Potenciação e Radiciação

POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Definição

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com n > 1, chama-se de potência de base **a** e expoente **n** o número a^n, que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

Por definição, temos ainda que $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$) e $a^1 = a$.

Dessa definição, decorre que:

$a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$, $a^4 = a.a.a.a$, etc.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a.a. \dots .a}_{\textbf{n} \text{ fatores}}}$$

Dados um número real **a**, não nulo, e um número natural **n**, chama-se de potência de base **a** e expoente −n o número a^{-n}, que é o inverso de a^n.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

RAIZ ENÉSIMA ARITMÉTICA

Definição

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geq 1$, chama-se de raiz enésima aritmética de **a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado radical, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado de radicando, e **n**, de índice.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \ \text{ e } \ b \geq 0}$$

OBSERVAÇÕES

i) Da definição, decorre $\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a$, para todo $a \geq 0$.

ii) Observemos, na definição dada, que:

Correto	Incorreto
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{16} = \pm 4$
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{25}{81}} = \pm\frac{5}{9}$
$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt{0,09} = \pm 0,3$
$\pm\sqrt{49} = \pm 7$	$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} = \frac{\pm 6}{\pm 8}$

iii) Devemos estar atentos ao cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos:

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$, e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |x|$, e não $\sqrt{x^2} = x$

No conjunto dos números reais, temos situações distintas conforme **n** seja par ou ímpar.

1) Para **n** par:

Se $a < 0$, não existe raiz enésima de **a**.

Exemplo:

$\sqrt{-5}$ não existe no conjunto dos números reais.

Se $a = 0$, a única raiz enésima de **a** é zero.

Exemplo:

$\sqrt{0} = 0$

Se a > 0, a única raiz enésima de **a** é $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo:

$\sqrt{4} = 2$

2) Para **n** ímpar:

Qualquer que seja o número real **a**, existe uma única raiz enésima, que é indicada por $\sqrt[n]{a}$ (ou $a^{\frac{1}{n}}$, como veremos adiante).

Exemplos:

1º) $\sqrt[3]{-8} = -2$

2º) $\sqrt[3]{1} = 1$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Se $b \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $b.\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a.b^n}$.

Exemplos:

1º) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5.2^3} = \sqrt[3]{40}$

2º) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{2.3^2} = -\sqrt{18}$

Assim, o coeficiente do radical pode ser colocado no radicando, com expoente igual ao índice do radical.

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Definição

Dados um número real **a** (positivo), um número inteiro **p** e um número natural **q** ($q \geq 1$), chama-se de potência de base **a** e expoente $\frac{p}{q}$ a raiz com índice **q** de a^p.

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

Sendo $\frac{p}{q} > 0$, define-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

1º) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = 2\sqrt{2}$

2º) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

Propriedades

As propriedades a seguir se verificam para as potências de expoente racional.

Assim, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Para facilitar cálculos, é comum eliminar raízes dos denominadores das frações, através de um processo chamado racionalização.

Por exemplo, ao realizarmos a divisão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $\sqrt{2}$ é, aproximadamente, 1,41, teremos de efetuar $\frac{1}{1,41}$. Porém, se racionalizarmos a fração dada (multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{2}$), teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E, usando a mesma aproximação anterior, ficamos com a divisão $\frac{1,41}{2}$, que é mais simples que a primeira.

De modo geral, para racionalizarmos uma fração com denominador $\sqrt[n]{a^p}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^{p+n-p}} = a$.

Exemplos:

1º) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2º) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{27}}{3}$

Caso apareça, no denominador de uma fração, uma soma de radicais, devemos utilizar os produtos notáveis.

Vejamos alguns exemplos de racionalizações:

Exemplo 1:

Quando o denominador é do tipo a + b ou a – b, e **a** e / ou **b** são raízes quadradas, lembrando que

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

devemos multiplicar numerador e denominador por a – b ou a + b, respectivamente. Assim:

1º) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2º) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$

Exemplo 2:

Quando o denominador é do tipo (a – b) ou (a + b), e um dos dois é uma raiz cúbica, lembrando que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

devemos multiplicar o numerador e o denominador por $a^2 + ab + b^2$ ou $a^2 - ab + b^2$, respectivamente. Assim:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\left[\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1^2\right)\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\sqrt[3]{2^3}-1^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) A distância que a luz percorre em um ano, chamada ano-luz, é de aproximadamente $38 \cdot 4^5 \cdot 5^{12}$ quilômetros. A notação científica desse número é:

A) $9{,}5 \cdot 10^{10}$
B) $0{,}95 \cdot 10^{12}$
C) $9{,}5 \cdot 10^{12}$
D) $95 \cdot 10^{12}$
E) $9{,}5 \cdot 10^{14}$

02. (CMBH–2020) Qual é o menor valor da soma X + Y, de modo que o produto $6^{2X} \cdot 9^2 \cdot 34^Y$ possa ser expresso como uma potência de base 51?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

03. TWKC (CEFET-MG) O valor da expressão numérica $\dfrac{(1{,}25)^{-2} + 4 \cdot 5^{-1}}{(9 \cdot 9^{-1})^2 - 2(-10)^{-1}}$ é igual a:

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{3}{5}$
C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{6}{5}$

04. (IFSC-SC) Considere a expressão numérica $A = \dfrac{0{,}001}{1\ 000} + 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt{25}$. É correto afirmar que o valor de **A** é:

Disponível em: pplware.sapo/o-pplware-apresenta-kids. Acesso em: 10 ago. 2014.

A) 9
B) 10
C) 81,003
D) 69
E) 9,000001

05. (UFRGS-RS–2022) Considere as seguintes afirmações sobre números reais.

I. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

II. $\sqrt{a^2} = a$

III. Se $0 < b < a$, então $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Quais estão corretas?

A) Apenas I.
B) Apenas III.
C) Apenas I e II.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.

06. CXTG (IFSC-SC) O valor correto da expressão numérica $E = (10^{-2}) \cdot (10^3) : (10^{-4}) + (8 \cdot 8^{-1}) + 10^{-4}$ é

A) 58,0001.
B) 8,000001.
C) 100001,0001.
D) 8.
E) 80.

MATEMÁTICA

07. JTNL (UFMG) O valor de

$m = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2})$ é:

A) 6 C) 16 E) $12\sqrt{5}$

B) $6\sqrt{6}$ D) 18

08. XAØJ (UNITAU-SP) A expressão $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ é igual a:

A) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPE–2022) Andrew Pershing, cientista marinho da Universidade do Maine, nos EUA, estima que, ao longo do século 20, a caça às baleias tenha adicionado cerca de 70 milhões de toneladas de dióxido de carbono à atmosfera. "É muito, mas 15 milhões de carros fazem isso em um único ano. Os EUA têm atualmente 236 milhões de carros", afirma.

Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/vert-fut-55768723?at_medium=custom7&at_custom3=BBC+Brasol&at_custom4=66D5F810-61C1-11EB-B6D9-60363A982C1E&at_custom1=%5Bpost+type%5D&at_campaign=64&at_custom2=twitter. Acesso em: 21 jul. 2021.

De acordo com as informações do texto, a quantidade de quilogramas de dióxido de carbono, lançada durante 3 anos na atmosfera pelos EUA, no período do estudo, apenas com seus 236 milhões de carros (supondo esse valor invariável durante esses 3 anos), é aproximadamente igual a:

A) $3{,}3 \cdot 10^{12}$ C) $2{,}1 \cdot 10^{6}$ E) $1{,}1 \cdot 10^{9}$

B) $3{,}3 \cdot 10^{9}$ D) $1{,}1 \cdot 10^{12}$

02. 56TO (UFRRJ) Encontre o valor da expressão mostrada a seguir:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^{-3} \cdot 0{,}66\ldots} + \sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^{0} - \frac{1}{1{,}33\ldots}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

03. (UFLA-MG) O valor da expressão $\dfrac{10^{\frac{n}{2}}(10^{m-1}+10^{m+1})}{10^{m}\left(10^{\frac{n}{2}}+10^{2+\frac{n}{2}}\right)}$ é:

A) 1 C) $10^{m\cdot\frac{n}{2}-2}$ E) 10^{-1}

B) 10 D) $10^{m\cdot\frac{n}{2}+2}$

04. 32YA (UDESC) Se $h^2 = \dfrac{16}{2-\sqrt{2}} - 4$, então o valor absoluto de **h** é:

A) $12 + 8\sqrt{2}$ C) 2 E) $2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

B) 4 D) $\dfrac{2}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

05. (PUC Rio–2021) Assinale a opção correta:

A) $3 < 1 + \sqrt{5} < \sqrt{10}$

B) $\sqrt{10} < 1 + \sqrt{5} < \sqrt{11}$

C) $\sqrt{11} < 1 + \sqrt{5} < \sqrt{13}$

D) $\sqrt{13} < 1 + \sqrt{5} < 4$

06. 3866 (UEL–PR) O valor da expressão $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ é:

A) $-\sqrt{2}$ C) 0 E) 2

B) $-\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

07. 90XØ (Unimontes-MG) A expressão $\left(\sqrt{5}-1\right)^2 + \dfrac{20}{5-\sqrt{5}}$ é igual a:

A) $9 + \sqrt{5}$ C) $11 - \sqrt{5}$

B) $-11 + \sqrt{5}$ D) $9 - \sqrt{5}$

08. (UNITAU-SP) A expressão $\dfrac{4}{\sqrt[3]{7}}$ é igual a:

A) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{7}\right)}{7}$ D) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{343}\right)}{7}$

B) $\dfrac{4\left(\sqrt{7}\right)}{7}$ E) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}\right)}{7}$

C) $\dfrac{4\left(\sqrt{49}\right)}{7}$

09. (PUC Rio) Simplificando $\left(\sqrt[3]{9} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24}\right)$ encontramos:

A) 9 C) $\sqrt[3]{3}$ E) 1

B) 10 D) 12

10. B4ØB (CFT-RJ) Alex, Beatriz e Camila foram convidados a fazerem afirmações sobre o número $N = 2^{50} + 4^{20}$.

- Alex afirmou que **N** é múltiplo de 8.
- Beatriz afirmou que metade de **N** é igual a $2^{25} + 4^{10}$.
- Camila afirmou que **N** é par.

Quantas das afirmações feitas pelos participantes são verdadeiras?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

11. RDQ4 (UFRGS-RS–2019) Sendo **a** e **b** números reais positivos quaisquer, considere as afirmações a seguir:

I. Se $a > b$, então $a^x > b^x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

II. Se $a > b > 1$, então $\dfrac{1}{a} < \dfrac{2}{a+b} < \dfrac{1}{b}$.

III. Se $a > b$, então $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Quais estão corretas?

A) Apenas I. D) Apenas II e III.

B) Apenas II. E) I, II e III.

C) Apenas I e III.

12. QSGI

(PUC-SP) A tabela a seguir permite exprimir os valores de certas grandezas em relação a um valor determinado da mesma grandeza tomado como referência. Os múltiplos e submúltiplos decimais das unidades derivadas das unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI) podem ser obtidos direta ou indiretamente dos valores apresentados e têm seus nomes formados pelo emprego dos prefixos indicados.

Nome	Símbolo	Fator pelo qual a unidade é multiplicada
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^9 = 1 000 000 000
mega	M	10^6 = 1 000 000
quilo	k	10^3 = 1 000
hecto	h	10^2 = 100
deca	da	10 = 10
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	μ	10^{-6} = 0,000001
nano	n	10^{-9} = 0,000000001
pico	p	10^{-12} = 0,000000000001

Quadro Geral de Unidades de Medida. 2. ed. – INMETRO. Brasília, 2000.

Assim, por exemplo, se a unidade de referência fosse o metro (**m**), teríamos:

28 000 μm (micrômetros) = 28 000 . 10^{-6} m (metros) = 0,028 m (metros)

Considerando o bel (**b**) como unidade de referência, a expressão $\dfrac{(0{,}13\ \text{Mb})\,.\,(0{,}5\ \text{nb})}{2{,}5\ \text{kb}}$ é equivalente a:

A) 0,0026 cb
B) 0,026 μb
C) 0,26 kb
D) 2,6 db
E) 26 pb

13. QICR

(Cesgranrio) O número de algarismos do produto $5^{17}\,.\,4^9$ é igual a:

A) 17
B) 18
C) 26
D) 34
E) 35

14. HZKA

(UNIFEI-MG) Sejam $A = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $B = \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x}}$ e $C = \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}$. Então, o produto A.B.C é igual a:

A) $\sqrt[3]{y}$
B) $\sqrt[3]{x}$
C) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$
D) $\sqrt[3]{xy}$

15. FAPZ

(UEPB) Seja n > 1 um número natural. O valor da expressão $\sqrt[n]{\dfrac{72}{9^{2-n}-3^{2-2n}}}$, quando simplificada, é:

A) 9
B) 9^{2n}
C) 9^n
D) $\sqrt[n]{9}$
E) 1

16. HRKS

(ESPM-SP) O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ é igual a:

A) $2\sqrt{2}$
B) $-2\sqrt{2}$
C) 0
D) $4\sqrt{2}$
E) $-4\sqrt{2}$

17. WCVG

(PUC Rio) Considere **x**, **y** e **z** reais positivos tais que $\sqrt{x} = 2015^3$, $\sqrt[3]{y^2} = 2\,015^4$, $z^3 = 2\,015^6$.

A expressão $\dfrac{1}{\sqrt{x.y.z}}$ vale:

A) $2\,015^{-7}$
B) $2\,015^{-13}$
C) $2\,015^{-17}$
D) $2\,015^5$
E) $2\,015^7$

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2021) Um segmento de reta está dividido em duas partes na proporção áurea quando o todo está para uma das partes na mesma razão em que essa parte está para a outra. Essa constante de proporcionalidade é comumente representada pela letra grega φ, e seu valor é dado pela solução positiva da equação $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Assim como a potência φ^2, as potências superiores de **w** podem ser expressas da forma aφ + b, em que **a** e **b** são inteiros positivos, como apresentado no quadro.

φ^2	φ^3	φ^4	φ^5	φ^6	φ^7
φ + 1	2φ + 1	3φ + 2	5 φ + 3	8 φ + 5	...

A potência φ^7, escrita na forma aφ + b (**a** e **b** são inteiros positivos), é:

A) 5φ + 3
B) 7φ + 2
C) 9φ + 6
D) 11φ + 7
E) 13φ + 8

02. OGU4

(Enem–2019) A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.

O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Disponível em: http://www.gripenet.pt. Acesso em: 2 nov. 2013 (Adaptação).

Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza*, em mm, é:

A) $1{,}1\,.\,10^{-1}$
B) $1{,}1\,.\,10^{-2}$
C) $1{,}1\,.\,10^{-3}$
D) $1{,}1\,.\,10^{-4}$
E) $1{,}1\,.\,10^{-5}$

03. 33N1

(Enem) Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova com a marca de 43,18 segundos.

Esse tempo, em segundos, escrito em notação científica é:

A) $0,4318 \cdot 10^2$
B) $4,318 \cdot 10^1$
C) $43,18 \cdot 10^0$
D) $431,8 \cdot 10^{-1}$
E) $4\,318 \cdot 10^{-2}$

04. (Enem) Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área **A** da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa **m** pela fórmula $A = k.m^{\frac{2}{3}}$, em que **k** é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

A) $\sqrt[3]{16}$
B) 4
C) $\sqrt{24}$
D) 8
E) 64

05. U682

(Enem) A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K. A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da sequência principal

Classe espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	$5 \cdot 10^5$	40	18
B0	28 000	$2 \cdot 10^4$	18	7
A0	9 900	80	3	2,5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

(Temperatura em Kelvin. Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.)

Disponível em: http://www.zenite.nu. Acesso em: 1 maio 2010 (Adaptação).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

A) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
B) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
C) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
D) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
E) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

06. (Enem) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

MANUAL de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2 055), *Claudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (Adaptação).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

A) 10^2
B) 10^3
C) 10^4
D) 10^5
E) 10^9

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. B
03. D
04. E
05. B
06. C
07. D
08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
03. E
04. E
05. B
06. C
07. C
08. E
09. D
10. C
11. D
12. B
13. B
14. B
15. A
16. E
17. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. D
03. B
04. B
05. A
06. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

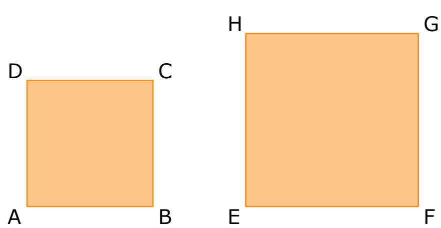
Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

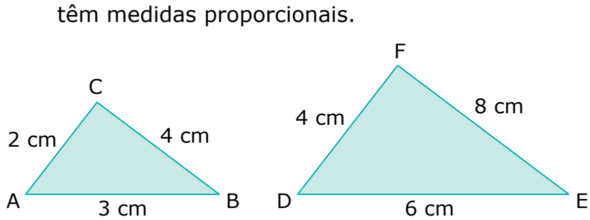
A ideia de semelhança de figuras planas é uma das mais importantes da Geometria. Dizemos que duas figuras planas são semelhantes quando possuem a mesma forma.

Exemplos:

1º) Dois quadrados quaisquer sempre são semelhantes.



2º) Dois triângulos são semelhantes quando seus lados têm medidas proporcionais.

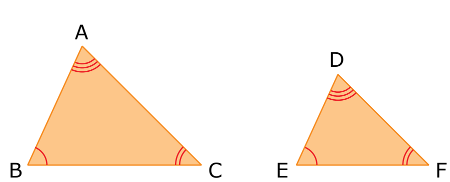


Definição

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se,

i) os ângulos são congruentes;

ii) os lados opostos a ângulos congruentes são proporcionais.



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

OBSERVAÇÕES

i) Indicamos a semelhança pelo símbolo **~**.

ii) Lados opostos a ângulos congruentes são chamados de lados homólogos.

iii) A razão entre dois lados homólogos (**k**) é a razão de semelhança.

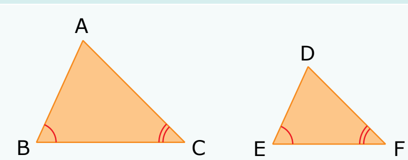
CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Vimos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes e os três lados proporcionais. Porém, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário conferir todas essas condições.

A seguir, enunciamos os casos de semelhança, que são alguns grupos de condições capazes de garantir a semelhança dos triângulos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

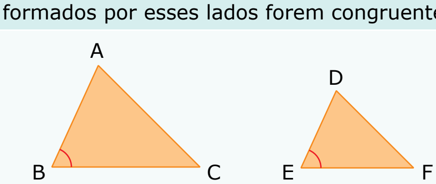
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

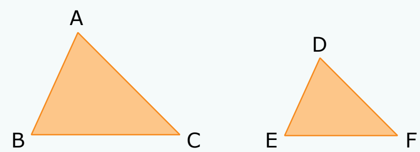
Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados respectivamente proporcionais e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes.



$$\left.\begin{matrix} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados respectivamente proporcionais.

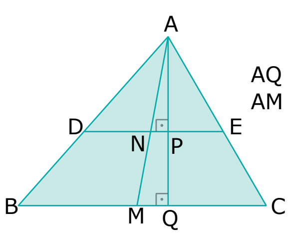


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Razão de semelhança

A razão de semelhança de dois triângulos é a razão entre as medidas de dois segmentos correspondentes (lados, alturas, medianas, etc.). Essa razão também é válida para os perímetros.

Considere os triângulos semelhantes ABC e ADE.



AQ e AP são alturas.
AM e AN são medianas.

A razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo ADE é o número **k**, tal que:

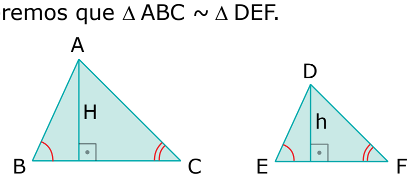
$$\boxed{k = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AM}{AN}}$$

Razão entre áreas

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é dada pelo quadrado da razão de semelhança entre eles.

Demonstração:

Consideremos que $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$.



$$S_{ABC} = \frac{BC.H}{2} \quad (I) \qquad S_{DEF} = \frac{EF.h}{2} \quad (II)$$

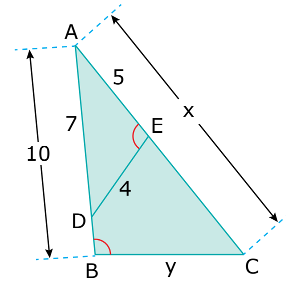
Mas $\frac{BC}{EF} = \frac{H}{h} = k.$ (III)

Portanto, considerando (I), (II) e (III), temos que:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\frac{BC.H}{\cancel{2}}}{\frac{EF.h}{\cancel{2}}} = \frac{BC}{EF}.\frac{H}{h} = k.k \Rightarrow \boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Na figura, sabe-se que $\hat{E}$ e $\hat{B}$ são congruentes, AD = 7 cm, AE = 5 cm, ED = 4 cm e AB = 10 cm.



A) Determinar AC = x e BC = y.

B) Determinar a razão entre as áreas do triângulo ADE e do quadrilátero BCED.

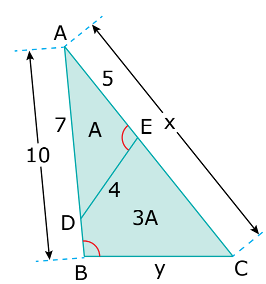
Resolução:

A) Os triângulos ADE e ABC são semelhantes, pois os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{B}$ são congruentes, e o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos (caso AA). Então:

$$\frac{x}{7} = \frac{10}{5} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow x = 14 \text{ cm e } y = 8 \text{ cm}$$

B) Seja **A** a área do triângulo ADE. A razão entre as áreas de ADE e de ABC é $k^2 = \frac{1}{4}$. Assim, $\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$.

Então, $A_{ABC} = 4A_{ADE} = 4A$ e $A_{BCED} = 3A$, como mostrado na figura a seguir:



Portanto, $\frac{A_{ADE}}{A_{BCED}} = \frac{\cancel{A}}{3\cancel{A}} = \frac{1}{3}$.

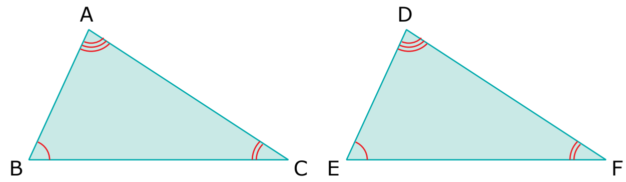
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Definição

Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k = 1, os triângulos são chamados congruentes e possuem

i) os ângulos congruentes;

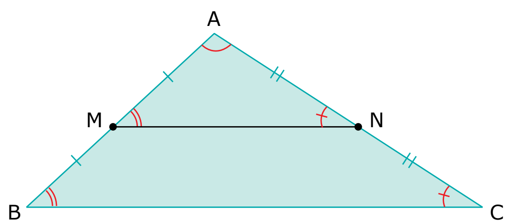
ii) os lados homólogos congruentes.



$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} & \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \text{ e } & \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} & \overline{BC} \equiv \overline{EF} \end{cases}$$

BASE MÉDIA DE TRIÂNGULO

Sejam o triângulo ABC e os pontos médios **M** e **N** dos lados AB e AC, respectivamente.



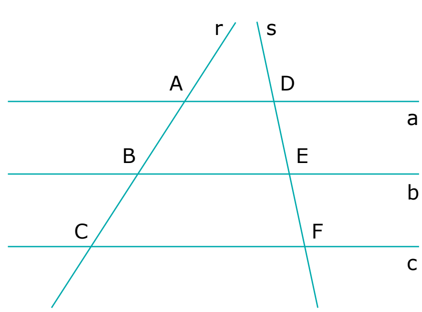
Os triângulos AMN e ABC são semelhantes pelo caso LAL, e a razão de semelhança é $k = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

Logo, $MN = \frac{1}{2}BC$, $\hat{B} \equiv \hat{M}$, $\hat{C} \equiv \hat{N}$ e, consequentemente, MN // BC. O segmento MN é chamado base média do triângulo ABC e, esquematicamente, temos:

$$\text{MN é base média do triângulo ABC} \Leftrightarrow \begin{cases} MN = \frac{1}{2}BC \\ MN \,//\, BC \end{cases}$$

TEOREMA DE TALES

Considere três retas paralelas **a**, **b**, **c** "cortadas" por duas transversais **r** e **s**.

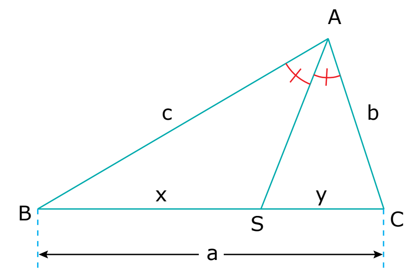


Pelo Teorema de Tales, temos que a razão entre segmentos correspondentes nas duas transversais é constante, isto é:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

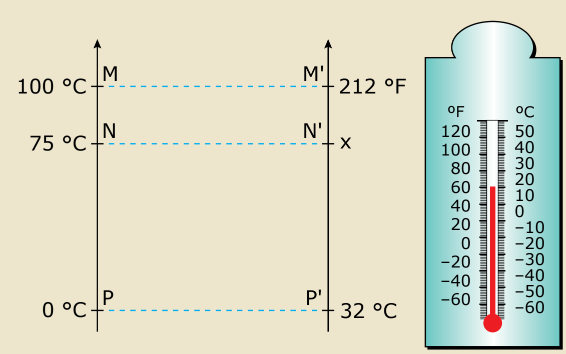


$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

ESCALAS TERMOMÉTRICAS

A escala Celsius adota, sob pressão normal, o valor 0 (zero) para a temperatura de fusão do gelo e o valor 100 (cem) para a temperatura sob a qual a água entra em ebulição. Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 (trinta e dois) e 212 (duzentos e doze) a essas temperaturas de fusão e ebulição, respectivamente. Os símbolos °C e °F indicam graus Celsius e graus Fahrenheit, respectivamente.

Aplicando o Teorema de Tales, podemos transformar medidas de uma dessas escalas em medidas de outra. Por exemplo, para transformar 75 °C em graus Fahrenheit, agimos da seguinte maneira:



Termômetro graduado nas escalas Fahrenheit e Celsius.

$$\frac{MP}{NP} = \frac{M'P'}{N'P'} \Rightarrow \frac{100-0}{75-0} = \frac{212-32}{x-32} \Rightarrow x = 167$$

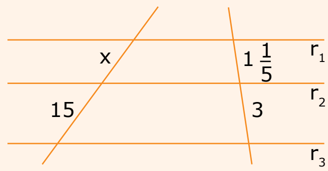
Logo, 75 °C equivalem a 167 °F.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. VSC2

(Cesgranrio) As retas r_1, r_2 e r_3 são paralelas, e os comprimentos dos segmentos de transversais são os indicados na figura. Então, **x** é igual a:



A) $4\frac{1}{5}$

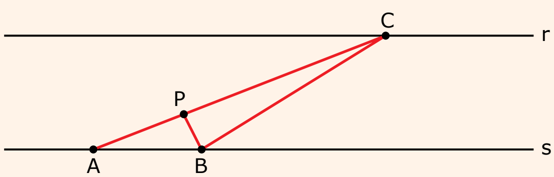
B) $5\frac{1}{5}$

C) 5

D) $\frac{8}{5}$

E) 6

02. (CEFET-MG) Analise a figura a seguir:



Sobre essa figura, são feitas as seguintes considerações:

I. **r** e **s** são retas paralelas e distam em 3 cm uma da outra.

II. $\overline{AB}$ é um segmento de 1,5 cm contido em **s**.

III. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm.

IV. $\overline{BP}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

A medida do segmento BP, em cm, é

A) $\frac{8}{9}$.

B) $\frac{9}{8}$.

C) $\frac{8}{5}$.

D) $\frac{9}{5}$.

03. 2OZN

(UFRN) Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isso fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de

A) 18 m.

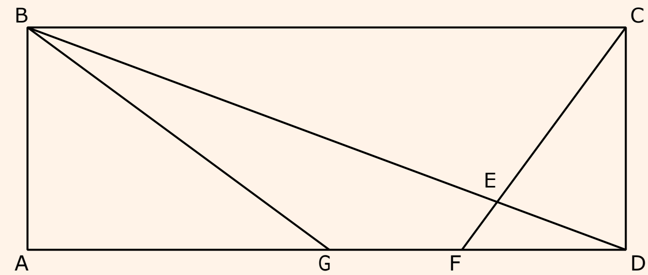
B) 8 m.

C) 36 m.

D) 9 m.

04. HJD1

(UFMS–2021) Na figura a seguir, há um retângulo ABCD, e os triângulos ΔABG e ΔDFC são semelhantes. O ângulo $C\hat{B}G = 37°$.



Ao prolongar os segmentos de reta $\overline{BG}$ e $\overline{CF}$, o ângulo formado pelo cruzamento dos segmentos é:

A) 37°

B) 53°

C) 90°

D) 127°

E) 143°

05. AKST

(CEFET-MG) Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1 m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do "pau de sebo", em metros, é:

A) 5,0

B) 5,5

C) 6,0

D) 6,5

06. IGMY

(UNEB-BA) Um turista está subindo uma trilha, em linha reta, em uma montanha que dá acesso a um mirante com uma vista muito bela. Após ter andado 200 m, ele observa uma placa com os seguintes dizeres:

> *Parabéns! Você já está a 34 m de altura! O mirante está a 170 m de altura: agora falta pouco! Não desista. A vista é linda!*

Nessas condições, o turista ainda vai ter que andar

A) 720 m.

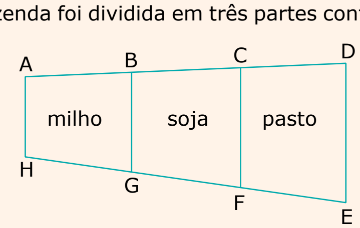
B) 740 m.

C) 760 m.

D) 780 m.

E) 800 m.

07. (ETECs-SP) Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.



Considere que

- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1 980 m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros:

A) 665

B) 660

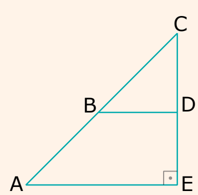
C) 655

D) 650

E) 645

08. 8M5A (CEFET-MG) A figura a seguir tem as seguintes características:

- O ângulo E é reto;
- O segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento BD;
- Os segmentos AE, BD e DE, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



O segmento AC, em unidades de comprimento, mede:

A) 8

B) 12

C) 13

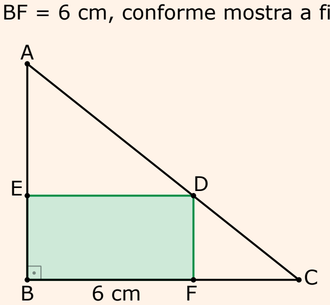
D) $\sqrt{61}$

E) $5\sqrt{10}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEFS-BA) Os pontos **D**, **E** e **F** pertencem aos lados de um triângulo retângulo ABC, determinando o retângulo BFDE, com BF = 6 cm, conforme mostra a figura.



Dadas as medidas AB = 8 cm e BC = 10 cm, o comprimento do segmento BE é

A) 2,4 cm.

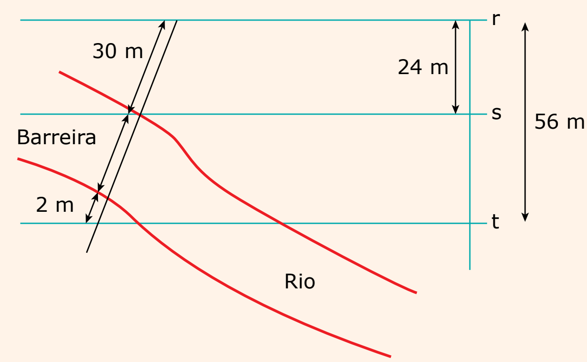
B) 2,7 cm.

C) 3 cm.

D) 3,2 cm.

E) 3,5 cm.

02. CQØR (UFSM-RS) A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas **r**, **s** e **t** sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede



A) 33 m.

B) 38 m.

C) 43 m.

D) 48 m.

E) 53 m.

03. 8H1J (Puc Rio) Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo em **P** e **Q**, respectivamente, onde AQ = 4, PB = 9 e AP = QC. Então, o comprimento de $\overline{AP}$ é:

A) 5

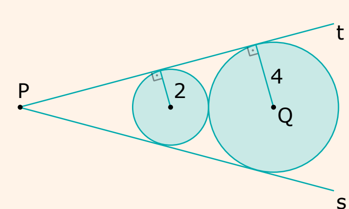
B) 6

C) 8

D) 2

E) 1

04. FJGO (UFRGS-RS) Observe os discos de raios 2 e 4, tangentes entre si e às semirretas **s** e **t**, representados na figura a seguir:



A distância entre os pontos **P** e **Q** é:

A) 9

B) 10

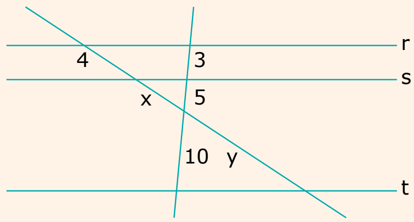
C) 11

D) 12

E) 13

MATEMÁTICA

05. (Unesp) Considere 3 retas coplanares paralelas, **r**, **s** e **t**, cortadas por 2 outras retas, conforme a figura.



Os valores dos segmentos identificados por **x** e **y** são, respectivamente,

A) $\frac{3}{20}$ e $\frac{3}{40}$.

B) 6 e 11.

C) 9 e 13.

D) 11 e 6.

E) $\frac{20}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

06. RNVD (PUC Rio) Considere um triângulo ABC retângulo em **A**, onde $\overline{AB} = 21$, e $\overline{AC} = 20$. $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Quanto mede $\overline{AD}$?

A) $\frac{42}{5}$

B) $\frac{21}{20}$

C) $\frac{20}{21}$

D) 9

E) 8

07. ØAVI (IFCE) Sobre os lados AB e AC do triângulo ABC, são marcados os pontos **D** e **E**, respectivamente, de tal forma, que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, $\overline{AE}$ = 6 cm, $\overline{DB}$ = 2 cm, $\overline{EC}$ = 3 cm e $\overline{DE}$ = 8 cm. Nessas condições, a soma das medidas dos segmentos AD e BC, em centímetros, vale:

A) 12

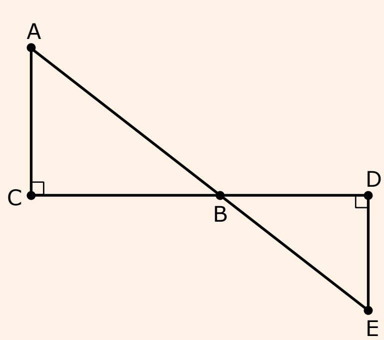
B) 16

C) 18

D) 24

E) 30

08. (UFPR–2022) Na figura a seguir, considere os segmentos de reta AE e CD, e os triângulos retângulos ABC e BDE. Suponha que o comprimento de AB é igual a **x**, e que o comprimento de AC é igual a **y**. Considerando que os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento, qual das alternativas a seguir corresponde ao valor do comprimento do segmento DE?



A) $\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

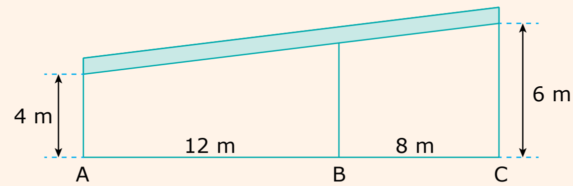
B) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$

C) $y\sqrt{(x^2 - y^2)}$

D) $\frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

E) $\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2}$

09. E82P (UFPR) Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos **A**, **B** e **C**, como mostra a figura a seguir. Os suportes nas extremidades **A** e **C** medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.



A altura do suporte em **B** é, então, de

A) 4,2 metros.

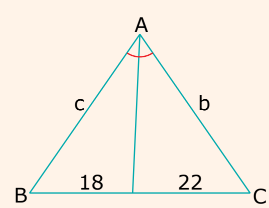
B) 4,5 metros.

C) 5 metros.

D) 5,2 metros.

E) 5,5 metros.

