## MATEMÁTICA APLICADA

**1**

**A** Demonstre que a soma $\frac{7}{8}+\frac{1}{9}$ está entre $\frac{3}{4}$ e 1.

**B** Se $x$ e $y$ são dois números reais positivos tais que $x<y$ e $xy=100$, é correto afirmar que $x<10<y$? Justifique a sua resposta.

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**A** Como $\frac{1}{9}<\frac{1}{8}$ temos que $\frac{7}{8}+\frac{1}{9} < \frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$.

Desde que $\frac{7}{8}>\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ temos $\frac{7}{8}+\frac{1}{9}>\frac{3}{4}$.

Portanto: $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}+\frac{1}{9}<1$.

**B** Como $x<y$ e $x$ é positivo, temos que: $x^2<xy \rightarrow x^2<100$.

Como $x<y$ e $y$ é positivo, temos: $xy<y^2 \rightarrow 100<y^2$.

Portanto: $x^2<100<y^2$ e como $x$ e $y$ são dois números reais positivos, podemos concluir que: $\sqrt{x^2}<\sqrt{100}<\sqrt{y^2} \rightarrow x<10<y$.

**2**

**A** Certo feirante vende maçãs por R$ 0,70 cada uma e peras por R$ 0,50 cada uma. Se um cliente pagou R$ 6,30 e comprou somente maçãs e peras, qual é o total de frutas que ele comprou?

**B** O feirante vende ainda mexericas por R$ 0,50 cada uma, laranjas por R$ 0,80 cada uma e mangas por R$ 2,00 cada uma. Outro cliente pagou R$ 22,00 e comprou somente esses três tipos de frutas. Contando somente as laranjas e as mangas, ele levou uma dúzia de frutas. Quantas mexericas, laranjas e mangas ele pode ter comprado? Liste todas as possibilidades.

## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

**A** Seja *x* o número de maçãs e *y* o número de peras. Note que *x* e *y* são números inteiros e positivos.

Temos:
$$0,70x+0,50y=6,30$$
$$0,50y=6,30-0,70x$$
$$0,50y=0,70(9-x)$$
$$y=\frac{7}{5}(9-x)$$

Desde que *y* deve ser um inteiro, $9-x$ tem de ser divisível por 5. A única solução possível é $x = 4$ e, portanto, $y=\frac{7}{5}(9-4)=7$ .
O total de frutas que o cliente comprou é: $4 + 7 = 11$.

**B** Seja *x* o número de mexericas, *y* o número de laranjas e *z* o número de mangas. Note que *x*, *y* e *z* são números inteiros e positivos.
Resolvemos o sistema de equações.

$$\begin{cases} 0,50x+0,80y+2z=22 \\ y+z=12 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por – 2 e a adicionamos à primeira.

$$0,5x-1,2y=-2$$
$$5x-12y=-20$$
$$x=\frac{12}{5}y-4$$

Note que *y* tem de ser um múltiplo positivo de 5 e menor que 12.

$y=5 \rightarrow x=8;z=7$ ou $y=10 \rightarrow x=20;z=2$
Ele pode ter comprado 8 mexericas, 5 laranjas e 7 mangas, ou então, 20 mexericas, 10 laranjas e 2 mangas.

## MATEMÁTICA APLICADA

**3** Seja $S_n$ a soma dos cubos dos $n$ primeiros números inteiros positivos, com $n \geq 2$ e $S_1 = 1^3$.

**A** Calcule $S_2$, $S_3$ e $S_4$.

**B** É correta a proposição: $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$ ?

**C** Demonstre que a soma dos cubos dos $n$ primeiros números inteiros positivos, $n \geq 2$, é igual a $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**A**

$$S_1 = 1^3$$
$$S_2 = 1^3+2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$S_3 = 1^3+2^3+3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$S_4 = 100 = (1+2+3+4)^2$$

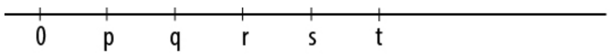
**B** Sim: $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2 = 225$.

