Bernoulli
Sistema de Ensino

Bernoulli Resolve

6V | Volume 3 | Matemática

SUMÁRIO

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 09

Função Afim

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: Sendo a função da forma f(x) = ax + b:

$$\begin{cases} f(3) = 6 = 3a + b \quad (I) \\ f(4) = 8 = 4a + b \quad (II) \end{cases}$$

$(II) - (I): a = 2 \Rightarrow b = 0$

$f(x) = 2x$

$f(10) = 2 \,.\, 10 = 20$

Questão 02 – Letra E

Comentário: Sendo y(x) = ax + b a função expressa no gráfico, temos:

$f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$f(4) = 2 \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Logo, a função é dada por $y(x) = \frac{x}{2}$.

Como o comerciante pretende comprar 2 350 unidades, temos que o preço a ser pago é de:

$$y(2\,350) = \frac{2\,350}{2} = \text{R\$ } 1\,175{,}00$$

Questão 03 – Letra C

Comentário: Substituindo os valores dados em **R**, temos:

$R(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1 \quad (I)$

$R(2) = 1 \Rightarrow 2a + b = 1 \quad (II)$

Fazendo II – I, temos:

$a = 2 \Rightarrow b = -3$

Portanto, R(t) = 2x – 3.

Dessa forma, R(4) = 2 . 4 – 3 = 8 – 3 = 5 = R$ 5 000,00.

Questão 04 – Letra B

Comentário: A temperatura média anual foi considerada uma função linear do tempo. Assim, a variação anual da temperatura em todo o domínio é constante e vale:

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13{,}8 - 13{,}35}{2010 - 1995} = 0{,}03$$

Essa variação também valerá de 2010 a 2012. Assim, a temperatura média **T** de 2012 será:

$$0{,}03 = \frac{T - 13{,}8}{2012 - 2010} \Rightarrow T = 13{,}86\ °C.$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: O número de cricrilados a 15 °C é igual a N = 7 . 15 – 30 = 75. Como esses sons foram reduzidos pela metade, o número inicial de cricrilados era de 150, que acontecem em função de uma temperatura **T** tal que $150 = 7T - 30 \Rightarrow T = \frac{180}{7} \cong 26\ °C$.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Sendo **x** o valor vendido, e S(x) o salário desse vendedor, temos:

S(x) = R$ 750,00 + 2,5%.x ⇒ S(x) = R$ 750,00 + 0,025x

Questão 07 – Letra B

Comentário: Dado que f(h) = 17.h, logo, para f(h) = 2 975 kcal, temos h = 175 cm, altura de Paulo.

Como Carla é 5 cm menor que Paulo, logo, ela tem 170 cm.

Assim, considerando a faixa etária, temos que o consumo de caloria de Carla será dado pela função g(h) = 15,3.h, ou seja, g(170) = 2 601 kcal.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Sejam **f** e **g** as funções que representam, respectivamente, a pista de asfalto e a pista de concreto, temos:

$f(x) = ax + 10 \Rightarrow f(6) = 6a + 10 = 16 \Rightarrow a = 1$

Logo, f(x) = x + 10.

$$g(x) = mx + 35 \Rightarrow g(6) = 6m + 35 = 25 \Rightarrow 6m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

Logo, $g(x) = -\frac{5}{3}x + 35$.

Dessa forma, temos que encontrar o valor de **x** tal que f(x) = g(x), ou seja:

$x + 10 = -\frac{5}{3}x + 35 \Rightarrow 3x + 30 = -5x + 105 \Rightarrow$

$8x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{8} = 9{,}375$ anos.

Portanto, as duas pistas novas atingirão pela primeira vez a mesma porcentagem de reflexão de raios solares após 9,375 anos.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Sendo A(k) = 1,6k + 50 a função que representa o valor pago pela locação no plano A em função do deslocamento **k** e B(k) = 1,2k + 64 a função que representa o valor pago pela locação no plano B em função do deslocamento **k**, temos:

$A(k) = B(k) \Rightarrow$

$1{,}6k + 50 = 1{,}2k + 64 \Rightarrow$

$0{,}4k = 14 \Rightarrow$

k = 35 Km

Logo, **k** é um número racional entre 31 e 36,5.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Seja Q(t) = at + b, temos:

$Q(0) = 49 \Rightarrow 49 = a.0 + b \Rightarrow b = 49$

$Q(10) = 44 \Rightarrow 10a + 49 = 44 \Rightarrow 10a = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Portanto, temos $Q(t) = -\frac{1}{2}t + 49$.

MATEMÁTICA

Questão 03 – Letra E

Comentário: Sendo y = ax + b a expressão dessa função no intervalo $0 \le x \le 2$, temos:

$0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$

$k = 2a + 0 \Rightarrow$

$a = \dfrac{k}{2}$

Dessa forma, temos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$$

Questão 04 – Letra B

Comentário: De forma geral, o lucro L(x) é dado por L(x) = R(x) – C(x), em que R(x) e C(x) expressam, respectivamente, a receita e o custo para um número **x** de unidades produzidas. Encontrando as expressões de R(x) e C(x):

R(x)= ax + b $\Rightarrow$ b = 0 (interseção com o eixo y) $\Rightarrow$

R(x)= ax $\Rightarrow$ R(1 000) = 15 000 = 1 000a $\Rightarrow$ a = 15 $\Rightarrow$

R(x) = 15x

C(x)= ax + b $\Rightarrow$ b = 5 000 (interseção com o eixo y) $\Rightarrow$

C(x)= ax + 5 000 $\Rightarrow$ C(1 000) = 15 000 = 1 000a + 5 000 $\Rightarrow$ a = 10 $\Rightarrow$ C(x) = 10x + 5 000

A expressão de L(x) pode ser dada por:

L(x) = R(x) – C(x) = 15x – (10x + 5 000) = 5x – 5 000 $\Rightarrow$ L(1 350) = 5 . 1 350 – 5 000 = 1 750.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Primeiro, vamos calcular o custo para a produção de 1 kg desse produto:

C(1) = 900 . 1 + 50 = 950

Agora, seja R(x) = ax a função que descreve a receita, temos:

R(20) = 20 000 $\Rightarrow$ 20a = 20 000 $\Rightarrow$ a = 1 000

Portanto, R(x) = 1 000a

Dessa forma, a receita referente a 1 kg desse produto é dada por R(1) = 1 000 . 1 = 1000.

O lucro será dado por R(1) – C(1) = 1 000 – 950 = 50.

Agora, para encontrar a porcentagem que esse lucro representa, temos: $\dfrac{50}{1\,000} = \dfrac{5}{100} = 5\%$.

Questão 06 – Letra D

Comentário: O custo total C(x) em função da quantidade **x** de panelas produzidas é dado por:

C(x) = 9 800 + 45x

A receita R(x) é dada por R(x) = 65x

O lucro L(x) é dado por R(x) – C(x) =

65x – 9 800 – 45x = 20x – 9 800

Dessa forma, queremos ter:

L(x) = 0,2R(x) $\Rightarrow$ 20x – 9 800 = 13x $\Rightarrow$ 7x = 9 800 $\Rightarrow$ x = 140

Logo, a soma dos algarismos de **x** é dada por 1 + 4 + 0 = 5.

Questão 07 – Letra E

Comentário: O custo total é igual à soma dos custos total e variável. Assim, o custo total em função do número **x** de paletós produzidos será dado por:

C(x) = 10 000 + 100x, com $0 \le x \le 500$. O custo médio será $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{10\,000 + 100x}{x} = \dfrac{10\,000}{x} + 100$. Assim, C_m será mínimo para **x** máximo, ou seja, x = 500.

Logo, o custo médio mínimo será $C_m = \dfrac{10\,000}{500} + 100 = \text{R\$ } 120{,}00$.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Como ele realizou 10 corridas, a soma **b** de todas as taxas fixas recebidas é igual a 10 . R$ 5,00 = R$ 50,00.

Dessa forma, R(x) = 2.x + 50, como no caso em questão a receita total foi de R$ 410,00, temos:

410 = 2x + 50 $\Rightarrow$ 2x = 360 $\Rightarrow$ x = 180

Como foram feitas 10 corridas, e o total de quilômetros percorridos foi de 180, temos que a média de quilômetros rodados **M** é dada por: $M = \dfrac{180}{10} = 18$

Questão 09 – Letra C

Comentário: O consumo de combustível é de $\dfrac{40}{100} = 0{,}4\,\dfrac{L}{km}$, e o custo é de $0{,}4\dfrac{\cancel{L}}{km}.\dfrac{4 \text{ reais}}{\cancel{L}} = 1{,}6\,\dfrac{\text{real}}{km}$.

Em vista disso, o gasto em função da distância **x** percorrida é dado por g(x) = 1,6.x + 1 150, e o lucro é dado por L(x) = 2,00.x.

Para o gasto não superar o lucro, temos:

g(x) ≤ L(x) $\Rightarrow$ 1,6x + 1 150 ≤ 2x $\Rightarrow$ 2 875 ≤ x

Portanto, o ônibus terá de percorrer, no mínimo, 2 875 km para que os gastos não superem o lucro.

Questão 10

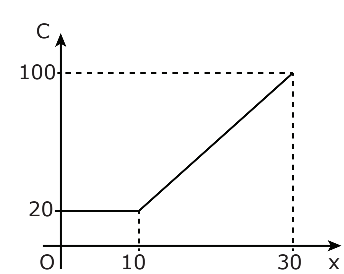
Comentário:

A) Seja **C** a função procurada, temos:

$$C(x) = \begin{cases} 20, \text{ se } x \le 10 \\ 20 + 4(x - 10), \text{ se } x > 10 \end{cases}$$

$C(30) = 20 + 80 = 100$

Dessa forma, temos o seguinte gráfico:



B) Para o consumo de 4 m^3, o valor pago será de 20 reais, logo, o preço efetivamente pago é de 5 reais. Já para um consumo de 25 m^3, o preço total será dado por 20 + 15 . 4 = 80, logo o valor efetivamente pago será de 3,20 reais.

Questão 11 – Letra D

Comentário: Vamos analisar cada uma das afirmativas:

A) Incorreta, pois, se o consumo for nulo, o valor pago será R$ 4,70.

B) Incorreta, pois, para consumos até 10 m^3, paga-se o valor de R$ 4,70. Como 5 m^3 encontra-se nesse intervalo, o valor pago também será R$ 4,70.

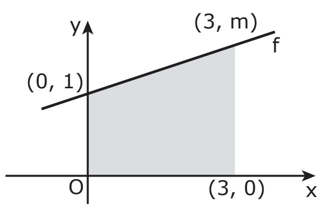
C) Incorreta, pois R$ 11,70 não é igual ao dobro de R$ 4,70.

D) Correta. Observe que, ao aumentarmos o consumo de 25 m^3 para 30 m^3, o valor aumenta de R$ 16,70 para R$ 34,70. Portanto, cada m^3 excedente custa $\frac{34,70-16,70}{30-25}=\frac{18}{5}=$ 3,60 reais/m^3. O consumidor pagará R$ 16,70 mais R$ 3,60 por m^3 excedente.

E) Incorreta. Cada m^3 nesse trecho custa $\frac{16,70-11,70}{25-20}=\frac{5}{5}=$ 1 real/m^3. Portanto, 22 m^3 correspondem a um valor de 11,70 + 2 = R$ 13,70.

Questão 12 – Letra E

Comentário: Observe a seguinte figura:



A região sombreada corresponde a um trapézio retângulo de área 12 cm^2. Temos:

$$A=\frac{(m+1).3}{2}\Rightarrow 12=\frac{3m+3}{2}\Rightarrow 24=3(m+1)\Rightarrow m+1=8\Rightarrow m=7$$

A função **f** é da forma f(x) = ax + b, com b = 1 (interseção com o eixo **y**).

Substituindo o ponto (3, 7) na função, temos:

$$7=a.3+1\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$$

Logo, **f** é definida por f(x) = 2x + 1.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Dado que o indivíduo tem 50 anos, calculamos o $F_{máx}$ = 220 – 50 = 170.

Logo, a fórmula: F = 60+ k($F_{máx}$ – 60) ficará F = 60 + 110k.

Para k = 55%(0,55), teremos F = 60 + 110 . 0,55 = 120,5.

Para k = 70%(0,70), teremos F = 60 + 110 . 0,70 = 137,0.

Assim, o intervalo de segurança para esse indivíduo será 120,5 < F < 137, e qualquer subconjunto desse intervalo satisfaz o recomendado pela fórmula.

Questão 14 – Letra E

Comentário: Seja V(t) = at + b a função que descreve o volume do reservatório em função do tempo, temos:

$V(11) = 315 \Rightarrow 11a + b = 315$ (I)

$V(19) = 279 \Rightarrow 19a + b = 279$ (II)

Fazendo II – I, temos:

$8a = -36 \Rightarrow a = -4,5$

Substituindo esse valor em I, temos:

$-49,5 + b = 315 \Rightarrow b = 364,5$

Portanto, V(t) = –4,5t + 364,5.

Agora, para descobrir quando o reservatório estará vazio basta fazer V(x) = 0 e teremos:

$-4,5t + 364,5 = 0 \Rightarrow 4,5t = 364,5 \Rightarrow t = 81$

Como outubro tem 31 dias e novembro 30, temos:

81 dias = 31 dias + 30 dias + 20 dias

Portanto, o reservatório ficará vazio no dia 20 de dezembro.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Observe que o valor será o ponto médio. Logo, o valor será $\frac{67+59}{2}=63\%$.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: A função é da forma f(x) = ax + b, então temos que:

$200\ 000 = a.0 + b \Rightarrow b = 200\ 000$

$240\ 000 = 2a + b \Rightarrow 240\ 000 = 2a + 200\ 000 \Rightarrow a = 20\ 000$

Logo, f(x) = 20 000x + 200 000.

Portanto, o valor do sítio no décimo ano (x = 10) será de f(10) = 20 000 . 10 + 200 000 = 400 000 reais.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Considerando a escala do tempo no gráfico de modo que o mês 1 seja, na verdade, o mês 0, o mês 2 seja o mês 1 e assim por diante, calculando a lei da função que determina os pontos do gráfico, temos:

$f(x) = ax + b \Rightarrow f(0) = a.0 + b = 30 \Rightarrow b = 30$

$f(5) = 5a + 30 = 10 \Rightarrow a = -4$

Portanto, a lei da função será f(x) = –4x + 30.

O nível zero será atingido quando f(x) = 0, ou seja:

$0= -4x + 30 \Rightarrow -4x = -30 \Rightarrow x = 7,5$

Então, o nível zero será atingido entre os meses 8 e 9, ou seja, 2 meses e meio após o sexto mês.

MATEMÁTICA

Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: O valor da conta atual é dado por:

150 . 0,5 + 4,5 = R$ 79,50

Após a redução de 10%, o valor da conta será igual a:

0,9 . 79,50 = R$ 71,55

Observe que, para um consumo de 140 kWh, a conta é igual a:

140 . 0,5 + 3 = 73 reais

Portanto, o consumo corresponde a R$ 71,55 e encontra-se na faixa "superior a 100 kWh até 140 kWh", com Cosip igual a R$ 3,00.

Seja **C** o consumo máximo. Então:

$0,5C + 3 = 71,55 \Rightarrow 0,5C = 68,55 \Rightarrow$

C = 137,1 kWh.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Para obter o preço **P** de equilíbrio, basta igualarmos a quantidade de oferta e de demanda. Logo: $Q_O = Q_D \Rightarrow -20 + 4P = 46 - 2P \Rightarrow 6P = 66 \Rightarrow P = 11$

Assim, o preço de equilíbrio é 11.

Questão 06 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 26

Comentário: Entre 2004 e 2010, aumentou em 218 o número de favelas no Rio de Janeiro. Se o último aumento se mantiver constante, entre 2010 e 2016, surgirão 218 novas favelas, totalizando 968 + 218 = 1 186 favelas.

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Seja **m** o número de minutos utilizados por mês em cada plano.

I. No plano **k**, temos:

$$\begin{cases} f(m) = 29,90;\ m \le 200 \\ f(m) = 29,90 + (m - 200).0,20;\ m > 200 \end{cases}$$

II. No plano **z**, temos:

$$\begin{cases} f(m) = 49,90;\ m \le 300 \\ f(m) = 49,90 + (m - 300).0,10;\ m > 300 \end{cases}$$

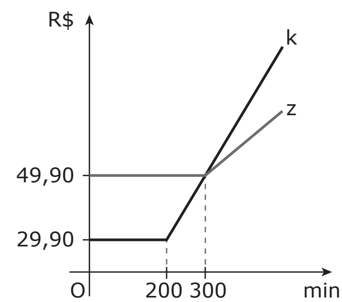
A interseção dos gráficos representa o mesmo valor pago em reais para ambos os planos. Logo:

$29,90 + (m - 200).0,20 = 49,90 + (m - 300).0,10 \Rightarrow$

$0,20m - 40 = 20 + 0,10m - 30 \Rightarrow$

$0,10m = 30 \Rightarrow m = 300.$

Assim, o gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:



MÓDULO – A 10

Função Quadrática

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Os valores de **x** para os quais f(x) = g(x) são tais que:

$\cancel{2} + x^2 = \cancel{2} + x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Questão 02 – Letra E

Comentário: O máximo ocorre no vértice da parábola que representa f(t), cuja abscissa é dada por:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{160\cancel{0}}{-2\cancel{0}} = 80\,°C$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: A quantidade mínima de agrotóxicos foi atingida no tempo correspondente ao t_v, ou seja,

$$t_v = \frac{-(-5)}{2\,.\,1} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ meses} = 2 \text{ meses e } 15 \text{ dias.}$$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Temos que f(x) = x(ax + b) é uma função do 2° grau que representa uma parábola com concavidade voltada para cima (a > 0). As raízes da função são 0 e $-\frac{b}{a}$ e como **a** e **b** são positivos, temos que $-\frac{b}{a} < 0$. Portanto, o gráfico que representa a função dada é o da alternativa B.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Encontrando os valores de **m** e **M**, temos:

$$M = -\frac{8^2 - 4.(-1).(-12)}{4.(-1)} = -\frac{64 - 48}{-4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$m = -\frac{8^2 - 4.1.17}{4.1} = -\frac{64 - 68}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Dessa forma, M.m = 4 . 1 = 4.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Escrevendo a função do segundo grau em ordem decrescente dos expoentes, temos:

$$L(x) = \left(\frac{6}{5}x - \frac{0,01}{5}x^2\right) - 0,6x = 1,2x - 0,002x^2 - 0,6x$$

$L(x) = -0,002x^2 + 0,6x$

O valor que torna máxima a função é dado por x_v:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,6}{2.(-0,002)} = -\frac{0,6}{-0,004} = 150$$

Logo, para que o lucro seja máximo, o distribuidor deverá vender 150 caixas.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Transformando a frase "A empresa cobrou de cada passageiro a quantia de R$ 55,00 e mais R$ 2,50 por lugar vago." em uma expressão matemática, em que **x** é a quantidade de passageiros, tal que $x \leq 54$.

I. Cada passageiro pagou R$ 55,00.

   $a(x) = 55x$

II. Cobrou R$ 2,50 de cada passageiro por cada lugar vago (54 – x).

   $b(x) = [2,5.(54 - x)].x$

Então, a função de rentabilidade é:

$R(x) = a(x) + b(x) = 55x + [2,5.(54 - x)].x \Rightarrow$

$R(x) = -2,5x^2 + 190x$

R(x) é uma equação de segundo grau com concavidade para baixo e domínio $0 \leq x \leq 54$.

Logo, o número de passageiros que dá à empresa uma rentabilidade máxima é x_v. Assim:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{190}{2(-2,5)} = 38$$

Portanto, a empresa terá um lucro máximo se 38 pessoas forem à excursão.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Após uma análise da função $S(t) = 3t^2 - 39t + 66$, temos que a > 0, portanto, a parábola terá concavidade para cima, e os valores negativos estão entre as raízes.

Calculando as raízes da função:

$$x = \frac{-(-39) \pm \sqrt{(-39)^2 - 4.3.66}}{2.3} \Rightarrow$$

$$x = \frac{39 \pm \sqrt{1\,521 - 792}}{6} = \frac{39 \pm 27}{6} = \frac{13 \pm 9}{2}$$

Então x = 2 ou x = 11. Logo, a função será negativa entre o 2° e o 11° mês.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Substituindo f(x) e –f(x) na igualdade, temos:

$f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0$

$2(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow$

$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

Portanto, apenas um valor de **x** satisfaz a igualdade.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Para encontrar o maior valor de D(x) e o ano em que esse valor ocorre, basta encontrar as coordenadas do vértice **V** dessa parábola da seguinte forma:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{\cancel{18}}{\cancel{2}.\left(-\frac{\cancel{9}}{\cancel{2}}\right)} = 2$$

$$y_V = D(x_V) = D(2) = -\frac{9}{2}.4 + 18.2 + 30 \Rightarrow$$

$$y_V = -18 + 36 + 30 = 48$$

Assim, V = (2, 48), ou seja, o valor máximo é 48 bilhões e o ano em que isso ocorre é 2018.

Questão 03 – Letra C

Comentário: A função L(n) é dada por:

$L(n) = R(n) - C(n) = 5\,000n - 2n^2 - n^2 + 1\,000n \Rightarrow$

$L(n) = -3n^2 + 6\,000n$

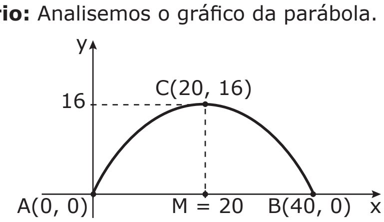
O número **n** é dado pela abscissa relativa ao vértice dessa parábola, que é dada por:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6\,000}{-6} = 1\,000$$

Logo, 980 < n < 1 300.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Analisemos o gráfico da parábola.



A parábola tem equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são raízes.

Com base no gráfico, deduzimos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 40$ são raízes da função.

Assim, $f(x) = a(x - 0)(x - 40) \Rightarrow f(x) = ax(x - 40)$.

O ponto C = (20, 16) $\in$ f.

Logo, $16 = a.20.(20 - 40) \Rightarrow a = -\frac{1}{25}$.

Assim, $f(x) = -\frac{1}{25}x.(x - 40)$.

Logo, $f(15) = -\frac{1}{25}.15.(15 - 40) \Rightarrow f(15) = 15$.

Portanto, a altura do arco é 15 cm para um ponto que dista 5 cm de **M**.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Analisando a equação, podemos inferir que as raízes são os valores que tornam x + 10 = 0 e x − 50 = 0, logo, as raízes são x = −10 e x = 50. E o ponto que torna a função máxima, dado que k < 0, está no ponto médio das raízes, ou seja, $x_V = \dfrac{-10+50}{2} = 20$.

Questão 06 – Letra C

Comentário: A equação $-\dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{5}{3}t + 2 = 0$ tem raízes dadas por:

$$t = \frac{-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)(2)}}{2\left(-\frac{1}{3}\right)}$$, logo t = −1 ou t = 6.

A abscissa do vértice está no ponto médio das raízes, assim $x_v = \dfrac{-1+6}{2} = \dfrac{5}{2}$.

A ordenada do vértice pode ser calculada pela expressão:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)(2)}{4\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{49}{12}$$

Então:

Alternativa A: incorreta, pois a bola toca o solo no tempo t = 6s.

Alternativa B: incorreta, pois a parábola tem concavidade voltada para baixo. Assim: $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \dfrac{49}{12}\right\}$.

Alternativa C: correta, pois, conforme calculado anteriormente, temos $x_v = \dfrac{5}{2}$ e $y_v = \dfrac{49}{12}$.

Alternativa D: incorreta, pois, para valores **t** menores que −1, temos valores menores que zero para função.

Alternativa E: incorreta, pois o valor máximo da função é $y_v = \dfrac{49}{12}$.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Como o gráfico tangencia o eixo das abscissas, temos que Δ = 0, ou seja, $(2m)^2 - 4 . 1 . 9 = 0 \Rightarrow$

$4m^2 = 36 \Rightarrow m = 3$ ou $m = -3$.

Avaliando a função para ordenada igual a 9, temos:

$9 = x^2 + 2mx + 9 \Rightarrow x^2 = -2mx \Rightarrow x(x + 2m) = 0 \Rightarrow$

x = 0 ou x = −2m

Como um dos valores de **x** deve ser negativo, devemos ter **m** positivo, dessa forma m = 3, que está entre 2,5 e 3,5.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Sendo **x** a quantidade de alunos, teremos 50 – x lugares vazios. Logo, cada um desses alunos pagará: 250 + 4,5(50 − x).

