Logaritmos

INTRODUÇÃO

No ano de 1614, foi lançada a obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, que significa "*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*". Tal obra, escrita pelo nobre escocês John Napier (1550-1617), provocou uma verdadeira revolução na Matemática da época, bem como nas áreas relacionadas à astronomia e à navegação, ao apresentar um método que diminuiu enormemente o tempo gasto na realização dos cálculos que os estudiosos dessas áreas efetuavam frequentemente. Coube ao inglês Henry Briggs (1561-1630) o aperfeiçoamento desse método, por meio da elaboração da chamada *Tábua de logaritmos decimais*, que permitia escrever qualquer número positivo como uma potência de dez.

Com o surgimento das calculadoras científicas, as tábuas logarítmicas perderam a sua utilidade. Porém, o conceito de logaritmo continua sendo um dos mais importantes da Matemática, e o seu uso é fundamental na abordagem de diversos problemas das mais variadas áreas do conhecimento.

DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Imaginemos o seguinte problema:

A qual expoente devemos elevar o número 3 de modo a obtermos 243?

Observe que o problema anterior pode ser descrito através da seguinte equação exponencial:

$3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

A partir de agora, diremos que 5 é o logaritmo de 243 na base 3. Com isso, promovemos uma mudança na notação utilizada. Assim, escrevemos:

$\log_3 243 = 5$

Portanto, observamos que as expressões descritas anteriormente são equivalentes, ou seja:

$\log_3 243 = 5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$

Podemos generalizar essa ideia do seguinte modo:

> Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de **b** na base **a** o expoente real **x** que se deve dar à base **a** de modo que a potência obtida seja igual a **b**.

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, \text{ com } a, b > 0 \text{ e } a \neq 1}$$

Em que:

i) **b** é o logaritmando.

ii) **a** é a base.

iii) **x** é o logaritmo.

Exemplo:

Calcular o valor de cada logaritmo a seguir:

1º) $\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

2º) $\log_{0,2} 625 = x \Rightarrow 0{,}2^x = 625 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 625 \Rightarrow$

$5^{-x} = 5^4 \Rightarrow x = -4$

OBSERVAÇÕES

i) As condições de existência do logaritmo $\log_a b$ são:

$$\boxed{b > 0 \text{ e } 0 < a \neq 1}$$

ii) Quando a base de um logaritmo é igual a 10 (logaritmo decimal), esta pode ser omitida.

Exemplo: $\log_{10} 5$ pode ser escrito como $\log 5$.

iii) Quando a base do logaritmo é o número **e** (e = 2,71828...), esse logaritmo é chamado **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural** e é representado pela notação **ln**.

Exemplo: $\log_e 18$ pode ser escrito como $\ln 18$.

Consequências da definição

Considerando a definição de logaritmo e suas condições de existência, temos:

i) $\log_a a = 1$, pois $a = a^1$;

ii) $\log_a 1 = 0$, pois $1 = a^0$;

iii) $\log_a a^k = k$, pois $a^k = a^k$;

iv) $a^{\log_a b} = b$.

Justificativa de **iv**:

Seja $a^{\log_a b} = x$ (I)

Chamando $\log_a b = y$ em (I), temos que $a^y = x$ (II).

Da definição, sabemos que, se $\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$ (III).

De (II) e (III), deduzimos que $x = b$ e, assim: $a^{\log_a b} = x = b$.

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Sendo **a**, **b** e **c** números reais e positivos, e $a \neq 1$, temos:

i) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$;

ii) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

iii) $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;

iv) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Sendo $\log_2 x = 3$, $\log_2 y = 5$ e $\log_2 z = 7$, calcular o valor de $\log_2 \dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z}$, considerando satisfeitas as condições de existência.

Resolução:

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z} = \log_2 x^{\frac{3}{5}} - (\log_2 y^2 + \log_2 z) \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z} = \frac{3}{5}\log_2 x - 2\log_2 y - \log_2 z \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z} = \frac{3}{5}.3 - 2 \cdot 5 - 7 = -\frac{76}{5}$$

02. (UFMG) A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$, em que **E** é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kWh), e $E_0 = 10^{-3}$ kWh. A cada aumento de uma unidade no valor de **I**, o valor de **E** fica multiplicado por:

A) $10^{\frac{1}{2}}$

B) 10

C) $10^{\frac{3}{2}}$

D) $\dfrac{20}{3}$

Resolução:

Sabemos que $I = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$. Seja **k** o número pelo qual o valor de **E** fica multiplicado a cada aumento de uma unidade no valor de **I**. Assim, temos:

$$I + 1 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}.k\right) \Rightarrow I + 1 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) + \frac{2}{3}.\log_{10} k \Rightarrow$$

$$\cancel{I} + 1 = \cancel{I} + \frac{2}{3} \cdot \log_{10} k \Rightarrow \log_{10} k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = 10^{\frac{3}{2}}$$

MUDANÇA DE BASE

Considere o logaritmo $\log_a b$, em que $b > 0$ e $0 < a \neq 1$. Se desejarmos escrever esse logaritmo em uma base **c**, em que $0 < c \neq 1$, utilizaremos a seguinte propriedade:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo } \log_c a \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.}$$

Exemplos:

1º) Escrever $\log_7 5$ na base 2.

$$\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$$

2º) Escrever $\log_3 4$ na base 4.

$$\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3}$$

Nesse último exemplo, podemos observar que $\log_3 4$ é igual ao inverso de $\log_4 3$. E, é claro que, se $\log_3 4 = \dfrac{1}{\log_4 3}$, então $(\log_3 4).(\log_4 3) = 1$.

GENERALIZANDO

Se forem satisfeitas todas as condições de existência dos logaritmos, podemos escrever que:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Uma outra forma de se escrever essa propriedade é:

$$\boxed{(\log_a b).(\log_b a) = 1}$$

COLOGARITMO

É definido como o valor oposto ao do logaritmo. Assim, escrevemos:

$$\text{colog}_a\ b = -\log_a b$$

Observe também que $-\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)$

Portanto, podemos escrever que:

$$\boxed{\text{colog}_a\ b = -\log_a b = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)}$$

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São equações que envolvem logaritmos, em que as variáveis podem aparecer no logaritmando ou na base.

Assim, para resolvê-las, aplicamos a definição, as condições de existência e as propriedades dos logaritmos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação logarítmica:

$$\log_5 (3x - 18) = \log_5 6$$

Resolução:

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência (C.E.) de cada logaritmo. Assim, temos:

$3x - 18 > 0 \Rightarrow x > 6$

Em seguida, como as bases são iguais, devemos igualar também os logaritmandos.

Logo: $3x - 18 = 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

Como esse valor satisfaz a condição de existência ($x > 6$), então a solução da equação é S = {8}.

04. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (1 - 5x) = -3$.

Resolução:

Aplicando a condição de existência, temos:

$1 - 5x > 0 \Rightarrow -5x > -1 \Rightarrow 5x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{5}$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$1 - 5x = 2^{-3} \Rightarrow 1 - 5x = \frac{1}{8} \Rightarrow 1 - \frac{1}{8} = 5x \Rightarrow$

$\frac{7}{8} = 5x \Rightarrow x = \frac{7}{40}$

Então, como $\frac{7}{40} < \frac{1}{5}$, satisfazendo a condição de existência, a solução da equação é $S = \left\{\frac{7}{40}\right\}$.

05. Determinar o conjunto solução da equação

$$\log_5 (x^2 - 4x) = \log_5 21, \text{ em } \mathbb{R}.$$

Resolução:

Inicialmente, verificamos a condição de existência:

$x^2 - 4x > 0$

Observação: Nesse caso, não julgamos necessário resolver a inequação de segundo grau, mas apenas indicá-la. Em seguida, resolvemos a equação e verificamos se cada uma das soluções satisfaz a condição de existência.

Como as bases são iguais, temos:

$x^2 - 4x = 21 \Rightarrow$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-21) = 16 + 84 = 100$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2 \,.\, 1} = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow$

$x_1 = -3$ ou $x_2 = 7$

Verificando as condições de existência, temos:

Para $x_1 = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 4.(-3) = 9 + 12 = 21 > 0$ (convém)

Para $x_2 = 7 \Rightarrow 7^2 - 4 \,.\, 7 = 49 - 28 = 21 > 0$ (convém)

Portanto, a solução da equação é S = {–3, 7}.

06. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (x + 7) - \log_2 (x - 11) = 2$.

Resolução:

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência de cada logaritmo. Assim, temos:

$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$ (condição I) e

$x - 11 > 0 \Rightarrow x > 11$ (condição II)

Como **x** deve atender simultaneamente às duas condições, temos que a interseção dessas é dada por $x > 11$.

Manipulando a equação, obtemos:

$\log_2 (x + 7) - \log_2 (x - 11) = 2 \Rightarrow$

$\log_2 \left(\frac{x+7}{x-11}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x+7}{x-11} = 2^2 \Rightarrow$

$\frac{x+7}{x-11} = 4 \Rightarrow 4x - 44 = x + 7 \Rightarrow$

$3x = 51 \Rightarrow$

$x = 17$

Como 17 satisfaz a condição de existência ($x > 11$), então a solução da equação é S = {17}.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 9Ø7Ø (UECE–2018) Se x é o logaritmo de 16 na base 2, então, o logaritmo (na base 2) de x2 – 5x + 5 é igual a

A) 2. B) 1. C) –1. D) 0.

02. IDLC (UFRGS-RS–2020) Se log 2 = x e log 3 = y, então log 288 é

A) $2x + 5y$.
B) $5x + 2y$.
C) $10xy$.
D) $x^2 + y^2$.
E) $x^2 – y^2$.

03. 0F7G (UFPR) Para se calcular a intensidade luminosa **L**, medida em lúmens, a uma profundidade de **x** centímetros num determinado lago, utiliza-se a Lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x$$

Qual a intensidade luminosa **L** a uma profundidade de 12,5 cm?

A) 150 lumens.
B) 15 lumens.
C) 10 lumens.
D) 1,5 lumens.
E) 1 lúmen.

04. MCV8 (Unicamp-SP) A solução da equação na variável real **x**, $\log_x (x + 6) = 2$, é um número

A) primo.
B) par.
C) negativo.
D) irracional.

05. (UFRGS-RS–2018) Se $\log_3 x + \log_9 x = 1$, então o valor de **x** é:

A) $\sqrt[3]{2}$
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt[3]{3}$
D) $\sqrt{3}$
E) $\sqrt[3]{9}$

06. FBPY (FGV-SP) Sendo **p** e **q** números reais, com p > q e p + q > 0, definiremos a operação # entre **p** e **q** da seguinte forma: $p \# q = p^2 – q^2 + \log (p + q)$, com log (p + q) sendo o logaritmo na base 10 de (p + q). Utilizando-se essa definição, o valor de 10 # (–5) é igual a:

A) 176 – log 2
B) 174 – log 2
C) 76 – log 2
D) 74 + log 2
E) 74 – log 2

07. HZY8 (Insper-SP) O número de soluções reais da equação $\log_x (x + 3) + \log_x (x – 2) = 2$ é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

08. BXUI (UFRGS-RS) Atribuindo para log 2 o valor 0,3, então os valores de log 0,2 e log 20 são, respectivamente,

A) –0,7 e 3.
B) –0,7 e 1,3.
C) 0,3 e 1,3.
D) 0,7 e 2,3.
E) 0,7 e 3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ–2017) Uma calculadora tem duas teclas especiais, **A** e **B**. Quando a tecla **A** é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla **B** é digitada, o número do visor é multiplicado por 5.

Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10. Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

A) 20. B) 30. C) 40. D) 50.

02. 31ØD (UFG-GO) Em um experimento hipotético com cinco espécies de bactérias em meio de cultura, cada uma com população inicial de 10 células, registraram-se as populações apresentadas na tabela a seguir, uma hora após o início do experimento.