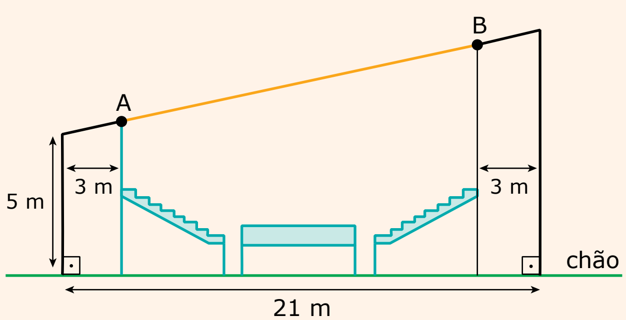
10. Y96N (CEFET-MG) O perímetro do triângulo ABC vale 120 cm e a bissetriz do ângulo Â divide o lado oposto em dois segmentos de 18 e 22 cm, conforme a figura.



A medida do maior lado desse triângulo, em cm, é:

A) 22 B) 36 C) 44 D) 52

11. (FCMSC-SP–2022) A figura indica o projeto de construção de uma arena de esportes, sendo $\overline{AB}$ a representação de uma luminária cujo ponto mais próximo do chão está a 5,5 m.



O comprimento de $\overline{AB}$, em metros, é igual a:

A) $3\sqrt{37}$

B) $2\sqrt{37}$

C) $2{,}5\sqrt{37}$

D) $21{,}5 - 2\sqrt{37}$

E) $21{,}5 - \sqrt{37}$

12. (IFCE–2019) O triângulo ABC é retângulo em A e tem catetos medindo 12 cm e 24 cm. Os pontos D, E e F são tomados em $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de tal forma que ADEF é um quadrado. A área desse quadrado, em cm^2, vale

A) 25.

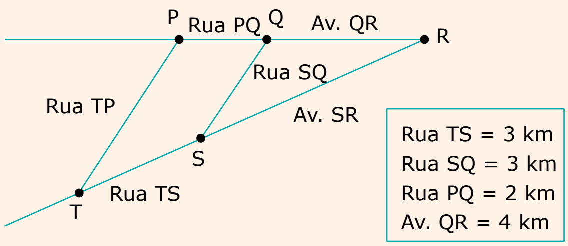
B) 49.

C) 36.

D) 64.

E) 81.

13. XBBW (UFF-RJ) O circuito triangular de uma corrida está esquematizado na figura a seguir:



As ruas TP e SQ são paralelas. Partindo de **S**, cada corredor deve percorrer o circuito passando, sucessivamente, por **R**, **Q**, **P**, **T**, retornando, finalmente, a **S**.

Assinale a opção que indica o perímetro do circuito.

A) 4,5 km

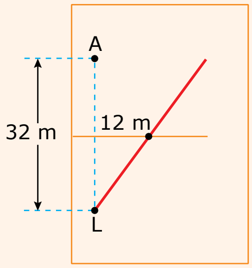
B) 19,5 km

C) 20,0 km

D) 22,5 km

E) 24,0 km

14. (FUVEST-SP) Um lateral **L** faz um lançamento para um atacante **A**, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e, quando passa pela linha de meio do campo, está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de



A) 18,8 m.

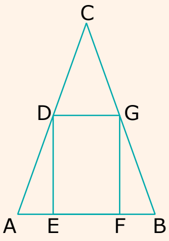
B) 19,2 m.

C) 19,6 m.

D) 20,0 m.

E) 20,4 m.

15. (PUC Rio) O retângulo DEFG está inscrito no triângulo isósceles ABC, como na figura a seguir:



Assumindo $\overline{DE} = \overline{GF} = 12$, $\overline{EF} = \overline{DG} = 8$ e $\overline{AB} = 15$, a altura do triângulo ABC é:

A) $\frac{35}{4}$

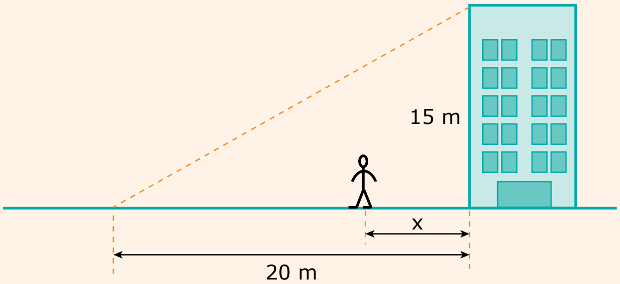
B) $\frac{150}{7}$

C) $\frac{90}{7}$

D) $\frac{180}{7}$

E) $\frac{28}{5}$

16. (ESPM-SP) Um prédio de 15 m de altura projeta uma sombra de 20 m de comprimento sobre um piso horizontal plano, como mostra a figura a seguir. A máxima distância que uma pessoa de 1,80 m de altura pode se afastar do prédio para que continue totalmente à sua sombra é



A) 17,60 m.

B) 18,20 m.

C) 17,40 m.

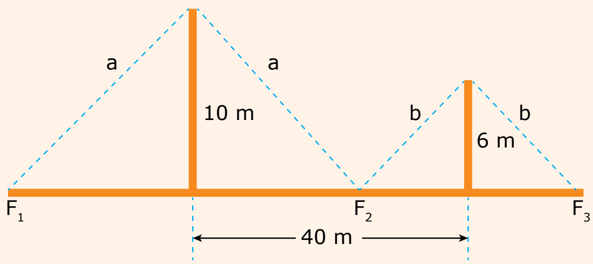
D) 17,80 m.

E) 18,00 m.

MATEMÁTICA

17. 1X5W

(UFRN) Dois postes, um de 10 m e outro de 6 m, devem ser sustentados, respectivamente, por cabos de aço de comprimentos **a** e **b**, conforme ilustra a figura a seguir:



Os pontos de fixação F_1, F_2 e F_3 devem ser determinados de modo que a quantidade de cabo de aço seja mínima. A distância do ponto F_2 até a base do poste menor deverá ser

A) 10 m.

B) 15 m.

C) 20 m.

D) 25 m.

18. (UECE) No triângulo XYZ o ponto D, no lado YZ, pertence à mediatriz do lado XZ. Se XD é a bissetriz do ângulo interno no vértice X e se a medida do ângulo interno em Y é 105 graus, então, a medida, em graus, do ângulo interno em Z é

A) 30.

B) 20.

C) 35.

D) 25.

19. (CMRJ–2019) Dado que a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das semirretas $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ e, portanto, divide o ângulo em dois ângulos congruentes, considere um triângulo ABC isósceles com AB = AC = 1 cm e med($\hat{A}$) = 36°. Se D $\in$ $\overline{AB}$ de forma que $\overleftrightarrow{CD}$ seja a bissetriz do ângulo $\hat{C}$, então a medida $\overline{BC}$ é:

A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ cm

B) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ cm

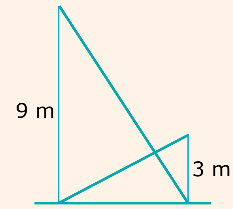
C) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ cm

D) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ cm

E) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ cm

20. 2KWB

(UEL-PR) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura a seguir. Sabendo que os muros têm alturas de 9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam? Despreze a espessura das barras.



A) 1,50 m

B) 1,75 m

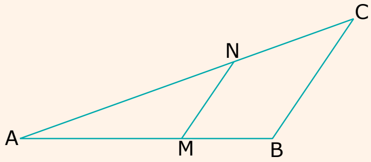
C) 2,00 m

D) 2,25 m

E) 2,50 m

21. DFSN

(CEFET-MG) No triângulo ABC da figura a seguir, $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ e a medida de $\overline{AC}$ é igual a 30 cm. Sabe-se que o ponto **M** dista 8 cm do vértice **B**, que $\overline{AB}$ mede $\dfrac{2}{3}$ da medida de $\overline{AC}$ e que a medida de $\overline{BC}$ vale a metade da medida de $\overline{AC}$.



O perímetro do triângulo AMN da figura, mede, em cm,

A) 15.

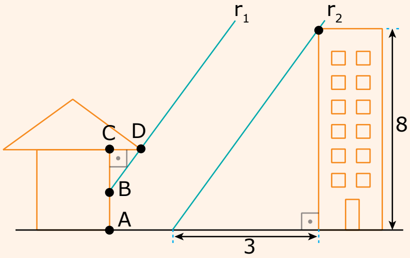
B) 21.

C) 27.

D) 39.

22. IPYG

(CEFET-MG) Na figura a seguir, o segmento AC representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento AB é 1,3 m o segmento CD representa o beiral da casa. Os raios de Sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



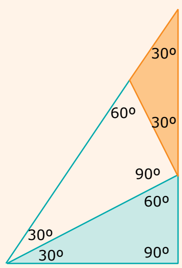
Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é:

A) 0,60
B) 0,65
C) 0,70
D) 0,75

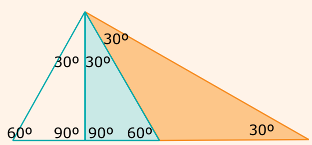
SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

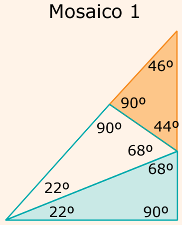
01. (Enem) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



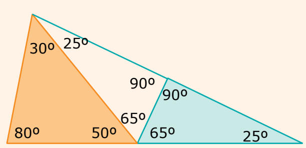
Mosaico 1



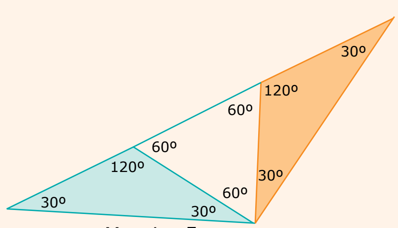
Mosaico 2



Mosaico 3



Mosaico 4

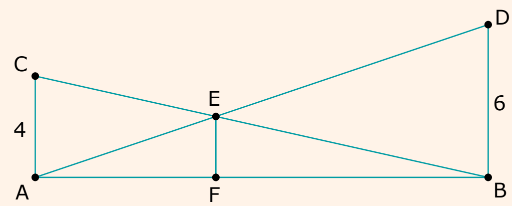


Mosaico 5

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

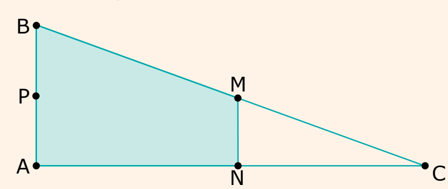
02. (Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real, na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD, e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

A) 1 m
B) 2 m
C) 2,4 m
D) 3 m
E) $2\sqrt{6}$ m

03. CAØY (Enem) Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros, foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas **A**, **B**, **M** e **N** deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

A) à mesma área do triângulo AMC.
B) à mesma área do triângulo BNC.
C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D) ao dobro da área do triângulo MNC.
E) ao triplo da área do triângulo MNC.

04. (Enem) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminui 50 cm, a sombra da pessoa passa a medir

A) 30 cm.
B) 45 cm.
C) 50 cm.
D) 80 cm.
E) 90 cm.

MATEMÁTICA

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. B
- 04. C
- 05. A
- 06. E
- 07. B
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. B
- 04. D
- 05. E
- 06. A
- 07. B
- 08. D
- 09. D
- 10. C
- 11. C
- 12. D
- 13. B
- 14. B
- 15. D
- 16. A
- 17. B
- 18. D
- 19. A
- 20. D
- 21. D
- 22. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. C
- 03. E
- 04. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Estatística

INTRODUÇÃO

A Estatística, objeto de estudo deste módulo, é a área da Matemática que tem por objetivo coletar, organizar, analisar e interpretar dados experimentais. Os conceitos estatísticos têm influenciado largamente a maioria dos ramos do conhecimento humano, seja para determinar índices de inflação ou desemprego, comumente divulgados, seja para fornecer informações à Medicina que possibilitem combater uma determinada doença.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

Após um levantamento estatístico, os dados coletados podem ser organizados em uma tabela ou em um gráfico de distribuição de frequências. São mais utilizados os gráficos de barras, de colunas e de setores.

Exemplo:

Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela e os gráficos a seguir mostram os seis resultados possíveis e as suas respectivas frequências de ocorrências.

Tabela:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	7	9	8	7	9	10
Frequência relativa	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{10}{50}$

Como mostrado na tabela anterior, a frequência relativa é obtida dividindo-se a frequência absoluta pelo total de observações. Por exemplo, o resultado 6 apareceu em 10 das 50 repetições, portanto sua frequência relativa é $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ ou 0,2 ou 20%.

Gráficos:

Gráfico de colunas

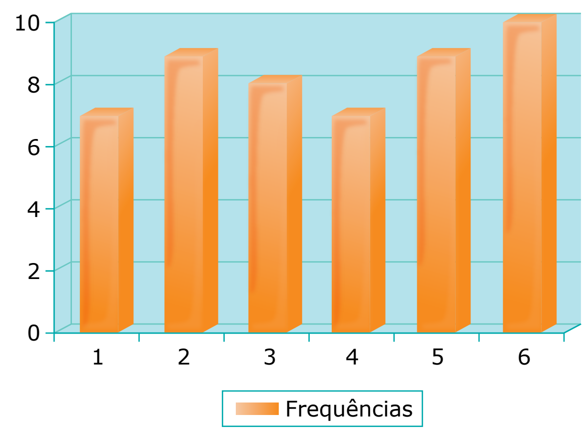
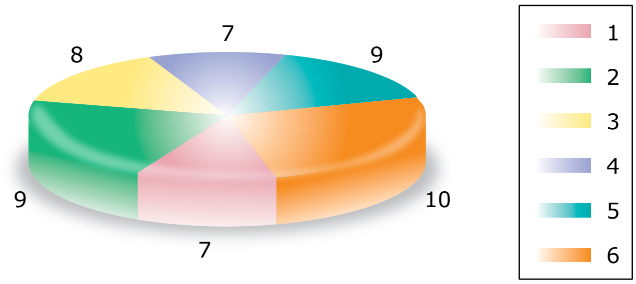


Gráfico de setor



MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Média Aritmética

A média aritmética **A** dos números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é definida por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplo:

Calcular a média aritmética dos números $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{63}$.

$$\bar{x} = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{9} + \frac{4}{63}}{3} = \frac{9.5 + 7.2 + 4}{3.7.9} = \frac{63}{189} = \frac{1}{3}$$

Mediana

Mediana é o valor que ocupa a posição central em um conjunto ordenado. Se o número de elementos do conjunto for par, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

Moda

É o valor que apresenta maior frequência em um conjunto (aparece um maior número de vezes).

Exemplo:

Calcular a média aritmética, a mediana e a moda da seguinte distribuição de notas de uma turma.

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nota	4,0	7,0	5,0	8,0	7,5	10	6,5	8,0	6,5	5,5

Pela definição, a média aritmética **A** das notas é dada por:

$$\overline{x} = \frac{4+7+5+8+7{,}5+10+6{,}5+8+6{,}5+5{,}5}{10} \Rightarrow$$

$$\overline{x} = 6{,}8$$

O conjunto ordenado **C** das notas dos alunos é:

$$C = \{4{,}0;\ 5{,}0;\ 5{,}5;\ 6{,}5;\ \overbrace{6{,}5;\ 7{,}0}^{\text{Termos centrais}};\ 7{,}5;\ 8{,}0;\ 8{,}0;\ 10\}$$

Como o número de elementos é par, então a mediana **Md** das notas é:

$$Md = \frac{6{,}5+7{,}0}{2} \Rightarrow Md = 6{,}75$$

As modas das notas são 6,5 e 8,0, pois esses valores aparecem com maior frequência que os demais.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Fornecem informações a respeito da concentração dos valores estudados em torno das medidas de tendência central.

Amplitude

É a diferença entre o maior e o menor valor de um dado conjunto.

Desvio

É a diferença entre um valor qualquer **xi** e a média aritmética (A) do conjunto.

$$\boxed{d_i = x_i - A}$$

Variância

É a média aritmética dos quadrados dos desvios.

$$\boxed{V = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2}{n}}$$

Desvio padrão

É a raiz quadrada da variância.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V}}$$

Exemplo:

Sobre a distribuição dos lucros de uma empresa nos quatro primeiros meses, representada na tabela a seguir, calcular:

A) a amplitude.

B) os desvios de cada mês.

C) a variância.

D) o desvio padrão.

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Lucro (R$)	10 000	30 000	90 000	30 000

Pelas definições:

A) A amplitude **a** é dada por:

$a = 90\ 000 - 10\ 000 = 80\ 000$ reais

B) Para calcular o desvio, precisamos antes calcular a média aritmética **A** dos lucros.

$$A = \frac{10\ 000 + 30\ 000 + 90\ 000 + 30\ 000}{4} \Rightarrow$$

$$A = 40\ 000$$

Assim, os desvios **dJ**, **dF**, **dM** e **dA** são dados por:

$d_J = 10\ 000 - 40\ 000 = -30\ 000$ reais

$d_F = 30\ 000 - 40\ 000 = -10\ 000$ reais

$d_M = 90\ 000 - 40\ 000 = 50\ 000$ reais

$d_A = 30\ 000 - 40\ 000 = -10\ 000$ reais

C) A variância **V** é dada por:

$$V = \frac{(-30\ 000)^2 + (-10\ 000)^2 + (50\ 000)^2 + (-10\ 000)^2}{4} \Rightarrow$$

$V = 900\ 000\ 000$ reais ao quadrado

D) O desvio padrão σ é dado por:

$\sigma = \sqrt{900\ 000\ 000} = 30\ 000$ reais

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFJF-MG) Um professor de Física aplicou uma prova valendo 100 pontos a seus 22 alunos e obteve, como resultado, a distribuição das notas vista no quadro seguinte:

40	20	10	20	70	60
90	80	30	50	50	70
50	20	50	50	10	40
30	20	60	60		

Faça os tratamentos de dados solicitados a seguir.

A) Determinar a frequência relativa da moda.

B) Esboçar um gráfico com as frequências absolutas de todas as notas.

C) Determinar a mediana dos valores da segunda linha do quadro apresentado.

Resolução:

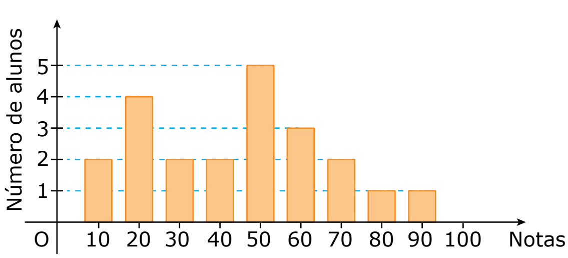
A)

Resultado	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Frequência absoluta	2	4	2	2	5	3	2	1	1

A moda das notas é 50, e a frequência absoluta destas é 5.

Logo, a frequência relativa da moda é $\frac{5}{22} \cong 22{,}7\%$.

B) O gráfico de colunas com as frequências absolutas de todas as notas é:



C) Na segunda linha, temos, em ordem crescente, a seguinte sequência de notas:

30, 50, 50, 70, 80, 90

Como temos um número par de termos, a mediana **Md** será a média aritmética dos dois valores centrais. Assim:

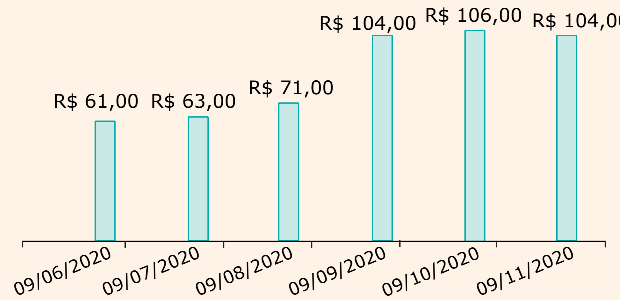
$$\text{Md} = \frac{50 + 70}{2} \Rightarrow \text{Md} = 60$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unifor-CE–2021) Essencial na mesa da família brasileira, o preço do arroz disparou nos supermercados brasileiros, sobretudo nos últimos meses. Levantamento feito pelo Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (Cepea), da Esalq / USP, mostra a variação de preço no preço da saca de 50 kg de arroz do tipo 1, no posto indústria Rio Grande do Sul, à vista, nos últimos seis meses.

REAIS POR SACA DE 50 KG
TIPO 1, RIO GRANDE DO SUL
FONTE: CEPEA-ESALQ-USP
(ADAPTADO)



Disponível em: www.economia.uol.com.br. Acesso em: 10 nov. 2020.

De acordo com as informações do gráfico, o preço médio da saca de 50 kg de arroz, tipo 1, no Rio Grande do Sul, de 09/06/2020 a 09/11/2020 era de, aproximadamente,

A) R$ 64,67.

B) R$ 71,00.

C) R$ 78,83.

D) R$ 84,84.

E) R$ 89,73.

02. (UFRGS-RS–2020) Após a aplicação de uma prova de Matemática, em uma turma de Ensino Médio com 30 estudantes, o professor organizou os resultados, conforme a tabela a seguir:

Número de estudantes	Nota
5	3,0
10	6,0
7	8,0
8	9,5

A nota mediana dessa prova de Matemática é

A) 6,0.

B) 7,0.

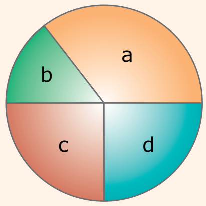
C) 8,0.

D) 9,0.

E) 9,5.

03. S1IE

(UFRGS-RS) Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura a seguir:



Ao setor **a** estão associadas 35% das respostas, ao setor **b**, 270 respostas e aos setores **c** e **d**, um mesmo número de respostas. Esse número é:

A) 45

B) 90

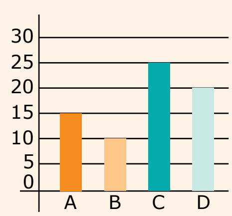
C) 180

D) 450

E) 900

04. OYN7

(UFG-GO) O gráfico a seguir indica a preferência dos alunos de uma escola por apenas uma das revistas A, B, C ou D.



De acordo com as informações apresentadas nesse gráfico, o número de alunos que preferem a revista D é

A) menor que a metade dos que preferem as revistas B ou C.

B) maior que a metade do total de alunos da escola.

C) igual à soma dos que preferem as revistas A ou B.

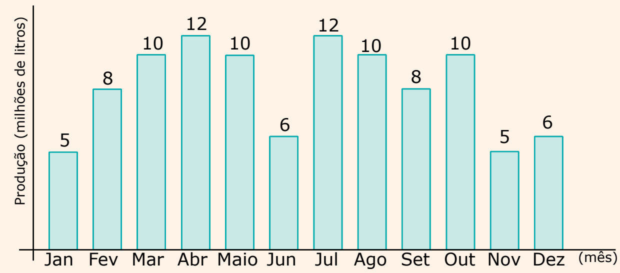
D) igual à média aritmética dos que preferem as revistas A ou C.

E) dez vezes maior do que aqueles que preferem a revista B.

05. 6RXD

(UFSM-RS) O uso de biodiesel gera uma série de efeitos ambientais, tais como a redução da emissão de gases do efeito estufa e a diminuição da poluição atmosférica.

O gráfico mostra a produção de biodiesel (em milhões de litros) em uma usina, durante o período de um ano.



De acordo com os dados, a média, a mediana e a moda (em milhões de litros) são, respectivamente, iguais a

A) 8,5; 10 e 9.

B) 8; 9 e 10.

C) 8; 9,5 e 8.

D) 8,5; 9 e 10.

E) 8,5; 9,5 e 10.

06. G2T2

(UFU-MG) Uma pesquisa com 27 crianças, realizada por psicólogos em um ambiente hospitalar, avalia a redução dos custos hospitalares mensais individuais em função do bem-estar emocional promovido pela vivência de atividades artísticas.

Redução do custo mensal (por criança) em reais	Número de crianças
700,00	8
900,00	5
1 400,00	1
2 000,00	7
2 400,00	5
3 000,00	1

Com base nos dados descritos na tabela, a soma da média aritmética e da mediana correspondente à distribuição de redução dos custos mencionada é igual a:

A) 2 900

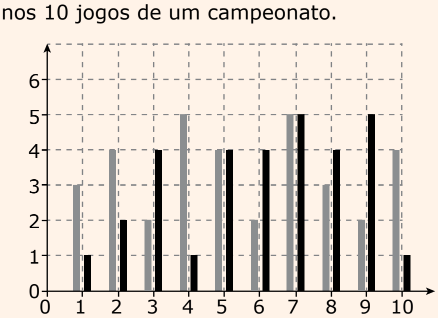
B) 3 400

C) 3 200

D) 3 700

07. PWAP

(Insper-SP) O gráfico a seguir representa o número de gols marcados (barras em cinza) e o número de gols sofridos (barras em preto) por uma equipe de futebol de salão nos 10 jogos de um campeonato.



Em cada partida, o saldo de gols da equipe é dado pela diferença entre os gols marcados e os gols sofridos. A média dos saldos de gols da equipe nesses dez jogos é igual a:

A) −0,3
B) −0,1
C) 0
D) 0,1
E) 0,3

08. (UFPR) Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

Lanchonete	Preço
A	R$ 10,75
B	R$ 6,00
C	R$ 9,50
D	R$ 11,00
E	R$ 5,25
F	R$ 7,00
G	R$ 10,50
H	R$ 8,00

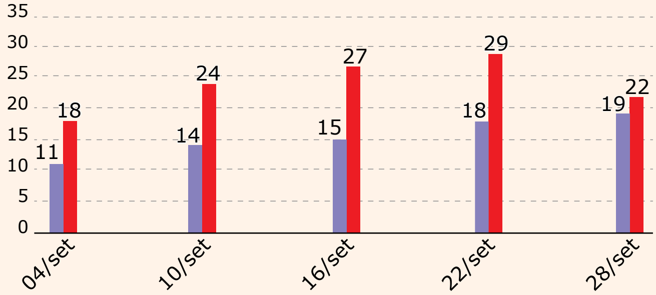
A) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela.

B) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa. Ao considerar todos os 10 estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$ 8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ–2020) No gráfico a seguir, estão indicados valores de temperatura, em °C, registrados no bairro de Pinheiros, em São Paulo, em setembro de 2018.



Disponível em: accuweather.com (Adaptação).

A partir dos valores diários registrados, calcule a maior diferença entre a temperatura máxima e mínima, em °C, ocorrida em um mesmo dia.

02. XQ8B (UFU-MG) Uma empresa seleciona 16 funcionários fumantes e promove um ciclo de palestras com eles para esclarecimentos sobre os efeitos prejudiciais do cigarro à saúde. Após essas palestras, são coletados dados sobre a quantidade de cigarros que cada um desses fumantes está consumindo diariamente. Tais dados são expressos da seguinte maneira:

10, 1, 10, 11, 13, 10, 34, 13, 13, 12, 12, 11, 13, 11, 12, 12

Os dados 1 e 34 são chamados discrepantes, pois são dados muito menores ou muito maiores que a maioria dos dados obtidos. Segundo essa coleta de dados, pode-se afirmar que

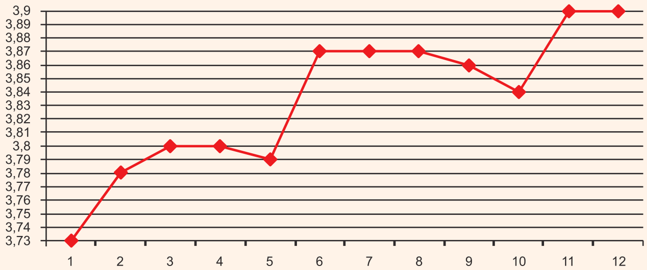
A) os cálculos da média, da mediana e da moda não sofrem influência dos dados discrepantes.

B) o cálculo da mediana sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

C) o cálculo da moda sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

D) o cálculo da média sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

03. MDØ8 (UFJF-MG) O gráfico a seguir apresenta a variação da cotação do dólar dos EUA em 12 dias úteis seguidos do mês de setembro de 2015.



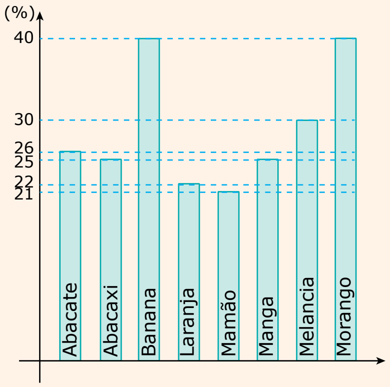
Disponível em: http://www4.bcb.gov.br/pec/taxas/port/ptaxnpes.asp?id=txctacao. Acesso em: 1 out. 2015 (Adaptação).

Calculando a média, a moda e a mediana da amostra de cotações do dólar nesse período, podemos afirmar que:

A) Média < Mediana < Moda
B) Média < Moda = Mediana
C) Mediana < Média < Moda
D) Mediana < Moda < Média
E) Moda = Mediana < Média

04. IØGK (UFSM-RS) O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos, produzindo mais do que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada.

O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo.



Disponível em: http://www.youtube.com/watch?uwXcErXvp1E. Acesso em: 10 set. 2014 (Adaptação).

Considerando os dados do gráfico, a média aritmética, a moda e a mediana são, respectivamente,

A) 28,625; 25 e 40; 25,5.

B) 28,625; 25 e 40; 26.

C) 28,625; 40; 26.

D) 20,5; 25 e 40; 25,5.

E) 20,5; 40; 25,5.

05. (EPCAR-MG) As notas de oito alunos numa prova de matemática foram escritas pelo professor numa tabela como a que segue:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H
Nota	6,5	10	8	9,4	8	6,4	x	7,4

Sabe-se que a média aritmética dessas notas é 8,2.

Considerando as notas dos oito alunos, é correto afirmar que a nota do aluno G é

A) igual à moda.

B) inferior a 9,8.

C) superior à mediana.

D) inferior à média aritmética das outras sete notas.

06. XFGØ (UPE) Ao realizar o levantamento das famílias de uma pequena cidade do interior, cujos filhos são beneficiários de algum programa social, um pesquisador obteve os seguintes dados:

Beneficiados em Programa Social	
Número de filhos	**Quantidade de famílias**
5	03
4	07
3	21
2	28
1	23
0	18
	Total: 100

Com base nessas informações, é correto afirmar que o desvio-padrão do número de filhos dessa amostra é de, aproximadamente,

A) 1,4.

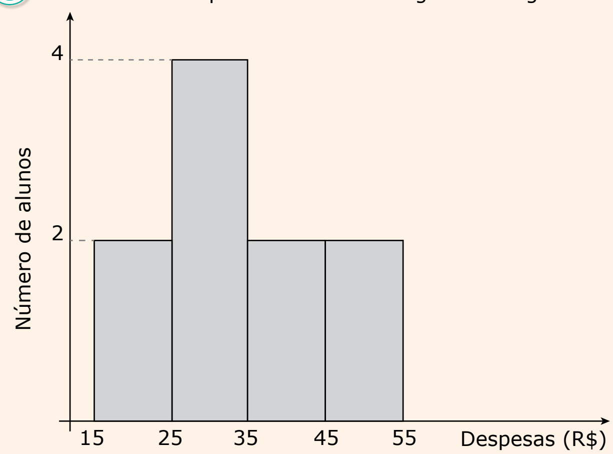
B) 1,8.

C) 2,0.

D) 2,5.

E) 6,7.

07. 2A7Y (AFA-SP–2022) Dez alunos, ao término das aulas, decidiram se reunir para um lanche. As despesas feitas por esses alunos estão representadas no histograma a seguir:



Com base nessas informações, é correto afirmar que

A) o gasto médio foi menor que R$ 33,50.

B) o valor mediano gasto superou R$ 33,00.

C) o gasto médio foi R$ 1,50 maior que o gasto mediano.

D) a soma dos gastos médio e mediano é igual a R$ 67,50.

08. (UNEB-BA–2019) Em um levantamento realizado por uma federação de futebol, em 100 jogos de determinada competição, obteve-se as seguintes informações por partida, dispostas na tabela.

Número de jogos	28	30	15	20	5	2
Número de gols	0	1	2	3	4	5

Nessas condições, pode-se afirmar que

A) a média de gols por partida é de 1,75.

B) a amplitude do número de partidas é 1,75.

C) a variância do número de gols marcados por partida é de 1,75.

D) o desvio-padrão do número de gols marcados por partida é de 1,75.

E) os desvios quadráticos do número de gols marcados por partida é de 1,75.

09. (UPE) Numa competição esportiva, cinco atletas estão disputando as três primeiras colocações da prova de salto em distância. A classificação será pela ordem decrescente da média aritmética de pontos obtidos por eles, após três saltos consecutivos na prova. Em caso de empate, o critério adotado será a ordem crescente do valor da variância. A pontuação de cada atleta está apresentada na tabela a seguir:

Atleta	Pontuação 1º salto	Pontuação 2º salto	Pontuação 3º salto
A	6	6	6
B	7	3	8
C	5	7	6
D	4	6	8
E	5	8	5

Com base nas informações apresentadas, o primeiro, o segundo e o terceiro lugares dessa prova foram ocupados, respectivamente, pelos atletas

A) A; C; E.
B) B; D; E.
C) E; D; B.
D) B; D; C.
E) A; B; D.

10. 6DQ3 (UPE) A taxa anual de juros básicos (Taxa Selic), determinada pelo governo brasileiro, é aplicável no pagamento, restituição, compensação ou reembolso de tributos federais. Na tabela a seguir, temos a evolução da Taxa Selic nos últimos 10 anos, nos cinco primeiros meses de cada ano.

Mês / Ano	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
2005	1,38%	1,22%	1,53%	1,41%	1,50%
2006	1,43%	1,15%	1,42%	1,08%	1,28%
2007	1,08%	0,87%	1,05%	0,94%	1,03%
2008	0,93%	0,80%	0,84%	0,90%	0,88%
2009	1,05%	0,86%	0,97%	0,84%	0,77%
2010	0,66%	0,59%	0,76%	0,67%	0,75%
2011	0,86%	0,84%	0,92%	0,84%	0,99%
2012	0,89%	0,75%	0,82%	0,71%	0,74%
2013	0,60%	0,49%	0,55%	0,61%	0,60%
2014	0,85%	0,79%	0,77%	0,82%	0,87%

Com base nessas informações, analise as sentenças a seguir:

I. A taxa média do mês de fevereiro nos últimos 10 anos ficou acima de 1%.
II. A taxa modal dos cinco primeiros meses do ano de 2013 foi de 0,60%.
III. A taxa mediana do mês de março nos últimos 10 anos é de 0,88%.
IV. A taxa média dos cinco primeiros meses de 2007 foi de 1,05%.

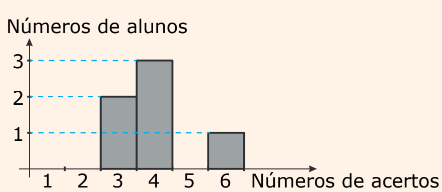
Está correto o que se afirma, apenas, em

A) I, II e III.
B) II, III e IV.
C) I, III e IV.
D) I e IV.
E) II e III.

11. EØ54 (FGV) Ao conjunto {5, 6, 10, 11} inclui-se um número natural **n**, diferente dos quatro números que compõem esse conjunto. Se a média aritmética dos cinco elementos do novo conjunto é igual a sua mediana, então, a soma de todos os possíveis valores de **n** é igual a:

A) 20
B) 22
C) 23
D) 24
E) 26

12. SG8Ø (EPCAR-MG) Um cursinho de inglês avaliou uma turma completa sendo que parte dos alunos fez a avaliação A, cujo resultado está indicado no gráfico a seguir:



Os demais alunos fizeram a avaliação B e todos tiveram 4 acertos. Assim, o desvio padrão obtido a partir do gráfico acima ficou reduzido à metade ao ser apurado o resultado da turma inteira.

Essa turma do cursinho de inglês tem

A) mais de 23 alunos.
B) menos de 20 alunos.
C) 21 alunos.
D) 22 alunos.

SEÇÃO ENEM

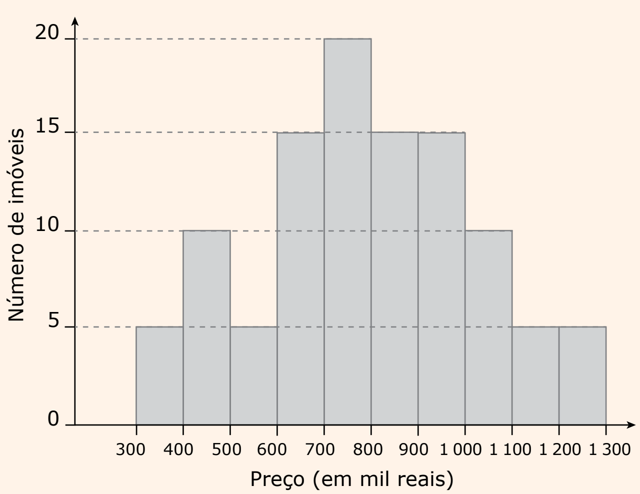
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2021) Um casal está planejando comprar um apartamento de dois quartos num bairro de uma cidade e consultou a página de uma corretora de imóveis, encontrando 105 apartamentos de dois quartos à venda no bairro desejado. Eles usaram um aplicativo da corretora para gerar a distribuição dos preços do conjunto de imóveis selecionados.

