Inequações do Primeiro e do Segundo Grau

1. Inequações do Primeiro Grau

Uma inequação é uma sentença matemática aberta, expressa por uma desigualdade. Os símbolos de desigualdades são:

$a \neq b$ (a é diferente de b)
$a > b$ (a é maior que b)
$a < b$ (a é menor que b)
$a \geq b$ (a é maior ou igual a b)
$a \leq b$ (a é menor ou igual a b)

Inequação do primeiro grau é uma desigualdade em que a incógnita é de primeiro grau. Podem ser escritas nas seguintes formas:

$ax + b < 0$ $\quad$ $ax + b > 0$
$ax + b \leq 0$ $\quad$ $ax + b \geq 0$

Com a e b pertencentes aos reais e $a \neq 0$.

1.1. Resolução de inequações do primeiro grau

Resolver uma inequação do primeiro grau significa encontrar todos os números que tornem a inequação verdadeira. O processo é análogo ao que usamos na resolução de equações do primeiro grau, com a atenção de que <u>sempre que multiplicarmos ou dividirmos a inequação por um número negativo, invertemos o sinal da desigualdade</u>.

Veja o exemplo:
a) Resolver a inequação do primeiro grau $-5x + 6 \leq 21$.
$-5x + 6 \leq 21 \rightarrow -5x \leq 21 - 6 \rightarrow -5x \leq 15 \rightarrow x \geq -3$.

2. Inequações do Segundo Grau

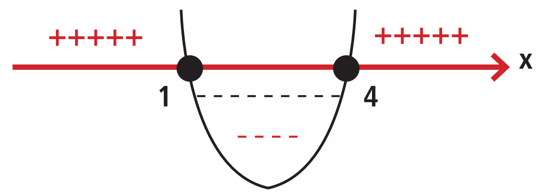
As inequações do segundo grau na variável x podem ser escritas nas seguintes formas:
$ax^2 + bx + c < 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c > 0$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c \geq 0$

Com a, b e c pertencentes aos reais e $a \neq 0$.

2.1. Resolução de inequações do segundo grau

Para resolver uma inequação do segundo grau, seguimos os passos:
1º passo: Estudar do sinal da função $y = ax^2 + bx + c$.
2º passo: Determinar os valores de x que atendam à desigualdade da inequação.

Veja o exemplo:
a) Resolver a inequação: $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.
1º passo: As raízes da equação são $x_1 = 4$ e $x_2 = 1$. Traçando um esboço do gráfico e fazendo o estudo do sinal, teremos:



2º passo: Como o sinal de desigualdade é $\geq$, ou seja, maior ou igual, queremos os valores de x que tornam a função positiva ou zero.
Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$ (lê-se "x pertence aos reais tal que x é menor ou igual a 1 ou x é maior ou igual a 4).

Exercícios de sala

1. **(G1 - IFMT 2020)** Após passar por um procedimento cirúrgico, Jacó foi aconselhado pela junta médica a fazer, durante os dois primeiros meses, uma dieta alimentar que lhe garanta uma nutrição mínima diária e sem sobrecarregar seu organismo, nesta fase pós cirúrgica. Jacó deve ingerir 9 miligramas de vitamina C e 50 microgramas de vitamina B, alimentando-se exclusivamente dos alimentos A e D. Cada pacote do alimento A fornece 2 miligramas de vitamina C e 4 microgramas de vitamina B. Cada pacote do alimento D fornece 7 miligramas de vitamina C e 10 microgramas de vitamina B. Consumindo X pacotes do alimento A e Y pacotes do alimento D, o paciente terá certeza de estar cumprindo a dieta recomendada corretamente se:
a) $2x + 7y \leq 9$ e $4x + 10y \leq 50$
b) $2x + 7y \geq 9$ e $4x + 10y \geq 50$
c) $2x + 4y \geq 9$ e $7x + 10y \geq 50$
d) $2x + 4y \leq 9$ e $7x + 10y \leq 50$
e) $2x + 10y \geq 9$ e $7x + 4y \geq 50$

2. **(PUCRJ 2021)** Quantas soluções inteiras tem a desigualdade $x^2 - 30x + 220 < 0$?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 5

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

"A área de um retângulo pode ser calculada pelo produto da medida da sua largura pela medida do seu comprimento."