Bactéria	Número de células uma hora após o início
Chlamydia trachomatis	160
Escherichia coli	50
Leptospira interrogans	40
Streptococcus pneumoniae	100
Vibrio cholerae	80

Considerando-se que o número de bactérias duplica a cada geração, define-se o número de geração, **n**, quando a população chega a **N** células, pela fórmula:

$$N = N_0 \cdot 2^n$$

em que N_0 é o número inicial de células.

O tempo de geração é definido como o tempo necessário para a população dobrar de tamanho, e pode ser obtido dividindo-se o tempo decorrido para a população passar de N_0 a **N** pelo número de geração correspondente. O bacilo, nesse experimento, causa diarreia e seu tempo de geração, em minutos, foi de:

Dado: log 2 = 0,3.

A) 30.
B) 26.
C) 20.
D) 18.
E) 15.

03. V678 (PUC Rio) Seja $x = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27$. Então, é correto afirmar que:

A) $6 \le x \le 7$
B) $7 \le x \le 8$
C) $8 \le x \le 9$
D) $9 \le x \le 10$
E) $x \ge 10$

04. AHR6 (UFPR) Um importante estudo a respeito de como se processa o esquecimento foi desenvolvido pelo alemão Hermann Ebbinghaus no final do século XIX. Utilizando métodos experimentais, Ebbinghaus determinou que, dentro de certas condições, o percentual **P** do conhecimento adquirido que uma pessoa retém após **t** semanas pode ser aproximado pela fórmula:

$$P = (100 – a).b^t + a$$

sendo que **a** e **b** variam de uma pessoa para outra.

Se essa fórmula é válida para um certo estudante, com a = 20 e b = 0,5, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será

A) entre uma e duas semanas.

B) entre duas e três semanas.

C) entre três e quatro semanas.

D) entre quatro e cinco semanas.

E) entre cinco e seis semanas.

05. ZFYM

(UERJ) Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir:

- A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
- O nível de toxidez T(x), após **x** dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_0 . (0,5)^{0,1x}$$

Considere **D** o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.

Sendo log 2 = 0,3, o valor de **D** é igual a:

A) 30. B) 32. C) 34. D) 36.

06. KZRB

(Unicamp-SP) Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740 °C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40 °C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função:

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$$

sendo **t** o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140 °C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

A) 12.[log (7) – 1] minutos

B) 12.[1 – log (7)] minutos

C) 12.log (7) minutos

D) $\dfrac{[1 - \log(7)]}{12}$ minutos

07. AL60

(Unifor-CE) Em 1987, uma indústria farmacêutica iniciou a fabricação de certo tipo de medicamento e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 8% ao ano. Assim, em que ano a produção de tal medicamento quadruplicou a quantidade fabricada em 1987?

(São dadas as aproximações: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48.)

A) 2002 C) 2004 E) 2006

B) 2003 D) 2005

08. (Albert Einstein) Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que, durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = -30.\log_3 (t + 21) + 150$, em que **t** é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa, Nessas condições, ao fim da primeira hora da pesquisa, quantas bactérias havia em tal cultura?

A) 325 B) 400 C) 450 D) 525

09. X3UQ

(FGV-SP) Considere a função $f(x) = \log_{1\,319} x^2$.

Se n = f(10) + f(11) + f(12), então:

A) n < 1 C) 1 < n < 2 E) n > 2

B) n = 1 D) n = 2

10. S509

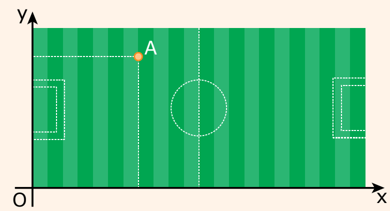
(UPF-RS) Sendo $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ e $\log_c x = 5$, o valor de $\log_{abc} x$ é:

A) 30 C) $\dfrac{31}{30}$ E) $\dfrac{1}{3}$

B) 31 D) $\dfrac{30}{31}$

11. HRBE

(UFSM-RS) Suponha que um campo de futebol seja colocado em um sistema cartesiano ortogonal, conforme mostra a figura.



Para que o ponto $A(\log_{10} (x + 1) + 1; \log_{10} (x^2 + 35))$ tenha abscissa e ordenada iguais, é necessário e suficiente que:

A) x > –1 C) x < –1 E) x > 5

B) x = 5 D) x = –5

12. KA8U

(CMMG–2020) Um estudante acompanha duas reações químicas **A** e **B** que evoluem ao longo de **t** segundos, com velocidades $V_A(t)$ e $V_B(t)$, dadas por $V_A(t) = \log_2 (t + 4)$ e $V_B(t) = \log_4 (t^2 + 3t + 31)$. Segundo orientações recebidas, determinado catalisador deve ser inserido no processo quando as velocidades das reações se igualarem. Iniciado o processo, essa ação será efetivada em

A) 1 s. B) 3 s. C) 4 s. D) 7 s.

13. RPQA

(UEL-PR) Considere **A**, **B** e **C** números reais positivos com A ≠ 1, B ≠ 1 e C ≠ 1. Se $\log_A B = 2$ e $\log_C A = \dfrac{3}{5}$, conclui-se que o valor de $\log_B C$ é:

A) $\dfrac{1}{2}$. C) $\dfrac{1}{6}$. E) $\dfrac{6}{5}$.

B) $\dfrac{5}{3}$. D) $\dfrac{5}{6}$.

14. CHBJ

(UFPR–2017) Suponha que a quantidade **Q** de um determinado medicamento no organismo **t** horas após sua administração possa ser calculada pela fórmula:

$$Q = 15 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2t}$$

sendo **Q** medido em miligramas, a expressão que fornece o tempo **t** em função da quantidade de medicamento **Q** é:

A) $t = \log \sqrt{\dfrac{15}{Q}}$

B) $t = \dfrac{\log 15}{2 \log Q}$

C) $t = 10\sqrt{\log\left(\dfrac{Q}{15}\right)}$

D) $t = \dfrac{1}{2}.\log \dfrac{Q}{15}$

E) $t = \log \dfrac{Q^2}{225}$

MATEMÁTICA

15. POST (UFC-CE) O valor da soma

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) \text{ é}$$

A) 0.
B) −1.
C) −2.
D) 2.
E) 3.

16. (UFSM) Quando um elemento radioativo, como o Césio 137, entra em contato com o meio ambiente, pode afetar o solo, os rios, as plantas e as pessoas. A radiação não torna o solo infértil, porém tudo que nele crescer estará contaminado.

A expressão $Q(t) = Q_0.e^{-0,023t}$ representa a quantidade, em gramas, de átomos radioativos de Césio 137 presentes no instante **t**, em dias, onde Q_0 é a quantidade inicial.

O tempo, em dias, para que a quantidade de Césio 137 seja a metade da quantidade inicial é igual a

Use: ln 2 = 0,69.

A) 60.
B) 30.
C) 15.
D) 5.
E) 3.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2020) A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu *ranking* (r). Ela é dada por:

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O *ranking* da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, r = 1 para a palavra mais frequente, r = 2 para a segunda palavra mais frequência e assim sucessivamente. **A** e **B** são constantes positivas.

Disponível em: <http://klein.sbm.org.br.>
Acesso em: 12 ago. 2020 (Adaptação).

Com base nos valores de X = log(r) e Y = log(f), é possível estimar valores para **A** e **B**.

No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre **Y** e **X** é:

A) $Y = \log(A) - BX$
B) $Y = \dfrac{\log(A)}{X + \log(B)}$
C) $Y = \dfrac{\log(A)}{B} - X$
D) $Y = \dfrac{\log(A)}{B \,.\, X}$
E) $Y = \dfrac{\log(A)}{X^B}$

02. 26G4 (Enem–2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5\,000 \,.\, 1{,}013^n \,.\, 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

A) 12.
B) 14.
C) 15.
D) 16.
E) 17.

03. (Enem–2017) Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de 8,9 graus na escala Richter. A energia liberada **E** por esse terremoto, em kWh, pode ser calculada por $R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo $E_0 = 7 \,.\, 10^{-3}$ kWh e **R** a magnitude desse terremoto na escala Richter. Considere 0,84 como aproximação para log 7.

Disponível em: <http://oglobo.globo.com>.
Acesso em: 02 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em KWh, foi de:

A) $10^{10,83}$
B) $10^{11,19}$
C) $10^{14,19}$
D) $10^{15,51}$
E) $10^{17,19}$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. D	05. E	07. B
02. B	04. A	06. C	08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	05. C	09. E	13. D
02. B	06. C	10. D	14. A
03. D	07. A	11. B	15. C
04. C	08. A	12. B	16. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A	02. D	03. B

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %

Função Logarítmica

INTRODUÇÃO

Chamamos de função logarítmica toda função **f**, de domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo **x** o logaritmo $\log_a x$, sendo **a** um número real positivo e diferente de 1.

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid f(x) = \log_a x, \text{ em que } 0 < a \neq 1$$

Exemplos:

1º) $f(x) = \log_5 x$

2º) $f(x) = \log_{0,4} x$

3º) $y = \ln x$

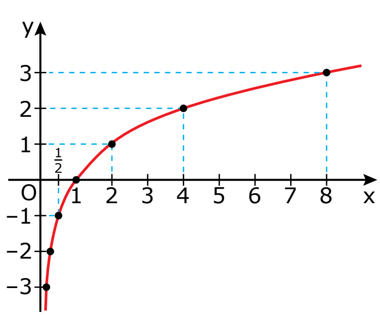
4º) $y = \log_{10} x$

GRÁFICOS

Vamos construir os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Em cada caso, vamos atribuir alguns valores para **x** e, em seguida, calcularemos os correspondentes valores de **y**. Os pares ordenados obtidos serão usados para construir cada gráfico.

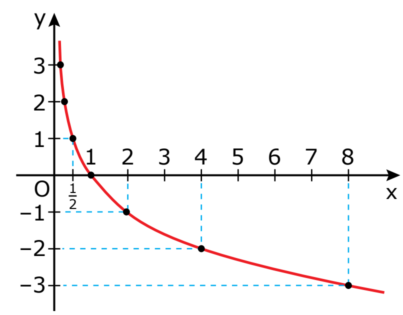
1º) Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3



2º) Gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



OBSERVAÇÕES

i) Ambos os gráficos não interceptam o eixo das ordenadas. Isso ocorre porque a função logarítmica não está definida para $x = 0$.

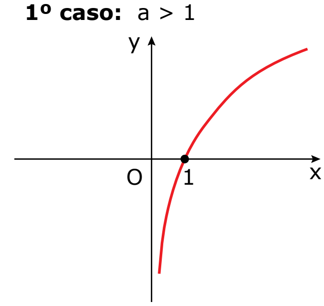
ii) Ambos os gráficos interceptam o eixo das abscissas no ponto (1, 0). Isso se deve ao fato de que $\log_a 1 = 0$, para qualquer número real **a** positivo e diferente de 1.

iii) O gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ é crescente. Isso ocorre porque a base do logaritmo é igual a 2, ou seja, é maior do que 1.

iv) O gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente. Isso ocorre porque a base do logaritmo é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, é um número maior que 0 e menor que 1.