A receita da empresa é o produto da quantidade **x** de alunos pelo valor que cada um pagou. Assim:

$R(x) = x(250 + 4,5(50 - x)) = -4,5x^2 + 475x$.

Questão 09 – Letra C

Comentário: Seja **x** o total de formandos, a quantidade a ser vendida por formando é igual a (x + 3), dessa forma, o total arrecadado **T** será dado por:

T(x) = 5x(x + 3)

Agora, utilizando a informação dada, temos:

$5x(x + 3) < 26\,270 \Rightarrow$

$x(x + 3) < 5\,254 \Rightarrow$

$x^2 + 3x - 5\,254 < 0$

Fazendo o estudo de sinal da função $x^2 + 3x - 5\,254$, temos:

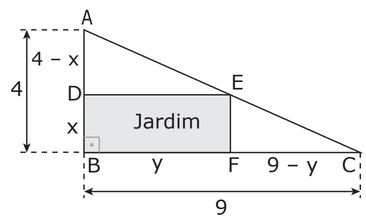
$\Delta = 9 + 21\,016 = 21\,025$

$x = \dfrac{-3 \pm 145}{2} = \Rightarrow x = 71$ ou $x = -74$

Dessa forma, o maior valor para o número total de alunos é igual a 70, que é um múltiplo de 14.

Questão 10 – Letra A

Comentário: Com base nos dados do enunciado, temos a seguinte situação na figura a seguir:



Como Δ ADE ~ Δ ABC:

$$\frac{4-x}{4} = \frac{y}{9} \Rightarrow 4y = 9(4-x) \Rightarrow y = \frac{36-9x}{4} \Rightarrow y = -\frac{9x}{4} + 9$$

A área do jardim é dada pelo produto xy. Assim, substituindo **y** pela expressão obtida, temos:

$$A = xy \Rightarrow A = x\left(-\frac{9x}{4} + 9\right) \Rightarrow A = -\frac{9x^2}{4} + 9x$$

Por se tratar de uma equação de segundo grau, temos que a maior área possível encontra-se no vértice da parábola, logo:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{9}{2\left(-\frac{9}{4}\right)} = 2$$

Como $y = -\dfrac{9x}{4} + 9$, então y = 4,5.

Portanto, as dimensões do jardim são 2,0 m e 4,5 m.

Questão 11 – Letra B

Comentário: A função L(x) que representa o lucro desse comerciante é dada por:

$L(x) = (40 - x).x - (40 - x).16 \Rightarrow$

$L(x) = 40x - x^2 - 640 + 16x \Rightarrow L(x) = -x^2 + 56x - 640$

O valor de **x** para o qual L(x) é máximo é dado por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{\cancel{56}}{-\cancel{2}} = 28$$

Agora, seja (1 + i) o fator de aumento repassada aos clientes, temos:

$$16.(1+i) = 28 \Rightarrow 1 + i = \frac{28}{16} \Rightarrow 1 + i = 1{,}75 \Rightarrow i = 75\%$$

Questão 12 – Letra A

Comentário: Analisando cada uma das alternativas, temos:

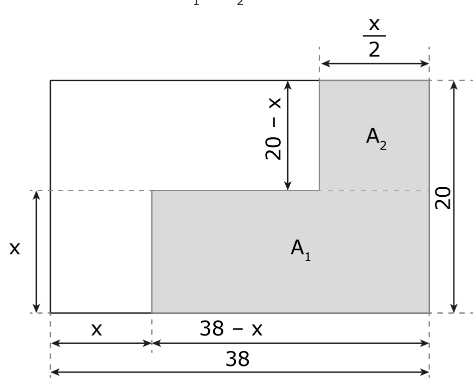
I. Correta. A receita é o produto de **p** por **q**, mas como $p = 40 - 0,2q$, temos que a receita:
$R = p.q = (40 - 0,2q).q$.
Assim, para $R = 2\,000$, teremos:
$(40 - 0,2q).q = 2\,000$. Resolvendo, encontramos $q = 100$.

II. Correta. Pela afirmação anterior, temos que $R(q) = (40 - 0,2q).q$.
$R(50) = (40 - 0,2 \,.\, 50).50 = 1\,500$
$R(150) = (40 - 0,2 \,.\, 150).150 = 1500$
Portanto, $R(50) = R(150)$.

III. Correta. Como $R(50) = R(150)$, sabemos que 50 e 150 estão equidistantes do x_v. Logo, o $x_v = 100$ e o $y_v = 2\,000$.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Observando a nova figura, temos que a área da casa é a soma das áreas A_1 e A_2.



Pela figura, infere-se que:

- $A_1 = (38 - x).x$;
- $A_2 = (20 - x).\dfrac{x}{2}$

Portanto:

$A_{casa} = A_1 + A_2 = (38 - x).x + (20 - x).\dfrac{x}{2}$

$A_{casa} = -\dfrac{3}{2}x^2 + 48x$;

A área será máxima quando:

$$A_{casa} = -\frac{\Delta}{4\,a} = -\frac{(48)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)(0)}{4\left(-\frac{3}{2}\right)} = 384 \text{ m}^2$$

Questão 14 – Letra B

Comentário: Observando o gráfico, concluímos que a parábola intercepta o eixo **y** no ponto **p**, portanto, $p = 8 - m$ (Equação 1).

Observamos ainda que o $x_v = k$, portanto, $-\dfrac{m}{2} = k$ (Equação 2).

Como $x_v < 0$, então $m > 0$.

Ainda pela observação do gráfico, vemos que a parábola tangencia o eixo das abscissas em um único ponto, logo, infere-se que $\Delta = 0$. Como neste caso $\Delta = m^2 - 4(8 - m)$, teremos:

$m^2 + 4m - 32 = 0$.

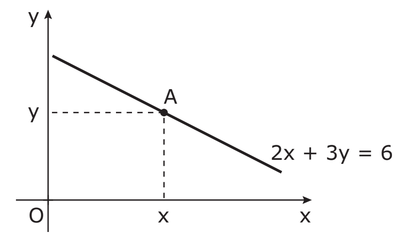
Utilizando a fórmula de Bhaskara, encontramos $m = -8$ ou $m = 4$, mas $m > 0$. Logo, $m = 4$.

Substituindo $m = 4$ nas equações 1 e 2, encontramos $p = 4$ e $k = -2$.

Então, $p + k = 4 + (-2) = 2$.

Questão 15 – Letra C

Comentário:



Seja **A** o quarto vértice. **A** pertence à reta $2x + 3y = 6$. Logo:

$y = -\dfrac{2}{3}x + 2$ (I)

A área do retângulo é dada por $S = xy$.

Substituindo (I) nessa expressão, temos:

$$S = x\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) \Rightarrow S = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$$

A dimensão **x** que corresponde à área máxima é dada pelo vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

Logo, $y = -\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{2} + 2 = 1$.

O perímetro do retângulo é $2.\dfrac{3}{2} + 2 \,.\, 1 = 5$.

Questão 16 – Letra D

Comentário: A medida da vareta de miriti é de 80 cm, então:

$2x + y = 80 \Rightarrow y = 80 - 2x$

Dividindo a área da pipa em um retângulo e um triângulo, temos que sua área será:

$$A = x.\frac{y}{4} + \frac{1}{2}.x.\frac{3}{4}y = \frac{2xy + 3xy}{8} = \frac{5xy}{8}$$

Substituindo $y = 80 - 2x$ na equação anterior, temos:

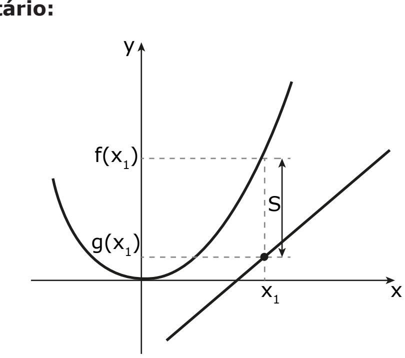
$$A = \frac{5x\,(80 - 2x)}{8} = 50x - \frac{5}{4}x^2$$

$$x_v = \frac{-500}{2.\left(-\frac{5}{4}\right)} = 20$$

Portanto, $A_{máx} = 50 \,.\, 20 - \dfrac{5}{4}.20^2 = 500 \text{ m}^2$.

Questão 17 – Letra A

Comentário:



MATEMÁTICA

Analisando a figura, temos que S = $f(x_1) - g(x_1)$, ou seja,
$S = \frac{x_1^2}{2} - (3x_1 - 5) = \frac{x_1^2}{2} - 3x_1 + 5$.

O valor de **S** será mínimo quando:

$$S = -\frac{\Delta}{4\,a} = -\frac{(-3)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right).5}{4\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

Questão 18 – Letra A

Comentário: Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c - ax^2 - bx - c = 3 + 4x \Rightarrow$

$a(x^2 - 2x + 1) + bx - b + c - ax^2 - bx - c = 3 + 4x \Rightarrow$

$-2ax + a - b = 3 + 4x \Rightarrow$

$-2a = 4 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow$

$-2 - b = 3 \Rightarrow b = -5$

Dessa forma, $f(x) = -2x^2 - 5x + c$.

O máximo dessa parábola é dado por:

$$Y_v = -\frac{b^2 - 4\,.\,a\,.\,c}{4a} = -\frac{25 - 4\,.\,(-2).c}{4(-2)} \Rightarrow$$

$$Y_v = \frac{25 + 8c}{8} = \frac{25}{8} + c$$

Assim, a constante real é dada por $\frac{25}{8}$.

Seção Enem

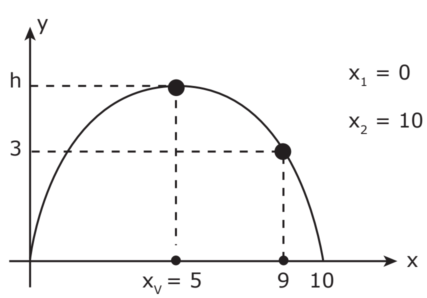
Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



$y = a\,.\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)$

$y = a\,.\,(x - 0)\,.\,(x - 10)$

$y = a\,.\,x\,.\,(x - 10)$

$y\ (9{,}3) \Rightarrow 3 = a\,.\,9\,(9 - 10) \Rightarrow$

$3 = -9a \Rightarrow$

$a = -\frac{1}{3}$

Logo,

$P = -\frac{1}{3}\,.\,x\,.\,(x - 10)$

$V\ (x_v, h) \Rightarrow y = h = -\frac{1}{3}\,.\,5\,.\,(5 - 10)$

$h = \frac{25}{3}\,m$

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Temos que a renda **f** do cabeleireiro será tal que: $f(x) = (10 + x).(200 - 10x)$, em que **x** será o valor cobrado a mais por serviço. Assim, temos que $f(x) = -10x^2 + 100x + 2\,000$, que representa uma parábola voltada para baixo. Logo, a renda máxima será a ordenada do vértice da parábola que tem como abscissa o valor $x_V = -\frac{100}{2.(-10)} = 5$.

Portanto, o cabeleireiro deve cobrar R\$ 10,00 + R\$ 5,00 = R\$ 15,00 por serviço.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Para determinar a distância horizontal da entrada do túnel, é preciso encontrar as raízes da equação da parábola, que equivalem a:

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$

Portanto, a base do túnel tem 6 metros, que equivale à distância entre os pontos $x = -3$ e $x = 3$.

Como a equação da parábola é incompleta, podemos concluir que a parábola é simétrica com relação ao eixo **y**. Portanto, seu ponto máximo é atingido quando x = 0, ou seja, quando y = 9.

Dessa forma, a altura do túnel tem 9 metros de altura.

Como a área da parte frontal corresponde a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são a base e a altura da entrada do túnel, temos que ela equivale a:

$$A = \frac{2}{3}.9\,.\,6 = 36\ m^2$$

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: A temperatura máxima da estufa é dada pela coordenada **y** do vértice do gráfico da função de segundo grau que modela a temperatura da estufa em função do horário:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(22)^2 - 4.(-1).(-85)}{4.(-1)} = 36$$

Logo, como $30 \le 36 \le 43$, a temperatura na estufa é classificada como alta.

Questão 05 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como a função é polinomial de grau menor que 3, ela pode ser escrita como $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se a = 0, ela será de primeiro grau ou constante e, caso contrário, quadrática. Como f(0) = 0, f(10) = 10 e f(5) = 6, temos:

$f(0) = 0 = c$

$f(10) = 10 = 100a + 10b$

$f(5) = 6 = 25a + 5b$

$$\begin{cases} 10 = 100a + 10b \\ 6 = 25a + 5b \quad .(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b \\ -12 = -50a - 10b \end{cases}$$

$a = -\dfrac{1}{25}$ e $b = \dfrac{7}{5}$

Logo, a expressão da função a ser utilizada pelo professor é $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{7}{5}x$.

Questão 06 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Observe que o vértice da parábola será dado por (x_V, 0), ou seja, o valor da imagem para x_V será nulo, pois toca o eixo das abscissas, logo:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2\,.\,\frac{3}{2}} = 2$$

Fazendo f(2), temos:

$$f(2) = \frac{3}{2}\,.\,2^2 - 6\,.\,2 + C = 0 \Rightarrow C = 6.$$

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: Com base nos dados do enunciado, construímos a função **P** a fim de descrever sua relação com os parâmetros apresentados, **R** e **i**.

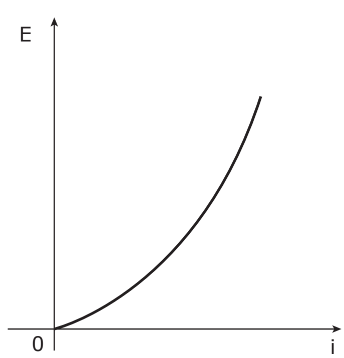
P(i) é o produto da resistência e o quadrado da corrente elétrica.

$$\overbrace{P(i)}^{\text{P}} \overbrace{=}^{\text{é}} \overbrace{R}^{\text{Resistência}} \underbrace{\cdot}_{\text{Produto}} \overbrace{i^2}^{\text{Quadrado da corrente}}$$

A energia consumida (**E**), por sua vez, é diretamente proporcional à potência, ou seja, existe um **k** constante tal que:

$E = kP = k.R.i^2$

Portanto, a função E(i) é quadrática, e seu gráfico passa pela origem.



Questão 08 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

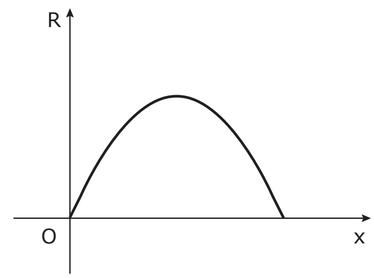
Habilidade: 21

Comentário: Com base no enunciado, temos:

$R(x) = k.x(P - x) \Rightarrow$

$R(x) = -kx^2 + kPx$

Como $k > 0$, temos $-k < 0$, ou seja, trata-se de uma parábola com concavidade voltada para baixo. Além disso, uma das raízes da função é igual a zero. Portanto, o gráfico correspondente é o da figura a seguir:



Questão 09 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O número de pessoas que corresponde à máxima rapidez de propagação do boato equivale à abscissa do vértice. Para P = 44 000, temos:

$R(x) = kx(44\,000 - x) \Rightarrow$

$R(x) = -kx^2 + 44\,000\,.\,kx.$

Assim:

$$x_v = \frac{44\,000\cancel{k}}{-2\cancel{k}} = 22\,000$$

Portanto, o número de pessoas deve ser igual a 22 000.

MÓDULO – A 11

Função Composta e Função Inversa

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: Resolvendo a condição descrita no enunciado:

$p(f(x)) = p(2x + 4) = 6(2x + 4) - 2m = 12x + (24 - 2m)$

$f(p(x)) = f(6x - 2m) = 2(6x - 2m) + 4 = 12x + (4 - 4m)$

$p(f(x)) = f(p(x)) \Rightarrow 12x + (24 - 2m) = 12x + (4 - 4m) \Rightarrow m = -10$

Questão 02 – Letra D

Comentário: De acordo com o gráfico da função **f**, f(f(x)) = 2 para todo f(x) = 0, ou seja, para todas as raízes de **f**.

Como a função **f** tem 3 raízes, então, para esses três elementos, f(f(x)) = 2.

Questão 03 – Letra C

Comentário: g(x) = f(f(x + 1)):

$$f(x+1) = \frac{x+1}{(x+1)-1} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f(f(x+1)) = f\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} = x+1 \Rightarrow$$

$$g(x) = x+1$$

Questão 04 – Letra B

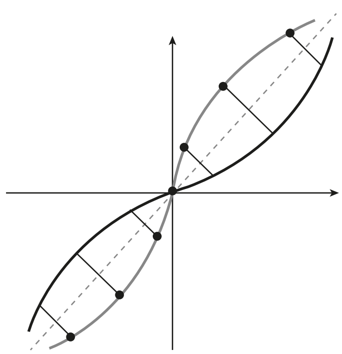
Comentário: Pelo gráfico, temos:

g(–2) = 0

Assim, g(g(–2)) = g(0) = 4.

Questão 05 – Letra C

Comentário: O gráfico da função inversa, $f^{-1}(x)$, é o gráfico de uma função simétrica a f(x) em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares conforme a figura.



Ainda ao analisar a figura, concluímos que a função inversa é semelhante à função apresentada na alternativa C.

Questão 06 – Letra A

Comentário: A função que representa o nível de monóxido de carbono, em função do tempo **t**, será dada pela composição das funções C e P. Portanto, $C(t) = 0{,}2.(50 + 0{,}05t^2) - 1 = 9 + 0{,}01t^2$.

Questão 07 – Letra D

Comentário: Encontrando primeiramente a função composta, temos:

$$f(g(k)) = 3(g(k)) - 2 \Rightarrow$$
$$3(-2k+1) - 2 \Rightarrow$$
$$-6k + 3 - 2 \Rightarrow$$
$$-6k + 1 = h(k)$$

Agora, pela definição de função inversa,

$$h(h^{-1}(k)) = k \Rightarrow$$
$$-6(h^{-1}(k)) + 1 = k \Rightarrow$$
$$h^{-1}(k) = f(g(k))^{-1} = \frac{1-k}{6}$$

Assim:

$$f(g(k))^{-1} = 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1-k}{6} = 1 \Rightarrow$$
$$1 - k = 6 \Rightarrow$$
$$k = -5$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Pela definição de função inversa, temos:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow$$
$$\frac{f^{-1}(x)+2}{f^{-1}(x)-2} = x \Rightarrow$$
$$f^{-1}(x) + 2 = x(f^{-1}(x) + 2) \Rightarrow$$
$$f^{-1}(x)(1-x) = 2x - 2 \Rightarrow$$
$$f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{1-x}$$

Dessa forma, temos:

$$f(0) = \frac{0+2}{0-2} = -1$$
$$f^{-1}(0) = \frac{2.0+2}{1-0} = -2$$
$$f^{-1}(-1) = \frac{2.(-1)+2}{1-(-1)} = 0$$

Assim, $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2 = (-1 - 2 + 0)^2 = (-3)^2 = 9$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: De f(2x + 1) = 4x + 12, fazemos 2x + 1 = t, ou seja, $x = \frac{t-1}{2}$, que, substituindo na função, teremos:

$$f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right) + 12 = 2t + 10$$

Da mesma forma, para g(x + 2) = 2x – 1, fazemos x + 2 = t, x = t – 2. Logo, teremos:

g(t) = 2(t – 2) – 1 = 2t – 5

Assim, f(g(t)) = f(2t – 5) = 2(2t – 5) + 10 = 4t – 10 + 10, ou seja, f(g(x)) = 4x.

Para que f(g(x)) = 2, devemos ter 4x = 2, e isso implica $x = \frac{1}{2}$.

Logo, f(g(x)) = 2 é um número fracionário.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Fazendo f(x) = y, temos que:

$$y = \frac{2x+3}{4x+1} \Rightarrow \; 4xy + y = 2x + 3 \Rightarrow$$

$$x(4y-2) = -y+3 \Rightarrow$$

$$x = \frac{y-3}{-4y+2}$$

Logo, $g(x) = \dfrac{x-3}{-4x+2}$. Portanto, 1 – 3 – 4 + 2 = (–1).(4), a + b + c + d é um número inteiro múltiplo de 4.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Substituindo os valores dados, temos:

$g(f(x)) = 0 \Rightarrow$

$(f(x))^2 + 3.f(x) + c$

$(2x - 1)^2 + 3(2x - 1) + c \Rightarrow$

$(4x^2 - 4x + 1) + 6x - 3 + c = 0 \Rightarrow$

$4x^2 - 4x + 1 + 6x - 3 + c = 0 \Rightarrow$

$4x^2 + 2x + c - 2 = 0$

Agora, para que g(f(x)) apresente raízes reais, devemos ter $\Delta \geq 0$. Portanto:

$\Delta \geq 0 \Rightarrow$

$4 - 4 \,.\, 4 \,.\, (c - 2) \geq 0 \Rightarrow$

$4 - 16c + 32 \geq 0 \Rightarrow$

$$16c \leq 36 \Rightarrow c \leq \frac{36}{16} = 2{,}25$$

Assim, o maior valor inteiro de **c** é 2.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Se r = 2x + 1, então $x = \dfrac{r-1}{2}$.

Assim, $f(r) = 2\left(\dfrac{r-1}{2}\right) + 4 \;\Rightarrow\; f(r) = r + 3.$

Por outro lado, se s = x + 1, então:

$x = s - 1$ e $g(s) = 2(s - 1) - 1 \Rightarrow g(s) = 2s - 3$

Desse modo, $f \circ g(x) = f(2x - 3) = (2x - 3) + 3 = 2x$.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Primeiramente, vamos encontrar os seguintes valores:

$h(3) = f(1) = 4$

$f(4) = 1$

$h(1) = f(-1) = -2$

Dessa forma, temos:

$f(h(3)) + h(f(4)) =$

$f(4) + h(1) = 1 - 2 = -1$

Questão 06 – Letra D

Comentário: Pela definição de função inversa, temos:

$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{\left(f^{-1}(x)\right)^3 + 1}{2} = x \Rightarrow$$

$$2x - 1 = \left(f^{-1}(x)\right)^3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$$

Questão 07 – Letra D

Comentário: A função **f** é constante para $2 \leq x \leq 4$. Sabemos que $\pi \cong 3{,}14$, então, $f(\pi) = f(2)$. Analisando o gráfico, para $x \leq 2$, temos:

$f(x) = ax + b$

$f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

$f(1) = 2 \Rightarrow a \,.\, 1 + 3 = 2 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -x + 3$

$f(2) = -2 + 3 = 1$

Portanto, $f(f(\pi)) = f(\underbrace{f(2)}_{1}) = f(1) = 2.$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Como g(x) transforma da numeração brasileira para a americana e f(x) da numeração americana para a coreana, tem-se que f(g(x)) converte da numeração brasileira para a coreana. Assim:

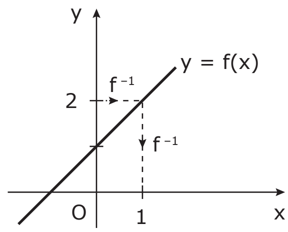
$$f(g(x)) = h(x) = f\left(\frac{x}{6}\right) = 40.\frac{x}{6} + 1 = \frac{20x}{3} + 1$$

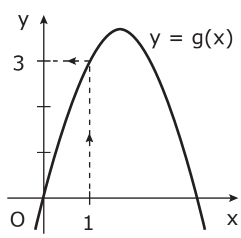
Questão 09 – Letra E

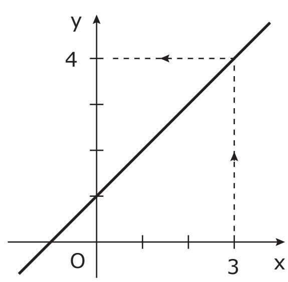
Comentário: Basta substituir os valores dados em suas respectivas funções. O resultado será obtido por meio dos gráficos. Assim:

$f \circ g \circ f^{-1}(2) = f(g(\underbrace{f^{-1}(2)}_{1})) = f(\underbrace{g(1)}_{3}) = f(3) = 4.$

MATEMÁTICA







Portanto, $f \circ g \circ f^{-1}(2) = 4$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Considere um sistema de eixos cartesianos coincidindo com as linhas norte-sul e leste-oeste indicadas na figura a seguir, sendo **O** a origem desse sistema. A trajetória do robô Sojourner é uma função da forma f(x)= ax + b. Temos:

$f(0) = 4 \Rightarrow a.0 + b = 4 \Rightarrow b = 4$

$f(-2) = 0 \Rightarrow a.(-2) + 4 = 0 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2$

Logo, temos $f(x) = 2x + 4$.

