Resolução – Treinamento ENEM
S02.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 01 ==

Percepção Espacial

Comentários Iniciais:

Bom galera, esse tipo de questão, como trata muito de visão e percepção espacial, imagino que tenham alguns com muita facilidade em resolvê-lo e outros que tenham um pouco mais de dificuldade.

Sendo assim, vou resolver o item da forma mais completa possível, então, se você já sabe alguma parte dessa resolução, vá seguindo à frente ;)

E, antes de começarmos, só como uma curiosidade. Como imagino que muitos de vocês que estão fazendo nosso Curso queiram os mais diversos cursos, com certeza há alguns que queiram cursar Engenharia, Arquitetura ou Artes Plásticas. Para vocês, esse tipo de conhecimento é muito importante, na Engenharia, é comum as faculdades aplicarem disciplinas de Desenho Técnico, e, projeções terá reservada importância. Até para outros cursos, é bom entender projeções ou esse movimento de gangorra, na Medicina, esses conceitos relacionados à Mecânica podem ser aplicados à Biomecância, como na construção de próteses em que deve se estudar a relação com alguma articulação.

Enfim, agora, sem mais delongas, vamos à Resolução em si.

Resolução:

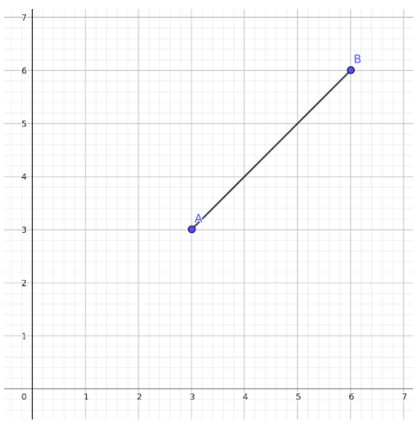
i) Conhecimentos necessários

Vejam que a questão envolve alguns conceitos específicos. Vou explicá-los, todos. Dentre eles, temos:

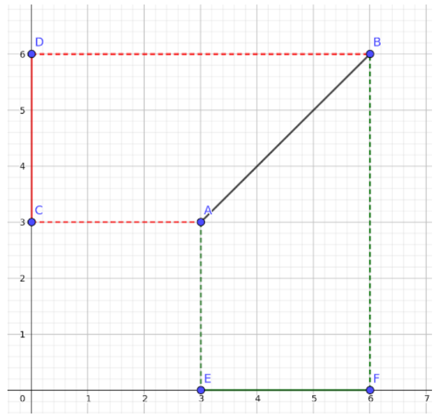
- projeção
- ortogonalidade
- projeção ortogonal
- circunferência

i-a) Uma projeção, de forma básica, é você pegar algo num espaço e representá-lo numa dimensão inferior.

Exemplo 1:

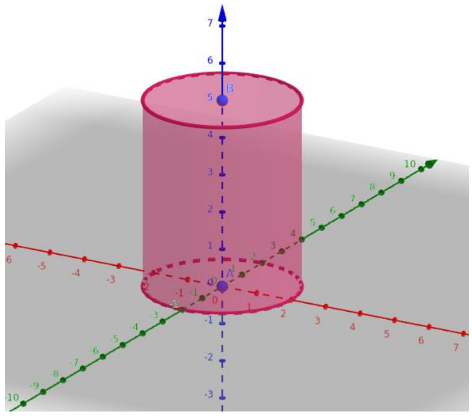


Se projetarmos esse segmento de reta no eixo x e no eixo y teremos:

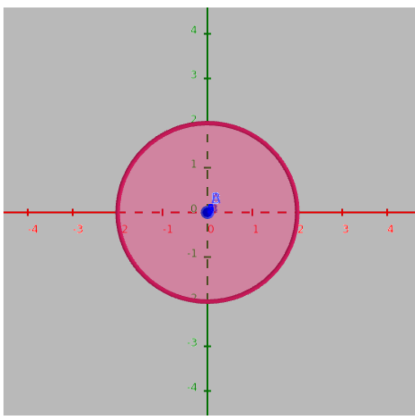


Agora, para o Exemplo 2, vamos pegar um objeto de dimensão maior, mas um objeto simples, como um cilindro, por exemplo.

Exemplo 2 - Cilindro:

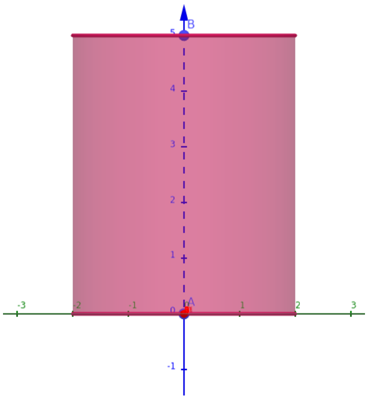


Projeção no Plano XY:



Viram que essa projeção é uma circunferência? Legal né?

Projeção no Plano YZ:



E agora, a projeção é um retângulo! Que massa isso né? A gente pega um sólido 3D, e quando projetamos ele, conseguimos desenhar suas perspectivas como uma forma 2D.

Por isso que o Enem aborda esse assunto, apesar de bem geral, ele é muito importante para se entender conceitos de visão espacial e de perspectivas.

Como eu disse, isso se aplica na Engenharia, na Arquitetura, nas Artes (quando você projeta algo sobre a tela), na Fotografia (projeção de algo sobre uma lente), na Biologia (sistema de focalização visual), na Medicina, e a lista segue.

i-b) “Ortogonal” é outra palavra para se dizer “perpendicular”.

i-c) Todas as projeções que eu fiz já são projeções ortogonais, porque pegamos a vista de projeção perpendicularmente ao objeto de projeção.