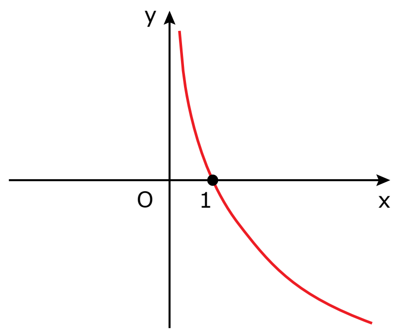
De modo geral, há dois casos a serem considerados no esboço do gráfico da função $f(x) = \log_a x$:

1º caso: $a > 1$



- Função crescente
- Domínio $D = \mathbb{R}_+^*$
- Imagem $Im = \mathbb{R}$

2º caso: $0 < a < 1$

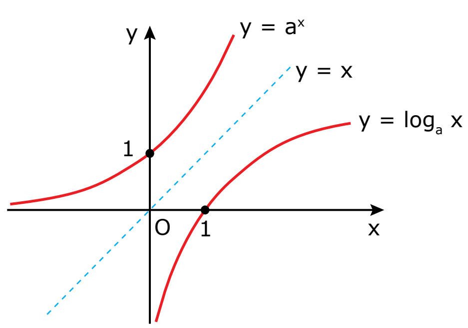


- Função decrescente
- Domínio $D = \mathbb{R}_+^*$
- Imagem $Im = \mathbb{R}$

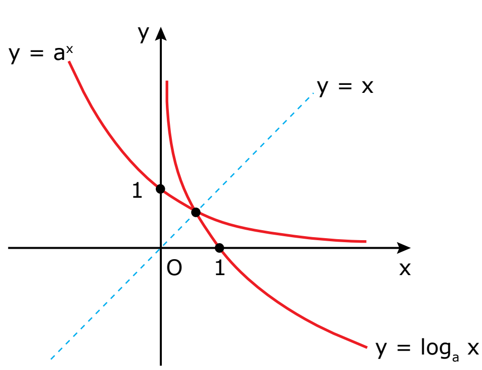
OBSERVAÇÃO

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, é inversa da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $g(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$. Os gráficos das funções **f** e **g** são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$).

1º caso: $a > 1$

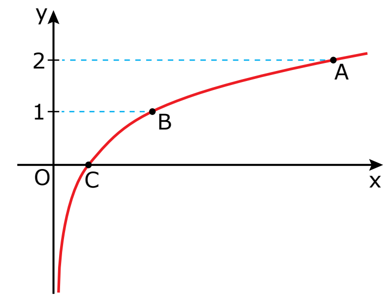


2º caso: $0 < a < 1$



EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFJF-MG) A figura a seguir é um esboço, no plano cartesiano, do gráfico da função $f(x) = \log_b x$, com alguns pontos destacados. Supondo que a abscissa do ponto **A** é igual a 9, é incorreto afirmar que:



A) a base **b** é igual a 3.

B) a abscissa de **C** é igual a 1.

C) $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$.

D) a abscissa de **B** é igual a 2.

E) $f(x)$ é crescente.

Resolução:

O ponto **A** possui abscissa 9 e ordenada 2. Substituindo, na expressão da função, temos:

$\log_b 9 = 2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Portanto, a alternativa A está correta.

Para $f(x) = 0$, temos $\log_b x = 0 \Rightarrow x = 1$. Logo, a abscissa do ponto **C** é igual a 1. Portanto, a alternativa B está correta.

Para $0 < x < 1$, as correspondentes imagens são negativas. Portanto, a alternativa C está correta.

Para $f(x) = 1$, temos $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$. Portanto, a alternativa D está incorreta.

O gráfico representa uma função crescente, pois a base $b = 3 > 1$, ou seja, a alternativa E está correta.

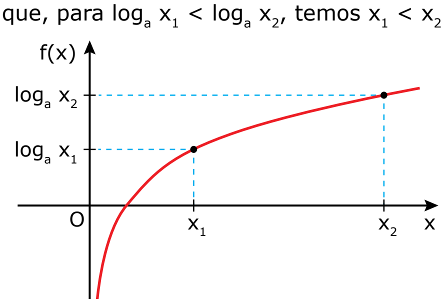
INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

É toda desigualdade em que a variável aparece no logaritmando ou na base do logaritmo. Há dois casos básicos:

Consideremos a função logarítmica $f(x) = \log_a x$.

1º caso: $a > 1$

O gráfico representa uma função crescente. Assim, observe que, para $\log_a x_1 < \log_a x_2$, temos $x_1 < x_2$.

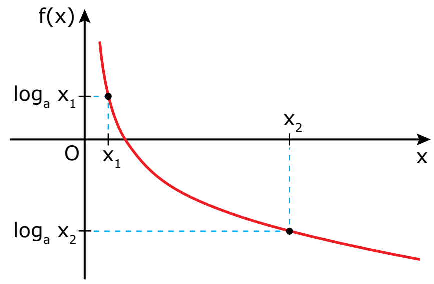


Portanto:

> Se **a > 1**, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao comparar os logaritmandos.
>
> $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

2º caso: $0 < a < 1$

O gráfico representa uma função decrescente. Assim, observe que, para $\log_a x_1 > \log_a x_2$, temos $x_2 > x_1$.



Portanto:

> Se **0 < a < 1**, devemos **inverter** o sinal da desigualdade ao comparar os logaritmandos.
>
> $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

OBSERVAÇÃO

Ao resolver uma inequação logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência dos logaritmos envolvidos. Portanto, a solução consiste na interseção dos intervalos obtidos da condição de existência dos logaritmos e da inequação logarítmica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\log_7 (x - 2) \leq \log_7 5$.

Resolução:

Verificamos, inicialmente, a condição de existência:

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad \text{(I)}$

Como $7 > 1$, devemos conservar a desigualdade para os logaritmandos, ou seja:

$x - 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 7 \quad \text{(II)}$

A solução é dada pela interseção dos intervalos (I) e (II).

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$.

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\log_{\frac{1}{6}} (2x - 8) > \log_{\frac{1}{6}} x$.

Resolução:

Verificamos, inicialmente, as condições de existência:

$$\begin{cases} 2x - 8 > 0 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \ \text{(I)} \\ \text{e} \\ x > 0 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Como $0 < \frac{1}{6} < 1$, devemos inverter a desigualdade para os logaritmandos, ou seja:

$2x - 8 < x \Rightarrow x < 8 \quad \text{(III)}$

A solução é dada pela interseção dos intervalos (I), (II) e (III).

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 8\}$.

04. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\log_2 7 + \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) \geq -3$.

Resolução:

A condição de existência é dada por:

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \quad \text{(I)}$

$\log_2 7 + \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) \geq -3 \Rightarrow$

$\log_2 7 + \log_{2^{-1}} (x + 1) \geq -3 \Rightarrow$

$\log_2 7 - \log_2 (x + 1) \geq -3\log_2 2 \Rightarrow$

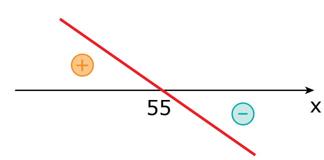
$\log_2 \left(\frac{7}{x+1}\right) \geq \log_2 2^{-3} \Rightarrow \frac{7}{x+1} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow$

$$\frac{7}{x+1} - \frac{1}{8} \geq 0 \Rightarrow \frac{56 - x - 1}{8(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-x + 55}^{\text{Função I}}}{\underbrace{8x + 8}_{\text{Função II}}} \geq 0$$

Estudo do sinal:

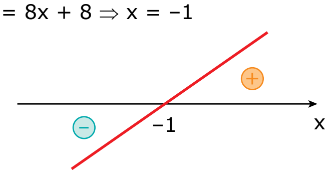
Função I: $y_1 = -x + 55$

Raiz: $0 = -x + 55 \Rightarrow x = 55$

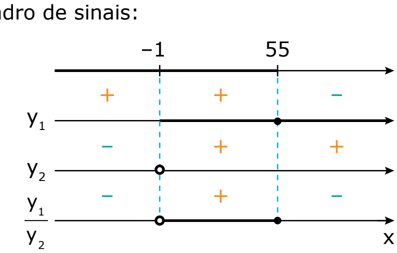


Função II: $y_2 = 8x + 8$

Raiz: $0 = 8x + 8 \Rightarrow x = -1$



Quadro de sinais:



Logo, o intervalo obtido da inequação logarítmica é $-1 < x \leq 55$ (II).

Com a interseção de (II) com a condição de existência (I), temos como solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 55\}$.

APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Há equações exponenciais que não conseguimos reduzir a potências de mesma base.

Assim, para resolver essas equações, devemos aplicar o logaritmo, em uma base adequada, dos dois lados da igualdade.

Esse artifício é utilizado devido ao fato de a função logarítmica ser a inversa da exponencial.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

05. Resolver a equação exponencial $4^x = 12$.
(Considerar: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48.)

Resolução:

$4^x = 12 \Rightarrow \log 4^x = \log 12 \Rightarrow$

$x.\log 4 = \log (4 \,.\, 3) \Rightarrow$

$x.\log 2^2 = \log 2^2 + \log 3 \Rightarrow$

$2x.\log 2 = 2.\log 2 + \log 3 \Rightarrow$

$2x.0,30 = 2 \,.\, 0,30 + 0,48 \Rightarrow$

$0,60x = 1,08 \Rightarrow x = 1,8$

06. (UFOP-MG) A massa de certo material radioativo num instante **t** é dada por $m(t) = m_0.10^{-kt}$. Se **t** é dado em anos, $m_0 = m(0) = 500$ g é a massa inicial, $m(20) = 400$ g, adotando log 2 = 0,3 e log 5 = 0,7, encontrar:

A) o valor de **k**.

B) o tempo necessário para que metade da massa inicial se desintegre.

Resolução:

A) Cálculo do valor de **k**:

Para t = 0, temos m(0) = 500.

Para t = 20, temos $m(20) = 500 \,.\, 10^{-20k} \Rightarrow$

$400 = 500 \,.\, 10^{-20k} \Rightarrow \dfrac{4}{5} = 10^{-20k} \Rightarrow$

$\log 10^{-20k} = \log\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow -20k = \log 4 - \log 5 \Rightarrow$

$-20k = 2.\log 2 - \log 5 \Rightarrow -20k = 2 \,.\, 0,3 - 0,7 \Rightarrow$

$-20k = 0,6 - 0,7 \Rightarrow -20k = -0,1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{200}$

B) Temos que $m(t) = 500 \,.\, 10^{-\frac{t}{200}}$.

Queremos que m(t) = 250 g (metade da massa inicial).

$250 = 500 \,.\, 10^{-\frac{t}{200}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = 10^{-\frac{t}{200}} \Rightarrow$

$\log\dfrac{1}{2} = \log\left(10^{-\frac{t}{200}}\right) \Rightarrow \log 1 - \log 2 = -\dfrac{t}{200} \Rightarrow$

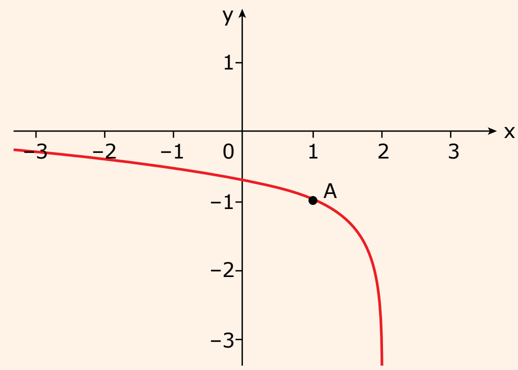
$0 - 0,30 = -\dfrac{t}{200} \Rightarrow t = 60$

O tempo necessário é igual a 60 anos.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPF-RS–2018) Na figura, está representada parte do gráfico da função **f** definida por f(x) = log (ax + 2) − 1, com a ≠ 0 e o ponto A(1, −1) pertencente ao gráfico da função **f**.



O valor de **a** é:

A) 1

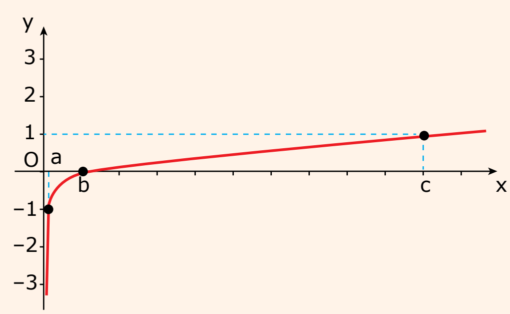
B) 2

C) −1

D) −2

E) 8

02. DN37 (PUC RS) Observando-se o céu após uma chuva, avista-se parte de um arco-íris atrás de uma construção. A parte visível poderia ser identificada como a representação gráfica da função **f** dada por f(x) = log x, a seguir.