3. **(G1 - CMRJ 2020)** A diferença entre as medidas do comprimento c e da largura l de um retângulo, nessa ordem, é igual a 3 m, e a área desse retângulo é menor que 78,75 m^2. Então, a quantidade de valores inteiros de c, em metros, que satisfazem essas condições é

a) 11
b) 10
c) 9
d) 8
e) 7

4. **(G1 - CFTMG)** O número de soluções inteiras pertencentes ao conjunto solução da inequação $\frac{3x-9}{2} \cdot \frac{(x+6)}{3} < 0$ em $\mathbb{R}$ é

a) 4.
b) 6.
c) 8.
d) 10.

5. **(ALBERT EINSTEIN - MEDICINA 2018 - ADAPTADA)** Para arrecadar recursos para a festa de formatura, os formandos de uma escola decidiram vender convites para um espetáculo. Cada formando recebeu para vender um número de convites que é igual ao número total de formandos mais 3. Se todos os formandos conseguirem vender todos os convites a 5 reais, o dinheiro arrecadado será menor do que R$ 22.770,00. Nessas condições, o maior número de formandos que essa escola pode ter é múltiplo de

a) 12.
b) 13.
c) 14.
d) 15.
e) 16.

Estudo Individualizado (E.I.)

1. Resolva as inequações abaixo.

a) $2x + 1 \leq -1$
b) $-3x \leq x + 2$
c) $x > 5x - 16$
d) $2(x + 1) + 3x > 5 - 7x$
e) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{2} \geq \frac{4x}{5} - 1$
f) $\frac{7x}{3} - 7 \leq x + \frac{2}{3}$
g) $\frac{3x}{4} - 9 \leq \frac{2x}{7} + 4$

2. Resolva as inequações abaixo.

a) $x_2 - 3x \geq 0$
b) $-2x^2 - 10x \leq 10$
c) $x^2 - 5x + 6 < 0$

3. Qual o número de soluções inteiras da inequação $\frac{3x-9}{2} - \frac{(x+6)}{3} < 0$?

4. Qual o produto entre os números inteiros negativos que são soluções da inequação $x^2 - 2x - 15 \leq 0$?

5. Quantas soluções inteiras tem a inequação $x^2 - 10x + 21 \leq 0$?

6. Qual é a menor solução inteira da inequação $4x - 10 > 2$?

7. Quantas são as soluções inteiras de x que satisfazem a inequação $-2 \leq 2x + 5 \leq 10$?

8. Uma empresa que trabalha com cadernos tem gastos fixos de R$400,00 mais o custo de R$3,00 por caderno produzido. Sabendo que cada unidade será vendida a R$11,00, quantos cadernos deverão ser produzidos para que o valor arrecadado supere os gastos?

a) 50 cadernos
b) 70 cadernos
c) 90 cadernos
d) A arrecadação nunca será superior
e) Os gastos nunca serão superiores

9. O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,90, determine a distância máxima que se pode percorrer com R$20,00.

10. Uma loja de utensílios domésticos oferece um conjunto de talheres por um preço que depende da quantidade comprada. Estas são as opções:

Opção A: R$ 94,80 mais R$ 2,90 a unidade avulsa.
Opção B: R$ 113,40 mais R$ 2,75 a unidade avulsa.

A partir de quantos talheres avulsos comprados a opção A é menos vantajosa que a opção B.

a) 112
b) 84
c) 124
d) 135
e) 142

GABARITO (E.I.)