A função que descreve a trajetória do robô Opportunity é dada pela função inversa de f(x). Temos:

$$x = 2y + 4 \Rightarrow y = \frac{x-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

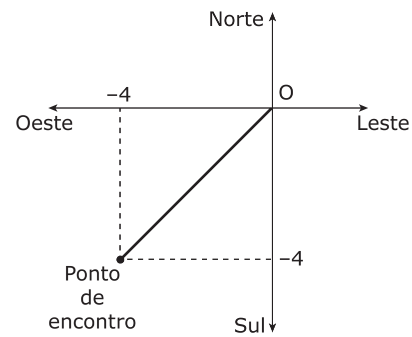
O encontro dos robôs ocorre para $f(x) = f^{-1}(x)$:

$$2x + 4 = \frac{x-4}{2} \Rightarrow 4x + 8 = x - 4 \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4$$

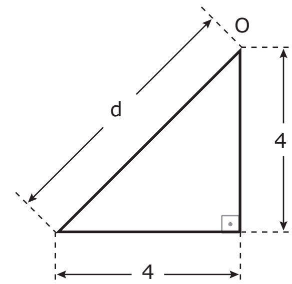
Substituindo esse valor em f(x), temos:

$f(-4) = 2.(-4) + 4 = -8 + 4 = -4$.

O ponto de interseção é (–4, 4). Assim, temos:



Sendo **d** a distância do ponto de encontro ao ponto **O**, temos o seguinte modelo:



$d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = 4\sqrt{2}$

Considerando $\sqrt{2} = 1,4$, temos $d = 4 \,.\, 1,4 = 5,6$.

Logo, os robôs vão se encontrar aproximadamente a 5,6 km de **O**.

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

- Determinação de φ:

  $\varphi_1(x) = 8x$

  $\varphi_2(x) = x + 11$

  $\varphi(x) = \varphi_2 \circ \varphi_1(x)$

  $\varphi = 8x + 11$

- Determinação de σ:

  $\sigma_1(x) = x + 13$

  $\sigma_2(x) = x^2$

  $\sigma(x) = \sigma_2 \circ \sigma_1(x)$

  $\sigma = (\varphi + 13)^2 \Rightarrow \sigma = (8x + 11 + 13)^2 \Rightarrow$

  $\sigma = (8x + 24)^2 = [8(x + 3)]^2 = 64(x + 3)^2 \Rightarrow$

  $\sigma = 64(x^2 + 6x + 9)$

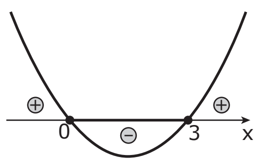
MÓDULO – A 12

Inequações

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: Resolvemos a inequação: $x^2 - 3x \leq 0 \Rightarrow x.(x - 3) \leq 0$. As raízes são 0 e 3. Assim, fazendo estudo de sinal, temos:



A solução da inequação é $0 \leq x \leq 3$.

Portanto, o conjunto das soluções inteiras da inequação $x^2 - 3x \leq 0$ é: S = {0, 1, 2, 3}.

Questão 02 – Letra D

Comentário:

A: $x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 3$

B: $x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 5$

Assim, temos:

$$\frac{x}{2} + 3 > \frac{x}{3} + 5 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 5 - 3 \Rightarrow x > 12 \text{ anos.}$$

Questão 03 – Letra A

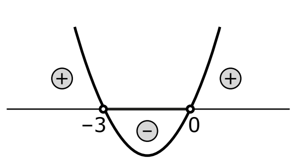
Comentário: A equação dada no enunciado é equivalente a $x^2 + 6x + 8 \leq 0$. Denotando $f(x) = x^2 + 6x + 8$, tem-se que f(x) tem raízes –4 e –2. Como tem concavidade para cima, os valores de **x** que satisfazem essa inequação são tais que $-4 \leq x \leq -2$. Assim, os valores inteiros que a satisfazem são –4, –3 e –2, cuja soma é –9.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Fazendo f(x) < g(x), temos:

$x^2 + 4x < x \;\; x^2 + 3 < 0$

Então, fazendo o estudo de sinais de $y = x^2 + 3$, temos:



Assim, o maior inteiro pertencente a esse intervalo é –1.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Lembrando-se de que o conjunto solução de um sistema de inequações simultâneas é a interseção dos conjuntos-solução das inequações componentes do sistema, tem-se:

$$5n + 25 > 5500 \;\Rightarrow n > \frac{5\,500 - 25}{5} = 1\,095$$

$$-8n + 3501 > 210 - 5n \;\Rightarrow n < \frac{3\,501 - 210}{3} = 1\,097$$

O único valor que satisfaz ambas as inequações é 1 096, o número de foguetes do inimigo.

Questão 06 – Letra C

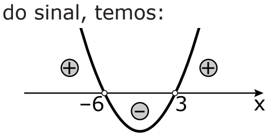
Comentário: Desenvolvendo a inequação, temos:

$$\frac{3x^2 + 18x - 9x - 54}{6} < 0 \Rightarrow \frac{3x^2 + 9x - 54}{6} < 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 3x - 18 < 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\,.\,1\,.\,(-18)}}{2\,.\,1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = -6$$

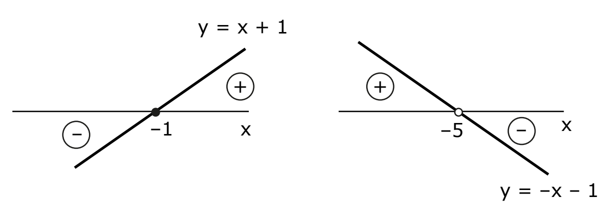
Fazendo o estudo do sinal, temos:



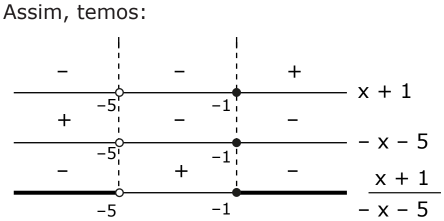
Logo, as soluções inteiras da inequação são: {–5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2}. Portanto, temos 8 soluções inteiras.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Fazendo o estudo de sinais da inequação, temos:



Assim, temos:



Logo, o conjunto solução é dado por S = $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$

Questão 08 – Letra E

Comentário: Os valores de **x** para os quais o gráfico da parábola $y = 3x^2 - 4x - 3$ fica abaixo do gráfico da parábola $y = x^2 + 3$ são tais que:

$3x^2 - 4x - 3 < x^2 + 3 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 4x - 6 < 0$

$x^2 - 2x - 3 < 0 \;\Rightarrow\; (x + 1)(x - 3) < 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < 3.$

MATEMÁTICA

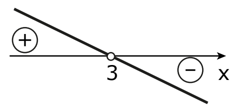
Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Analisando o sinal das funções:

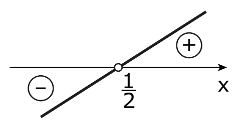
$y_1 = -x + 3$

Raiz: $x = 3$

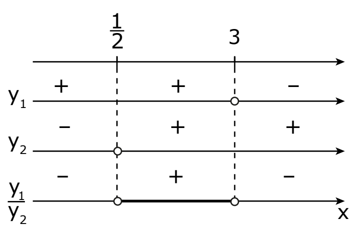


$y_2 = 2x - 1$

Raiz: $x = \frac{1}{2}$



O quadro de sinais, portanto é



Queremos saber para que valores de **x** temos $\frac{y_1}{y_2} > 0$.

Logo, $s = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$

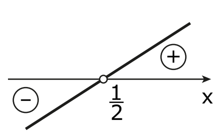
Assim, a soma pedida é 1 + 2 = 3.

Questão 02 – Letra B

Comentário: A inequação, $-4.(2x-1).\left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0$ ao ser dividida em ambos os membros por (–4), pode ser reescrita como $(2x-1).\left(\frac{x}{3} - 1\right) < 0$. Analisando o sinal das funções que compõem tal inequação, tem-se:

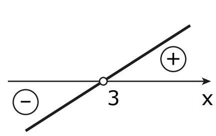
$y_1 = 2x - 1$

Raiz: $x = \frac{1}{2}$

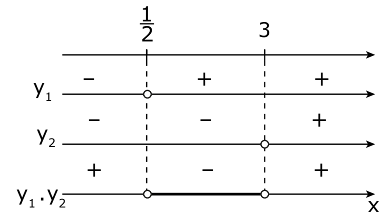


$y_2 = \frac{x}{3} - 1$

Raiz: $x = 3$



O quadro de sinais, portanto, é:



A solução da inequação é, portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Sejam C_X e C_Y, respectivamente, os custos das traduções realizadas pelos profissionais **X** e **Y**. O número mínimo **n** de linhas a serem traduzidas, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **Y** é tal que:

$C_X > C_Y \Rightarrow 3{,}20 . n + 440 > 2{,}30 . n + 800 \Rightarrow$

$0{,}9 . n > 360 \Rightarrow n > 400$

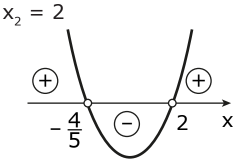
Assim, n = 401, que é um número ímpar.

Questão 04 – Letra E

Comentário: Analisando o sinal das funções:

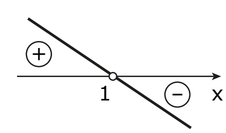
$y_1 = 5x^2 - 6x - 8$

Raízes: $x_1 = -\frac{4}{5}$ e $x_2 = 2$

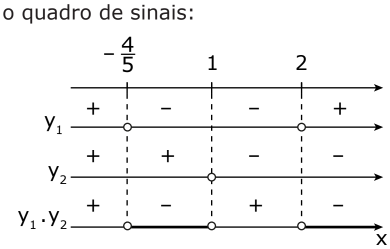


$y_2 = 2 - 2x$

Raiz: $x = 1$



Construindo o quadro de sinais:



Logo, o conjunto solução é $S = \left]-\frac{4}{5}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Desenvolvendo a desigualdade, temos:

$$\frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{4} > 1 \Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{4} - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{8x - 15x + 9 - 12}{12} > 0 \Rightarrow \frac{-7x - 3}{12} > 0$$

Assim, basta que –7x – 3 seja maior que zero, ou seja:

$-7x - 3 > 0 \Rightarrow -7x > 3 \Rightarrow x < -\frac{3}{7}$

Então, o intervalo correspondente é dado por $\left]-\infty, -\frac{3}{7}\right[$.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Manipulando a inequação dada:

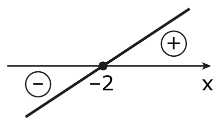
$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x+1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x+1} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x+1-(x-1)}{(2x+1)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{(2x+1)(x-1)} \leq 0$$

Analisando o sinal das funções componentes da inequação:

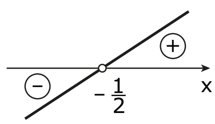
$y_1 = x + 2$

Raiz: $x = -2$



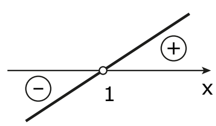
$y_2 = 2x + 1$

Raiz: $x = -\frac{1}{2}$

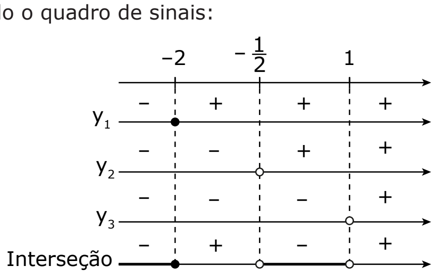


$y_3 = x - 1$

Raiz: $x = 1$



Construindo o quadro de sinais:



Logo, o conjunto solução é: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$

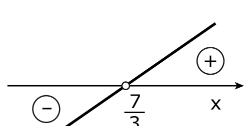
Questão 07 – Letra A

Comentário: Caso I: $\underbrace{(3x-7)}_{y_1}.\underbrace{(x+4)}_{y_2} < 0$

- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = 3x - 7$

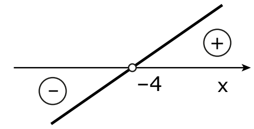
  Raiz: $x = \frac{7}{3}$



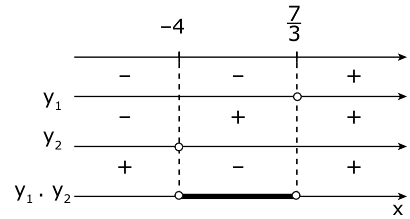
- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x + 4$

  Raiz: $x = -4$



- Quadro de sinais



Queremos saber para quais valores de **x** temos $y_1.y_2 < 0$. Portanto, $-4 < x < \frac{7}{3}$ (I)

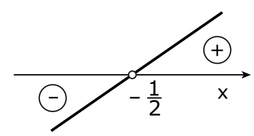
Caso II: $\dfrac{\overbrace{2x+1}^{y_3}}{\underbrace{5-x}_{y_4}} > 0$

Condição de existência: $x \neq 5$

- Estudo de sinal de y_3

  $y_3 = 2x + 1$

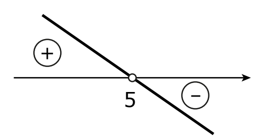
  Raiz: $x = -\frac{1}{2}$



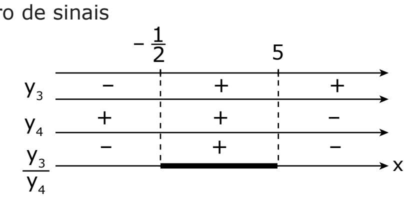
- Estudo do sinal de y_4

  $y_4 = 5 - x$

  Raiz: $x = 5$

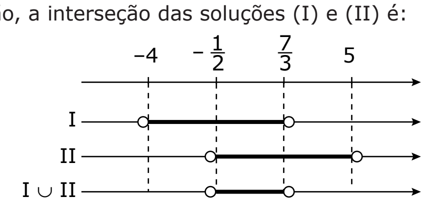


- Quadro de sinais



Queremos saber para que valores de **x** temos $\frac{y_3}{y_4} > 0$. Portanto, $-\frac{1}{2} < x < 5$ (II)

Então, a interseção das soluções (I) e (II) é:



Logo, os valores de **x** para os quais $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$ satisfaçam ambas as inequações serão os inteiros 0, 1 e 2, cuja soma é 3.

MATEMÁTICA

Questão 08 – Letra B

Comentário: Sendo C(x) o custo para **x** tubos produzidos, tem-se que C(x) = 0,4.R(x) + 570. Para que não haja prejuízo:

$$R(x) \geq C(x) \Rightarrow$$
$$R(x) \geq 0,4.R(x) + 570 \Rightarrow$$
$$0,6.R(x) \geq 570 \Rightarrow$$
$$0,6.3,8x \geq 570 \Rightarrow x \geq 250$$

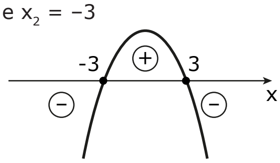
Questão 09 – Letra B

Comentário: O radicando deve ser não negativo e o denominador não nulo para a que a função **f** exista em um determinado intervalo dos reais.

- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = 9 - x^2$

  Raízes: $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$

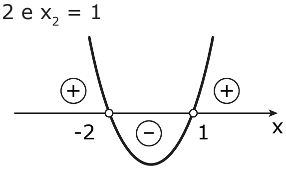


- Estudo do sinal de y_2

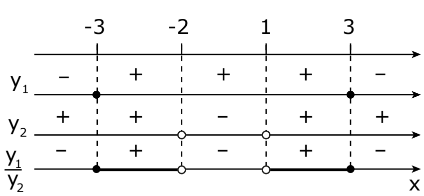
  $y_2 = x^2 + x - 2$

  Condição de existência: $x \neq -2$ e $x \neq 1$

  Raízes: $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$



- Quadro de sinais



Queremos saber para quais valores de **x** temos $\dfrac{y_1}{y_2} > 0$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$. Perceba que os intervalos são abertos em –2 e 1, pois essas são as raízes da função do denominador.

Questão 10 – Letra D

Comentário: Sendo **x** o número das unidades compradas da melhor marca, (400 – x) será a quantidade de unidades adquiridas da marca de menor qualidade. Logo, para que o custo total não ultrapasse 15 mil reais:

$$x.45 + (400 - x).25 \leq 15\,000 \Rightarrow 45x - 25x \leq 15\,000 - 10\,000 \Rightarrow$$
$$x \leq 250 \Rightarrow 400 - x \geq 150$$

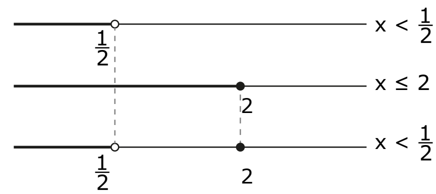
A razão máxima possível pedida no enunciado vale, portanto, $\dfrac{250}{150} = \dfrac{5}{3}$.

Questão 11 – Letra D

Comentário: Resolvendo primeiramente a equação simultânea em I, temos:

$$\begin{cases} 3x + 1 < -x + 3 \\ -x + 3 \leq -2x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

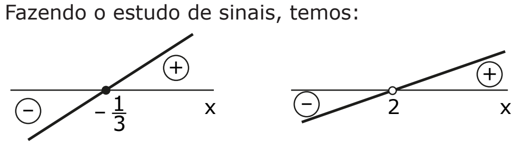
Assim, representando graficamente a solução desse sistema, temos:



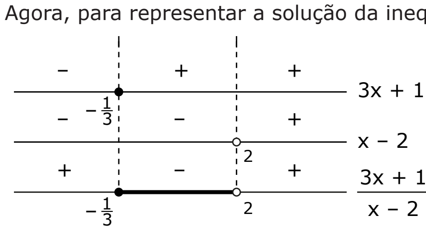
Agora, resolvendo a equação quociente em II:

$$\frac{4x-1}{x-2} \leq 1 \Rightarrow \frac{4x-1}{x-2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{4x - 1 - x + 2}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-2} \leq 0$$

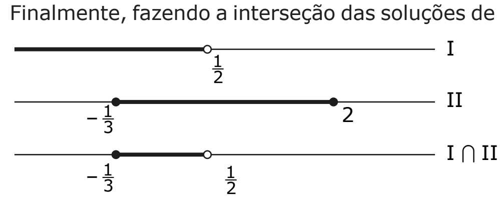
Fazendo o estudo de sinais, temos:



Agora, para representar a solução da inequação, temos:



Finalmente, fazendo a interseção das soluções de I e II, temos:



Assim, $I \cap II$ é dado por $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Condições de existência: $x \neq -4$ e $x \neq \pm 2$

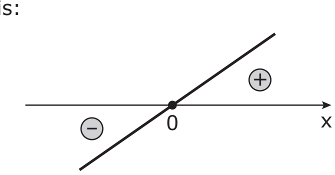
Temos: $f(x) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{x+4} \geq 0 \text{ (I)} \\ 4 - x^2 > 0 \text{ (II)} \end{cases}$

I. $\dfrac{\overbrace{3x}^{y_1}}{\underbrace{x+4}_{y_2}} \geq 0$

Estudo de sinais:

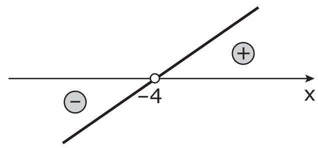
$y_1 = 3x$

Raiz: 0

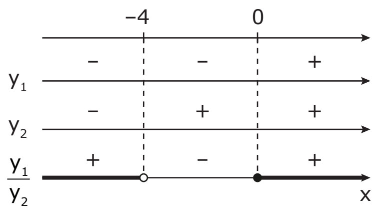


$y_2 = x + 4$

Raiz: −4



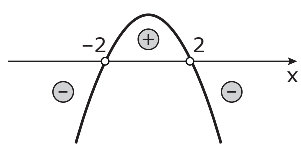
Quadro de sinais:



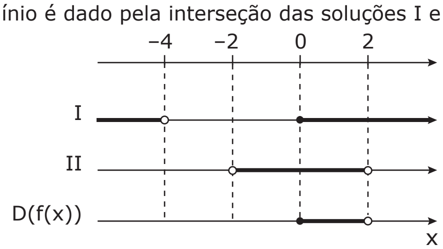
II. $\underbrace{4 - x^2}_{y_3} > 0$

$y_3 = 4 - x^2$

Raízes: −2 e 2



O domínio é dado pela interseção das soluções I e II:



Portanto, $D(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 2\}$.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Perceba inicialmente que $(5x - 40)^2 \ge 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Para $x \ne 8$, a inequação do denominador é equivalente a $x^2 - 10x + 21 < 0$, já que o valor do denominador não pode ser nulo. Perceba que, como para x = 8 o numerador se anula, x = 8 satisfaz a inequação. Denotando $f(x) = x^2 - 10x + 21$, tem-se que f(x) tem raízes 3 e 7. Como tem concavidade para cima, os valores de **x** que satisfazem essa inequação são tais que $3 \le x \le 7$. Assim, os valores inteiros que a satisfazem são 4, 5, 6. Como 8 também é solução, a soma pedida é tal que S = 4 + 5 + 6 + 8 = 23. Portanto, **S** é primo.

Questão 14 – Letra E

Comentário: Sabendo que as placas não podem ser cortadas e que a altura do portão é 3 m, temos que o número de placas utilizadas para fabricar o portão é igual a 3n, com **n** sendo o número de placas sobre o eixo horizontal. Desse modo, como o eixo pode suportar até 250 kg, temos: $3n.15 \le 250 \Rightarrow n \le \frac{50}{9} = 5,\overline{5}$.

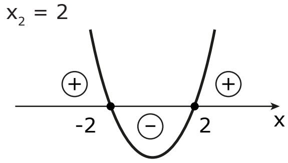
Assim, o número máximo de placas que podem ser utilizadas sobre o eixo é igual a 5 e, portanto, como cada placa tem comprimento igual a 1 m, a largura máxima do portão é 5 . 1 m = 5 m.

Questão 15 – Letra A

Comentário: O radicando deve ser não negativo e o denominador não nulo para que a função **f** exista em um determinado intervalo dos reais. Assim, a condição a ser resolvida é $\frac{(2x^2 - 8)(x^2 + x - 6)}{x^2 + 2x - 3} \ge 0$. Analisando o sinal das funções:

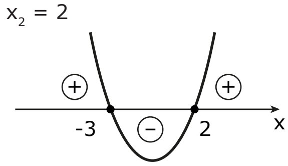
$y_1 = 2x^2 - 8$

Raízes: $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$



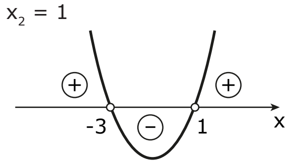
$y_2 = x^2 + x - 6$

Raízes: $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$

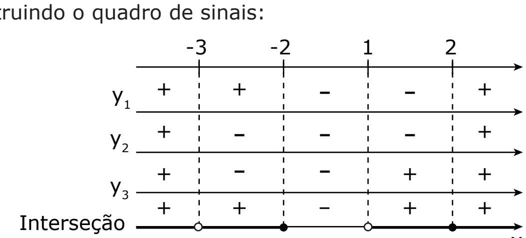


$y_3 = x^2 + 2x - 3$

Raízes: $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$



Construindo o quadro de sinais:



Perceba que todos os reais menores que −2 são soluções da inequação, com exceção do −3. Assim, o domínio **D** pedido é tal que $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x \le -2 \text{ e } x \ne -3\}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: Como a altura do guindaste no desenho deve estar entre 0,5 cm e 1 cm, faz-se:

$$\text{Escala} = \frac{\text{medida na representação}}{\text{medida real}}$$

$$\text{Escala}_1 = \frac{0{,}5}{1\,500} = \frac{1}{3\,000} \qquad \text{Escala}_2 = \frac{1}{1\,500}$$

Enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm: $\frac{1}{x} . 9\,000 > 4$

Como $x \ne 0$, tem-se: $\frac{9\,000}{4} > x \Rightarrow 2\,250 > x$

Portanto, $1\,500 < x < 2\,250$.