A soma dos valores **a**, **b** e **c**, indicados na figura, é:

A) 11,1

B) 14,5

C) 14,9

D) 15,5

E) 100,1

03. CJHU (CEFET-MG) Considere a função f:]−2, ∞[→ ℝ definida por $f(x) = \log_3 (x + 2)$. Se $f(a) = \dfrac{1}{3}f(b)$, então:

A) $a = \sqrt[3]{b+1}$

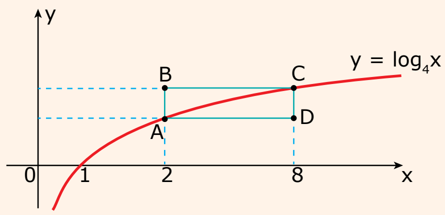
B) $a = \sqrt[3]{b+3}$

C) $a = \sqrt[3]{b+2} - 2$

D) $a = \sqrt[3]{b+4} + 2$

04. OVSR

(EsPCEx-SP–2017) A curva do gráfico a seguir representa a função $y = \log_4 x$.



A área do retângulo ABCD é:

A) 12

B) 6

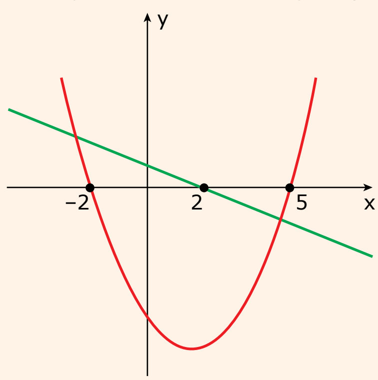
C) 3

D) $6\log_4 \frac{3}{2}$

E) $\log_4 6$

05. CEEP

(CEFET-MG) Os gráficos das funções **f** e **g** estão representados geometricamente na figura que se segue.



Se **h** é a função definida $h(x) = \log (f(x).g(x))$, o domínio de **h** é:

A) $]-2, 2[\cup]5, +\infty[$

B) $]-\infty, -2[\cup]2, 5[$

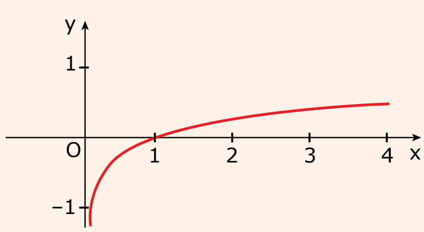
C) $]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[$

D) $\mathbb{R} -]-2, 5[$

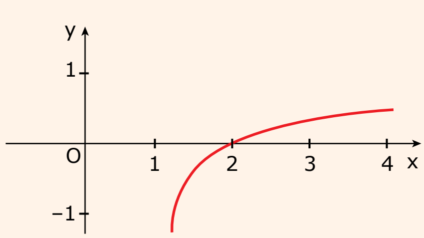
E) $]-2, 5[$

06. (UEG-GO) O gráfico da função $y = \log (x + 1)$ é representado por:

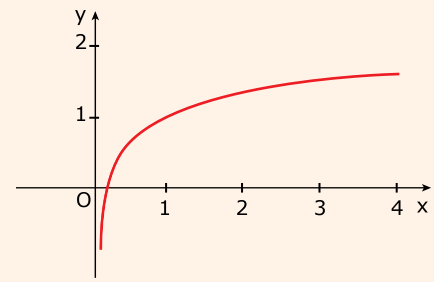
A)



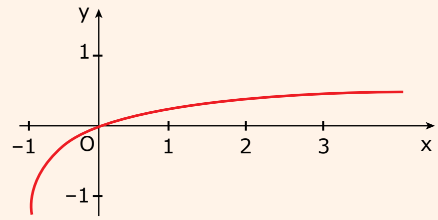
B)



C)



D)



07. WRMW

(UDESC-SC) O conjunto de números reais que representa a interseção entre os domínios das funções

$$f(x) = \sqrt{(-2x^2 - 6x + 8)} \text{ e } g(x) = \log (x + 2)$$

é um intervalo

A) aberto à direita e fechado à esquerda.

B) aberto nos dois extremos.

C) fechado nos dois extremos.

D) infinito.

E) aberto à esquerda e fechado à direita.

08. XUDT

(ESPM-SP) Em 1997 iniciou-se a ocupação de uma fazenda improdutiva no interior do país, dando origem a uma pequena cidade. Estima-se que a população dessa cidade tenha crescido segundo a função $P = 0,1 + \log_2 (x - 1\,996)$, onde **P** é a população no ano **x**, em milhares de habitantes. Considerando $\sqrt{2} \cong 1,4$, podemos concluir que a população dessa cidade atingiu a marca dos 3 600 habitantes em meados do ano

A) 2005.

B) 2002.

C) 2011.

D) 2007.

E) 2004.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KAUF

(UECE) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 10^{1 - Lx}$ então, o valor de $\log(f(e))$ é igual a

Atenção!

e = base do logaritmo natural;

Log = logaritmo na base 10;

L = logaritmo natural.

A) $\frac{1}{2}$.

B) 0.

C) $\frac{1}{3}$.

D) 1.

02. C6HU

(UERN) O produto entre o maior número inteiro negativo e o menor número inteiro positivo que pertence ao domínio da função $f(x) = \log_3 (x^2 - 2x - 15)$ é:

A) –24
B) –15
C) –10
D) –8

03. (UESB-BA–2018) É correto afirmar que o conjunto-solução da inequação em $x \in \mathbb{R}$, expressa por $\log_2 (x^3 - x^2 + 1) \geq 0$, é:

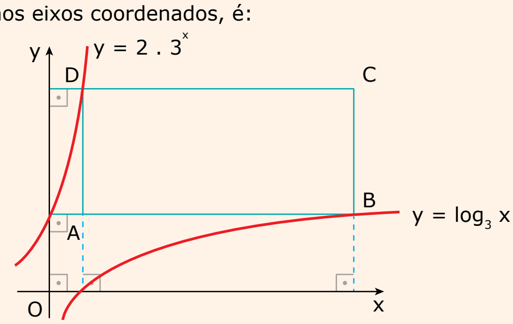
A) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
B) $[-1, 1]$
C) $[0, +\infty[$
D) $[1, +\infty[$
E) $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$

04. (FGV-SP) A solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) > 0$ é:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\sqrt{3} \text{ ou } \sqrt{3} < x < 2\}$
E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

05. UEGJ

(UNIFESP) Com base na figura, o comprimento da diagonal AC do quadrilátero ABCD, de lados paralelos aos eixos coordenados, é:



A) $2\sqrt{2}$
B) $4\sqrt{2}$
C) 8
D) $4\sqrt{5}$
E) $6\sqrt{3}$

06. 4IKJ

(UEL-PR–2020) No Brasil, a preservação natural de um cadáver é rara devido ao clima tropical e ao solo ácido, que aceleram a sua decomposição. Por isso, a múmia encontrada em Goianá, Minas Gerais, no século XIX é tão incomum.

Disponível em: <www.museunacional.ufrj.br> (Adaptação).

Uma múmia encontrada em território brasileiro.
Museu Nacional do Rio de Janeiro

Passados **t** anos após a morte deste ser humano, suponha que a massa m(t) de seu cadáver, medida em quilogramas, seja dada por $m(t) = 40e^{-C.t}$, onde $e > 1$ é uma constante e **C** é um parâmetro relacionado às características morfoclimáticas da região onde originalmente se encontrava. Admitindo que passados t = 600 anos a múmia possuía exatos 4 kg, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do parâmetro **C**.

A) $C = \frac{1}{200}\log_e 50$
B) $C = \frac{1}{300}\log_e 20$
C) $C = \frac{1}{400}\log_e 30$
D) $C = \frac{1}{500}\log_e 40$
E) $C = \frac{1}{600}\log_e 10$

07. (FUVEST-SP) O conjunto dos números reais **x** que satisfazem a inequação $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$ é o intervalo:

A) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$
B) $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$
C) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$
D) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$
E) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

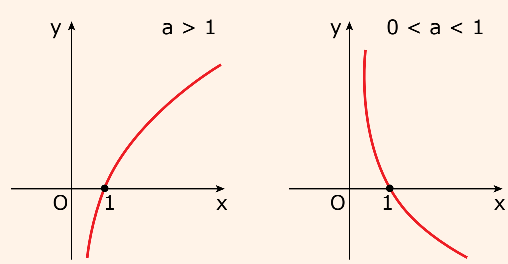
08. NK2N

(UECE) O domínio da função real de variável real definida por $f(x) = \log_7 (x^2 - 4x).\log_3 (5x - x^2)$ é o intervalo aberto cujos extremos são os números

A) 3 e 4.
B) 4 e 5.
C) 5 e 6.
D) 6 e 7.

09. CXG1

(FUVEST-SP) Seja **f** uma função a valores reais, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_{10}\left[\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1)\right]$ para todo $x \in D$.



Gráficos da função logarítmica de base a.

O conjunto que pode ser o domínio **D** é:

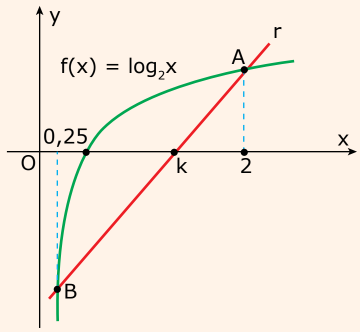
A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$
C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < 10\right\}$
D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 10\right\}$
E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

10. 551Q (UECE–2017) Se **f** é a função real de variável real definida por então, $f(x) = \log(4 - x^2) + \sqrt{4x - x^2}$, o maior domínio possível para **f** é:

log x = logaritmo de **x** na base 10

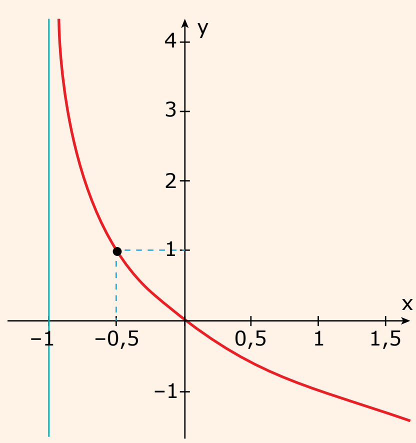
A) {números reais **x** tais que $0 \leq x < 4$}.
B) {números reais **x** tais que $2 < x < 4$}.
C) {números reais **x** tais que $-2 < x < 4$}.
D) {números reais **x** tais que $0 \leq x < 2$}.

11. 4FQ3 (UFPR) Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta **r** que passa pelos pontos **A** e **B**, como indicado na figura a seguir, sendo **k** a abscissa do ponto em que a reta **r** intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de **k**?



A) $\frac{17}{12}$
B) $\frac{14}{11}$
C) $\frac{12}{7}$
D) $\frac{11}{9}$
E) $\frac{7}{4}$

12. NX59 (UEG-GO–2018) O gráfico a seguir é a representação da função $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{ax + b}\right)$.



O valor de $f^{-1}(-1)$ é
A) -1.
B) 0.
C) -2.
D) 2.
E) 1.

13. (UCS-RS) Um equipamento é depreciado de tal forma que, **t** anos após a compra, seu valor é dado por $V(t) = C.e^{-0,2t} + 31\,000$. Se 10 anos após a compra o equipamento estiver valendo R$ 112 000,00, então ele foi comprado por um valor, em reais,

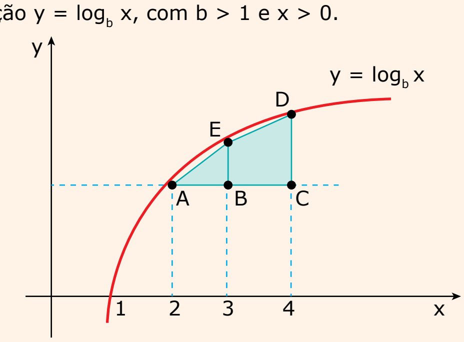
Dado: $\ln 7,4 \cong 2$.