Ou seja, os traços no Exemplo 1 são perpendiculares ao Eixo.

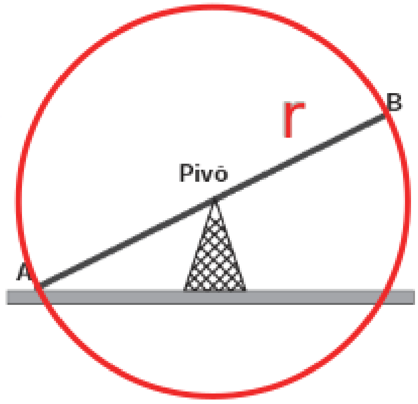
E no Exemplo 2, todos os traços que vão na direção do plano de projeção são perpendiculares.

É pouco provável que algum vestibular vá cobrar com profundidade uma perspectiva não-ortogonal (como alguma oblíqua).

i-d) Vamos precisar saber o que é uma circunferência, porque vamos ver o movimento da gangorra, cujos pontos A e B descrevem um movimento circular.

Então, circunferência é o conjunto dos pontos que dista uma distância r (raio) de um centro, num plano.

Veja como fica a figura com a circunferência desenhada:



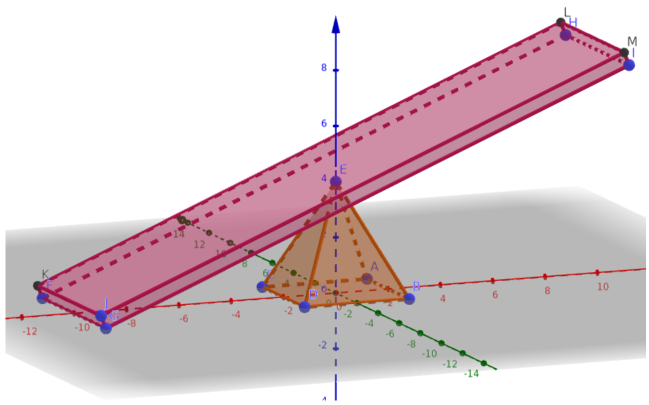
O que impede a gangorra de completar esse movimento circular é o chão, que vai parar o movimento por algum dos lados.

ii) Entendendo como esses conceitos se aplicam à questão

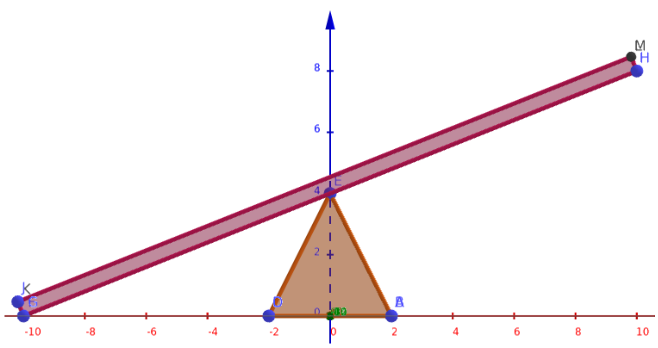
Bom, nossa questão vai se assemelhar mais ao Exemplo 1, fornecido anteriormente, visto que trabalharemos de espaço bidimensional para unidimensional.

No entanto, entenda como esse desenho do enunciado foi formado.

A representação real de uma gangorra seria:



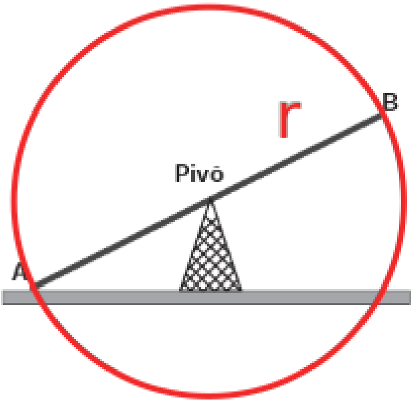
E, a representação do enunciado seria a seguinte projeção:



iii) Fazendo a projeção ortogonal da gangorra do enunciado no plano do chão

Bom, como dissemos, a gangorra tem uma trajetória circular, visto que o raio é constante, ou seja, a distância de A e B ao pivô é constante.

Então, no plano vertical ao chão teríamos a trajetória em vermelho. E a resposta para essa pergunta seria Letra C.



E, queremos a projeção ortogonal em relação ao chão, ou seja, queremos pegar segmentos perpendiculares ao chão que liguem os pontos A e B ao chão.

Assim, estamos pegando a vista superior do objeto, ou seja, essa projeção em relação ao chão, basicamente é que temos que olhá-lo de cima, ao invés de lateralmente, como estamos fazendo.

Pegando a figura do enunciado, se olharmos de cima, teremos apenas o segmento de reta que é a tábua da gangorra.

Quando A e B estiverem paralelos ao chão, A e B estarão na maior distância no eixo X possível.

E, enquanto B for descendo depois disso, A vai subindo e voltando para o ponto original, quando estava embaixo.

Ou seja, na visão de cima, veríamos apenas um segmento aumentando e diminuindo de tamanho.

Sendo assim, podemos afirmar que a resposta será Letra B.

Resposta: Letra B.

