c) $\frac{20}{3}$
d) $\frac{25}{3}$
e) 10

46- (ITA – 2011) Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que AB é o diâmetro, BC mede 6 cm e a bissetriz do ângulo ABC intercepta a circunferência no ponto D. Se A é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e B é a área comum aos dois, o valor de A – 2B, em cm², é igual a:
a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

47- (ITA – 2011) Num triângulo ABC o lado AB mede 2 cm, a altura relativa ao lado AB mede 1 cm, o ângulo ABC mede 135° e M é o ponto médio de AB. Então a medida de BAC + BMC, em radianos, é igual a:

a) $\frac{1}{5}\pi$

b) $\frac{1}{4}\pi$

c) $\frac{1}{3}\pi$

d) $\frac{3}{8}\pi$

e) $\frac{2}{5}\pi$

48- (ITA – 2012) Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$ cm e $c = \frac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a;

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

49- (ITA – 2013) Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo ABC seja obtuso. Então o ângulo CAB é igual a:

A) $\frac{1}{2}$ ABC

B) $\frac{3}{2}\pi - 2$ ABC

C) $\frac{2}{3}$ ABC

D) 2 ABC $- \pi$

E) ABC $- \frac{\pi}{2}$

50- (ITA – 2014) Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam AE e AD a altura e a mediana relativa à hipotenusa BC, respectivamente. Se a medida de BE é $\sqrt{2} - 1$ cm e a medida de AD é 1 cm, então AC mede, em cm:

A) $4\sqrt{2} - 5$

B) $3 - \sqrt{2}$

C) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$,

D) $3\left(\sqrt{2} - 1\right)$

E) $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$

51- (ITA – 2014) Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm², a razão entre as medidas da altura AP e da base BC é igual a 2/3. Analise as afirmações abaixo.

I- As medianas relativas aos lados AB e AC medem $\sqrt{97}$ cm;

II- O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III- Se α é o ângulo formado pela base BC com a mediana BM, relativa ao lado AC, então $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{97}}$.

É (são) verdadeira(s):

A) apenas I e II

B) apenas I

C) apenas III
D) I, II e III
E) apenas II

52- (ITA – 2014) Considere o trapézio ABCD de bases AB e CD. Sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente. Então, se AB tem comprimento x e CD tem comprimento y < x, o comprimento de MN é igual a:

A) $x - y$

B) $\frac{1}{2}(x-y)$

C) $\frac{1}{3}(x-y)$

D) $\frac{1}{3}(x+y)$

E) $\frac{1}{4}(x+y)$

GEOMETRIA ESPACIAL

53- (ITA - 1989) Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio R, então a altura H do cone será igual a:

a) $\frac{6}{5}R$

b) $\frac{3}{2}R$

c) $\frac{4}{3}R$

d) $\frac{2}{3}R$

e) $\frac{7}{5}R$

54- (ITA - 1989) Justapondo-se as bases de dois cones retos e idênticos de altura H, forma-se um sólido de volume v. Admitindo-se que a área da superfície de uma esfera de raio H e volume V, a razão $\frac{v}{V}$ vale:

a) $\frac{\sqrt{11}-1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$

c) $\frac{\sqrt{15}-1}{4}$

d) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

e) $\frac{\sqrt{19}-1}{4}$

55- (ITA - 1989) Os lados de um triângulo isósceles formam um ângulo de 30 graus e o lado oposto a este ângulo mede x cm. Este triângulo é a base de uma pirâmide de altura H cm, que está inscrita em um cilindro de revolução. Deste modo, o volume V, em centímetros cúbicos, deste cilindro é igual a:

a) $2\pi x^2 H$

b) $\frac{1}{3}\pi x^2 H$

c) $\frac{2}{3}\pi x^2 H$

d) $3\pi x^2 H$

e) $\pi x^2 H$

56- (ITA - 1989) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede x cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo ABC inscritível num círculo de raio x cm. Sabendo-se que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo de lados 3cm, 4cm e 5 cm, o volume do prisma em cm³ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$

d) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$

e) nra

57- (ITA - 1990) Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das fazes laterais, no vértice V, são todos de 45°. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:

a) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

b) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$

e) nda

58- (ITA - 1992) Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288°. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:

a) 16πcm²

b) $\frac{308}{9}\pi$cm²

c) $\frac{160}{3}\pi$cm²

d) $\frac{100}{9}\pi$cm²

e) nda

59- (ITA - 1992) Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio R cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:

a) $\pi\left(1+\sqrt{5}\right)^2 R^2 / 4\ cm^2$

b) $\pi\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 R^2 / 4\ cm^2$

c) $\pi\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right) R^2 / 4\ cm^2$

d) $\pi\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 R^2\ cm^2$

e) nda

60- (ITA - 1993) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4m e de área da base 64 m² vale:

a) $128m^2$

b) $64\sqrt{2}m^2$

c) $135m^2$

d) $60\sqrt{5}m^2$

e) $32\left(\sqrt{2}+1\right)m^2$

61- (ITA - 1994) São dados dois cubos I e II de áreas totais S_1 e S_2 e de diagonais d_1 e d_2, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54m^2$ e que $d_2 = 3m$, então o valor da razão d_1 / d_2 é:

a) 3/2
b) 5/2
c) 2
d) 7/3
e) 3

62- (ITA - 1994) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3dm de raio e 15π dm² de área lateral, o valor de seu volume em dm³ é:

a) 9π
b) 15π
c) 36π
d) 20π
e) 12π

63- (ITA - 1994) Um prisma regular hexagonal tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:

a) $\left(6\sqrt{2}\right)/\pi$

b) $\left(9\sqrt{2}\right)/\pi$

c) $\left(3\sqrt{6}\right)/\pi$

d) $\left(6\sqrt{3}\right)/\pi$

e) $\left(9\sqrt{2}\right)/\pi$

64- (ITA - 1994) Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm². Então sua altura, em cm, é igual a:

a) 2
b) 3
c) $2\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{3}$

65- (ITA - 1994) Num cilindro circular reto sabe-se que a altura h e o raio da base r são tais que os números π, h, r formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de soma 6π. O valor da área total deste cilindro é:

a) π^3
b) $2\pi^3$
c) $15\pi^3$
d) $20\pi^3$
e) $30\pi^3$

66- (ITA - 1994) Um tronco de pirâmide regular tem como bases triangulares equiláteros, cujos lados medem, respectivamente, 2cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3cm, então o valor de sua altura h, em cm, é tal que:

a) $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$
b) $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$
c) $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$
d) $1 < h < \sqrt{2}$
e) $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$

67- (ITA - 1995) Um cone reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste conde mede, em cm:

a) 10/3
b) 4/4
c) 12/5
d) 3
e) 2

68- (ITA - 1995) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m², vale:

a) $\frac{3\pi^2}{4}$

b) $\frac{9\pi(\pi+2)}{4}$

c) $\pi(\pi+2)$

d) $\frac{\pi^2}{2}$

e) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

69- (ITA - 1995) Dado o prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área total lateral é o dobro da área da base. O volume deste prisma, em cm³, é:

a) $27\sqrt{3}$
b) $13\sqrt{2}$
c) $12\sqrt{3}$
d) $54\sqrt{3}$
e) $17\sqrt{5}$

70- (ITA - 1995) Dada uma pirâmide triangular, sabe-se que sua altura mede 3a cm, onde a é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm², vale:

a) $\dfrac{a^2\sqrt{327}}{4}$

b) $\dfrac{a^2\sqrt{109}}{2}$

c) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{a^2\sqrt{3}\left(2+\sqrt{33}\right)}{2}$

e) $\dfrac{a^2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{109}\right)}{4}$

71- (ITA - 1996) Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão H/R é igual a:

a) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$

b) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$

c) $1+\sqrt{3\sqrt{3}+1}$

d) $1+\sqrt{\sqrt{3}-1}$

e) $\sqrt{3}+1$

72- (ITA - 1996) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são centro das faces do cubo será:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ x cm

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ x cm

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ x cm

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ x cm

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ x cm

73- (ITA - 1996) As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm², então o volume deste paralelepípedo, em cm³, é igual a:

a) 1200
b) 936
c) 1155
d) 728
e) 834

74- (ITA - 1997) A altura e raio da base de um cone de revolução medem 1cm e 5cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a d cm do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então d é igual a:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

d) $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}}$

e) $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}$

75- (ITA - 1997) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem a cm e 2a cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede:

a) $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{a\sqrt{35}}{10}$

c) $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

d) $\frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$

e) $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

76- (ITA - 1998) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45°. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$

b) $1/3$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

77- (ITA - 1998) Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

(I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

(II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

(III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural então o número de lados do polígono é impar.

Então:

a) todas as afirmações são verdadeiras

b) apenas (I) e (III) são verdadeiras

c) apenas (I) é verdadeira

d) apenas (III) é verdadeira

e) apenas (II) e (III) são verdadeiras

78- (ITA - 1998) Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces do original. Sendo **m** e **n**, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

a) m = 9, n = 7
b) m = n = 9
c) m = 8, n = 10
d) m = 10, n = 8
e) m = 7, n = 9

79- (ITA - 1999) Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$

e) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

80- (ITA - 1999) Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta fazes triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o números de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:
a) 10
b) 17
c) 20
d) 22
e) 23

81- (ITA - 1999) Um triedro tri – retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados formado é:
a) $15\sqrt{6}$
b) $5\sqrt{30}$
c) $6\sqrt{15}$
d) $30\sqrt{6}$
e) $45\sqrt{6}$

82- (ITA - 2000) Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao eixo. A secção fica 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120°. Sendo de $30\sqrt{3}$ cm² a área da secção plana regular, então o volume da parte menor do cilindro mede, em cm³:
a) $30\pi - 10\sqrt{3}$
b) $30\pi - 20\sqrt{3}$
c) $20\pi - 10\sqrt{3}$
d) $50\pi - 25\sqrt{3}$
e) $100\pi - 75\sqrt{3}$

83- (ITA - 2000) Um cone circular reto como altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a:
a) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$
b) $\frac{9}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$
c) $\frac{9}{4}\left(\sqrt{6}-1\right)$
d) $\frac{27}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)$
e) $\frac{27}{16}\left(\sqrt{3}-1\right)$

84- (ITA - 2000) Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneiro que a nova pirâmide e os dois troncos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a:
a) $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}\right)$cm
b) $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}\right)$cm
c) $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)$cm
d) $2\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$cm
e) $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)$cm

85- (ITA - 2001) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é 128 m³, temos que o raio da base e altura do cone medem, respectivamente, em metros:
a) 9 e 8
b) 8 e 6
c) 8 e 7
d) 9 e 6
e) 10 e 8

86- (ITA - 2001) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular da base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 m³, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

87- (ITA - 2002) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?
a) 2 m
b) 4m
c) 5 m
d) 6 m
e) 8 m

88- (ITA - 2003) Considere o triângulo isósceles OAB, com lados AO e OB de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado AB de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado AB, é igual a:
a) $\pi R^3 / 2$
b) πR^3
c) $4\pi R^3 / 3$
d) $\sqrt{2}\pi R^3$
e) $\sqrt{3}\pi R^3$

89- (ITA - 2003) Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm². A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:
a) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$
b) $\dfrac{5\sqrt{6}}{9}$
c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$
d) $\dfrac{7}{5}$
e) $\sqrt{3}$

90- (ITA - 2004) Considere um cilindro circular reto, de volume igual a 360π cm³, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm², então, a área lateral da pirâmide mede, em cm²,
a) $18\sqrt{427}$
b) $27\sqrt{427}$
c) $36\sqrt{427}$
d) $108\sqrt{3}$
e) $45\sqrt{427}$

91- (ITA - 2004) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm³, é igual a:
a) πR^3
b) $\pi\sqrt{2}R^3$
c) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$
d) $\pi\sqrt{3}R^3$
e) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

92- (ITA - 2005) Uma esfera de raio r é seccionada por **n** planos meridianos. Os volumes das respectivamente cunhas esféricas contidas em uma semi esfera formam uma progressão de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então **n** é igual a:
a) 4
b) 3
c) 6
d) 5
e) 7

93- (ITA - 2005) Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200°. O número de vértices deste prisma é igual a:
a) 11
b) 32
c) 10
d) 20
e) 22

94- (ITA - 2007) Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}\,\text{cm}$. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual 1cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$ a altura do tronco, em centímetros,é igual a:
a) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4$
b) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)/3$
c) $\left(3\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)/21$
d) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)/6$
e) $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/22$

95- (ITA/08) Um diedro mede 120°. A distancia da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a:
a) $3\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{2}$
e) 2

96- (ITA - 2009) Uma esfera é colocada no interior de um cone circular de 8 cm de altura e de 60° de ângulo de vértice. Os pontos de contado da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}\,\text{cm}$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm³, é igual a:
a) $\frac{416}{9}\pi$
b) $\frac{480}{9}\pi$
c) $\frac{500}{9}\pi$
d) $\frac{512}{9}\pi$
e) $\frac{542}{9}\pi$

97- (ITA - 2010) Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}\,\text{cm}$ está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm³, é igual a:
a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

e) $\frac{\pi}{3}$

98- (ITA - 2010) Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento ABC e N é o ponto médio segmento CD, então a área do:

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

99- (ITA – 2011) Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}$. Então o raio da esfera, em cm, é igual a:

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

b) $\frac{13}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\frac{10}{3}$

100- (ITA – 2012) Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ é interceptado por u plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que s distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a:

a) 1/4

b) 1/3

c) 1/2

d) 2/3

e) 3/4

101- (ITA - 2012) A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a $3\pi\,\text{cm}^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm² e cm³, respectivamente:

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

e) π e $\pi\sqrt{2}$

102- (ITA – 2013) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}, \sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm³, do sólido VABCD é:

a) 2

b) 4

c) $\sqrt{17}$
d) 6
e) $5\sqrt{10}$

103- (ITA – 2013) No sistema xOy os pontos A = (2,0), B = (2,5) e C = (0,1) são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidades de comprimento, é igual a:
a) 1
b) $\frac{100}{105}$
c) $\frac{10}{11}$
d) $\frac{100}{115}$
e) $\frac{5}{6}$

104- (ITA – 2014) Uma pirâmide de altura h = 1 cm e volume V = 50 cm³ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se n – 3 diagonais que o decompõem em n – 2 triângulos cujas áreas $S_i, i = 1,2,\cdots,n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}\text{cm}^2$ e $S_6 = 3\text{cm}^2$. Então n é igual a:
a) 22
b) 24
c) 26
d) 28
e) 32

105- (ITA – 2014) Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base BC que dista 0,25 cm do vértice A e 0,75 cm da base BC. Se o lado AB mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\text{cm}$, o volume desse sólido, em cm³, é igual a:
a) 9/16
b) 13/96
c) 7/24
d) 9/24
e) 11/96