A) maior que 700 000.
B) entre 600 000 e 700 000.
C) entre 500 000 e 600 000.
D) entre 400 000 e 500 000.
E) menor que 400 000.

14. VM4X (UCB-DF) Quando se administra uma medicação a um paciente, a droga entra na corrente sanguínea e, após a metabolização, é eliminada de tal forma que a quantidade presente no organismo decresce exponencialmente. Com base no exposto, suponha que, para o antibiótico ampicilina, 40% da droga presente no organismo de uma pessoa é eliminada a cada hora após a aplicação. Se uma dose típica de ampicilina tem 250 mg, e considerando que $\log 6 = 0,77$, o tempo necessário, em horas, para que o organismo de uma pessoa elimine 235 mg dessa dose é

A) menor que 4.
B) entre 4 e 4,4.
C) entre 4,4 e 4,8.
D) entre 4,8 e 5,2.
E) maior que 5,2.

15. G9SE (ACAFE-SC) A figura a seguir representa o gráfico da função $y = \log_b x$, com $b > 1$ e $x > 0$.



Nessa representação, o polígono ABCDE possui área igual a:

A) $\log_b \frac{3\sqrt{2}}{2}$
B) $\log_b 3$
C) $\log_b 3 + \log_b 2$
D) $1,5.\log_b \sqrt{2}$

16. EC17 (Unifor-CE) As populações de duas cidades A e B são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^9$ e $B(t) = \log_2 (16t + 16)$ onde **t** é dado em anos. Após certo instante **t**, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a outra. O valor mínimo desse instante **t** é de

A) 2 anos.
B) 3 anos.
C) 4 anos.
D) 5 anos.
E) 6 anos.

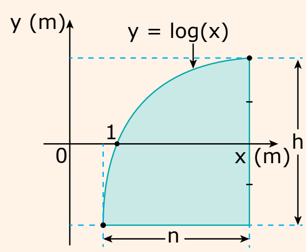
17. CZRZ (Unicamp-SP) A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0,5 + \log_3(t + 1)$, onde o tempo $t \geq 0$ é dado em anos.

A) Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?

B) Suponha que outro arbusto, nessa mesma fase de desenvolvimento, tem sua altura expressa pela função composta $g(t) = h(3t + 2)$. Verifique que a diferença $g(t) - h(t)$ é uma constante, isto é, não depende de **t**.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log(x)$, conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura **h** do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura **h** do vidro em função da medida **n** de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é:

A) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

B) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) - \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

C) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) + \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

D) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

E) $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

02. (Enem) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada com MMS e denotada como M_W), introduzida, em 1979, por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. *Historic Earthquakes*. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 01 maio 2010 (Adaptação).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. *USGS Earthquake Magnitude Policy*. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 01 maio 2010 (Adaptação).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

A) $10^{-5,10}$
B) $10^{-0,73}$
C) $10^{12,00}$
D) $10^{21,65}$
E) $10^{27,00}$

03. Uma das grandezas relacionadas ao som é a sua altura **A**, medida em decibéis (dB). A altura de um som está relacionada com a sua intensidade **I**, medida em watts por metro quadrado, através da função:

$$A(I) = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

sendo I_0 uma constante que vale $10^{-12}\ \dfrac{W}{m^2}$.

Sabe-se que as intensidades sonoras aproximadas de um carro e de um avião a jato são iguais a $10^{-4}\ \dfrac{W}{m^2}$ e $10^{2}\ \dfrac{W}{m^2}$, respectivamente. Portanto, pode-se afirmar que a razão entre as alturas dos sons produzidos pelo avião e pelo carro, nessa ordem, é igual a

A) 1,75.
B) 1,85.
C) 1,95.
D) 2,05.
E) 2,35.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. A
03. C
04. B
05. B
06. D
07. E
08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. A
03. D
04. D
05. D
06. E
07. D
08. B
09. A
10. D
11. A
12. E
13. B
14. E
15. A
16. B
17.
   A) 2 anos
   B) Demonstração

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. E
03. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Princípio Fundamental da Contagem e Arranjos

INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que se preocupa em contar as possibilidades. Alguns problemas bem simples podem ser resolvidos enumerando-se todas as possibilidades. Por exemplo:

Quantos são os números ímpares entre 10 e 20?

Em outras situações, entretanto, a enumeração torna-se muito trabalhosa. Nesses casos, é necessária a utilização de algumas técnicas de contagem. Por exemplo:

Quantas são as placas de carros que podem ser formadas com 3 letras e 4 algarismos?

O Princípio Fundamental da Contagem nos dá a resposta.

COMO CONTAR SEM CONTAR?

Se dispomos de 3 bermudas e 2 camisas, todas distintas, de quantas formas podemos vesti-las para ir a um churrasco?

Vamos, inicialmente, escolher a bermuda. Há 3 possibilidades. Para cada uma delas, independentemente de qual escolhemos, teremos sempre 2 opções de camisa.

Vejamos:

Bermuda 1 → Camisa 1
Bermuda 1 → Camisa 2

Bermuda 2 → Camisa 1
Bermuda 2 → Camisa 2

Bermuda 3 → Camisa 1
Bermuda 3 → Camisa 2

O número de maneiras de vestir-se é, portanto, 3 . 2 = 6.

Nesse exemplo, aplicamos, de maneira intuitiva, o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), que podemos enunciar assim:

Se um determinado evento pode ocorrer de **x** maneiras, e um outro evento pode ocorrer de **y** maneiras (independentemente do resultado do primeiro evento), então os dois juntos podem ocorrer de x.y maneiras.

OBSERVAÇÃO

Esse princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais eventos independentes.

Exemplos:

1º) Quantos são os resultados possíveis para o lançamento de uma moeda três vezes?

Para cada vez que lançarmos a moeda, temos duas possibilidades: cara (**K**) ou coroa (**C**).

1ª vez	2ª vez	3ª vez	Resultado
K	K	K	→ (K, K, K)
		C	→ (K, K, C)
	C	K	→ (K, C, K)
		C	→ (K, C, C)
C	K	K	→ (C, K, K)
		C	→ (C, K, C)
	C	K	→ (C, C, K)
		C	→ (C, C, C)

Pela árvore anterior, verificamos que são 8 resultados possíveis. Pelo P.F.C., temos:

$$\underbrace{2}_{1^a\ vez} \cdot \underbrace{2}_{2^a\ vez} \cdot \underbrace{2}_{3^a\ vez} = 8$$

2º) Quantos são os números de três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos do sistema decimal?

Temos três posições para preencher: $\underline{1^a}$ $\underline{2^a}$ $\underline{3^a}$

Como não podemos começar com zero e os algarismos devem ser distintos, pelo P.F.C., temos:

$$\overline{9} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8} = 648$$

Todos os números menos os dois já utilizados

Todos os números menos o já utilizado

Todos os números menos o zero

3º) De quantas maneiras dois casais podem se sentar em dois degraus de uma escada para tirar uma fotografia, se em cada degrau deve ficar um casal?

Temos quatro posições a serem preenchidas na escada:

$$\begin{array}{cc} \underline{1^a} & \underline{2^a} \\ \underline{3^a} & \underline{4^a} \end{array}$$

Na 1ª posição, podemos colocar qualquer pessoa (4 possibilidades). Depois de preenchida a 1ª posição, para o 2º lugar, temos sempre uma única possibilidade (pois o casal é definido).

Para a 3ª posição, temos duas possibilidades e, para a 4ª posição, temos uma possibilidade.

Assim, pelo P.F.C., temos, então, $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ formas diferentes de os dois casais se sentarem na escada.

$$\begin{array}{cc} \underline{4} & \underline{1} \\ \underline{2} & \underline{1} \end{array}$$

4º) Quantos são os números pares com três algarismos distintos que podemos formar com algarismos do sistema decimal?

Temos três posições para preencher: $\underline{1^a}$ $\underline{2^a}$ $\underline{3^a}$

Se escolhermos os algarismos 2 e 3, por exemplo, para as duas primeiras posições, teremos 4 possibilidades para o 3º algarismo, que deve ser par (0, 4, 6, 8).

Porém, se escolhermos inicialmente os algarismos 2 e 6, teremos 3 possibilidades para o 3º algarismo (0, 4, 8).

Isso cria um problema que pode ser resolvido iniciando-se o preenchimento das posições pela casa que possui a maior restrição. Assim, devemos separar o problema em dois casos:

1º caso: Pares terminados em zero.

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \frac{0}{1}$$

Possibilidade

Logo, pelo P.F.C., teremos:

$$\overline{9} \cdot \overline{8} \cdot \overline{1} = 72$$

Número zero

Todos, menos os dois já utilizados

Todos, menos zero

2º caso: Pares não terminados em zero.

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \frac{\{2, 4, 6, 8\}}{4}$$

Possibilidades

Logo, pelo P.F.C., teremos:

$$\overline{8} \cdot \overline{8} \cdot \overline{4} = 256$$

Número 2, 4, 6 ou 8

Todos, menos os dois números já utilizados

Todos, menos o zero e o número par utilizado

Somando-se as quantidades de números pares com três algarismos distintos, teremos o total:

$$72 + 256 = 328$$

NOTAÇÃO FATORIAL

No estudo de problemas de Análise Combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos. Para facilitar a representação desses produtos, foi criada a notação fatorial.

Assim, define-se:

$$\boxed{\begin{array}{l} n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1,\ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \\ 0! = 1,\ 1! = 1 \end{array}}$$

Exemplos:

1º) Simplificação de frações.

A) $\dfrac{6!}{5!\,.\,3!} = \dfrac{6\,.\,5!}{5!\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = \dfrac{6}{6} = 1$

B) $\dfrac{4!\,.\,9!}{10!\,.\,7!} = \dfrac{4!\,.\,9!}{10\,.\,9!\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!} = \dfrac{1}{2\,100}$

C) $\dfrac{10.(n+10)!}{10!.(n+10)} = \dfrac{10.(n+10).(n+9)!}{10\,.\,9!.(n+10)} = \dfrac{(n+9)!}{9!}$

2º) Calcular o valor de **n** na equação $\dfrac{(n+10)!}{(n+8)!} = 110$.

$\dfrac{(n+10).(n+9).(n+8)!}{(n+8)!} = 110 \Rightarrow n^2 + 19n + 90 = 110$

$n^2 + 19n - 20 = 0 \Rightarrow n = -20$ ou $n = 1$

$n = -20$ (matematicamente inconsistente)

Portanto, $n = 1$.

ARRANJOS SIMPLES

Considere o seguinte problema:

Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Observe que, em um número de três algarismos distintos, a ordem ocupada por um determinado algarismo é importante, pois, ao trocarmos esse algarismo de posição, o número como um todo se altera. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

Centena	Dezena	Unidade
↓	↓	↓
6 .	5 .	4

= 120 números

Observe que $6\,.\,5\,.\,4 = \dfrac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{3\,.\,2\,.\,1} = \dfrac{6!}{3!}$.

É interessante verificar que há 6 elementos à disposição, e que cada grupo formado terá 3 elementos cada. Dizemos que cada grupo formado é um arranjo simples de 6 elementos, tomados 3 a 3.

De maneira geral, seja um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ com **n** elementos distintos. Queremos formar grupos com **p** elementos cada ($n > p$), de modo que a ordem dos elementos em cada grupo seja importante.

Assim, temos:

Posição 1	Posição 2	Posição 3	...	Posição **p**
↓	↓	↓	↓	↓
n	$n - 1$	$n - 2$	...	$n - (p - 1)$

Observe que há **p** posições a serem preenchidas. Temos que:

- a primeira posição pode ser preenchida de **n** modos.
- a segunda posição pode ser preenchida de $(n - 1)$ modos.
- a terceira posição pode ser preenchida de $(n - 2)$ modos.