Item 02 ==

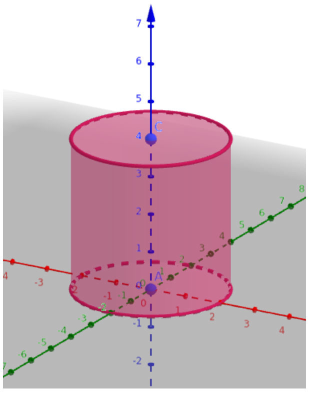
Geometria Espacial

Observações Iniciais:

Esta questão, assim como sua predecessora, requer um pouco de naturalidade geométrica para sair de forma mais automática.

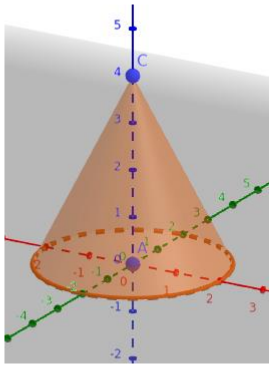
Nesse aspecto, vamos relembrar quais são cada uma das figuras geométricas citadas no enunciado e alternativas:

- Cilindro



Exemplo comum de cilindros: pilha de moedas, garrafa de água, sprays, copos.

- Cone

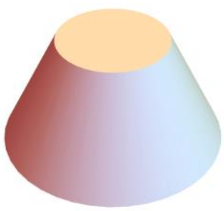


Exemplo de cone: chapéu de festa, cones de rua, chapéu de bruxa de halloween, casca de sorvete, cone de papel com amendoim que alguém te oferece na praia.

- Tronco de cone (basta cortar o cone)

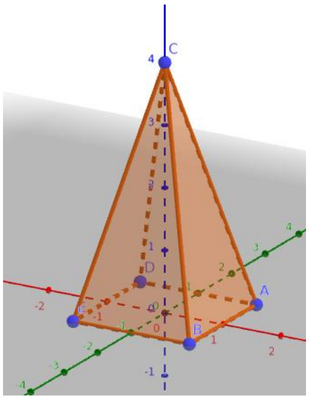
Nessa aqui, não consegui fazer o Tronco de Cone no Software do Geogebra, como os anteriores. Por isso a formatação vai estar um pouco diferente.

Fiz a imagem no Mathematica pra vocês.



Exemplo comum de tronco de cone: forma de bolo, alguns chapéus de festa também, tigelas de plástico, alguns copos.

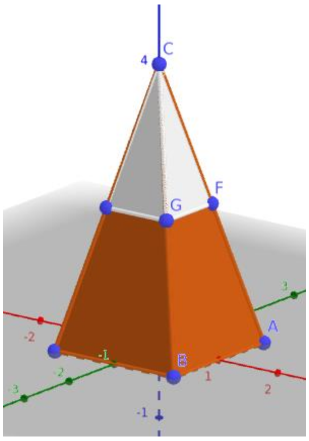
- Pirâmide



Exemplos de pirâmides: as pirâmides egípcias e tudo o mais.

- Tronco de pirâmide (basta cortar a pirâmide):

Apenas a parte laranja.



Exemplos de tronco de pirâmide: olha, vou ser sincero, não consigo pensar em nenhum haha.

Resolução:

Veja que temos 2 figuras geométricas tridimensionais na forma de bolo.

Comparando com a forma do Tronco de Cone, percebemos que temos 2.

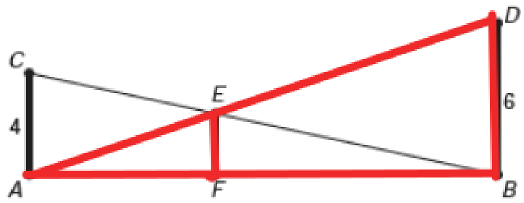
Um tronco de cone pequeno dentro de um tronco de cone maior.

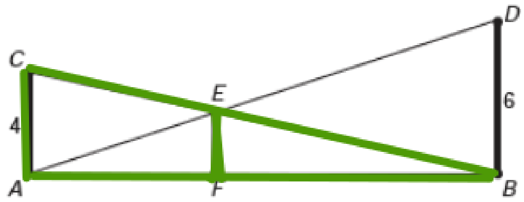
Resposta: Letra D.

Item 03 ==

Semelhança de Triângulos

i) Percebendo as Semelhanças de Triângulos





ii) Calculando as Semelhanças

ii-a) Semelhança Vermelha

$$\frac{AF}{EF} = \frac{AB}{6}$$

$$EF = \frac{AF \cdot 6}{AB}$$

ii-b) Semelhança Verde

$$\frac{FB}{EF} = \frac{AB}{4}$$

$$EF = \frac{FB \cdot 4}{AB}$$

Mas, AF + FB = AB.

Então, podemos escrever FB = AB - AF, ficando com:

$$EF = \frac{4 \cdot (AB - AF)}{AB}$$

iii) Igualando os EF

$$\frac{AF \cdot 6}{AB} = \frac{4 \cdot (AB - AF)}{AB}$$

$$AF \cdot 6 = 4 \cdot (AB - AF)$$

$$6 \cdot AF = 4 \cdot AB - 4 \cdot AF$$

$$10 \cdot AF = 4 \cdot AB$$

$$AB = 2{,}5 \cdot AF$$

iv) Substituindo AB por 2,5AF na expressão de EF

$$EF = \frac{AF \cdot 6}{AB}$$

$$EF = \frac{AF \cdot 6}{2{,}5 \cdot AF}$$

$$EF = \frac{6}{2{,}5}$$

$$EF = 2{,}4$$

Resposta: Letra C.