O gráfico ilustra a distribuição de frequências dos preços de venda dos apartamentos dessa lista (em mil reais), no qual as faixas de preço são dadas por]300, 400],]400, 500],]500, 600],]600, 700],]700, 800],]800, 900],]900, 1 000],]1 000, 1 100],]1 100, 1 200] e]1 200, 1 300].

A mesma corretora anuncia que cerca de 50% dos apartamentos de dois quartos nesse bairro, publicados em sua página, têm preço de venda inferior a 550 mil reais. No entanto, o casal achou que essa última informação não era compatível com o gráfico obtido.

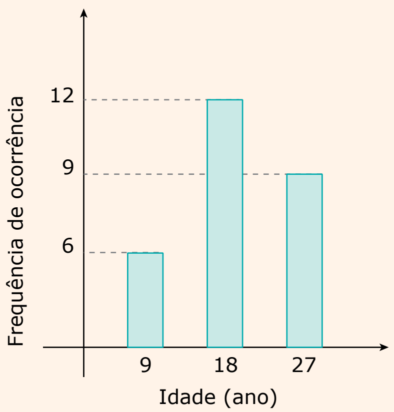
Distribuição dos preços



Com base no gráfico obtido, o menor preço, **p** (em mil reais), para o qual pelo menos 50% dos apartamentos apresenta preço inferior a **p** é:

A) 600
B) 700
C) 800
D) 900
E) 1 000

02. (Enem–2021) Uma pessoa realizou uma pesquisa com alguns alunos de uma escola, coletando suas idades, e organizou esses dados no gráfico.

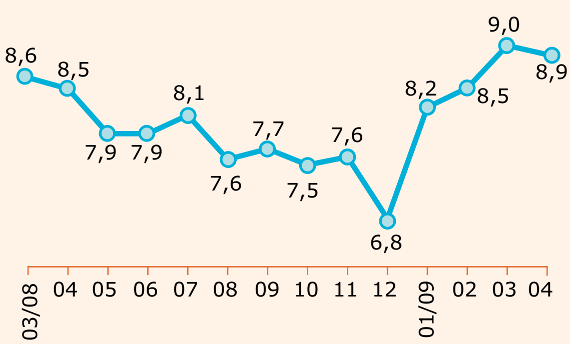


Qual é a média das idades, em ano, desses alunos?

A) 9
B) 12
C) 18
D) 19
E) 27

03. FLLM (Enem) O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Taxa de desemprego



IBGE. *Pesquisa mensal de emprego*. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (Adaptação).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

A) 8,1%.
B) 8,0%.
C) 7,9%.
D) 7,7%.
E) 7,6%.

04. (Enem) Passar trote nos telefones de emergência da Polícia Militar, Corpo de Bombeiros e Serviço de Atendimento Móvel de Urgência (Samu) pode resultar em multa para o dono do telefone de onde partiu a ligação. Para exemplificar a seriedade dessa questão, em uma cidade brasileira, um jornal local publicou a tabela a seguir, mostrando o número de trotes telefônicos recebidos pelos bombeiros da cidade, ao longo de um semestre.

Meses	Trotes
Jan	18
Fev	20
Mar	30
Abr	16
Maio	14
Jun	16

Qual o valor mediano da quantidade de trotes recebidos nesse semestre?

A) 16
B) 17
C) 18
D) 19
E) 23

05. (Enem) Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

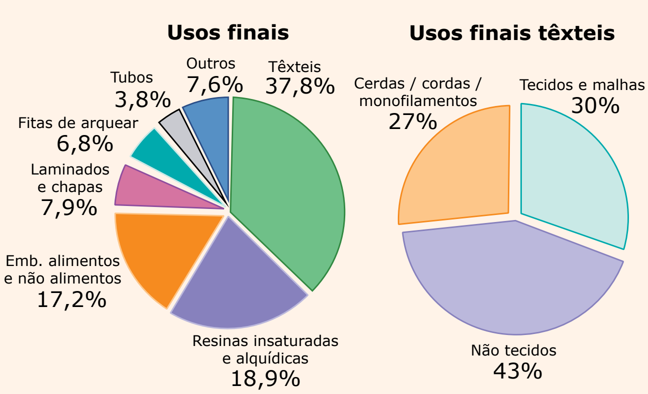
Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros.

A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a:

A) 2,0
B) 2,5
C) 3,0
D) 3,5
E) 4,0

06. (Enem) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

PET reciclado – 2010



Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (Adaptação).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de:

A) 16,0
B) 22,9
C) 32,0
D) 84,6
E) 106,6

07. (Enem) Os candidatos **K**, **L**, **M**, **N** e **P** estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de Português, Matemática, Direito e Informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

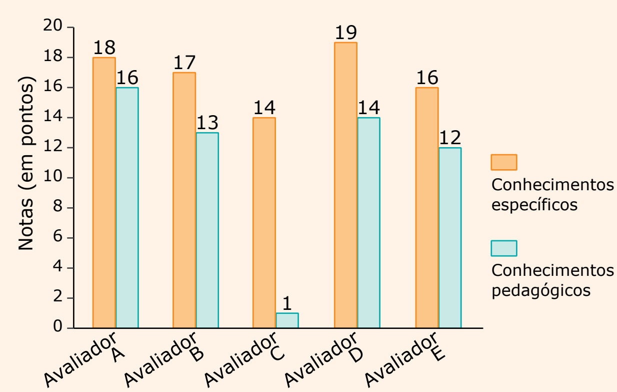
Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será:

A) K
B) L
C) M
D) N
E) P

08. (Enem) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

A) 0,25 ponto maior.

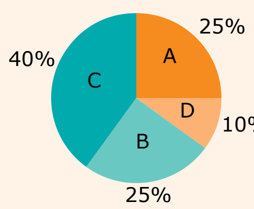
B) 1,00 ponto maior.

C) 1,00 ponto menor.

D) 1,25 ponto maior.

E) 2,00 pontos menor.

09. (Enem) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é:

A) 300,00

B) 345,00

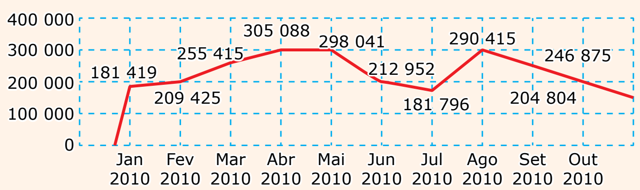
C) 350,00

D) 375,00

E) 400,00

10. (Enem) O gráfico apresenta o comportamento do emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

Brasil – Comportamento do emprego formal no período de janeiro a outubro de 2010 – CAGED



Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (Adaptação).

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

A) 212 952

B) 229 913

C) 240 621

D) 255 496

E) 298 041

11. (Enem) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m² e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m²).

A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)² é:

A) 20,25

B) 4,50

C) 0,71

D) 0,50

E) 0,25

12. 5C89 (Enem) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

A) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.

B) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.

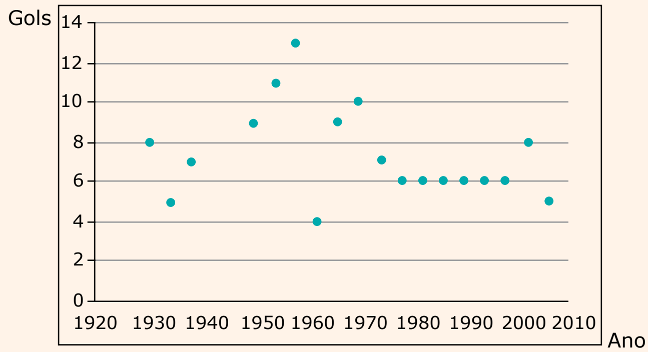
C) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.

D) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.

E) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

13. (Enem) O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

Quantidades de gols dos artilheiros das Copas do Mundo



Disponível em: http://www.suapesquisa.com. Acesso em: 23 abr. 2010 (Adaptação).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

A) 6 gols
B) 6,5 gols
C) 7 gols
D) 7,3 gols
E) 8,5 gols

14. (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos gerais	Média	Mediana	Desvio padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
D) Paulo, pois obteve maior mediana.
E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

15. (Enem) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se **X**, **Y** e **Z** são, respectivamente, a média, a mediana e a moda dessa distribuição, então:

A) $X = Y < Z$
B) $Z < X = Y$
C) $Y < Z < X$
D) $Z < X < Y$
E) $Z < Y < X$

16. (Enem) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe:

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. D
- 04. D
- 05. D
- 06. A
- 07. E
- 08.
  - A) Média = 8,5
    Mediana = 8,75
  - B) R$ 8,25

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. 12 °C
- 02. D
- 03. A
- 04. A
- 05. C
- 06. A
- 07. C
- 08. C
- 09. A
- 10. E
- 11. E
- 12. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. D
- 03. B
- 04. B
- 05. B
- 06. C
- 07. D
- 08. B
- 09. C
- 10. B
- 11. E
- 12. B
- 13. B
- 14. B
- 15. E
- 16. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações e Problemas

INTRODUÇÃO

Estudaremos, neste módulo, alguns métodos de resolução de equações e de sistemas de equações. Resolver uma equação significa determinar suas raízes, ou seja, os valores que tornam a sentença verdadeira. O conjunto formado por todas as raízes da equação é denominado **conjunto verdade** ou **conjunto solução**.

Por exemplo, 7 é raiz da equação $2x + 1 = 15$, pois $2 \cdot 7 + 1 = 15$ é uma sentença verdadeira.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Chamamos de equação do 1º grau a toda sentença da forma $ax + b = 0$, em que **a** e **b** são os coeficientes e $a \neq 0$.

Dessa forma, temos que:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

O conjunto solução é, então, $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

EQUAÇÃO TIPO PRODUTO OU QUOCIENTE NULO

Para resolvermos uma equação do tipo $a.b = 0$, lembremos que, se $a.b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemplo:

$$(2x+1).(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$.

Para resolvermos uma equação do tipo $\frac{a}{b} = 0$, lembremos que, para o quociente ser nulo, devemos ter $a = 0$ e $b \neq 0$.

Exemplo:

$$\frac{(3x+4).(x-1)}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ \cancel{x = 1}, \text{ pois } x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Chamamos de equação do 2º grau a toda sentença que pode ser reduzida a $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes e $a \neq 0$.

A resolução desse tipo de equação é dada pela Fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Demonstração:

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$

Multiplicando os dois membros dessa última igualdade por 4a, tem-se:

$ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando, agora, b^2 aos dois membros da igualdade, obtém-se:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Para $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, tem-se:

$(2ax + b)^2 = \Delta \Leftrightarrow$

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$

$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Discussão do número de raízes

A quantidade de raízes reais de uma equação do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante.

Se $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais.

Se $\Delta = 0$, a equação admite duas raízes reais e iguais.

Se $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais e distintas.

EQUAÇÕES INCOMPLETAS

1ª) $b \neq 0$ e $c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}$.

Exemplo:

$2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow$

$$x(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{0, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

2ª) $b = 0$ e $c \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Portanto, $S = \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, se $-\dfrac{c}{a} > 0$.

Se $-\dfrac{c}{a} < 0$, então não existe raiz real, e $S = \varnothing$.

Exemplos:

1º) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

2º) $2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -8 \Rightarrow$

$x^2 = -4 \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

Portanto, $S = \varnothing$.

3ª) $b = 0$ e $c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Portanto, $S = \{0\}$.

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Sendo x**1** e x**2** as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1.x_2$.

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

Portanto, a soma das raízes é dada por:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

ii) $x_1.x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2} \Rightarrow$

$x_1.x_2 = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Portanto, o produto das raízes é dado por:

$$\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo:

Vamos determinar **k** a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$ seja igual ao quádruplo da outra. Logo:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$ (I)

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow x_1.x_2 = k + 3$ (II)

Por hipótese, $x_1 = 4x_2$. (III)

Assim, substituindo (III) em (I):

$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow$

$x_2 = 1$ e $x_1 = 4$

Daí, de (II), temos:

$4 \cdot 1 = k + 3 \Rightarrow k = 1$

SISTEMA DE EQUAÇÕES

A solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas, **x** e **y**, é qualquer par ordenado de valores (x, y) que satisfaz a ambas as equações.

Observe que o par ordenado (8, 1) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Métodos de resolução de sistemas

Substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas numa das equações e em substituir a expressão encontrada na outra equação.

Exemplo:

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

Pelo método da substituição, escolhemos, por exemplo, a equação x + y = 7, e vamos isolar a incógnita **x**. Logo:

$x + y = 7 \Rightarrow$

$x = 7 - y$

Agora, substituindo **x** por 7 – y na equação x – y = 3, temos:

$x - y = 3 \Rightarrow 7 - y - y = 3 \Rightarrow$

$-2y = -4 \Rightarrow y = 2$

Agora, substituindo **y** por 2 na equação x + y = 7, temos:

$x + y = 7 \Rightarrow$

$x + 2 = 7 \Rightarrow x = 5$

Portanto, S = {(5, 2)}.

Adição

Para resolver um sistema pelo método da adição, adicionamos membro a membro as equações de modo a anular uma das incógnitas.

Exemplo:

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$.

Pelo método da adição, adicionamos membro a membro as duas equações.

$$+\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$
$$\overline{2x = 14} \Rightarrow x = 7$$

Substituindo 7 na equação x + y = 8, por exemplo, temos:

$7 + y = 8 \Rightarrow y = 1$

Portanto, S = {(7, 1)}.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFMG) Um estudante planejou fazer uma viagem de férias e reservou uma certa quantia em dinheiro para o pagamento de diárias. Ele tem duas opções de hospedagem: a Pousada **A**, com diária de R$ 25,00, e a Pousada **B**, com diária de R$ 30,00. Se escolher a Pousada **A**, em vez da Pousada **B**, ele poderá ficar três dias a mais de férias. Nesse caso, é correto afirmar que, para o pagamento de diárias, esse estudante reservou:

A) R$ 300,00

B) R$ 600,00

C) R$ 350,00

D) R$ 450,00

Resolução:

Considere os seguintes dados:

- Preço de uma diária da pousada A: R$ 25,00
- Preço de uma diária da pousada B: R$ 30,00
- Dias em que o estudante ficou na pousada A: **a**
- Dias em que o estudante ficou na pousada B: **b**

Agora, de acordo com o enunciado, temos que:

$a = b + 3$ (I)

Seja **x** a quantia reservada por este estudante para viajar, temos:

$x = a.25$ (II)

$x = b.30$ (III)

Agora, substituindo (I) em (II), temos:

$x = (b + 3).25$ (IV)

$x = b.30$ (III)

Substituindo (IV) em (III), temos:

$(b + 3).25 = b.30 \Rightarrow$

$25b + 75 = 30b \Rightarrow$

$5b = 75 \Rightarrow$

$b = 15$

Portanto, para descobrir o valor reservado por esse estudante, basta multiplicar o preço da diária da pousada **b**, pelo total de dias em que o estudante ficou nesta pousada. Desta forma, temos:

$x = 15 . 30 = 450$

Então, o estudante tinha reservado um total de R$ 450,00.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEG-GO–2022) Na chácara de Maria são criados porcos e galinhas. O total de animais é igual a 123 e o total de patas é igual a 346. As quantidades de porcos e de galinhas são, respectivamente:

A) 73 e 50
B) 68 e 55
C) 50 e 73
D) 55 e 68
E) 45 e 78

02. 5ØØL (UERJ–2020) Os números inteiros **x** e **y** satisfazem às seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 37 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

Logo, x + y é igual a:

A) 80
B) 85
C) 90
D) 95

03. 97DT (UFF-RJ) Colocando-se 24 litros de combustível no tanque de uma caminhonete, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passou a indicar $\frac{5}{8}$. Determine a capacidade total do tanque de combustível da caminhonete. Justifique sua resposta.

04. H37Y (IFRS) Em uma travessa, havia morangos que foram distribuídos entre três pessoas. A primeira pessoa recebeu $\frac{2}{5}$ dos morangos que havia, mais 6; a segunda pessoa recebeu $\frac{1}{4}$ dos morangos que havia, mais 5; e a terceira pessoa recebeu 10 morangos que restaram na travessa. Quantos morangos havia na travessa?

A) 60
B) 62
C) 65
D) 70
E) 76

05. (UFRGS-RS–2020) Se a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ tem as raízes **a** e **b**, então o valor de $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$ é

A) $-\frac{1}{16}$.
B) $-\frac{1}{4}$.
C) $\frac{1}{16}$.
D) $\frac{1}{4}$.
E) 1.

06. 89QB (IFRS) Um comerciante vende potes grandes a R$ 3,00 a unidade e potes menores a R$ 2,50 cada um. Hoje ele vendeu 62 potes, recebendo o valor total de R$ 171,00 pela venda. Quantos potes menores foram vendidos?

A) 28
B) 30
C) 32
D) 34
E) 36

07. 5QBS (UECE) José quer comprar chocolates e pipocas com os R$ 11,00 de sua mesada. Tem dinheiro certo para comprar dois chocolates e três pacotes de pipocas, mas faltam-lhe dois reais para comprar três chocolates e dois pacotes de pipocas. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que um pacote de pipocas custa

A) R$ 2,00.
B) R$ 1,60.
C) R$ 1,40.
D) R$ 1,20.

08. LR28 (FUVEST-SP) A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Então, m + n é igual a:

A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio–2022) Para quantos valores inteiros do parâmetro **b** a equação $x^2 + bx + 40 = 0$ não admite raiz real?

A) 0
B) 25
C) 40
D) Infinitos

02. (Famema-SP–2020) Um grupo de **N** amigos decidiu comprar um presente para uma de suas professoras. O preço do presente é R$ 396,00 e será dividido em partes iguais entre eles. No dia de comprar o presente, um dos amigos desistiu de participar da compra, o que resultou em um aumento de R$ 3,00 na parte de cada um dos amigos que restou no grupo.

O número **N** de amigos no grupo original era igual a

A) 11.
B) 18.
C) 12.
D) 9.
E) 6.

03. MBØØ (UFSM-RS) Em uma determinada região do mar, foi contabilizado um total de 340 mil animais, entre lontras marinhas, ouriços do mar e lagostas. Verificou-se que o número de lontras era o triplo do de ouriços e que o número de lagostas excedia em 20 mil unidades o total de lontras e ouriços. Pode-se dizer que o número de ouriços dessa região é

A) 30 mil.
B) 35 mil.
C) 40 mil.
D) 45 mil.
E) 50 mil.

04. (UECE–2020) Os participantes de uma reunião ocuparam a totalidade dos lugares existentes em mesas que comportavam sete ocupantes cada uma. Entretanto, para melhorar o conforto, foram trazidas mais quatro mesas e os presentes redistribuíram-se, ficando em cada uma das mesas exatamente seis pessoas. Assim, é correto afirmar que o número de participantes na reunião era

A) 84.
B) 126.
C) 168.
D) 210.

05. OAQR

(UEMA) Um vendedor oferece suco e sanduíche natural nas praias de São Luís durante os fins de semana. Num determinado sábado, ele vendeu 50 sanduíches e 75 copos de suco, arrecadando R$ 300,00. Já no domingo, totalizou R$ 305,00 com a venda de 65 sanduíches e 55 copos de suco.

A) Monte um sistema que represente a situação descrita para o fim de semana de vendas realizadas.

B) Encontre os valores de venda dos copos de suco e dos sanduíches, praticados no fim de semana.

06. (UFRGS-RS–2022) Se **a** e **b** são as raízes da equação $x^2 - 6x + 3 = 0$, então o valor de $\left(\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^{-2}$ é

A) 2.

B) 4.

C) 6.

D) 8.

E) 10.

07. PL05

(UESB-BA–2019) Uma pessoa começou certo ano com uma poupança de R$ 7 250,00, e, ao final de cada mês, até setembro, depositou **x** reais nessa poupança.

Se, de outubro a dezembro, ela sacou, a cada mês, uma vez e meia essa quantia, e a poupança terminou o ano com R$ 9 140,00, então o valor de **x** está no intervalo:

A) [300, 325[

B) [325, 350[

C) [350, 375[

D) [375, 400[

E) [400, 425[

08. KP20

(Cesgranrio) Se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 + 57x - 228 = 0$, então $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ vale

A) $-\dfrac{1}{4}$.

B) $\dfrac{1}{4}$.

C) $-\dfrac{1}{2}$.

D) $\dfrac{1}{2}$.

E) $\dfrac{1}{6}$ ou $-\dfrac{1}{6}$.

09. JCPW

(UECE) No final do mês de outubro, os estudantes Carlos e Artur haviam gastado respectivamente dois terços e três quintos de suas mesadas. Embora a mesada de Carlos seja menor, ele gastou R$ 8,00 a mais do que Artur. Se a soma dos valores das duas mesadas é R$ 810,00, o valor monetário da diferença entre os valores das duas mesadas é

A) R$ 25,00.

B) R$ 30,00.

C) R$ 35,00.

D) R$ 40,00.

10. QHAZ

(UFJF-MG) Para um *show* de um artista, foram vendidos ingressos para pista e camarote. Os ingressos foram vendidos antes do dia do *show* e no dia do *show*, sendo que os preços dos ingressos vendidos antes do dia do *show* tiveram 50% de desconto. Antes do dia do *show*, foram vendidos 300 ingressos para pista e 200 para camarote, arrecadando-se um total de R$ 22 000,00. No dia do *show*, foram vendidos 100 ingressos para pista e 200 para camarote, arrecadando-se um total de R$ 28 000,00. Qual foi o preço do ingresso, para a pista, vendido antes do dia do *show*?

A) R$ 40,00

B) R$ 55,00

C) R$ 67,00

D) R$ 70,00

E) R$ 82,00

11. (UEL-PR) Marlene confecciona tapetes artesanais de dois modelos, redondo e retangular. Num certo mês, ela confeccionou 60 tapetes e teve um lucro líquido de R$ 500,00. Sabendo que cada tapete redondo foi vendido por R$ 10,00, cada tapete retangular por R$ 12,00 e que Marlene gastou R$ 160,00 em materiais, quantos tapetes de cada modelo ela confeccionou nesse mês?

A) 20 redondos e 40 retangulares.

B) 30 redondos e 30 retangulares.

C) 40 redondos e 20 retangulares.

D) 10 redondos e 50 retangulares.

E) 50 redondos e 10 retangulares.

12. NYKJ

(IFCE) Os números reais **p**, **q**, **r** e **s** são tais que 2 e 3 são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, e −2 e 3 são raízes da equação $x^2 + rx + s = 0$. Nessas condições, as raízes da equação $x^2 + px + s = 0$ são

A) −1 e 6.

B) −2 e 2.

C) −3 e 6.

D) 2 e 6.

E) −1 e 1.

13. (UFPB) Um produtor de soja deseja transportar a produção da sua propriedade até um armazém distante 2 225 km. Sabe-se que 2 000 km devem ser percorridos por via marítima, 200 km por via férrea, e 25 km por via rodoviária. Ao fazer um levantamento dos custos, o produtor constatou que, utilizando transporte ferroviário, o custo por quilômetro percorrido é:

- 100 reais mais caro do que utilizando transporte marítimo.
- A metade do custo utilizando transporte rodoviário.

Com base nessas informações e sabendo que o custo total para o produtor transportar toda sua produção será de 700 000 reais, é correto afirmar que o custo, em reais, por quilômetro percorrido, no transporte marítimo é de:

A) 200

B) 250

C) 300

D) 350

E) 400

MATEMÁTICA

14. 8XOM (UFPR) Durante o mês de dezembro, uma loja de cosméticos obteve um total de R$ 900,00 pelas vendas de um certo perfume. Com a chegada do mês de janeiro, a loja decidiu dar um desconto para estimular as vendas, baixando o preço desse perfume em R$ 10,00. Com isso, vendeu em janeiro 5 perfumes a mais do que em dezembro, obtendo um total de R$ 1 000,00 pelas vendas de janeiro. O preço pelo qual esse perfume foi vendido em dezembro era de:

A) R$ 55,00
B) R$ 60,00
C) R$ 65,00
D) R$ 70,00
E) R$ 75,00

15. (UFJF-MG) Uma mesa de massa total medindo 32 kg foi construída utilizando-se dois materiais: madeira e aço. Na confecção desse objeto, foi gasto o mesmo valor na compra de cada material. Sabendo que o custo de cada quilograma de aço foi um terço do custo de cada quilograma de madeira, qual a quantidade de aço utilizada na construção dessa mesa?

16. (UFTM-MG) Em uma balança de dois pratos de uma farmácia de manipulação, 10 comprimidos **A** estão perfeitamente equilibrados com 15 comprimidos **B**. Se um dos 10 comprimidos **A** for colocado no prato dos comprimidos **B** e um dos 15 comprimidos **B** for colocado no prato que anteriormente tinha somente comprimidos **A**, este ficará com 40 mg a menos que o outro. A relação entre as massas dos comprimidos **A** e **B**, em mg, é dada corretamente por:

A) B = A – 30
B) B = A – 10
C) A = B + 5
D) A = B + 20
E) A = B + 40

17. (Albert Einstein–2019) Fabiana é representante de vendas de um fabricante de glicerina. A tabela descreve as formas de fornecimento do produto, o preço e a comissão de Fabiana.

Tipo de embalagem	Quantidade	Preço	Comissão
Bombona pequena	50 L	R$ 300,00	R$ 18,00
Bombona grande	200 L	R$ 950,00	R$ 47,50
Container	1 000 L	R$ 5 200,00	R$ 260,00

Na segunda quinzena de novembro, as vendas feitas por Fabiana totalizaram R$ 50 100,00, gerando uma comissão de R$ 2 565,00. Dado que, nessa quinzena, o número de bombonas grandes vendidas foi dez vezes o número de *containers* vendidos, a quantidade total de glicerina vendida nessa quinzena foi igual a

A) 9 600 L.
B) 10 000 L.
C) 9 000 L.
D) 31 000 L.
E) 31 600 L.

18. TNWE (Mackenzie-SP) Em uma urna há bolas verdes e bolas amarelas. Se retirarmos uma bola verde da urna, então um quinto das bolas restantes é de bolas verdes. Se retirarmos nove bolas amarelas, em vez de retirar uma bola verde, então um quarto das bolas restantes é de bolas verdes. O número total de bolas que há inicialmente na urna é:

A) 21
B) 36
C) 41
D) 56
E) 61

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2021) Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg.

Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa.

Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

A) 22
B) 24
C) 26
D) 33
E) 39

02. J149 (Enem) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

A) 34
B) 42
C) 47
D) 48
E) 79

03. HPWF (Enem) Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

A) 1,20.
B) 0,90.
C) 0,60.
D) 0,40.
E) 0,30.

04. (Enem) Para incentivar a reciclagem e evitar lixo espalhado durante as festas de final de ano, a prefeitura de uma cidade fez uma campanha com sorteio de prêmios. Para participar do sorteio, era necessário entregar cinco latinhas de alumínio ou três garrafas de vidro vazias para ter direito a um cupom. Um grupo de estudantes de uma escola trocou suas latinhas e garrafas de vidro e com isso adquiriram dez cupons; outro grupo trocou o triplo das garrafas e a mesma quantia de latinhas do primeiro grupo, conseguindo vinte cupons.

Quantas garrafas de vidro e quantas latinhas, respectivamente, o segundo grupo trocou?

A) 5 e 5
B) 15 e 5
C) 15 e 25
D) 45 e 25
E) 45 e 75

05. (Enem) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p$$

na qual **q** representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e **p**, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço **p**, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

A) R$ 0,50 $\leq$ p < R$ 1,50.
B) R$ 1,50 $\leq$ p < R$ 2,50.
C) R$ 2,50 $\leq$ p < R$ 3,50.
D) R$ 3,50 $\leq$ p < R$ 4,50.
E) R$ 4,50 $\leq$ p < R$ 5,50.

06. 5KSC
(Enem) A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose de criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12}\right) \cdot \text{dose de adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento **X** a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento **Y**, cuja dosagem de adulto é de 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação **Y** administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento **X**, em miligramas, igual a:

A) 15
B) 20
C) 30
D) 36
E) 40

07. (Enem) Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

A) R$ 166,00.
B) R$ 156,00.
C) R$ 84,00.
D) R$ 46,00.
E) R$ 24,00.

08. (Enem) Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a **y** centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com **N** unidades e, na caixa, é especificada a área máxima **S** que pode ser coberta pelas **N** placas.

Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta **S** não fosse alterada.

A quantidade **X** de placas do novo modelo, em cada nova caixa, será igual a:

A) $\frac{N}{9}$
B) $\frac{N}{6}$
C) $\frac{N}{3}$
D) 3N
E) 9N

09. (Enem) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fica acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante **X** segundos e cada ciclo dura **Y** segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre **X** e **Y**?

A) 5X – 3Y + 15 = 0
B) 5X – 2Y + 10 = 0
C) 3X – 3Y + 15 = 0
D) 3X – 2Y + 15 = 0
E) 3X – 2Y + 10 = 0

MATEMÁTICA

10. (Enem) A capacidade mínima, em BTU/h, de um aparelho de ar-condicionado, para ambientes sem exposição ao Sol, pode ser determinada da seguinte forma:

- 600 BTU/h por m^2, considerando-se até duas pessoas no ambiente;
- para cada pessoa adicional nesse ambiente, acrescentar 600 BTU/h;
- acrescentar mais 600 BTU/h para cada equipamento eletrônico em funcionamento no ambiente.

Será instalado um aparelho de ar-condicionado em uma sala sem exposição ao Sol, de dimensões 4 m x 5 m, em que permaneçam quatro pessoas e que possua um aparelho de televisão em funcionamento.

A capacidade mínima, em BTU/h, desse aparelho de ar-condicionado deve ser:

A) 12 000
B) 12 600
C) 13 200
D) 13 800
E) 15 000

11. (Enem) Desde 2005, o Banco Central não fabrica mais a nota de R$ 1,00 e, desde então, só produz dinheiro nesse valor em moedas. Apesar de ser mais caro produzir uma moeda, a durabilidade do metal é 30 vezes maior que a do papel. Fabricar uma moeda de R$ 1,00 custa R$ 0,26, enquanto uma nota custa R$ 0,17; entretanto, a cédula dura de oito a onze meses.

Disponível em: http://noticias.r7.com. Acesso em: 26 abr. 2010.

Com R$ 1 000,00 destinados a fabricar moedas, o Banco Central conseguiria fabricar, aproximadamente, quantas cédulas a mais?

A) 1 667
B) 2 036
C) 3 846
D) 4 300
E) 5 882

12. (Enem) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1 000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

A) 476
B) 675
C) 923
D) 965
E) 1 538

13. (Enem) O salto triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (Adaptação).

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

A) 4,0 m e 5,0 m.
B) 5,0 m e 6,0 m.
C) 6,0 m e 7,0 m.
D) 7,0 m e 8,0 m.
E) 8,0 m e 9,0 m.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. 64 L
- 04. A
- 05. C
- 06. B
- 07. C
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. C
- 03. C
- 04. C
- 05.
  - A) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 13x + 11y = 61 \end{cases}$
  - B) Sanduíches: R$ 3,00
    Copo de suco: R$ 2,00
- 06. B
- 07. E
- 08. B
- 09. B
- 10. A
- 11. B
- 12. A
- 13. C
- 14. B
- 15. m_a = 24 kg
- 16. D
- 17. B
- 18. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

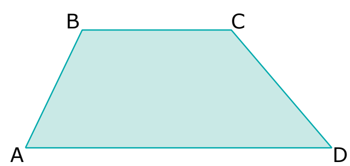
- 01. B
- 02. D
- 03. E
- 04. D
- 05. A
- 06. B
- 07. B
- 08. A
- 09. B
- 10. D
- 11. B
- 12. C
- 13. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Quadriláteros Notáveis

TRAPÉZIOS

Os trapézios são os quadriláteros que possuem dois lados paralelos, chamados bases.



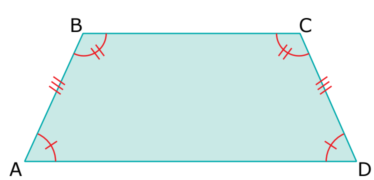
$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

O quadrilátero ABCD é um trapézio de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Classificação

Trapézio isósceles

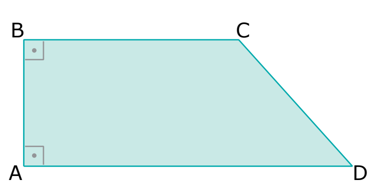
Os lados não paralelos são congruentes ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$), e os ângulos das bases são congruentes ($\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{C}$).



$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

Trapézio retângulo

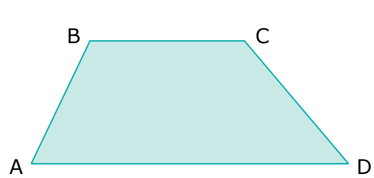
Um de seus lados é perpendicular às bases ($\hat{A} = \hat{B} = 90°$).



$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

Trapézio escaleno

Os lados não paralelos não são congruentes, e nenhum ângulo interno é reto.



$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

$AB \neq CD$

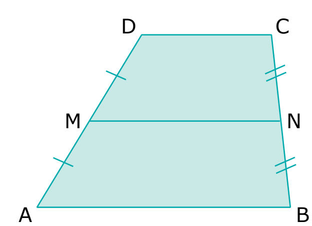
$\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C} \neq \hat{D}$

Base média do trapézio

Seja $\overline{MN}$ um segmento com extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio ABCD. Então:

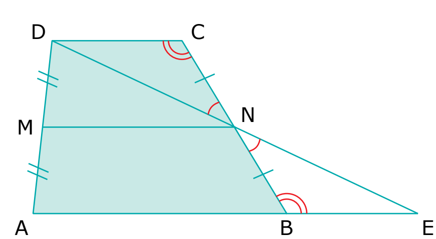
i) $\overline{MN}$ é paralelo às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

ii) $\overline{MN}$ é igual à semissoma das bases.



MN é base média do trapézio ABCD $\Leftrightarrow \begin{cases} MN = \dfrac{AB + DC}{2} \\ MN \,//\, AB \,//\, CD \end{cases}$

Demonstração: prolongamos DN até encontrar o prolongamento de AB.



Na figura, os triângulos DCN e NBE são congruentes, pois possuem os ângulos congruentes e $CN \equiv NB$ (caso ALA).

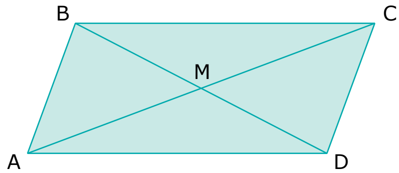
Então, $BE \equiv CD$ e $NE \equiv DN$.

Como MN é base média do triângulo ADE, então:

$$MN \,//\, AB \,//\, CD \;\text{ e }\; MN = \frac{AE}{2} = \frac{AB + BE}{2} = \frac{AB + CD}{2}$$

PARALELOGRAMOS

Os paralelogramos são os quadriláteros que possuem os lados opostos paralelos.



$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

Propriedades

i) Os lados opostos são paralelos e congruentes.

ii) Os ângulos opostos são congruentes.

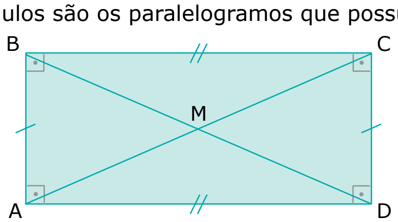
iii) Os ângulos consecutivos $\left(\text{como } \hat{A} \text{ e } \hat{D}\right)$ são suplementares, ou seja, somam 180°.

iv) As diagonais se cortam ao meio, ou seja, **M** é ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Classificação

Retângulos

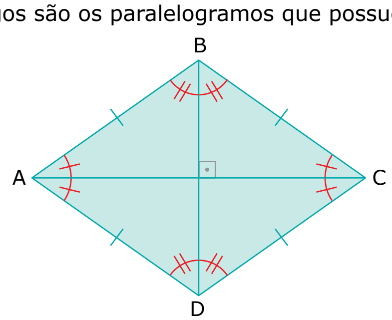
Os retângulos são os paralelogramos que possuem todos os ângulos retos.