1.

a) $2x + 1 \leq -1$

$2x \leq -2$

$x \leq -\dfrac{2}{2}$

$x \leq -1$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}$

b) $-3x \leq x + 2$

$-4x \leq 2$

$x \geq -\dfrac{2}{4}$

$x \geq -\dfrac{1}{2}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -\dfrac{1}{2}\}$

c) $x > 5x - 16$

$-4 > -16$

$x < \dfrac{-16}{-4}$

$x < 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$

d) $2(x + 1) + 3x > 5 - 7x$

$2x + 2 + 3x > 5 - 7x$

$12x > 3$

$x > \dfrac{3}{12}$

$x > \dfrac{1}{4}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x > \dfrac{1}{4}\}$

e) $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{4x}{5} - 1$

$\dfrac{4x - 5}{10} \geq \dfrac{4x - 5}{5}$

$20x - 25 \geq 40x - 50$

$-20x \geq -25$

$x \leq \dfrac{-25}{-20}$

$x \leq 1{,}25$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1{,}25\}$

f) $\dfrac{7x}{3} - 7 \leq x + \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{7x - 21}{3} \leq \dfrac{3x - 2}{3}$

$7x - 21 \leq 3x + 2$

$4x \leq 23$

$x \leq \dfrac{23}{4}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \dfrac{23}{4}\}$

g) $\dfrac{3x}{4} - 9 \leq \dfrac{2x}{7} + 4$

$\dfrac{3x - 36}{4} \leq \dfrac{2x + 28}{7}$

$21x - 252 \leq 8x + 112$

$13x \leq 364$

$x \leq \dfrac{364}{13}$

$x \leq 28$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 28\}$

2.

a) $x^2 - 3x \geq 0$

Raízes de $x^2 - 3x = 0$: 0 e 3

Gráfico: concavidade para cima

$x^2 - 3x \geq 0 \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

b) $-2x^2 - 10x \leq 10$

Raízes de: $-2x^2 - 10x - 10 = 0$: $\dfrac{-5 - \sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{-5 + \sqrt{5}}{2}$

Gráfico: concavidade para baixo

$-2x^2 - 10x \leq 10 \rightarrow -2x^2 - 10x - 10 \leq 0 \rightarrow$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \dfrac{-5 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x \geq \dfrac{-5 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

c) $x^2 - 5x + 6 < 0$

Raízes de: $x^2 - 5x + 6 = 0$: 2 e 3

Gráfico: concavidade para cima

$x^2 - 5x + 6 < 0 \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

3.

$\dfrac{(3x - 9)}{2} - \dfrac{(x + 6)}{3} < 0$

$\dfrac{3(3x - 9) - 2(x + 6)}{6} < 0$

$\dfrac{9x - 27 - 2x - 12}{6} < 0$

$\dfrac{7x - 39}{6} < 0$

$7x - 39 < 0$
$7x < 39$
$x < \frac{39}{7}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{39}{7}\}$

4.
$x^2 - 2x - 15 \leq 0$
Raízes de : $x^2 - 2x - 15 = 0$: -3 e 5
Gráfico: concavidade para cima
$x^2 - 2x - 15 \leq 0 \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$
Portanto, são soluções inteiras negativas da inequação $-3, -2, -1$, cujo produto é igual a -6.

5.
$x^2 - 10x + 21 \leq 0$
Raízes de x2 – 10x + 21 = 0: 3 e 7
Gráfico: concavidade para cima

Portanto, a inequação possui 5 soluções inteiras: 3, 4, 5, 6 e 7.

6.
$4x - 10 > 2$
$4x > 12$
$x > 3$

A menor solução inteira da inequação é 4.

7.
$-2 \leq 2x + 5 \leq 10$
$-2 - 5 \leq 2x \leq 10 - 5$
$-7 \leq 2x \leq 5$
$-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$-3{,}5 \leq x \leq 2{,}5$
Portanto, a inequação possui 6 soluções inteiras: -3, -2, -1, 0, 1, 2.

8. A

9.
Seja x a distância máxima, em quilômetros.
$3{,}44 + 0{,}90x \leq 20{,}00$
$0{,}90x \leq 20{,}00 - 3{,}44$
$0{,}90x \leq 16{,}56$
$x \leq \frac{16{,}56}{0{,}90}$

$x \leq 18{,}4$ km

Portanto, a distância máxima que poderá percorrer de táxi é de 18,4 km.

10. C

ANOTAÇÕES