GEOMETRIA ANALÍTICA

106- (ITA - 1989) A equação da parábola, cujo eixo é perpendicular ao eixo x e que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax + 2y = 0$, com $a > 1$, e pelos pontos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ é:
a) $(a^2-1)y = a^2(x^2-1)$
b) $(a^2-1)y = a^2(1-x^2)$
c) $(a^2-1)y = (x^2-1)$
d) $(a^2-1)y = a(x^2-1)$
e) $(a^2-1)y = -x^2+1$

107- (ITA - 1989) Seja **s** a reta do plano cartesiano, que passa pelo ponto $(1,3)$ e é perpendicular à reta $x + y + 1 = 0$. Considere uma circunferência com centro na origem e raio R > 0. Nestas condições, se **s** for tangente à circunferência, então:
a) R é um número irracional e $R < \frac{1}{2}$
b) R é um número irracional e $\frac{1}{2} < R < 1$
c) R é um número irracional e R > 1
d) R é um número racional e R > 1
e) R é um número racional e R < 1

108- (ITA - 1989) O ponto da circunferência $x^2+y^2+4x+10y+28=0$ que tem ordenada máxima é:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2, -\frac{9}{2}\right)$

b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}, -1\right)$

c) $\left(-\frac{3}{10}, -1\right)$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2, -2\right)$

e) $(-2, -4)$

109- (ITA - 1990) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações $3x-4y+12=0$ e $3x-4y+4=0$. Considere (ℓ) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve (ℓ) é dada por:

a) $3x-4y+8=0$

b) $3x+4y+8=0$

c) $x-y+1=0$

d) $x+y=0$

e) $3x-4y-8=0$

110- (ITA - 1990) Seja C o centro da circunferência $x^2+y^2-6\sqrt{2}y=0$. Considere A e B os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y=\sqrt{2}x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices A, B e C é:

a) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

d) $5\sqrt{3}+\sqrt{2}$

e) nda

111- (ITA - 1990) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x-3y+7=0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ à reta (r) é:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

c) $3\sqrt{13}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

112- (ITA - 1990) Considere a região do plano cartesiano xOy definida pelas desigualdades $x-y\le 1$, $x+y\ge 1$ e $(x-1)^2+y^2\le 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo x é igual a:

a) $\frac{4}{3}\pi$

b) $\frac{8}{3}\pi$

c) $\frac{4}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\pi$

d) $\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$

e) nda

113- (ITA - 1991) Considere a região do plano cartesiano xy definido pela desigualdade $x^2+y^2-2x+4y+4\le 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{3}$

radianos em torno da reta $y+x+1=0$, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:

a) $\frac{4\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{4\pi}{9}$

e) nda

114- (ITA - 1991) Seja r a mediatriz do segmento da reta de extremos $M=(-4,-6)$ e $N=(8,-2)$. Seja R o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta t. Então:

a) $R=\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $R=\frac{\sqrt{15}}{3}$

c) $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$

d) $R=\frac{\sqrt{10}}{5}$

e) nra

115- (ITA - 1991) Seja C a circunferência dada pela equação $x^2+y^2+2x+6y+9=0$. Se $P=(a,b)$ é o ponto em C mais próximo da origem, então:

a) $a=-\frac{3}{2}$ e $4b^2+24b+15=0$

b) $a=-\frac{1}{2}$ e $4b^2+24b+33=0$

c) $a=\frac{\sqrt{10}}{10}-1$ e $b=3a$

d) $a=-1-\frac{\sqrt{10}}{10}$ e $b=3a$

e) nra

116- (ITA - 1992) A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta $y=mx, m>0$, forma com o eixo dos x é:

a) $y=\frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

b) $y=\frac{1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

c) $y=\frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

d) $y=\frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

e) nra

117- (ITA - 1992) Seja C a circunferência $x^2+y^2-2x-6y+5=0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é $M(2,2)$. O comprimento de AB (em unidades de comprimento) é igual a:

a) $2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{3}$

c) 2

d) $2\sqrt{3}$

e) nda

118- (ITA - 1992) Dados os pontos $A(0,8)$, $B(-4,0)$ e $C(4,0)$, sejam r e s as retas tais que $A,B\in r$ e $B,c\in s$. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de $P(5,3)$ às retas r e s, respectivamente. Então a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:

a) $y+x=5$

b) $y+2x=5$

c) $3y-x=5$

d) $y+x=2$
e) nda

119- (ITA - 1992) Considere as afirmações:
I- Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ e o eixo maior 12. Sua equação é $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$.
II- Os focos de uma hipérbole são $F_1(-\sqrt{5},0), F_2(\sqrt{5},0)$ e sua excentricidade $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Sua equação é $3x^2-2y^2=6$.
III- A parábola $2y=x^2-10x-100$ tem como vértice o ponto $P(5,125/2)$

Então:
a) todas as afirmações são falsas
b) apenas as afirmações II e III são falsas
c) apenas as afirmações I e II são verdadeiras
d) apenas a afirmação III é verdadeira
e) nda

120- (ITA - 1993) Uma das circunferências que passa pelo ponto $P(0,0)$ e tangencia as retas $(r_1): x-y=0$ e $(r_2): x+y-2=0$ tem sua equação dada por:
a) $(x-1)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}$
b) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$
c) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
d) $(x+1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$
e) $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

121- (ITA - 1993) Sendo (r) uma reta dada pela equação $x-2y+2=0$, então, a equação da reta (s) simétrica à reta (r) em relação ao Eixo das abcissas é descrita por:
a) $x+2y=0$
b) $3x-y+3=0$
c) $2x+3y+1=0$
d) $x+2y+2=0$
e) $x-2y-2=0$

122- (ITA - 1994) Duas retas **r** e **s** são dadas, respectivamente, pelas equações $3x-4y=3$ e $2x+y=2$. Um ponto P pertencente à reta **s** tem abscissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta **r**. Se $ax+by+c=0$ é a equação da reta que contém P e é paralela a **r**, então a + b + c é igual a:
a) -132
b) -126
c) -118
d) -114
e) -112

123- (ITA - 1994) Um triângulo equilátero é tal que $A(0,3)$, $B(3\sqrt{3},0)$ e a abscissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio **r** e centro $O(a,b)$. Então $a^2+b^2+r^2$ é igual a:
a) 31
b) 32
c) 33
d) 34
e) 35

124- (ITA - 1995) Três pontos de coordenadas, respectivamente, $(0,0)$, $(b,2b)$ e $(5b,0)$, com b > 0, são vértice de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
a) $(-b,-b)$
b) $(-2b,-b)$
c) $(4b,-2b)$

d) $(3b,-2b)$

e) $(-2b,-2b)$

125- (ITA - 1995) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2ª e tangencia a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a,b). Se $(c,0)$ e $(0,d)$ são as coordenadas de dois pontos de t tais que c > 0 e c = -2d, então a/b é igual a:
a) -4/15
b) -5/16
c) -3/16
d) -6/15
e) -7/15

60- **(ITA - 1995)** Tangenciando externamente a elipse ε_1, tal que $\varepsilon_1 : 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ considere uma elipse ε_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

a) $(7,3)$

b) $(8,2)$

c) $(8,3)$

d) $(9,3)$

e) $(9,2)$

126- (ITA - 1996) São dadas as parábolas $p_1 : y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2 : y = x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até à origem é:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

b) $\dfrac{7}{\sqrt{26}}$

c) $\dfrac{7}{\sqrt{50}}$

d) $\dfrac{17}{\sqrt{50}}$

e) $\dfrac{11}{\sqrt{74}}$

127- (ITA - 1996) Sabendo que o ponto $(2,1)$ é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:
a) $y = 2x - 3$
b) $y = x - 1$
c) $y = -x + 3$
d) $y = 3x/2 - 2$
e) $y = -x/2 + 2$

128- (ITA - 1996) São dadas as retas $r : x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e $s : \sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ e a circunferência $C : x^2 + 2x + y^2 = 0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:
a) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C
b) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente a C
c) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C
d) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C
e) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C

129- (ITA - 1997) Seja A o ponto de interseção das retas r e s dadas, respectivamente pelas equações $x+y=3$ e $x+y=-3$. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $d(A,B)=d(A,C)=\sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:
a) $2x+3y=1$
b) $y=1$
c) $y=2$
d) $x=1$
e) $x=2$

130- (ITA - 1997) Considere os pontos $A(0,0)$, $B(2,0)$ e $C(0,3)$. Seja $P(x,y)$ o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo ABC. Então x + y é igual a:
a) $12/\left(5+\sqrt{13}\right)$
b) $8/\left(2+\sqrt{11}\right)$
c) $10/\left(6+\sqrt{13}\right)$
d) 5
e) 2

131- (ITA - 1998) As retas $y=0$ e $4x+3y+7=0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4cm e 6cm, então, a área deste paralelogramo, em cm², vale:
a) 36/5
b) 27/4
c) 44/3
d) 48/3
e) 48/5

132- (ITA - 1998) Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente, $5(x+3)^2-4(y-2)^2=-20$ e $(y-3)^2=4(x-1)$. Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:
a) a elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$
b) a hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5}+\frac{(x-3)^2}{4}=1$
c) O par de retas dadas por $y=\pm(3x-1)$
d) a parábola de equação $y^2=4x+4$
e) a circunferência centrada em $(9,5)$ e raio $\sqrt{120}$

133- (ITA - 1998) Considere o paralelogramo ABCD onde $A(0,0)$, $B(-1,2)$ e $C(-3,-4)$. Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:
a) $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ e $D(-2,-5)$
b) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ e $D(-1,-5)$
c) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ e $D(-2,-6)$,
d) $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ e $D(-2,-6)$
e) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ e $D(-2,-5)$

134- (ITA - 1999) Pelo ponto $C(4,-4)$ são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y=(x-4)^2+2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) $6\sqrt{12}$
b) $\sqrt{12}$
c) 12
d) 8
e) 6

135- (ITA - 1999) Considere a circunferência C de equação $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ e a elipse E de equação $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$. Então:
a) C e E interceptam-se em dois pontos distintos
b) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos
c) C e E são tangentes exteriormente
d) C e E são tangente interiormente
e) C e E têm o mesmo centro e não de interceptam

136- (ITA - 1999) Duas circunferências C_1 e C_2, ambas com 1m de raio, são tangentes. Seja C_3 outra circunferência cujo raio mede $\left(\sqrt{2}-1\right)$m e que tangencia C_1 e C_2. A área, m², da região limitada e exterior às três circunferências dadas é:
a) $1-\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$
c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$
d) $\frac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$
e) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)-1$

137- (ITA - 2000) A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A(2,1)$ e $B(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abscissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:
a) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ou $(5,0)$
b) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ou $(4,0)$
c) $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ou $(5,0)$
d) $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ou $(4,0)$
e) $\left(-\frac{1}{5},0\right)$ ou $(3,0)$

138- (ITA - 2000) Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta $3x-y=37$ e tangentes à circunferência $x^2-y^2-2x-y=0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e d_2 a distância de r_2 até a origem, então d_1+d_2 é igual a:
a) $\sqrt{12}$
b) $\sqrt{15}$
c) $\sqrt{7}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\sqrt{5}$

139- (ITA - 2001) Seja o ponto $A(r,0)$, r > 0. O lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$, tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P e A e o dobro do quadrado da distância de P à reta $y=-r$ é:
a) uma circunferência centrada em $(r,-2r)$ com raio r
b) uma elipse centrada em $(r,-2r)$ com semi eixos valendo r e 2r
c) uma parábola com vértice em $(r,-r)$

d) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra
e) uma hipérbole centrada em $(r,-2r)$ com semi eixos valendo r

140- (ITA - 2001) O coeficiente angular da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto $P(8,0)$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

141- (ITA - 2002) Numa sistema de coordenadas cartesianas, duas retas **r** e **s**, com coeficientes angulares 2 e 1/2, respectivamente, se interceptam na origem O. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento **BC** é perpendicular a **r** e a área do triângulo OBC é igual a 12×10^{-1}, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale:
a) 8/5
b) 4/5
c) 2/5
d) 1/5
e) 1

142- (ITA - 2002) Seja k > 0 tal que a equação $(x^2-x)+k(y^2-y)=0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se (p,q) são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2-q\neq 0$, então $\frac{p-p^2}{q^2-q}$ é igual a:
a) $2+\sqrt{5}$
b) $2-\sqrt{5}$
c) $2+\sqrt{3}$
d) $2-\sqrt{3}$
e) 2

143- (ITA - 2002) Considere a região do plano cartesiano xy defina pela desigualdade $x^2+4x+y^2-4y-8\leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta $x+y=0$, ele irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a:
a) $\frac{128}{3}\pi$
b) $\frac{128}{4}\pi$
c) $\frac{128}{5}\pi$
d) $\frac{128}{6}\pi$
e) $\frac{128}{7}\pi$

144- (ITA - 2003) Considere a família de circunferência com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Ou. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:
a) de uma elipse
b) de uma parábola
c) de uma hipérbole
d) de duas retas concorrentes

e) da reta y = -x.