Além das propriedades válidas para os paralelogramos, temos que os retângulos possuem as diagonais congruentes.

Losangos

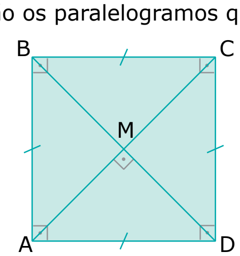
Os losangos são os paralelogramos que possuem todos os lados congruentes.



Além das propriedades de paralelogramo, suas diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos do losango.

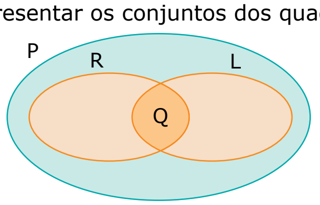
Quadrados

Os quadrados são os paralelogramos que possuem todos os lados e ângulos congruentes.



Todo quadrado é um paralelogramo, um retângulo e um losango; portanto, para ele, são válidas todas as propriedades vistas para esses quadriláteros.

Podemos representar os conjuntos dos quadriláteros notáveis pelo seguinte esquema.



P: Conjunto dos paralelogramos

R: Conjunto dos retângulos

L: Conjunto dos losangos

Q: Conjunto dos quadrados

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. VZL9
(UNIFESP) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1 : 3. O menor ângulo desse paralelogramo mede

A) 45°.
B) 50°.
C) 55°.
D) 60°.
E) 65°.

02. (UniFOA-RJ–2019) Proposição: É uma sentença declarativa, seja ela expressa de forma afirmativa ou negativa, na qual podemos atribuir um valor lógico "V" (verdadeiro) ou "F" (falso). Uma proposição também pode ser expressa por símbolos.

Disponível em: www.infoescola.com/matematica/logica-proposicional. Acesso em: 14 maio 2019.

Pensando nisso, analise as seguintes proposições:

I. Um quadrilátero convexo com dois lados paralelos é um trapézio.
II. Um paralelogramo com quatro ângulos retos é um retângulo.
III. Existem losangos que são retângulos.

Lembre-se: Quadriláteros são figuras geométricas planas que possuem quatro lados.

Disponível em: brasilescola.uol.com.br/matematica/quadrilateros.htm. Acesso em: 14 maio 2019.

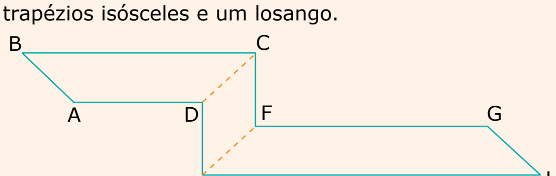
É correto afirmar que

A) apenas uma delas é verdadeira.
B) apenas I e II são verdadeiras.
C) apenas I e III são verdadeiras.
D) apenas II e III são verdadeiras.
E) I, II e III são verdadeiras.

03. M4H8
(UFU-MG) Em um quadrilátero ABCD, o ângulo $\hat{C}$ é igual a $\frac{1}{3}$ do ângulo $\hat{B}$, o ângulo $\hat{A}$ mede o quíntuplo do ângulo $\hat{C}$ e o ângulo $\hat{D}$ vale 45°. Pode-se dizer que $\hat{A} - \hat{B}$ vale

A) 50°.
B) 60°.
C) 70°.
D) 80°.
E) 90°.

04. WB1B
(CEFET-MG) A figura a seguir é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango.



O comprimento da base maior do trapézio ABCD é igual ao da base menor do trapézio EFGH, que vale 2x e, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor, e o lado EF do losango vale **y**. O perímetro da figura dada, expresso em função de **x** e **y**, é:

A) 6x + 4y
B) 9x + 4y
C) 12x + 2y
D) 15x + 2y

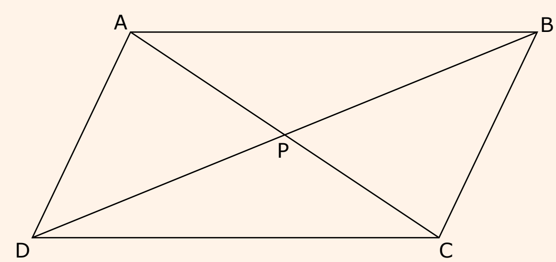
05. ISUT
(PUC-SP) Sendo:

A = {x | x é quadrilátero}
B = {x | x é quadrado}
C = {x | x é retângulo}
D = {x | x é losango}
E = {x | x é trapézio}
F = {x | x é paralelogramo}

Então, vale a relação:

A) $A \supset D \supset E$
B) $A \supset F \supset D \supset B$
C) $F \subset D \subset A$
D) $A \supset F \supset B \supset C$
E) $B \subset D \subset A \subset E$

06. 3RYF
(CEFET-CE) No paralelogramo ABCD, calcule as medidas das diagonais, de acordo com a figura a seguir:



Dados:

AP = x
BP = x + 14
CP = 2y – 5
DP = 3y + 2

07. UØBD
(FGV-SP) A diagonal menor de um losango decompõe esse losango em dois triângulos congruentes. Se cada ângulo obtuso do losango mede 130°, quais são as medidas dos três ângulos de cada um dos triângulos considerados?

08. ØMQN
(IFCE) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são inversamente proporcionais a 5, 8, 10 e 40, então as medidas, em graus, dos ângulos são, respectivamente, iguais a

A) 160°; 100°; 80° e 20°.
B) 100°; 80°; 20° e 160°.
C) 80°; 50°; 40° e 10°.
D) 50°; 40°; 10° e 80°.
E) 75°; 45°; 40° e 20°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFSP) Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por 3x + 60° e 135° – 2x, a medida do menor ângulo desse losango é

A) 75°.

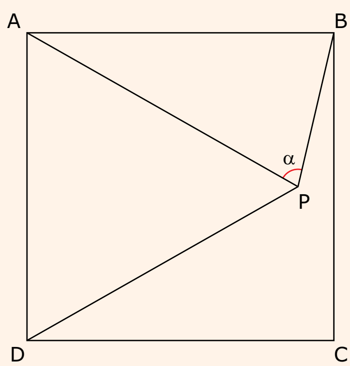
B) 70°.

C) 65°.

D) 60°.

E) 55°.

02. ELCX
(Mackenzie-SP) Na figura, ABCD é um quadrado e APD é um triângulo equilátero. A medida do ângulo α, em graus, é:



A) 65

B) 55

C) 80

D) 60

E) 75

03. (UECE) Em um plano, duas circunferências têm seus centros nos pontos **P** e **Q** e as medidas de seus raios são ambas iguais a 3 m. Se essas circunferências cortam-se nos pontos **R** e **S** e se a distância entre **P** e **Q** é igual à distância entre **R** e **S**, então a medida da área do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos **P**, **Q**, **R** e **S**, em m², é

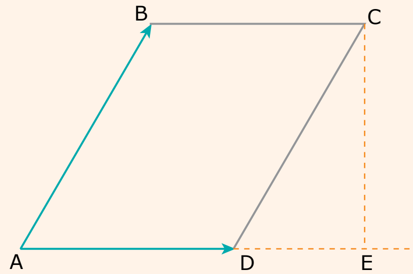
A) 18.

B) $9\sqrt{2}$.

C) $9\sqrt{3}$.

D) 9.

04. MH63
(UCS-RS) Na figura a seguir, o quadrilátero ABCD é um paralelogramo, em que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ representam duas forças, sendo med $(\overline{AD})$ = 80, med$(\overline{AB})$= 100 e med$(A\hat{B}C)$ = 120°.



Assinale a alternativa que contém a afirmação correta sobre a med $(\overline{AE})$ do segmento $\overline{AE}$, e sobre a medida **q** do ângulo $D\hat{A}C$.

A) med $(\overline{AE})$ = 50 e q = 30°

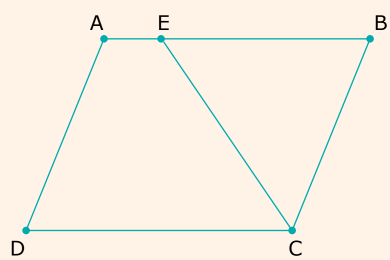
B) med $(\overline{AE})$ = 130 e q = 30°

C) med $(\overline{AE})$ = 130 e q > 30°

D) med $(\overline{AE})$ = 50 e q < 30°

E) med $(\overline{AE})$ = 85 e q = 30°

05. LRDM
(UDESC) No paralelogramo ABCD, conforme mostra a figura, o segmento CE é a bissetriz do ângulo DCB.



Sabendo que AE = 2 e AD = 5, então o valor do perímetro do paralelogramo ABCD é:

A) 26

B) 16

C) 20

D) 22

E) 24

06. SX28
(UFRGS-RS) Considere as seguintes afirmações sobre um quadrilátero convexo.

I. Se as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios, então o quadrilátero é um retângulo.

II. Se as diagonais se interceptam perpendicularmente em seus respectivos pontos médios, então o quadrilátero é um losango.

III. Se as diagonais se interceptam perpendicularmente e são congruentes, então o quadrilátero é um quadrado.

Quais estão corretas?

A) Apenas II.
B) Apenas III.
C) Apenas I e II.
D) Apenas I e III.
E) I, II e III.

07. (UFV-MG) Em um trapézio isósceles de bases diferentes, uma diagonal é também bissetriz de um ângulo adjacente à base maior. Isso significa que

A) os ângulos adjacentes à base menor não são congruentes.
B) a base menor tem medida igual à dos lados oblíquos.
C) as diagonais se interceptam formando ângulo reto.
D) a base maior tem medida igual à dos lados oblíquos.
E) as duas diagonais se interceptam no seu ponto médio.

08. ØVB1
(ITA-SP) Dadas as afirmações:

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.
II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

Podemos garantir que

A) todas são verdadeiras.
B) apenas I e II são verdadeiras.
C) apenas II e III são verdadeiras.
D) apenas II é verdadeira.
E) apenas III é verdadeira.

09. (FGV-SP) A figura representa um trapézio isósceles ABCD, com AD = BC = 4 cm. **M** é o ponto médio de $\overline{AD}$, e o ângulo BMC é reto.

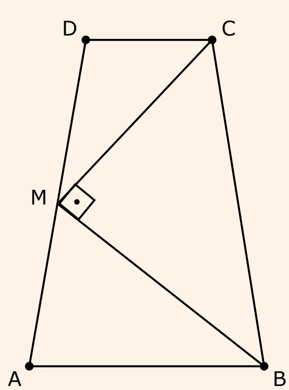


Figura fora de escala

O perímetro do trapézio ABCD, em cm, é igual a:

A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 15

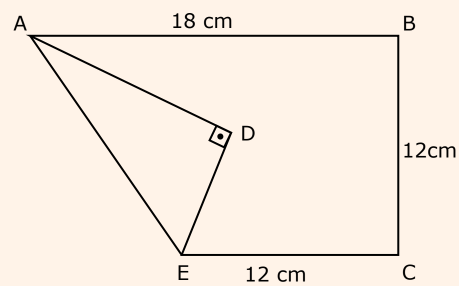
10. PFD7
(UFJF-MG) Sejam **A**, **B**, **C** e **D** os vértices de um trapézio isósceles. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ ambos agudos são os ângulos da base desse trapézio, enquanto que os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são ambos obtusos e medem cada um, o dobro da medida de cada ângulo agudo desse trapézio. Sabe-se ainda que a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$. Sendo a medida do lado $\overline{AB}$ igual a 10 cm, o valor da medida do perímetro do trapézio ABCD, em centímetros, é:

A) 21
B) 22
C) 23
D) 24
E) 25

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. M9JJ
(Enem–2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura:



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

A) $2\sqrt{22}$ cm.
B) $6\sqrt{3}$ cm.
C) 12 cm.
D) $6\sqrt{5}$ cm.
E) $12\sqrt{2}$ cm.

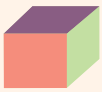
02. (Enem) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

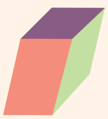
Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

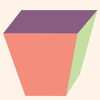
A) Retirar 16 células.
B) Retirar 40 células.
C) Acrescentar 5 células.
D) Acrescentar 20 células.
E) Acrescentar 40 células.

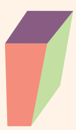
MATEMÁTICA

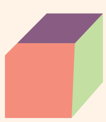
03. N749 (Enem) Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

A) 

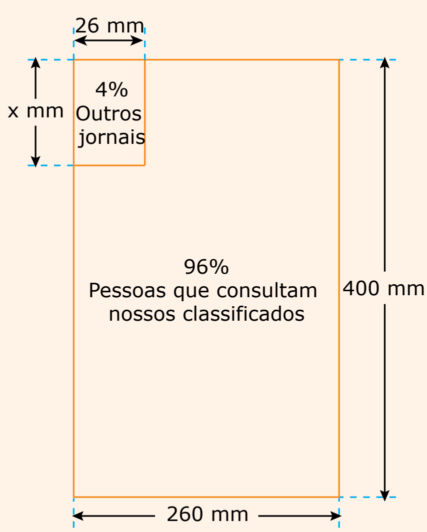
B) 

C) 

D) 

E) 

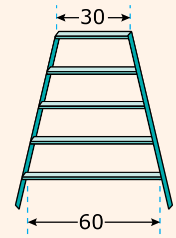
04. (Enem) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

A) 1 mm.
B) 10 mm.
C) 17 mm.
D) 160 mm.
E) 167 mm.

05. PVOR (Enem) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

A) 144
B) 180
C) 210
D) 225
E) 240

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. C
- 04. B
- 05. B
- 06. AC = 18
  BD = 46
- 07. 50°, 65°, 65°
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. D
- 04. C
- 05. E
- 06. A
- 07. B
- 08. C
- 09. C
- 10. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. A
- 03. C
- 04. D
- 05. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Médias

MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética dos números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média aritmética dos números $\frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ e $\frac{4}{63}$.

$$\bar{x} = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{9} + \frac{4}{63}}{3} = \frac{9.5 + 7.2 + 4}{3.7.9} = \frac{63}{189} = \frac{1}{3}$$

2º) (FUVEST-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

A média aritmética da primeira rodada foi de $\frac{5+3+1+4+0+2}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ gols por jogo. A média da primeira e segunda rodadas é 20% superior, ou seja, é de $\frac{5}{2}.1,2 = \frac{5}{2}.\frac{6}{5} = 3$ gols por jogo.

Como serão realizadas 11 partidas, teremos um total de 33 gols. Porém, na primeira rodada, já foram feitos 15 gols. Portanto, na segunda rodada, o número de gols a serem marcados é 18.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica dos números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por:

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3. \ ... \ .x_n}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média geométrica dos números 90, 75 e 4.

$$G = \sqrt[3]{90 \ . \ 75 \ . \ 4} = \sqrt[3]{27\,000} = 30$$

2º) José investiu um capital **C** na bolsa há 3 anos. No primeiro ano, ele obteve um rendimento de 27%, no segundo ano, o rendimento caiu para 12% e, no terceiro ano, ocorreu um prejuízo de 8%. Qual foi o rendimento médio anual?

O montante obtido por José ao final dos três anos é dado por M = 1,27 . 1,12 . 0,92.C. Desejamos encontrar uma taxa média **i** tal que M = $(1 + i)^3$.C. Logo, temos:

$(1 + i)^3.C = 1,27 \ . \ 1,12 \ . \ 0,92.C \Rightarrow$

$(1 + i)^3 = 1,27 \ . \ 1,12 \ . \ 0,92 \Rightarrow$

$(1 + i) = \sqrt[3]{1,27 \ . \ 1,12 \ . \ 0,92}$

Observe que (1 + i) é a média geométrica dos números 1,27, 1,12 e 0,92. Essa média é dada por $\sqrt[3]{1,308608}$, que é, aproximadamente, 1,0938. Logo, o rendimento médio anual é, aproximadamente, 9,38%.

MÉDIA HARMÔNICA

Dados os números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média harmônica desses números é definida por:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média harmônica dos números 15 e 5.

$$H = \frac{2}{\frac{1}{15} + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{4}{15}} = 2.\frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

2º) João está fazendo uma viagem. Na primeira metade da viagem, sua velocidade média é 80 km/h. Na segunda metade da viagem, sua velocidade média aumentou para 120 km/h. Qual a velocidade média no total do percurso?

A velocidade média **v** é dada pela média harmônica das velocidades nas duas metades da viagem. Assim:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{5}{240}} = 2.\frac{240}{5} = 96$$

Portanto, a velocidade média ao longo de toda a viagem foi de 96 km/h.

PROPRIEDADE DAS MÉDIAS

Dados a, b ∈ $\mathbb{R}^*_+$, com a ≥ b, valem as seguintes desigualdades:

$$b \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le a$$

Essa propriedade também é verificada para três ou mais números reais positivos. As médias estão no intervalo que vai do menor até o maior número tomado. Quando elas são diferentes, a maior entre elas é a aritmética, e a menor, a harmônica.

MÉDIA PONDERADA

A média ponderada dos números reais positivos x_1, x_2, x_3, ..., x_n, com pesos m_1, m_2, m_3, ..., m_n (também números reais positivos), respectivamente, é definida por:

$$P = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média ponderada dos números 15, 20 e 40, com pesos 6, 3 e 1, respectivamente.

$$M = \frac{15 \,.\, 6 + 20 \,.\, 3 + 40}{6 + 3 + 1} = \frac{90 + 60 + 40}{10} = \frac{190}{10} = 19$$

2º) No processo seletivo de uma empresa, os candidatos são submetidos a testes de Português e Matemática, além de uma entrevista. A cada um desses é atribuída uma nota que varia de zero a dez. Porém, a entrevista tem peso três vezes maior que os testes de Matemática e Português. A nota final do candidato é a média das notas de cada etapa, considerando-se o peso de cada uma delas. Essa empresa só seleciona candidatos que obtiverem uma nota final igual ou superior a oito. Maria obteve nota 6 no teste de Português e 7 em Matemática. Qual é a nota mínima que ela deve obter na entrevista para ser selecionada?

Considere que as notas no teste de Português, no de Matemática e na entrevista sejam, respectivamente, n_p, n_m e n_e. Dessa forma, a nota final **N** de um candidato é dada por:

$$N = \frac{n_p + n_m + 3n_e}{1 + 1 + 3}$$

Assim, para Maria obter nota 8, devemos ter:

$$\frac{6 + 7 + 3n_e}{5} = 8 \Rightarrow 13 + 3n_e = 40 \Rightarrow 3n_e = 27 \Rightarrow n_e = 9$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. J5PM (UEG-GO) A Universidade Estadual de Goiás mudou seu sistema de avaliação e uma das mudanças é o cálculo da média final, que passou a ser dado por: média final = $\frac{2.N_1 + 3.N_2}{5}$, onde N_1 e N_2 são a primeira e segunda nota do aluno, respectivamente. Se um aluno tiver 5,0 e 7,0 na primeira e na segunda nota, respectivamente, a média final desse aluno será:

A) 6,3

B) 6,2

C) 6,1

D) 6,0

02. (UFMS–2022) A despesa mensal de uma família foi de R$ 6 240,00 durante os primeiros 3 meses, R$ 6 780,00 durante os próximos 4 meses e R$ 7 236,00 durante os últimos 5 meses de um ano. Se a economia total durante o ano foi de R$ 7 080,00, qual foi a renda média mensal da família?

A) R$ 6 245,00

B) R$ 6 752,00

C) R$ 6 834,00

D) R$ 6 957,50

E) R$ 7 425,00

03. (UERJ) Na tabela a seguir, estão indicados os preços do rodízio de *pizzas* de um restaurante.

Dias da semana	Valor unitário do rodízio (R$)
Segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira	18,50
Sexta-feira, sábado e domingo	22,00

Considere um cliente que foi a esse restaurante todos os dias de uma mesma semana, pagando um rodízio em cada dia.

Determine o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana.

04. F5S8 (UEG-GO) A tabela a seguir apresenta o número de ônibus utilizados no transporte público de um município e o número de passageiros transportados num período de cinco dias.

Número de ônibus	Número de passageiros
47	1 410
50	1 400
48	1 536
52	1 352
49	1 666

Os dados da tabela indicam que o número médio de passageiros transportados por ônibus nesse município durante esse período é

A) superior a 30 e inferior a 40.

B) inferior a 30.

C) superior a 40 e inferior a 50.

D) superior a 50.

05. WM1K (UEL-PR) Um automóvel subiu uma ladeira a uma velocidade média de 60 km/h e, em seguida, desceu a mesma ladeira à velocidade média de 100 km/h. A velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de

A) 72 km/h.
D) 80 km/h.
B) 75 km/h.
E) 84 km/h.
C) 78 km/h.

06. NTKW (FDSBC-SP) Um escritório de advocacia tem 22 funcionários cuja média salarial é igual a R$ 3 500,00. Se nenhum funcionário for dispensado e forem contratados três novos funcionários, com salários de R$ 900,00, R$ 1 200,00 e R$ 1 800,00, a média salarial passará a ser igual a

A) R$ 3 236,00.
C) R$ 3 350,00.
B) R$ 3 248,00.
D) R$ 3 384,00.

07. GRKW (FGV) A média aritmética das notas de cinco provas de Estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0. Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5. Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é:

A) 6,8
D) 7,5
B) 7,2
E) 8,0
C) 7,4

08. 26CL (UCB-DF) A média salarial dos 100 funcionários de uma empresa é R$ 3 200,00. Se forem dispensados 20 funcionários com média salarial de R$ 4 000,00, a média salarial, em reais, dos que ficarem na empresa será igual a:

A) 2 800
D) 3 600
B) 3 000
E) 4 000
C) 3 200

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EEAR–2022) Em uma classe da 1ª série do Curso de Formação de Sargentos – EEAR, as idades dos alunos se distribuíam conforme a tabela. Desta forma, a idade média ponderada desses alunos era de ________ anos.

Idade (anos)	18	19	20	21	22
f_r (%)	40	30	17	10	3

A) 18,81
C) 19,06
B) 18,98
D) 19,23

02. 84CZ (Unifor-CE) Um professor de uma faculdade particular de Fortaleza implantou, em sua disciplina, o seguinte critério para avaliar seus alunos: o aluno fará duas avaliações durante o semestre, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não obter média 7 nessas avaliações, ele terá que fazer uma avaliação final. Sua média final será então a média entre a nota da avaliação final, com peso 2 e a média das avaliações do semestre, com peso 3. Um aluno obteve nota 4 na primeira avaliação e nota 6 na segunda avaliação. Se a média final para aprovação é 5, qual a menor nota que esse aluno precisa obter na avaliação final para ser aprovado?

A) 4,5
C) 5,2
E) 5,7
B) 4,7
D) 5,5

03. (Uncisal) Num certo dia do mês de novembro de 2015, seis barracas da Feirinha de Artesanato da Pajuçara vendiam castanhas de caju em embalagens com pesos variados de acordo com a tabela.

Barraca	Embalagem (g)	Preço (R$)
A	1 000	48,00
B	800	44,00
C	1 000	45,00
D	1 000	48,00
E	800	40,00
F	800	40,00

Nesse dia, o preço médio de venda do quilo da castanha, desprezando-se os centavos, era

A) R$ 44,00.
C) R$ 49,00.
E) R$ 900,00.
B) R$ 47,00.
D) R$ 59,00.

04. (PUC Minas) Ao misturar 2 kg de café em pó do tipo I com 3 kg de café em pó do tipo II, um comerciante obtém um tipo de café cujo preço é R$ 6,80 o quilograma. Mas, se misturar 3 kg de café em pó do tipo I com 2 kg de café em pó do tipo II, o quilo da nova mistura custará R$ 8,20. Com base nessas informações, é correto afirmar que o preço de um quilo do café em pó do tipo I é igual a:

A) R$ 4,00
C) R$ 11,00
B) R$ 7,50
D) R$ 12,40

MATEMÁTICA

05. 7Y39

(PUC-Campinas-SP) A análise do biotipo de cada um dos atletas que integraram a delegação brasileira na última Olimpíada permitiu que se calculasse, certo dia, a média de pesos das 122 mulheres participantes: 62 kg. Supondo-se que uma dessas atletas fosse excluída do grupo, a média de pesos das 121 restantes passaria a ser 61,9 kg. Nessas condições, o peso, em quilogramas, da atleta excluída seria:

A) 75,5
B) 75,2
C) 74,6
D) 74,1
E) 73,8

06. (Famema-SP–2020) O PIB *per capita* de uma determinada região é definido como a divisão do PIB da região pelo número de habitantes dessa região. A tabela registra a população e o PIB *per capita* de quatro estados.

Estado	População (em milhões)	PIB *per capita* (em R$)
A	1	15 000,00
B	8	15 000,00
C	3	30 000,00
D	15	30 000,00

O PIB *per capita* da região compreendida pelos quatro estados é de

A) R$ 28 000,00.
B) R$ 22 500,00.
C) R$ 27 500,00.
D) R$ 25 000,00.
E) R$ 29 000,00.

07. UH7V

(UECE) A média aritmética de 50 números é 40. Dentre esses estão os números 75, 125 e 155, os quais são suprimidos. A média aritmética dos 47 números restantes é:

A) 39
B) 37
C) 35
D) 33

08. 8PHZ

(PUC Rio) Foi feita uma pesquisa sobre a qualidade do doce de abóbora da empresa Bora-Bora. Cada entrevistado dava ao produto uma nota de 0 a 10. Na primeira etapa da pesquisa, foram entrevistados 1 000 consumidores e a média das notas foi igual a 7. Após a realização da segunda etapa da pesquisa, constatou-se que a média das notas dadas pelos entrevistados nas duas etapas foi igual a 8. O número de entrevistados na segunda etapa foi, no mínimo, igual a:

A) 300
B) 400
C) 500
D) 700
E) 850

09. (UPE–2022) Sejam todos os pares de números naturais (a, b) com a seguinte propriedade: o produto entre **a** e **b** é igual a 360.

De todos os pares com essa propriedade, qual a menor soma que pode ser obtida entre **a** e **b**?

A) 38
B) 36
C) 24
D) 66
E) 46

10. ZQDC

(UEL-PR) A média aritmética dos números **a** e **b** é $\frac{a+b}{2}$, e a média geométrica de **a** e **b** é $\sqrt{ab}$. Dois números têm média aritmética 4,1 e média geométrica 4. A alternativa que apresenta o maior deles é:

A) 1
B) 4
C) 2
D) 8,2
E) 5

11. RDZZ

(FGV-SP) Uma sala de aula é constituída por 10% de mulheres e 90% de homens. Em uma prova valendo de 0 a 100 pontos, todas as mulheres tiraram a mesma nota, a média aritmética das notas dos homens foi 83, e a média aritmética das notas de toda a classe foi 84. Nessas condições, cada mulher da sala fez um total de pontos igual a:

A) 90
B) 91
C) 92
D) 93
E) 94

12. (ESPM-SP) Seja A = {2x, x + 10, x, 3x + 10, 4x} um conjunto de 5 números positivos. Se o menor deles for retirado, a média aritmética desses valores aumenta em 7 unidades. Podemos afirmar que a diferença entre o maior valor e o menor valor dos elementos desse conjunto é igual a:

A) 50
B) 55
C) 60
D) 65
E) 70

13. 3C3I

(Insper-SP) Para fazer parte do time de basquete de uma escola, é necessário ter, no mínimo, 11 anos. A média das idades dos cinco jogadores titulares desse time é 13 anos, sendo que o mais velho deles tem 17 anos. Dessa forma, o segundo mais velho do time titular pode ter, no máximo,

A) 17 anos.
B) 16 anos.
C) 15 anos.
D) 14 anos.
E) 13 anos.

14. VPE2

(Uncisal) Um professor prometeu um churrasco para sua turma de 20 alunos se a média aritmética das notas finais da turma fosse superior ou igual a 7,50. O planejamento da disciplina previa a realização de três avaliações (um trabalho individual, um trabalho em grupo e uma prova, realizadas nesta ordem) e a nota final de cada aluno seria a média ponderada dessas avaliações, com pesos 2, 3 e 5, respectivamente. Mesmo levando em conta que Joana (7,00 no trabalho individual e 5,00 no trabalho em grupo) não compareceu à prova por motivo de doença, o professor verificou que a média dos outros dezenove alunos foi igual a 7,60. Que nota mínima Joana precisa obter na segunda chamada para a turma ganhar o churrasco?

A) 9,18
B) 9,00
C) 6,60
D) 5,40
E) 4,80

15. 9A4Y (UECE) Se **x** é a média aritmética dos números reais **a**, **b** e **c**, **y** é a média aritmética de seus quadrados, então a média aritmética de seus produtos dois a dois ab, ac, bc, em função de **x** e **y** é:

Sugestão: Considere o quadrado da soma dos três números.

A) $\dfrac{3x^2 - y}{2}$

B) $\dfrac{3x + y}{2}$

C) $\dfrac{3x^2 + y}{2}$

D) $\dfrac{3x - y}{2}$

16. F9EM (Albert Einstein) Pedro e Luíza estão jogando cartas, sendo que, em cada carta está escrito algum número inteiro e positivo. Cada um inicia o jogo com 5 cartas e informa ao adversário a média dos números de suas cartas. No início do jogo, Pedro avisou que a média de suas cartas era 6 e Luíza avisou que a média de suas cartas era 4. Na primeira rodada Pedro passou uma carta para Luíza e Luíza passou uma carta para Pedro que estava escrito o número 1.

Se a média das cartas que Pedro passou a ter ficou igual a 4,8, o número da carta que Pedro passou para Luíza era

A) 4. B) 5. C) 6. D) 7.

17. V4J9 (Insper-SP) A média das idades dos seis jogadores titulares de um time de vôlei é 27 anos e a média das idades dos seis jogadores reservas é 24 anos. Devido a uma contusão, um dos jogadores titulares foi afastado da equipe. Com isso, um dos reservas assumiu seu lugar no sexteto titular, ficando a equipe com apenas cinco reservas. Após a substituição, a média das idades dos titulares caiu para 26 anos, enquanto a dos reservas subiu para 24,8 anos. A idade do jogador que foi afastado por contusão é:

A) 26 anos

B) 27 anos

C) 28 anos

D) 29 anos

E) 30 anos

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2021) Em um estudo realizado pelo IBGE em quatro estados e no Distrito Federal, com mais de 5 mil pessoas com 10 anos ou mais, observou-se que a leitura ocupa, em média, apenas seis minutos do dia de cada pessoa. Na faixa de idade de 10 a 24 anos, a média diária é de três minutos. No entanto, no grupo de idades entre 24 e 60 anos, o tempo médio diário dedicado à leitura é de 5 minutos. Entre os mais velhos, com 60 anos ou mais, a média é de 12 minutos.

A quantidade de pessoas entrevistadas de cada faixa de idade seguiu a distribuição percentual descrita no quadro.

Faixa etária	Percentual de entrevistados
De 10 a 24 anos	x
Entre 24 e 60 anos	y
A partir de 60 anos	x

Disponível em: www.oglobo.com. Acesso em: 16 ago. 2013 (Adaptação).

Os valores de **x** e **y** do quadro são, respectivamente, iguais a

A) 10 e 80.

B) 10 e 90.

C) 20 e 60.

D) 20 e 80.

E) 25 e 50.

02. (Enem–2021) Uma grande rede de supermercados adota um sistema de avaliação dos faturamentos de suas filiais, considerando a média de faturamento mensal em milhão. A matriz da rede paga uma comissão para os representantes dos supermercados que atingirem uma média de faturamento mensal (M), conforme apresentado no quadro.

Comissão	Média de faturamento mensal (M)
I	$1 \leq M < 2$
II	$2 \leq M < 4$
III	$4 \leq M < 5$
IV	$5 \leq M < 6$
V	$M \geq 6$

Um supermercado da rede obteve os faturamentos num dado ano, conforme apresentado no quadro.

Faturamento mensal (em milhão de real)	Quantidade de meses
3,5	3
2,5	2
5	2
3	4
7,5	1

Nas condições apresentadas, os representantes desse supermercado avaliam que receberão, no ano seguinte, a comissão de tipo

A) I.

B) II.

C) III.

D) IV.

E) V.

03. (Enem–2019) O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo.

Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo?

A) 1,60

B) 1,78

C) 1,79

D) 1,81

E) 1,82

04. 2HX9

(Enem) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

A) 0,15.
B) 0,30.
C) 0,50.
D) 1,11.
E) 2,22.

05. BAEW

(Enem) Os alunos da disciplina de Estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente.

O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

A) 29,8.
B) 71,0.
C) 74,5.
D) 75,5.
E) 84,0.

06. 7JHJ

(Enem) Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

A) I.
B) II.
C) IV.
D) V.
E) VII.

07. (Enem) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas Química e Física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de Química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de Química para vencer a competição é:

A) 18
B) 19
C) 22
D) 25
E) 26

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. E
03. R$ 20,00
04. B
05. B
06. A
07. D
08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. B
03. C
04. C
05. D
06. D
07. C
08. C
09. A
10. E
11. D
12. C
13. C
14. D
15. A
16. D
17. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. B
03. C
04. D
05. C
06. D
07. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Função

CONCEITOS BÁSICOS

Produto cartesiano

O produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos **A** e **B** não vazios é definido como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), nos quais **x** pertence a **A**, e **y** pertence a **B**.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo:

Sejam os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {1, 5}. Obter os produtos cartesianos $A \times B$, A^2 e $B \times A$.

$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 1), (4, 5)\}$

$A^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

Relação

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não vazios, definimos uma relação **R** de **A** em **B** como um subconjunto de $A \times B$.

Considere A = {–1, 0, 1, 2} e B = {1, 2}.

$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Assim, duas relações de **A** em **B** poderiam ser:

$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\} = \{(0, 1), (1, 2)\}$

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

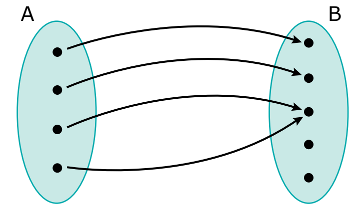
Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não vazios, uma relação **f** de **A** em **B** é função de **A** em **B** se, e somente se, para todo $x \in A$ se associa a um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

Sistema de notação

A função **f** de **A** em **B** pode ser indicada por $f: A \to B$.

Esquematicamente, temos:

$f: A \to B$



Em outras palavras, cada um dos elementos do conjunto **A** está relacionado a um único elemento do conjunto **B**.

No diagrama anterior, definimos o seguinte:

i) O conjunto **A** é o domínio da função.

ii) O conjunto **B** é o contradomínio da função.

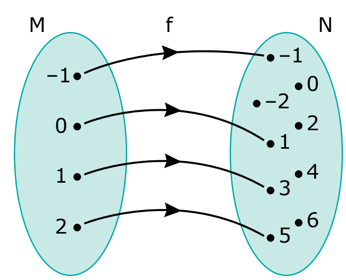
iii) Os elementos do contradomínio que estão relacionados, por setas, com os elementos de **A** formam o conjunto imagem da função.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS

Algumas funções têm a sua lei de correspondência definida por fórmulas. Por exemplo, sejam dois conjuntos, M = {–1, 0, 1, 2} e N = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Seja **f** uma função que associa a cada elemento de **M** o seu dobro, acrescido de uma unidade. Denotando por **x** um elemento genérico do domínio **M** e denotando por **y** a sua correspondente imagem no conjunto **N**, temos a fórmula:

$$y = 2x + 1,\ x \in M$$

- Para $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 \Rightarrow y = -1$.
- Para $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 \Rightarrow y = 1$.
- Para $x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 \Rightarrow y = 3$.
- Para $x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 \Rightarrow y = 5$.



Dizemos que **x** é a variável independente, e **y**, a variável dependente. Assim, a variável **y** é dita função de **x**, e escrevemos y = f(x).

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Determinar o domínio de uma função significa saber para quais valores de **x** a expressão matemática **y** está definida, ou seja, quais valores podem ser atribuídos à variável **x** de modo a não violar as condições de existência da expressão matemática.

Exemplos:

1º) Na função $y = 3x + 7$, para qualquer valor real de **x** existe uma imagem **y** correspondente. Logo, o domínio dessa função é $D = \mathbb{R}$.