⋮

- a p-ésima posição pode ser preenchida de $[n - (p - 1)]$ modos.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de grupos formados é igual a:

$n.(n - 1).(n - 2).\ ...\ .[n - (p - 1)] =$

$n.(n - 1).(n - 2).\ ...\ .[n - p + 1] =$

$\dfrac{n.(n-1).(n-2).\ ...\ .(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} =$

$\dfrac{n!}{(n-p)!}$

Esse resultado corresponde ao número de arranjos simples de **n** elementos, tomados **p** a **p**, que indicamos por $A_{n,\,p}$.

$$\boxed{A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplo:

Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto $A = \{2, 3, 5, 6, 7,8, 9\}$?

Temos $A_{7,\,4} = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!} = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4 = 840$ números.

OBSERVAÇÃO

As permutações simples de **n** elementos de um conjunto podem ser consideradas arranjos simples, nos quais $n = p$.

Assim, temos:

$$P_n = A_{n,\,n} = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n!$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (CMMG–2020) Um hospital possui 5 salas de cirurgias eletivas, utilizadas diariamente por 8 médicos-cirurgiões. Duas dessas salas destinam-se apenas aos procedimentos ortopédicos, sendo ocupadas, em todos os momentos de funcionamento do hospital, por 1 dos 2 ortopedistas que compõem a equipe.

Em certo momento, o número de possibilidades de organizações para a ocupação das salas é de

A) 120.
B) 240.
C) 336.
D) 6720.

02. RBFK
(UEG-GO) Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é:

A) 64
B) 24
C) 12
D) 4

03. (IFPE) Um auditório em forma de um salão circular dispõe de 6 portas, que podem ser utilizadas tanto como entrada ou para saída do salão. De quantos modos distintos uma pessoa que se encontra fora do auditório pode entrar e sair do mesmo, utilizando como porta de saída uma porta diferente da que utilizou para entrar?

A) 6
B) 5
C) 12
D) 30
E) 36

04. DMM7
(UEMG) "Genius era um brinquedo muito popular na década de 1980 [...]. O brinquedo buscava estimular a memorização de cores e sons. Com formato semelhante a um OVNI, possuía 4 botões de cores distintas que emitiam sons harmônicos e se iluminavam em sequência. Cabia aos jogadores repetir o processo sem errar".

WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre (Adaptação).

Considerando uma fase do jogo em que 3 luzes irão acender de forma aleatória e em sequência, podendo cada cor acender mais de uma vez.

O número máximo de formas que essa sequência de 3 luzes poderá acender é:

A) 12
B) 24
C) 36
D) 64

05. Z79Q
(UEG-GO) Uma montadora de carros oferece a seus clientes as seguintes opções na montagem de um carro: 2 tipos de motores (1.8 ou 2.0), 2 tipos de câmbios (manual ou automático), 6 cores (branco, preto, vermelho, azul, cinza ou prata) e 3 tipos de acabamento (simples, intermediário ou sofisticado). De quantas maneiras distintas pode-se montar esse carro?

A) 4
B) 13
C) 24
D) 36
E) 72

06. AMWS
(PUC-SP) No vestiário de uma Academia de Ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa Academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

A) 14
B) 28
C) 48
D) 56
E) 112

07. CPLN
(Unicamp-SP) Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado a seguir.

ABC 1234	ABCD 123

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria

A) inferior ao dobro.
B) superior ao dobro e inferior ao triplo.
C) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
D) mais que o quádruplo.

08. 3W8Z
(UECE) Utilizando apenas os algarismos 2 e 3, a quantidade de números inteiros positivos e menores que 1 000 000 (incluindo aqueles com algarismos repetidos) que podem ser escritos no sistema decimal é:

A) 125
B) 126
C) 127
D) 128

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 40FB
(UCS-RS) Em uma prova, as seis primeiras questões eram do tipo **C** / **E**, em que o candidato devia optar entre certo ou errado para sua resposta. Nas outras quatro questões, o candidato devia escolher, entre três alternativas, a verdadeira.

Quantas sequências de respostas são possíveis na resolução da prova?

A) $(6 . 2)^2$
B) $(6 . 2) + (4 . 3)$
C) $6^2 . 4^3$
D) 10^{2+3}
E) $2^6 . 3^4$

02. (UECE–2019) Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece?

A) 136
B) 200
C) 176
D) 194

03. 6G82

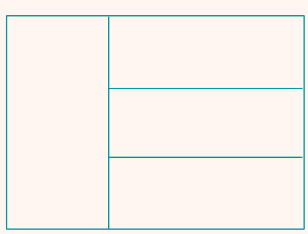
(UDESC–2020) As novas placas de carro no padrão Mercosul começaram a ser usadas, em alguns estados do Brasil, em dezembro de 2018, e a implementação destas será gradual. O modelo antigo e o novo (padrão Mercosul) têm sete caracteres alfanuméricos. Na placa antiga, as letras e números podiam ser repetidos, mas tinham posição fixa em uma sequência: LLL NNNN (sendo L letra e N número). Na nova placa, além de ter 4 letras e 3 números, esses podem ser embaralhados e repetidos. Em um primeiro momento, no Brasil, foi definida uma sequência fixa da seguinte forma: LLL NLNN.

Considerando a nova placa, no padrão Mercosul, com a sequência fixa LLL NLNN, a quantidade de placas a mais que se passa a ter, em relação ao modelo antigo, é:

A) 456 976 000
B) 281 216 000
C) 158 171 000
D) 17 576 000
E) 2 600

04. KLFS

(UFRN) O quadro de avisos de uma escola de Ensino Médio foi dividido em quatro partes, como mostra a figura a seguir.

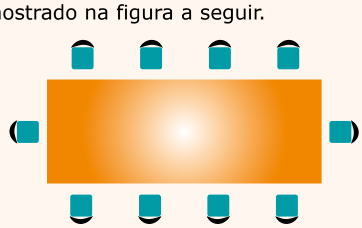


No retângulo à esquerda, são colocados os avisos da diretoria, e, nos outros três retângulos, serão colocados, respectivamente, de cima para baixo, os avisos dos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio.

A escola resolveu que retângulos adjacentes (vizinhos) fossem pintados, no quadro, com cores diferentes. Para isso, disponibilizou cinco cores e solicitou aos servidores e alunos sugestões para a disposição das cores no quadro.

Determine o número máximo de sugestões diferentes que podem ser apresentadas pelos servidores e alunos.

05. (PUC-SP) Na sala de reuniões de certa empresa, há uma mesa retangular com 10 poltronas dispostas da forma como é mostrado na figura a seguir.



Certo dia, sete pessoas foram convocadas para participar de uma reunião a ser realizada nessa sala: o presidente, o vice-presidente, um secretário e quatro membros da diretoria. Sabe-se que: o presidente e o vice-presidente deverão ocupar exclusivamente as poltronas das cabeceiras da mesa; o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente.

Considerando que essas poltronas são fixas no piso da sala, de quantos modos as sete pessoas podem nelas se acomodar para participar de tal reunião?

A) 3 360
B) 2 480
C) 1 680
D) 1 240
E) 840

06. DWS7

(FGV-SP) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:

A) 1 680
B) 1 344
C) 720
D) 224
E) 136

07. QQGX

(Fatec-SP) Dispondo de cinco cores distintas, uma pessoa pretende pintar as letras da palavra FATEC de acordo com os seguintes critérios:

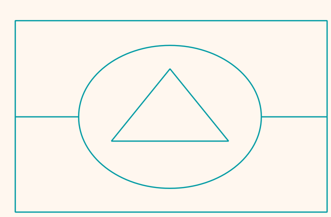
- Na palavra, letras que são equidistantes da letra **T** terão a mesma cor;
- Letras adjacentes serão pintadas de cores distintas, e
- Cada letra será pintada com uma única cor.

O número de modos distintos de se realizar essa pintura é:

A) 120
B) 90
C) 80
D) 50
E) 40

08. 91TR

(Unisinos-RS) A bandeira a seguir está dividida em 4 regiões. Cada região deverá ser pintada com uma cor, e regiões que fazem fronteira devem ser pintadas com cores diferentes.



Sabendo que dispomos de 6 cores, de quantas maneiras distintas podemos pintar essa bandeira?

A) 20
B) 24
C) 120
D) 600
E) 720

09. CDCK

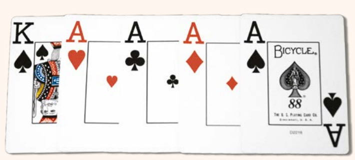
(UECE) Se os conjuntos **X** e **Y** possuem, respectivamente, cinco e oito elementos, quantas funções, f: X → Y, injetivas e distintas, podem ser construídas?

A) 6 680
B) 6 700
C) 6 720
D) 6 740

MATEMÁTICA

10. (UERJ) Na ilustração a seguir, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.

Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:



O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a

A) 624.
B) 676.
C) 715.
D) 720.

11. (UPE) Um palíndromo ou capicua é um número que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 333, 1 661 e 28 482.

Assinale a alternativa correspondente à quantidade de palíndromos que são números pares de cinco algarismos do nosso sistema de numeração.

A) 300
B) 400
C) 500
D) 600
E) 800

12. HW4Ø (UFJF-MG) Quantos são os números de 7 algarismos distintos divisíveis por 5, começando com um número ímpar, e tal que dois algarismos adjacentes não tenham a mesma paridade, isto é, não sejam simultaneamente pares ou simultaneamente ímpares?

A) 20 160
B) 3 600
C) 2 880
D) 1 440
E) 1 200

13. 8IH8 (FUVEST-SP)

A) Quantos são os números inteiros positivos de quatro algarismos, escolhidos sem repetição, entre 1, 3, 5, 6, 8, 9?

B) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item A, quantos são divisíveis por 5?

C) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item A, quantos são divisíveis por 4?

14. W98M (EPCAR-MG–2017) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (**J**), 1 dama (**Q**), 1 rei (**K**) e 1 ás (**A**).

Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a

A) 612.
B) 613.
C) 614.
D) 615.

15. 55GD (UECE) Paulo possui 709 livros e identificou cada um destes livros com um código formado por três letras do nosso alfabeto, seguindo a "ordem alfabética" assim definida: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ACA, ... Então, o primeiro livro foi identificado com AAA, o segundo com AAB, ... Nestas condições, considerando o alfabeto com 26 letras, o código associado ao último livro foi:

A) BAG
B) BAU
C) BBC
D) BBG

16. YKEW (FUVEST-SP) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

A) 551
B) 552
C) 553
D) 554
E) 555

17. UBQF (UECE) No sistema de numeração decimal, quantos números de três dígitos distintos podemos formar, de modo que a soma dos dígitos de cada um destes números seja um número ímpar?

A) 420
B) 380
C) 360
D) 320

18. (UFU-MG) A senha de acesso ao cofre de um carro-forte é formada por **d** algarismos, em que esses algarismos pertencem ao conjunto de inteiros {0, 1, 2, ..., 9}. Um dos guardas observa o colega digitar o último algarismo da senha, concluindo que esta corresponde a um número ímpar. Assuma que esse guarda demore 1,8 segundos para realizar cada tentativa de validação da senha, sem realizar repetições, de maneira que, assim procedendo, no máximo em duas horas e meia terá sucesso na obtenção da senha.