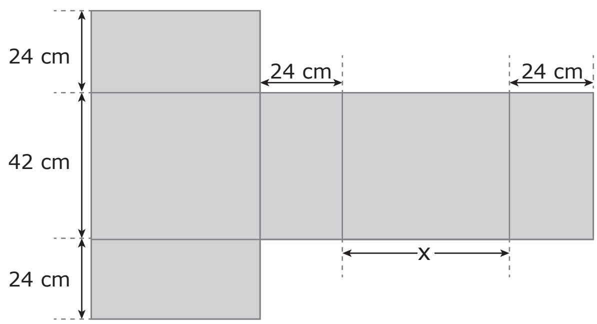
Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: II

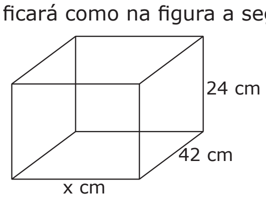
Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: De acordo com a figura a seguir, temos:



A caixa montada ficará como na figura a seguir:



O maior valor de **x** com as restrições impostas é:

$x + 42 + 24 \leq 115 \Rightarrow x \leq 49$ cm.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Para que a empresa não tenha prejuízo, seu lucro deve ser maior ou igual a zero ($LT \geq 0$). Assim:

$LT(q) = FT(q) - CT(q) \Rightarrow LT(q) = 5q - (2q + 12) \Rightarrow LT(q) = 3q - 12$

$LT(q) \geq 0 \Rightarrow 3q - 12 \geq 0 \Rightarrow q \geq 4$

Portanto, a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo é 4.

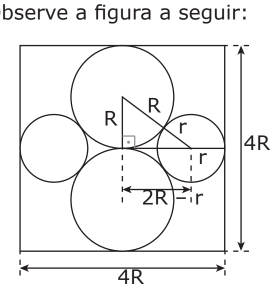
MÓDULO – B 09

Triângulo Retângulo

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:



Com base na figura, podemos observar que o quadrado possui lado igual a 4R. O triângulo retângulo possui hipotenusa igual a R + r e catetos iguais a **R** e 2R – r. Logo, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2 \Rightarrow$

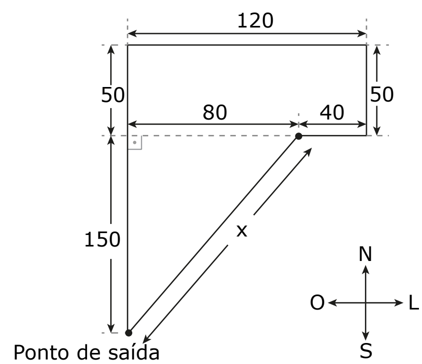
$\cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2} = \cancel{R^2} + 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} \Rightarrow$

$6Rr = 4R^2 \Rightarrow 6r = 4R \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$

Portanto, $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema.



Assim, sendo **x** a distância procurada, temos:

$x^2 = 150^2 + 80^2 \Rightarrow x^2 = 22\,500 + 6\,400$

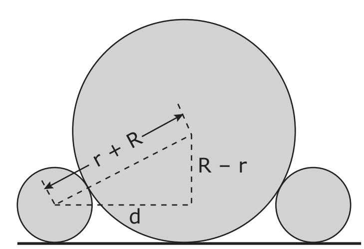
$x^2 = 28\,900 \Rightarrow x = 170$ m

Questão 03 – Letra C

Comentário: Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BEC, conclui-se que CE = 15 cm. Logo, AE = 15 cm e AC = 30 cm. Como BE = 20 cm, DE = 75 – 20 = 55 cm.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir, com seus dados.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado, temos:

$(r + R)^2 = (R - r)^2 + d^2 \Rightarrow$

$\cancel{r^2} + 2Rr + \cancel{R^2} = \cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} + d^2 \Rightarrow$

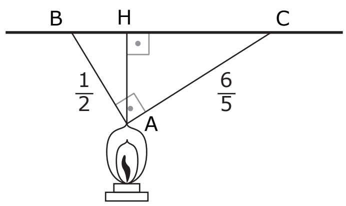
$4Rr = d^2 \Rightarrow$

$d = 2\sqrt{Rr}$

A distância entre os centros das circunferências de raio **r** corresponde a 2d. Assim, $2d = 4\sqrt{Rr}$.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir:



Foi dado que AB $\perp$ AC e AB = $\frac{1}{2}$ e AC = $\frac{6}{5}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow BC = \frac{13}{10}$$

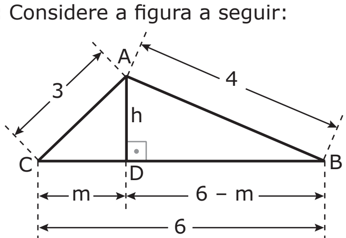
Traçando a altura AH relativa à hipotenusa BC, temos:

$$BC.AH = AB.AC \Rightarrow \frac{13}{10}.AH = \frac{1}{2}.\frac{6}{5} \Rightarrow AH = \frac{6}{13}$$

Portanto, a distância do lampião ao teto é $\frac{6}{13}$.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir:



Sejam AD = h e CD = m.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ADC e ADB, temos:

$$\begin{cases} 3^2 = m^2 + h^2 \\ 4^2 = (6-m)^2 + h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - m^2 = h^2 & \text{(I)} \\ 16 - (6-m)^2 = h^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Igualando as equações (I) e (II), temos:

$9 - m^2 = 16 - (6 - m)^2 \Rightarrow m = \frac{29}{12}$

Portanto, o valor de CD é $\frac{29}{12}$.

Questão 07 – Letra D

Comentário: Sejam **a**, **b** e **d** respectivamente, a altura, a base e a diagonal desse retângulo, temos:

$a + b = 14 \Rightarrow a = 14 - b$ (I)

$d = 10$

$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 100 = a^2 + b^2$ (II)

Substituindo I em II, temos:

$100 = (14 - b)^2 + b^2 \Rightarrow$

$100 = 196 - 28b + b^2 + b^2 \Rightarrow$

$2b^2 - 28b + 96 = 0 \Rightarrow$

$b^2 - 14b + 48 = 0 \Rightarrow$

$(b - 6)(b - 8) = 0$

Se $b = 6 \Rightarrow a = 0$ e se $b = 8 \Rightarrow a = 6$

Assim, as dimensões desse retângulo são 8 cm e 6 cm.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Considere o triângulo retângulo localizado sobre o plano do solo. Ele tem catetos de medida 6 . 30 = 180 cm e 8 . 30 = 240 cm. Logo, sua hipotenusa, por Pitágoras, mede 300 cm. Considere agora o triângulo retângulo cuja hipotenusa é AB. Seus catetos medem 400 cm e 300 cm (hipotenusa do outro triângulo retângulo). Logo, por Pitágoras, AB mede 500 cm.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Podemos notar que, a cada dois metros de cerca, são necessárias duas ripas de 2 metros, uma ripa de 1,5 metro e uma ripa transversal, cujo comprimento **x** determinaremos a seguir:

$x^2 = 1{,}5^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25 \Rightarrow x = 2{,}5$ m

Assim, para a construção de 300 m de cerca, são necessárias as seguintes quantidades de ripas:

- Horizontais: 150 superiores + 150 inferiores = 300
- Verticais: 150 + 1 = 151
- Transversais: 150

Logo, para a construção de 300 m de cerca, são necessários:

300 . 2 m + 151 . 1,5 m + 150 . 2,5 m =

600 m + 226,5 m + 375 m = 1 201,5 m

Questão 02 – Letra D

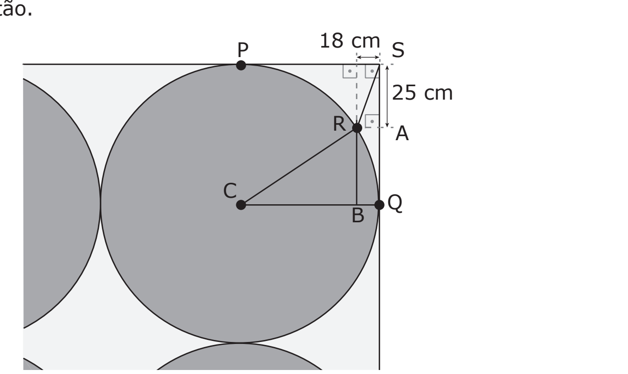
Comentário: Por Pitágoras em ABC, tem-se BC = 4. Além disso, $A\hat{B}C = 30°$ e $A\hat{C}B = 60°$. Sendo a medida ED = x, AD = 2x e $BD = 2\sqrt{3} - 2x$, como EDB é retângulo e $A\hat{B}C = 30°$, temos que:

$$\text{sen}\,30° = \frac{1}{2} = \frac{DE}{DB} = \frac{x}{2\sqrt{3} - 2x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, $AD = DB = \sqrt{3}$, EB = 1 e CE = 4 – 1 = 3. Por Pitágoras em ACD, temos $CD^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$ e $CD = \sqrt{7}$.

Questão 03

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



A) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo RSA, temos que:

$\overline{RS}^2 = 18^2 + 25^2 = 324 + 625 = 949 \Rightarrow \overline{RS} = \sqrt{949}$ cm.

B) Considerando **r** o raio dos círculos que compõem a figura, temos que:

$\overline{CR} = r$, $\overline{CB} = r - 18$ e $\overline{RB} = r - 25$.

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CRB, temos que:

$r^2 = (r - 18)^2 + (r - 25)^2 \Rightarrow$

$r^2 = r^2 - 36r + 324 + r^2 - 50r + 625 \Rightarrow$ $r^2 = 2r^2 - 86r + 949 \Rightarrow r^2 - 86r + 949 = 0 \Rightarrow$ $r = 13$ (não convém) ou $r = 73$ cm.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Como a área de ABCD é 9 m², AD = 3 m, analogamente, DG = 4 m. Utilizando o Teorema de Pitágoras, chega-se que AG = 5 m. Utilizando-se a relação métrica ah = bc, em que **b** e **c** são as medidas dos catetos, **a** é a medida da hipotenusa e **h** a medida da altura relativa à hipotenusa, tem-se:

$5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow$
$h = 2{,}4$ m

Logo, OD = 2,4 m, e esse é o raio da circunferência da figura, que terá área igual a $\pi.(2,4)^2 = 5{,}76\pi$ m².

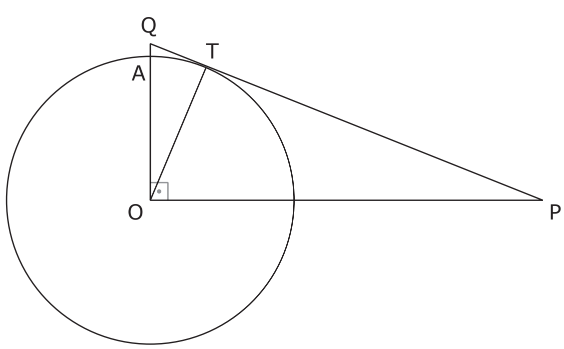
Questão 05 – Letra A

Comentário: Primeiramente, observe que MD = MH. Por semelhança, BM = MD. Usando Pitágoras em BCD, tem-se que $BD = \sqrt{5}$. Assim, $BM = MD = MH = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Como $ME = \dfrac{1}{2}$, $EH = MH - ME = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



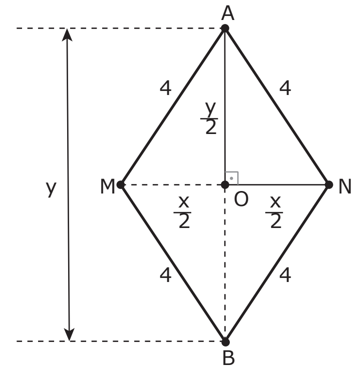
Temos que o segmento PQ tangencia a circunferência no ponto **T**, logo o triângulo OTP é retângulo em **T**. Assim, sendo $\overline{OT} = 3$ e $\overline{OP} = 5$, logo $\overline{TP} = 4$. Aplicando as relações métricas no triângulo OQP, temos que:

$\overline{OT}^2 = \overline{PT} \cdot \overline{TQ} \Rightarrow 4 \cdot \overline{TQ} = 9 \Rightarrow \overline{TQ} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \overline{QP} = \dfrac{25}{4}$ e, portanto,

$\overline{OQ} \cdot \overline{OP} = \overline{OT} \cdot \overline{QP} \Rightarrow \overline{OQ} \cdot 5 = 3 \cdot \dfrac{25}{4} \Rightarrow \overline{OQ} = \dfrac{75}{20} = 3{,}75.$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:



Como o triângulo AMN é isósceles, AO é a mediatriz de MN, logo, $MO = ON = \dfrac{x}{2}$. Os triângulos AMN e BMN são congruentes.

Portanto, $AO = OB = \dfrac{y}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no AON, temos:

$$4^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = 16 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$y^2 = 64 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$$

Portanto, $y = \sqrt{64 - x^2}$ dm.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Seja **d** o comprimento desse cabo, temos:

$d^2 = 16^2 + 63^2$ (I)

$d^2 = (16 + x)^2 + 60^2$ (II)

Comparando I e II, temos:

$256 + 3\,969 = 256 + 32x + x^2 + 3\,600 \Rightarrow$

$x^2 + 32x + 369 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 1\,024 - 4 \cdot 1 \cdot (-369) = 1\,024 + 1476 \Rightarrow$

$\Delta = 2\,500$

$$x' = \frac{-32 + 50}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x'' = \frac{-32 - 50}{2} = \cancel{-41} \text{ (não convém)}$$

Assim, o deslocamento será de 9 metros.

Questão 09 – Letra A

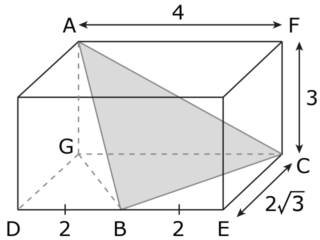
Comentário: Aplicando o Teorema de Pitágoras em ABC, temos que $AC = b\sqrt{5}$. Como AR = RC, já que as diagonais de um retângulo se cruzam em seu ponto médio, $AR = \dfrac{b\sqrt{5}}{2}$. Temos que AM = MD = b e $SM = MR = \dfrac{b}{2}$. MP é a altura relativa à hipotenusa em SMD e, por congruência, entre AMR e SMD, SD = AR:

$SM.MD = SD.MP \Rightarrow$

$$\frac{b}{2}.b = \frac{b\sqrt{5}}{2}.MP \Rightarrow MP = \frac{b\sqrt{5}}{5}$$

Questão 10 – Letra B

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema.



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BEC, ACF e BGA, temos:

$BE^2 + EC^2 = BC^2 \Rightarrow 4 + 12 = BC^2 \Rightarrow BC = 4$

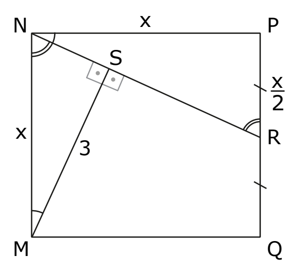
$AC^2 = CF^2 + AF^2 \Rightarrow AC^2 = 9 + 16 \Rightarrow AC = 5$

$AB^2 = BG^2 + AG^2 \Rightarrow AB^2 = 16 + 9 \Rightarrow AB = 5$

Assim, o perímetro do triângulo ABC é dado por 5 + 5 + 4 = 14.

Questão 11 – Letra B

Comentário: Seja **x** o lado do quadrado, considere a imagem a seguir para a resolução do problema.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo PRN, temos:

$$NR^2 = PN^2 + PR^2 \Rightarrow NR^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$NR^2 = \frac{5x^2}{4} \Rightarrow NR = \frac{x\sqrt{5}}{2}\text{ cm}$$

Agora, como os triângulos MSN e PRN são semelhantes, temos:

$$\frac{3}{x} = \frac{\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 1{,}5\sqrt{5}\text{ cm}$$

Questão 12 – Letra C

Comentário: Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$AC^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow$

$AC^2 = 64 + 36 \Rightarrow$

$AC = 10$ cm

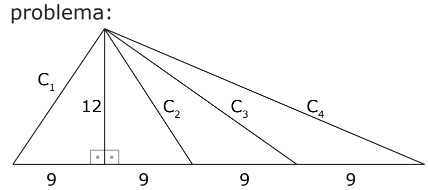
Assim, temos:

$$x.10 = 6\,.\,8 \Rightarrow \quad x = \frac{48}{10} = 4{,}8\text{ cm}$$

Logo, a distância percorrida pelo coelho é dada por:
8 + 6 + 10 + 8 + 4,8 = 36,8 cm

Questão 13 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir para a resolução do problema:



Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos de hipotenusas C_1, C_2, C_3 e C_4, onde $C_1 = C_2$, pois ambos são hipotenusas de triângulos com catetos de mesma medida, temos:

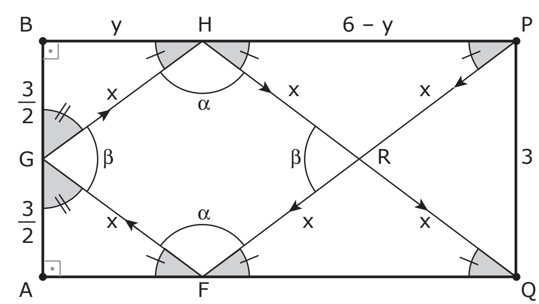
- $(C_1)^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow$
  $(C_1)^2 = 15^2 \Rightarrow C_1 = 15\text{ m} = C_2$
- $(C_3)^2 = 18^2 + 12^2 = 324 + 144 = 468 \Rightarrow$
  $(C_3)^2 = 2^2\,.\,3^2\,.\,13 \Rightarrow C_3 = 6\sqrt{13}\text{ m}$
- $(C_4)^2 = 27^2 + 12^2 = 729 + 144 = 873 \Rightarrow$
  $(C_4)^2 = 3^2\,.\,97 \Rightarrow C_4 = 3\sqrt{97}\text{ m}$

Assim, o comprimento total **T** é dado por:

$T = 15 + 15 + 6\sqrt{13} + 3\sqrt{97} = (30 + 6\sqrt{13} + 3\sqrt{97})$ m

Questão 14 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:



Temos que ABPQ é um retângulo e, pelo caso AA, o Δ GBH $\equiv$ Δ GAF, logo GH = GF = x.

O quadrilátero FGHR possui ângulos opostos congruentes, logo, ele é um paralelogramo, no caso, um losango, pois possui os quatro lados iguais a **x**. Por paralelismo, temos que $Q\hat{F}R = H\hat{P}R = P\hat{H}R = R\hat{Q}F$. Logo, os triângulos $H\hat{R}P$ e $F\hat{R}Q$ são isósceles e possuem dois de seus lados iguais a **x**.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos GBH e HPQ, temos:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = y^2 + \frac{9}{4} \quad \text{(I)} \\ (2x)^2 = (6 - y)^2 + 3^2 \Rightarrow 4x^2 = 36 - 12y + y^2 + 9 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$4.\left(y^2 + \frac{9}{4}\right) = 36 - 12y + y^2 + 9 \Rightarrow 4y^2 + 9 = 36 - 12y + y^2 + 9 \Rightarrow$$

$$3y^2 + 12y - 36 = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \text{ e } \cancel{y_2 = -6} \text{ (não convém)}$$

Para y = 2, temos que:

$$x^2 = y^2 + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 = 4 + \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

A distância percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ é igual a 6x, logo:

$$6.x = 6.\frac{5}{2} = 15 \text{ cm.}$$

Questão 15

Comentário: Seja **x** a largura da televisão, **y** a altura e **d** o coeficiente da constante de proporcionalidade para a diagonal, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{16}{9}$$

Convertendo a medida **d** para centímetros, temos:

d = 37 . 2,5 = 92,5

A largura da televisão pode ser dada por 16k e a altura 9k, em que **k** é a constante de proporcionalidade. Assim:

$81k^2 + 256k^2 = 92{,}5^2 \Rightarrow 337k^2 = 92{,}5^2$

$$k^2 = \frac{92{,}5^2}{337} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{92{,}5}{18{,}5}\right) \Rightarrow k = \frac{\frac{925}{\cancel{10}}}{\frac{185}{\cancel{10}}} = \frac{925}{185} = 5$$

Logo, x = 5 . 16 = 80 cm e y = 5 . 9 = 45 cm.

Seção Enem

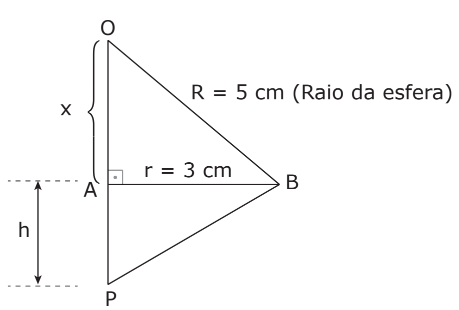
Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Observe a figura retirada da geometria da situação descrita:



Aplicando Teorema de Pitágoras no ΔOAB, temos:

$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x = 4$ cm

Logo, h = 1 cm.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

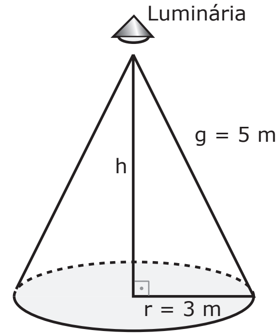
Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sabemos que a luminária iluminará uma área circular de 28,26 m², sendo $\pi \cong 3{,}14$; temos, então, que o raio dessa área vale:

$\pi r^2 = 28{,}26 \text{ m}^2 \Rightarrow r = 3$ m

Assim:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9 \Rightarrow h = 4$ m

Portanto, a altura **h** será igual a 4 m.

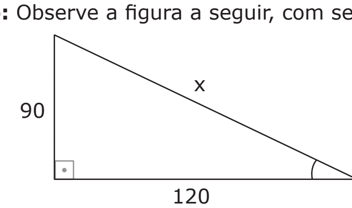
Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Observe a figura a seguir, com seus dados:



Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 120^2 + 90^2 \Rightarrow x = 150$

Logo, comp. total = 30 + 150 + 30 = 210 cm = 2,1 m.

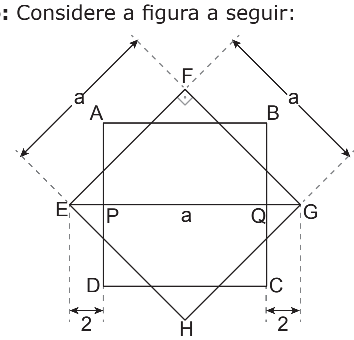
Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir:



Sendo Q $\in$ BC e Q $\in$ GE, podemos afirmar que GQ = EP = 2, pois essa figura é simétrica. O lado PQ = AB = a. Assim: GE = EP + PQ + GQ $\Rightarrow$ GE = 2 + a + 2 $\Rightarrow$ GE = 4 + a (I)

Como o lado GE é a diagonal do quadrado EFGH, então: GE = $a\sqrt{2}$ (II)

Assim, de (I) e (II), temos:

$$4 + a = a\sqrt{2} \Rightarrow 4 = a\left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow a = 4\left(\sqrt{2} + 1\right) \text{ cm.}$$

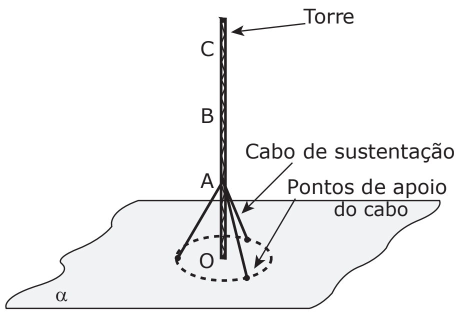
Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: III

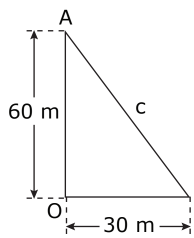
Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Os cabos com apoio na circunferência de raio 30 m estão fixados no ponto **A** da torre.



Temos três cabos com a seguinte configuração:



Nessa figura, **c** é o comprimento de um cabo.
Assim, $c^2 = 60^2 + 30^2 \Rightarrow c = 30\sqrt{5}$.
Portanto, o valor mínimo de cabo, com apoio na circunferência de raio 30 m, usado na sustentação da torre, é $3 \,.\, 30\sqrt{5} = 90\sqrt{5}$ metros.

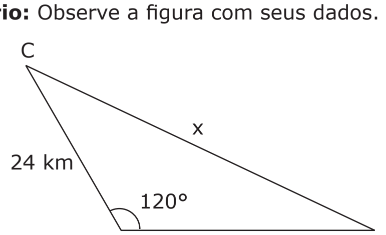
MÓDULO – B 10

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: Observe a figura com seus dados.



Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, temos:

$$x^2 = 24^2 + 36^2 - 2\,.\,24\,.\,36.\cos 120° \Rightarrow$$

$$x^2 = 576 + 1\,296 - 1\,728.\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x^2 = 1\,872 + 864 \Rightarrow \quad x = \sqrt{2\,736} \Rightarrow \quad x = 12\sqrt{19}\ \text{km}.$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Pelas informações do enunciado, AB = 10 m, BC = 15 m e $A\hat{B}C = 60°$. Aplicando-se a Lei dos Cossenos, sendo AC = x:

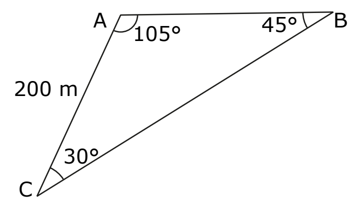
$$x^2 = 10^2 + 15^2 - 2\,.\,10\,.\,15\,.\,\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 175 \quad \Rightarrow x = 5\sqrt{7}\ \text{m}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Como a soma dos ângulos internos do Δ ABC vale 180°, temos:

$30° + 105° + A\hat{B}C = 180° \Rightarrow A\hat{B}C = 45°$



Agora, para encontrar o valor do segmento AB, basta aplicar a Lei dos Senos, então temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = \frac{200}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \ AB = \frac{200\,.\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}\,\text{m}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Seja α o ângulo oposto ao lado cuja medida é igual a 15 m, temos, pela Lei dos Cossenos:

$$15^2 = 8^2 + 10^2 - 2\,.\,8\,.\,10\,.\cos\alpha \Rightarrow$$

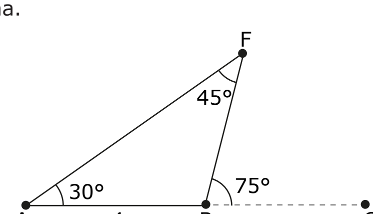
$$225 = 164 - 160\cos\alpha \Rightarrow$$

$$61 = -160\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = -\frac{61}{160} = -0{,}38125$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema.



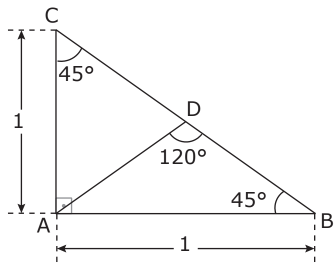
Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABF, temos:

$$\frac{4}{\text{sen } 45°} = \frac{BF}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{BF}{\frac{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow BF = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{milhas náuticas}$$

Questão 06 – Letra A

Comentário:



O triângulo retângulo ABC é isósceles, pois AB = AC.

Assim, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 45°$.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABD, temos:

$$\frac{1}{\text{sen}\,120°} = \frac{AD}{\text{sen}\,45°} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{cm}.$$

Questão 07 – Letra A

Comentário: Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, temos:

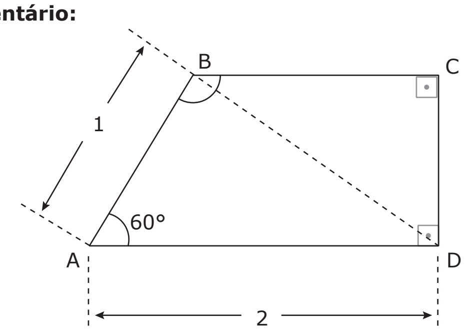
$$\left(\frac{4a}{3}\right)^2 = a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$\frac{16\,\cancel{a^2}}{9} = \cancel{2}\,\cancel{a^2} - \cancel{2}\,\cancel{a^2}.\cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$\frac{8}{9} = 1 - \cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{1}{9}$$

Questão 08 – Letra A

Comentário:



Como $A\hat{B}C = 120°$ e $B\hat{C}D = A\hat{D}C = 90°$ e a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo é 360°, então $B\hat{A}D = 60°$.

Traçando o segmento BD, temos o triângulo ABD. Aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$BD^2 = 1^2 + 2^2 - 2 . 1 . 2.\cos 60° \Rightarrow BD = \sqrt{3}$ cm, pois BD > 0.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Aplicando a Lei dos Senos no Δ ABC, temos:

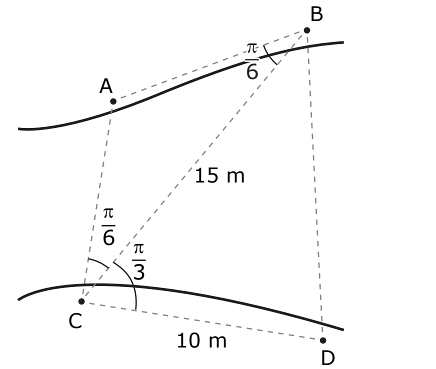
$$\frac{BC}{\text{sen}\,B\hat{A}C} = \frac{AC}{\text{sen}\,A\hat{B}C} \Rightarrow \frac{BC}{\text{sen}\,30°} = \frac{50}{\text{sen}\,45°} \Rightarrow BC = 25\sqrt{2}\ \text{m}$$

Dado o triângulo retângulo BCD, $\text{sen}\,30° = \dfrac{h}{25\sqrt{2}} \Rightarrow h = 12{,}5\sqrt{2}$ m.

Questão 02

Comentário:

A) Aplicamos a Lei dos Senos no Δ ABC, temos que:



$$\frac{AB}{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}} = \frac{15}{\text{sen}\,\frac{4\pi}{6}} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} \Rightarrow AB = \frac{15}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}\ \text{m}$$

B) Agora, aplicando a Lei dos Cossenos no Δ BCD, temos que:

$$BD^2 = 10^2 + 15^2 - 2.10.15.\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$BD^2 = 325 - \cancel{2}.150.\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$BD^2 = 325 - 150 = 175 = 7.25 \Rightarrow$$

$$BD = 5\sqrt{7}\ \text{m}$$

Questão 03 – Letra B

Comentário: Pela Lei dos Senos, temos:

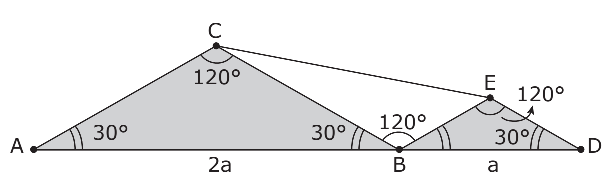
$$\frac{AB}{\text{sen}\,60°} = 2R \Rightarrow$$

$$\frac{80}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow$$

$$R = \frac{80\sqrt{3}}{3}\,\text{m}.$$

Questão 04 – Letra C

Comentário: Ilustrando os ângulos na figura, temos:



Aplicando a Lei dos Senos:

Δ ACB:

$$\frac{2a}{\text{sen}\,120°} = \frac{BC}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow \frac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{BC}{\frac{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow BC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Δ BDE:

$$\frac{a}{\text{sen}\,120°} = \frac{BE}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Lei dos Cossenos no Δ CBE:

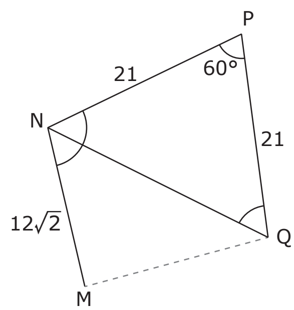
$$CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2.(BC)(BE).\cos 120° \Rightarrow$$

$$CE^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$CE^2 = \frac{5a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} \Rightarrow CE^2 = \frac{7a^2}{3} \Rightarrow CE = a\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Dadas as informações, considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



Assim, temos que:

$\overline{PN} = \overline{PQ} \Rightarrow P\hat{N}Q = P\hat{Q}N = 60° \Rightarrow \overline{NQ} = 21$ km.

$M\hat{N}P = 105°$ e $P\hat{N}Q = 60° \Rightarrow M\hat{N}Q = 45°$.

Portanto, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo MNQ, temos que:

$\overline{MQ}^2 = (12\sqrt{2})^2 + 21^2 - 2 \,.\, 12\sqrt{2} \,.\, 21 \,.\, \cos 45° \Rightarrow$

$\overline{MQ}^2 = 288 + 441 - 504 = 225 \Rightarrow \overline{MQ} = 15$ km.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Pela Lei dos Senos:

$$\frac{x}{\text{sen}\hat{X}} = \frac{y}{\text{sen}\hat{Y}} = \frac{z}{\text{sen}\hat{Z}} = 2R$$

$$\frac{\text{sen}\hat{X}.\text{sen}\hat{Y}.\text{sen}\hat{Z}}{x.y.z} = \frac{1}{8R^3} \Rightarrow \frac{\frac{k.x.y.z}{R^3}}{x.y.z} = \frac{1}{8R^3}$$

$$8k = 1 \Rightarrow k = 0{,}125$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Os ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{D}A$ são alternos internos, portanto eles são iguais a α.

O ângulo $B\hat{A}D$ mede $180 - (\alpha + \beta)$.

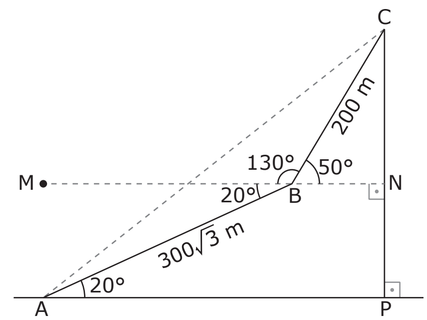
Assim, aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABD, temos:

$$\frac{x}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{d}{\text{sen}\left(180° - (\alpha+\beta)\right)} = \frac{d}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{d.\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}$$

Questão 08 – Letra A

Comentário: Na figura a seguir, se estendermos a reta BN, que é paralela à reta AP, até o ponto **M**, para realçar que os ângulos $M\hat{B}A$ e $P\hat{A}B$ são alternos internos, então o ângulo $C\hat{B}M$ é o suplemento de $N\hat{B}C$.



Portanto, o ângulo $C\hat{B}A = \underbrace{C\hat{B}M}_{130°} + \underbrace{M\hat{B}A}_{20°} = 150°$.

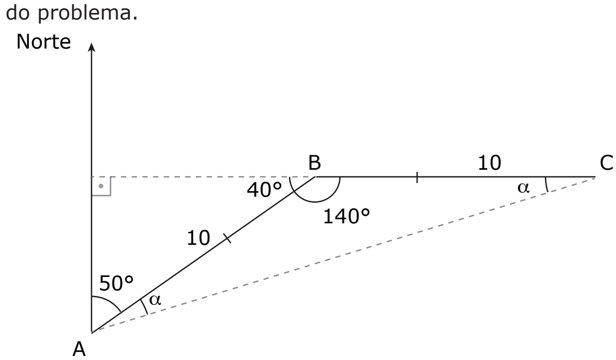
Utilizando a Lei dos Cossenos para calcular AC:

$$AC^2 = \underbrace{AB^2}_{(300\sqrt{3})^2} + \underbrace{BC^2}_{200^2} - 2\,.\,\underbrace{AB}_{300\sqrt{3}}\,.\,\underbrace{BC}_{200}\,.\,\underbrace{\cos 150°}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$AC^2 = 90\,000\,.\,3 + 40\,000 + 60\,000\,.\,3 = 490\,000 \Rightarrow$$
$$AC = 700 \text{ m}$$

Questão 09

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema.



O ângulo α é dado por:

$\alpha + \alpha + 140° = 180° \Rightarrow$

$2\alpha = 40° \Rightarrow \alpha = 20°$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, temos:

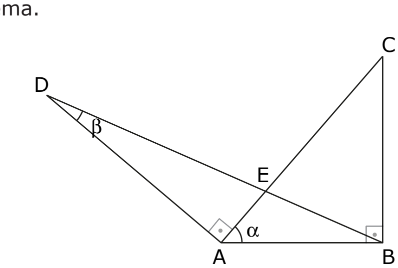
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cancel{100} = \cancel{100} + AC^{\cancel{2}} - 2\,.\,10\,.\,\cancel{AC}\,.\,\cos 20° \Rightarrow$$

$$AC = 20\,.\,0{,}94 = 18{,}8 \text{ km}$$

Questão 10 – Letra D

Comentário: Considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABD, temos:

$$\frac{BD}{\text{sen}\,(90+\alpha)} = \frac{AB}{\text{sen}\,\beta} \Rightarrow BD = \frac{AB.\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta}$$

Agora, valendo-nos das razões trigonométricas no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{\ell} \Rightarrow AB = \ell.\cos\alpha$$

Assim, substituindo esse valor de AB para o valor encontrado em BD, temos:

$$BD = \frac{AB.\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow BD = \frac{\ell.\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$

Questão 11 – Letra A

Comentário: Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 + 25^2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 = 100^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 + 25^2\left(6 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2\right) = 4^2 \,.\, 25^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 = 25^2\left(16 - 8 - 4\sqrt{3}\right) = 2^2 \,.\, 25^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ADC, temos:

$$AC^2 = 50^2 + 50^2 - 2 \,.\, 50 \,.\, 50 \,.\, \cos\delta \Rightarrow$$

$$\cancel{2^2} \,.\, \cancel{25^2}\left(2 - \sqrt{3}\right) = 2 \,.\, \cancel{2^2} \,.\, \cancel{25^2} - 2^{\cancel{3}} \,.\, \cancel{25^2}.\cos\delta \Rightarrow$$

$$\cancel{2} - \sqrt{3} = \cancel{2} - 2.\cos\delta \Rightarrow \cos\delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \delta = 30°$$

Como $\delta = 30°$, $\gamma = 180° - 30° = 150°$.

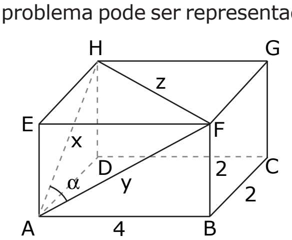
Como o triângulo BCD é isósceles, temos que $B\hat{C}D = C\hat{B}D = \alpha$

Assim, temos: $\delta = \alpha + \alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 15° \Rightarrow$

$B\hat{A}C = 90° - \alpha = 90° - 15° = 75°$

Questão 12 – Letra E

Comentário: O problema pode ser representado como a seguir:



Primeiramente, devemos determinar a medidas **x**, **y** e **z** dos lados do triângulo AFH:

$$x = \sqrt{DH^2 + AD^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$z = \sqrt{EH^2 + EF^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AFH, temos:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2 \,.\, 2\sqrt{2} \,.\, 2\sqrt{5}.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$20 = 8 + 20 - 2 \,.\, 2\sqrt{2} \,.\, 2\sqrt{5}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

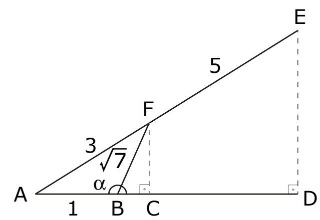
Utilizando a Relação Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{10} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Questão 13 – Letra A

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema:



Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABF, temos:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2.AB.BF.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$9 = 1 + 7 - 2 \,.\, 1.\sqrt{7}.\cos\alpha \Rightarrow 1 = -2\sqrt{7}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

Como $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

Agora, aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo ACF, temos:

$$\cos\alpha = \frac{BC}{\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{1}{2\cancel{\sqrt{7}}} \Rightarrow BC = \frac{1}{2}\text{ m}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACF, temos:

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 \Rightarrow$$

$$7 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + CF^2 \Rightarrow$$

$$CF^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow$$

$$CF = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ m}$$

Finalmente, como os triângulos ACF e ADE são semelhantes (AAA), temos:

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{3}}{\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{8}}{DE} \Rightarrow DE = 4\sqrt{3}\text{ m}$$

Portanto, a altura que a ponta elevada da haste principal atingirá quando o pistão hidráulico estiver estendido será de $4\sqrt{3}$ m.

Seção Enem

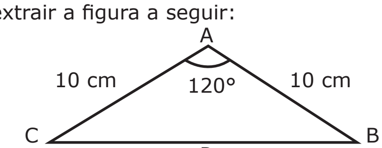
Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Com base na geometria da situação descrita, podemos extrair a figura a seguir:



Aplicando a Lei dos Cossenos no ΔCAB, temos que:

$$R^2 = 10^2 + 10^2 - 2\ .\ 10\ .\ 10\ .\ \cos 120° \Rightarrow$$
$$R^2 = 100 + 100 - 2\ .\ 10\ .\ 10\ .\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$
$$R^2 = 200 + 100 = 300$$
$$R = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \cong 17\,\text{cm}$$

Logo, o tipo de material utilizado será IV.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O comprimento da escada é o produto do número de degraus pelo espaçamento entre eles.

Comprimento da escada: 8 . 25 = 200 cm

Sendo **x** o comprimento da rampa, pela Lei dos Senos, temos:

$$\frac{200}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow$$

$$x = 100\sqrt{6}\text{ cm} = \sqrt{6}\ .\underbrace{100\text{ cm}}_{1\text{ m}} = \sqrt{6}\text{ m}.$$

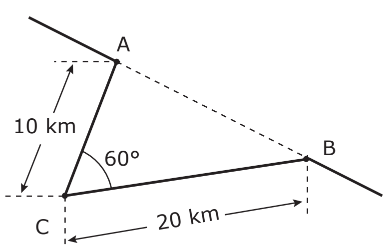
Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:



Pela Lei dos Cossenos, temos:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2.AC.CB.\cos 60° \Rightarrow$

$AB^2 = 10^2 + 20^2 - 2.10.20.\frac{1}{2} \Rightarrow$

$AB^2 = 300 \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$

Portanto, a diferença de percurso encontrada pela construtora foi $(AC + CB) - AB = 10\text{ km} + 20\text{ km} - 10\sqrt{3}\text{ km} = (30 - 10\sqrt{3})\text{ km} \Rightarrow$

$(AC + CB) - AB = 10(3 - \sqrt{3})$ km.

MÓDULO – B 11

Áreas de Polígonos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: Aplicando o Teorema de Pitágoras em AMD, temos:

$$3^2 + AD^2 = 5^2 \Rightarrow AD = 4$$

Como AMD é retângulo, sua área **S** pode ser dada pelo semiproduto de seus catetos, ou seja, $S = \frac{3\ .\ 4}{2} = 6$.

Questão 02 – Letra A

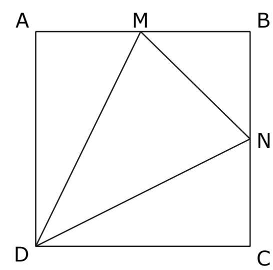
Comentário: Sendo **x** a medida do lado de cada quadrado, DF = 2x e FG = x. Aplicando o Teorema de Pitágoras em DFG:

$$(2x)^2 + x^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x = 2\text{ m}$$

Logo, o lado dos quadrados é 2 m. A área de cada um será $2^2 = 4\text{ m}^2$. A área do quintal será, portanto, $5\ .\ 4 = 20\text{ m}^2$.

Questão 03 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir, que ilustra a situação descrita no enunciado.



A área procurada é tal que:

$$S_{MND} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{MBN} - S_{DNC}$$
$$S_{MND} = 2.4 - \frac{4.1}{2} - \frac{1.1}{2} - \frac{3.2}{2} = 2{,}5$$

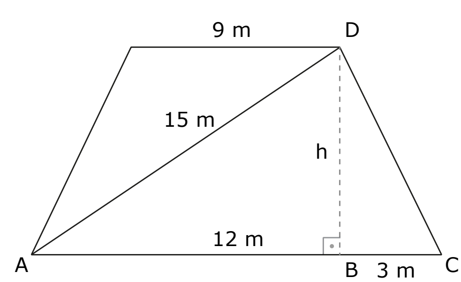
Questão 04 – Letra C

Comentário: A área procurada, que será denotada por **S**, é tal que:

$$S = S_{ADFE} - S_{BEC} - S_{FCD}$$
$$S = 50.50 - \frac{25.25}{2} - \frac{50.25}{2} = 1\ 562{,}5\text{ m}^2$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir, que ilustra a situação descrita no enunciado.



Perceba que o triângulo ABD é retângulo. Perceba também que $BC = \frac{15-9}{2} = 3$ m. Logo, AB = 12 m. Aplicando Pitágoras:

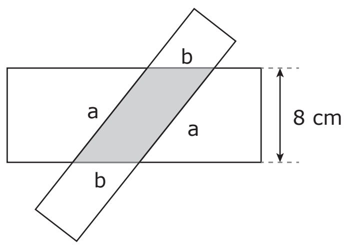
$$15^2 = 12^2 + h^2 \Rightarrow h = 9\text{ m}$$

A área **S** do trapézio é tal que $S = \frac{9.(9+15)}{2} = 108\text{ m}^2$.

MATEMÁTICA

Questão 06 – Letra E

Comentário: Após a sobreposição das figuras como ilustrado a seguir:



Temos que a > 8 cm e b < 8 cm. Logo, b = 4,5 cm.

Calculando a área do paralelogramo:

$(\text{Base}) \,.\, (\text{Altura em relação à base}) = b.8 = 4{,}5 \,.\, 8 = 36 \text{ cm}^2$.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Denotando AD = BC = x e CD = AB = y, tem-se:

$S_{ABCD} = x.y$

$S_{FED} = S_{ABCD} - S_{ADE} - S_{EBF} - S_{CDF}$

$$S_{FED} = x.y - \frac{x.\frac{y}{2}}{2} - \frac{\frac{x}{2}.\frac{y}{2}}{2} - \frac{\frac{x}{2}.y}{2} = \frac{3xy}{8}$$

$$\frac{S_{FED}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3xy}{8}}{xy} = \frac{3}{8}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: O papel de parede de linhas diagonais representa um retângulo de medidas 2 e (x + 2). Como as áreas decoradas por cada tipo de papel são iguais, temos:

$$2 \,.\, 2(x+2) = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4+4\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3}\,\text{m}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Perceba que, por simetria, ABC é retângulo isósceles. Assim, encontrar-se-á a medida do seu cateto a fim de se calcular a sua área. Perceba que a diagonal do quadrado, de medida $2\sqrt{2}$, é composta por dois raios; logo, o raio das circunferências mede $\sqrt{2}$. Perceba, por fim, que AB é a diferença entre o lado do quadrado e o raio da circunferência; portanto $AB = AC = 2 - \sqrt{2}$. Logo, a área **S** procurada é tal que:

$$S = \frac{AB.AC}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABE, temos que:

$\overline{BE}^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, \cos 60° \Rightarrow$

$\overline{BE}^2 = 9 + 64 - 48 \,.\, \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\overline{BE}^2 = 49 \Rightarrow \overline{BE} = 7$

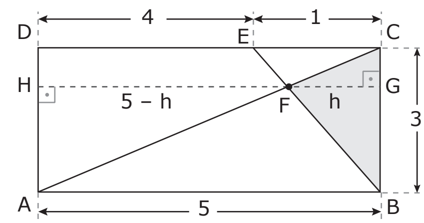
Assim, a área do triângulo BCE é tal que:

$$10{,}5 = \frac{1}{2} \,.\, \overline{CE} \,.\, 7 \,.\, \text{sen } 30° \Rightarrow 10{,}5 = \overline{CE} \,.\, \frac{7}{2} \,.\, \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{42}{7} = 6$$

Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CDE, temos: $\overline{DE}^2 = 6^2 - 4^2 \Rightarrow \overline{DE}^2 = 20 \Rightarrow \overline{DE} = \sqrt{20}$ cm

Questão 03 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



Da semelhança dos triângulos ABF e CEF, temos:

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{AF} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{CF}{AF} \quad (\text{I})$$

Da semelhança dos triângulos FGC e FHA, temos:

$$\frac{h}{5-h} = \frac{CF}{AF} \quad (\text{II})$$

Igualando as equações (I) e (II), temos:

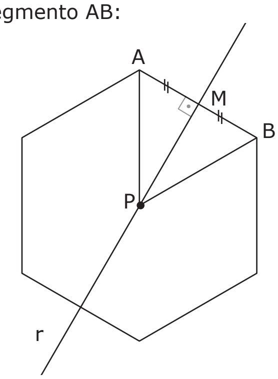
$$\frac{h}{5-h} = \frac{1}{5} \Rightarrow h = \frac{5}{6}$$

Portanto, a área **A** do triângulo BCF vale:

$$A = \frac{BC.h}{2} = \frac{3.\frac{5}{6}}{2} \Rightarrow A = \frac{5}{4}.$$

Questão 04 – Letra E

Comentário: Considere a seguinte imagem, na qual **r** é a mediatriz do segmento AB:



Primeiramente, como o hexágono é regular, a área dele será dada por:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \,.\, \frac{AB^2\cancel{\sqrt{3}}}{4} = \cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow AB^2 = \frac{4}{6} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Agora, a área do triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{AB \,.\, PM}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{6}} \,.\, PM}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{\sqrt{6}} \,.\, PM}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{2}}{\sqrt{6}} \,.\, PM = \cancel{2}\sqrt{2} \Rightarrow PM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Como a área do trapézio vale 10, temos:

$$\frac{(3+x).2}{2} = 10 \Rightarrow x = 7$$

Projetando-se as alturas do trapézio que partem dos vértices superiores, formam-se dois triângulos retângulos de catetos valendo 2 e $\frac{7-3}{2} = 2$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nesses triângulos, percebemos que os lados congruentes do trapézio medem $2\sqrt{2}$. Agora, perceba que x = 7 é a medida da diagonal do quadrado. Logo, a medida **y** do seu lado é tal que:

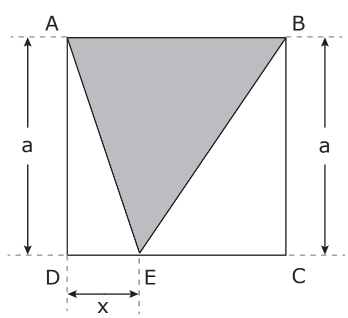
$$y\sqrt{2} = 7 \Rightarrow y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

O perímetro total é tal que:

$$2p = 4.\frac{7\sqrt{2}}{2} + \left(3+7+2\ .\ 2\sqrt{2}\right) = 10 + 18\sqrt{2}$$

Questão 06 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:



Como a área do triângulo ADE corresponde a 20% da área do quadrado ABCD, temos que:

$$A_{\Delta\ ADE} = \frac{1}{5}.A_{ABCD} \Rightarrow \frac{a.x}{2} = \frac{1}{5}.a^2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}a$$

Logo, EC = a – x = $a - \frac{2}{5}a = \frac{3}{5}a$.