2º) Na função $y = \frac{1}{x-4}$, devemos observar que $x - 4$ é denominador de uma fração e, portanto, deve ser diferente de zero, ou seja, $x - 4 \neq 0$, portanto, $x \neq 4$. Então, o domínio dessa função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$.

3º) Na função $y = \sqrt{x-5}$ devemos observar que $x - 5$ é o radicando de uma raiz quadrada. Esse radicando deve ser maior ou igual a zero, ou seja, $x - 5 \geq 0$, portanto, $x \geq 5$. Então, o domínio dessa função deve ser $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES

O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado pelo conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $y = f(x)$. Seguem alguns exemplos de gráficos de funções:

Gráfico I

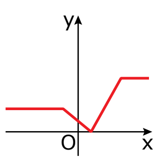


Gráfico II

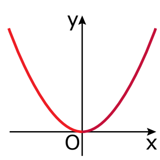


Gráfico III

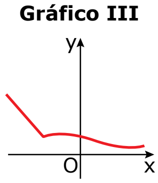
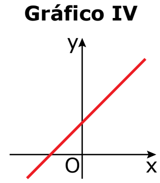


Gráfico IV



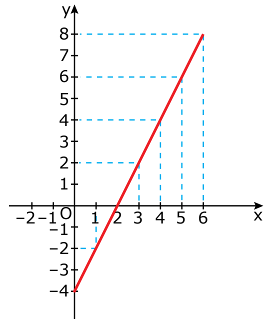
Exemplo:

Dada a função $f: A \to \mathbb{R}$, na qual $f(x) = 2x - 4$ e $A = [0, 6]$, representar o seu gráfico no plano cartesiano.

Vamos escolher alguns valores para **x** dentro do domínio **A** fornecido e substituí-los na expressão matemática dada. Com os resultados, temos a seguinte tabela:

x	y
0	–4
1	–2
2	0
3	2
4	4
5	6
6	8

Marcando esses pares (x, y) no plano cartesiano, obtemos o gráfico da função.



RECONHECIMENTO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Observe os seguintes gráficos:

Gráfico I

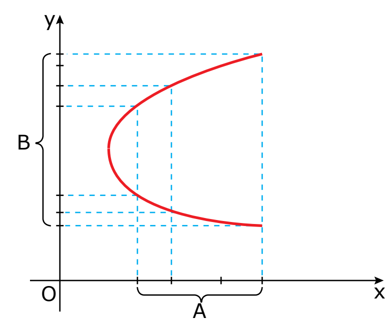
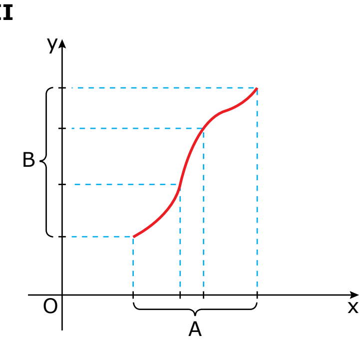


Gráfico II



Sejam **A** e **B** os intervalos numéricos destacados em cada gráfico.

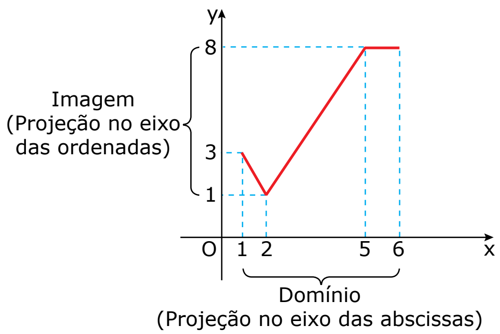
No gráfico I, existem elementos do conjunto **A** que estão relacionados com mais de um elemento do conjunto **B**. Portanto, tal gráfico não representa uma função de **A** em **B**.

No gráfico II, cada elemento de **A** está relacionado com um único elemento de **B**. Portanto, tal gráfico representa uma função de **A** em **B**.

De modo geral, para verificarmos se um gráfico representa uma função de **A** em **B**, basta traçarmos retas paralelas ao eixo Oy a partir dos elementos de **A**. Assim, se cada reta interceptar o gráfico em um único ponto, trata-se do gráfico de uma função.

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DO SEU GRÁFICO

Considere o gráfico da função a seguir:



Observe que a função está definida para um intervalo limitado de valores de **x**, a saber, o intervalo [1, 6]. Esse intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das abscissas, é o domínio da função. Os correspondentes valores de **y** são dados pelo intervalo [1, 8]. Esse intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das ordenadas, é a imagem da função.

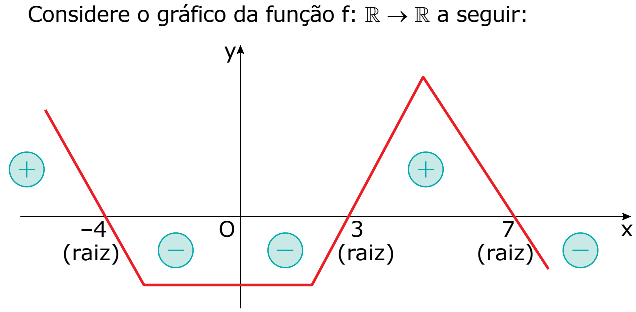
Portanto, temos domínio D = [1, 6] e imagem Im = [1, 8].

ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO

Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x** os correspondentes valores de **y** são negativos, nulos ou positivos.

Exemplo:

Considere o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir:



Analisando o gráfico anterior, temos:

i) Para $-4 < x < 3$ ou $x > 7$, os valores correspondentes de **y** são negativos. Apresentamos esse fato com os sinais de menos indicados no gráfico.

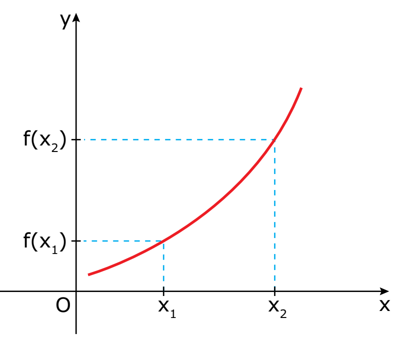
ii) Para $x = -4$, $x = 3$ ou $x = 7$, a ordenada correspondente é nula. Esses pontos são chamados raízes ou zeros da função.

iii) Para $x < -4$ ou $3 < x < 7$, os valores correspondentes de **y** são positivos. Apresentamos esse fato com os sinais de mais indicados no gráfico.

FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

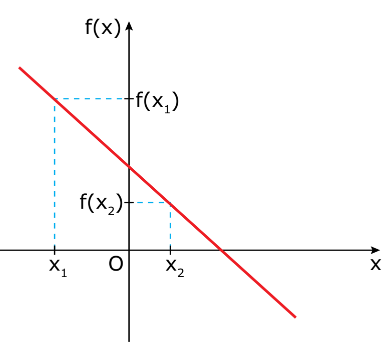
i) **Função crescente:** Uma função é dita crescente quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** também aumentam.

Exemplo:



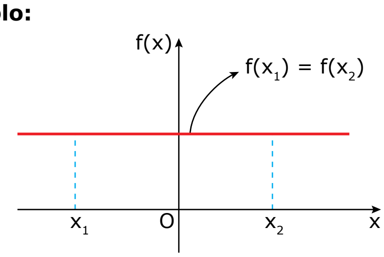
ii) **Função decrescente:** Uma função é dita decrescente quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** diminuem.

Exemplo:



iii) **Função constante:** Uma função é dita constante quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, temos $f(x_1) = f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** permanecem iguais.

Exemplo:

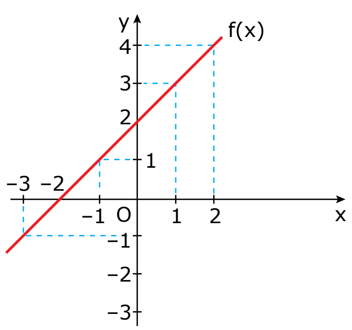


GRÁFICOS: TRANSLAÇÕES E REFLEXÕES

Em várias situações, é possível efetuar a construção de gráficos mais complexos a partir de translações ou reflexões de gráficos de funções mais simples.

1) Tomemos como exemplo o gráfico da função f(x) = x + 2, com domínio ℝ.

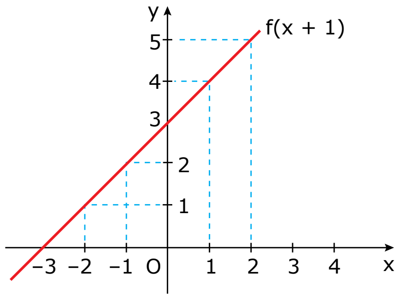
x	f(x) = x + 2
−3	−1
−2	0
−1	1
0	2
1	3
2	4



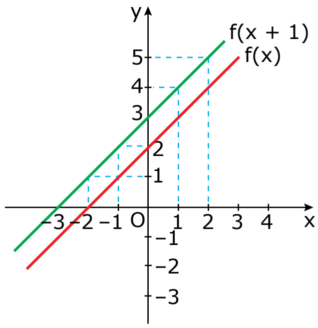
Como seria o gráfico da função f(x + 1) para todo **x** real? Para responder a essa pergunta, tomemos os seguintes valores tabelados:

x	f(x + 1) = (x + 1) + 2 = x + 3
−3	0
−2	1
−1	2
0	3
1	4
2	5

O gráfico correspondente é:



Observe que o gráfico da função f(x + 1) equivale ao gráfico da função f(x) deslocado uma unidade para a esquerda. Portanto, o gráfico de f(x + 1) é obtido pela translação de uma unidade para a esquerda do gráfico de f(x).

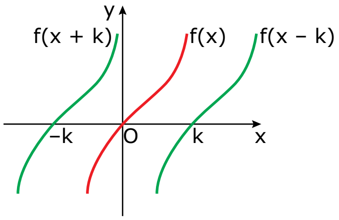


De maneira geral, seja o gráfico de uma função f(x) com domínio ℝ e **k** um número real positivo. Assim, temos:

i) O gráfico da função f(x + k) é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para a esquerda.**

ii) O gráfico da função f(x − k) é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para a direita.**

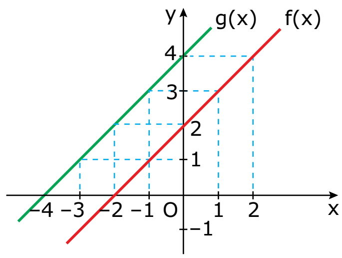
Exemplo:



2) Considere, agora, o gráfico da função f(x) = x + 2 para todo **x** real. Seja uma função g: ℝ → ℝ dada por g(x) = 2 + f(x). Assim, temos:

x	f(x) = x + 2	g(x) = 2 + f(x)
−3	−1	1
−2	0	2
−1	1	3
0	2	4
1	3	5
2	4	6

Na figura a seguir, encontram-se representados os gráficos das funções f(x) e g(x) em um mesmo sistema cartesiano.



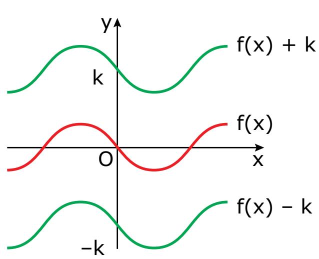
Observe que o gráfico de g(x) é obtido pela translação do gráfico de f(x) duas unidades para cima.

Generalizando, seja o gráfico de uma função f(x) com domínio $\mathbb{R}$ e **k** um número real positivo. Assim, temos:

i) O gráfico da função g(x) = f(x) + k é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para cima**.

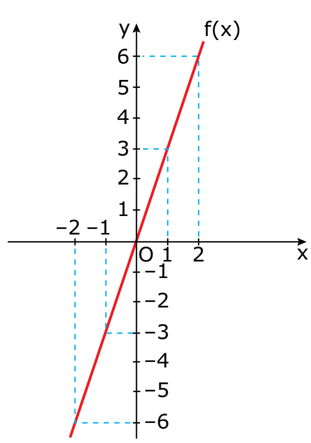
ii) O gráfico da função g(x) = f(x) – k é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para baixo**.

Exemplo:



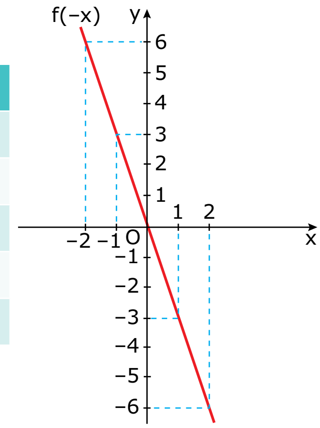
3) Considere, a seguir, o gráfico da função f(x) = 3x com domínio $\mathbb{R}$.

x	f(x) = 3x
–2	–6
–1	–3
0	0
1	3
2	6



Agora, vamos construir o gráfico da função f(–x) para todo **x** real.

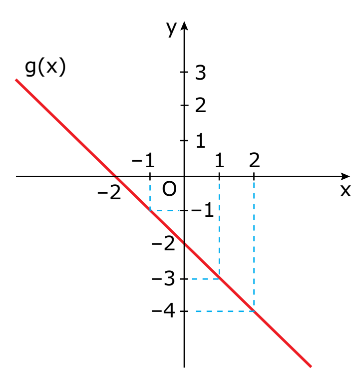
x	f(–x) = 3(–x) = –3x
–2	6
–1	3
0	0
1	–3
2	–6



Observe que o gráfico da função f(–x) é obtido por uma **reflexão**, em relação ao eixo y, do gráfico da função f(x).

4) Novamente, vamos utilizar o exemplo da função f(x) = x + 2, cujo gráfico foi representado no item 1. A partir desse exemplo, vamos construir o gráfico da função g(x) = –f(x).

x	f(x) = x + 2	g(x) = –f(x)
–2	0	0
–1	1	–1
0	2	–2
1	3	–3
2	4	–4

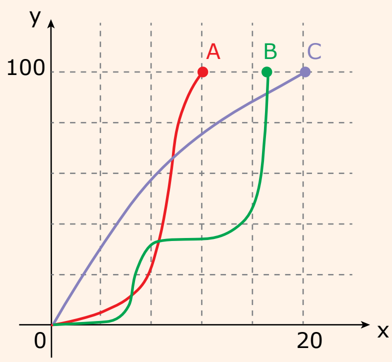


Observe que o gráfico da função –f(x) é obtido por uma **reflexão**, em relação ao eixo x, do gráfico da função f(x).

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Albert Einstein–2022) Alberto (A), Bernardo (B) e César (C) apostaram uma corrida de 100 metros. O gráfico do desempenho de cada um, com **y** sendo a distância percorrida, em metros, e **x** o tempo, em segundos, é mostrado a seguir.



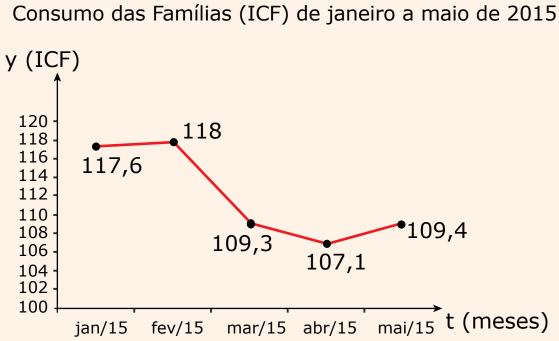
A respeito do desempenho comparado dos três nessa corrida, é correto afirmar que:

A) Após 60 metros de corrida não houve mais trocas de posições entre os três.
B) A taxa de crescimento da velocidade do vencedor é constante.
C) Após 8 segundos de corrida de corrida não houve mais trocas de posições entre os três.
D) Bernardo conquistou o segundo lugar por mais de 4 segundos de diferença para o terceiro.
E) Alberto foi o vencedor e César o último colocado.

02. 4IML (CEFET-MG) Seja a função real $f(x) = \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{3 + \dfrac{3}{4 + x}}}$, $x \neq -4$. O valor de f(5) é uma fração racional equivalente a:

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{5}{13}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) $\dfrac{13}{5}$

03. 6C1R (CEFET-MG) O gráfico a seguir mostra a Intenção de Consumo das Famílias (ICF) de janeiro a maio de 2015.



Disponível em: http://www.dm.com.br/economia/2015/05/comercio-esperafaturar-mais-no-mes-dos-namorados-revela-presidente-da-fecomercio.html. Acesso em: 28 ago. 2015 (Adaptação).

Se este gráfico representa uma função **f** que mostra o valor da ICF em função do tempo, de janeiro a maio, então seu conjunto imagem é:

A) Im{f} = [107,1; 118]
B) Im{f} = [jan/15; mai/15]
C) Im{f} = {107,1; 109,3; 117,6; 118}
D) Im{f} = {jan/15; fev/15; mar/15; abr/15; mai/15}

04. 1IQJ (UFF-RJ) Em Mecânica Clássica, a norma **G** do campo gravitacional gerado por um corpo de massa **m** em um ponto a uma distância d > 0 do corpo é diretamente proporcional a **m** e inversamente proporcional ao quadrado de **d**.

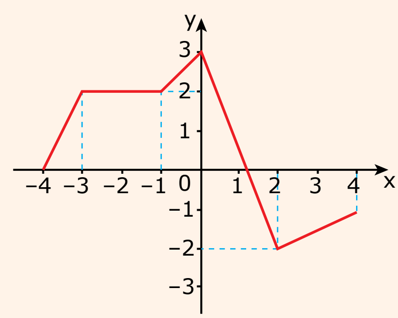
Seja G = f(d) a função que descreve a norma **G** do campo gravitacional, gerado por um corpo de massa constante **m** em um ponto a uma distância d > 0 desse corpo.

É correto afirmar que f(2d) é igual a:

A) $\dfrac{f(d)}{4}$ C) 4f(d) E) f(d)

B) $\dfrac{f(d)}{2}$ D) 2f(d)

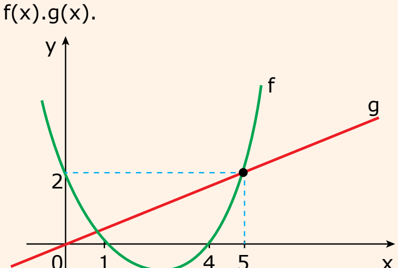
05. 3213 (CEFET-MG–2020) Considere o gráfico da função **f** definida no intervalo real [–4, 4].



A partir do gráfico de **f** representado, afirma-se, corretamente, que essa função

A) não possui raízes reais.
B) é constante no intervalo [–3, –1].
C) é crescente em todo intervalo [–4, 0].
D) tem o conjunto imagem igual a [–4, 4].

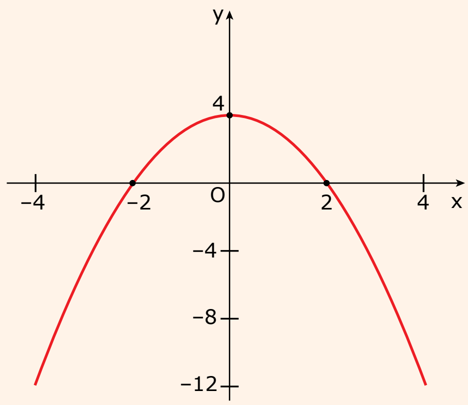
06. ZL21 (CEFET-MG) Na figura a seguir, estão representados os gráficos de duas funções reais, **f** e **g**, com domínios reais. Para cada x ∈ ℝ, a função **h** é definida por h(x) = f(x).g(x).



Nessas condições, o valor de h(5) é igual a:

A) 0 B) 4 C) 10 D) 25

07. GDEM (PUC RS) A função real **f** é definida por $f(x) = \sqrt{g(x)}$. A representação gráfica de **g** está na figura a seguir:



Determine o domínio da função **f**.

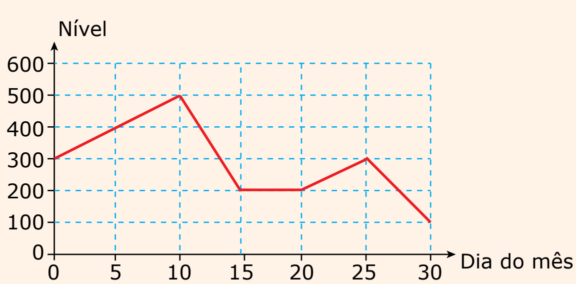
08. 7HW6 (UFMG) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(5x) = 5f(x)$ para todo número real **x**. Se $f(25) = 75$, então o valor de $f(1)$ é:

A) 3
B) 5
C) 15
D) 25
E) 45

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

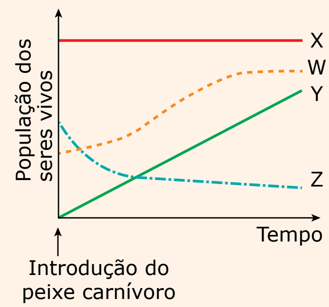
01. (Insper-SP) O gráfico a seguir mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



O período do mês em que as variações diárias do nível do reservatório, independentemente se para enchê-lo ou esvaziá-lo, foram as maiores foi

A) nos dez primeiros dias.
B) entre o dia 10 e o dia 15.
C) entre o dia 15 e o dia 20.
D) entre o dia 20 e o dia 25.
E) nos últimos cinco dias.

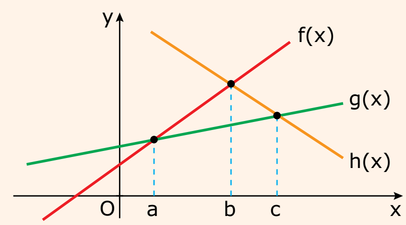
02. (UERJ) Em um ecossistema lacustre habitado por vários peixes de pequeno porte, foi introduzido um determinado peixe carnívoro. A presença desse predador provocou variação das populações de seres vivos ali existentes, conforme mostra o gráfico a seguir:



A curva que indica a tendência da variação da população de fitoplâncton nesse lago, após a introdução do peixe carnívoro, é a identificada por

A) W.
B) X.
C) Y.
D) Z.

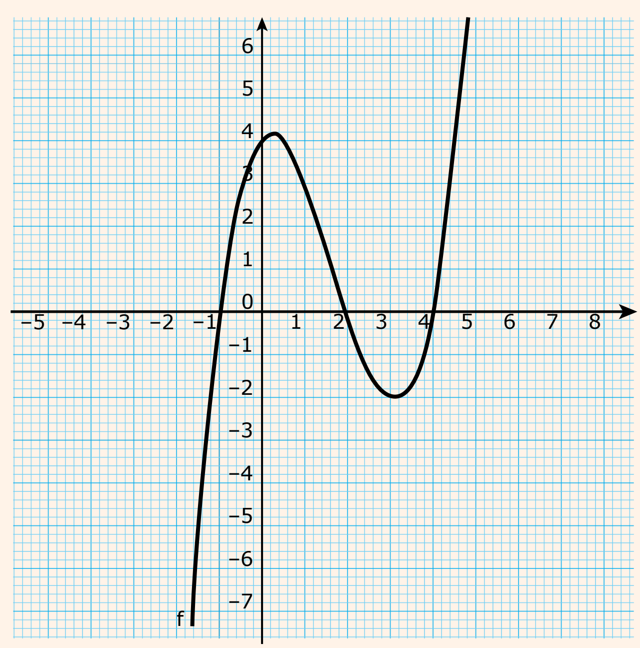
03. XNFJ (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, estão esboçados os gráficos das funções f(x), g(x) e h(x). A única afirmativa falsa é:

A) Para todo **x** tal que $x \leq a$ tem-se $g(x) \geq f(x)$.
B) Para todo **x** tal que $b \leq x \leq c$ tem-se $h(x) \geq g(x)$.
C) Para todo **x** tal que $a \leq x \leq c$ tem-se $h(x) \geq f(x)$.
D) Para todo **x** tal que $x \geq c$ tem-se $g(x) \geq h(x)$.

04. (PUC Rio–2022) Seja a função **f**, cujo gráfico está representado a seguir.



MATEMÁTICA

Assinale a alternativa correta:

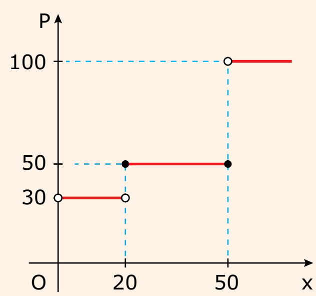
A) $f(2) + f(3) > 0$

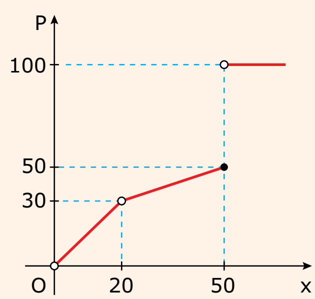
B) $f\left(\frac{1}{2}\right).f\left(\frac{5}{2}\right).f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$

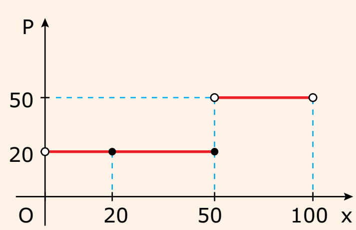
C) $f(1) . f(0) = 0$

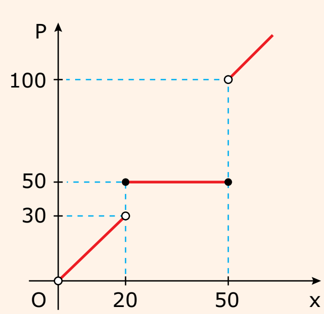
D) f não possui raízes reais

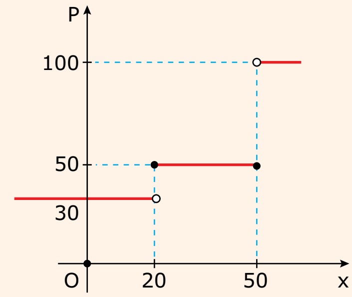
05. (PUC-Campinas-SP) Numa certa cidade, as agências de correio cobram R$ 0,30 na postagem de cartas até 20 g, exclusive; R$ 0,50 se o peso variar de 20 g a 50 g e R$ 1,00 se o peso for maior que 50 g. O gráfico da função que ao peso **x** da carta, em gramas, associa o preço **P** da postagem, em centavos, da carta é:

A)


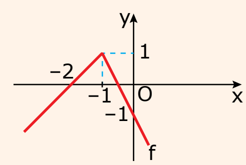
B)


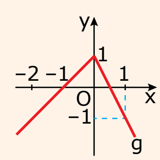
C)


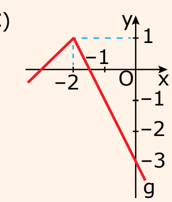
D)


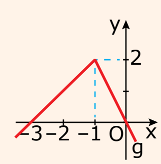
E)


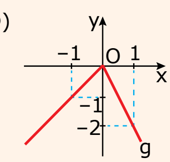
06. 5J9O (UFU-MG) Se **f** é uma função cujo gráfico é dado a seguir, então o gráfico da função **g**, tal que $g(x) = f(x - 1)$, será dado por:



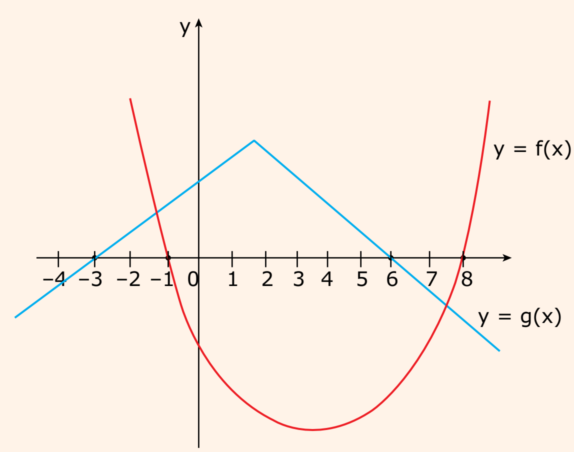
A)


C)


B)


D)


07. WQSØ (EsPCEx-SP) Na figura estão representados os gráficos das funções reais **f** (quadrática) e **g** (modular) definidas em $\mathbb{R}$. Todas as raízes das funções **f** e **g** também estão representadas na figura.



Desenho ilustrativo fora de escala

Sendo $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, assinale a alternativa que apresenta os intervalos em que **h** assume valores negativos.

A)]−3, −1] U]6, 8]

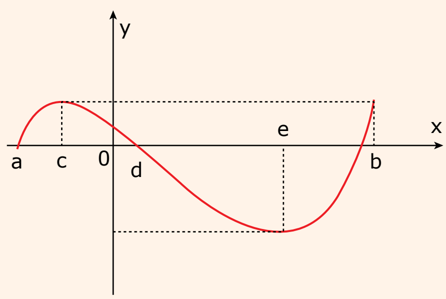
B)]−∞, −3[U]−1, 6[ ]8, + ∞[

C)]−∞, 2[U [4, + ∞[

D)]−∞, −3[U [−1, 2[U [7, + ∞[

E)]−3, −1] U [2, 4[U]6, 8]

08. (EsPCEx-SP) Na figura seguinte está representado o gráfico da função polinomial **f**, definida no intervalo real [a, b].



Desenho ilustrativo fora de escala

Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que

A) **f** é crescente no intervalo [a, 0].

B) f(x) ≤ f(e) para todo **x** no intervalo [d, b].

C) f(x) ≤ 0 para todo **x** no intervalo [c, 0].

D) a função **f** é decrescente no intervalo [c, e].

E) se x_1 [a, c] e x_2 [d, e] então $f(x_1) < f(x_2)$.

09. WCM8 (Mackenzie-SP) Considere a função **f** tal que para todo **x** real tem-se $f(x + 2) = 3f(x) + 2^x$. Se $f(-3) = \dfrac{1}{4}$ e $f(-1) = a$, então o valor de a^2 é:

A) $\dfrac{25}{36}$

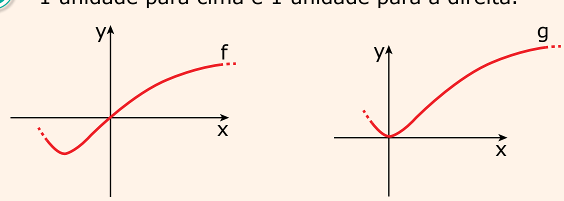
B) $\dfrac{36}{49}$

C) $\dfrac{64}{100}$

D) $\dfrac{16}{81}$

E) $\dfrac{49}{64}$

10. G33I (ESPM-RS) Na figura a seguir, o gráfico da função g(x) foi obtido pelo deslocamento do gráfico da função f(x) de 1 unidade para cima e 1 unidade para a direita.



Podemos concluir que:

A) g(x) = 1 + f(x)

B) g(x) = f(x + 1)

C) g(x) = 1 + f(x + 1)

D) g(x) = f(x − 1)

E) g(x) = 1 + f(x − 1)

11. QLTO (Mackenzie-SP) A função **f**, de domínio real mais amplo possível, é tal que $f(x) = \dfrac{ax + b - 5}{ax + 3b}$. Se f(3) não existe e f(−1) = 1, então o valor de $a^2 + b^2$ é

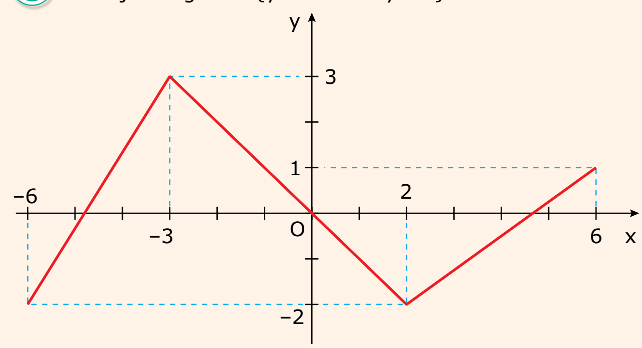
A) $\dfrac{25}{2}$.

B) $\dfrac{25}{4}$.

C) $\dfrac{5}{2}$.

D) $\dfrac{2}{25}$.

12. 4MM6 (UFMG) Na figura, está representado o gráfico da função y = f(x), cujo domínio é {x ∈ ℝ: −6 ≤ x ≤ 6}, e cuja imagem é {y ∈ ℝ: −2 ≤ y ≤ 3}.



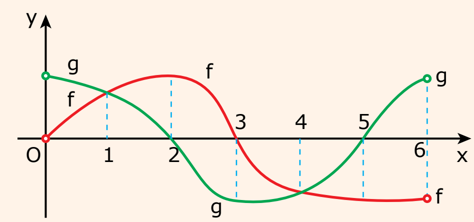
Sendo g(x) = f(x) + 2 e h(x) = f(x + 2),

A) determine g(0) e h(0).

B) esboce os gráficos de y = g(x) e y = h(x).

C) determine os domínios das funções **g** e **h**.

13. C2V5 (UFMG) Neste plano cartesiano, estão representados os gráficos das funções y = f(x) e y = g(x), ambas definidas no intervalo aberto]0, 6[.



Seja **S** o subconjunto de números reais definido por s = {x ∈ ℝ; f(x) . g(x) < 0}. Então, é correto afirmar que **S** é:

A) {x ∈ ℝ; 2 < x < 3} ∪ {x ∈ ℝ; 5 < x < 6}

B) {x ∈ ℝ; 1 < x < 2} ∪ {x ∈ ℝ; 4 < x < 5}

C) {x ∈ ℝ; 0 < x < 2} ∪ {x ∈ ℝ; 3 < x < 5}

D) {x ∈ ℝ; 0 < x < 1} ∪ {x ∈ ℝ; 3 < x < 6}

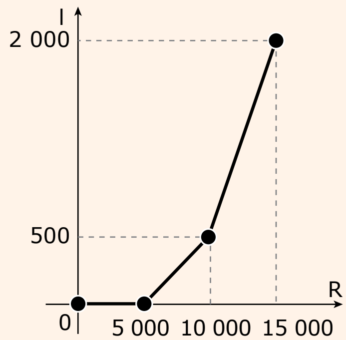
SEÇÃO ENEM

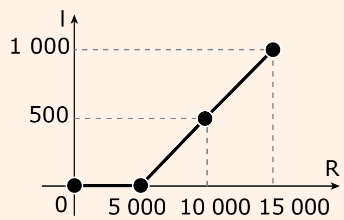
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

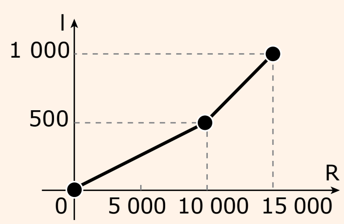
01. (Enem−2021) O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (I).

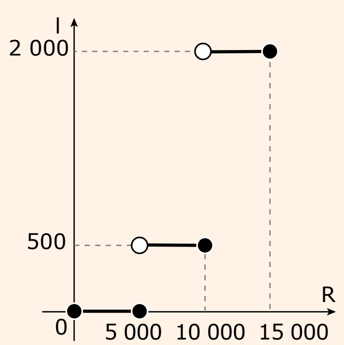
Preço do produto (R)	Imposto devido (I)
R ≤ 5 000	isento
5 000 < R ≤ 10 000	10% de (R − 5 000)
10 000 < R ≤ 15 000	500 + 30% de (R − 10 000)

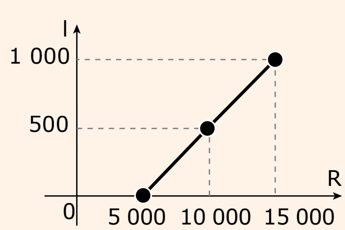
O gráfico que melhor representa essa relação é:

A) 

B) 

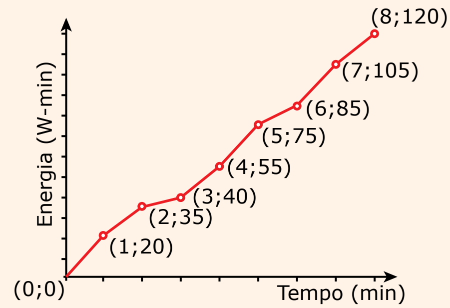
C) 

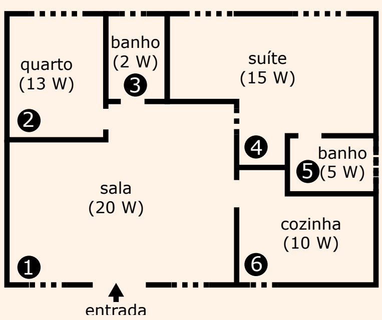
D) 

E) 

02. (Enem–2019) Nos seis cômodos de uma casa há sensores de presença posicionados de forma que a luz de cada cômodo acende assim que uma pessoa nele adentra, e apaga assim que a pessoa se retira desse cômodo. Suponha que o acendimento e o desligamento sejam instantâneos.