145- (ITA - 2003) A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$,

é igual a:

a) $\sqrt{6}$
b) $5/2$
c) $2\sqrt{2}$
d) 3
e) $10/3$

146- (ITA - 2005) Uma circunferência passa pelos pontos $A(0,2)$, $B(0,8)$ e $C(8,8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são:

a) $(0,5)$ e 6
b) $(5,4)$ e 5
c) $(4,8)$ e 5,5
d) $(4,5)$ e 5
e) $(4,6)$ e 5

147- (ITA - 2005) Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A=(0,0)$, $B=(2,2)$ e $C=\left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$. O volume do tetraedro é:

a) $8/3$
b) 3
c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
e) 8

148- (ITA - 2005) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,-2)$ são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$
d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

149- (ITA - 2007) Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas 2x =r, x = 2y e x = -2y + 10. A área desse triângulo mede:

a) 15/2
b) 13/4
c) 11/6
d) 9/4
e) 7/2

150- (ITA - 2007) Sejam $A(a,0)$, $B(0,a)$ e $C(a,a)$, pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

a) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

151- (ITA - 2009) No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta t: x = 1 e ao ponto $A(3,2)$ é igual a 4. Então, S é:

a) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2,1)$

b) uma circunferência de raio 1 e centro $(1,2)$

c) uma hipérbole

d) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2

e) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1

152- (ITA - 2009) A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a:

a) 2
b) 3/2
c) 1
d) 3/4
e) 1/2

153- (ITA - 2009) Sejam C uma circunferência de raio R > 4 e centro (0,0) e **AB** uma corda de C. Sabendo que (1,3) é o ponto médio de **AB**, então um equação da reta que contém **AB** é:

a) $y + 3x - 6 = 0$
b) $3y + x - 10 = 0$
c) $2y + x - 7 = 0$
d) $y + x - 4 = 0$
e) $2y + 3x - 9 = 0$

154- (ITA - 2009) Os pontos $A(3,4)$ e $B(4,3)$ são vértices de um cubo, em que **AB** é uma das arestas. A aresta lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médio da face do cubo é igual a:

a) $\sqrt{8}$
b) 3
c) $\sqrt{12}$
d) 4
e) $\sqrt{18}$

155- (ITA - 2010) Considere as circunferências $C_1 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $C_2 : (x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede:

a) $5\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{6}$
d) $25/3$
e) 9

156- (ITA - 2010) Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo $B(2,1)$ e $C(5,5)$. Das seguintes afirmações:

I- A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$

II- S está na interseção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

III- A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

É(são) verdadeira(s) apenas

a) I
b) II
c) III
d) I e II
e) II e III

157- (ITA – 2011) Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio r = 1 cm e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm², é igual a:

a) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

158- (ITA – 2012) Sejam $A = (0,0)$, $B = (0,6)$ e $C = (4,3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

159- (ITA – 2012) A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a:

a) $\frac{19}{2}$

b) 10

c) $\frac{25}{2}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{29}{2}$

160- (ITA – 2012) Dados os pontos $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ e $C(1,1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância d = 2 da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por:

a) $r_{1,2} = \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$

b) $r_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$

c) $r_{1,2} = 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$

d) $r_{1,2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$

e) $r_{1,2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$

161- (ITA – 2014) Seja ABC um triângulo de vértices $A = (1,4)$, $B = (5,1)$ e $C = (5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento:

a) $\frac{15}{8}$

b) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$

c) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$

d) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$

e) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$

162- (ITA – 2014) A equação da circunferência localizado no 1° quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às reta $r: 2x-2y+5=0$ e $s: x+y-4=0$ é:

A) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{10}{4}\right)=4$

B) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2=4$

C) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\frac{10}{4}\right)^2=4$

D) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\frac{13}{4}\right)^2=4$

E) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=4$

3° MARATONA DE FÉRIAS ☞ FUNÇÕES E TRIGONOMETRIA

PARTE I – FUNÇÕES

01. **(ESCOLA NAVAL)** O domínio da função $f(x)=\dfrac{-32x}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-243}}$ é:

A) $(-\infty,-5)$ B) $(-\infty,5)$ C) $(-5,+\infty)$ D) $(5,+\infty)$ E) $(-5,5)$

02. **(ESCOLA NAVAL)** Se $\log_\alpha x = n$ e $\log_\alpha y = 5n$, então $\log_\alpha \sqrt[4]{x^3y}$ é igual a:

A) $\dfrac{n}{4}$ B) $2n$ C) $\dfrac{3n}{4}$ D) $3n$ E) $\dfrac{5n}{4}$

03. **(ESCOLA NAVAL)** O domínio da função real $f(x)=\dfrac{\sqrt{25-4x^2}}{\ln(x-2)}$ é um subconjunto de:

A) $\left[-\dfrac{5}{2},2\right]$ B) $\left[1,\dfrac{9}{4}\right]$ C) $[2,3]$ D) $\left[-\dfrac{5}{2},4\right]$ E) $\left[\dfrac{9}{4},3\right]$

04. **(ESCOLA NAVAL)** Seja x a solução da equação $\log_7\sqrt{x+1}+\log_7\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}\log_7 3$. O valor de $Z=\log_{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{64}+\log_x 128$ é:

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

05. **(ESCOLA NAVAL)** Sendo M o menor inteiro que pertence ao domínio da função: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{9}{16}-\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x}}}$, podemos afirmar que $\log_M 2\sqrt{2\sqrt{2}}$ é:

A) 7/4 B) 7/8 C) 3/4 D) 3/8 E) 1/4

06. **(ESCOLA NAVAL)** O domínio da função real $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{1-\ln x}$ é igual a:

A) $[2,+\infty)$
B) $(-\infty,-2]\cup[2,e)\cup(e,+\infty)$
C) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$
D) $[2,e)\cup(e,+\infty)$
E) $(-\infty,+\infty)$

07. **(ITA)** Das afirmações:
I. Se $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
III. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$, com a < b < c. Se $f : [a,c] \to [a,b]$ é sobrejetora, então f não é injetora.

É (são) verdadeira(s):
A) apenas I e II B) apenas I e III C) apenas II e III D) apenas III E) nenhuma

08. **(ITA)** A soma $\sum_{n=1}^{4} \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{32}}{\log_{\frac{1}{2}} 8^{n+2}}$ é igual a:

A) 8/9 B) 14/15 C) 15/16 D) 17/18 E) 1

09. **(ITA)** Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações $\sqrt{a\sqrt{b}} = \dfrac{1}{2}$ e $\ln\left(a^2 + b\right) + \ln 8 = \ln 5$, um possível valor de $\dfrac{a}{b}$ é:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) $3\sqrt{2}$

PARTE II - TRIGONOMETRIA

10. **(ESCOLA NAVAL)** O número de soluções da equação $\cos^2(x + \pi) + \cos^2(x - \pi) = 1$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a:
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. **(ESCOLA NAVAL)** Se $\dfrac{\text{sen}x - \text{sen}y}{\cos x - \cos y} = 2$ e $\text{tg}x = \dfrac{1}{3}$, então tgy é igual a:
A) 3 B) 1/6 C) 0 D) – 1/6 E) – 3

12. **(ESCOLA NAVAL)** Sabendo-se que tg = a e tgy = b, pode-se reescrever $Z = \dfrac{\text{sen}2x + \text{sen}2y}{\text{sen}2x - \text{sen}2y}$ como:
A) $\left(\dfrac{1 - ab}{1 + ab}\right)\left(\dfrac{a - b}{a + b}\right)$
B) $\left(\dfrac{1 + ab}{1 - ab}\right)\left(\dfrac{a - b}{a + b}\right)$
C) $\left(\dfrac{1 - ab}{1 + ab}\right)\left(\dfrac{a + b}{a - b}\right)$
D) $\left(\dfrac{1 + ab}{1 - ab}\right)\left(\dfrac{a + b}{a - b}\right)$
E) $\left(\dfrac{1 - ab}{1 + ab}\right)\left(\dfrac{a + b}{b - a}\right)$

13. **(ESCOLA NAVAL)** Se $x \in [0, 2\pi]$, o conjunto solução de $\dfrac{\sqrt{3}}{9} \leq \dfrac{\sec x - \cos x}{\text{cossec}\, x - \text{sen}x} < 1$ é:
A) $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ B) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$ C) $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$

D) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{4\pi}{3}\right)$ E) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right]$

14. **(ESCOLA NAVAL)** Sendo $y = \text{sen}\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$, o valor numérico de y é:

A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{3}+2$ E) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$

15. **(ESCOLA NAVAL)** O produto das soluções da equação $2\text{sen}^3x+5\cos^2 x+4\text{sen}x+2\text{tg}^2x=4+2\sec^2 x$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right)$ é:

A) $\frac{5\pi^2}{12}$ B) $\frac{\pi^3}{12}$ C) $\frac{5\pi^3}{72}$ D) $\frac{\pi^2}{6}$ E) $\frac{\pi^2}{12}$

16. **(ESCOLA NAVAL)** Se $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ e $\cos^2-\text{sen}^2x=\frac{2}{5}$, o valor de $\cos^2 x+4\text{sen}^2x+5\text{sen}x\cos x$ é:

A) $13+\sqrt{21}$ B) $\frac{17+3\sqrt{21}}{10}$ C) $\frac{19+5\sqrt{21}}{10}$ D) $\frac{21+2\sqrt{21}}{3}$ E) 21

17. **(ESCOLA NAVAL)** Se $a-b=\frac{\pi}{6}$ e $\text{tg}a=3\sqrt{3}$, o valor de $(\text{tg}b)^3$ é igual a:

A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{125}$ C) $-\frac{3\sqrt{3}}{125}$ D) $-\frac{8\sqrt{3}}{9}$ E) 0

18. **(ESCOLA NAVAL)** Seja $F(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ definida em R e seja $G(x)=\text{tg}x$ definida no intervalo aberto $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Se $x\in\left]-\pi,\pi\right[$, então o valor da função composta $F\circ G$ no número $\frac{x}{2}$ é igual a;

A) cos2x B) tgx C) senx D) cosx E) tgx

NÚMEROS COMPLEXOS

1-(ITA – 1989) Seja a equação $z^4 - a - bi = 0$, onde a e b são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:

a) uma delas é um imaginário puro
b) os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt[4]{|a+b|}$
c) o seu produto é um imaginário puro
d) cada uma tem argumento igual a $\frac{\arg(a+bi)}{4}$
e) a sua soma é zero

2-(ITA – 1989) O número natural n tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$, onde i é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:

a) 6 b) 3 c) 7 d) 4 e) nda

3-(ITA – 1990) Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então:

a) $S_1 \cap S_2$ é vazio
b) $S_1 \cap S_2 \subset \mathbb{R}$
c) S_1 possui apenas dois elementos distintos
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos

4-(ITA – 1990) A igualdade $1 + |z| = |1 + z|$, onde $z \in \mathbb{C}$, é satisfeita:

a) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Im}(z) < 0$.
b) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ e $\operatorname{Im}(z) = 0$.
c) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$.
d) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z) = 0$.
e) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$

5-(ITA – 1991) Sejam $w = a + bi$, com $b \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:

a) uma par de retas paralelas
b) uma circunferência
c) uma elipse
d) uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$
e) nda

6-(ITA – 1991) Se $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$, onde $0 < t < 2\pi$, então podemos afirmar que $\frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$ b) $i \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ c) $i \operatorname{cotg} t$
d) $i \operatorname{tg} t$ e) nda

7-(ITA – 1992) Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sendo S o conjunto dos valores de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos S vale:

a) 4 b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ c) 8 d) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ e) nra

8-(ITA – 1993) Seja a o módulo do número complexo $\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

a) 10/11 b) – 2 c) 5/8 d) 3/8 e) 1/5

9-(ITA – 1993) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:
a) nenhuma delas é um número inteiro
b) a soma deles é 2
c) estas são em número de 2 e são distintas
d) estas são em número de 4 e são 2 a 2 distintas
e) umas delas é da forma z = bi com b real não nulo

10-(ITA – 1994) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x+iy)^2 = (x+y)i$, então:
a) x e y são números irracionais
b) x > 0 e y < 0
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) x < 0 e y = x
e) $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$

POLINÔMIOS

11-(ITA – 1989) Sejam a, b e c constantes reais com $a \neq 0$ formando, nesta orem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Então uma relação válida entre b e c é:
a) $c = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)$ b) $c = b\left(2-\sqrt{2}\right)$
c) $c = b\left(\sqrt{2}-1\right)$ d) $c = b\sqrt{2}$
e) $c = \frac{b}{2}\left(4-\sqrt{2}\right)$

12-(ITA – 1989) Se P(x) e Q(x) são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que $P(i) = 0$ e $Q(i) = 0$, então podemos afirmar que:
a) $P(x)$ é divisível por x + 1
b) $P(x)$ é divisível por x – 1
c) $P(x) \cdot Q(x)$ é divisível por $x^4 + 2x^2 + 1$
d) $P(x)$ e $Q(x)$ são primos entre si
e) $Q(x)$ não é divisível por $P(x)$

13-(ITA – 1990) Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + \cdots + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação $p(x) = 0$ admite mais do que uma raiz real e ainda, $a + bi$ é uma raiz complexa desta equação com $ab \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reis de $p(x) = 0$ e que a soma destas raízes vale $\frac{7}{8}$ enquanto que o produto é $\frac{1}{6}$, o valor de α é:
a) 32 b) 56 c) 71 d) 11 e) 0

14-(ITA – 1991) Os valores de m de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:
a) 0 e 1 b) $\sqrt{3}$ e 3 c) 1 e – 1
d) 2 e – 2 e) nda

15-(ITA – 1991) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$. Podemos afirmar que:
a) $S \subset]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,2[$
b) $S \subset]-2,-1[\cup]0,1[\cup]3,4[$
c) $S \subset]0,4[$

d) $S \subset]-2,-1[\cup]1,2[\cup]3,4[$
e) nda

16-(ITA – 1991) Na divisão $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por $x - 1$, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e resto -6. Sabe-se que (b_4, b_3, b_2, b_1) é uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$. Podemos afirmar que;

a) $b_3 + a_3 = 10$ b) $b_4 + a_4 = 6$
c) $b_3 + b_0 = 12$ d) $b_4 + b_1 = 16$
e) nda

17-(ITA – 1995) A divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto – 7x. O resto da divisão de P(x) por $2x + 1$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

MATRIZES E DETERMINANTES

01. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n e os números reais α e β, não nulos. Das sentenças a seguir, a FALSA é:
a) (A.B).C = A.(B.C)
b) (A+B).C = C.(A+B)
c) 1.A = A.1 = A
d) (A+B)+C = A+(B+C)
e) α.A+β.A = (α+β).A

02. O conjunto solução da inequação $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} \le 0$ é:
a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -4 \le k \le 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \le k \le 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, k \le -1 \text{ ou } k \ge 4\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, k \le -4 \text{ ou } k \ge 1\}$
e) $\varnothing$

TRIGONOMETRIA

03. Sendo $\left\{x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \ne \frac{k\pi}{4}\right\}$, então $2 - \frac{2\text{tg}x}{\text{tg}2x}$ é equivalente a:
a) $\cos^2 x$
b) $\text{sen}^2 x$
c) $\sec^2 x$
d) $\text{cossec}^2 x$
e) 1

04. O valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} \text{cossec}^2 x & 1 & \sec^2 x \\ \text{cotg}^2 x & \cos^2 x & \text{tg}^2 x \\ 1 & \text{sen}^2 x & 1 \end{bmatrix}$ com $x \ne \frac{k\pi}{2}$ e $k \in \mathbb{Z}$, é:
a) – 2
b) – 1
c) 1
d) 0
e) 2

05. O valor de $\cos x + \text{sen} x$, sabendo que $3\text{sen} x + 4\cos x = 5$, é:
a) 3/5
b) 4/5
c) 1
d) 6/5
e) 1/8

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

06. Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse número ser um número múltiplo de 12 é:
a) 1/2
b) 3/5
c) 1/3
d) 2/3
e) 3/8

07. Sete livros didáticos, cada um de uma disciplina diferente, devem ser posicionados lado a lado em uma estante, de forma que os livros de Física, de Química e de Matemática estejam sempre juntos, em qualquer ordem. O número de maneiras diferentes em que esses livros podem ser posicionados é:
a) 720
b) 1440
c) 2160
d) 2880
e) 5040

PLANA, ANALÍTICA E ESPACIAL

08. Um triângulo tem o lado maior medindo 1 m e dois de seus ângulos são 27° e 63°. O valor aproximando do perímetro desse triângulo, dados $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\cos 18° = 0{,}95$, é de:
a) 1,45 m
b) 2,33 m
c) 2,47 m
d) 3,35 m
e) 3,45 m

09. Considere que numa laranja tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta por 12

gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

a) $\frac{4^3\pi}{3}$ cm^2

b) $\frac{4^3\pi}{9}$ cm^2

c) $\frac{4^2\pi}{3}$ cm^2

d) $\frac{4^2\pi}{9}$ cm^2

e) $4^3\pi$cm^2

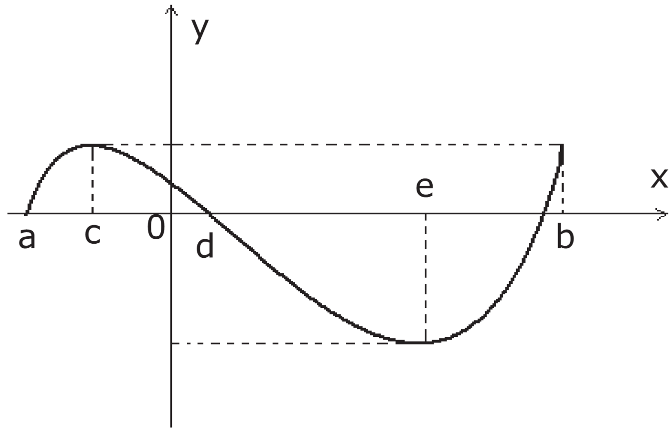
10. Dadas as afirmativas acerca do estudo analítico de retas.
I. As retas 2x + y – 3 = 0 e 4x + 2y – 1 = 0 são paralelas.
II. As retas x + 3y = 0 e 3x – y = 0 são perpendiculares.
III. A reta 2x – y + 4 = 0 não contém a origem dos eixos cartesianos.
Verifica-se que está(ão) correta(s)
a) I, apenas.
b) I e II, apenas.
c) II, apenas.
d) II e III, apenas
e) I, II e III.