Como a área do triângulo EBC vale 30 cm², então **a**, em cm, vale:

$$\frac{1}{2}.EC.BC = \frac{1}{2}.\frac{3}{5}a.a = 30 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10\ cm.$$

Questão 07 – Letra D

Comentário: Denotando AB = AE = ED = x, tem-se que as dimensões do retângulo são **x** e 2x. Como sua área vale 200 m², x.2x = 200 e x = 10 m, logo, AB = CD = 10 m e AD = BC = 20 m. Denotando por **P** e **M** as projeções de **F** sobre AB e CD respectivamente, perceba que BFP e ABE são semelhantes na razão 1 : 2. Como AE = 10 m, FP = 5 m, portanto, M = 15 m. A área **S** procurada é tal que $S = \frac{FM.CD}{2} = \frac{10\ .\ 15}{2} = 75$ m².

Questão 08 – Letra A

Comentário: Como a área do triângulo T_1 é o triplo da área do triângulo T_2, temos que:

$$A_{T_1} = 3A_{T_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\ell^2}{2}\text{sen}\ \theta = \frac{3\ell^2}{2}\text{sen}\ 2\theta \Rightarrow$$

$$\text{sen}\ \theta = 3\underbrace{\text{sen}\ 2\theta}_{\text{sen}(\theta+\theta)} \Rightarrow$$

$$\text{sen}\ \theta = 3.\text{sen}\ (\theta + \theta) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\ \theta = 3\ .\ 2\ .\ \text{sen}\ \theta.\cos\ \theta \Rightarrow$$

$$\cos\ \theta = \frac{\cancel{\text{sen}\ \theta}}{6\cancel{\text{sen}\ \theta}} \Rightarrow$$

$$\cos\ \theta = \frac{1}{6}.$$

Questão 09 – Letra D

Comentário: Observando a figura e os dados do enunciado, temos que:

Largura do deque = x;

Largura do lago = y;

x = z (dado no enunciado);

e também que:

A_{total} = 5 . (0,5 + y + 1) = 20 ⇒ y = 2,5 m;

A_{deque} = 4 . x;

A_{lago} = x . 2,5.

Dado que 48% da área do terreno é a região gramada, então a essa área é:

$A_{gramada}$ = 0,48 . 20 = 9,6 m².

$A_{total} = A_{deque} + A_{lago} + A_{gramada}$ ⇒ 20 = 4 . x + 2,5 . x + 9,6 ⇒ x = 1,6 m.

Assim:

A_{lago} = 1,6 . 2,5 = 4 m²

Questão 10 – Letra B

Comentário: O quadrado ABCD é formado pelos triângulos ABC e ACD. Tais triângulos têm base igual a ℓ e altura igual $\frac{\ell}{2}$. Logo, a área do quadrado será: $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = 2\left(\frac{\frac{\ell}{2}.\ell}{2}\right) = \frac{\ell^2}{2}$;

O quadrilátero AECF é formado pelos triângulos AEC e ACF, e estes têm base igual a ℓ e altura igual $\frac{\ell}{4}$. Logo, a área do quadrilátero será: $A_{AECF} = A_{AEC} + A_{ACF} = 2\left(\frac{\frac{\ell}{4}.\ell}{2}\right) = \frac{\ell^2}{4}$;

Área de MNPQ é igual a ℓ^2.

A área da superfície destacada é:

$$A_{ABCD} - A_{AECF} = \frac{\ell^2}{4};$$

Dessa forma, temos que:

$\frac{\ell^2}{4}$.k = ℓ^2, portanto k = 4.

Questão 11

Comentário: Se as frentes dos terrenos têm o mesmo comprimento, estes terão a mesma altura, cuja medida é denotada por **h**. Sendo **y** o comprimento do segmento que separa os dois terrenos, paralelo às laterais e denotando por S_A e S_B as áreas de **A** e **B**, tem-se:

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{\frac{h(x+y)}{2}}{\frac{h(20+y)}{2}} = 2 \Rightarrow$$

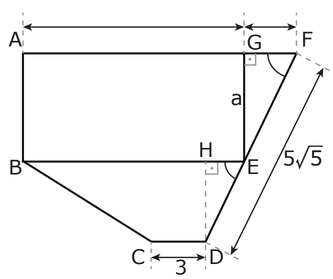
$$x + y = 40 + 2y \Rightarrow$$

$$y = x - 40$$

Pela equação de base média 20 + x = 2y, ou seja, 20 + x = 2(x − 40) e x = 100 m.

Questão 12 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo EFG, temos que:

$EF^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow$

$EF^2 = 45 \Rightarrow$

$EF = 3\sqrt{5}$

Logo, $ED = DF - EF \Rightarrow ED = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \Rightarrow ED = 2\sqrt{5}$.

Pelo caso AA, temos que os triângulos EFE e DEH são semelhantes; podemos, então, determinar a medida DH, que corresponde à altura do trapézio BCDE. Assim:

$$\frac{DH}{EG} = \frac{ED}{EF} \Rightarrow$$

$$\frac{DH}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$DH = 4$$

Dessa forma, temos que a área a ser calculada é igual a:

$$A = A_{ABEG} + A_{\Delta EFG} + A_{BCDE} \Rightarrow$$

$$A = 12 \,.\, 6 + \frac{3 \,.\, 6}{2} + \frac{(12+3)4}{2} \Rightarrow$$

$$A = 72 + 9 + 30 = 111 \text{ cm}^2$$

Na escala apresentada, temos que:

1 cm (desenho) = 200 000 cm (real).

Logo: 1 cm^2 (desenho) = $200\,000^2$ cm^2 (real).

Assim: $111.(4 \,.\, 10^{10})$ cm^2 = 444 km^2.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 08

Comentário: A área do terreno retangular é igual a A_R = 18 . 24 = 432 m^2.

Sabendo que os triângulos formados são isósceles, eles possuem dois lados iguais, logo esses lados iguais correspondem à largura do retângulo.

Assim, a área de cada triângulo é:

$$A_\Delta = \frac{18 \,.\, 18}{2} = 162 \text{ m}^2$$

A área do passeio é a diferença entre a área do quadrado e a área desses dois triângulos. Portanto:

$A_P = A_R - 2(A_\Delta)$

$A_P = 432 - 2 \,.\, 162$

$A_P = 432 - 324$

$A_P = 108$ m^2

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como as áreas devem ser iguais:

$A_A = A_B \Rightarrow A_A = x\,(x + 7) \Rightarrow A_A = x^2 + 7x$

$$A_B = \frac{15.15}{2} + \frac{3.21}{2} \Rightarrow A_B = \frac{225+63}{2} \Rightarrow A_B = \frac{288}{2} \Rightarrow A_B = 144$$

$x^2 + 7x = 144 \Rightarrow x^2 + 7x - 144 = 0$

Resolvendo, temos:

$$\Delta = 7^2 - 4.(1).(-144)$$

$$\Delta = 625$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2} \begin{cases} x' = \frac{-7+25}{2} = 9 \\ x'' = \frac{-7-25}{2} = \cancel{-16} \end{cases}$$

Como x = 9, comprimento = 9 e largura = 9 + 7 = 16.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sendo S_i e S_f as áreas do garrafão antes e após a alteração, temos:

$$S_f - S_i = 580 \,.\, 490 - \frac{(600+360).580}{2} = 10 \,.\, 580 = 5\,800 \text{ cm}^2.$$

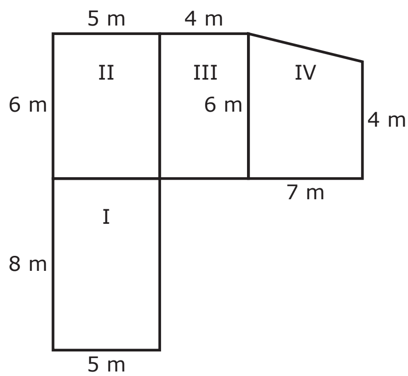
Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Calculando as áreas de cada ambiente, temos:



$A_I = 5.8 \Rightarrow A_I = 40\ m^2$

$A_{II} = 6.5 \Rightarrow A_{II} = 30\ m^2$

$A_{III} = 4.6 \Rightarrow A_{III} = 24\ m^2$

$A_{IV} = \dfrac{(6+4)7}{2} \Rightarrow$

$A_{IV} = 35\ m^2$

Com os valores das áreas encontrados, temos que:
O modelo **A** deve ser instalado nos ambientes II e III, já o modelo **B** deve ser instalado nos ambientes I e IV.

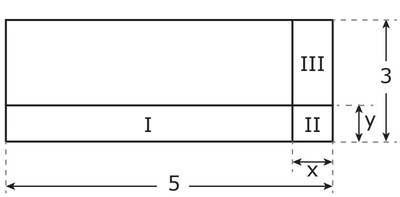
Questão 05 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: A expressão da área perdida é indicada como I, II e III na figura a seguir:



I. $(5 - x).y$

II. $x.y$

III. $(3 - y).x$

Área(I) + Área(II) + Área(III) = $(5 - x).y + xy + (3 - y).x =$

$5y - \cancel{xy} + \cancel{xy} + 3x - xy = 5y + 3x - xy.$

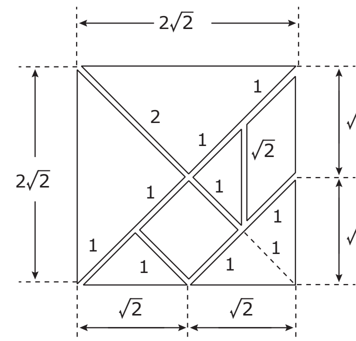
Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: Como o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, teremos a figura 1 com as seguintes medidas, em cm.



Assim, a figura 1 é um quadrado de lado $2\sqrt{2}$ cm. Logo, sua área, em cm^2, vale:

$A_I = (2\sqrt{2})^2 = 8$

Como as áreas das três figuras são iguais, a área da figura 3 é igual a 8 cm^2.

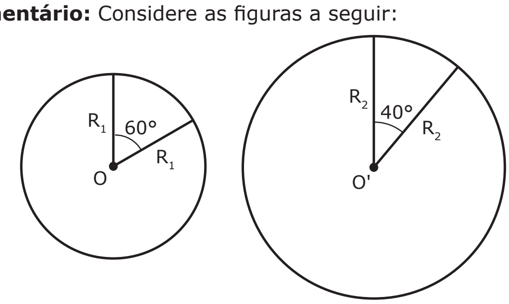
MÓDULO – B 12

Áreas de Círculo e suas Partes

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: Considere as figuras a seguir:



Círculo 1 Círculo 2

Sendo R_1 e R_2 os raios dos círculos, temos:

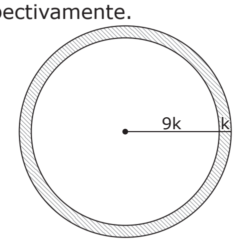
$$\frac{60°}{\cancel{360°}}.\cancel{2\pi}R_1 = \frac{40°}{\cancel{360°}}.\cancel{2\pi}R_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{40°}{60°} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$

A razão entre a área do círculo I e a área do círculo II é:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\cancel{\pi}R_1^2}{\cancel{\pi}R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Questão 02 – Letra E

Comentário: Pela figura a seguir, temos os raios do *tsunami* após as 9 h e após as 10 h, de modo que os raios dos círculos são 9k e 10k respectivamente.



Logo, a área hachurada é:

$A = A_{r=10k} - A_{r=9k} = \pi(10k)^2 - \pi(9k)^2 = \pi k^2(100 - 81) = 19\pi k^2.$

MATEMÁTICA

Questão 03 – Letra D

Comentário:

Área do quadrado: l^2;

Área do círculo: πR^2.

Dado que os perímetros do quadrado e do círculo são iguais, temos:

$4l = 2\pi R$ implica que $R = \dfrac{2l}{\pi}$.

Assim, a razão: $\dfrac{A_{quadrado}}{A_{círculo}} = \dfrac{l^2}{\pi R^2} = \dfrac{l^2}{\pi\left(\dfrac{2l}{\pi}\right)^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

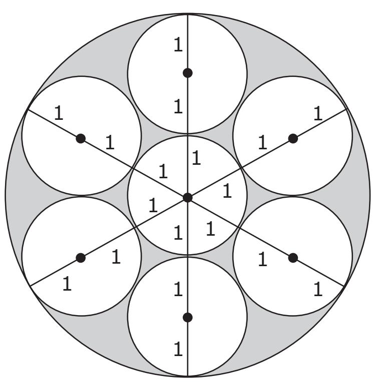
Questão 04 – Letra C

Comentário: A área hachurada é a área de um quarto de círculo de raio **x** subtraído de um semicírculo de raio $\dfrac{x}{2}$, ou seja:

$$A_H = \frac{x^2\pi}{4} - \frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\pi}{2} = \frac{x^2\pi}{8}$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Pela figura a seguir, percebemos que o raio do círculo grande são 3 raios dos círculos inseridos em seu interior.



Portanto, a área sombreada é calculada da seguinte maneira:

$$A_{Círculo\ grande} - 7.A_{Círculo\ pequeno} = \pi.3^2 - 7.\pi.1^2 = 2\pi.$$

Questão 06 – Letra C

Comentário: A área colorida é a área do hexágono menos a área do círculo.

$$A_{hexágono} = \frac{6\sqrt{3}\ell^2}{4} = \frac{6\sqrt{3}(2)^2}{4} = 6\sqrt{3} = 6.1,7 = 10,2\ cm^2$$

$$A_{círculo} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi = 3\ \ cm^2$$

$$A = A_{hexágono} - A_{círculo} = 7,2\ cm^2.$$

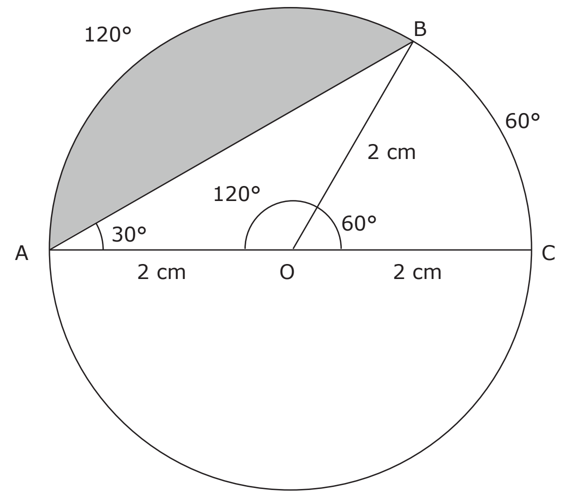
Questão 07 – Letra D

Comentário: Observando a figura, inferimos que DB é igual dois raios, e que DA é igual ao raio. Assim, DB = 10 cm e DA = 5 cm. Como ABCD é um retângulo, o triângulo ABD é retângulo, então $AB^2 + DA^2 = DB^2$, portanto $AB^2 + 5^2 = 10^2$, logo $AB = 5\sqrt{3}$.

A área pedida é $5 \,.\, 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

Questão 08

Comentário: Observe a figura a seguir:



Temos que $A\hat{O}B = 120°$, logo a área hachurada **A** é igual à diferença entre a área do setor cujo ângulo central mede 120° e a área do triângulo AOB. Assim:

$$A = A_{setor} - A_{\Delta\ AOB} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\pi.2^2.120°}{360°} - \frac{\cancel{2}.2.\text{sen}\,120°}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$A = \frac{4\pi}{3} - 2.\underbrace{\text{sen}\,120°}_{\text{sen}\,60°} \Rightarrow$$

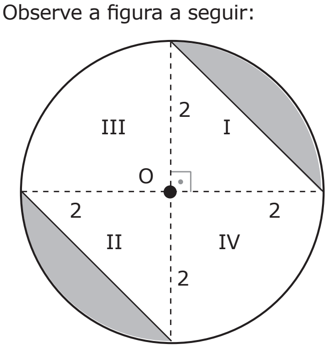
$$A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Portanto, a área hachurada é igual a $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\ cm^2$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:



Temos que as áreas I e II correspondem, cada uma, à área de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. Logo:

$$A_I + A_{II} = \cancel{2}.\frac{2\,.\,2}{\cancel{2}} = 4\ cm^2$$

Temos que as áreas III e IV somadas correspondem à área de uma semicircunferência de raio igual a 2 cm. Logo:

$$A_{III} + A_{IV} = \frac{\pi.2^2}{2} = 2\pi \text{ cm}^2$$

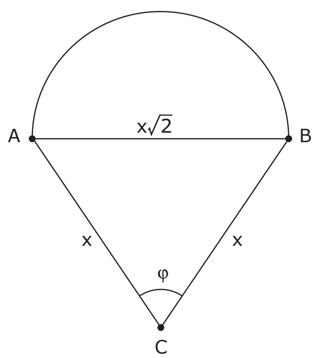
A área hachurada **A** será igual à diferença entre a área do círculo de raio = 2 cm e a soma das áreas das partes I, II, III e IV. Assim:

$$A = A_{Círculo} - A_{(I+II+III+IV)} = \pi 2^2 - (4 + 2\pi) \Rightarrow$$

$$A = 4\pi - 4 - 2\pi = (2\pi - 4) \text{ cm}^2.$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:



O triângulo ABC é isósceles, logo AC = BC = x. Sendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, temos que o diâmetro $\overline{AB}$ do semicírculo é igual a $x\sqrt{2}$.

Calculando a área S(φ) do semicírculo, cujo raio é igual a $\frac{x\sqrt{2}}{2}$:

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}.\pi.\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow S(\varphi) = \frac{\pi}{2}.\frac{2x^2}{4} \Rightarrow S(\varphi) = \frac{\pi x^2}{4}$$

Calculando a área do triângulo ABC, retângulo em **C**, temos:

$$T(\varphi) = \frac{x.x}{2} \Rightarrow T(\varphi) = \frac{x^2}{2}$$

Logo,

$$\frac{S(\varphi)}{T(\varphi)} = \frac{\frac{\pi x^2}{4}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\pi \cancel{x^2}}{4}.\frac{2}{\cancel{x^2}} \Rightarrow \frac{S(\varphi)}{T(\varphi)} = \frac{\pi}{2}.$$

Questão 03

Comentário:

A) Pela análise dos dados da questão e da figura, temos que os raios dos círculos de centros **C**, **D** e **E** são 16, 8 e 8, respectivamente.

B) Temos que $\overparen{AC} = \overparen{CB} = \frac{2.\pi.r}{2} = 8\pi$ e $\overparen{BA} = \frac{2.\pi.r}{6} = \frac{16\pi}{3}$.

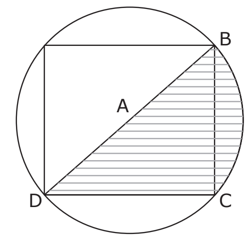
C) $A_I = A_{III} = \frac{\pi.r^2}{2} = 32\pi$

$$A_{II} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}$$

$$A_{IV} = \frac{\pi\,.\,r^2}{6} - A_{II} = \frac{128\pi}{3} - 64\sqrt{3}$$

Questão 04 – Letra C

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



Os pontos ABC determinam um setor circular reto. A área desse setor é $A_{setor} = \frac{1}{4}\pi r^2$, e **r** é metade da diagonal do quadrado, ou seja, $r = \frac{8}{2}\sqrt{2}$. Assim, a área do setor será:

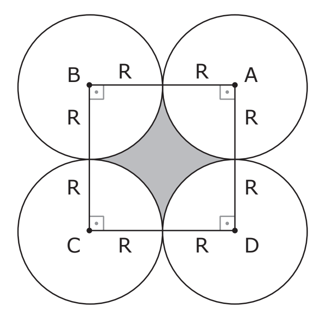
$$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{8}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi.$$

Conforme a figura, a área do triângulo ACD será: $A_{ADC} = \frac{8.\frac{8}{2}}{2} = 16.$

Logo, a área solicitada é $A_{setor} + A_{ADC} = 8(\pi + 2)$ cm².

Questão 05 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:



Sendo **R** o raio das circunferências, temos que cada uma delas possui área igual a πR^2.

Unindo-se os centros **A**, **B**, **C** e **D** das circunferências, encontramos um quadrado de lado 2R; logo, a área hachurada será igual a:

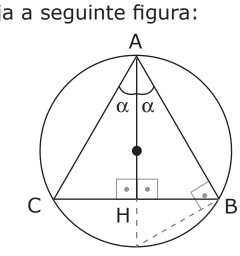
$$A = A_{ABCD} - A_{Circunferência} = (2R)^2 - 4\,.\,\frac{\pi R^2}{4} = 4R^2 - \pi R^2$$

Portanto, a razão entre a área de um círculo e a área **A** é:

$$\frac{\pi R^2}{R^2(4 - \pi)} = \frac{\pi}{4 - \pi}.$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Seja a seguinte figura:



Como AB = AC, o triângulo ABC é isósceles de base BC.

Logo, $C\hat{A}H = \alpha$, pois AH é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

Daí, a área do triângulo ABC é $A = \frac{1}{2}.(AB)^2.\text{sen } 2\alpha$.

Analisando o triângulo ABD, temos:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB}{2R} \Rightarrow R = \frac{AB}{2.\cos\alpha}$$

Assim, a área do círculo é:

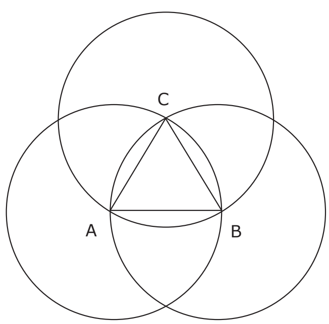
$$A_C = \pi R^2 = \pi\left(\frac{AB}{2.\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\pi(AB)^2}{4.\cos^2\alpha}$$

Portanto, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área do círculo é:

$$\frac{A}{A_C} = \frac{\frac{(AB)^2.\text{sen } 2\alpha}{2}}{\frac{\pi(AB)^2}{4.\cos^2\alpha}} = \frac{2}{\pi}.\text{sen } 2\alpha.\cos^2\alpha$$

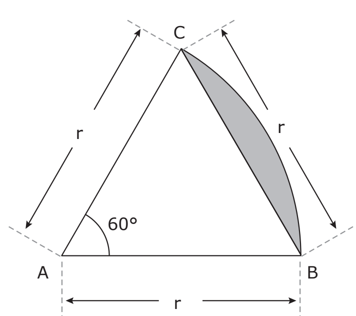
Questão 07 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



Temos que AB = BC = CA = r. Logo, o triângulo ABC é equilátero de lado **r**, e sua área é $A_{\Delta\, ABC} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

No setor circular a seguir, a área **A** do segmento circular é:



$$A = A_{setor} - A_{\Delta\, ABC} = \frac{\pi r^2.60°}{360°} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Logo, a área **S** do Triângulo de Reuleaux é a soma das áreas dos três segmentos circulares (que têm o mesmo valor), com a área do triângulo equilátero ABC.

$$S = 3.A + A_{\Delta\, ABC} \Rightarrow$$

$$S = 3.\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2.$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Chamemos o centro da semicircunferência de diâmetro BM de O_1, o centro da semicircunferência de diâmetro AM de O_2 e o centro da semicircunferência de diâmetro CD de O_3.