Segundo as condições apresentadas, conclui-se que o valor de **d** é um número

A) quadrado perfeito.
B) primo.
C) divisível por 3.
D) múltiplo de 5.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formado é dado por:

A) 9!
B) 4!5!
C) 2 . 4!5!
D) $\frac{9!}{2}$
E) $\frac{4!5!}{2}$

02. Y8YO (Enem–2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

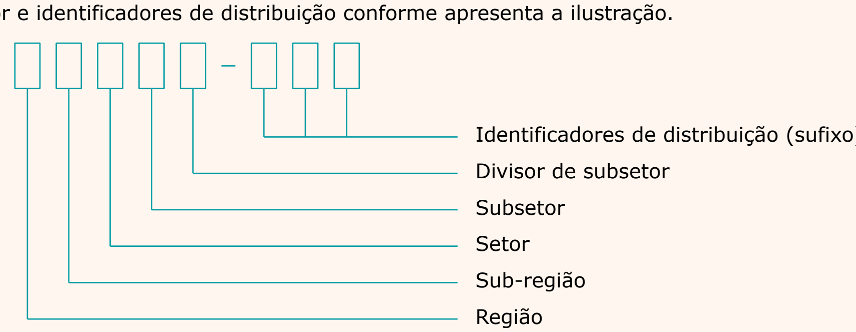
JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: <www.pt.fifa.com>. Acesso em: 19 nov. 2013 (Adaptação).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

A) 15
B) 30
C) 108
D) 360
E) 972

03. (Enem–2017) O Código de Endereçamento Postal (CEP) é um código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios. A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: <www.correios.com.br>. Acesso em: 22 ago. 2017 (Adaptação).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

A) $5 . 0 + 9 . 10^2$
B) $10^5 + 9 . 10^2$
C) $2 . 9 . 10^7$
D) $9 . 10^2$
E) $9 . 10^7$

04. (Enem) Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado **B** no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado **B** no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

A) 21
B) 90
C) 750
D) 1 250
E) 3 125

05. (Enem) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela Internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

A) $\dfrac{62^6}{10^6}$
B) $\dfrac{62!}{10!}$
C) $\dfrac{62!\,.\,4!}{10!\,.\,56!}$
D) $62! - 10!$
E) $62^6 - 10^6$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. D
04. D
05. E
06. D
07. A
08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. B
03. B
04. 180 sugestões diferentes
05. A
06. B
07. C
08. D
09. C
10. A
11. B
12. D
13.
   A) 360
   B) 60
   C) 60
14. A
15. D
16. A
17. D
18. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. E
03. E
04. C
05. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Permutações

INTRODUÇÃO

Considere o seguinte problema:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 3 e 7?

Observe que o total de dígitos à disposição é igual à quantidade de elementos (algarismos) de cada número formado. Os números formados são 137, 173, 317, 371, 713 e 731. Tais números diferem entre si somente pela **ordem** na qual os elementos estão dispostos.

Esses agrupamentos são chamados **permutações simples** dos dígitos 1, 3 e 7.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ com **n** elementos distintos. Vamos considerar o problema de formar grupos com **n** elementos distintos, de modo que a ordem dos elementos dentro de cada um desses grupos seja importante.

Posição 1	Posição 2	Posição 3	...	Posição **n**
↓	↓	↓		↓
n	n – 1	n – 2	...	1

Observe que há **n** posições a serem preenchidas. Assim, temos:

A primeira posição pode ser preenchida de **n** modos.

A segunda posição pode ser preenchida de (n – 1) modos.

A terceira posição pode ser preenchida de (n – 2) modos.

⋮

A n-ésima posição pode ser preenchida de 1 modo.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número de grupos é igual a:

$n.(n - 1).(n - 2).(n - 3). ... .1$, ou seja, $n!$

Esses grupos formados são chamados **permutações simples** dos **n** elementos, e são indicados por P_n.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo:

Determinar o número de anagramas obtidos a partir das letras da palavra DOCE.

Cada anagrama é obtido mediante a troca da posição das letras fornecidas. Portanto, trata-se de um problema de permutações simples. Assim, temos:

$P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$ anagramas

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Considere o seguinte problema:

Quantos são os anagramas da palavra AMANHECE?

Devemos, inicialmente, distribuir as 8 letras em 8 posições.

i) A distribuição das letras **A** e **A** pode ser feita de $\frac{A_{8,2}}{2!}$ modos. Observe que dividimos o resultado por 2!, porque as permutações das letras **A** e **A** são idênticas.

ii) Após definirmos as posições das letras **A** e **A**, restam 6 posições. A distribuição das letras **E** e **E** pode ser feita de $\frac{A_{6,2}}{2!}$ modos.

iii) Após distribuirmos as letras **A**, **A**, **E** e **E**, restam 4 posições. As letras restantes podem ser distribuídas de 4! modos.

O número de anagramas é dado por:

$$\frac{A_{8,2}}{2!}.\frac{A_{6,2}}{2!}.4! = \frac{8!}{6!.2!}.\frac{6!}{4!.2!}.4! = \frac{8!}{2!.2!}$$

Generalizando, temos:

$$\boxed{P_n^{\alpha, \beta, ..., \theta} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!. ... .\theta!}}$$

Em que α, β, ..., θ indicam o número de repetições de cada elemento do conjunto.

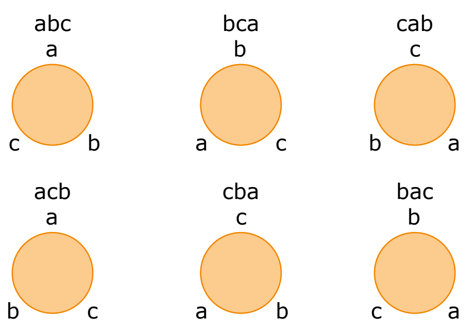
No exemplo, temos $P_8^{2,2} = \frac{8!}{2!.2!} = 10\ 080$ anagramas.

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Chamamos de permutações circulares as permutações de elementos dispostos em torno de um círculo. Duas distribuições são consideradas idênticas quando uma delas pode ser obtida a partir da outra, mediante uma rotação simples. Observe o problema a seguir:

De quantos modos podemos distribuir três objetos **a**, **b** e **c** em torno de um círculo?

Considere as seguintes configurações:



A princípio, podemos pensar que temos $P_3 = 3! = 6$ modos de distribuir **a**, **b** e **c**. No entanto, em cada uma das linhas do esquema anterior há três configurações idênticas. Cada uma das figuras de uma linha pode ser obtida a partir das demais figuras da mesma linha com uma rotação simples. Porém, cada configuração em uma linha não pode ser obtida a partir de uma rotação simples de uma configuração da outra linha.

Desse modo, temos apenas $\frac{P_3}{3} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2$ permutações circulares. Observe que dividimos o total de permutações por 3, pois cada uma das permutações consideradas gera 3 configurações idênticas, que devem contar como uma.

De maneira geral, podemos considerar que, ao permutar circularmente **n** objetos distintos, cada uma das n! permutações gera **n** configurações idênticas, que devem ser "descontadas" do total. Fazemos isso dividindo n! por **n**.

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1).(n-2).\ ...\ .2\ .\ 1}{n} \Rightarrow$$

$$PC_n = (n-1).(n-2).\ ...\ .\ 2\ .\ 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{PC_n = (n-1)!}$$

Em que PC_n é o número de permutações circulares de **n** objetos distintos.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) A quantidade de anagramas da palavra CONCURSO é:

A) 2 520
B) 5 040
C) 10 080
D) 20 160
E) 40 320

02. C19I (IFPE–2018) Os alunos do curso de Computação Gráfica do campus Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL. Se cada anagrama é mostrado durante 0,5 s na tela, a animação completa dura

A) menos de 1 minuto.
B) menos de 1 hora.
C) menos de meia hora.
D) menos de 10 minutos.
E) mais de 1 hora.

03. K31Z (UESPI) De quantas maneiras podemos enfileirar 5 mulheres e 3 homens, de tal modo que os 3 homens permaneçam juntos?

A) 8!
B) 6!
C) 6! . 3!
D) 7!
E) 9!

04. QJMF (IFSP) Um banco está testando um novo produto e disponibilizou a alguns dos seus clientes acesso via Internet para esse produto, por meio de senhas compostas por cinco vogais distintas e dois números pares distintos, de 2 a 8, nessa ordem, ou seja, primeiro as vogais e depois os números. O número de clientes que podem acessar esse novo produto, via Internet, é:

A) 22
B) 3 520
C) 1 440
D) 180
E) 920

05. B4MØ (UFSM-RS) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

A) 12
B) 30
C) 42
D) 240
E) 5 040

06. 1A5C (UFES) De quantas maneiras 10 clientes de um banco podem se posicionar na fila única dos caixas de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas?

A) 4! . 7!
B) 5! . 6!
C) 6 . 6!
D) 10 . 6!
E) 4! + 10!

07. H2TN (UERJ) Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras **B**, **M** e **C**. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B, B, M, C, M, C) ou (B, M, M, C, B, C) ou (C, M, M, B, B, C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

A) 6
B) 90
C) 180
D) 720

08. (Mackenzie-SP–2018) Se somarmos todos os números obtidos permutando-se os algarismos em 1234, o resultado obtido é igual a:

A) 54 320
B) 55 990
C) 59 660
D) 66 660
E) 69 960

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS–2017) A capital dos gaúchos, oficialmente fundada em 26 de março de 1772, já foi chamada de Porto de Viamão. Atualmente, a também capital dos Pampas recebe o nome de PORTO ALEGRE.

Adicionando o número de anagramas formados com as letras da palavra ALEGRE ao de anagramas formados com as letras da palavra PORTO em que as consoantes aparecem juntas, obtemos ___________ anagramas.

A) 378
B) 396
C) 738
D) 756
E) 840

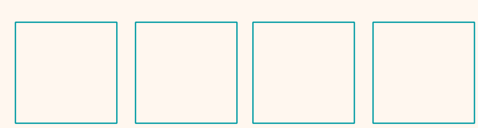
02. W6GW (PUC RS) Um fotógrafo foi contratado para tirar fotos de uma família composta por pai, mãe e quatro filhos. Organizou as pessoas lado a lado e colocou os filhos entre os pais. Mantida essa configuração, o número de formas em que poderão se posicionar para a foto é:

A) 4
B) 6
C) 24
D) 36
E) 48

03. WI7T (Mackenzie-SP) Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é:

A) 9(9!)
B) 8(9!)
C) 9(8!)
D) $\frac{10!}{2}$
E) $\frac{10!}{4}$

04. (UEPA) Um jovem descobriu que o aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Considerando que esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto, o número de maneiras que esse jovem pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais, conforme ilustração a seguir, é:

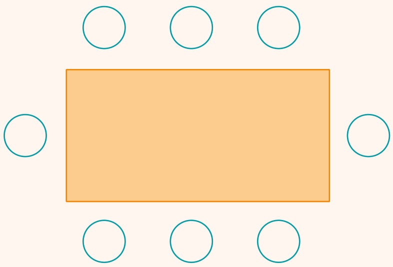


A) $24 . 120^4$
B) 120^4
C) 24 . 120
D) 4 . 120
E) 120

MATEMÁTICA

05. Ø97G

(UPE) Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?

A) 1 440
B) 1 920
C) 2 016
D) 4 032
E) 5 760

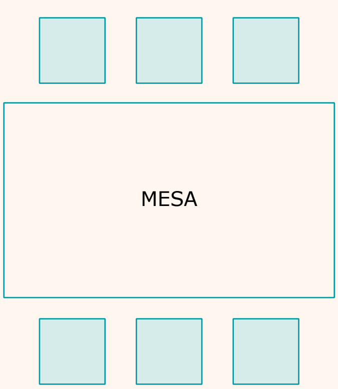
06. RF8G

(UEMA) Uma professora de educação infantil de uma escola, durante a recreação de seus 6 alunos, organiza-os em círculos para brincar. Considere a seguinte forma de organização dos alunos pela professora: são três meninas e três meninos e cada menina ficará ao lado de um menino, de modo alternado. As possibilidades de organização dos seus alunos são

A) 4.
B) 6.
C) 9.
D) 12.
E) 16.

07. KY6X

(Insper-SP) Em cada ingresso vendido para um *show* de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema a seguir.