BINÔMIO DE NEWTON

11. No desenvolvimento do binômio $\left(x^2+\frac{k}{x^4}\right)^9$, o termo independente de x é igual a 672. Então k é um número:
a) primo
b) divisível
c) múltiplo de 5
d) inteiro quadrado perfeito
e) inteiro cubo perfeito

FUNÇÃO

12. Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real $[a,b]$. Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:



a) f é crescente no intervalo $[a,0]$

b) $f(x) \le f(e)$ para todo x no intervalo $[d,b]$

c) $f(x) \le 0$ para todo x no intervalo $[c,0]$

d) a função f é decrescente no intervalo $[c,e]$

e) se $x_1 \in [a,c]$ e $x_2 \in [d,e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$

13. Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x)=3x^2-12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x)=5x^2-40x-40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a:
a) 4 lotes
b) 5 lotes
c) 6 lotes
d) 7 lotes
e) 8 lotes

LOGARITMO, EXPONENCIAL E MÓDULO

14. O valor de x na equação exponencial $7^{2x-1}-7^x-7^{x-1}=0$ é:

a) $\frac{2\log 2}{\log 7}$

b) $\frac{3\log 3}{\log 7}$

c) $\dfrac{2\log 3}{\log 7}$

d) $\dfrac{3\log 2}{\log 7}$

e) $\dfrac{2\log 8}{\log 7}$

15. Sabendo-se que $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \cdots + \log x^{199} = 10000$, podemos afirmar que x pertence ao intervalo:
a) $[1,3]$
b) $[3,5]$
c) $[5,7]$
d) $[7,9]$
e) $[9,11]$

16. Considerando a função real $f(x) = (x-1)|x-2|$, o intervalo real para o qual $f(x) \geq 2$ é:
a) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$

17. O número real x que satisfaz a equação $\log_2(12 - 2^x) = 2x$ é:
a) $\log_3 2$
b) $\log_2 3$
c) $\log_3 4$
d) $\log_4 3$
e) $\log_4 2$

18. Supondo $x \in \mathbb{R}$, com x > 0 e $x \neq 1$, a inequação $x^{2x-1} < x^3$ tem como solução:
a) 0 < x < 1
b) x > 2
c) x > 1
d) 1 < x < 2
e) 2 < x < 3

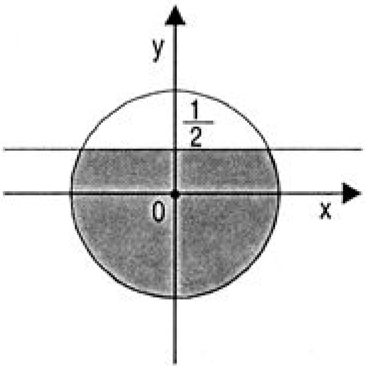
POLINÔMIOS

19. As medidas em centímetros das arestas de um bloco retangular são as raízes da equação polinomial $x^3 - 14x^2 + 64x - 96 = 0$. Denominando-se r, s e t essas medidas, se for construído um novo bloco retangular, com arestas medindo r – 1, s – 1 e t – 1, ou seja, cada aresta medindo 1 cm a menos que a do bloco anterior, a medida do volume desse novo bloco será:
a) 36 cm ^{3}
b) 45 cm^3
c) 54 cm^3
d) 60 cm^3
e) 80 cm^3

20. Seja a função complexa $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$. Sabendo-se que 2 + i é raiz de P, o intervalor I de números reais que faz $P(x) < 0$, para todo $x \in I$ é:
a) $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$
b) $]0,1[$
c) $\left]\dfrac{1}{4}, 2\right[$
d) $]0,+\infty[$
e) $\left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right[$

NÚMERO COMPLEXO

21. Na figura, estão representadas, no plano complexo, uma reta paralela a Ox e a circunferência de centro na origem dos eixos coordenados e raio igual a 1 u.c. Com base nessas informações, pode-se concluir que o subconjunto dos números complexos que pode ser representado pela região sombreada é:



a) $\left\{z = x + yi; x \leq \frac{1}{2} \text{ e } |z| \leq 1\right\}$

b) $\left\{z = x + yi; y \leq \frac{1}{2} \text{ e } |z| \leq 1\right\}$

c) $\left\{z = x + yi; x \leq \frac{1}{2} \text{ e } |z| \geq 1\right\}$

d) $\left\{z = x + yi; y \geq \frac{1}{2} \text{ e } |z| \leq 1\right\}$

e) $\left\{z = x + yi; y \leq \frac{1}{2} \text{ e } |z| \geq 1\right\}$

22. Considere os números complexos z = x + yi, $x \in R$, $y \in R$, tais que $|z-1| = |z|$. A parte real desses números são iguais a :
a)-1
b) 0
c)1/2
d) 1
e)3/2

23. Simplificando $\dfrac{(2+i)^{101} \cdot (2-i)^{50}}{(-2-i)^{100} \cdot (i-2)^{49}}$, obtém-se:
a) 1
b) 2 + i
c) 2 – i
d) 5
e) – 5

24. A figura geométrica formada pelos afixos das raízes complexas da equação $x^3 - 8 = 0$ tem área igual a:
a) $7\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$

Revisão 003 – Geometrias: Plana, Analítica e Espacial – Prof. Jorge Helton

01. Uma reta *r* tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta *s* num ponto A exterior à circunferência. A reta *s* passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo ABC seja obtuso. Então o ângulo CAB é igual a:

a) $\frac{1}{2}\text{ABC}$ b) $\frac{3\pi}{2}-2\text{ABC}$ c) $\frac{3\pi}{2}-2\text{ABC}$ d) $2\text{ABC}-\pi$ e) $\frac{2}{3}\text{ABC}$

02. Das afirmações:
I. Duas retas coplanares são concorrentes;
II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas
III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas:
a) III b) I e III c) II e III d) III e IV e) I, II e III

03. Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}, \sqrt{17}$ e 5cm. O volume, em cm³, do sólido VABC é:

a) 2 b) 4 c) $\sqrt{17}$ d) 6 e) $5\sqrt{10}$

04. No sistema xOy os pontos A(2,0), B(2,5) e C(0,1) são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a:

a) 1 b) 100/105 c) 10/11 d) 100/115 e) 5/6

05. Um triângulo ABC tem lados com medidas $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$, b = 1 cm e $c=\frac{1}{2}\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrirta ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

06. Sejam A(0,0), B(0,6) e C(4,3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{10}{3}$

07. A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas r: x – 3y + 3 = 0 e s: 3x + y – 21 = 0, em unidades de área, é igual a:
a) 19/2 b) 10 c) 25/2 d) 27/2 e) 29/2

08. Um cone reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a:

a) 1/4 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) ¾

09. A superfície lateral de um cone reto é um setor circular de 120° e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm² e cm³, respectivamente:

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) 4π e $\pi\sqrt{2}$ d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ e) π e $2\pi\sqrt{2}$

10. Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre AB. Considere as áreas do quadrado ABCD, do trapézio BEDC e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm², a medida do segmento AE, em cm, é igual a:

a) 10/3 b) 5 c) 20/3 d) 25/3 e) 10

11. Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\ cm$.

Então o raio da esfera, em cm, é igu8al a:

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{13}{3}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{10}{3}$

12. Um cilindro de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}cm$ está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm³, é igual a:

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ e) $\frac{\pi}{3}$

13. Considere o triângulo ABC de lados a = BC, b = AC e c = AB e ângulos internos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$.

Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que:

a) $\alpha = 90^o$
b) $\beta = 60^o$
c) $\lambda = 90^o$
d) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45^o$
e) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa

14. Sejam C uma circunferência de raio R > 4 e centro (0,0) e AB uma corda de C. Sabendo que (1,3) é o ponto médio de AB, então uma equação da reta que contém AB é:

a) y + 3x – 6 = 0
b) 3y + x – 10 = 0
c) 2y + x – 7 = 0
d) y + x – 4 = 0
e) 2y + 3x – 9 = 0

MATRIZES E DETERMINANTES

01. O determinante da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, onde : $a_{ij} = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2i - j}\right), i = j \\ tg\left(\dfrac{\pi}{i + j}\right), i \neq j \end{cases}$ é igual a:

a) + 1/3
b) – 1/3
c) – 3
d) + 3
e) – 1

02. As matrizes A, B e C são do tipo rxs, txu e 2xw, respectivamente. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é do tipo 3x4, então r + s + t + u + w é igual a:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

03. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{se } i \neq j \\ i + j - \dfrac{4}{j}, \text{se } i = j \end{cases}$. O determinante da inversa de A é:

a) – 1/4
b) 3/4
c) 3/2
d) – 1/2
e) 4/3

04. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y + 4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$. Se x e y são valores para os quais B é a transposta da inversa da matriz A, então o valor de x + y é:

a) – 1
b) – 2
c) – 3
d) – 4
e) – 5

05. O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) 2/3
b) 3/2
c) 0
d) – 2
e) – 1/3

ANALÍTICA NO R³

06. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, \alpha)$, o valore de α para que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$ é: (considere $\alpha \in \mathbb{N}$)

a) par
b) primo
c) ímpar não primo
d) quadrado perfeito
e) zero

07. Considere $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vetores no R³ que satisfazem ao sistema: $\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = (2, -1, -2) \\ \vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z} = (5, -2, -8) \\ \vec{x} + 3\vec{y} + 9\vec{z} = (15, -6, -24) \end{cases}$. O produto $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ vale:

a) – 1
b) 0
c) 1/2
d) 1
e) 2

08. A equação geral do plano determinado pelos pontos $A(2, 1, -1)$, $B(0, -1, 1)$ e $C(1, 2, 1)$, é da forma $ax + by + cz + d = 0$, com a, b e c inteiros e primos entre si, então a soma a + b + c + d é: (considere a > 0)

a) 1

b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

09. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A(2,1,-2)$ e é perpendicular à reta $r:\begin{cases} x=-4+3t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$.

a) $2x+3y+z-6=0$
b) $3x+2y+z-6=0$
c) $x+y+z-6=0$
d) $3x+2y+z-24=0$
e) $3x+2y+z=0$

10. Seja ax + by + cz + d a equação do plano que passa pelos pontos $(4,-2,2)$ e $(1,1,5)$ e é perpendicular ao plano $3x-2y+5z-1=0$. A razão $\frac{d}{b}$ é:

a) – 5/4
b) 4/7
c) 8
d) – 1/2
e) 2/5

TRIGONOMETRIA

11. O valor de $3\text{sen}10°(\text{tg}5°+\text{cotg}5°)$ é igual a:

a) 3/2
b) 2
c) 3
d) 5
e) 6

12. O número de soluções da equação $\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1$, satisfazendo a condição $0 \le x > 2\pi$, é:

a) infinito
b) 4
c) 2
d) 1
e) 0

13. Sendo $\text{sen}\alpha = 3\cos\alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\text{cossec}\,\alpha$ é:

a) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$
b) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
c) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

14. O produto $\text{cotg}x \cdot \cos x$ é positivo, portanto x pertence ao:

a) 1° ou 2 ° quadrante
b) 1° ou 4° quadrante
c) 2° ou 3° quadrante
d) 2° ou 4° quadrante
e) 3° ou 4° quadrante

15. A função $f(x)=\left[\text{sen}2x\left(\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{\text{sen}x}\right)\right]^2-\text{sen}2x$ é definida para todo x real e $x \ne \frac{k\pi}{2}$, co k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que;

a) $f(2024)=f(2004)+f(2005)$
b) $f(2005)=f(2006)-2f(2003)$
c) $f(2024)=f(2005)+f(2004)+f(2003)$
d) $f(2006)=f(2004)+f(2005)$
e) $f(2024)=f(2003)+f(2004)-f(2005)$

PROGRESSÕES

16. O limite da soma da expressão $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\cdots$ é igual a:
a) 1/7
b) 2/7
c) 3/7
d) 4/7
e) 5/7

17. Os múltiplos de 5 são inscritos na disposição abaixo:

COLUNA 1	COLUNA 2	COLUNA 3	COLUNA 4	COLUNA 5
5	10	15	20	25
30	35	40	45	50
55	60	65	70	75
80	85	90	95	100
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Caso esse padrão seja mantido indefinidamente, com certeza o número 745 pertencerá a:
a) primeira coluna
b) segunda coluna
c) terceira coluna
d) quarta coluna
e) quinta coluna

18. Sendo a, b e c, nesta ordem, termos de uma progressão aritmética em que ac = 24 e A, B e C, nesta ordem, temos de um progressão geométrica em que A = a, B = c e C = 72, então o valor de b é:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

19. A sequência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 110, a sequência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. A soma d + f é igual a:
a) 142
b) 132
c) 120
d) 102
e) 96