**C** Observando as respostas do item A, podemos concluir que:

$$S_n = (1+2+3+\ldots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

**4**

**A** Na reta numérica dada abaixo, $p, q, r, s$ e $t$ são cinco números inteiros pares e consecutivos e $q+s=24$ . Qual é a média aritmética desses cinco inteiros?




**B** Se $y$ é o menor número inteiro positivo tal que o produto dele por 3150 é o quadrado de um número inteiro, qual é o valor de $y$ ?

## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

**A** A média aritmética dos 5 inteiros pode ser expressa por: $\dfrac{n+(n+2)+(n+4)+(n+6)+(n+8)}{5}=n+4$ .

Como $q+s=24$ , temos que: $(n+2) + (n+6) = 24$ e $n = 8$

A média aritmética dos 5 inteiros é igual a: $8 + 4 = 12$.

$3150 = 10.315$

$= (2.5).(3.105)$

**B** $= 2.5.3.5.21$

$= 2.5.3.5.3.7$

$= 2.3^2.5^2.7$

O menor valor de y é $2.7 = 14$.

**5** São dados dois números inteiros positivos $x$ e $y$ tais que $y$ é um múltiplo de 5 e $3x+4y=200$. Quais são os únicos possíveis valores de $x$?

## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Como $y$ é um múltiplo de 5, podemos escrever $y = 5k$, em que $k$ é número inteiro positivo. Daí, temos:

$$3x+4y=200$$
$$3x+4(5k)=200$$
$$3x=200-20k$$
$$3x=20(10-k)$$

Desde que 3 é um número primo e não é um fator de 20, precisa ser um fator de 10 – $k$. Os únicos valores possíveis de $k$ são: 1, 4 e 7. A tabela abaixo indica a resposta:

| $K$ | $10–K$ | $20(10–K)$ | $3x$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 180 | 180 | 60 |
| 4 | 6 | 120 | 120 | 40 |
| 7 | 3 | 60 | 60 | 20 |

Os únicos possíveis valores de $x$ são: 20, 40 e 60.

**6** Em certo armazém, há três prateleiras e, em cada uma delas, dois tipos de produtos: A e B. Na primeira, há 140 produtos, e se sabe que 25 % são do tipo A. Na segunda, há 130 produtos, e se sabe que 91 são do tipo B. E na terceira, há 40 produtos do tipo A e 80 produtos do tipo B.

**A** Calcule a probabilidade, expressa em porcentagem, de que um produto escolhido ao acaso no armazém seja do tipo A.

**B** Se soubermos que o produto escolhido não pertence à primeira prateleira, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de que seja do tipo B?

## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A tabela abaixo indica as soluções.

| | Prateleira 1 | Prateleira 2 | Prateleira 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Tipo A | 35 | 39 | 40 | 114 |
| Tipo B | 105 | 91 | 80 | 276 |
| Total | 140 | 130 | 120 | 390 |

**A** $P(A) = \frac{114}{390} \approx 29\%$ .

**B** $P(A) = \frac{171}{250} \approx 68,4\%$ .

**7**

**A** Doze animais chegaram a um zoológico e seis deles devem ser selecionados para ocupar a mesma jaula. Se entre eles há dois que não podem permanecer juntos, pois se atacam, de quantos modos diferentes podem ser escolhidos os seis que vão ocupar a jaula?

**B** Três dados, cada um dos quais tem as faces numeradas de 1 a 6, são lançados. A soma dos números das três faces voltadas para cima é 12. Sabe-se que nenhum desses três números é divisível por 3. E desses três números, dois deles, mas não todos os três, são iguais. Quais são os três números?

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**A** $C_{10,6} + 2.C_{10,5} = \frac{10!}{6!4!} + 2.\frac{10!}{5!5!} = 714$ ; De 714 modos diferentes.