Observação: você poderia ter igualado outro segmento, ao invés de EF e cortado um caminho.

Na verdade, acredito que teria até sido menos contas, mas, nessa demonstração resolvi igualar EF porque é um segmento claro em comum entre as 2 semelhanças, então, imagino que tenha ficado mais didático.

Mas, não se preocupe se fez de outra forma, todas valem ;)

Item 04 ==

Geometria Plana e Conhecimentos de Ângulos

Bom, estamos procurando a representação em que as Proteínas sejam 10% da área do polígono, as Gorduras sejam 30% e os Carboidratos 60%.

No caso, para acelerar nossa resolução, podemos entender como a área dos carboidratos sendo 6 vezes a área das proteínas (e 2 vezes a área das gorduras). E, as gorduras sendo 3 vezes a área das proteínas.

i) Quais representações já podemos excluir

O octógono já pode ser descartado, visto que os Carboidratos estão representando mais de 60% da área (por uma inspeção visual rápida, podemos ver que ele está ocupando 75% da área total).

Podemos descartar também o losango, visto que está claro que os Carboidratos estão representando exatamente 50% (metade) da área.

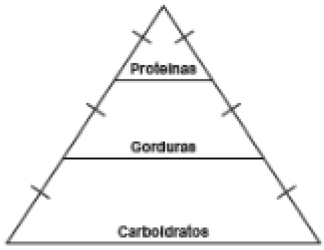
Ou seja, descartamos as alternativas b e e.

ii) Redesenhando as outras figuras

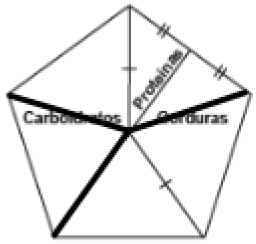
Bom, agora que facilitamos um pouco nossa vida, vamos gastar um pouco mais de tempo analisando as figuras.

Vou redesenhá-las de forma que nos será útil.

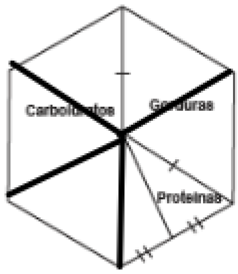
O triângulo vamos mantê-lo como está, pois, é a mais difícil de analisar.



O pentágono eu dividi nas 5 partes iguais que o constituem.



E, o hexágono, também dividi em 6 partes iguais.



iii) Análise mais aprofundada

iii-a) Pentágono

Bom, veja que o pentágono agora está dividido em 5 partes iguais, e, dentro de uma dessas partes, uma metade dela está destinada às proteínas.

Ou seja, as proteínas estão correspondendo a 1/2 de 1/5, que dá 1/10, ou, 10%.

Até aí está correto.

Agora, vamos ver as Gorduras.

As Gorduras terão 3/10 do total, ou seja, 30%.

Então, os Carboidratos têm 60% da área total, e, essa é a nossa resposta.

iii-b) Hexágono

Vamos entender por que não é o Hexágono.

O Hexágono está dividido em 6 partes iguais, e, as Proteínas representam 1/2 de uma dessas partes, ou seja, 1/12 do todo. Então, essa área representa menos de 10%, ela é, na verdade, próxima de 8%.

iii-c) Triângulo

Deixei o triângulo por último, porque é a figura menos simples de se analisar.

Mas, bastaria aplicar Teorema de Tales para ver que as Proteínas representam 1/9 do total, ou seja, algo próximo de 11%.

Resposta: Letra C.

Item 05 ===

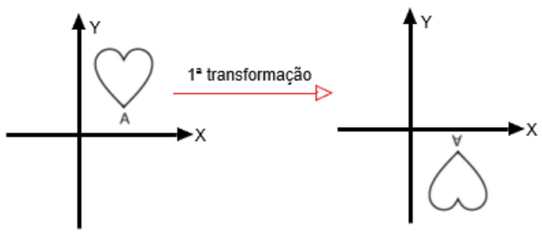
Percepção Espacial + Geometria Espacial

Na verdade, a resolução dessa questão é o próprio gabarito, visto que deriva diretamente da definição.

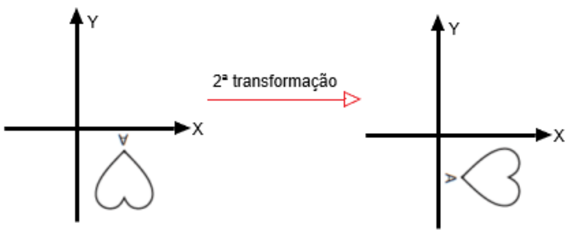
Resposta: Letra E.

Item 06 ===

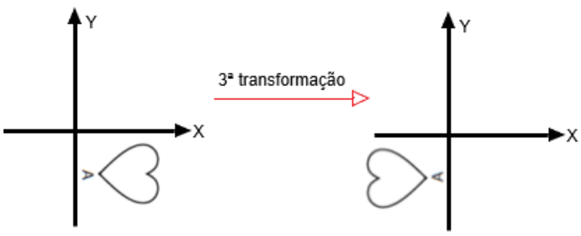
Nessa questão devemos seguir as 5 transformações isométricas do texto e na ordem em que aparecem. Assim, após a 1ª transformação temos a imagem abaixo:



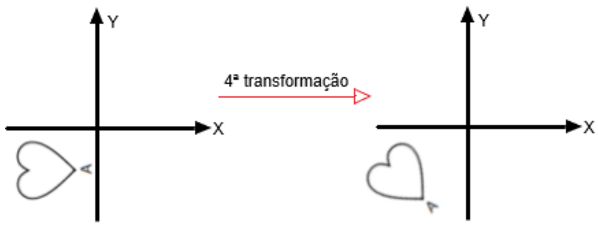
Agora aplicando a 2ª transformação temos a seguinte figura:



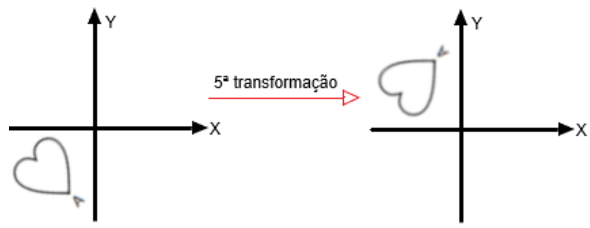
Aplicando a 3ª transformação obtemos:



Fazendo agora a 4ª transformação temos:



Por fim, aplicando a 5ª transformação e obtendo assim a posição final da figura temos:

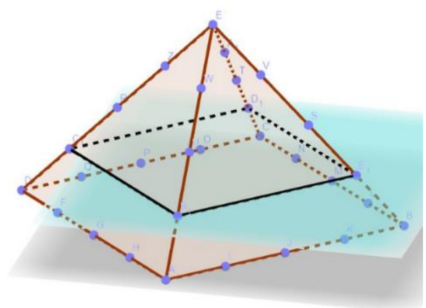


Resposta: Letra C.

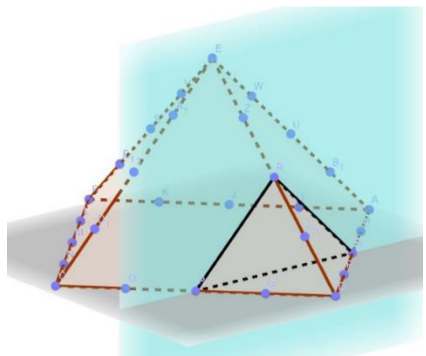
Item 07 ===

Na resolução dessa questão é necessária uma boa ideia de geometria espacial e a visualização de alguns polígonos possíveis de serem obtidos é mais complicada. Mas vamos lá.

Primeiro ao traçarmos um plano paralelo a base conseguimos obter um quadrado como vemos abaixo:

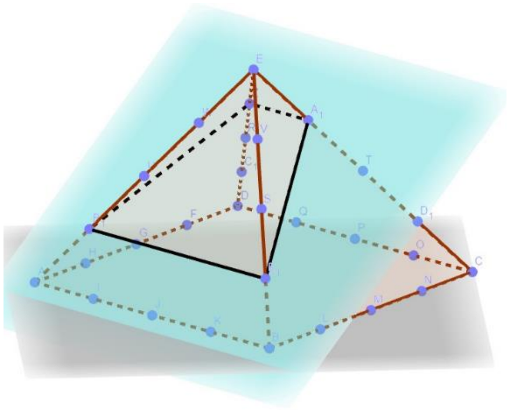


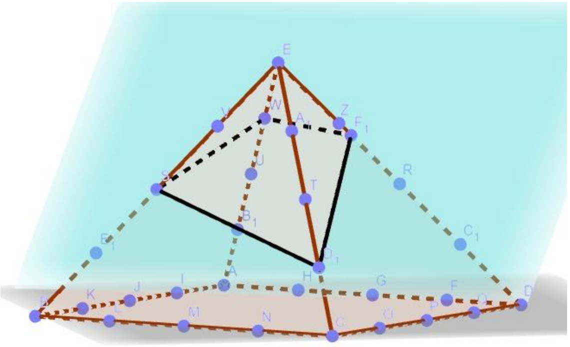
Depois ao traçarmos perpendicular à base ou ainda paralelo e sobre uma das faces da pirâmide obtemos um triangulo como vemos na imagem abaixo.

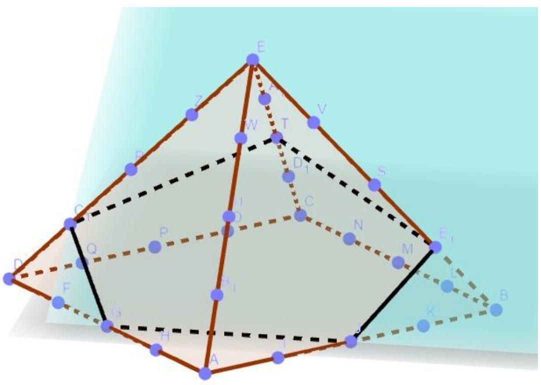


Resolução – Treinamento ENEM
S02.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Depois vamos para os cortes feitos em planos oblíquos que cortam a pirâmide e obtemos um trapézio, quadrilátero irregular e por mais estranho que possa parecer um pentágono, como vemos nas 3 imagens abaixo.







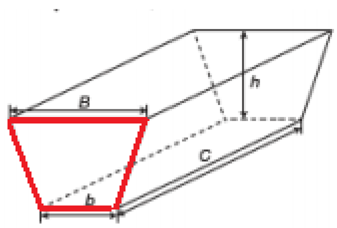
Dessa forma, temos que é possível de ser obtido pelo artista plástico os seguintes polígonos: triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos.

Resposta: Letra E.