O morador dessa casa visitou alguns desses cômodos, ficando exatamente um minuto em cada um deles. O gráfico descreve o consumo acumulado de energia, em watt x minuto, em função do tempo **t**, em minuto, das lâmpadas de LED dessa casa, enquanto a figura apresenta a planta baixa da casa, na qual os cômodos estão numerados de 1 a 6, com as potências das respectivas lâmpadas indicadas.





A sequência de deslocamentos pelos cômodos, conforme o consumo de energia apresentado no gráfico, é:

A) 1 → 4 → 5 → 4 → 1 → 6 → 1 → 4

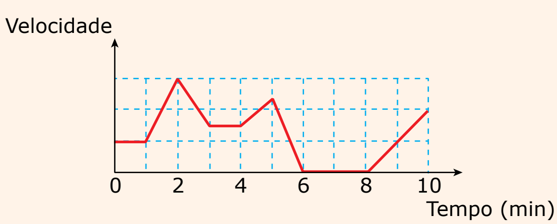
B) 1 → 2 → 3 → 1 → 4 → 1 → 4 → 4

C) 1 → 4 → 5 → 4 → 1 → 6 → 1 → 2 → 3

D) 1 → 2 → 3 → 5 → 4 → 1 → 6 → 1 → 4

E) 1 → 4 → 2 → 3 → 5 → 1 → 6 → 1 → 4

03. SEPT (Enem) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

A) 4

B) 3

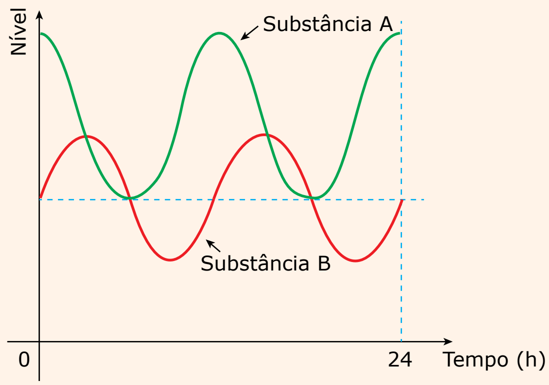
C) 2

D) 1

E) 0

04. TKRM

(Enem) Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura.



Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo número de vezes em que os níveis de A e de B forem iguais, porém, maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.

Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes.

O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a

A) 28.

B) 21.

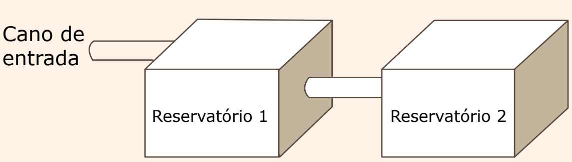
C) 2.

D) 7.

E) 14.

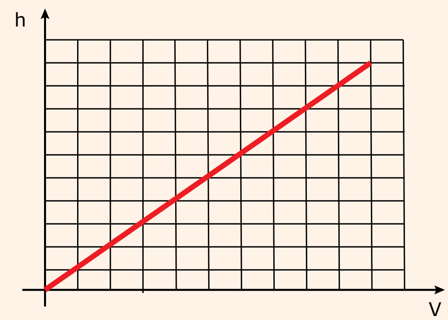
05. 1GOO

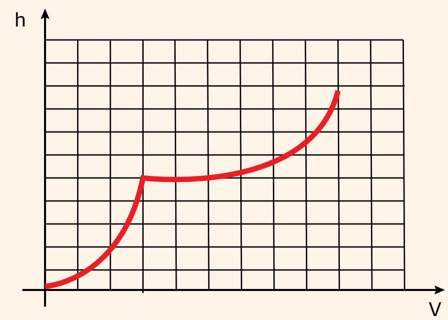
(Enem) A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

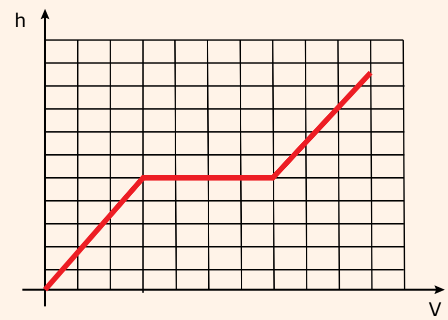


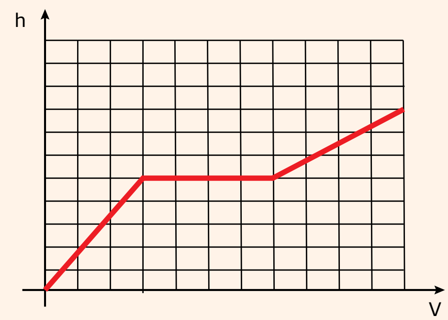
A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

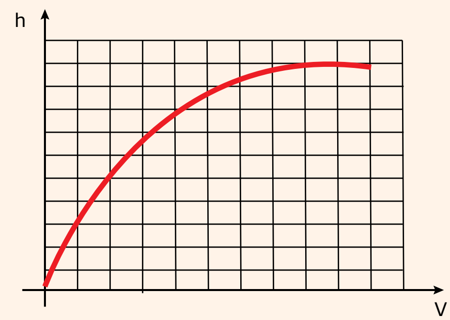
Qual dos gráficos melhor descreverá a altura **h** do nível da água no Reservatório 1, em função do volume **V** de água no sistema?

A)


B)


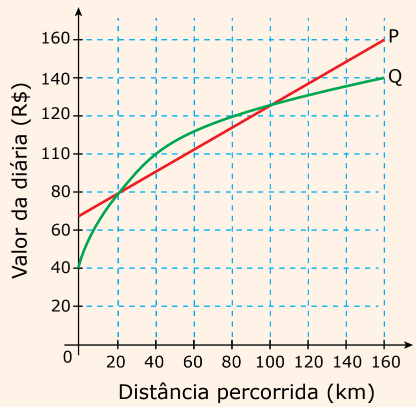
C)


D)


E)


06. (Enem) Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis.

Nas locadoras **P** e **Q**, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



Disponível em: sempretops.com. Acesso em: 7 ago. 2012.

O valor pago na locadora **Q** é menor ou igual àquele pago nas locadoras **P** para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

A) De 20 a 100.

B) De 80 a 130.

C) De 100 a 160.

D) De 0 a 20 e de 100 a 160.

E) De 40 a 80 e de 130 a 160.

07. 74UW

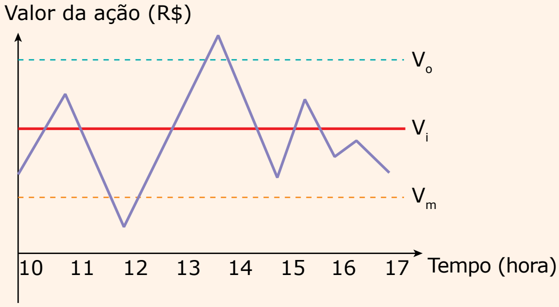
(Enem) Um investidor inicia um dia com x ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal (V_i);

II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (V_m);

III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (V_o).

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



Quantas operações o investidor fez naquele dia?

A) 3 C) 5 E) 7

B) 4 D) 6

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. B
03. A
04. A
05. B
06. B
07. $-2 \le x \le 2$
08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

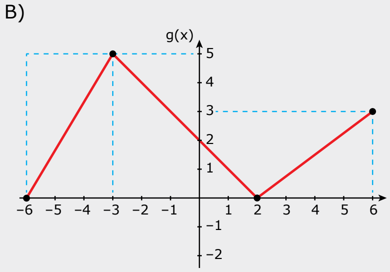
01. B
02. A
03. C
04. B
05. A
06. A
07. B
08. D
09. E
10. E
11. A

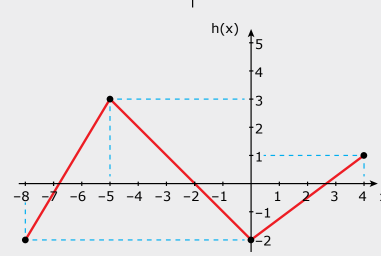
12.

A) $g(0) = 2$

$h(0) = -2$

B)





C) $D(g) = [-6, 6]$

$D(h) = [-8, 4]$

13. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. A
03. C
04. E
05. D
06. D
07. B

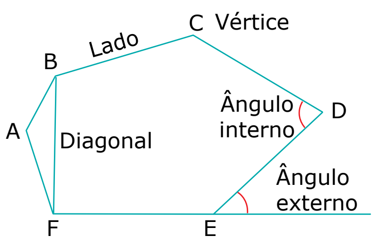
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Polígonos

POLÍGONO

Um polígono é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta (não colineares dois a dois), tais que cada extremidade de qualquer um deles é comum a apenas um outro.

A seguir, temos um polígono com seis lados (hexágono) e seus principais elementos:



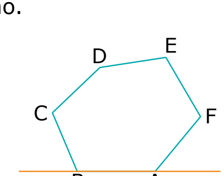
A tabela a seguir mostra os nomes que recebem os polígonos, conforme o seu número **n** de lados (ou de vértices).

Nº de lados (Nº de vértices)	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Aos demais polígonos, não daremos nomes especiais, referindo-nos a eles explicitando o seu número de lados.

Polígono convexo

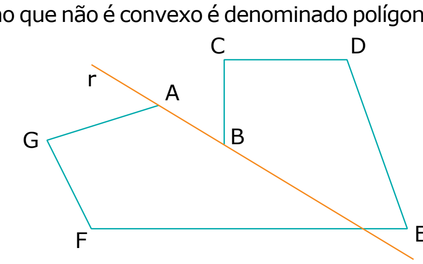
Observe que a reta **r**, que contém o lado $\overline{AB}$ do hexágono a seguir, isola, em um mesmo semiplano, todos os demais lados do hexágono.



O mesmo acontece com as retas que contêm qualquer um dos outros lados. Por isso, dizemos que esse hexágono é convexo.

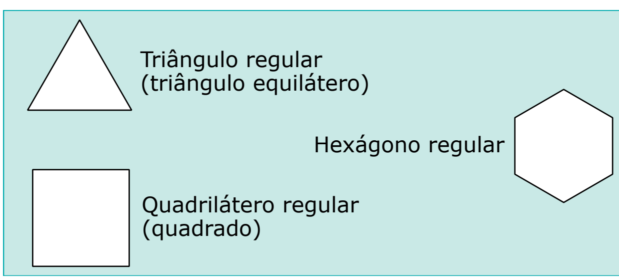
Um polígono é **convexo** se, e somente se, as retas que contêm qualquer um de seus lados deixam todos os demais lados contidos em um mesmo semiplano.

Observando o polígono ABCDEFG, constatamos que ele não é convexo, pois a reta **r**, que contém o lado $\overline{AB}$, não deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano. O polígono que não é convexo é denominado polígono **côncavo**.



Polígono regular

Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si (equilátero) e todos os ângulos internos congruentes entre si (equiângulo) é chamado de **polígono regular**.



DIAGONAIS E SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

Se um polígono tem **n** lados, $n \geq 3$, então ele possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.	$d = \frac{n(n-3)}{2}$
A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é $(n - 2)180°$.	$S_i = (n - 2)180°$
A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°.	$S_e = 360°$

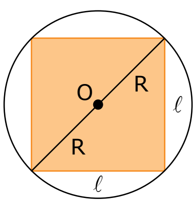
CIRCUNFERÊNCIAS CIRCUNSCRITA E INSCRITA EM POLÍGONOS REGULARES

Todo polígono regular admite a circunferência circunscrita (aquela que passa por todos os vértices do polígono) e a circunferência inscrita (aquela que tangencia todos os lados do polígono). Essas duas circunferências têm o mesmo centro **O**, chamado também de centro do polígono regular.

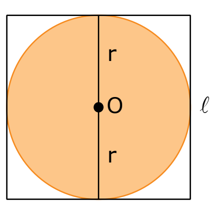
Vamos estudar o cálculo das medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita em alguns polígonos regulares. Ao raio da circunferência inscrita em um polígono regular, damos o nome de apótema.

Quadrado

A medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $\ell\sqrt{2}$. Portanto, temos:



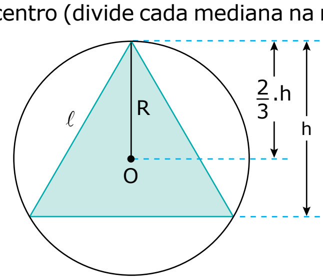
Raio **R** da circunferência circunscrita: $\boxed{R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}}$



Raio **r** da circunferência inscrita (apótema): $\boxed{r = \dfrac{\ell}{2}}$

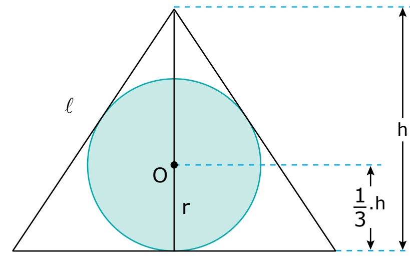
Triângulo equilátero

A medida da altura **h** de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Como, no triângulo equilátero, as alturas estão contidas nas mediatrizes e coincidem com as bissetrizes e com as medianas, temos que o ponto comum às alturas é circuncentro (centro da circunferência circunscrita), é, também, incentro (centro da circunferência inscrita) e, também, baricentro (divide cada mediana na razão 2 para 1).



Raio **R** da circunferência circunscrita:

$$R = \frac{2}{3}.h \Rightarrow R = \frac{2}{3}.\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}}$$

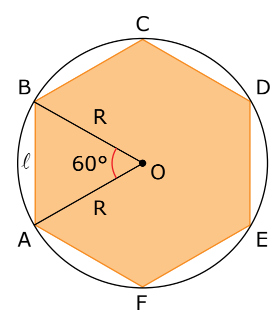


Raio **r** da circunferência inscrita:

$$r = \frac{1}{3}.h \Rightarrow r = \frac{1}{3}.\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}}$$

Hexágono regular

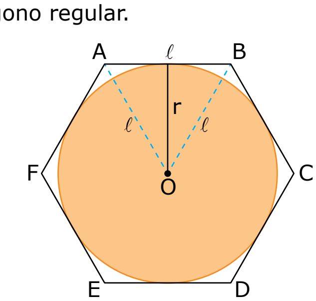
Os vértices de um hexágono regular dividem a circunferência circunscrita em seis arcos congruentes; logo, cada um desses arcos mede 60°. Assim, o ângulo central correspondente a cada um desses arcos também mede 60°.



Como AO = OB e $A\hat{O}B = 60°$, temos que $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 60°$ e, portanto, o triângulo AOB é equilátero. Sendo ℓ a medida do lado desse hexágono, concluímos que o raio **R** da circunferência circunscrita é:

$$\boxed{R = \ell}$$

Vamos analisar o caso em que a circunferência está inscrita em um hexágono regular.



Como **r** é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, então o raio **r** da circunferência inscrita (apótema) mede:

$$\boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

ÂNGULOS EM POLÍGONOS REGULARES

Ângulo cêntrico

Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular são congruentes. Então, a medida de cada um deles é dada por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Ângulo interno

Como o polígono regular possui os **n** ângulos congruentes, a medida de cada um deles é dada por:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)180°}{n}$$

Ângulo externo

Como todos os ângulos externos são congruentes, a medida de cada um dos **n** ângulos externos é dada por:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UNITAU-SP) O polígono regular convexo em que o número de lados é igual ao número de diagonais é o

A) dodecágono.

B) pentágono.

C) decágono.

D) hexágono.

E) heptágono.

Resolução:

Admitindo que **n** seja o número de lados de um polígono e **d** o número de diagonais, temos:

$$n = d \Rightarrow n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 2n = n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow$$

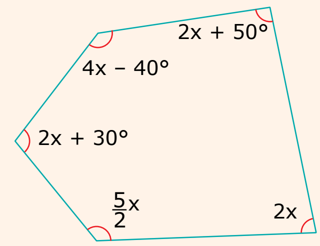
$$n(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{n = 0} \text{ (não convém)} \\ n = 5 \end{cases}$$

Logo, o valor de **n** é 5, sendo o polígono regular um pentágono.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. ATD9 (UTFPR) O valor de **x** no pentágono a seguir é igual a



A) 25°.

B) 40°.

C) 250°.

D) 540°.

E) 1 000°.

02. DNPF (UECE) Se, em um polígono convexo, o número de lados **n** é um terço do número de diagonais, então o valor de **n** é:

A) 9

B) 11

C) 13

D) 15

03. (IFCE) Um hexágono convexo possui três ângulos internos retos e outros três que medem **y** graus cada. O valor de **y** é

A) 135.

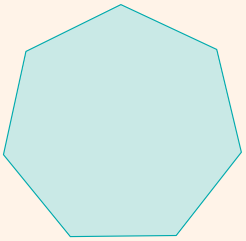
B) 150.

C) 120.

D) 60.

E) 30.

04. SFCQ (IFSP) Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era "quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?"



Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo

A) 720°.

B) 900°.

C) 540°.

D) 1 080°.

E) 630°.

MATEMÁTICA

05. AZFW (UTFPR) Os ângulos externos de um polígono regular medem 15°. O número de diagonais desse polígono é:

A) 56
B) 24
C) 252
D) 128
E) 168

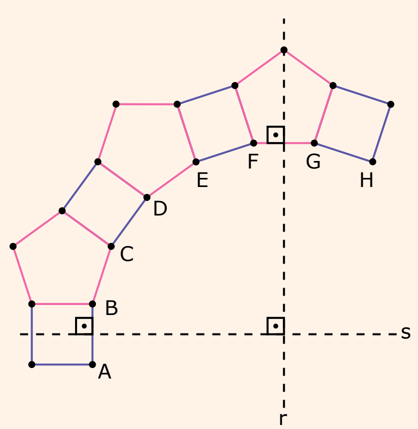
06. JLV2 (IFSul) Sabe-se que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular é 144°, então qual é o número de diagonais de tal polígono?

A) 10
B) 14
C) 35
D) 72

07. QN19 (IFCE) Um robô, caminhando em linha reta, parte de um ponto **A** em direção a um ponto **B**, que distam entre si cinco metros. Ao chegar ao ponto **B**, gira novamente 60° à esquerda e caminha mais cinco metros, repetindo o movimento e o giro até retornar ao ponto de origem. O percurso do robô formará um polígono regular de

A) 10 lados.
B) 9 lados.
C) 8 lados.
D) 7 lados.
E) 6 lados.

08. YUHP (UERJ–2020) Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir:



Acrescentam-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular ABCDEFGH...A, que possui dois eixos de simetria indicados pelas retas **r** e **s**.

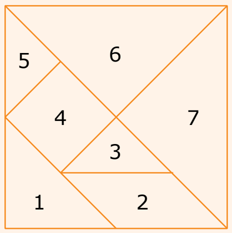
Se as retas perpendiculares r e s são mediatrizes dos lados AB e FG, o número de lados do polígono ABCDEFGH...A é igual a:

A) 18
B) 20
C) 24
D) 30

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFPE) O tangram é um quebra-cabeça formado por sete peças, como mostra a figura a seguir:



1. Triângulo retângulo e isósceles médio.
2. Paralelogramo.
3 e 5. Triângulos retângulos e isósceles pequenos (congruentes).
4. Quadrado.
6 e 7. Triângulos retângulos e isósceles grandes (congruentes).

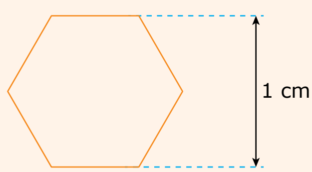
Somando os ângulos internos de todas as sete peças do tangram, teremos o seguinte resultado:

A) 1 620°
B) 1 530°
C) 980°
D) 720°
E) 360°

02. (IFAL) Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

A) 12 m
B) 18 m
C) 24 m
D) 30 m
E) 36 m

03. 8G2T (PUC RS) Para uma engrenagem mecânica, deseja-se fazer uma peça de formato hexagonal regular. A distância entre os lados paralelos é de 1 cm, conforme a figura a seguir:

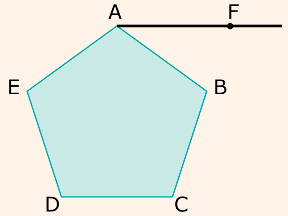


O lado desse hexágono mede _______ cm.

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
E) 1

04. F0F7

(Unimontes-MG) Na figura a seguir, temos um pentágono regular ABCDE. Se as retas $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{AF}$ são paralelas, podemos afirmar que a medida do ângulo $B\hat{A}F$ vale



A) 32°.

B) 72°.

C) 36°.

D) 54°.

05. HPJH

(UECE–2019) Considere MXYZW um pentágono regular e XYO um triângulo equilátero em seu interior (o vértice O está no interior do pentágono). Nessas condições, a medida, em graus, do ângulo $X\hat{O}Z$ é

A) 116.

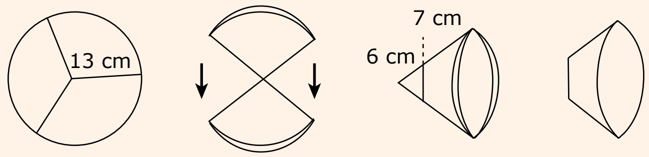
B) 96.

C) 126.

D) 106.

06. IP7E

(CMMG–2021) Durante a pandemia de covid-19, uma costureira planejou confeccionar máscaras de tecido duplo. Para realizar a tarefa, comprou 80 cm de tecido de algodão de 1 m e 30 cm de largura e o dividiu em círculos de 13 cm de raio.



As etapas envolvidas no processo, ilustradas na figura, indicam que:

I. Cada um dos discos obtidos foi dividido em três setores circulares.

II. 4 setores circulares sobrepostos dois a dois são costurados ao longo do raio e do comprimento, formando um cone.

III. A peça confeccionada é recortada a 6 cm de seu vértice e costurada numa linha paralela ao diâmetro do cone.

IV. Uma das peças obtidas fornece a máscara projetada.

Seguindo as etapas descritas, a costureira produzirá, aproximadamente,

A) 11 máscaras.

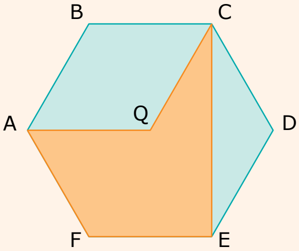
B) 15 máscaras.

C) 22 máscaras.

D) 30 máscaras.

07. 15J0

(FGV) Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm, e Q é o centro da circunferência inscrita a ele. O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a:



A) $4 + \sqrt{2}$

B) $4 + \sqrt{3}$

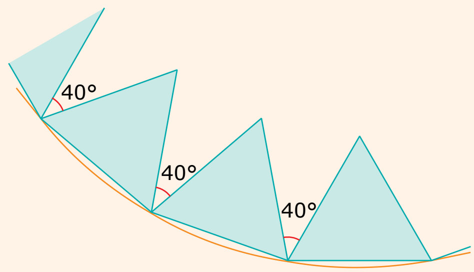
C) 6

D) $4 + \sqrt{5}$

E) $2(2 + \sqrt{2})$

08. W370

(UFRGS-RS) Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura a seguir:



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40°, como indicado na figura. Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é:

A) 10

B) 12

C) 14

D) 16

E) 18

09. H08K

(ESPM-SP) Os pontos A, B, C e D são vértices consecutivos de um polígono regular com 20 diagonais, cujo lado mede 1. O comprimento do segmento AD é igual a:

A) $\sqrt{2}$

B) $1 + \sqrt{2}$

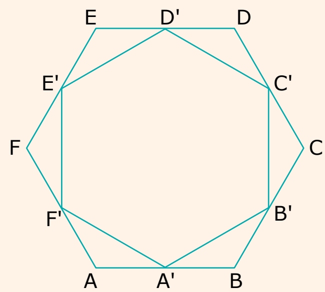
C) $2\sqrt{2} - 1$

D) $2\sqrt{2} + 1$

E) $2\sqrt{2}$

MATEMÁTICA

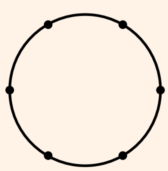
10. PK2P
(CEFET-MG) Considere um hexágono regular ABCDEF. A partir dos pontos médios dos lados traça-se um novo hexágono A'B'C'D'E'F'.



A medida do ângulo BÂ'B', em graus, é

A) 20. B) 30. C) 40. D) 60.

11. XGWV
(UEG-GO) A melhor maneira de alocarmos pontos igualmente espaçados em um círculo é escrevê-los nos vértices de polígonos regulares, conforme a figura a seguir exemplifica com 6 pontos.



Para alocarmos 36 pontos igualmente espaçados em um círculo de raio 1, a distância mínima entre eles deve ser aproximadamente

Use sen(5°) = 0,08

A) 0,12.
B) 0,11.
C) 0,16.
D) 0,14.
E) 0,19.

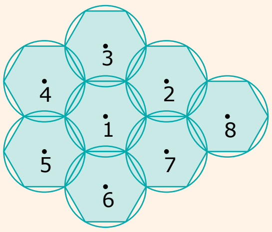
12. (UECE) No quadrilátero XYZW, as medidas dos ângulos internos Z e W são respectivamente 128 graus e 76 graus. Se as bissetrizes dos ângulos internos X e Y cortam-se no ponto O, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo XOY é igual a

A) 156 graus.
B) 78 graus.
C) 204 graus.
D) 102 graus.

13. RSV6
(Insper-SP) Um polígono regular possui n lados, sendo n um número par maior ou igual a 4. Uma pessoa uniu dois vértices desse polígono por meio de um segmento de reta, dividindo-o em dois polígonos convexos P1 e P2, congruentes entre si. O número de lados do polígono P1 é igual a:

A) $\frac{n}{2} + 2$
B) $\frac{n}{2} + 1$
C) $\frac{n}{2}$
D) $\frac{n}{2} - 1$
E) $\frac{n}{2} - 2$

14. NMF7
(UFF-RJ) No estudo da distribuição de torres em uma rede de telefonia celular, é comum se encontrar um modelo no qual as torres de transmissão estão localizadas nos centros de hexágonos regulares, congruentes, justapostos e inscritos em círculos, como na figura a seguir:



Supondo que, nessa figura, o raio de cada círculo seja igual a 1 km, é correto afirmar que a distância $d_{3,8}$ (entre as torres 3 e 8), a distância $d_{3,5}$ (entre as torres 3 e 5) e a distância $d_{5,8}$ (entre as torres 5 e 8) são, respectivamente, em km, iguais a:

A) $d_{3,8} = 2\sqrt{3},\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = 3 + 2\sqrt{3}$

B) $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = 5$

C) $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ d_{5,8} = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $d_{3,8} = 2\sqrt{3},\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = \sqrt{21}$

E) $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ d_{5,8} = \frac{9}{2}$

15. AØAP
(UFRGS-RS) Um hexágono regular tem lado de comprimento 1. A soma dos quadrados de todas as suas diagonais é:

A) 6
B) 12
C) 18
D) 24
E) 30

16. CSAV
(UECE) Sejam P e Q polígonos regulares. Se P é um hexágono e se o número de diagonais do Q, partindo de um vértice, é igual ao número total de diagonais de P, então a medida de cada um dos ângulos internos de Q é

A) 144 graus.
B) 150 graus.
C) 156 graus.
D) 162 graus.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. UKVJ
(Enem) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

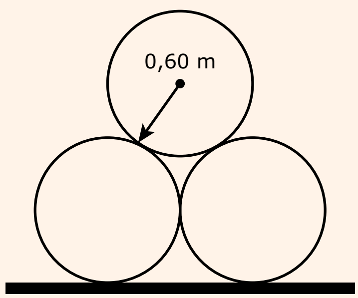
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro--Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital.

Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (Adaptação).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Observação: Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

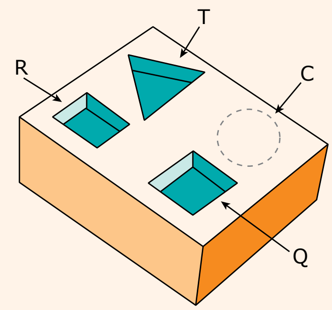
A) 2,82 C) 3,70 E) 4,20

B) 3,52 D) 4,02

02. B8BJ

(Enem) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C).

O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



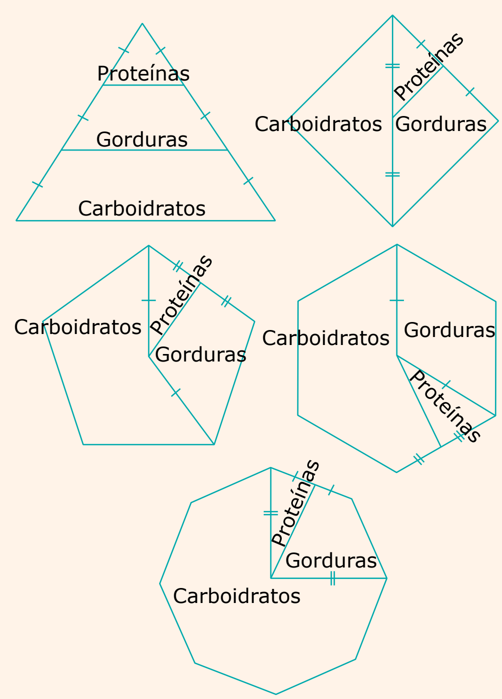
Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

A) I C) III E) V

B) II D) IV

03. (Enem) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

A) triângulo. D) hexágono.

B) losango. E) octógono.

C) pentágono.

04. (Enem) Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida **R** do raio adequado para a plataforma em termos da medida **L** do lado da base da estátua.

Qual relação entre **R** e **L** o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

A) $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$

B) $R \geq \frac{2L}{\pi}$

C) $R \geq \frac{L}{\sqrt{\pi}}$

D) $R \geq \frac{L}{2}$

E) $R \geq \frac{L}{2\sqrt{2}}$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. B
- 04. B
- 05. C
- 06. C
- 07. E
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. B
- 04. C
- 05. C
- 06. A
- 07. B
- 08. E
- 09. B
- 10. B
- 11. C
- 12. D
- 13. B
- 14. D
- 15. E
- 16. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. C
- 04. A

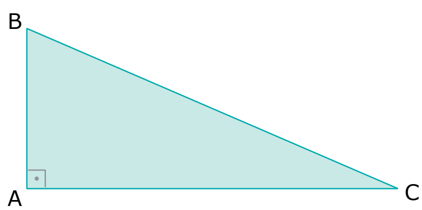
Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Trigonometria no Triângulo Retângulo

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um ângulo reto.

Na figura, $B\hat{A}C$ é reto. Costumamos dizer que o triângulo ABC é retângulo em **A**.

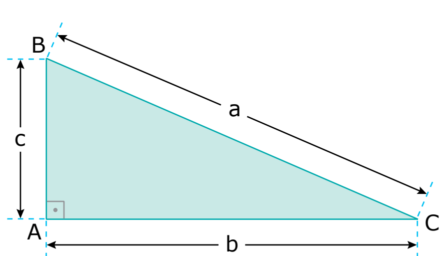


Em todo triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, e os ângulos agudos são denominados **complementares**.

TEOREMA DE PITÁGORAS

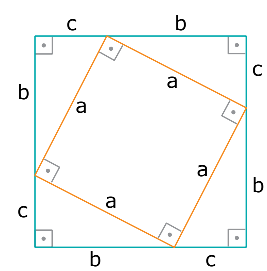
> Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Na figura, **b** e **c** são as medidas dos catetos; e **a**, a medida da hipotenusa. Assim, temos:



$$\boxed{c^2 + b^2 = a^2}$$

A demonstração formal do Teorema de Pitágoras pode ser feita a partir das relações métricas no triângulo retângulo. Oferecemos, aqui, apenas uma ideia de como obter tal resultado, utilizando um quadrado (de lado b + c), subdividido em quatro triângulos retângulos (de lados **a**, **b** e **c**), e um quadrado menor (de lado **a**).



Somando as áreas dos quatro triângulos retângulos e do quadrado menor, obtemos a área do quadrado maior. Logo:

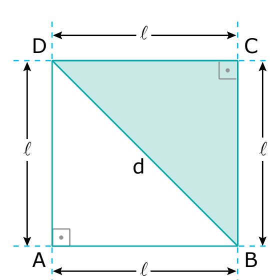
$$4.\frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2 \Rightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Aplicações

Vamos deduzir, num quadrado, a relação entre as medidas **d** de uma diagonal e ℓ de um lado e, num triângulo equilátero, a relação entre as medidas **h** de uma altura e ℓ de um lado.

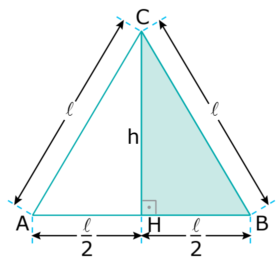
Diagonal do quadrado



No triângulo BCD, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Altura do triângulo equilátero



No triângulo HBC, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

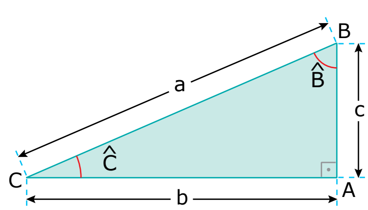
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

i) Seno: Em todo triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

ii) Cosseno: Em todo triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

iii) Tangente: Em todo triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Num triângulo ABC, retângulo em **A**, vamos indicar por $\hat{B}$ e $\hat{C}$ as medidas dos ângulos internos, respectivamente, de vértices **B** e **C**.

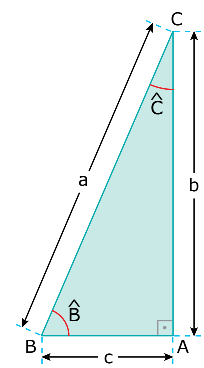


	$\hat{B}$	$\hat{C}$
Seno (sen)	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
Cosseno (cos)	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$
Tangente (tg)	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$

Utilizando o quadrado e o triângulo equilátero, é possível construir uma tabela com os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos 30°, 45° e 60°.

α	**30°**	**45°**	**60°**
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO E TANGENTE



Na figura, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a},\ \cos\hat{C} = \frac{b}{a},\ \text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b}$$

Dividindo sen $\hat{B}$ por cos $\hat{B}$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\hat{B}$$

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}}$$

Portanto, a tangente de um ângulo é o quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo.

Dividindo os membros de $b^2 + c^2 = a^2$ por a^2, temos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por sen $\hat{B}$, e $\frac{c}{a}$ por cos $\hat{B}$, obtemos:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1}$$

Portanto, a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo é igual a 1.

Observamos ainda que sen $\hat{B}$ = cos $\hat{C}$ e sen $\hat{C}$ = cos $\hat{B}$.

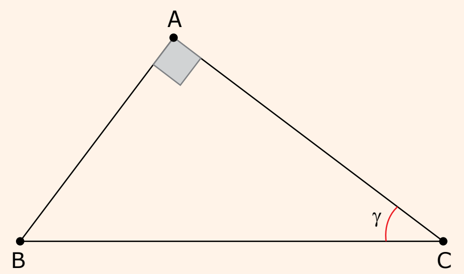
Portanto, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complemento desse ângulo e vice-versa.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$
$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

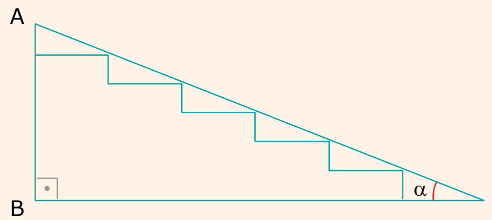
01. (PUC Rio–2022) O triângulo ABC é retângulo em A. Seja $\gamma = A\hat{C}B$. Sabe-se que a hipotenusa BC mede 20 e que $\text{tg}\ \gamma = \frac{3}{4}$.



Quanto mede o cateto AB?