20. O sexto termo de uma progressão geométrica é igual a b, e o sétimo é igual a c. Se o primeiro termo desta progressão é diferente de zero e a razão maior que um, então o primeiro termo é igual a:
a) $\frac{c}{b}$
b) $\frac{b^3}{c^4}$
c) $\frac{b}{c}$
d) $\frac{b^6}{c^5}$
e) $\frac{b^4}{c^3}$

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

21. Suponha um lote com dez peças, sendo duas defeituosas. Testam-se as peças, uma a uma, até que sejam encontradas as duas defeituosas. A probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste é igual a:
a) 1/45
b) 2/45
c) 1/15
d) 4/45
e) 1/9

22. Num determinado jogo, é realizado um sorteio de 05 números num universo de 25 números. Pode-se participar do jogo comprando bilhetes contendo de 06 a 10 números e ganhará o prêmio aquele que acertar os 05 números sorteados. A probabilidade de um jogador ganhar o prêmio participando do sorteio com apenas um bilhete de 10 números é:

a) $\dfrac{5!}{25!}$
b) $\dfrac{10!}{25!}$
c) $\dfrac{1}{625!}$
d) $\dfrac{5}{625}$
e) $\dfrac{6}{1265}$

23. Dispondo-se de duas urnas, com 4 fichas cada uma, numeradas de 1 a 4, realiza-se o experimento de retirar aleatoriamente uma ficha de cada urna e somar os números indicados nas duas fichas sorteadas. Nessas condições, a probabilidade de, em uma retirada, obter-se para a soma dos números das fichas um número primo é de:
a) 1/4
b) 5/16
c) 9/16
d) 3/8
e) 3/4

24. Um tabuleiro possui 16 casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. De quantas maneiras diferentes é possível colocar 4 peças iguais nesse tabuleiro de modo que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça?
a) 4096
b) 576
c) 256
d) 64
e) 16

25. De uma urna com bolas numeradas de 1 a 30 serão sorteadas bolas, sem reposição. Um apostador marcou um bilhete com 5 números distintos (de 1 a 30). A probabilidade e ele acertar os 3 números é:
a) 1/4060
b) 1/812
c) 1/406
d) 1/203
e) 1/10

LOGARITMO E EXPONENCIAL

26. O valor de x para resolver a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

27. Considere a soma $S = \log\left(\dfrac{3}{2}\right) + \log\left(\dfrac{4}{3}\right) + \log\left(\dfrac{5}{4}\right) + \cdots + \log\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$, em que n é um número natural. O menor valor de n para o qual S > 1 é:
a) 20
b) 21
c) 22
d) 25
e) 29

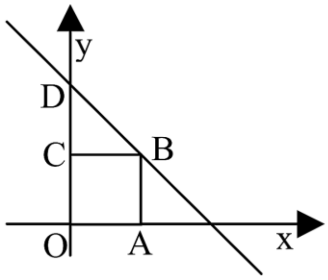
28. O produto dos elementos do conjunto-solução da equação exponencial $2^{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1024}{2^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$ é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

29. A soma das soluções reais $x^{x^2+2x-8} = 1$ é:
a) – 2
b) – 1
c) 0
d) 1
e) 2

30. Sendo $y = 2^{\log_6 5 \cdot \log_2 6}$, o valor de y é:
a) 2
b) 5
c) 6
d) 12
e) 30

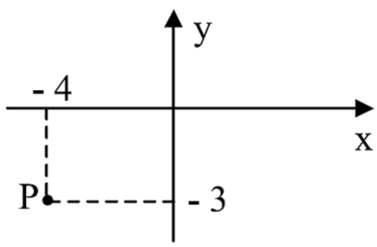
QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2009.1 (EEAR)

01. **(EEAR)** Na figura, OABC é um quadrado de lado 3. Sabendo que o ponto D tem coordenadas (0,6), o coeficiente angular da reta r é:



A) – 6
B) – 4
C) – 2
D) – 1

02. **(EEAR)** Na figura, o ponto P representa um número complexo, cujo conjugado é:



A) – 3 +4i
B) – 4 + 3i
C) 4 – 3i
D) 3 – 4i

03. **(EEAR)** Em um cone, a medida da altura é o triplo da medida do raio da base. Se o volume do cone é $8\pi\ dm^3$, a medida do raio da base, em dm, é:
A) 0,5
B) 1,5
C) 2,0
D) 3,0

04. **(EEAR)** Se 3, 5 e – 2 são raízes da equação $4(x-a)(x-b)(x-5)=0$, o valor de a + b é:
A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

05. **(EEAR)** A área de um setor circular de 30° e raio 6cm, em cm², é, aproximadamente:
A) 7,48
B) 7,65
C) 8,34
D) 9,42

06. **(EEAR)** Num triângulo ABC, o ponto médio do lado AB é M(4,3). Se as coordenadas de B são ambas iguais a 2, então as coordenadas de A são:
A) (7,5)
B) (6,4)
C) (5,3)
D) (3,4)

07. **(EEAR)** Sejam uma circunferência de centro O e um ponto A exterior a ela. Considere AT um segmento tangente à circunferência, em T. Se o raio da circunferência mede 4 cm e $AT = 8\sqrt{2}\ cm$, então a medida de AO, em cm, é:
A) 10
B) 12
C) 13
D) 15

08. **(EEAR)** Se x e y são números reais positivos, $\text{colog}_2 \frac{1}{32} = x$, e $\log_y 256 = 4$, então x + y é igual a:
A) 2
B) 4
C) 7
D) 9

09. **(EEAR)** Uma lanchonete tem em sua dispensa 5 espécies de frutas. Misturando 3 espécies diferentes, pode-se preparar _____ tipos de suco.
A) 24
B) 15
C) 10
D) 8

10. **(EEAR)** Ao dividir $x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 5$ por $x - 3$, obtém-se um quociente cuja soma dos coeficientes é:
A) 4
B) 6
C) 8
D) 10

11. **(EEAR)** São negativas, no 4° quadrante, as funções:
A) seno, cosseno e tangente
B) seno, cosseno e cotangente
C) cosseno, tangente e secante
D) seno, tangente e cossecante

12. **(EEAR)** A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede 2 cm. Se a diagonal desse prisma mede $2\sqrt{11}\,\text{cm}$, sua altura, em cm, mede:
A) 8
B) 6
C) 4
D) 2

13. **(EEAR)** Sejam x, y e b números reais menores que 1. Se $\log_b x = 2$ e $\log_b y = 3$, então o valor de $\log_b\left(x^2y^3\right)$ é:
A) 13
B) 11
C) 10
D) 8

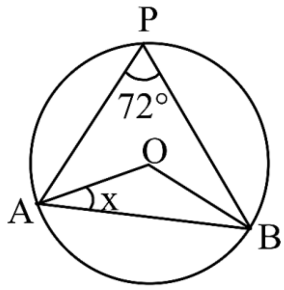
14. **(EEAR)** Se x é raiz da equação $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$, então o valor de x é:
A) 5
B) 3
C) – 2
D) – 4

15. **(EEAR)** Na 5ª série A do Colégio X, numa prova de Ciência, 8 alunos obtiveram notas menores que 4; 15 alunos, notas de 4 a 6, 20 alunos, notas entre 6 e 8; e apenas 2, notas a partir de 8. A nora modal da 5° série A, nessa prova de Ciências, foi:
A) 8
B) 7
C) 6
D) 5

16. **(EEAR)** Os resultados de um pesquisa sobre os números de casos de AIDS entre consumidores de drogas injetáveis, no país X, nos últimos oito anos, foram apresentados em um gráfico, onde as colunas foram substituídas por seringas de tamanhos diferentes. Este gráfico é um:
A) cartograma
B) píctograma
C) histograma
D) estereograma

17. **(EEAR)** Se $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, então o valor de x + y é:
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

18. **(EEAR)** Na figura, O é o centro da circunferência. O valor de x é:



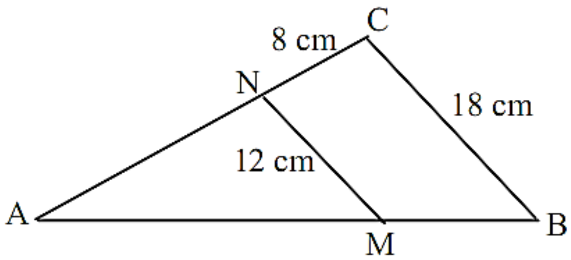
A) 18°
B) 20°
C) 22°
D) 24°

19. **(EEAR)** Com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 7, a quantidade de números de três algarismos distintos que se pode formar é:
A) 100
B) 80
C) 60
D) 30

20. **(EEAR)** Se $f(x)=mx^2+(2m-1)x+(m-2)$ possui um zero real duplo, então o valor de m é:
A) – 1/4
B) – 3/5
C) 4
D) 5

21. **(EEAR)** Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é:
A) 7
B) 5
C) 4
D) 2

22. **(EEAR)** Na figura MN//BC. Se AB=30cm, então MB mede, em cm:



A) 5
B) 10
C) 15
D) 20

23. **(EEAR)** Considere as igualdades:
I – $tg10° = tg(-10°)$
II – $tg770° = -tg50°$
III – $sen250° = sen20°$
IV – $sen460° = sen100°$
O número de igualdades verdadeiras é:
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

24. **(EEAR)** Os ângulos da base maior de um trapézio são complementares, e a diferença entre suas medidas é 18°. O maior ângulo desse trapézio mede:
A) 100°
B) 126°
C) 144°
D) 152°

25. **(EEAR)** Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se a + b = 90°, então cos (a – b), em função de b, é igual a:
A) sen2b
B) cos2b
C) (sen2b)/2
D) (cos2b)/2

QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2010.1 (EEAR)

01. **(EEAR)** Se as frequência absolutas da 1° à 6° classes de uma distribuição são, respectivamente, 5, 13, 20, 30, 24 e 8, então a frequência acumulada da 4° classe dessa distribuição é:
A) 68
B) 82
C) 28%
D) 20%

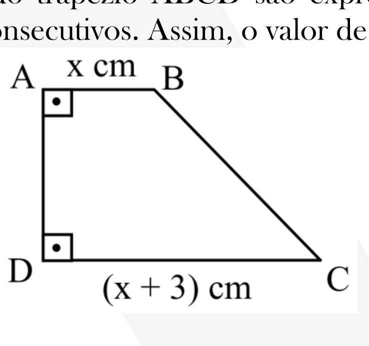
02. **(EEAR)** Os salários mensais, em reais, dos 24 funcionários de uma empresa são:

800	840	880	880	1000	1050	1060	1060
1100	1150	1200	1210	1230	1250	1280	1300
1340	1380	1450	1480	1500	1500	1520	1550

O salário mensal mediano dessa empresa, em reais, é:
A) 1200
B) 1210
C) 1220
D) 1230

03. **(EEAR)** Numa circunferência, a soma das medidas de dois arcos é 315°. Se um desses arcos mede $\frac{11\pi}{12}\text{rad}$, a medida do outro é:
A) 150°
B) 125°
C) 100°
D) 75°

04. **(EEAR)** Quando dadas em cm, as medidas dos lados do trapézio ABCD são expressas por números consecutivos. Assim, o valor de x é:



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

05. **(EEAR)** Considere a circunferência de equação $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ e uma reta r secante a ela. Uma possível distância entre r e o centro da circunferência é:
A) 5,67
B) 4,63
C) 3,58
D) 2,93

06. **(EEAR)** Sejam as matrizes $A_{m\times 3}$, $B_{p\times q}$ e $C_{5\times 3}$. Se $A\cdot B=C$, então m + p + q é igual a:
A) 10
B) 11
C) 12
D) 13

07. **(EEAR)** Sabe-se que a equação $x^4-2x^3-8x^2+18x-9=0$ equivale a $(x-1)^2(x^2-9)=0$. Assim, a raiz de multiplicidade 2 dessa equação é:
A) – 3
B) – 1
C) 1
D) 3

08. **(EEAR)** Seja G o ponto de encontro das medidas de um triângulo cujos vértices são $A(-1,-3)$, $B(4,-1)$ e $C(3,7)$. A abscissa de G é:
A) – 1
B) 0
C) 1
E) 2

09. **(EEAR)** Seja o número complexo $z=1+i$. Se z' é o conjugado de z, então o produto $|z|\cdot|z'|$ é igual a:
A) 1
B) 2
C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$

10. **(EEAR)** O valor de $\cos 15°$ é:

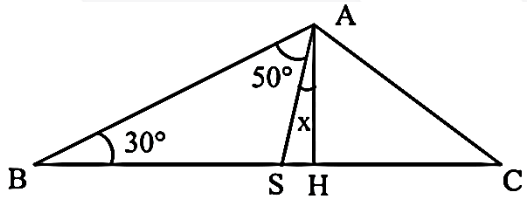
A) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
B) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
C) $2-\sqrt{2}$
D) $2+\sqrt{3}$

11. **(EEAR)** A diagonal de um cubo de aresta a_1 mede 3 cm, e a diagonal da face de um cubo de aresta a_2 mede 2 cm. Assim, $a_1 \cdot a_2$, em cm², é igual a:
A) $2\sqrt{6}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $\sqrt{6}$
D) $\sqrt{3}$

12. **(EEAR)** Ao calcular $\frac{A_{10}^{3}}{C_{10}^{3}}$, obtém-se:
A) 3!
B) 4!
C) 5!
D) 6!