Pela figura, temos que $MO_1 = MO_2 = r$, $CO_3 = 2MO_2 = 2r$, e estes segmentos são os respectivos raios das semicircunferências.

O triângulo com vértices nos pontos **M**, O_1 e O_3 é retângulo, logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$(MO_3)^2 + (MO_1)^2 = (O_1O_3)^2$, ou seja, $6^2 + r^2 = (3r)^2$, portanto, $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Pela figura, temos:

AB = 4r, então $AB = 6\sqrt{2}$.

Assim, a área do quadrado ABCD é:

$6.\ 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Consideremos que o lado do quadrado tenha medida **d**, a circunferência menor terá raio de medida $\frac{d}{2}$ e a maior terá diâmetro igual a $d\sqrt{2}$ e raio igual a $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. Assim, teremos:

$$A_{c\ menor} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2;$$

$$A_{c\ maior} = \pi\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$A_{quadrado} = d^2;$$

Cálculo da área escura:

$$A_E = A_{quadrado} - A_{c\ menor} =$$

$$d^2 - \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = d^2\left(\frac{4-\pi}{4}\right);$$

Porcentagem pedida:

$$\frac{A_E}{A_{c\,maior}} = \frac{d^2\left(\frac{4-\pi}{4}\right)}{\pi\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{d^2\left(\frac{4-\pi}{4}\right)}{d^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{8-2\pi}{4\pi} = 0{,}137 \text{ ou } 13{,}7\%.$$

Questão 10 – Letra B

Comentário: Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ACB, temos:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2.BC.AC.\cos 120° \Rightarrow$

AB = 14 cm.

Assim, AD = 21 cm, por semelhança entre os triângulos de vértices **A**, **B** e **C**, e vértices **A**, **D** e **E**, temos:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{DA}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{6} = \frac{21}{14} \Rightarrow DE = 9 \text{ cm}$$

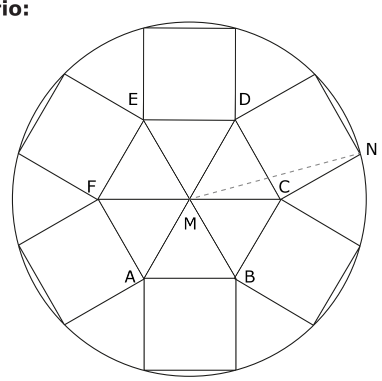
Logo, o arco tem raio igual 9 cm, e o ângulo $D\hat{E}F$ é igual a 60°, pois é suplementar $D\hat{E}A$, e $D\hat{E}A$ é congruente de $A\hat{C}B = 120°$.

A área do setor será:

$$A_{setor} = \frac{\pi}{6}(9)^2 = \frac{27\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Questão 11 – Letra C

Comentário:



Pela análise da figura, temos que MN tem medida igual ao raio da circunferência, e o ângulo $M\hat{C}N$ tem medida igual a 150°, pois é formado por um ângulo reto do quadrado e um ângulo de 60° de triângulo equilátero.

Usando a Lei dos Cossenos no triângulo MCN, temos:

$MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2.CM.CN.\cos(150°)$

$MN^2 = 1^2 + 1^2 - 2 . 1 . 1.\cos(150°) = 2 + \sqrt{3}$

Como MN é a medida do raio, a área do círculo será:

$A_c = \pi MN^2 = \pi\left(2 + \sqrt{3}\right)$

Seção Enem

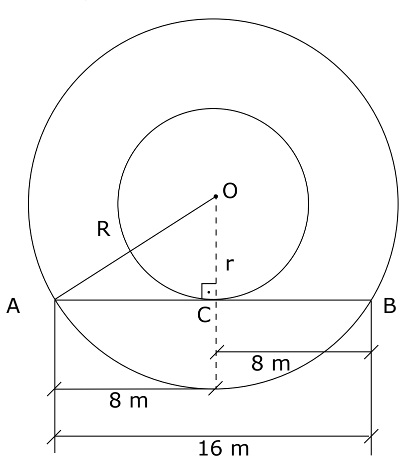
Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Observe a figura a seguir, que foi retirada da geometria da situação descrita.



A região encontrada pelo engenheiro será a região circular. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle$OAC:

$R^2 = r^2 + 8^2 \Rightarrow$

$R^2 - r^2 = 64$ (I)

Calculando a área da região circular, temos:

$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \underbrace{\left(R^2 - r^2\right)}_{(I)} = \pi . 64 \, m^2$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sendo **r** o raio da mancha de óleo formada, a área da mancha é tal que:

$\pi.r^2 = 100 \Rightarrow r \cong 5,77 \cong 6$ km

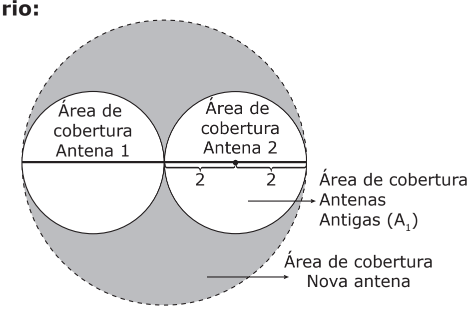
Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:



Observe que, pelo exposto no enunciado, o raio da nova antena é 4 km e sua área será indicada por A_{NA}.

$A_1 = \pi . 2^2 = 4\pi \ \ km^2$ e $A_{NA} = \pi . 4^2 = 16\pi \ \ km^2$

Logo, a área da nova antena será $16\pi - 2 . 4\pi = 8\pi \ \ km^2$.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: A área dos três setores deverá ser menor que a área do retângulo de dimensões 50 m e 24 m.

Portanto,

$A_{Setores} < 50 . 24 \Rightarrow 3.\dfrac{60°}{360°}.\pi R^2 < 50 . 24 \Rightarrow \dfrac{\pi R^2}{2} < 50 . 24$

Considerando $\pi = 3$, temos: $R^2 < 800$.

Assim, o maior valor possível para **R** é 28 m.

Questão 05 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Os raios das tampas grandes, médias e pequenas valem, em metros, respectivamente, 1, $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{4}$.

As sobras de material A_I, A_{II} e A_{III} das tampas grandes, médias e pequenas valem, respectivamente, em m²:

$A_I = (2)^2 - \pi(1)^2 \Rightarrow A_I = 4 - \pi$

$A_{II} = (2)^2 - 4\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{II} = 4 - \pi$

$A_{III} = (2)^2 - 16\pi\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow A_{III} = 4 - \pi$

Portanto, se a empresa usar a mesma quantidade de chapas para produzir as tampas grandes, médias e pequenas, as sobras serão iguais, pois $A_I = A_{II} = A_{III}$.

MÓDULO – C 09

Outras Funções Trigonométricas

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Seja **f** uma função definida:

$$f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2.\cos x$$

Aplicando **f** para $x = -\frac{7\pi}{4}$, temos:

$$f\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -4.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) + 2.\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$-4.\cos\left(\frac{2\pi + 7\pi}{4}\right) + 2.\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) =$$

$$-4.\underbrace{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)}_{\cos\frac{\pi}{4}} + 2.\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -4.\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Como $\sec x = \frac{5}{4}$ para $x \in$ 4º quadrante, temos:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\text{sen}^2\, x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{3}{5}$$

Logo, $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Como $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ e **x** pertencem ao primeiro quadrante, os valores de seno, cosseno e tangente de **x** são positivos. Assim:

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então, o valor de **y** é:

$$\frac{\cos x}{\text{tg}\, x + \sec x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário:

$$\text{tg}\, x = a \Rightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = a \Rightarrow \text{sen}\, x = a.\cos x$$

Da relação fundamental, temos:

$$(a.\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x(a^2 + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{a^2 + 1} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{a^2+1}} \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}, \text{ pois } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Como vimos, $\text{sen}\, x = a.\cos x = -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$.

Assim: $\text{sen}\, x + \cos x = \frac{-a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{-a-1}{\sqrt{a^2+1}}$.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Pela Relação Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\, 18° + \cos^2 18° = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \cos^2 18° = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 18° = 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} \Rightarrow \cos^2 18° = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \Rightarrow$$

$$\cos 18° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sec 18° = \frac{1}{\cos 18°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$$

Questão 06 – Letra D

Comentário: Como o arco relevante se encontra no terceiro quadrante, o seu valor de seno é negativo. Assim, pela Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, x + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\, x = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{5}{13} \Rightarrow$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

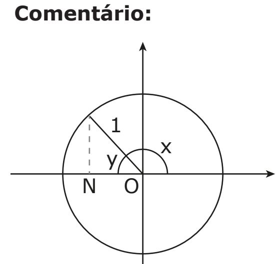
Questão 07 – Letra A

Comentário: Utilizando-se as definições das funções trigonométricas secante e cossecante, tem-se:

$$\frac{\text{sen}\, \theta}{\text{cossec}\, \theta} + \frac{\cos \theta}{\sec \theta} = \frac{\text{sen}\, \theta}{\frac{1}{\text{sen}\, \theta}} + \frac{\cos \theta}{\frac{1}{\cos \theta}} \Rightarrow \text{sen}^2\, \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Questão 08 – Letra B

Comentário:

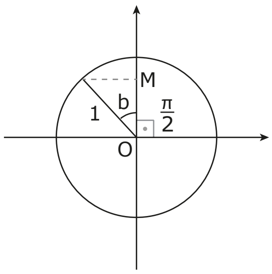


$$x + y = \pi$$

$$\cos y = \frac{ON}{1} \Rightarrow$$

$$ON = \cos y = \cos(\pi - x) = \cos x \Rightarrow$$

$$ON = \cos x$$

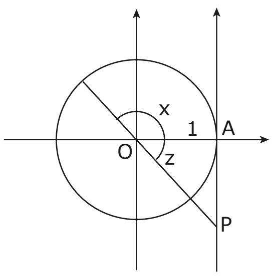


$$\frac{\pi}{2} + b = x$$

$$\cos b = \frac{OM}{1} \Rightarrow$$

$$OM = \cos b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x \Rightarrow$$

$$OM = \text{sen } x$$



$$x + z = \pi$$

$$\text{tg } z = \frac{AP}{AO} = \frac{AP}{1} \Rightarrow$$

$$AP = \text{tg } z = \text{tg } (\pi - x) = \text{tg } x \Rightarrow$$

$$AP = \text{tg } x$$

Assim, ON = cos x; OM = sen x e AP = tg x.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Dado que o ângulo α pertence ao primeiro quadrante, temos que sen $\alpha > 0$ e cos $\alpha > 0$.

Assim:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow |\text{sen } \alpha| = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Logo, o valor de tg α é:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}} = \frac{4}{3}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Se $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$ e α pertencem ao segundo quadrante, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } (90° - \alpha) = \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec (180° + \alpha) = \frac{1}{\cos (180° + \alpha)} = \frac{1}{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Assim, o valor de **y** é:

$$\frac{\text{sen } (90° - \alpha).\text{tg } \alpha}{\sec (180° + \alpha)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Basta resolver a equação trigonométrica:

$$3 \cos x + \text{sen } x = 3 \Rightarrow \text{sen } x = 3\,(1 - \cos x) \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{3} = 1 - \cos x$$

Pela relação fundamental $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, temos:

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$

$\text{sen}^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \frac{\text{sen } x}{3}(1 + \cos x) \Rightarrow$

3.sen x = 1 + cos x, pois sen x = 0 não é solução da equação inicial.

Logo:

$$\begin{cases} 3.\cos x + \text{sen } x = 3 \\ 3.\text{sen } x = 1 + \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \text{sen } x = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{3}{4} \right.$$

Portanto, $\frac{1}{2} \le \text{tg } x < 1$.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Primeiramente, observe que sec (–x) = sec (x), já que a função cosseno é par. Manipulando-se a expressão relevante, temos:

$$\cos x + \sec (-x) = \cos x + \sec x = t \Rightarrow (\cos x + \sec x)^2 = t^2$$

$$\cos^2 x + 2.\cos x.\sec x + \sec^2 x = t^2$$

$$\cos^2 x + 2.\cancel{\cos x}.\frac{1}{\cancel{\cos x}} + \sec^2 x = t^2$$

$$\cos^2 x + \sec^2 x = t^2 - 2$$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Pela definição de tangente e pela Relação Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{tg } x = 3 \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 9 \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 9 \Rightarrow 9\cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$$

$$10\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

A solução positiva da equação de segundo grau anterior foi escolhida pois o arco **x** pertence ao primeiro quadrante.

Questão 06 – Letra A

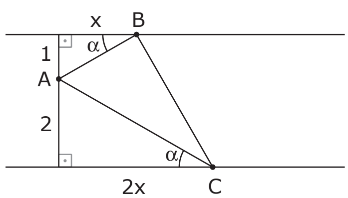
Comentário: Manipulando a expressão relevante, temos:

$$\frac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{cossec} x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}$$

Questão 07 – Letra E

Comentário:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Podemos determinar a área do Δ ABC (S_Δ) subtraindo, da área do trapézio, a área dos outros dois triângulos, logo:

$$S_\Delta = \frac{(2x + x).3}{2} - \frac{x.1}{2} - \frac{2x.2}{2} \Rightarrow S_\Delta = 2x = 2.\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 \operatorname{cotg} \alpha.$$

Questão 08 – Letra E

Comentário: Sabemos que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Logo:

$$(\operatorname{cotg} x)^2 + 1 = \operatorname{cossec}^2 x \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{6}.$$

Questão 09 – Letra E

Comentário: Lembramos que:

- $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\operatorname{sen} 2x = 2.\operatorname{sen} x.\cos x$

Utilizando as relações apresentadas:

$$f(x) = \frac{2.\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2.\operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \frac{2.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2.\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}.\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{1}$$

$$f(x) = 2.\operatorname{sen} x.\cos x = \operatorname{sen} 2x$$

Questão 10 – Letra C

Comentário: Vamos analisar cada afirmativa.

1. Falsa. A função seno é ímpar, pois para todo **x** real, $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$
2. Verdadeira. Basta checar o ciclo trigonométrico.
3. Falsa. A imagem da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é o intervalo compacto $[-1, 1]$. Como contradomínio e imagem não coincidem, a função não é sobrejetora.
4. Verdadeira. Observando as extremidades do ciclo, chegamos a $\operatorname{sen}(0) = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$. Para chegarmos a $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, basta traçar uma altura em um triângulo equilátero e aplicar o Teorema de Pitágoras.

Logo, apenas as afirmações 2 e 4 são verdadeiras.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Sobre o domínio de f(x), deve ser lembrado que a função secante não é definida nos reais para valores nulos de cosseno, assim como a cossecante não é definida nos reais para valores nulos de seno. Perceba que valores nulos do cosseno ocorrem nas extremidades verticais do ciclo, enquanto valores nulos do seno ocorrem nas extremidades horizontais do ciclo. Logo, f(x) não é bem definida nas extremidades do ciclo, o que equivale aos arcos $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 19

Comentário:

$$L(2) = 10\,000 + \frac{1\,000}{\sec\left(\frac{\pi.2}{6}\right)} = 10\,000 + \frac{1\,000}{\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$L(2) = 10\,000 + 1\,000 \,.\, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$L(2) = 10\,000 + 1\,000.\frac{1}{2} = 10\,500.$$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como o mês de abril corresponde a t = 4, temos que:

$$L_A(4) = 200 + 50.\cos\left(\frac{\pi.4}{12}\right) = 200 + 50.\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$L_A(4) = 200 + 50.\frac{1}{2} = 225$$

$L_B(4) = 300 - 50.\text{cossec}\left(\frac{\pi.4}{24}\right) = 300 - 50.\text{cossec}\ \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$L_A(4) = 300 - 50.\frac{1}{\text{sen}\ \frac{\pi}{6}} = 300 - 50.\frac{1}{\frac{1}{2}} = 200$

Logo, concluímos que, no mês de abril, a empresa **A** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **B**.

MÓDULO – C 10

Funções Soma e Fatoração

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Reescrevendo a função dada, temos:

$f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow f(x) = \cos 2x$

Logo, seu período **p** será dado por:

$p = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \Rightarrow p = \pi.$

Questão 02 – Letra C

Comentário:

$$\text{tg}\ x = \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \text{tg}\ x = \left(\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2} + \text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 - \text{tg}\,\frac{x}{2}.\text{tg}\,\frac{x}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\text{tg}\ x = \frac{2.\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 - \left(\text{tg}\,\frac{x}{2}\right)^2} \underset{\text{tg}\,\frac{x}{2} = 2}{\Rightarrow} \text{tg}\ x = \frac{2.2}{1 - (2)^2} = -\frac{4}{3}.$$

Questão 03 – Letra A

Comentário:

$\text{sen}\ x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\text{sen}\ x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$

$\text{sen}^2 x + 2.\text{sen}\ x.\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + \text{sen}\ (2x) = \frac{1}{3} \Rightarrow$

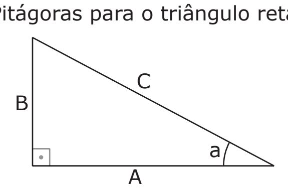
$\text{sen}\ (2x) = -\frac{2}{3}.$

Questão 04 – Letra D

Comentário:

I. Falso, pois sen (a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a.

II. Verdadeiro. Justificaremos essa resposta utilizando o Teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo.



$\text{sen}\ a = \frac{B}{C}$

$\cos a = \frac{A}{C}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$A^2 + B^2 = C^2 \Rightarrow \frac{A^2 + B^2}{C^2} = 1 \Rightarrow \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1$$

III. Verdadeiro.
sen 2a = sen (a + a) = sen a.cos a + sen a.cos a = 2sen a.cos a

IV. Falso. Contraexemplo:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right) \neq \text{sen}\,\frac{\pi}{2}.\text{sen}\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$$

Portanto, como as afirmativas II e III são verdadeiras, a alternativa procurada é a D.

Questão 05 – Letra C

Comentário:

$\cos 735° = \cos (735° - 720°) = \cos 15° \Rightarrow$

$\cos 15° = \cos (60° - 45°) \Rightarrow$

$$\cos 60°.\cos 45° + \text{sen}\ 60°.\text{sen}\ 45° \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Questão 06 – Letra B

Comentário:

$$\left(\frac{\text{sen}\ 34°.\cos 26° + \text{sen}\ 26°.\cos 34°}{\cos 57°.\cos 27° + \text{sen}\ 57°.\text{sen}\ 27°}\right) = \left(\frac{\text{sen}\ (34° + 26°)}{\cos\ (57° - 27°)}\right) =$$

$$\frac{\text{sen}\ 60°}{\cos 30°} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}} = 1.$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: A desigualdade será satisfeita quando sen x e cos x tiverem o mesmo sinal, o que ocorre no primeiro e no terceiro quadrantes. Como o domínio de **x** são arcos do terceiro e quarto quadrantes, a desigualdade será satisfeita para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Como a função seno é ímpar, $\text{sen}\,(-x) = \frac{2}{3}$, temos que:

$$\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x = 1 - 2.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\cos 2x.\text{sen}\,(-x) = \frac{1}{9}.\frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

MATEMÁTICA

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Lançando-se mão da Relação Fundamental da Trigonometria e da função seno da soma de arcos, temos:

$$\cos 5° = \sqrt{1-\text{sen}^2\,5°} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{625-4}{625}} = \frac{\sqrt{621}}{25}$$

$$\cos 50° = \cos(45°+5°) = \cos 45°.\cos 5° - \text{sen}\,45°.\text{sen}\,5° \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{621}}{25} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{25} = \frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}-2\right)$$

Questão 02 – Letra E

Comentário: Como **x** pertence ao terceiro quadrante, seu valor de cosseno é negativo. Pela Relação Fundamental da Trigonometria e pela relação de arco duplo:

$$\cos x = -\sqrt{1-\text{sen}^2\,x} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x.\cos x = 2.\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Questão 03 – Letra E

Comentário:

$$\cos 15° = \frac{c}{16} \Rightarrow \cos 15° = \cos(60°-45°) \Rightarrow$$

$$\cos 60°.\cos 45° + \text{sen}\,45°.\text{sen}\,60° \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{c}{16} \Rightarrow c = 4.\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$c^2 = \left(4.\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right)^2 = 16.\left(6+2+4\sqrt{3}\right) = 16.\left(8+4\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$c^2 = 64.\left(2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow c = 8\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \text{m}$$

Questão 04 – Letra D

Comentário:

f(x) = cos 4x.cos 2x + sen 4x.sen 2x ⇒

f(x) = cos (4x – 2x) ⇒ f(x) = cos (2x)

Logo, seu período **p** será dado por:

$$p = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow p = \pi.$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Como cos x < sen x, tem-se que $x < \frac{\pi}{4}$. Logo 2x é um arco pertencente ao primeiro quadrante e seu valor de tangente é positivo. Manipulando a primeira equação do sistema:

$$\cos x + \text{sen}\,x = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (\cos x + \text{sen}\,x)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x + \text{sen}^2\,x + 2\text{sen}\,x.\cos x = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$1 + 2\text{sen}\,x.\cos x = \frac{5}{4} \Rightarrow 2\text{sen}\,x.\cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\,2x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg}\,2x = \frac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Questão 06 – Letra D

Comentário: Como a função seno é ímpar, sen(–x) = –sen x, então a expressão pode ser escrita da seguinte forma:

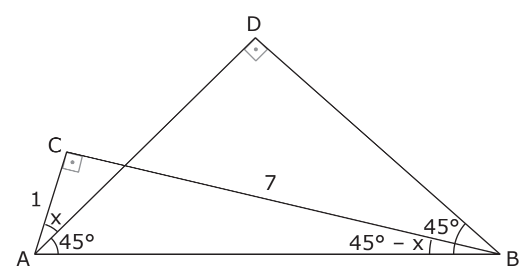
$$\left[-\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\frac{\pi}{12}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{=1} - \underbrace{2.\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\text{sen}\left(2.\frac{\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} \Rightarrow$$

$$1 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados:



Por hipótese, AD = BD. Então, $D\hat{A}B = D\hat{B}A = 45°$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACB, temos:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 1^2 + 7^2 \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$ cm

No triângulo ABC, temos que:

sen (x + 45°) = sen x.cos 45° + sen 45°.cos x

$$\frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\text{sen}\,x + \cos x) \Rightarrow \frac{7}{5} = \text{sen}\,x + \cos x$$

e cos (x + 45°) = cos x.cos 45° – sen x.sen 45° ⇒

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x - \text{sen}\,x) \Rightarrow \frac{1}{5} = \cos x - \text{sen}\,x$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \text{sen}\,x + \cos x = \frac{7}{5} \\ -\text{sen}\,x + \cos x = \frac{1}{5} \end{cases}$, temos que sen x = $\frac{3}{5}$.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Pela a identidade trigonométrica, sabemos que

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow$$

$$\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha.$$

Aplicando a Relação Fundamental da Trigonometria, temos que:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$
$$(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$
$$5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$, então:

$$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Portanto:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

Questão 09 – Letra D

Comentário:

$$\text{sen}\,15° = \frac{h_1}{a};\ \text{sen}\,45° = \frac{h_2}{a};\ \text{sen}\,75° = \frac{h_3}{a}$$

$$h_1 + h_2 = a(\text{sen}\,15° + \text{sen}\,45°) = a\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$a\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = a.\text{sen}\,75° = h_3$$

Questão 10 – Letra A

Comentário: Aplicando a Relação Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{3}{5}$$

Como tg x < 0, $\cos x = -\frac{3}{5}$ e $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.

Então, tg 2x é:

$$\text{tg}\,2x = \frac{2\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2\,x} = \frac{2.\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{16}{9}} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{7}$$

Questão 11 – Letra E

Comentário:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cancel{\text{sen}\,x.\cos\frac{\pi}{2}} + \cos x.\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$f(x) = \sec x\,.\,\text{sen}\,2x\,.\,\text{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right).\cos(\pi - x).\text{tg}^2\,x \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{\cancel{\cos}\,x}.2\text{sen}\,x.\cancel{\cos x}.\cancel{\cos^2}x.(-\cos x).\frac{\text{sen}^2 x}{\cancel{\cos^2}x} =$$

$$f(x) = -2\cos x.\text{sen}^3\,x$$

Portanto, m = 3.