A) 12
B) 15
C) 16
D) 25

02. N58R (Vunesp) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão e a mesma altura. Se AB = 2 m e α mede 30°, então a medida da extensão de cada degrau é:

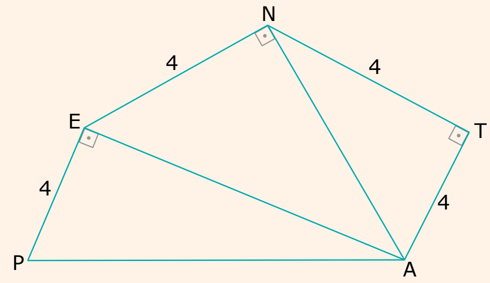


A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m
B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m
C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

03. ECR4 (UFSC) Um observador, a 100 metros de uma torre e com a cabeça ao nível da base desta, enxerga o topo da torre inclinando a cabeça em um ângulo de 30°. A altura da torre é:

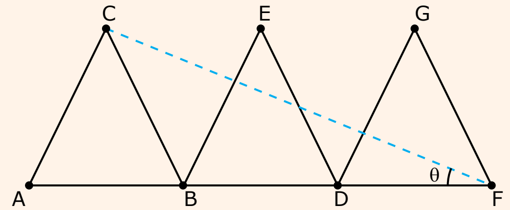
A) 100.tg 30° m
B) 100.sen 30° m
C) 100.cos 30° m
D) 100.tg 60° m
E) $100\sqrt{2}$.tg 30° m

04. 8JEU (UFPA) O perímetro, em cm, do pentágono PENTA da figura é igual a:

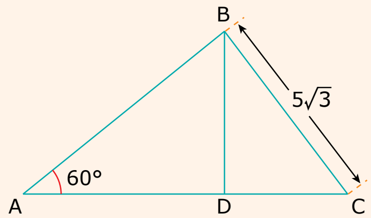


A) 16
B) 24
C) 32
D) 64
E) 80

05. EUXE (CEFET-RJ) Três triângulos equiláteros de lado 1 cm estão enfileirados como indicado na figura. Nessas condições, determine o seno do ângulo θ.



06. AC40 (CEFET-MG) O triângulo ABC é retângulo em $A\hat{B}C$ e os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares.



Assim, a medida do segmento $\overline{DC}$ vale:

A) $10\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $\frac{15}{2}$
D) $\frac{13}{2}$

07. (PUC-Campinas-SP) "...tudo teria começado com a haste vertical ao Sol, que projetava sua sombra num plano horizontal demarcado." Com um ângulo de inclinação de 30°, em relação ao solo plano, os raios solares incidindo sobre uma haste vertical de 2,5 m de comprimento geram uma sombra de x m. Um pouco mais tarde, quando o ângulo de inclinação dos raios solares é de 45° graus, a mesma sombra gerada agora é de y m. A diferença ente **x** e **y** é de, aproximadamente,

sen 30° = 0,5	cos 30° = 0,866	tg 30° = 0,577
sen 45° = 0,707	cos 45° = 0,707	tg 45° = 1

A) 1 m.
B) 1,83 m.
C) 2,45 m.
D) 0,88 m.
E) 2,27 m.

MATEMÁTICA

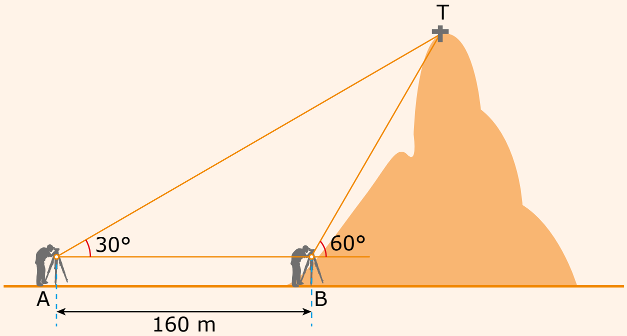
08. 1FY1 (UECE) Uma pessoa, com 1,7 m de altura, está em um plano horizontal e caminha na direção perpendicular a um prédio cuja base está situada neste mesmo plano. Em certo instante, essa pessoa visualiza o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30 graus. Ao caminhar mais 3 m, visualiza o ponto mais alto do prédio, agora sob um ângulo de 45 graus. Nestas condições, a medida da altura do prédio, em metros, é, aproximadamente,

A) 5,6.
B) 6,6.
C) 7,6.
D) 8,6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

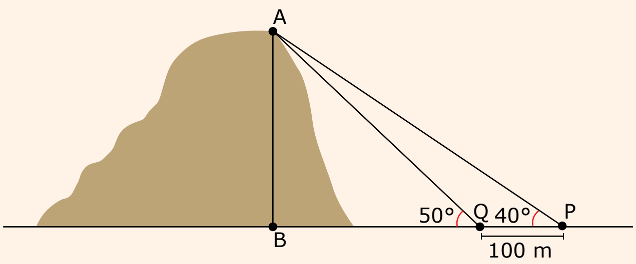
01. 14VH (UFSJ-MG) O teodolito é um instrumento de medida de ângulos bastante útil na topografia. Com ele, é possível determinar distâncias que não poderiam ser medidas diretamente. Para calcular a altura de um morro em relação a uma região plana no seu entorno, o topógrafo pode utilizar esse instrumento adotando o seguinte procedimento: situa o teodolito no ponto **A** e, mirando o ponto **T** no topo do morro, mede o ângulo de 30° com a horizontal; desloca o teodolito 160 metros em direção ao morro, colocando-o agora no ponto **B**, do qual, novamente mirando o ponto **T**, mede o ângulo de 60° com a horizontal.



Se a altura do teodolito é de 1,5 metro, é correto afirmar que a altura do morro com relação à região plana à qual pertencem **A** e **B** é, em metros:

A) $80\sqrt{3} + 1,5$
B) $80\sqrt{3} - 1,5$
C) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3} + 1,5$
D) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3} - 1,5$

02. (UERJ–2022) Admita que uma pessoa na posição **P** avista o ponto **A** mais alto de um morro sob um ângulo de 40°. Ao caminhar 100 m sobre a reta horizontal PB, até a posição Q, ela avista o mesmo ponto sob o ângulo de 50°. O esquema a seguir representa essa situação, sendo AB a altura do morro em relação à reta horizontal PB.



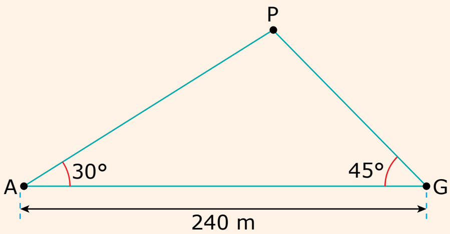
Considere os seguintes valores das razões trigonométricas:

α	sen α	cos α	tg α
40°	0,64	0,77	0,84
50°	0,77	0,64	1,19

A altura AB, em metros, é igual a:

A) 212,0
B) 224,6
C) 232,0
D) 285,6

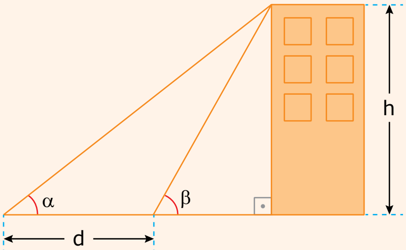
03. 5ZD3 (PUC-SP) Abílio (**A**) e Gioconda (**G**) estão sobre uma superfície plana de uma mesma praia e, num dado instante, veem, sob respectivos ângulos de 30° e 45°, um pássaro (**P**) voando, conforme é representado na planificação a seguir:



Considerando desprezíveis as medidas das alturas de Abílio e Gioconda e sabendo que, naquele instante, a distância entre **A** e **G** era de 240 m, a quantos metros de altura o pássaro distava da superfície da praia?

A) $60(\sqrt{3}+1)$
B) $120(\sqrt{3}-1)$
C) $120(\sqrt{3}+1)$
D) $180(\sqrt{3}-1)$
E) $180(\sqrt{3}+1)$

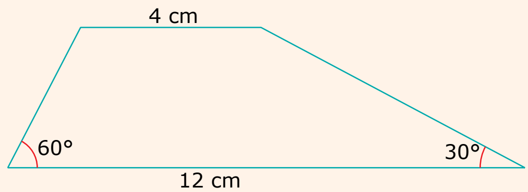
04. AUXK (UFOP-MG) Um observador vê um prédio segundo um ângulo α. Após caminhar uma distância **d** em direção ao prédio, ele passa a vê-lo segundo um ângulo β. Podemos afirmar que a altura **h** do prédio é:



A) $\dfrac{d \cdot \text{tg }\alpha \cdot \text{tg }\beta}{\text{tg }\beta - \text{tg }\alpha}$
B) $\dfrac{d \cdot \text{tg }\alpha \cdot \text{tg }\beta}{\text{tg }\alpha - \text{tg }\beta}$
C) $\dfrac{d \cdot \text{tg }\alpha \cdot \text{tg }\beta}{\text{tg }\beta + \text{tg }\alpha}$
D) d

05. JABR

(UEFS-BA)

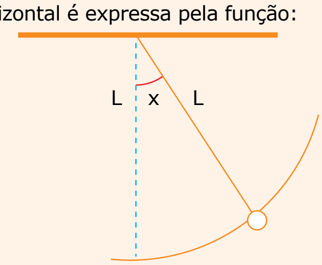


O trapézio representado, na figura, tem bases medindo 12 cm e 4 cm, e os ângulos internos da base maior medem 60° e 30°.

Seu perímetro, em cm, é igual a:

A) $16 + 4\sqrt{2}$
B) $16 + 4\sqrt{3}$
C) $20 + 3\sqrt{2}$
D) $20 + 4\sqrt{2}$
E) $20 + 4\sqrt{3}$

06. (PUC RS) Tales, um aluno do curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa. Ao visitar o Panteon, em Paris, Tales conheceu o Pêndulo de Foucault. O esquema a seguir indica a posição do pêndulo fixado a uma haste horizontal, num certo instante. Sendo **L** o seu comprimento e **x** o ângulo em relação a sua posição de equilíbrio, então a altura **h** do pêndulo em relação à haste horizontal é expressa pela função:



A) $h(x) = L.\cos x$
B) $h(x) = L.\text{sen } x$
C) $h(x) = L.\text{sen } 2x$
D) $h(x) = L.\cos 2x$
E) $h(x) = 2L.\cos x$

07. (UECE) Se a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, o valor do seno do menor dos ângulos internos desse triângulo é

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

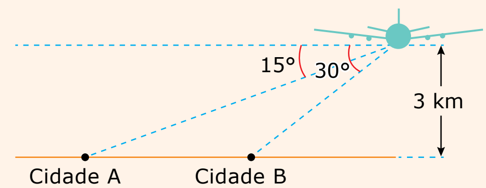
08. CWQ8

(UECE) No triângulo XYZ, retângulo em **X**, a medida do ângulo interno em **Y** é 30°. Se **M** é a interseção da bissetriz do ângulo interno em **Z** com o lado XY, e a medida do segmento ZM é $6\sqrt{3}$ m, então, pode-se afirmar corretamente que o perímetro deste triângulo é uma medida, em metros, situada entre

A) 40 e 45.
B) 45 e 50.
C) 50 e 55.
D) 55 e 60.

09. 8IF6

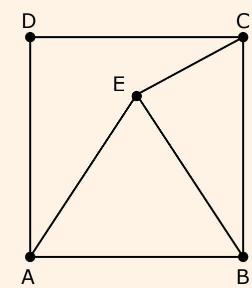
(UFV-MG) Um passageiro em um avião avista duas cidades, **A** e **B**, sob ângulos de 15° e 30°, respectivamente, conforme a figura a seguir:



Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades **A** e **B** é

A) 7 km.
B) 5,5 km.
C) 6 km.
D) 6,5 km.
E) 5 km.

10. (ESPM-SP–2019) ABCD é um quadrado e ABE é um triângulo isósceles de base $\overline{AB}$, interno ao quadrado.



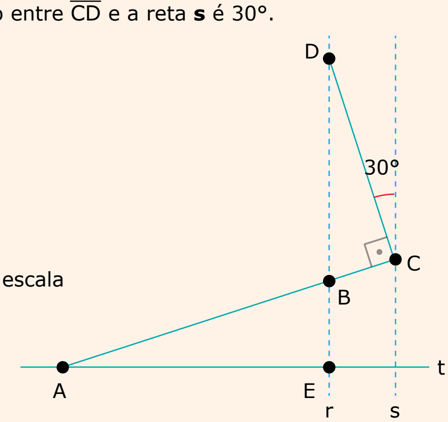
Se o ângulo $B\hat{E}C$ mede 90°, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é igual a

A) 15°.
B) 30°.
C) 45°.
D) 60°.
E) 75°.

11. 2OO6

(FGV) Na figura seguinte, as retas **r** e **s** são paralelas entre si, e perpendiculares à reta **t**. Sabe-se, ainda, que AB = 6 cm, CD = 3 cm, $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{CD}$, e a medida do ângulo entre $\overline{CD}$ e a reta **s** é 30°.

Fora de escala



Nas condições descritas, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a:

A) $12 + 3\sqrt{3}$
B) $12 + 2\sqrt{3}$
C) $6 + 4\sqrt{3}$
D) $6 + 2\sqrt{3}$
E) $3 + 2\sqrt{3}$

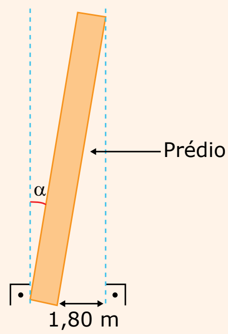
SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. ØRWH

(Enem) A famosa Torre de Pisa, localizada na Itália, assim como muitos outros prédios, por motivos adversos, sofrem inclinações durante ou após suas construções.

Um prédio, quando construído, dispunha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem largura medindo 1,80 metro, conforme mostra a figura.



O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada.

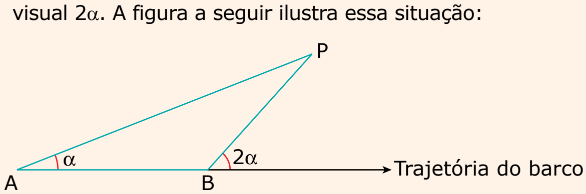
Ângulo α (Grau)	Seno
0,0	0,0
1,0	0,017
1,5	0,026
1,8	0,031
2,0	0,034
3,0	0,052

Uma estimativa para o ângulo de inclinação quando dado em grau é tal que:

A) $0 \le \alpha < 1,0$
B) $1,0 \le \alpha < 1,5$
C) $1,5 \le \alpha < 1,8$
D) $1,8 \le \alpha < 2,0$
E) $2,0 \le \alpha < 3,0$

02. HQKN

(Enem) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto **A**, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo **P** da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto **B**, de modo que fosse possível ver o mesmo ponto **P** da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura a seguir ilustra essa situação:



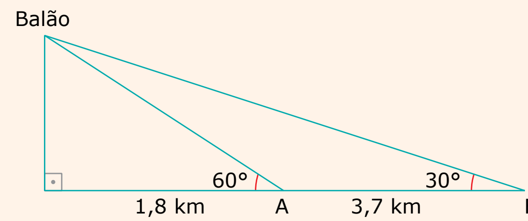
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto **B**, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo **P** será:

A) 1 000 m
B) $1\,000\sqrt{3}$ m
C) $2\,000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m
D) 2 000 m
E) $2\,000\sqrt{3}$ m

03. USPU

(Enem) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 2 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

A) 1,8 km
B) 1,9 km
C) 3,1 km
D) 3,7 km
E) 5,5 km

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. A
- 04. B
- 05. $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$
- 06. C
- 07. B
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. D
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. A
- 07. B
- 08. A
- 09. C
- 10. C
- 11. E

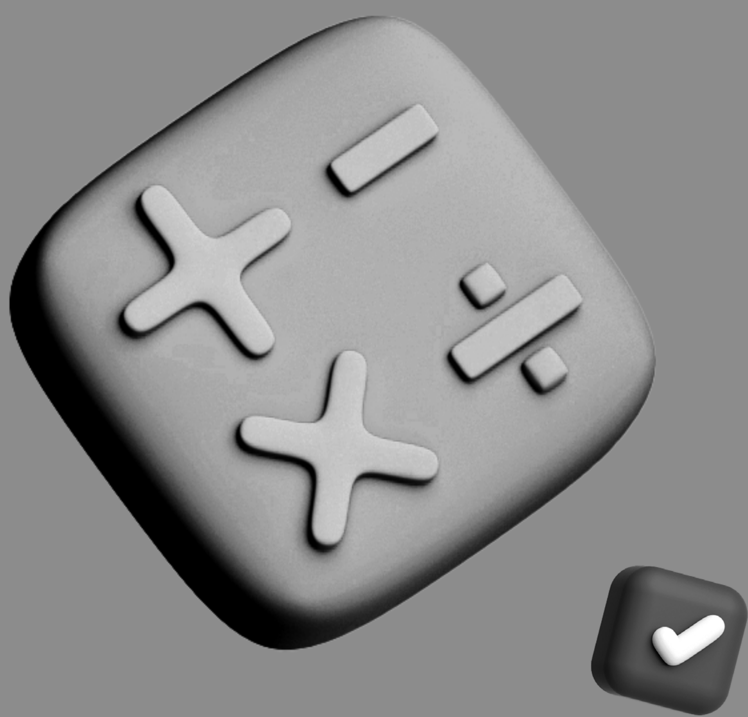
Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Bernoulli
Sistema de Ensino



MATEMÁTICA

SUMÁRIO

FRENTE A

FRENTE B

FRENTE C

MATEMÁTICA

FRENTE

A

Caderno Extra

MÓDULO 05

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

01. (UFRJ) Se $n \in \mathbb{N}$, calcule o valor de:

$A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{3n} - (-1)^n$

02. (UFRGS-RS) A expressão $\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$ é igual a:

A) $\frac{8}{15}$

B) $\frac{3}{5}$

C) 1

D) $\sqrt{\frac{34}{15}}$

E) $\frac{8}{\sqrt{15}}$

03. (Vunesp) Assinale a alternativa que contém a afirmação correta.

A) Para **a** e **b** reais, sendo $a \neq 0$, $(2a^{-1})b = \left(\frac{b}{2a}\right)$.

B) Para quaisquer **a** e **b** reais, $a^2.b^3 = (ab)^6$.

C) Para quaisquer **a** e **b** reais, $5a + 4b = 9ab$.

D) Para quaisquer **a** e **b** reais, se $a^3 = b^3$, $a = b$.

E) Para **a** e **b** reais, sendo a 0 e b 0, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

04. (UFV-MG) Se α é um número real tal que 0 α 1, então a relação entre os números $x = \alpha$, $y = \sqrt{\alpha}$ e $z = \alpha^2$ é:

A) x y z

B) x z y

C) y z x

D) z y x

E) z x y

05. (UFC-CE) O valor numérico da expressão $\sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}$, quando a = 1, b = 2 e c = 3, é

A) $\frac{4}{3}$. B) $\frac{5}{4}$. C) $\frac{6}{5}$. D) $\frac{7}{6}$. E) $\frac{8}{7}$.

06. (UFMG-MG) Simplificando a expressão

$$\sqrt{9.10^{-6}}.\sqrt{0,0049}.\sqrt{2,5.10^3}\ ,$$

obtém-se

A) 105.

B) 10,5.

C) 1,05.

D) 0,105.

E) 0,0105.

07. (UFOP-MG) Considerando

$$x = \frac{3^{-1} + 6^{-1}}{\sqrt{1 + 9(16)^{-1}}} \text{ e } y = \frac{3^{-2} + 2^{-1}}{\sqrt[3]{1 - 7(2)^{-3}}},$$

os valores de **x** e **y** são, respectivamente,

A) $\frac{2}{5}$ e $\frac{11}{9}$.

B) $\frac{2}{45}$ e $\frac{11}{25}$.

C) $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{11}$.

D) $\frac{5}{8}$ e $\frac{11}{36}$.

E) $\frac{8}{5}$ e $\frac{36}{11}$.

08. (UFRJ) O número $3 + 2\sqrt{2}$ é igual à raiz quadrada de:

A) $6 + 5\sqrt{2}$

B) $9 + 4\sqrt{2}$

C) $12 + 8\sqrt{2}$

D) $15 + 10\sqrt{2}$

E) $17 + 12\sqrt{2}$

09. (UFC-CE) Entre as alternativas a seguir, marque aquela que contém o maior número.

A) $\sqrt{\sqrt[3]{5.6}}$

B) $\sqrt{6\sqrt[3]{5}}$

C) $\sqrt{5\sqrt[3]{6}}$

D) $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$

E) $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}$

10. (UECE) O produto $2^{10}5^{14}$ é formado por quantos dígitos?

A) 13.

B) 15.

C) 14.

D) 12.

11. (UFMG) O valor da expressão $(a^{-1} + b^{-1})^{-2}$ é:

A) $\frac{ab}{(a+b)^2}$

B) $\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}$

C) $a^2 + b^2$

D) $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$

2023_6VEXTRA_V2_MAT_BOOK.indb 3 16/12/2022 14:57:26

12. (UFC-CE) Se $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, então A + B é igual a:

A) $-2\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{2}$
C) $-2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$
E) $2\sqrt{3}$

13. (Unifor-CE) Se $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, então o produto AB está compreendido entre

A) 2,4 e 2,5.
B) 1,2 e 1,3.
C) 0,37 e 0,38.
D) 0,2 e 0,3.
E) 0 e 0,1.

14. (UFC-CE) O valor da expressão $\sqrt[3]{\sqrt{729}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$ é

A) −1.
B) 0.
C) 1.
D) 2.
E) 3.

15. (Fatec-SP) Considere que a massa de um próton é $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, o que corresponde a cerca de 1 800 vezes a massa de um elétron. Dessas informações é correto concluir que a massa do elétron é, aproximadamente,

A) $9 \cdot 10^{-30}$ kg.
B) $0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg.
C) $0{,}9 \cdot 10^{-31}$ kg.
D) $2{,}8 \cdot 10^{-31}$ kg.
E) $2{,}8 \cdot 10^{-33}$ kg.

16. (ESPM-SP) Simplificando a expressão $\sqrt{\frac{2^{13}+2^{16}}{2^{15}}}$, obtemos

A) $\sqrt{2}$.
B) 1,5.
C) 2,25.
D) 2^7.
E) 1.

17. (PUC-SP) Se a = 16 e x = 1,25, quanto vale a^x?

A) $\sqrt{2}$
B) 32
C) 20
D) $16\sqrt{2}$
E) 64

18. (Mackenzie-SP) Considere as seguintes afirmações:

1. $(0{,}001)^{-3} = 10^9$
2. $-2^{-2} = \frac{1}{4}$
3. $(a^{-1} + b^{-1})^{-2} = a^2 + b^2$

Associando V ou F a cada afirmação, nessa ordem, conforme seja verdadeira ou falsa, tem-se:

A) V V V
B) V V F
C) V F V
D) F V F
E) V F F

19. (UEL-PR) Calculando-se $\left(-\frac{1}{243}\right)^a$, em que $a = -\frac{2}{5}$, obtém-se:

A) −81.
B) −9.
C) 9.
D) 81.
E) um número não real.

20. (CEFET-MG) Simplificando-se a expressão $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$, com $a \neq b$, obtém-se:

A) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$
B) $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}$
C) $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$
D) $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

GABARITO

01. 2	08. E	15. B
02. E	09. B	16. B
03. D	10. A	17. B
04. E	11. D	18. E
05. D	12. E	19. C
06. E	13. C	20. C
07. A	14. C	

MÓDULO 06

EQUAÇÕES E PROBLEMAS

01. (FASEH-MG) Na fazenda do Sr. José há uma criação de patos e outra criação de cachorros. O total de patas de animais somadas dessas duas criações é de 104. Se morrerem 7 patos a quantidade dessas aves e a de cachorros será igual.

Nessas condições, para que o número de patos da criação de Sr. José fosse igual ao dobro do número de cachorros, são necessários, além dos já existentes,

A) mais 8 patos na criação.
B) mais 15 patos na criação.
C) mais 10 patos na criação.
D) mais 9 patos na criação.

02. (UFV-MG) Um mercado compra uma caixa de maçãs por R$ 90,00 e, após a compra, retira 12 maçãs estragadas da caixa. Para revender essa caixa a R$ 168,00, ele aumenta o preço de custo de cada maçã, não estragada, em R$ 0,50. Com base nessas informações, é correto afirmar que o número original de maçãs na caixa é

A) 200.
B) 150.
C) 225.
D) 180.

03. (Unesp) Uma lapiseira, três cadernos e uma caneta custam, juntos, 33 reais. Duas lapiseiras, sete cadernos e duas canetas custam, juntos, 76 reais. O custo de uma lapiseira, um caderno e uma caneta, juntos, em reais, é

A) 11.
B) 12.
C) 13.
D) 17.
E) 38.

04. (UNIRIO-RJ) Um grupo de amigos vai acampar num final de semana. Sabendo-se que, numa certa hora da manhã de domingo, o equivalente a um terço desse grupo está envolvido com o preparo do almoço, o equivalente à metade do grupo cuida da limpeza do acampamento, o equivalente à décima parte desses dois subgrupos colhe flores nas redondezas, e um elemento do grupo deleita-se com um livro de crônicas de Zuenir Ventura, quantos elementos tem esse grupo de amigos?

A) 18
B) 24
C) 12
D) 6
E) 30

05. (UFRJ) Maria faz hoje 44 anos e tem dado um duro danado para sustentar suas três filhas: Marina, de 10 anos; Marisa, de 8 anos; e Mara, de 2 anos. Maria decidiu que fará uma viagem ao Nordeste para visitar seus pais, no dia do seu aniversário, quando sua idade será igual à soma das idades de suas três filhas. Com que idade Maria pretende fazer a viagem? Justifique sua resposta.

06. (UNIRIO-RJ) Marta vai se casar e **N** amigas suas resolveram comprar-lhe um presente no valor de R$ 300,00, cada uma delas contribuindo com a quantia de **X** reais. Na hora da compra, entretanto, uma delas desistiu de participar e as outras tiveram, cada uma, um acréscimo de R$ 15,00 na quota inicialmente prevista. Assim, a afirmação correta é:

A) N = 4
B) X = R$ 60,00
C) X = R$ 45,00
D) X = R$ 50,00
E) N = 6

07. (UFMG) A diferença entre dois números positivos **a** e **b** é 5, e a razão entre eles é $\frac{5}{3}$. O produto ab é:

A) 7,5.
B) 8,333...
C) 12,5.
D) 93.
E) 93,75.

08. (FUVEST-SP) No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto **B** de forma que $\frac{AB}{AC} = 2.\frac{BC}{AB}$. Então, o valor de $\frac{BC}{AB}$ é:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
C) $\sqrt{5} - 1$
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
E) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

09. (UFLA-MG) Uma empreiteira destinou originalmente alguns operários para a construção de uma obra de 72 m². Como 4 deles foram demitidos antes do início da obra, os demais tiveram que trabalhar 9 m² a mais cada um para compensar.

A) Qual o número de operários originalmente designados para a obra?
B) Qual a porcentagem de operários demitidos?

10. (FUVEST-SP) A soma dos valores de **m** para os quais x = 1 é raiz da equação $x^2 + (1 + 5m - 3m^2)x + (m^2 + 1) = 0$ é igual a

A) $\frac{5}{2}$.
B) $\frac{3}{2}$.
C) 0.
D) $-\frac{3}{2}$.
E) $-\frac{5}{2}$.

11. (UFF-RJ) Na divisão dos lucros com seus 20 acionistas, uma empresa distribuiu R$ 600,00 entre os preferenciais e R$ 600,00 entre os ordinários. Sabe-se que cada acionista preferencial recebeu R$ 80,00 a menos do que cada acionista ordinário. Determine quantos acionistas preferenciais essa empresa possui.

12. (Unicamp-SP) Minha calculadora tem lugar para oito algarismos. Eu digitei nela o maior número possível, do qual subtraí o número de habitantes do estado de São Paulo, obtendo, como resultado, 68 807 181. Qual é a população do estado de São Paulo?

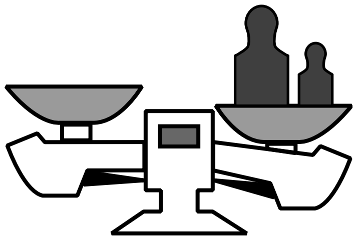
13. (FUVEST-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

MATEMÁTICA

14. (UERJ) "HÁ MAIS TRUQUES ENTRE O PEIXE E A BALANÇA DO QUE IMAGINA O CONSUMIDOR..."

Com balanças mais antigas (aquelas que utilizam duas bandejas), muitas vezes o peso é oco, ou seja, marca 500 g, mas pode pesar somente 300 g, por exemplo.



O DIA. 28 ago. 1998 (Adaptação).

Uma balança de dois pratos é usada para medir 2,5 kg de peixe, da seguinte forma: em um prato está o peixe, no outro, um peso de 2 kg e mais um peso de 500 g. O peixe contém, em suas vísceras, um pedaço de chumbo de 200 g. O peso de 500 g, por ser oco, tem na verdade 300 g. Se 1 kg desse peixe custa R$ 12,60, o consumidor pagará, na realidade, por kg, o preço de

A) R$ 14,60.
B) R$ 15,00.
C) R$ 15,50.
D) R$ 16,00.

15. (Enem) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta são de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: http://www.embrapa.br.
Acesso em: 29 abr. 2010 (Adaptação).

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

A) 58 g e 456 g.
B) 200 g e 200 g.
C) 350 g e 100 g.
D) 375 g e 500 g.
E) 400 g e 89 g.

GABARITO

01. A
02. D
03. C
04. C
05. 56 anos

Soma da idade das filhas: $\sum I_F = 10 + 8 + 2 = 20$
A cada novo ano (**x**), temos: $\sum I_F = 20 + 3x$
Idade da mãe: $I_M = 44 + x$

A viagem ocorrerá quando $20 + 3x = 44 + x$.

Ou seja: $x = 12$ e, portanto, Maria terá 56 anos.

06. B
07. E
08. B
09. A) 8 operários
B) 50%
10. A
11. 15
12. 31 192 818 habitantes
13. E
14. B
15. C

MÓDULO 07

FUNÇÃO

01. (UFPA) Dada a função **f** de A = {0, 1, 2} em B = {–2, –1, 0, 1, 2} definida por $f(x) = x - 1$, qual o conjunto imagem de **f**?

A) {–1, 0, 1}
B) {–2, –1, 0, 1, 2}
C) {0, 1, 2}
D) {–2, –1, 0}
E) {–1, 0, 1, 2}

02. (UFMG) Seja **s** a soma das raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se S' é a soma das raízes de $f(x + 1)$, então a diferença S' – S é

A) –2.
B) –1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

03. (UFMG) Se as funções **f** e **g** são tais que $f(x + 2\pi) = f(x)$ e $g(x) = f(3x)$ para todo **x** real, então $g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ é sempre igual a

A) $g\left(\frac{x}{3}\right)$.
B) $g\left(\frac{2x}{3}\right)$.
C) $g(x)$.
D) $g(3x)$.
E) $g(6x)$.

04. (FJP-MG) A seguinte função, conhecida como Função de Dirichlet, é assim definida no conjunto dos números reais:

$$\begin{cases} f(x) = 1, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é racional e} \\ f(x) = -1, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é irracional} \end{cases}$$

Nesse caso, o valor de $\dfrac{f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(-\sqrt{2}\right) - f(0{,}777...)}{f\left(\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)}$ é:

A) −1.
B) 0.
C) 1.
D) 2.

05. (CEFET-MG) Sendo $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$, para $x \neq -1$, pode-se afirmar que o valor de $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, para $h \neq 0$, é:

A) $a + h + 1$
B) $a + h + 2$
C) $a + h - 2$
D) $2a + h + 1$
E) $2a + h - 1$

06. (UFV-MG) Considere a expressão $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^x}$. A soma $f(x) + f(-x)$ corresponde a

A) 3.
B) 2.
C) 1.
D) 0.

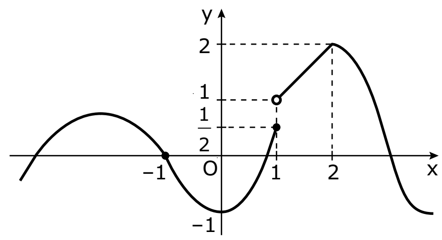
07. (UFMG) Se $f(x) = x.2^{-x}$, então $2.f(1) + 4.f\left(\frac{1}{2}\right)$ é igual a:

A) 1
B) $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
C) $1 + \sqrt{2}$
D) $1 + 2\sqrt{2}$
E) $1 + 4\sqrt{2}$

08. (UFMG) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa a cada número real **x** o menor inteiro maior do que 2x. O valor de $f(-2) + f\left(-\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$ é

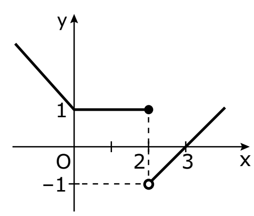
A) −4.
B) −3.
C) −2.
D) −1.
E) 0.

09. (UFRJ) No gráfico a seguir, a imagem do intervalo [−1, 2] é:



A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, 1]$
B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup [-2, 1)$
C) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cup (1, 2)$
D) $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 2]$
E) $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, 2]$

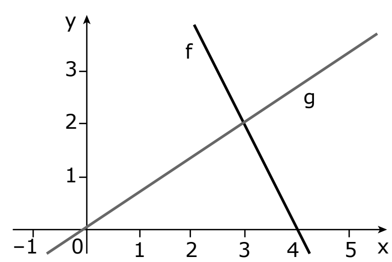
10. (Unifor-CE) Seja a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, representada no gráfico a seguir:



É **correto** afirmar que

A) o conjunto imagem de **f** é o intervalo]−1, +∞[.
B) **f** é negativo, para todo $x \in \mathbb{R}$ e x 3.
C) **f** é crescente, para todo $x \in \mathbb{R}$.
D) **f** é bijetora.
E) **f** é par.

11. (UEFS-BA–2018) Parte dos gráficos de duas funções polinomiais do primeiro grau, **f** e **g**, estão representados na figura, em que $f(3) = g(3)$.



Se f(4) = 0 e g(0) = 0, o conjunto solução de f(x)g(x) 0 é:

A) {x ∈ ℝ | x 0}

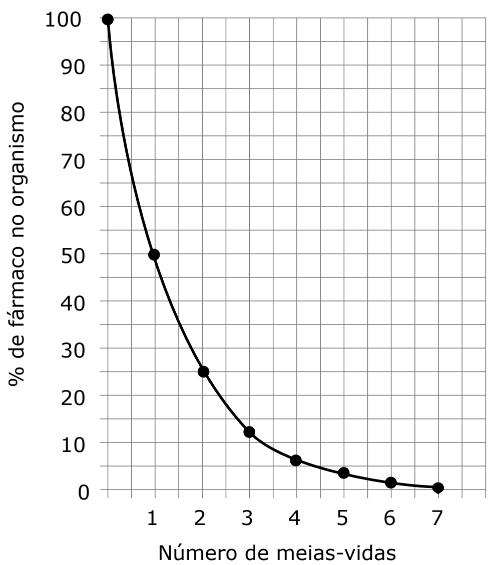
B) {x ∈ ℝ | 0 x 4}

C) {x ∈ ℝ | 3 x 4}

D) {x ∈ ℝ | x 3}

E) {x ∈ ℝ | x 4}

12. (Enem) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



FUCHS, F. D.; WANNMA; Cher l. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992. p. 40.

O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo. A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30min será aproximadamente de

A) 10%.

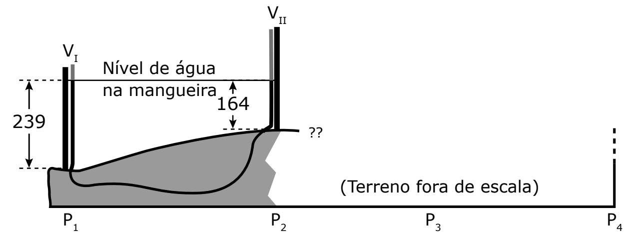
B) 15%.

C) 25%.

D) 35%.

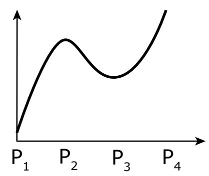
E) 50%.

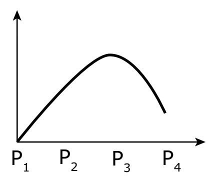
13. (Enem) Para medir o perfil de um terreno, um mestre de obras utilizou duas varas (V_I e V_{II}), iguais e igualmente graduadas em centímetros, às quais foi acoplada uma mangueira plástica transparente, parcialmente preenchida por água (figura a seguir). Ele fez 3 medições que permitiram levantar o perfil da linha que contém, em sequência, os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4. Em cada medição, colocou as varas em dois diferentes pontos e anotou suas leituras na tabela a seguir. A figura representa a primeira medição entre P_1 e P_2.