Item 08 ==

A partir do texto temos que $B = 6$, $h = 2$ e $C = 20$. Como para cada metro de altura (h) do silo a largura do topo (B) tem 0,5 metros a mais do que a largura do fundo (b), temos que a altura do fundo (b) vale 5 metros.

Agora, para podermos calcular o volume do silo primeiro vamos calcular a área do trapézio, em destaque na imagem abaixo, que vale:



$$\text{Área trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$
$$\text{Área trapézio} = \frac{(6+5)\cdot 2}{2}$$
$$\text{Área trapézio} = 11m^2$$

Calculando agora o volume temos:

$$\text{volume silo} = \text{Área trapézio} \cdot C$$
$$\text{volume silo} = 11 \cdot 20$$
$$\text{volume silo} = 220\,m^3$$

Por fim, como 1 tonelada de foragem ocupam $2\,m^3$, temos que a quantidade máxima de foragem que cabe no silo é:

$$\frac{1 \text{ tonelada de foragem}}{2\,m^3} = \frac{\text{capacidade máxima}}{\text{volume do silo}}$$
$$\frac{1 \text{ tonelada}}{2\,m^3} = \frac{\text{capacidade máxima}}{220\,m^3}$$
$$\text{capacidade máxima} = \frac{220}{2} \cdot 1$$
$$\text{capacidade máxima} = 110 \text{ toneladas de forragem}$$

Resposta: Letra A.

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 09 ==

Para resolvermos essa questão vamos dividir a análise em duas partes:

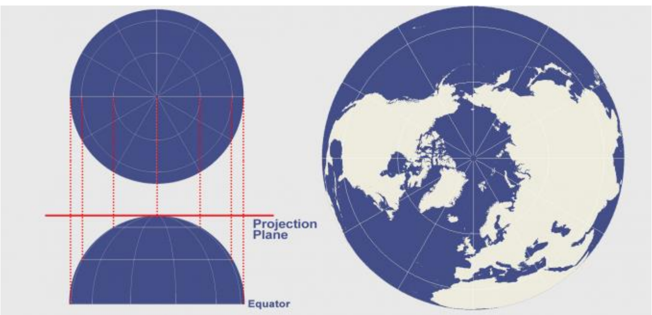
- 1º a projeção ortogonal de A até B no plano α, obtendo:

- 2º a projeção ortogonal de B até C no plano α, obtendo:

Esse ponto deve ter sido onde a maioria ficou confusa, essa confusão ocorreu pois como o segmento (paralelo) AB está abaixo da linha do equador no hemisfério sul, quando o segmento (meridiano) BC vai em direção a linha do equador ele primeiro se afasta do centro da projeção, depois quando ele passa da linha do equador ele volta a se aproximar e caso o ponto C estivesse sobre um mesmo paralelo que o AB só que agora no hemisfério norte teríamos a impressão de uma linha que apenas estaria afastando do centro, mesmo que na realidade a linha se afastasse e depois se aproximasse sobreposta a outra. No entanto como C se encontra em um paralelo mais interno temos que o segmento continua indo em direção ao centro, obtendo a imagem acima como a resposta da questão.

Resposta: Letra E.

Observação: Algo que poderia facilitar a visualização seria a ideia de uma projeção azimutal como a da imagem abaixo.

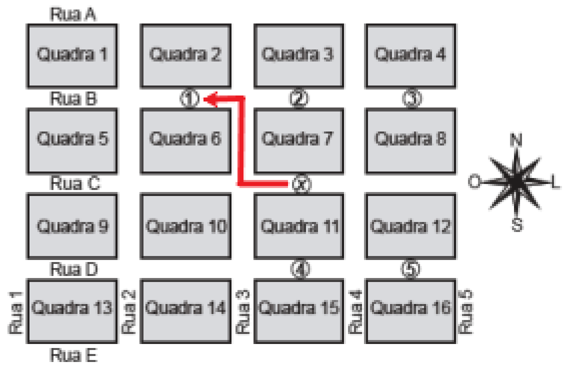


Fonte: https://gisgeography.com/wp-content/uploads/2016/12/Stereographic-Projection-425x233.png Acesso em 07 de setembro de 2020.

Isso facilitaria tanto no entendimento de porque o segmento é curvo ou reto, como também no porquê de no segundo passo da projeção a reta não é apenas para dentro.

Item 10 ==

Seguindo as instruções de seu amigo para poder chegar à padaria e que o menino parte do ponto representado pela letra X, temos que ele percorreu o caminho que vemos na imagem abaixo, chegando na padaria representada pelo número 1.

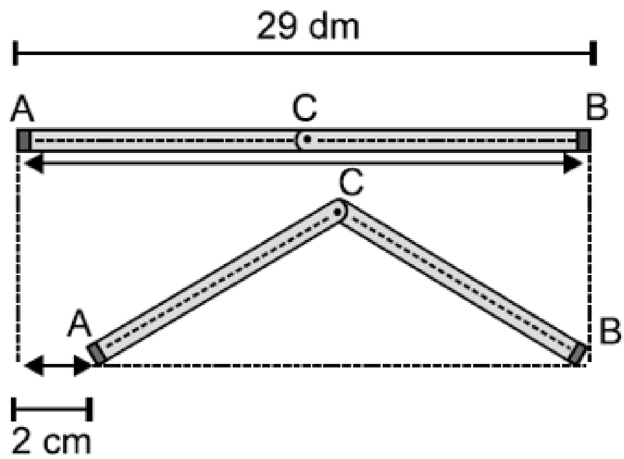


Resposta: Letra A.