MÓDULO – C 11

Equações e Inequações Trigonométricas

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: A altura de 2,5 m foi atingida quando f(x) = 2,5. Logo:

$$f(x) = 4 + 3.\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow 2{,}5 = 4 + 3.\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{1{,}5}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4 \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

Portanto, a maré atingiu a altura de 2,5 m às 4 e às 8 horas.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Como a função cosseno é uma função par, trata-se de uma identidade válida para todo **x** real.

Questão 03 – Letra A

Comentário: A equação $\text{sen}\,x.\cos x \le 0$ será satisfeita nos intervalos em que as funções seno e cosseno tenham sinais opostos, e isso ocorre nos intervalos $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Substituindo $\text{sen}\,x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ na equação sen x + 2cos x = 0, teremos:

$$\sqrt{1-\cos^2 x} + 2\cos x = 0 \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 x} = -2\cos x \Rightarrow$$

$$1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 5\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

Logo, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$, mas, como no segundo quadrante o cosseno é negativo, devemos ter $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4},\ \text{para } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Questão 06 – Letra A

Comentário:
$\cos(3x) = -1 \Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \cos x = -1 \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores possíveis são $\frac{1}{2}$ e -1.

Questão 07 – Letra E

Comentário: De $\text{sen}\,x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, temos:

$$\text{sen}\,x = \sqrt{\text{sen}^2\,x} \Rightarrow \text{sen}\,x = |\text{sen}\,x|$$

A equação é satisfeita para todo valor de sen $x \geq 0$, ou seja, para $0 \leq x \leq \pi$.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Por definição de módulo, temos:

$$|\cos x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, para $0 < x < 2\pi$, temos que o conjunto solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário:

$$\sqrt{3}.\text{sen}\,x + \cos x = k - 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{k-2}{2} \Rightarrow$$

$$\cos 30°.\text{sen}\,x + \text{sen}\,30°.\cos x = \frac{k-2}{2} \Rightarrow \text{sen}(x + 30°) = \frac{k-2}{2}$$

Para que a equação possua solução, temos:

$$-1 \leq \frac{k-2}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq k - 2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq k \leq 4$$

Logo, o maior valor possível para **k** é 4.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Os gráficos das funções **f** e **g** vão se interceptar quando f(x) = g(x). Assim:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \text{sen}\,(2x) = 1 + 2.\cos(x) \Rightarrow$

$2.\text{sen}\,x.\cos x = 2.\cos x \Rightarrow 2.\cos x(\text{sen}\,x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \text{sen}\,x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto, para $x \in [0, 2\pi)$, temos dois pontos, sendo eles $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, em que os gráficos das funções **f** e **g** se cruzam.

Questão 03 – Letra A

Comentário:

$\cos 3x.\cos 2x - \text{sen}\,3x.\text{sen}\,2x = 0 \Rightarrow \cos(3x + 2x) = 0 \Rightarrow$

$\cos(5x) = 0;\ x \in \left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$

Analisando os casos possíveis, temos:

1º caso: $5x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{10}$

2º caso: $5x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{10}$

3º caso: $5x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{não convém, pois } x \in \left[0, \frac{2\pi}{5}\right]\right)$

Portanto, a equação possui duas raízes.

Questão 04 – Letra C

Comentário: O ponto P(a, b), que representa a interseção dos gráficos, ocorre quando f(x) = g(x). Logo:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen}\,x = \text{sen}\,2x \Rightarrow \text{sen}\,x = 2.\text{sen}\,x.\cos x \Rightarrow$

$2.\text{sen}\,x.\cos x - \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow$

$$\text{sen}(x).[2.\cos(x) - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(x) = 0 \\ \text{ou} \\ 2.\cos(x) - 1 = 0 \end{cases}$$

1º caso: $\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x = 0 \Rightarrow \text{tg}^2\,x = 0$

2º caso: $2.\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo:

$\text{tg}\,x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}^2\,x = 3$

Os possíveis valores de $\text{tg}^2\,x$ são 0 ou 3.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo o primeiro termo da equação, temos:

$\text{sen}\,2x = \text{sen}\,(x + x) = (\text{sen}\,x)(\cos x) + (\text{sen}\,x)(\cos x) \Rightarrow$

$\text{sen}\,2x = 2(\text{sen}\,x)(\cos x)$

Substituindo esse valor na equação original, temos:

$2(\text{sen}\,x)(\cos x) = \cos x \Rightarrow \cos x(2\text{sen}\,x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\cos x = 0$ ou $(2\text{sen}\,x - 1)$

Se $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Se $(2\text{sen}\,x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Agora, somando os possíveis valores para **x**, temos:

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}}_{2\pi} + \underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}}_{\pi} = 3\pi$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Dado que sen 2x = 2sen x.cos x;

e $\cot g\ x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$, teremos:

$$2\text{sen } x.\cos x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow 2\text{sen } x.\cos x - \frac{\cos x}{\text{sen } x} = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x.\left[2\text{sen } x - \frac{1}{\text{sen } x}\right] = 0 \Rightarrow \cos x.\left[\frac{2\text{sen}^2 x - 1}{\text{sen } x}\right] = 0$$

Ou seja, cos x = 0 ou 2sen^2 x − 1 = 0.

Para cos x = 0, temos x = 0 ou x = 2.

Para 2sen^2 x − 1 = 0, temos:

$$\text{sen}^2\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{4} \\ \text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{4} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Logo, temos seis soluções.

Questão 07 – Letra E

Comentário:

sen^3 x − $2.\text{sen}^2$ x −5.sen x + 6 = 0 ⇒

sen^3 x − sen^2 x − sen^2 x + sen x − 6.sen x + 6 = 0 ⇒

sen^2 x (sen x − 1) − sen x (sen x − 1) − 6.(sen x − 1) = 0 ⇒

(sen x − 1).(sen^2 x − sen x − 6) = 0

Logo:

$\text{sen}(x) - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}(x) = 1$

ou

$$\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x) - 6 = 0 \Rightarrow \underbrace{\text{sen}(x) = -2 \text{ ou sen}(x) = 3}_{\text{(Nenhum dos valores convém, pois } -1 \le \text{sen } x \le 1)}$$

Portanto:

$$\text{sen}(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{5\pi}{2}, \text{pois } x \in \left[0, 4\pi\right]$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 3\pi.$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Sabendo-se que:

cos 2x = $\cos^2$ x − sen^2 x = $2\cos^2$ x − 1 (I)

Substituindo (I) na equação dada, teremos:

$2\cos^2$ x − 1 − cos x = 0

$\cos^2$ x + $\cos^2$ x − 1 − cos x = 0

($\cos^2$ x − 1) + ($\cos^2$ x − cos x) = 0

(cos x − 1)(cos x + 1) + cos x(cos x − 1) = 0

(cos x − 1)(cos x + 1 + cos x)= 0

(cos x − 1)(2cos x + 1)= 0

Para que essa igualdade seja verdadeira,

cos x − 1 = 0 ou 2.cos x + 1= 0.

Portanto, cos x = 1 ou cos x = $-\dfrac{1}{2}$.

Para cos x = 1, temos x = 0 e, para cos x = $-\dfrac{1}{2}$, temos x = $\dfrac{2\pi}{3}$ ou x = $\dfrac{4\pi}{3}$.

Logo, a soma das soluções será: $0 + \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3} = 2\pi$.

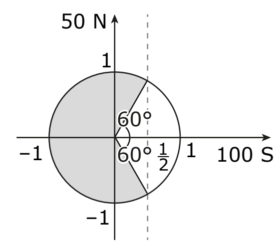
Questão 09 – Letra B

Comentário: Fatorando a expressão do primeiro membro da inequação, temos:

$\cos^4$ x − sen^4 x = ($\cos^2$ x − sen^2 x) ($\cos^2$ x + sen^2 x), mas ($\cos^2$x − sen^2 x) = cos 2x e $\cos^2$ x + sen^2 x =1, logo $\cos^4$ x − sen^4 x = cos 2x.

Assim, a inequação $\cos^4$ x − sen^4 x < $\dfrac{1}{2}$ é equivalente a cos 2x < $\dfrac{1}{2}$.

De cos 2x < $\dfrac{1}{2}$, e pela análise da figura a seguir, temos que a função cosseno tem valores menores que $\dfrac{1}{2}$ para ângulos maiores que $\dfrac{\pi}{3}$(60°) e menores que $\dfrac{5\pi}{3}$(300°).



Logo, teremos $\dfrac{\pi}{3} < 2x < \dfrac{5\pi}{3}$, ou seja, $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$.

Questão 10 – Letra B

Comentário: Escrevendo a equação em fatores de primeiro grau:

$$3\text{sen}^2\ x + (m-1)\text{sen } x - 4(m-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$3\text{sen}^2\ x + [4(m-1)\text{sen } x - 3(m-1)\text{sen } x] - 4(m-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$3\text{sen}^2\ x + 4(m-1)\text{sen } x - 3(m-1)\text{sen } x - 4(m-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{sen } x[3\text{sen } x + 4(m-1)] - (m-1)[3\text{sen}x - 4(m-1)] = 0 \Rightarrow$$

$$[\text{sen } x - (m-1)][3\text{sen}x - 4(m-1)] = 0$$

Assim, teremos sen x − (m − 1) = 0 ⇒ sen x = (m − 1).

De $-1 \le \text{sen } x \le 1$, temos $-1 \le m - 1 \le 1$, ou seja, $0 \le m \le 2$ (i) ou 3sen x + 4(m − 1) = 0, que equivale a $\text{sen } x = -\dfrac{4(m-1)}{3}$.

De $-1 \le \text{sen } x \le 1$, temos:

$$-1 \le -\frac{4(m-1)}{3} \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{4(m-1)}{3} \le -1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} \ge m - 1 \ge -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + 1 \ge m \ge 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{7}{4} \ge m \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \le m \le \frac{7}{4} \text{ (ii)}$$

Conjunto solução é a união dos conjuntos (i) e (ii):
$(i) \cup (ii) = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \le m \le 2\}$

Questão 11 – Letra E

Comentário: Escrevendo tan² x como $\dfrac{\text{sen}^2\ x}{\cos^2\ x}$, encontramos $\tan^2\ x = \dfrac{1 - \cos^2\ x}{\cos^2\ x} = \dfrac{1}{\cos^2\ x} - 1$.

Substituindo na equação:

$$3\cos^2 x + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3 \Rightarrow$$

$$3\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 4,\ \cos^2 x \neq 0 \Rightarrow$$

$$3\cos^2 x + 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow$$

$$3\cos^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$$

Fazendo $\cos^2 x = y$, temos $3y^2 - 4y + 1 = 0$.

Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos $y = 1$ e $y = \frac{1}{3}$.

Assim $\cos^2 x = 1$, implica que $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$, ou $\cos^2 x = \frac{1}{3}$, implica $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Portanto, para

$\cos x = 1$, temos $x = 0$ ou $x = 2\pi$ (duas raízes);

$\cos x = -1$, temos $x = -\pi$ (uma raiz);

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, como é um valor entre −1 e 1, temos duas raízes que são simétricas em relação à abscissa do círculo trigonométrico. Então, teremos duas raízes.

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, duas raízes da mesma forma da anterior.

Logo, teremos sete raízes no total.

MÓDULO – C 12

Geometria de Posição e Poliedros

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: Se o poliedro possui 7 faces e 15 arestas, podemos usar a Relação de Euler para encontrar:

$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 7 = 15 + 2 \Rightarrow V = 10$

Logo, se temos 10 vértices na caixa, precisaremos de 30 parafusos no total.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Sendo **F** o número de faces triangulares, os triângulos terão 3F lados e o poliedro terá $\frac{3F}{2}$ arestas. Pela Relação de Euler:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow 32 + F = \frac{3F}{2} + 2 \Rightarrow F = 60 \Rightarrow A = \frac{3F}{2} = 90$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Como há 12 faces pentagonais, podemos inferir que há 30 arestas, pois:

$$\frac{12 \,.\, 5}{2} = 30$$

Pela figura, podemos identificar 20 arestas. Logo, há 30 − 20 = 10 arestas não visíveis.

Questão 04 – Letra B

Comentário: O número de arestas **A** desse poliedro pode ser calculado como:

$$A = \frac{5\,.\,12 + 4\,.\,5}{2} = \frac{10 + 20}{2} = 15$$

Agora, utilizando a relação de Euler, temos:

$V + 7 = 15 + 2 \Rightarrow V = 10$

Questão 05 – Letra C

Comentário: O número de faces **F** do poliedro é dado por 12 + 20 = 32. Agora, o número de arestas **A** pode ser calculado como:

$$A = \frac{5\,.\,12 + 6\,.\,20}{2} = \frac{60 + 120}{2} = 90$$

Agora, para encontrar o número de vértices, vamos usar a Relação de Euler, ou seja: $V + 32 - 90 = 2 \Rightarrow V = 60$.

Questão 06 – Letra C

Comentário:

I. Falsa, pois duas retas reversas não se interceptam e não são paralelas.

II. Falsa, pois duas retas paralelas não se interceptam e não são reversas entre si, pois existe um plano que as contém.

III. Falsa, pois podemos ter uma reta secante a um plano (formando um ângulo diferente de 90° com o plano), mas que seja perpendicular a uma reta desse plano.

IV. Falsa, pois pode haver uma reta perpendicular à reta dada e paralela ao plano dado.

Logo, todas as afirmativas são falsas.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Sabemos que o poliedro possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. Assim, o número de faces é 2 + 5 = 7.

Como duas faces sempre possuem uma aresta em comum, o número de arestas pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A = \frac{2\,.\,5 + 5\,.\,4}{2} \Rightarrow A = 15$$

Logo, pela Relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 2 + 15 - 7 \Rightarrow V = 10$.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Em 20 faces hexagonais, temos 120 lados, e, em 12 faces pentagonais, temos 60 lados. O total de lados é,então, igual a 180. Cada lado é comum às duas faces, e,portanto, foi contado duas vezes. Assim, o número de arestas **A** é tal que: $2A = 180 \Rightarrow A = 90$.

Aplicando a Relação de Euler a esse poliedro convexo, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$

Portanto, o poliedro convexo tem 60 vértices.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$ são concorrentes, pois são diagonais do paralelepípedo ABEFGHKL e se encontram no centro de massa do mesmo. $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ são concorrentes, pois pertencem ao plano que contém o semiplano ACIHG. $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$ são reversas, pois pertencem a planos paralelos contendo semiplanos ACDF e GHKL respectivamente.

Questão 02 – Letra C

Comentário:

I. Verdadeira. As retas pertencem ao mesmo plano (aquele que intersecta os outros dois); logo ou serão paralelas ou concorrentes. No entanto, como pertencem a planos paralelos distintos não podem ser concorrentes. Logo, serão paralelas.

II. Falsa. As retas podem também ser reversas.

III. Falsa. Tome como contraexemplo dois planos perpendiculares e uma reta paralela a ambos.

IV. Verdadeira. Em dois planos paralelos, duas retas arbitrárias, cada uma pertencendo a um plano, podem ser reversas ou paralelas.

Questão 03 – Letra C

Comentário:

I. Falsa. Dado o plano (x, y, 0) tal que $x, y \in \mathbb{R}$, a reta (0, y, 1) é paralela ao plano mas não está contida.

II. Verdadeira. Por definição.

III. Verdadeira. Cada reta de um plano contém uma reta paralela ao outro plano paralelo.

IV. Falsa. Duas retas distintas no plano podem ser concorrentes.

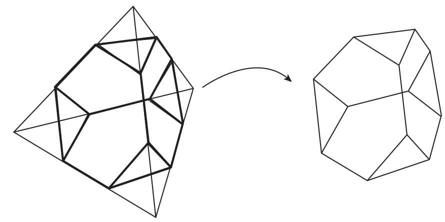
Questão 04 – Letra D

Comentário: Percebemos que há 12 . 5 = 60 lados de pentágonos e 20 . 6 = 120 lados de hexágonos entre as arestas do poliedro. No entanto, cada um desses lados é contado duas vezes, visto que são a interseção entre dois polígonos distintos. Assim há, no total, $\frac{180}{2}$ = 90 arestas. Como há 32 faces, pela Relação de Euler, o número **V** de vértices é:

$V + 32 = 90 + 2 \Rightarrow V = 60$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema.



Ao fazer os cortes, o poliedro formado possui 4 faces hexagonais e 4 triangulares, todos de aresta igual a 2 cm. O número de arestas desse poliedro pode ser calculado como: $A = \frac{3\,.\,4 + 6\,.\,4}{2} = \frac{12 + 24}{2} = 18$. Como todas as arestas medem 2 cm, temos que a soma procurada é dada por 18 . 2 = 36 cm.

Questão 06 – Letra B

Comentário: O prisma hexagonal regular possui 8 faces, sendo 2 bases e 6 arestas laterais. Além de 12 vértices, sendo 6 na face de cima e 6 na face de baixo. Após o corte em cada um dos 12 vértices, cria-se uma nova face sem que as anteriores desapareçam. Portanto, após serem retirados os tetraedros, o poliedro terá 8 + 12 = 20 faces.

Questão 07 – Letra D

Comentário: Como podemos ter **s** paralela a **r** com **s** não pertencendo a α, a alternativa A é falsa.

P pertence a **r**, logo pertence a α e β; logo, as alternativas B e C são falsas.

$r \cap t = P$, logo a alternativa D é a correta.

Questão 08 – Letra E

Comentário: A Relação de Euler vale para todo poliedro convexo.
Assim, para o poliedro de 20 arestas **A** e 10 vértices **V**, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$

Sejam **t** e **q** o número de faces triangulares e quadrangulares, respectivamente.

Como F = 12, então t + q = 12 e, como A = 20, então:

$\frac{3t + 4q}{2} = 20$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} t + q = 12 \\ 3t + 4q = 40 \end{cases}$, temos q = 4 e t = 8.

Portanto, o poliedro convexo tem 8 faces triangulares.

Questão 09 – Letra A

Comentário: Em um dado hexaédrico cada uma das seis faces representa um valor diferente. No dado em destaque, cada um dos valores diferentes é representado por um vértice. Portanto, o número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.

Questão 10 – Letra B

Comentário: O icosaedro original tem 20 faces e 30 arestas. Sendo assim, pela Relação de Euler, terá 12 vértices. Na nova estrutura, em cada uma das 30 arestas originais, surge um novo vértice e os 12 originais são mantidos, totalizando 42 vértices. Por outro lado, cada face do icosaedro original foi dividida em 4, resultando em 80 faces no novo poliedro. Usando mais uma vez a Relação de Euler, concluímos que a geodésica tem 120 arestas.

Questão 11 – Letra A

Comentário:

A) Verdadeiro. Dado um plano α e uma reta **r** quaisquer, existe um plano β que contém **r**, tal que $\beta \perp \alpha$.

B) Falso. Contraexemplo: seja $r \perp \alpha$. Logo, existem infinitos planos perpendiculares a α que contêm **r**.

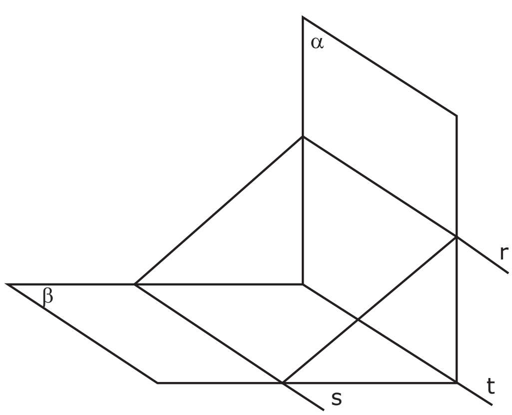
C) Falso. Contraexemplo: se **r** e α são secantes, então não existe um plano β que contém **r**, tal que β // α.

D) Falso. Contraexemplo: considere a reta **r** secante ao plano α. Logo, não existe nenhum plano que contém **r** que seja paralelo a α.

E) Falso. Contraexemplo: seja r // α. Logo, existe um plano β que contém **r**, tal que β // α.

Questão 12 – Letra B

Comentário: Considere a imagem a seguir para a análise das afirmativas.



A) Falsa, conforme contraexemplo da ilustração, elas definem um plano e não são concorrentes a **t**.

B) Verdadeiro.

C) Falso, ver contraexemplo da ilustração onde elas são paralelas.

D) Falso, ver contraexemplo da ilustração onde necessariamente o plano não é perpendicular.

E) Falso. Basta tomar **s** concorrente a **t**.

Seção Enem

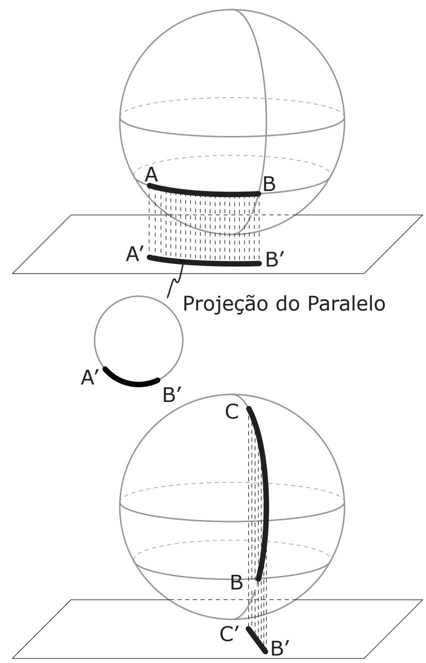
Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: II

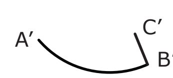
Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: A projeção ortogonal da questão no plano citado poderá ser ilustrada pelas figuras a seguir, sendo a figura 1 o deslocamento no paralelo (arco $\overline{AB}$) e a figura 2 o deslocamento no meridiano (arco $\overline{BC}$).



Fundindo as duas projeções, pode-se estabelecer a figura a seguir.



Questão 02 – Letra C

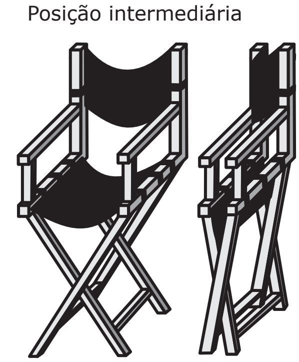
Eixo cognitivo: I

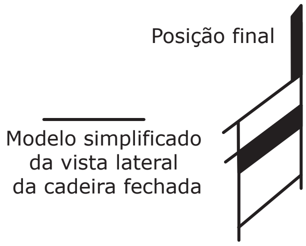
Competência de área: 2

Habilidade: 6

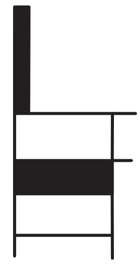
Comentário: Observe a ilustração da cadeira em dois momentos diferentes do fechamento.

Posição intermediária





Logo, a projeção da cadeira fechada será:



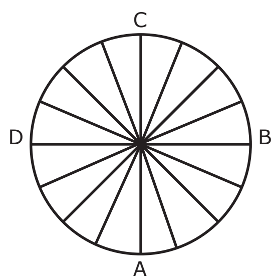
Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Observe, na figura a seguir, que a representação da escada, vista de cima, é:



Logo, se ela caminhou do ponto **A** até o ponto **D**, podemos ver claramente que a projeção ortogonal do percurso feito por ela corresponde à alternativa C.

Questão 04 – Letra B

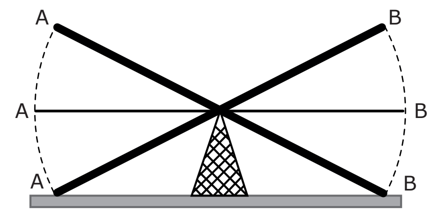
Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

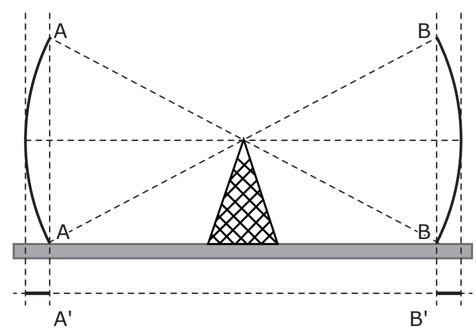
Comentário: Observe a figura a seguir:

Vista frontal



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos **A** e **B**, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

Vista ortogonal



Bernoulli
Colégio e Pré-vestibular

Rua Diorita, 43 - Prado
Belo Horizonte - MG
Tel.: (31) 3029-4949