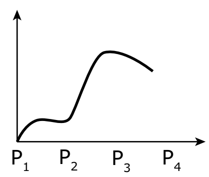


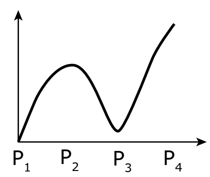
Medição	Vara I		Vara II		Diferença ($L_I - L_{II}$)(cm)
	Ponto	Leitura L_I (cm)	Ponto	Leitura L_{II} (cm)	
1ª	P_1	239	P_2	164	75
2ª	P_2	189	P_3	214	–25
3ª	P_3	229	P_4	174	55

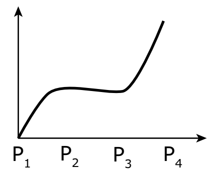
Ao preencher completamente a tabela, o mestre de obras determinou o seguinte perfil para o terreno:

A)


B)


C)


D)


E)


GABARITO

01. A	06. C	11. B
02. A	07. C	12. D
03. C	08. D	13. A
04. C	09. D	
05. E	10. A	

MATEMÁTICA

FRENTE **B**

Caderno Extra

MÓDULO 05

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E TEOREMA DE TALES

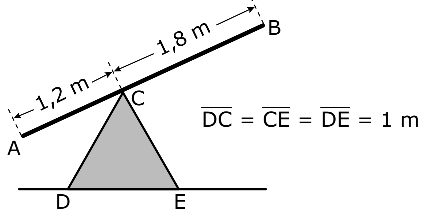
01. (UFMG) Em determinada hora do dia, o Sol projeta a sombra de um poste de iluminação sobre o piso plano de uma quadra de vôlei. Nesse instante, a sombra mede 16 m. Simultaneamente, um poste de 2,7 m, que sustenta a rede, tem sua sombra projetada sobre a mesma quadra. Nesse momento, essa sombra mede 4,8 m. A altura do poste de iluminação é de

A) 8,0 m.
B) 8,5 m.
C) 9,0 m.
D) 7,5 m.

02. (FJP-MG) Dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{1}{8}$. Os lados do triângulo menor são 3 cm, 4 cm e 6 cm. Nesse caso, é correto afirmar que o perímetro do triângulo maior mede

A) 13 cm.
B) 24 cm.
C) 48 cm.
D) 104 cm.

03. (Unesp) Uma gangorra é formada por uma haste rígida AB, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto **C**, como na figura. Quando a extremidade **B** da haste toca o chão, a altura da extremidade **A** em relação ao chão é

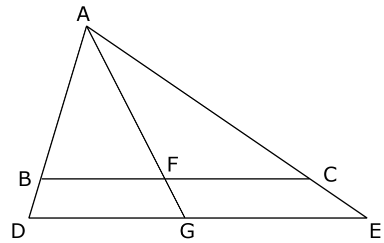


A) $\sqrt{3}$ m.
B) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ m.
C) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ m.
D) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ m.
E) $2\sqrt{2}$ m.

04. (Mackenzie-SP) Num triângulo retângulo, um cateto é o dobro do outro. Então, a razão entre o maior e o menor dos segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa é

A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) $\frac{3}{2}$.
E) $\sqrt{5}$.

05. (UFPE) Na ilustração a seguir, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos.



Se BC = 12, DG = 7 e GE = 8, quanto mede $\overline{FC}$?

A) 6,2
B) 6,3
C) 6,4
D) 6,5
E) 6,6

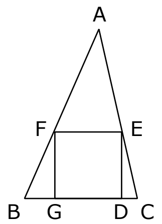
06. (Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 metros sobre a rampa, está a 1,5 metro de altura em relação ao solo.

A) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
B) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

07. (PUC Minas) Um estandarte feito de pano tem a forma de um triângulo isósceles medindo 1,60 metro de altura e 1,92 metro quadrado de área. Uma fita com 2,0 centímetros de largura foi costurada ao longo de todo o contorno do estandarte. Pode-se estimar que o comprimento aproximado dessa fita, em metros, é

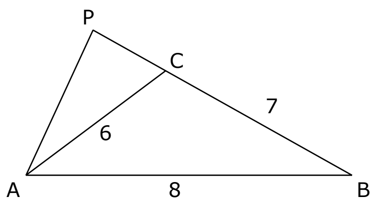
A) 3,20.
B) 4,60.
C) 5,30.
D) 6,40.

08. (Mackenzie-SP) No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5, e o lado do quadrado DEFG mede 3. A altura do triângulo ABC, em relação ao lado BC, mede:



A) 7,5.
B) 8,0.
C) 8,5.
D) 9,0.
E) 9,5.

09. (FGV-SP) No triângulo ABC, AB = 8, BC = 7, AC = 6 e o lado $\overline{BC}$ foi prolongado, como mostra a figura, até o ponto **P**, formando-se o triângulo PAB, semelhante ao triângulo PCA.



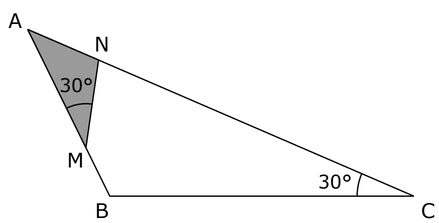
O comprimento do segmento $\overline{PC}$ é

A) 7.
B) 8.
C) 9.
D) 10.
E) 11.

10. (UFPI) Sejam ABC e FGH dois triângulos semelhantes de tal modo que suas bases AB e FG medem, respectivamente, 1 cm e 3 cm. Se a área do menor é igual a 8 cm², podemos afirmar que a área do maior é

A) 24 cm².
B) $\frac{8}{3}$ cm².
C) 9 cm².
D) 72 cm².
E) $\frac{1}{9}$ cm².

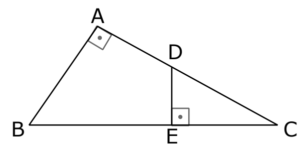
11. (UFU-MG) No triângulo ABC da figura a seguir, pretende-se construir um escritório na área sombreada.



Sendo BC = 40 m, AC = 60 m e MN = 20 m, então a área livre que poderá ser usada como estacionamento tem área igual a

A) 600 m².
B) 150 m².
C) 400 m².
D) 450 m².

12. (CEFET-MG) Na figura a seguir, ABC e DEC são triângulos retângulos de áreas S_1 e S_2, respectivamente. Se AC = 8, EC = 4 e S_1 = a, então a relação $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a



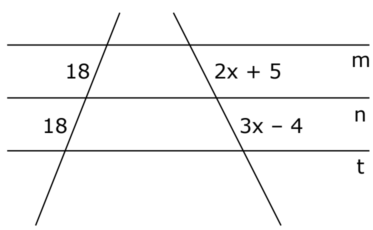
A) $\frac{3}{4}$.
B) $\frac{1}{2}$.
C) $\frac{2}{5}$.
D) $\frac{1}{3}$.
E) $\frac{1}{4}$.

13. Um feixe de 4 paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 5 cm, 6 cm e 9 cm, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede 60 cm.

14. (PUC-SP) O segmento $\overline{AB}$ mede 10. Chama-se segmento áureo de $\overline{AB}$ o segmento $\overline{AP}$, **P** em $\overline{AB}$, de medida **x**, tal que $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$. O valor de **x** é:

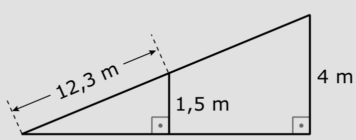
A) $5\sqrt{5} - 5$
B) $5\sqrt{3} + 3$
C) $5\sqrt{5} + 5$
D) $5\sqrt{3} - 3$
E) 5

15. Na figura a seguir, as medidas são dadas em cm. Sabendo que m // n // t, determine o valor de **x**.



GABARITO

01. C
02. D
03. D
04. C
05. C
06. A)



B) 20,5 m

07. D
08. D
09. C

10. D
11. D
12. E
13. 15 cm, 18 cm e 27 cm
14. A
15. x = 9

MÓDULO 06

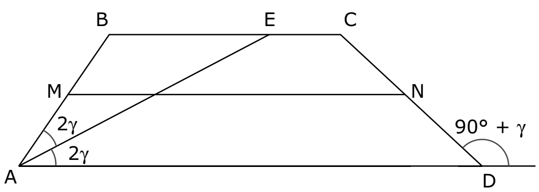
QUADRILÁTEROS

01. A bissetriz de um ângulo obtuso do losango faz com um dos lados um ângulo de 55°. Determine o valor dos ângulos agudos.

02. Determine a base e a altura de um retângulo, sabendo que o perímetro vale 288 m e que a base excede em 4 m o triplo da altura.

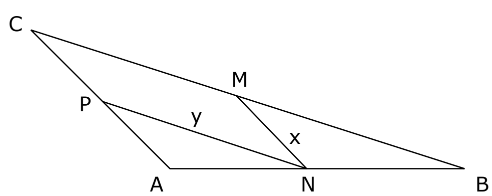
03. A soma de dois ângulos consecutivos de um trapézio é igual a 78°, e sua diferença é 4°. Determine o maior ângulo do trapézio.

04. Na ilustração a seguir, MN é base média do trapézio ABCD (**M** e **N** são pontos médios, respectivamente, de AB e CD). Se AB = 5 e EC = 1, então a medida do maior valor inteiro de MN é



A) 12.
B) 11.
C) 10.
D) 9.
E) 8.

05. (Unimontes-MG) Na figura a seguir, temos $\overline{AN} = \overline{BN}$, $\overline{CM} = \overline{BM}$, $\overline{CP} = \overline{AP}$, $\overline{AC} = 2y - 7$ e $\overline{BC} = 3x + 1$.



As medidas de **x** e **y** são, respectivamente,

A) 6 e 9,5.
B) 8 e 12,5.
C) 6 e 8,5.
D) 8 e 11,5.

06. (Vunesp) Considere as seguintes proposições:

I. Todo quadrado é um losango.
II. Todo quadrado é um retângulo.
III. Todo retângulo é um paralelogramo.
IV. Todo triângulo equilátero é isósceles.

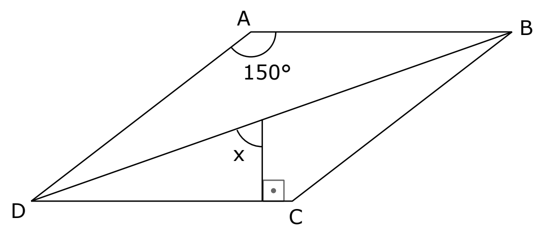
Pode-se afirmar que

A) só uma é verdadeira.
B) todas são verdadeiras.
C) só uma é falsa.
D) duas são verdadeiras.
E) N.d.a.

07. (UFES) Seja ABCD um trapézio retângulo. O ângulo formado pelas bissetrizes do seu ângulo reto e do ângulo consecutivo da base maior mede 92°. Os ângulos agudo e obtuso desse trapézio medem, respectivamente,

A) 88° e 92°.
B) 86° e 94°.
C) 84° e 96°.
D) 82° e 98°.
E) 79° e 101°.

08. No losango, calcule **x**.



09. (EN-RJ) Quando as diagonais de um paralelogramo são também bissetrizes dos seus ângulos internos?

A) Só se dois ângulos internos e consecutivos forem complementares.
B) Só se o paralelogramo for um quadrado.
C) Só se o paralelogramo for um retângulo.
D) Só se o paralelogramo for um losango.
E) Só se a soma dos ângulos internos for 360°.

10. (Unifor-CE) Os lados de um losango medem 4, e um dos seus ângulos, 30º. A medida da diagonal menor do losango é

A) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
B) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
C) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
D) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
E) $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

GABARITO

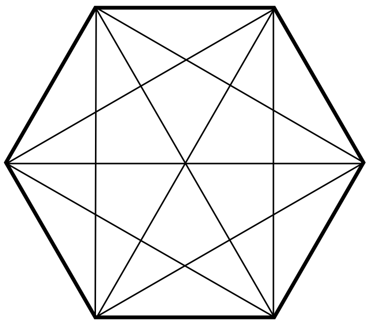
01. 70°
02. b = 109 m e h = 35 m
03. 143°
04. E
05. A
06. B
07. B
08. 75°
09. D
10. C

MATEMÁTICA

MÓDULO 07

POLÍGONOS

01. (Unit-SE)

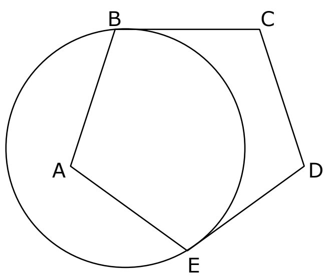


Para começar a montar certa peça de artesanato ligam-se, com fios, os vértices de um hexágono regular de metal, como mostrado na figura.

Se a aresta do hexágono mede 12 cm, então a quantidade de fio necessária para a montagem terá um comprimento, em cm, igual a

A) $72.\sqrt{2}$.
B) $72.\sqrt{3}$.
C) $72.\left(1+\sqrt{2}\right)$.
D) $72.\left(1+\sqrt{3}\right)$.
E) $72 \,.\, \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

02. (FGV-SP) Dado um pentágono regular ABCDE, constrói-se uma circunferência pelos vértices **B** e **E** de tal forma que $\overline{BC}$ e $\overline{ED}$ sejam tangentes a essa circunferência, em **B** e **E**, respectivamente.



A medida do menor arco BE na circunferência construída é

A) 72°.
B) 108°.
C) 120°.
D) 135°.
E) 144°.

03. (FUVEST-SP) **A**, **B**, **C** e **D** são vértices consecutivos de um hexágono regular. A medida, em graus, de um dos ângulos formados pelas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é

A) 90.
B) 100.
C) 110.
D) 120.
E) 150.

04. (PUC Rio) A1A2 ... An é um polígono regular convexo, de **n** lados, inscrito em um círculo. Se o vértice A_{15} é diametralmente oposto ao vértice A_{46}, o valor de **n** é

A) 62.
B) 60.
C) 58.
D) 56.
E) 54.

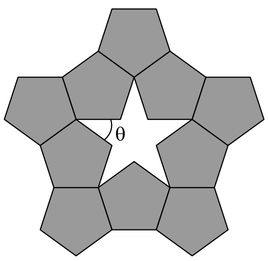
05. (UFU-MG) Se **n** é um número natural maior ou igual a dois, qual o número de diagonais de um polígono regular de 2n lados que não passam pelo seu centro?

06. (ITA-SP) Seja **n** o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de n – 1 ângulos (internos) do polígono é 2 004°, determine o número **n** de lados do polígono.

07. (UEPB) Aumentando-se de 5 unidades o número de lados de um polígono, o número de diagonais aumenta de 40. Esse polígono é o

A) heptágono.
B) pentágono.
C) hexágono.
D) octógono.
E) eneágono.

08. (UNIFESP) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura. Nessas condições, o ângulo θ mede



A) 108°.
B) 72°.
C) 54°.
D) 36°.
E) 18°.

09. (ITA-SP) Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto desses três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3 780°. O número total das diagonais nesses três polígonos é igual a

A) 63.
B) 69.
C) 90.
D) 97.
E) 106.

GABARITO

01. D
02. E
03. D
04. A
05. 2n(n – 2)
06. n = 14
07. A
08. D
09. D

Caderno Extra

MÓDULO 05

ESTATÍSTICA

01. (FGV-SP) Em um conjunto de 100 observações numéricas, podemos afirmar que

A) a média aritmética é maior que a mediana.

B) a mediana é maior que a moda.

C) 50% dos valores estão acima da média aritmética.

D) 50% dos valores estão abaixo da mediana.

E) 25% dos valores estão entre a moda e a mediana.

02. (Unimontes-MG) O serviço meteorológico registrou, em alguns estados brasileiros, as seguintes temperaturas:

Estado	Temperatura (em °C)
Mato Grosso do Sul	21
Amazonas	40
Pará	39
Piauí	38
Maranhão	39
Paraná	8
Rio Grande do Sul	8
Santa Catarina	8
São Paulo	15

A moda e a mediana dessas temperaturas são, respectivamente,

A) 39 °C e 24 °C.

B) 8 °C e 39 °C.

C) 8 °C e 21 °C.

D) 21 °C e 8 °C.

03. (FGV-SP) Seja **f** uma função de **N** em **Q**, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } 1 \le x < 5 \\ -x + 12, \text{ se } 5 \le x \le 12 \end{cases}$$

Sabendo-se que a função **f** determina o número de vezes que um equipamento foi utilizado em cada um dos 12 meses de um ano, é correto afirmar que a mediana (estatística) dos 12 registros é igual a

A) 3.

B) 3,5.

C) $\frac{11}{3}$.

D) 4.

E) 5,5.

04. (UFPel-RS) Na busca de solução para o problema da gravidez na adolescência, uma equipe de orientadores educacionais de uma instituição de ensino pesquisou um grupo de adolescentes de uma comunidade próxima a essa escola e obteve os seguintes dados:

Idade (em anos)	Frequência absoluta de adolescentes grávidas
13	4
14	3
15	2
16	5
17	6

Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar, em relação às idades das adolescentes grávidas, que

A) a média é 15 anos.

B) a mediana é 15,3 anos.

C) a mediana é 16,1 anos.

D) a moda é 16 anos.

E) a média é 15,3 anos.

05. (UFPR) Dado um conjunto X = $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ com **n** elementos, definimos a média $\overline{x}$ e o desvio padrão **d** de **X** por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

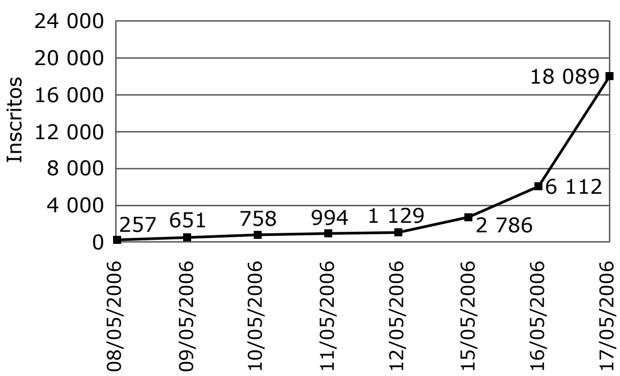
$$d = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Uma informação útil para quem analisa um conjunto de dados como **X** é que a maioria desses dados pertence ao intervalo $C = [\overline{x} - 2d, \overline{x} + 2d]$.

Sendo X = $\left\{\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3\right\}$ um conjunto de dados,

A) calcule a média $\overline{x}$ e o desvio padrão **d**.
B) verifique quais dados do conjunto **X** anterior pertencem ao intervalo **C**.

06. (Ueg-GO) O gráfico a seguir representa a distribuição das inscrições ao concurso público para provimento de vagas no quadro de pessoal da Assembleia Legislativa do Estado de Goiás, no período de 8 a 17 de maio de 2006. Sobre o gráfico a seguir, considere a validade das afirmações posteriores.



I. A média aritmética diária de inscrições no período de 15/05/2006 a 17/05/2006 foi maior que 8 900.
II. O maior crescimento proporcional de inscrições aconteceu no período de 15 a 16 de maio de 2006.
III. O maior crescimento absoluto de inscrições aconteceu no período de 16 a 17 de maio de 2006.
IV. A taxa de crescimento no período de 15 a 16 de maio foi superior a 129%.

Assinale a alternativa correta.

A) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
B) Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
C) Apenas as afirmações I, II e III são verdadeiras.
D) Todas as afirmações são verdadeiras.

07. (Unimontes-MG) Na tabela a seguir, temos os preços de fechamento de duas ações nas bolsas de valores em cinco semanas consecutivas.

		Semanas				
		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Bolsas	A	$15\frac{7}{8}$	$15\frac{1}{2}$	$16\frac{3}{8}$	$16\frac{5}{8}$	$15\frac{3}{4}$
	B	$22\frac{1}{8}$	22	$21\frac{7}{8}$	$22\frac{1}{8}$	$22\frac{1}{4}$

Encontre a amplitude para cada ação.

08. (Ufpr) Considere as seguintes medidas descritivas das notas finais dos alunos de três turmas.

Turma	Número de alunos	Média	Desvio padrão
A	15	6,0	1,31
B	15	6,0	3,51
C	14	6,0	2,61

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas:

1. Apesar de as médias serem iguais nas três turmas, as notas dos alunos da turma **B** foram as que se apresentaram mais heterogêneas.
2. As três turmas tiveram a mesma média, mas com variação diferente.
3. As notas da turma **A** se apresentaram mais dispersas em torno da média.

Assinale a alternativa correta.

A) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
B) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
C) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
D) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
E) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

09. (Puc-campinas-SP) A tabela a seguir mostra os resultados de uma pesquisa sobre a faixa salarial dos funcionários de uma empresa que usam bicicleta para ir ao trabalho.

Faixa salarial em reais	Número de funcionários
350 ⊢ 450	380
450 ⊢ 550	260
550 ⊢ 650	200
650 ⊢ 750	180
750 ⊢ 850	120
850 ⊢ 950	60
Total	1 200

O salário médio desses trabalhadores é

A) R$ 400,00.
B) R$ 425,00.
C) R$ 480,00.
D) R$ 521,00.
E) R$ 565,00.

10. (UFU-MG) Considere a tabela dos indicadores de preço apresentada a seguir:

Índices Variação %	Novembro 2008	Dezembro 2008	Janeiro 2009	Fevereiro 2009	Março 2009
IPC da Fipe	0,39	0,16	0,46	0,27	0,40
IGP-DI da FGV	0,07	−0,44	0,01	−0,13	−0,84
IGP-M da FGV	0,38	−0,13	−0,44	0,26	−0,74
INPC do IBGE	0,38	0,29	0,64	0,31	0,20
IPCA do IBGE	0,36	0,28	0,48	0,55	0,20
ICV do Dieese	0,53	0,10	0,69	0,02	0,40
INCC do IGP-DI/FGV	0,50	0,17	0,33	0,27	−0,25

Tendo em vista os dados da tabela, pode-se afirmar que:

A) A média dos índices IPC da Fipe de novembro de 2008 a março de 2009 é igual a 0,46.
B) O mês de fevereiro de 2009 apresenta os índices com a menor moda.
C) A mediana dos índices do mês de janeiro de 2009 é igual a 0,64.
D) O mês de novembro de 2008 apresenta índices cuja mediana é igual à moda.

GABARITO

01. D 02. C 03. B 04. E

05. A) $\bar{x} = \frac{13}{4}$ e $d = \frac{\sqrt{5}}{4}$

B) Todos os valores.

06. A

07. Para **A**: $15\frac{3}{8}$; para **B**: $22\frac{7}{8}$.

08. D

09. E

10. D

MÓDULO 06

MÉDIAS

01. (UFU-MG) Pedro é um dos 18 funcionários de uma microempresa. Ele resolve aposentar-se e, em seu lugar, um novo funcionário de 22 anos de idade é contratado. Sabendo-se que, com a saída de Pedro e a entrada desse novo funcionário, a média aritmética das idades dos funcionários dessa microempresa diminui em 2 anos, pode-se afirmar que Pedro se aposentou com

A) 62 anos.
B) 56 anos.
C) 60 anos.
D) 58 anos.

02. (UFU-MG) Um concurso avaliou **n** candidatos atribuindo-lhes notas de 0 a 100 pontos. Sabe-se que exatamente 20 deles obtiveram nota máxima e, nesse caso, a média aritmética foi de 80 pontos. Agora, se consideradas apenas as notas inferiores a 100 pontos, a média passa a ser de 70 pontos. Nessas condições, pode-se afirmar que **n** é igual a

A) 70.
B) 60.
C) 80.
D) 40.

03. (UECE) A média aritmética das idades dos 45 alunos da 5ª série do Colégio S. Narcísio IV é $\frac{188}{15}$. Se a média aritmética das idades das meninas é 12 anos e a dos meninos é 13 anos, então, o produto do número de meninos pelo número de meninas é

Observação: Considere as idades dos alunos em número inteiro de anos. Por exemplo, se a idade de João é 12 anos, 7 meses e 4 dias, a idade a ser considerada é 12 anos.

A) 494.
B) 500.
C) 504.
D) 506.

MATEMÁTICA

04. (FGV-SP) A média das alturas dos 6 jogadores em quadra de um time de vôlei é 1,92 m. Após substituir 3 jogadores por outros, a média das alturas do time passou para 1,90 m. Nessas condições, a média, em metros, das alturas dos jogadores que saíram supera a dos que entraram em

A) 0,03.
B) 0,04.
C) 0,06.
D) 0,09.
E) 0,12.

05. (Unesp) A um concurso vestibular para dois cursos, **A** e **B**, compareceram 500 candidatos para o curso **A** e 100 candidatos para o curso **B**. Na prova de Matemática, a média aritmética geral, considerando os dois cursos, foi 4,0. Mas, considerando apenas os candidatos ao curso **A**, a média cai para 3,8. A média dos candidatos ao curso **B**, na prova de Matemática, foi

A) 4,2.
B) 5,0.
C) 5,2.
D) 6,0.
E) 6,2.

06. (Unesp) A média aritmética dos elementos de um conjunto formado por **n** valores numéricos diminui quatro unidades quando o número 58 é retirado. Quando o número 57 é adicionado ao conjunto original, a média aritmética dos elementos desse novo conjunto aumenta três unidades em relação à média inicial. Qual o valor da soma dos elementos originais do conjunto?

07. (Cesgranrio) Considere um grupo de 10 pessoas, **A**, **B**, **C**, **D**, ..., **I**, **J**, dentre as quais:

I. **A**, **B** e **C** têm, respectivamente, 16, 29 e 31 anos;
II. **H** e **J** nasceram em 1971;
III. **D**, **E**, **F**, **G** e **I** nasceram, nessa ordem, em anos consecutivos.

Sabe-se ainda que todos já aniversariaram este ano (1998) e que a média aritmética das idades de todo o grupo é 23. O ano em que **I** nasceu foi

A) 1980.
B) 1979.
C) 1978.
D) 1977.
E) 1976.

08. (Cesgranrio) Para ser aprovado, um aluno precisa ter média maior ou igual a 5. Se ele obteve notas 3 e 6 nas provas parciais (que têm peso 1 cada uma), quanto precisa tirar na prova final (que tem peso 2) para ser aprovado?

A) 4
B) 4,5
C) 5
D) 5,5
E) 6

09. (PUC Rio) Na revisão de prova de uma turma de quinze alunos, apenas uma nota foi alterada, passando a ser 7,5. Considerando-se que a média da turma aumentou em 0,1, a nota do aluno antes da revisão era

A) 7,6.
B) 7,0.
C) 7,4.
D) 6,0.
E) 6,4.

10. (UFRRJ) Se a média aritmética entre **x** e **y** é **M** e z = 2M, podemos afirmar que a média aritmética entre **x**, **y** e **z** é, aproximadamente:

A) 33,3% maior do que **M**.
B) igual a **M**.
C) o dobro de **M**.
D) 50% maior que **M**.
E) 15,2% maior que **M**.

11. (UEFS-BA) Dentre os funcionários de uma empresa, a idade média dos homens é de 43 anos, e das mulheres é de 37 anos.

Com base nesses dados, é correto afirmar que, nessa empresa,

A) a idade média dos funcionários é de 40 anos.
B) os homens são 6 anos mais velhos do que as mulheres.
C) metade das mulheres tem idade maior do que ou igual a 37 anos.
D) a idade média dos funcionários está no intervalo aberto (37, 43).
E) a maioria das mulheres é mais jovem do que a média de idade dos homens.

12. (Mackenzie-SP) A média das notas de todos os alunos de uma turma é 5,8. Se a média dos rapazes é 6,3 e a das moças é 4,3, a porcentagem de rapazes na turma é

A) 60%.
B) 65%.
C) 70%.
D) 75%.
E) 80%.

13. (FGV-SP) Seja uma sequência de **n** elementos (n 1), dos quais um deles é $1 - \left(\frac{1}{n}\right)$, e os demais são todos iguais a 1.

A média aritmética dos **n** números dessa sequência é:

A) 1
B) $n - \left(\frac{1}{n}\right)$
C) $n - \left(\frac{1}{n^2}\right)$
D) $1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)$
E) $1 - \left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n^2}\right)$

14. (Vunesp) Suponha que o país **A** receba de volta uma parte de seu território **T**, que por certo tempo esteve sob a administração do país **B**, devido a um tratado entre **A** e **B**. Estimemos a população de **A**, antes de receber **T**, em 1,2 bilhão de habitantes, e a de **T** em 6 milhões de habitantes. Se as médias de idade das populações **A** e **T**, antes de se reunirem, eram, respectivamente, 30 anos e 25 anos, mostre que a média de idade após a reunião é superior a 29,9 anos.

15. (UFRJ) A altura média de um grupo de quinhentos e três recrutas é de 1,81 m. Sabe-se também que nem todos os recrutas do grupo têm a mesma altura.
diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira, falsa ou se os dados são insuficientes para uma conclusão. Em cada caso, justifique sua resposta.

A) "Há, no grupo em questão, pelo menos um recruta que mede mais de 1,81 m e pelo menos um que mede menos de 1,81 m."
B) "Há, no grupo em questão, mais de um recruta que mede mais de 1,81 m e mais de um que mede menos de 1,81 m."

16. (UFMG) Um reservatório é abastecido por duas torneiras, **A** e **B**. A torneira **A**, sozinha, enche o reservatório em 20 horas. A torneira **B**, sozinha, enche o mesmo reservatório em 18 horas. Às duas horas da manhã, estando esse reservatório vazio, as duas torneiras são abertas. Depois de 4 horas e 30 minutos, a torneira **B** é fechada e a torneira **A** continua a abastecer o reservatório. Determine a hora exata em que esse reservatório estará cheio.

17. (Unesp) Suponhamos que um casal, cujo marido é 8 cm mais alto que a esposa e cuja média de idade é 30 anos, tenha concluído que seu filho recém-nascido, do sexo masculino, deverá ter aproximadamente 1,75 m de altura quando adulto.
Regra para calcular a estatura de seu filho:

I. Some a altura do pai e da mãe e divida por dois.
II. A partir da altura média dos pais, some 10 cm se a criança for menino ou subtraia 4 cm se a criança for menina.

Observação: Essa regra vale para um casal cuja média de idade entre o homem e a mulher seja de 30 anos. Se fosse de 20 anos, os valores mudariam para 9 cm a mais no caso de menino e 3 cm a menos para a menina.

Calcule a altura de cada um deles.

GABARITO

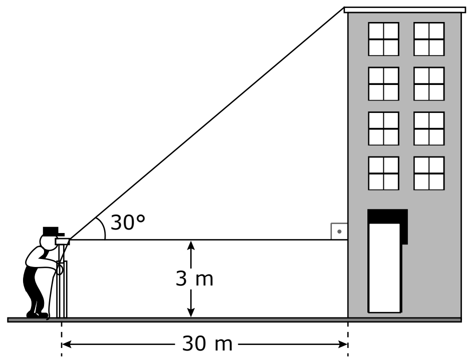
01. D	06. 240	11. D
02. B	07. A	12. D
03. C	08. D	13. D
04. B	09. D	
05. B	10. A	

14. A média final é 29,975 29,9.
15. A) Verdadeira. Como nem todos os recrutas têm a mesma altura, pelo menos um deve ter mais de 1,81 m; caso contrário, a média seria menor do que 1,81 m. De modo análogo, se nenhum tivesse altura menor do que 1,81 m, a média seria maior do que 1,81 m.
    B) Os dados são insuficientes para uma conclusão. Vejamos o seguinte exemplo: 501 recrutas com 1,81 m, 1 com 1,84 m e outro com 1,78 m.
16. O reservatório estará cheio às 17 horas.
17. A altura da mãe é 1,61 metro e a do pai é 1,69 metro.

MÓDULO 07

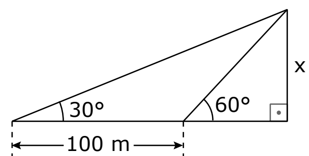
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

01. (Oswaldo Cruz-SP) Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30 m de distância e assim observa segundo um ângulo de 30°, conforme mostra a figura.

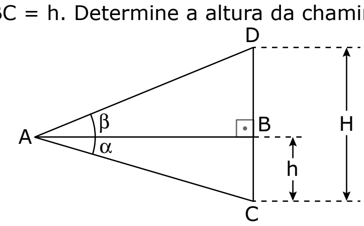


Calcule a altura do edifício medida a partir do solo horizontal.

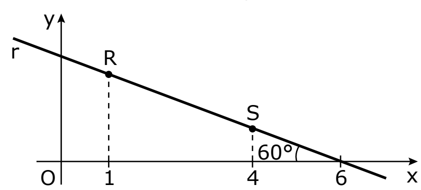
02. (FUVEST-SP) Calcule **x** indicado na figura.



03. (EEM–SP) Para obter a altura **H** de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal $\overline{AB}$ e mediu os ângulos α e β, tendo a seguir medido BC = h. Determine a altura da chaminé.



04. (PUC-Campinas-SP) Sejam **O** a origem de um sistema de eixos cartesianos ortogonais e **R** e **S** pontos pertencentes à reta **r**, como é mostrado a seguir.

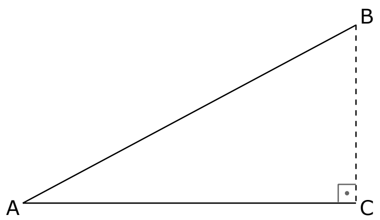


Na unidade do sistema, a medida RS é igual a

A) $2\sqrt{3}$.
B) 3.
C) $3\sqrt{3}$.
D) 6.
E) $6\sqrt{3}$.

MATEMÁTICA

05. (Unesp) Três cidades, **A**, **B** e **C**, são interligadas por estradas, conforme mostra a figura.



As estradas AC e AB são asfaltadas. A estrada CB é de terra e será asfaltada. Sabendo-se que AC tem 30 km, que o ângulo entre AC e AB é de 30° e que o triângulo ABC é retângulo em **C**, a quantidade de quilômetros da estrada que será asfaltada é

A) $30\sqrt{3}$.

B) $10\sqrt{3}$.

C) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

D) $8\sqrt{3}$.

E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$.

06. (Unit-AL) Uma escada que mede 9 m está apoiada em uma parede.

Considerando-se que ela forma com o solo um ângulo α e que $\cos \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, pode-se afirmar que a distância, em metros, de seu ponto de apoio na parede até o solo é igual a

A) 3

B) $3\sqrt{2}$

C) 4

D) $4\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$

07. (Vunesp) Duas rodovias retilíneas, **A** e **B**, se cruzam, formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia **A**, a 4 km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia retilínea **C**, perpendicular à rodovia **B**. A distância do posto de gasolina à rodovia **B**, indo através de **C**, em quilômetros, é:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

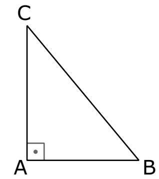
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{2}$

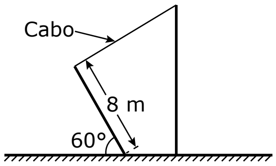
E) $2\sqrt{2}$

08. (UECE) A base de um triângulo isósceles mede 12 cm, e o ângulo oposto à base mede 120°. Então, determine a medida dos lados congruentes do triângulo.

09. (FGV-SP) No triângulo da figura, $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 60°$ e AB = 50 cm. Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

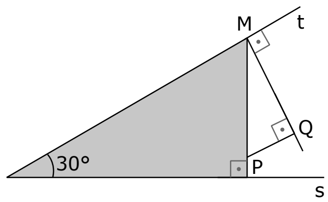


10. (Vunesp) Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura a seguir.



Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo.

11. (FUVEST-SP) Dados $\overline{MP} \perp s$; $\overline{MQ} \perp t$; $\overline{MQ} \perp \overline{PQ}$; MP = 6, então $\overline{PQ}$ é igual a:



A) $3\sqrt{3}$

B) 3

C) $6\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$

E) $2\sqrt{3}$

GABARITO

01. $(3 + 10\sqrt{3})$ m	07. E
02. $x = 50\sqrt{3}$ m	08. $4\sqrt{3}$ cm
03. $H = h\left(1 + \dfrac{\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha}\right)$	09. $50\sqrt{3}$ cm
04. D	10. $6 + 4\sqrt{3}$ m
05. B	11. B
06. A	