**B** As possibilidades:

1,5,6  2,4,6  3,3,6  3,4,5

são eliminadas porque nenhum número pode ser divisível por 3.

A possibilidade 4,4,4 é eliminada porque os três números são iguais.

As triplas ordenadas são (2,5,5), (5,2,5) e (5,5,2), ou seja, os três números são 2, 5 e 5.

## MATEMÁTICA APLICADA

**8**

Pedro tomou oito cartas:
- valete, dama, rei e ás de copas (cartas vermelhas);
- valete, dama, rei e ás de paus (cartas pretas).

Embaralhou-as e colocou-as em fila em uma mesa, uma ao lado da outra.

Qual é a probabilidade de que:

**A** As cartas vermelhas fiquem juntas entre si?

**B** As cartas de mesma cor fiquem juntas entre si?

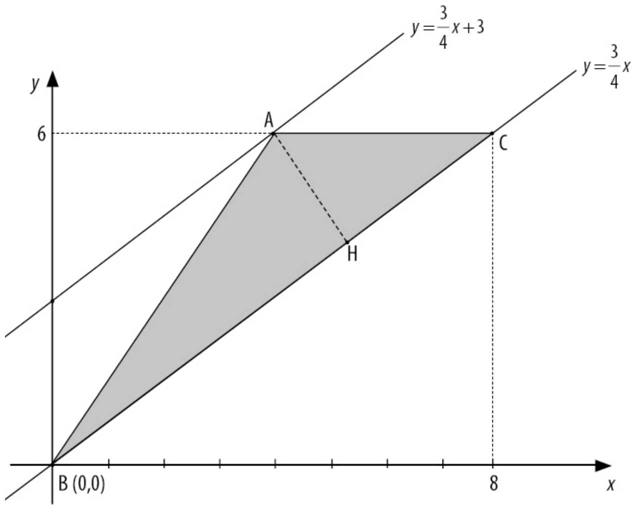
### RESOLUÇÃO E RESPOSTA

**A** $\frac{4!4!5}{8!} = \frac{1}{14}$.

**B** $\frac{4!4!2}{8!} = \frac{1}{35}$.

**9**

**A** Calcule a área e a altura AH do triângulo ABC da figura abaixo.




**B** Na reta numérica, o ponto *A* tem abscissa *a* e o ponto *B* tem abscissa *b*. Sabe-se que a distância entre os pontos *A* e *B* é igual a $a^2$ e que $-1<a<0$. Demonstre que *b* é menor do que 0.

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**A** A área é igual a: $\frac{4.6}{2}=12$.

A distância AH é igual a: $\frac{|3.4-4.6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{5}=2,4$.

**B** A distância AB é igual a $a^2$: $|a-b|=a^2$.

Se $a\geq b$, temos que:

$a-b=a^2$
$b=a(1-a)$

Como $a<0$ e $1-a>0$, o produto é negativo e $b<0$.
Se $b<0$, temos que:

$b-a=a^2$
$b=a(1+a)$

Observe: $-1<a<0 \rightarrow 0<1+a<1$.
Como $a<0$ e $1+a>0$, o produto é negativo e $b<0$.

**10** Um fazendeiro repartiu todos os seus cavalos entre seus cinco filhos, começando pelo mais velho até chegar ao caçula, de tal modo que a cada um deles deu a metade mais 1 dos cavalos que tinha no momento. Quantos cavalos tinha o fazendeiro?

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

Começamos pelo final.

Se antes de dar ao quinto filho lhe restavam $x_5$ cavalos, e depois ficou sem nenhum, então: $x_5 - (\frac{x_5}{2} + 1) = 0$ e $x_5 = 2$.

Se antes de dar ao quarto filho lhe sobravam $x_4$ cavalos, então: $x_4 - (\frac{x_4}{2} + 1) = x_5$ e $x_4 = 6$.

Analogamente chegamos aos resultados: $x_3 = 14, x_2 = 30, x_1 = 62$.

Logo o fazendeiro tinha no total 62 cavalos.