13. **(EEAR)** Seja a inequação $|x-1| \leq 3$. A soma dos números inteiros que satisfazem essa inequação é:
A) 8
B) 7
C) 5
D) 4

14. **(EEAR)** Na figura, AH é altura do triângulo ABC. Assim, o valor de x é:

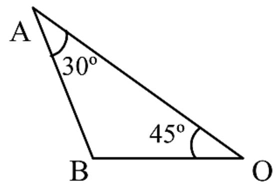


A) 20°
B) 15°
C) 10°
D) 5°

15. **(EEAR)** O inverso do número complexo $z=-2i$ é:
A) $\frac{i}{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) – 2
D) 2i

16. **(EEAR)** Um setor circular, cujo arco mede 15 cm, tem 30 cm² de área. A medida do raio desse setor, em cm, é:
A) 4
B) 6
C) 8
D) 10

17. **(EEAR)** No triângulo AOB, OB = 5 cm, então AB, em cm, é igual a:



A) 6
B) 8
C) $5\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{3}$

18. **(EEAR)** Sejam f e g duas funções reais inversas entre si. Se $f(x)=3x-2$, então $g(1)$ é igual a:
A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

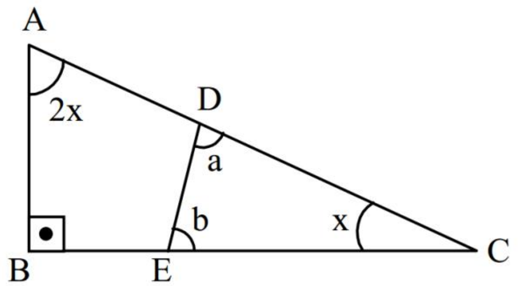
19. **(EEAR)** Seja f uma função definida no conjunto dos números naturais, tal que $f(x+1)=2f(x)+3$. Se $f(0)=0$, então $f(2)$ é igual a:
A) 9
B) 10
C) 11
D) 12

20. **(EEAR)** Para x e y não nulos, a expressão $\frac{y^2\cos180° - xysen270° + y^2sen90°}{x^2\cos0°}$ equivale a:
A) y/x
B) 1/x
C) y/x^2
D) y^2/x^2

21. **(EEAR)** Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2\times2}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\, i = j \\ i + j,\ se\ i \neq j \end{cases}$. A soma dos elementos de A é:
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

22. **(EEAR)** Se os pontos A(2,3), B(4,0) e C(0,k) estão alinhados, então o valor de k é um número:
A) ímpar
B) primo
C) múltiplo de 5
D) múltiplo de 3

23. **(EEAR)** Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a-b|$ é:



A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 90°

24. **(EEAR)** A aresta lateral de uma pirâmide triangular regular mede 5 m, e a aresta da base, 6 m. A área lateral dessa pirâmide, em m², é:
A) 30
B) 32
C) 34
D) 36

25. **(EEAR)** Seja a PG(a,b,c). Se $a+b+c=\frac{7}{6}$ e $abc=-1$, então o valor de a + c é:
A) 8
B) 12
C) 5/6
D) 13/6

QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2010.2 (EEAR)

01. **(EEAR)** Um ângulo central determina, em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento $L = \frac{2\pi r}{3}$. A medida desse ângulo é:
A) 150°
B) 120°
C) 100°
D) 80°

02. **(EEAR)** Multiplica-se o número complexo $2-3i$ pelo seu conjugado, obtém-se;
A) 0
B) – 1
C) 11
D) 13

03. **(EEAR)** Seja um retângulo de comprimento c e largura L. Aumentando-se o comprimento em 1/10 do seu valor, para que a área não se altere, a sua largura deverá ser igual a:
A) L/10
B) 10L/11
C) 9L/11
D) 9L/10

04. **(EEAR)** Uma pirâmide quadrangular regular tem 6 cm de altura e base de 8 cm de perímetro. O volume dessa pirâmide, em cm³, é:
A) 4
B) 6
C) 8
D) 10

05. **(EEAR)** O valor de $i^{11} - i^{21} - i^{38}$ é:
A) 1 – 2i
B) 2 – i
C) – 2
D) 1

06. **(EEAR)** Se a maior das raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ é igual à soma das outras duas, então seu valor é divisor de:
A) 10
B) 16
C) 18
D) 20

07. **(EEAR)** Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é:
A) 25
B) 30
C) 33
D) 42

08. **(EEAR)** Um cone e um cilindro, ambos equiláteros, têm bases de raios congruentes. A razão entre as áreas das secções meridianas do cone e do cilindro é:
A) $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$

09. **(EEAR)** Simplificando-se a expressão $\frac{tgx + cotgx}{cossecx}$, obtém-se:
A) cossecx
B) cosx
C) secx
D) tgx

10. **(EEAR)** Considerando n > 1, se $\log_a n = n$, então o valor de a é:
A) n
B) n^n
C) $\frac{1}{n}$
D) $n^{\frac{1}{n}}$

11. **(EEAR)** As retas $y = kx + 2$ e $y = -x + m$ interceptam-se no ponto (1,4). Assim, o valor de $k + m$ é:

A) 8
B) 7
C) 6
D) 5

12. **(EEAR)** Para que o sistema $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -3x + 4y - z = -1 \end{cases}$ seja possível e determinado, deve-se ter:

A) $k \neq \frac{9}{8}$
B) $k \neq \frac{2}{5}$
C) $k = \frac{7}{6}$
D) $k = \frac{1}{3}$

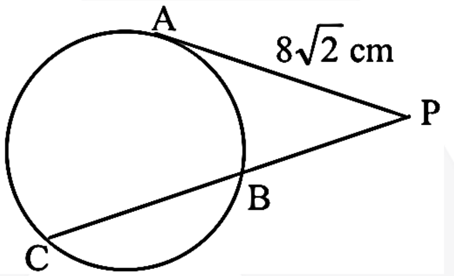
13. **(EEAR)** A função $f: N \to N$, definida por $f(x) = 3x + 2$:

A) é apenas injetora
B) é apenas sobrejetora
C) é injetora e sobrejetora
D) não injetora e nem sobrejetora

14. **(EEAR)** Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3 m, 5 m e 7 m. A medida da projeção do menor dos lados sobre a reta que contém o lado 5 m é, em m:

A) 2,5
B) 1,5
C) 2
D) 1

15. **(EEAR)** Na figura, PA é tangente à circunferência em A, e B é ponto médio de PC. A medida de PC, em cm, é:



A) $12\sqrt{2}$
B) $14\sqrt{2}$
C) 16
D) 20

16. **(EEAR)** Os resultados de uma pesquisa, realizada numa escola, estão apresentados na tabela:

Esporte preferido	Número de votos	Porcentagem do total de votos
Futebol	x	32%
Voleibol	y	24%
Basquetebol	z	15%
Outros	87	w

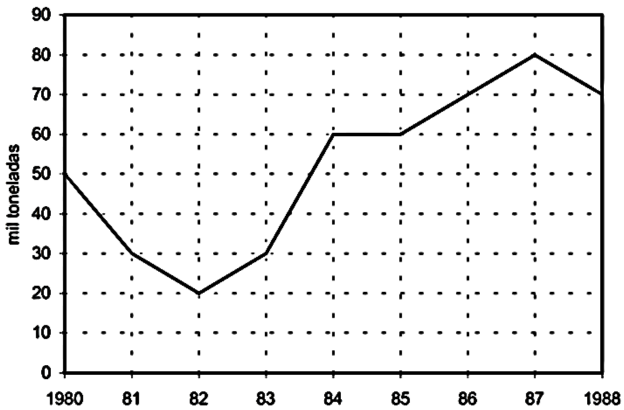
O valor z é:

A) 45
B) 52
C) 55
D) 62

17. **(EEAR)** Se $\operatorname{sen}x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de senx é:

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $14\sqrt{2}$

18. **(EEAR)** O gráfico representa a produção de arroz, em milhares de toneladas, em certo país, no período de 1980 – 1988.

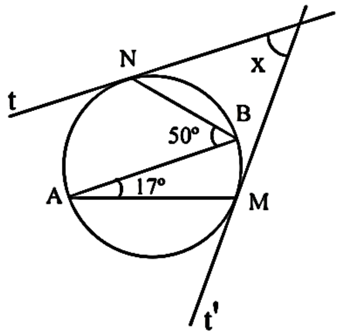


Pelo gráfico, pode-se concluir que, no período 1980 – 1988, nesse país, a produção média anula de arroz, mil toneladas, é:

A) 64
B) 60

C) 58
D) 52

19. **(EEAR)** Sejam AB o diâmetro da circunferência, e as retas t e t' tangentes a ela nos pontos N e M, respectivamente. O valor de x é:



A) 66°
B) 60°
C) 55°
D) 50°

20. **(EEAR)** Sejam os pontos $A(-2,2)$, $B(2,-1)$ e $C(5,k)$. Se a distância entre A e B é a mesma que a entre B e C, a soma dos possíveis valores de k é:
A) 1
B) 0
C) – 1
D) – 2

21. **(EEAR)** Seja a função $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{-2x+1}$. Os valores inteiros do domínio de f são tais que seu produto é igual a:
A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

22. **(EEAR)** Os vértices de um triângulo são $A(2,5)$, $B(0,0)$ e $C(4,-2)$. A altura desse triângulo, relativa a BC, é:
A) $10\sqrt{5}$
B) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
D) $\sqrt{5}$

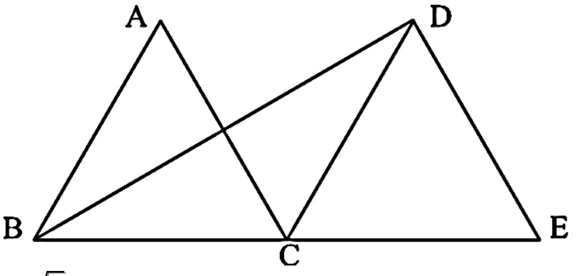
23. **(EEAR)** Com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de três algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. A probabilidade de ele ser divisível por 5 é:
A) 3/5
B) 2/3
C) 1/5
D) 1/3

24. **(EEAR)** Seja $A=\{-2,-1,1,2\}$ o conjunto formado pelas raízes de um polinômio P(x) do 4° grau. Se o coeficiente do termo de maior grau de P(x) é 1, então o termo independente é:
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

25. **(EEAR)** Seja x = 150°. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras.
I) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
II) $\text{sen}2x<0$
III) $\text{tg}\frac{x}{2}>0$
A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2011 (EEAR)

01. **(EEAR)** Na figura, BC e CE são segmentos colineares de 4 cm cada um. Se os triângulos ABC e DCE são equiláteros, a área do triângulo BDE é:



A) $4\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$

02. **(EEAR)** O número de anagramas da palavra SOLEIRA que começam com vogal é:
A) 2720
B) 2780
C) 2860
D) 2880

03. **(EEAR)** O raio da base de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}\,\text{cm}$. O volume desse cone, em cm³, é:
A) $42\sqrt{3}\pi$
B) $38\sqrt{3}\pi$
C) 24π
D) 18π

04. **(EEAR)** A parábola $y = x^2$ intercepta a circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt{2}$ nos pontos:
A) $(-1,1)$ e $(2,4)$
B) $(-1,1)$ e $(1,1)$
C) $(-2,4)$ e $(2,4)$
D) $(-2,4)$ e $(1,1)$

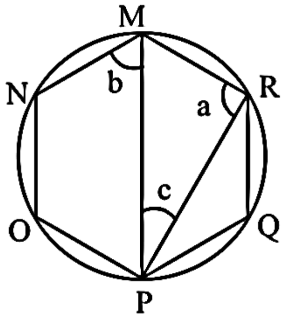
05. **(EEAR)** Se a e b arcos do 2° quadrante tais que $\text{sen}\,a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos b = -\frac{1}{2}$, então $\text{sen}(a+b)$ é:

A) $\frac{\sqrt{2}\left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4}$
B) $\frac{-\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$
C) $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)}{4}$
D) $\frac{3\left(3-\sqrt{2}\right)}{4}$

06. **(EEAR)** Os números que expressam as medidas, em cm ou cm², do lado, da superfície e do perímetro de um quadrado, dados nessa ordem, formam um PA. O lado desse quadrado, em cm, mede:
A) 5/2
B) 5/3
C) 3/4
D) 3/2

07. **(EEAR)** Seja r a maior raiz da equação $x(x+2)(x-1)^3 = 0$. Se m é a multiplicidade de r, então r.m é igual a:
A) 6
B) 5
C) 4
D) 3

08. **(EEAR)** Se MNOPQR é um hexágono regular inscrito na circunferência, então a + b – c é igual a:



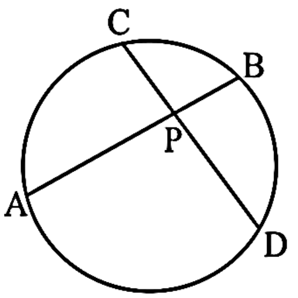
A) 150°
B) 120°
C) 100°
D) 90°

09. **(EEAR)** Sejam as retas r e s de equações $y = 2x - 3$ e $y = -3x + 2$. A tangente do ângulo agudo formado pelas retas r e s é:
A) 0

B) 1
C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. **(EEAR)** O número de valores inteiros de x para os quais se verifica a inequação $x^2 < 7x - 6$ é:
A) três
B) seis
C) cinco
D) quatro

11. **(EEAR)** Na figura, AB e CD são cordas tais que AP = 2PB, CD = 10 cm, e $\frac{CP}{2} = \frac{PD}{3}$. A medida de AB, em cm, é:



A) $6\sqrt{3}$
B) $7\sqrt{3}$
C) $8\sqrt{2}$
E) $9\sqrt{2}$

12. **(EEAR)** Se o polinômio $P(x) = ax^3 - 3x^2 - bx - 3$ é divisível por $(x-3)(x+1)$, então o valor de $a+b$ é:
A) 10
B) 8
C) 7
D) 5

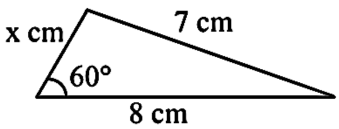
13. **(EEAR)** Para dar 10 voltas completas em volta de um jardim circular, uma pessoa percorrerá 2198 m. Considerando $\pi = 3{,}14$, a medida, em metros, do diâmetro desse jardim é:
A) 70
B) 65
C) 58
D) 52

14. **(EEAR)** A cuba de uma pia tem a forma de uma semiesfera de 3 dm de raio. A capacidade dessa cuba é ____ π litros.
A) 12
B) 14
C) 16
E) 18

15. **(EEAR)** Considere o Polígono de Frequência e a Ogiva, ambos representativos de uma distribuição de frequência com classes. As abscissas dos pontos que orientam as construções do Polígono e da Ogiva são, respectivamente, os __________ e os (as) ___________ das classes.
A) limites superiores – frequências absolutas
B) pontos médios – frequências absolutas
C) pontos médios – limites superiores
D) limites superiores – pontos médios

16. **(EEAR)** Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. O valor de $(\det A):(\det B)$ é:
A) 4
B) 3
C) – 1
D) – 2

17. **(EEAR)** No triângulo, o menor valor que x pode assumir é:

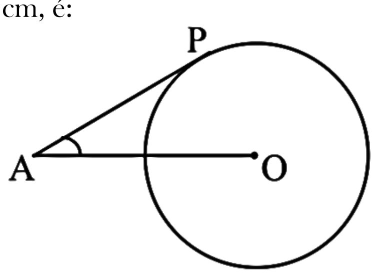


A) 4
B) 3
C) 2
D) 1

18. **(EEAR)** O perímetro da base de um prisma quadrangular regular é 8 cm. Se a altura desse prisma é 3 cm, então sua área total, em cm², é:
A) 32
B) 34
C) 36
D) 38

19. **(EEAR)** Na figura, O é o centro da circunferência e PA é tangente e ela, em P. Se PAO = 30° e

$OA = 12\sqrt{3}$ cm, então a medida do raio da circunferência, em cm, é:



A) $8\sqrt{3}$
B) $8\sqrt{2}$
C) $6\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{2}$