Item 11 ==

Nessa questão, o primeiro passo é converter as medidas para uma mesma unidade. No caso converteremos decímetros para centímetros, com isso, o comprimento da escada será:

$$29 \text{ dm} = 290 \text{ cm}$$



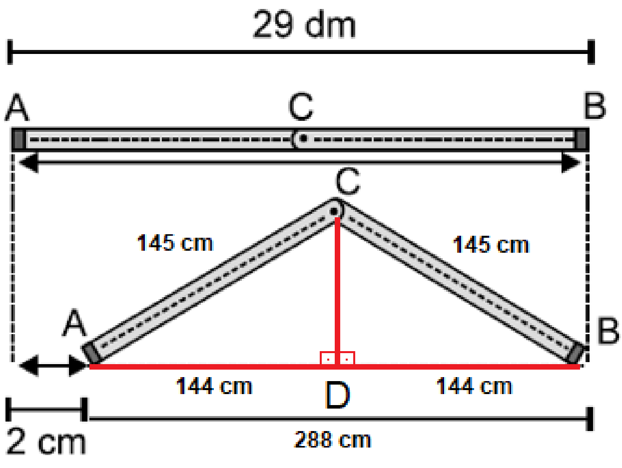
Olhando a figura acima e sabendo que C é a articulação central da escada, ou seja, seu ponto médio, podemos concluir que as medidas AC e CB são iguais entre si e iguais a:

$$AB = CB = \frac{290}{2} = 145 \text{ cm}$$

Agora, olhando a escada dobrada na parte inferior da figura, podemos calcular o comprimento de AB, que será:

$$AB = 290 - 2 = 288 \text{ cm}$$

A partir dessa medidas, podemos destacar um triângulo retângulo como mostrado a seguir:



Como C é ponto médio, o ponto D, correspondente à projeção de C em AB, abaixo também será ponto médio, mas de AB. Dessa forma temos que:

$$AD = DB = \frac{288}{2} = 144\,cm$$

Com isso, podemos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADC e calcular o valor de CD, que é a altura que a articulação C ficou do chão.

$$CD^2 + 144^2 = 145^2$$

$$CD^2 = 145^2 - 144^2$$

Podemos perceber que temos um produto notável acima:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

Dessa forma, podemos fazer o seguinte:

$$a = 145$$

$$b = 145$$

$$145^2 - 144^2 = (145+144)\cdot(145-144)$$

$$145^2 - 144^2 = 289\cdot 1 = 289$$

$$CD^2 = 289$$

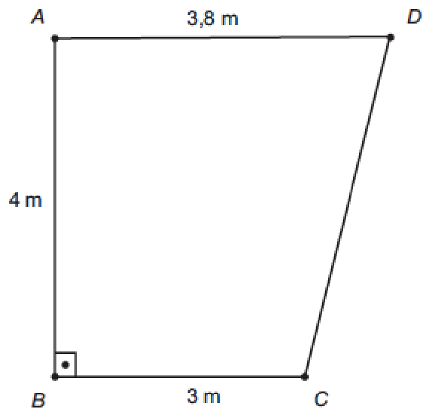
$$CD = \sqrt{289} = 17\,cm$$

Logo, a articulação C ficou a 17 cm do chão.

Resposta: Letra D.

Item 12 ==

O primeiro passo dessa questão é calcular a área do laboratório. Para isso, calculamos a área do trapézio representado abaixo:



A área de um trapézio é dada por:

$$Área = \frac{(B+b)}{2}\cdot h$$

Onde:

B = base maior = 3,8 m

b = base menor = 3 m

h = altura = 4 m (pois o trapézio é retângulo)

Substituindo os valores, achamos:

$$Área = \frac{(3,8+3)}{2}\cdot 4 = \frac{6,8}{2}\cdot 4 = 3,4\cdot 4 = 13,6\,m^2$$

O enunciado nos diz que 2 pessoas ficarão no laboratório mais uma centrífuga que emite calor, logo o total de BTUh necessários será:

$$1m^2 \rightarrow 800\,BTUh$$

$$13,6\,m^2 \rightarrow x\,BTUh$$

$$x\cdot 1 = 13,6\cdot 800$$

$$x = 10.880\,BTUh$$

A esse valor acima devemos somar 600 BTUh devido a presença da centrífuga:

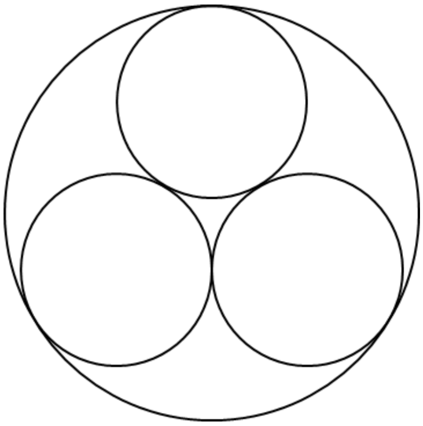
Total necessário: $10.880 + 600 = 11.480\,BTUh$

Logo, o aparelho de menor capacidade térmica que atende às necessidades do laboratório é o do tipo III, com 11.500 BTUh.