20. **(EEAR)** O número complexo $z=(a-4)+(b-5)i$ será um número imaginário puro se:
A) $a=4$ e $b=5$
B) $a=4$ e $b\neq 5$
C) $a\neq 4$ e $b=5$
D) $a\neq 4$ e $b\neq 5$

21. **(EEAR)** A razão entre o logaritmo de 16 e o de 4, numa mesma base b, sendo $0<b\neq 1$, é:
A) 1/4
B) 1/2
C) 4
D) 2

22. **(EEAR)** Considere a distribuição:

Idades de 90 pacientes de um hospital – Ago/2009

Idades	Número de pacientes
40 ⊢ 50	8
50 ⊢ 60	12
60 ⊢ 70	27
70 ⊢ 80	31
80 ⊢ 90	10
90 ⊢ 100	2

A frequência da 3ª classe dessa distribuição é:
A) 40%
B) 35%
C) 30%
D) 25%

23. **(EEAR)** Seja $M(4,a)$ o ponto médio do segmento de extremidades A(3,1) e B(b,5). Assim, o valor de a + b é:
A) 8
B) 6
C) 4
D) 2

24. **(EEAR)** A função definida por $y=m(x-1)+3-x, m\in\Re$, será crescente, se:
A) $m\geq 0$
B) $m>1$
C) $-1<m<1$
D) $-1<m\leq 0$

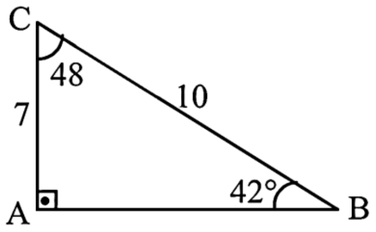
25. **(EEAR)** Formato, tamanho e cor são as características que diferem as etiquetas indicadoras de preço dos produtos de uma loja. Se elas pode ter 2 formatos, 3 tamanhos e 5 cores, o número máximo de preços distintos da loja é:
A) 24
B) 30
C) 32
D) 40

QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2012 (EEAR)

01. **(EEAR)** Considerando que o domínio de uma função é o maior subconjunto de $\Re$ constituído por todos os valores que podem ser atribuídos à variável independente, o domínio da função $h(x)=\sqrt{x+4}$ é:
A) $\Re^*$
B) $\Re-\{4\}$
C) $\{x \in \Re \,/\, x<4\}$
D) $\{x \in \Re \,/\, x \geq -4\}$

02. **(EEAR)** Em um supermercado, Ana pesquisou o preço de cinco marcas de molho de tomate e obteve os seguintes valores, em reais: 2,05; 1,92; 2,16; 1,98 e 2,11. O valor mediano, em reais, é:
A) 2,05
B) 1,92
C) 2,11
D) 1,98

03. **(EEAR)** Considerando as medidas indicadas no triângulo, o valor de sen42° + sen48° é:



A) 1,41
B) 1,67
C) 1,74
D) 1,85

04. **(EEAR)** O perímetro de um triângulo equilátero de altura $h=\sqrt{3}\text{ m}$ é ____ m.
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

05. **(EEAR)** Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em _____ arcos de 30°.
A) 6
B) 5
C) 5
D) 6

06. **(EEAR)** Na matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \cdots & 2 & 1 \\ 5 & \cdots & 3 \end{bmatrix}$ faltam 2 elementos. Se nessa matriz $a_{ij}=2i-j$, a soma dos elementos que faltam é:
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

07. **(EEAR)** No conjunto dos números reais, a equação $\left(3^x\right)^x=9^8$ tem por raízes:
A) um número positivo e um negativo
B) um número negativo e o zero
C) dois números negativos
D) dois números positivos

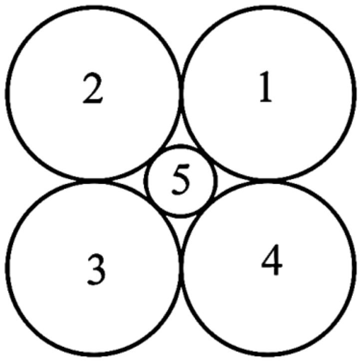
08. **(EEAR)** Um cilindro de altura H = 5 cm e raio da base R = 4 cm, tem volume V = _____ π cm³.
A) 50
B) 60
C) 70
D) 80

09. **(EEAR)** Numa fábrica de lâmpadas, quase todos os dias há lâmpadas que não passam no teste de qualidade. A distribuição de frequência reúne as informações ao longo de 100 dias, quanto ao número total de lâmpadas defeituosas por dia.

Lâmpadas defeituosas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Número de dias (f_i)	2	5	18	25	22	10	7	5	3	2	1	100

A moda dessa distribuição é:
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

10. **(EEAR)** Na figura, as circunferências 1, 2, 3 e 4 são congruentes entre si e cada uma delas tangencia duas das outras. Se a circunferência 5 tem apenas um ponto em comum com cada uma das outras quatro, é correto afirmar que:



A) a circunferência 5 é secante às outras quatro circunferências.
B) a circunferência 5 é tangente exterior às outras quatro circunferências.
C) todas as circunferências são tangentes interiores entre si.
D) todas as circunferências são tangentes exteriores entre si.

11. **(EEAR)** O módulo do número complexo $z = -1 + 3i$ é:
A) 1
B) 2
C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{10}$

12. **(EEAR)** O poliedro regular cujas faces são pentagonais é o:
A) octaedro
B) tetraedro
C) icosaedro
D) dodecaedro

13. **(EEAR)** Num triângulo RST a medida do ângulo interno R é 68° e do ângulo externo S é 105°. Então o ângulo interno T mede:
A) 52°
B) 45°
C) 37°
D) 30°

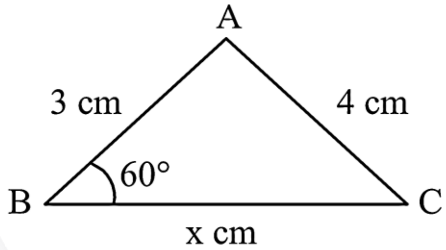
14. **(EEAR)** Um trapézio de bases x + 3 e 4x – 3, tem base média 2x + 2. A menor base mede:
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10

15. **(EEAR)** O conjunto imagem da função $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, contém o elemento:
A) 0
B) 2
C) 1/2
D) − 1

16. **(EEAR)** Seja a equação polinomial $2x^3 + 4x^2 - 2x + 4 = 0$. Se S e P são, respectivamente, a soma e o produto de suas raízes, então:
A) S = P
B) S = 2P
C) S = 2 e $P = -4$
D) $S = -2$ e P = 4

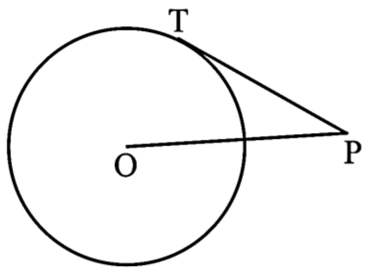
17. **(EEAR)** Uma Escola de Samba carregou, em um de seus carros alegóricos, uma imensa esfera de 5 m de raio. O pintor da Escola disse que gastou 10 litros de tinta para pintar cada 127 m² da superfície da esfera. Considere $\pi = 3{,}14$, o número de litros de tinta que foram gastos para pintar toda a superfície da esfera foi:
A) 16
B) 18
C) 20
D) 22

18. **(EEAR)** Considerando $\sqrt{37} = 6$, o valor de x na figura é:



A) 2,5
B) 3,5
C) 4,5
D) 5,5

19. **(EEAR)** Na figura, PT é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio 6 m. Sabendo que P está situado a 10 m de O, então PT = _____ m.



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8

20. **(EEAR)** Se os pontos $(1,-a)$, $(2,3)$ e $(-1,-3)$ estão alinhados, o valor de a é:
A) – 2
B) – 1
C) 3
D) 4

21. **(EEAR)** Se a sequência $(x, 3x+2, 10x+12)$ é uma PG de termos não nulos, então x^2 é:
A) 1
B) 4
C) 9
D) 16

22. **(EEAR)** Se as retas r e s são perpendiculares, e a equação de s é $2y+x-2=0$, o coeficiente angular da reta r é:
A) – 1
B) 1
C) 2
D) 3

23. **(EEAR)** Dada a função $f:\Re_+^* \to \Re$ definida por $f(x)=5\cdot\log_2 x$, o valor de $f(1)+f(2)$ é:
A) 3
B) 5
C) 6
D) 10

24. **(EEAR)** Dos 10 judocas que participam de uma competição, os 3 melhores subirão em um pódio para receber uma premiação. Lembrando que cada atleta pode ocupar o 1°, 2° ou 3° lugar no pódio, o número das possíveis formas de os atletas comporem o pódio é:
A) 720
B) 680
C) 260
D) 120

25. **(EEAR)** Sejam as sentenças:
I- período $p=\pi$
II- domínio $D=\Re$
III- conjunto imagem $Im=[-1,1]$

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s):
A) I
B) III
C) I e II
D) II e III

QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2013.1 (EEAR)

01. **(EEAR)** As medidas dos ângulos internos de um triângulo formam uma PA. Assim, independente do valor da razão, pode-se afirmar que um desses ângulos mede:
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 90°

02. **(EEAR)** Seja ABCD um trapézio isósceles. A soma das medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ é:
A) 90°
B) 120°
C) 150°
D) 180°

03. **(EEAR)** Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede:
A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 60°

04. **(EEAR)** Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se:
A) 170°
B) 220°
C) 280
D) 320°

05. **(EEAR)** Sejam $\text{sen}x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a:
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

06. **(EEAR)** O valor de x que é solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ é um número:
A) par primo
B) ímpar primo
C) par não primo
D) ímpar não primo

07. **(EEAR)** Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos de AB é:
A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

08. **(EEAR)** A distância do ponto (3,1) à reta cuja equação geral é $2x - 2y + 2 = 0$ é:
A) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$

09. **(EEAR)** Em estatística, uma Amostra sempre é:
A) uma tabela com dados desordenados
B) um subconjunto de uma População
C) uma tabela com dados ordenados
D) o mesmo que População

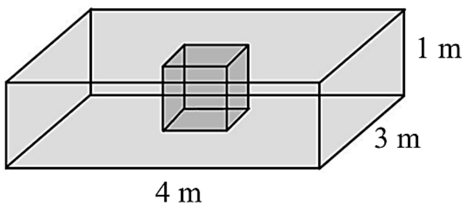
10. **(EEAR)** Seja $f(x) = \frac{(2x-3)(4x+1)}{(x+2)(x-5)}$ uma função. Um valor que NÃO pode estar no domínio de f é:
A) 1
B) 2
C) 3
D) 5

11. **(EEAR)** A menor raiz da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ é ______ e a maior é _______. Completam corretamente a afirmação, na devida ordem, as palavras:
A) par e ímpar
B) par e par
C) ímpar e par
D) ímpar e ímpar

12. **(EEAR)** Para que os pontos $A(2,0)$, $B(a,1)$ e $C(a+1,2)$ estejam alinhados, é necessário que o valor de a seja:
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2

13. **(EEAR)** A razão r entre o apótema e o lado de um hexágono regular é igual a:
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{3}$

14. **(EEAR)** Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo retângulo e tem, no seu centro, um cubo de concreto de 1 m de aresta, como mostra a figura. O volume de água necessário para encher a piscina, em m³, é:

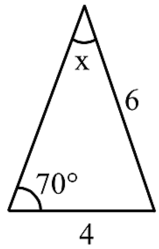


A) 12
B) 11
C) 10
D) 9

15. **(EEAR)** Sendo $tgx = \frac{1}{t}$ e $senx = u$, uma maneira de expressar o valor de cosx é:
A) t
B) u/t
C) u.t
D) u + t

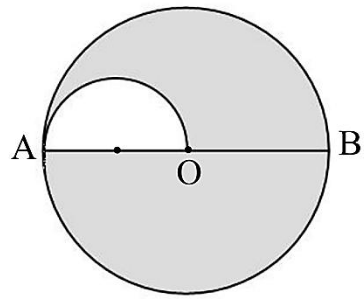
16. **(EEAR)** Para que exista a função $f(x) = \log(x - m)$, é necessário que x seja:
A) maior que m
B) menor que m
C) maior ou igual a m
D) menor ou igual a m

17. **(EEAR)** Considere as medias da figura e que $sen70° = 0,9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se $senx =$ ______ .



A) 0,4
B) 0,5
C) 0,6
D) 0,7

18. **(EEAR)** Na figura, AB = 8 cm é o diâmetro do círculo de centro O e AO é o diâmetro do semicírculo. Assim, a área sombreada dessa figura é ____ πcm^2.



A) 14
B) 13
C) 11
D) 10

19. **(EEAR)** Seja uma função real definida por $f(x) = (x+1) \cdot m^{x-1}$. Se f(2) = 6, então m é igual a:
A) 4
B) 3
C) 2
D) 1

20. **(EEAR)** Sejam ρ_1 e ρ_2, respectivamente, os módulos dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 - 2i$. Assim, $\rho_1 + \rho_2$ é igual a:
A) 5
B) $\sqrt{5}$

C) $2\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{5}$

21. **(EEAR)** Se $z = 3 + 2i$ é um número complexo, então z^2 é igual a:
A) $5 + 12i$
B) $9 + 12i$
C) $13 + 4i$
D) $9 + 4i$

22. **(EEAR)** Um cilindro equilátero cuja geratriz mede 8 cm, tem área lateral igual a _____ $\pi\ cm^2$.
A) 128
B) 64
C) 32
D) 16

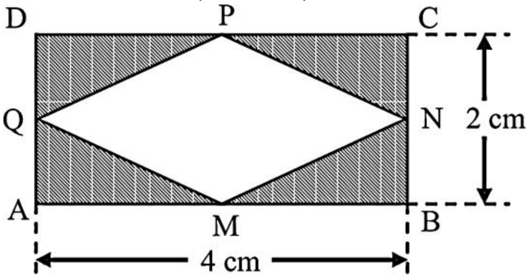
23. **(EEAR)** Seja uma pirâmide quadrangular regular com todas as arestas medindo 2 cm. A altura dessa pirâmide, em cm, é:
A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$

24. **(EEAR)** Foram vendidos 100 ingressos para um show. Desses ingressos, 70 foram vendidos a R$ 50,00 cada um, e os demais, por serem da área vip, foram vendidos a R$ 100,00 cada um. Considerando todos os ingressos vendidos, o preço médio do ingresso, em reais, foi:
A) 68
B) 65
C) 60
D) 54

25. **(EEAR)** Para elaborar uma prova de Inglês, um professor utilizará 6 questões de vocabulário e 4 de gramática. O número de maneiras que ele pode ordenar aleatoriamente essas questões é dado por ____.
A) (6 + 4)!
B) (6 – 4)!
C) 6! . 4!
D) 6!/4!

QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA – 2013.2 (EEAR)

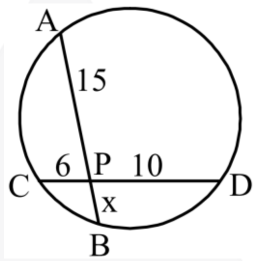
01. **(EEAR)** Considere o retângulo ABCD, e os pontos médios dos seus lados M, N, P e Q. Unindo esses pontos médios, conforme a figura, pode-se concluir que a área hachurada, em cm², é:



A) 8
B) 4
C) $4\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$

02. **(EEAR)** Se a é um ângulo do 1° quadrante, tal que $\text{sen}\,a > \frac{\sqrt{3}}{2}$, a única alternativa que apresenta um possível valor para a é:
A) 15°
B) 30°
C) 50°
D) 65°

03. **(EEAR)** Utilizando a Potência do Ponto P em relação à circunferência dada, calcula-se que o valor de x é:



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

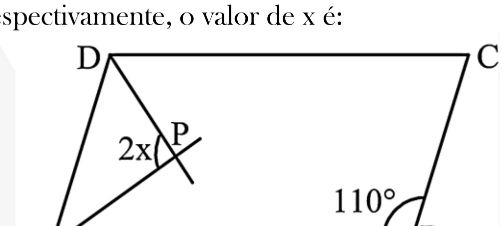
04. **(EEAR)** Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=|2x^2-3|$. O valor de $1+f(-1)$ é:
A) – 1
B) 0
C) 1
D) 2

05. **(EEAR)** Se $\log x + \log y = k$, então $\log x^5 + \log y^5$ é:
A) 10k
B) k^{10}
C) 5k
D) k^5

06. **(EEAR)** Se A é o número de diagonais de um icoságono e B é o número de diagonais de um decágono, então A – B é igual a:
A) 85
B) 135
C) 165
D) 175

07. **(EEAR)** Seja x um arco do 3° quadrante tal que $\text{sen}\,x = -\frac{1}{3}$. Então o valor de $\cos x$ é:
A) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
B) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

08. **(EEAR)** Seja o paralelogramo ABCD. Sabendo que AP e DP são bissetrizes dos ângulos internos A e D, respectivamente, o valor de x é:



A) 55°
B) 45°
C) 30°
D) 15°

09. **(EEAR)** Em um teste de Estatística, aplicado aos 50 alunos de uma determinada turma, foi obtido como média aritmética das notas o valor 1,8. Sabendo-se

que, nesse teste, cada aluno teve como nota o valor 1,0 ou 2,0, então a quantidade de alunos que obtiveram nota igual a 2,0 foi:
A) 30
B) 35
C) 40
D) 45

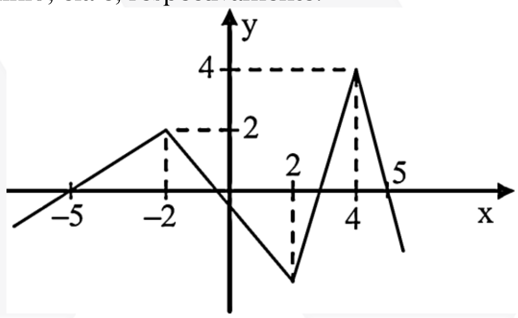
10. **(EEAR)** Uma reta paralela à reta $r: y = 2x + 3$ é a reta de equação:
A) 3y = 2x + 1
B) 2y = 2x – 4
C) 2y = 4x – 1
D) y = x + 3

11. **(EEAR)** Seja z' o conjugado de um número complexo z. Sabendo que z = a + bi e que 2z + z' = 9 + 2i, o valor de a + b é:
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2

12. **(EEAR)** Seja um triângulo ABC, tal que A(1,3), B(9,9), AC = 8 e BC = 5. Sendo assim, o perímetro desse triângulo é:
A) 19
B) 20
C) 23
D) 26

13. **(EEAR)** Dentre 8 candidatos, 5 devem ser selecionados para comporem uma comissão de formatura. O número de formas distintas de se compor essa comissão é:
A) 56
B) 48
C) 46
D) 38

14. **(EEAR)** Analisando o gráfico da função f da figura, percebe-se que, nos $[-5,-2]$ e $[-1,2]$ de seu domínio, ela é, respectivamente:



A) crescente e crescente
B) crescente e decrescente
C) decrescente e crescente
D) decrescente e decrescente

15. **(EEAR)** Se x é um arco do 1° quadrante, com $\operatorname{sen}x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \dfrac{\operatorname{sen}x \cdot \cos x}{\operatorname{tg}x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:
A) a
B) b
C) – a
D) – b

16. **(EEAR)** Na PA decrescente (18, 15, 12, 9, ...), o termo igual a -51 ocupa a posição:
A) 30
B) 26
C) 24
D) 18

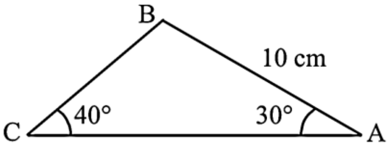
17. **(EEAR)** O número real x, tal que $\begin{vmatrix} x-1 & x+2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 5$, é:
A) – 2
B) – 1
C) 0
D) 1

18. **(EEAR)** Para que a função seja invertível, é necessário que ela seja:
A) sobrejetora e positiva
B) bijetora e positiva
C) apenas bijetora
D) apenas injetora

19. **(EEAR)** O resto da divisão de $4x^3 + 2x^2 + x - 1$ por $x^2 - 3$ é igual a:
A) 13x + 5
B) 11x – 3
C) 2x + 5
D) 6x – 3

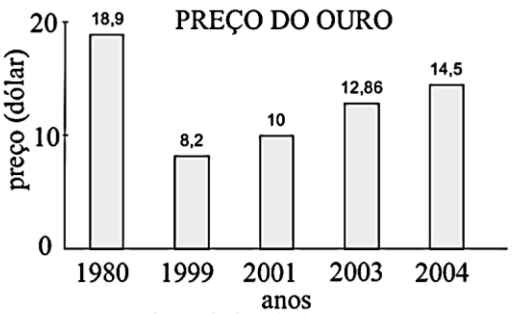
20. **(EEAR)** Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado 3 cm, e com altura o dobro da medida de sua aresta da base. Então, a área lateral desse prisma, em cm², é:
A) 36
B) 48
C) 54
D) 60

21. **(EEAR)** Considerando $\text{sen}40° = 0,6$, o lado BC do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente:



A) 6,11
B) 7,11
C) 8,33
D) 9,33

22. **(EEAR)** Uma das possíveis análises do gráfico permite concluir, corretamente, que houve desvalorização do ouro ao comparar os dados relativos aos anos de:



Fonte: Revista Veja de 08/12/04

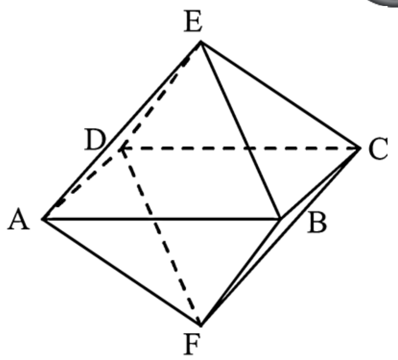
A) 1980 e 1999
B) 1999 e 2001
C) 2001 e 2003
D) 2003 e 2004

23. **(EEAR)** O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(-1,3)$ e $B(2,-4)$ é:

A) – 1/2
B) – 7/3
C) 3/2
D) 4/3

24. **(EEAR)** Considere $\sqrt{3} = 1,73$ e um cubo de aresta a = 10 cm. A medida da diagonal desse cubo, em cm, é um número entre:
A) 18 e 20
B) 16 e 18
C) 14 e 16
D) 12 e 14

25. **(EEAR)** A figura mostra duas pirâmides regulares iguais, unidas pela base ABCD, formando um octaedro. Se ABCD tem 4 cm de lado e EF = 6 cm, o volume do sólido da figura, em cm^3, é:



A) 26
B) 28
C) 32
D) 34

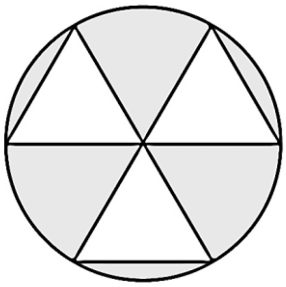
QUESTÕES DO PROCESSO SELETIVO DA ESCOLA ESPECIALISTA DE SARGENTO DA AERONÁUTICA - 2014 (EEAR)

01. **(EEAR)** Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x-3$. Se f^{-1} é a função inversa de f, então $f^{-1}(5)$ é:
A) 17
B) 1/17
C) 2
D) 1/2

02. **(EEAR)** Sejam os pontos $A(x,1)$, $M(1,2)$ e $B(3,y)$. Se M é ponto médio de AB, então xy é igual a:
A) – 3
B) – 1
C) 1
D) 3

03. **(EEAR)** O ponto de interseção dos gráficos das funções $f(x)=x+2$ e $g(x)=2x-1$ pertence ao ____ quadrante.
A) 1°
B) 2°
C) 3°
D) 4°

04. **(EEAR)** A figura é formada por um círculo de raio R = 4 cm e três triângulos equiláteros de lados congruentes ao raio do círculo. Os triângulos têm apenas um ponto de interseção entre si e dois vértices na circunferência. A área hachurada, em cm², é:



A) $6\pi-12\sqrt{3}$
B) $16\pi-6\sqrt{3}$
C) $12\pi-8\sqrt{3}$
D) $16\pi-12\sqrt{3}$

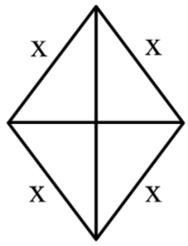
05. **(EEAR)** Um filtro com a forma de cone circular reto, tem volume de 200 cm³ e raio da base de 5 cm. Usando $\pi=3$, pode-se determinar que sua altura, em cm, é igual a:
A) 10
B) 9
C) 8
D) 6

06. **(EEAR)** Se $f(x)=\log x$ e $a\cdot b=1$, então $f(a)+f(b)$ é igual a:
A) 0
B) 1
C) 10
D) 100

07. **(EEAR)** Considerando $\pi=3$, utilizando $108\,cm^3$ de chumbo pode-se construir uma esfera de ____ cm de diâmetro.
A) 7
B) 6
C) 5
D) 4

08. **(EEAR)** Em uma circunferência de raio r = 6 cm, a área de um setor circular de 30° é ____ $\pi\ cm^2$.
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

09. **(EEAR)** A área de um losango é 24 cm². Se uma das diagonais desse losango mede 6 cm, o lado dele, em cm, mede:



A) 4
B) 5
C) 6
D) 7

10. **(EEAR)** Se x é um arco do terceiro quadrante tal que $tgx=\dfrac{2}{3}$, o valor de $senx$ é:

A) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$
B) $\dfrac{-\sqrt{13}}{13}$
C) $\dfrac{-2\sqrt{13}}{13}$
D) $\dfrac{-3\sqrt{13}}{13}$

11. **(EEAR)** Sejam um hexágono regular e um triângulo equilátero, ambos de lado L. A razão entre os apótemas do hexágono e do triângulo é:
A) 4
B) 3
C) 2
D) 1

12. **(EEAR)** Se $\text{sen}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \le x < 2\pi$, então a soma dos valores possíveis para x é:
A) $\dfrac{\pi}{2}$
B) π
C) $\dfrac{3\pi}{2}$
D) 2π

13. **(EEAR)** Um prisma hexagonal regular tem aresta da base medindo L e altura igual a 3L. A área lateral desse prisma é ____ L^2.
A) 9
B) 12
C) 18
D) 24

14. **(EEAR)** Em uma PG de razão 6, o quarto termo é 48. Assim, o primeiro termo é:
A) 2
B) 3
C) 1/6
D) 2/9

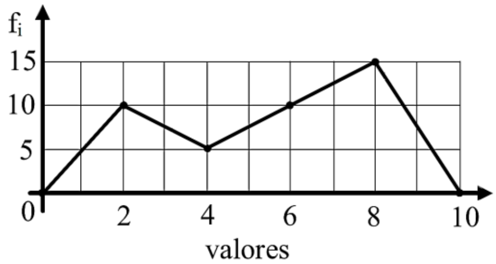
15. **(EEAR)** Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. A matriz $X = \dfrac{1}{2}A$ tem como soma de seus elementos o valor:
A) 7
B) 5
C) 4
D) 1

16. **(EEAR)** a distribuição apresenta os resultados de um levantamento feito com os alunos e funcionários de uma determinada escola, sobre o tempo diário gasto com a leitura de jornais. Nessa distribuição, o percentual de pessoas cujo tempo de leitura é maior ou igual a 20 min é:

Tempo de leitura (min)	Número de pessoas
0 ⊢ 5	24
5 ⊢ 10	61
10 ⊢ 15	112
15 ⊢ 20	97
20 ⊢ 25	36
25 ⊢ 30	20
TOTAL	350

A) 12%
B) 16%
C) 20%
D) 25%

17. **(EEAR)** Sejam f_1 e f_2 as frequências da 1° e da 2° classes da distribuição representada no polígono de frequências. Assim, $f_1 + f_2$ é igual a:



A) 15
B) 20
C) 25
D) 30

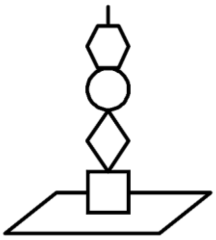
18. **(EEAR)** Dados $\text{sen}a = x$, $\cos a = y$, $\text{sen}b = z$ e $\cos b = w$, então $\text{sen}(a+b)$ é igual a:
A) xw + yz
B) xz + yw

C) xy – wz
D) xw – yz

19. **(EEAR)** Se a distância entre $A\left(2\sqrt{3},y\right)$ e $B\left(4\sqrt{3},1\right)$ é 4, o valor de y pode ser:
A) 1
B)_ 0
C) – 1
D) – 2

20. **(EEAR)** a solução da inequação $2\left(x+2\right)+5x\leq 4\left(x+3\right)$ é um intervalo real. Pode-se afirmar que pertence a esse intervalo o número:
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

21. **(EEAR)** Um determinado brinquedo possui uma haste onde devem ser colocadas 4 peças de formatos diferentes. O número de maneiras diferentes de se montar esse brinquedo é:



A) 4
B) 12
C) 24
D) 36

22. **(EEAR)** Se i é a unidade imaginária, pode-se afirmar que i^7 é igual a:
A) i
B) i^2
C) i^3
D) i^4

23. **(EEAR)** A equação $\left(x^2+3\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right)=0$ tem _____ raízes reais.
A) 3
B) 2
C) 1
D) 0

24. **(EEAR)** Se $C\left(a,b\right)$ e r são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência de equação $\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=16$, o valor de a + b + r é:
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7