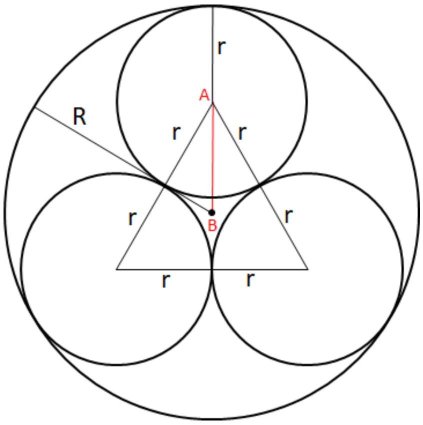
Resposta: Letra C.

Item 13 ==

Na figura abaixo, vamos representar como seria a imagem se olhássemos de frente o furo cilíndrico com os três bastões encaixados sem folga:



Indicando na figura acima alguma medidas, como os raios R (furo cilíndrico) e r (bastão) e o centro do furo por B e o centro de um dos bastões por A, obtemos a figura abaixo:



Para descobrir quanto vale o raio R, basta obtermos o valor da medida AB e somar com r. Então vamos calcular AB:

I)

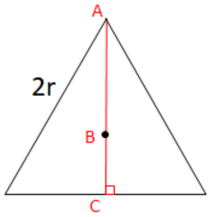
Podemos perceber que se formou um triângulo equilátero de lado 2r bem ao centro do furo.

Por simetria, já que temos três bastões idênticos igualmente espaçados e encaixados dentro do furo, podemos afirmar que o centro do furo (ou da circunferência maior), B, coincide com o centro geométrico do triângulo equilátero de lado 2r que temos no centro da figura.

O baricentro (ou centro de massa) de um triângulo equilátero coincide com seu centro geométrico. Logo, podemos afirmar que B também é baricentro desse triângulo.

II)

Uma das propriedades do baricentro é dividir as medianas dos triângulos na proporção 2:1. No triângulo equilátero, as medianas são iguais às alturas, com isso percebemos que a medida AB faz parte da altura também.



AC é uma altura do triângulo equilátero. Utilizando a propriedade indicada acima, a do baricentro, sabemos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{1} \to AB = 2BC$$

E também sabemos que:

$$AB + BC = \text{Altura Triângulo} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$AB + BC = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

Juntando as duas equações acima:

$$\begin{cases} AB = 2BC \\ AB + BC = r\sqrt{3} \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema:

$$2BC + BC = r\sqrt{3}$$

$$3BC = r\sqrt{3}$$

$$BC = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$AB = 2BC = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Agora para descobrir o raio R, basta somarmos r e AB:

$$R = AB + r$$

$$R = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r$$

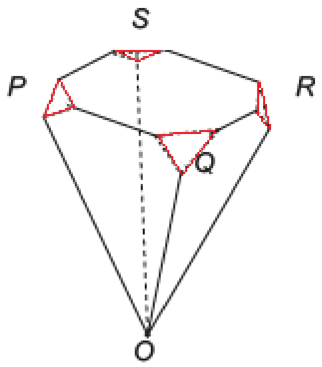
$$R = r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

Resposta: Letra D.

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 14 ==

Representando a joia poliédrica após os cortes feitos na pirâmide temos algo parecido com figura baixo, onde as faces originadas nos cortes estão destacadas em vermelho.



A partir da figura acima podemos contar o número de faces da joia. Temos as 5 faces originais da pirâmide (4 laterais e 1 base) mais as 4 novas faces originadas dos cortes (destacas em vermelho). Logo, temos 9 faces.

Com isso, já podemos eliminar as letras C, D e E.

Contando o número de arestas, temos as 8 arestas originais da pirâmide, mais as 12 arestas originadas no cortes (3 arestas para cada corte). Logo, temos 20 arestas.

Com isso, já podemos responder à questão, pois apenas a letras A, possui 9 faces e 20 arestas.

Mas calculando o número de vértices, chegamos em 3 vértices para cada face cortada, ou seja, total de 3.4 = 12 vértices, mais o vértice no ponto O. Logo, temos 13 vértices.

Resumindo:

9 faces

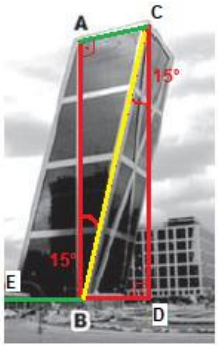
20 arestas

13 vértices

Resposta: Letra A

Item 15 ==

Na figura abaixo indicamos o ângulo de 15º com a vertical e os lados de mesma medida com a mesma cor, ou seja:



$AC = BE$

$AB = CD$

O enunciado nos indica que a altura do prédio (AB) vale 114m. Logo, por trigonometria podemos descobrir quanto vale AC e consequentemente BE, que é o lado da base do prédio.

$$\text{tg}\,15º = \frac{AC}{AB} \rightarrow AC = \text{tg}\,15º \cdot AB$$

$$AC = 0,26 \cdot 114 = 29,64$$

$$AC = BE = 29,64\,\text{m}$$

$$**\,0,26 \cdot 114 = (0,25 + 0,01) \cdot 114 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{100}\right) \cdot 114 =$$

$$\frac{114}{4} + \frac{114}{100} =$$

$$= 28,5 + 1,14 = 29,64\,**$$

Como o prédio é um prisma de base quadrada, a área da base será:

$$\text{Área da Base} = BE^2 = 29,64^2$$

Mas 29,64 é um número muito próximo de 30, então para facilitar, podemos calcular:

$$30^2 = 900\,\text{m}^2$$

Logo, A área da base será um número maior que 700 m^2

De qualquer forma, fazendo o cálculo do valor exato:

$$BE^2 = 29,64^2 = 878,5296\,\text{m}^2$$

Resposta: Letra E.