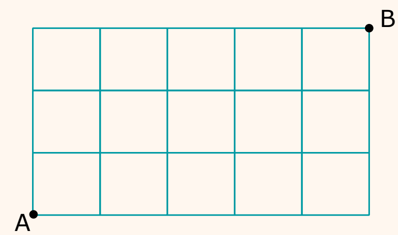


O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é:

A) 96
B) 120
C) 192
D) 384
E) 720

08. WD2B

(UPF-RS) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando **A** a **B** é:



A) 40 320
B) 6 720
C) 256
D) 120
E) 56

09. ØI1F

(UERJ–2017) Uma criança possui um cofre com 45 moedas: 15 de dez centavos, 15 de cinquenta centavos e 15 de um real. Ela vai retirar do cofre um grupo de 12 moedas ao acaso. Há vários modos de ocorrer essa retirada. Admita que as retiradas são diferenciadas apenas pela quantidade de moedas de cada valor. Determine quantas retiradas distintas, desse grupo de 12 moedas, a criança poderá realizar.

10. 8ZTA

(UFPB) A prefeitura de certo município solicitou ao Governo Federal uma verba para a execução das seguintes obras:

- Saneamento básico;
- Calçamento de ruas;
- Construção de uma escola;
- Construção de uma creche;
- Construção de casas populares.

O Governo Federal aprovou a concessão da verba solicitada, na condição de que fosse estabelecida uma ordem na execução das obras, de modo que, tendo sido liberada a verba para a primeira obra, a verba para a segunda só seria liberada após a conclusão da primeira, e assim sucessivamente até a execução da última obra. Nesse contexto, considere o planejamento feito pela prefeitura:

- A primeira obra escolhida foi a construção das casas populares;
- O calçamento das ruas só poderá ser executado com o saneamento básico concluído.

Atendendo às condições estabelecidas pelo Governo Federal e ao planejamento da prefeitura, é correto afirmar que o número de maneiras possíveis e distintas para a realização dessas 5 obras é:

A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16

11. (UNIFESP) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

A) PROVA.

B) VAPOR.

C) RAPOV.

D) ROVAP.

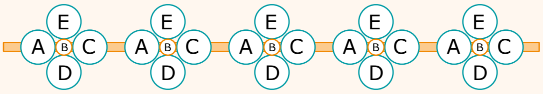
E) RAOPV.

12. II13

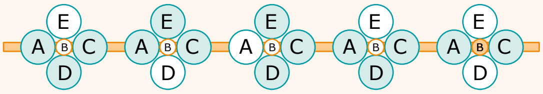
(AFA-SP–2020) Um pisca-pisca usado em árvores de natal é formado por um fio com lâmpadas acopladas, que acendem e apagam sequencialmente.

Uma pessoa comprou um pisca-pisca, formado por vários blocos, com lâmpadas em formato de flores, com o seguinte padrão:

- Cada bloco é composto por 5 flores, cada uma com 5 lâmpadas circulares, de cores distintas (A, B, C, D, E), como na figura:



- Em cada flor, apenas 3 lâmpadas quaisquer acendem e apagam juntas, por vez, ficando as outras duas apagadas.
- Todas as 5 flores do bloco acendem e apagam juntas.
- Em duas flores consecutivas, nunca acendem e apagam as mesmas 3 cores da anterior. Assim, considere que uma composição possível para um bloco acender e apagar corresponde à figura a seguir:



O número de maneiras, distintas entre si, de contar as possibilidades de composição para um bloco desse pisca-pisca é

A) 10^5.

B) $9^4 \cdot 10$.

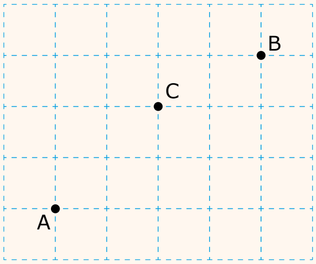
C) 9^5.

D) $9^5 \cdot 10$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2020) Três amigos, André, Bernardo e Carlos moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos **A**, **B** e **C** estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa do Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio. Fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

A) 4.

B) 14.

C) 17.

D) 35.

E) 48.

02. FG02

(Enem) Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: <www.infowester.com>. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por:

A) $10^2 \cdot 26^2$

B) $10^2 \cdot 52^2$

C) $10^2 \cdot 5^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

MATEMÁTICA

03. (Enem) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

A) $20 \cdot 8! + (3!)^2$

B) $8! \cdot 5! \cdot 3!$

C) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$

D) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$

E) $\frac{16!}{2^8}$

04. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

A) 24.

B) 31.

C) 32.

D) 88.

E) 89.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. C
- 04. C
- 05. C
- 06. A
- 07. B
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. D
- 07. C
- 08. E
- 09. 91 formas distintas
- 10. C
- 11. E
- 12. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. E
- 03. B
- 04. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Posições Relativas e Distância de Ponto a Reta

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas retas **r** e **s** de um plano podem ser:

- Paralelas $\begin{cases} \text{Distintas } r \cap s = \varnothing \\ \text{Coincidentes } r \cap s = r \Rightarrow r \equiv s \end{cases}$
- Concorrentes $r \cap s = \{P\}$

Consideremos, então, no plano cartesiano, duas retas r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, tais que nem **r** nem **s** sejam paralelas aos eixos coordenados, isto é, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

Suas equações na forma reduzida são:

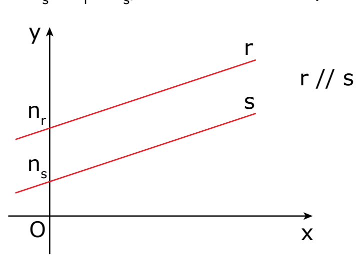
- $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$
- $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$

Na forma reduzida $y = mx + n$, **m** é o coeficiente angular, e **n** é o coeficiente linear da reta.

- $r: y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \\ n_1 = -\frac{c_1}{b_1} \end{cases}$
- $s: y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\frac{a_2}{b_2} \\ n_2 = -\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$

Portanto:

i) Se $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas distintas.



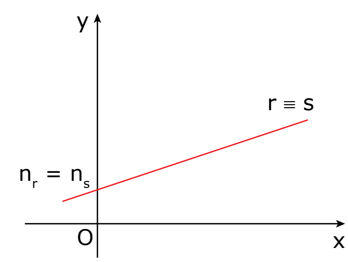
Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e} \quad -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (**r** e **s** são paralelas distintas.)

ii) Se $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas coincidentes.



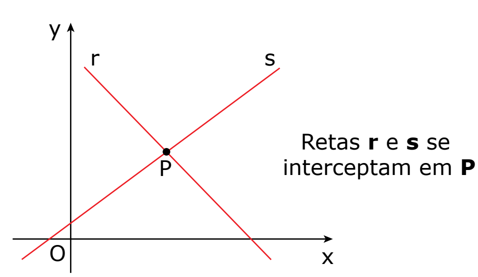
Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e} \quad -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (**r** e **s** são paralelas coincidentes.)

iii) Se $m_r \neq m_s$, as retas **r** e **s** são concorrentes.



Ou seja:

$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (**r** e **s** são concorrentes.)

Em resumo:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ Paralelas distintas

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ Paralelas coincidentes

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow$ Concorrentes

OBSERVAÇÕES

i) Se **r** é paralela a um dos eixos coordenados, o problema da posição relativa depende da reta **s**.

ii) Se **r** e **s** são concorrentes no ponto **P**, obtêm-se as coordenadas de **P** resolvendo o sistema formado pelas equações de **r** e **s**.

Exemplo:

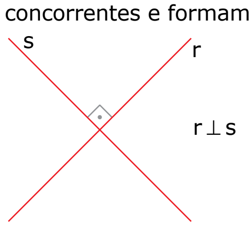
Sejam r: 3x + 4y – 5 = 0 e s: 6x + by + c = 0.

Então:

- $r \equiv s$ se: $\frac{3}{6} = \frac{4}{b} = -\frac{5}{c} \Rightarrow b = 8$ e $c = -10$;
- r // s, se: b = 8 e c ≠ –10;
- $r \cap s = \{P\}$, se: $b \neq 8$ e $c \in \mathbb{R}$.

RETAS PERPENDICULARES

Duas retas **r** e **s** são perpendiculares uma à outra se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.



Condição de perpendicularidade

No plano cartesiano, duas retas **r** e **s** de coeficientes angulares m_r e m_s são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_r.m_s = -1$.

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow m_r.m_s = -1 \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}}$$

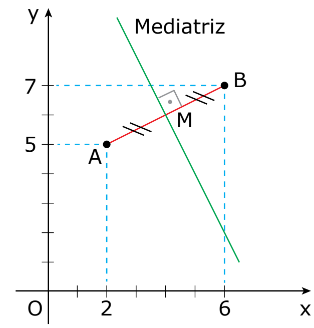
OBSERVAÇÃO

Se uma das retas é paralela a um dos eixos coordenados, então a reta perpendicular a ela é paralela ao outro eixo coordenado.

Exemplo:

Dar a equação da mediatriz do segmento de extremos nos pontos A(2, 5) e B(6, 7).

A mediatriz é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo seu ponto médio.



Sendo x_M e y_M as coordenadas do ponto médio **M**, temos:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_M &= \frac{5+7}{2} = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(4, 6)$$

Coeficiente angular de $\overline{AB}$: $m_{AB} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$

Sendo **m** o coeficiente angular da mediatriz, deve-se ter:

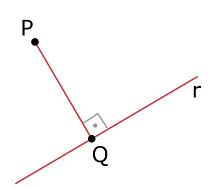
$m.m_{AB} = -1 \Rightarrow m.\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow m = -2$

Portanto, a equação da mediatriz é:

$y - 6 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 14$

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é o comprimento do segmento, em que **Q** é a projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.



Cálculo da distância de pontos e retas

No plano cartesiano, a distância **d** do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta **r**, de equação ax + by + c = 0, é dada pela expressão:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

OBSERVAÇÃO

A fórmula da distância continua válida se **P** pertence a **r** (d = 0), ou, ainda, se a = 0 ou b = 0, caso em que **r** é perpendicular ao eixo y ou x.

Exemplo:

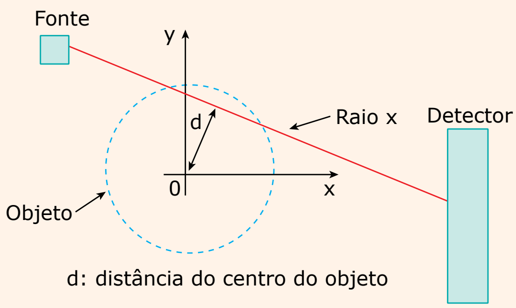
Sejam P(2, –1) e r: $y = -\frac{3}{4}x + 1 \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$

Então: $d(P, r) = \frac{|3.(2) + 4.(-1) - 4|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SBIQ
(Albert Einstein–2020) O esquema a seguir é uma representação simplificada de um raio X usado em um aparelho de tomografia computadorizada axial para compor imagens de objetos.



No plano cartesiano com origem no centro do objeto, indicado na figura, a reta do raio X tem equação $3x + 4y - 12 = 0$. A distância **d**, entre o centro do objeto e a reta do raio X, na unidade do plano cartesiano, é igual a:

A) $\frac{12}{5}$
B) $\frac{21}{10}$
C) $\frac{11}{5}$
D) $\frac{9}{4}$
E) $\frac{5}{2}$

02. 6YUS
(UFPR–2017) Considere a reta **r** de equação $y = 2x + 1$. Qual das retas seguintes é perpendicular à reta **r** e passa pelo ponto $P = (4, 2)$?

A) $y = \frac{1}{2}x$
B) $y = -2x + 10$
C) $y = -\frac{1}{2}x + 5$
D) $y = -2x$
E) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

03. GSBG
(UFOP-MG) Sejam as retas r: $x + 2y + 3 = 0$ e $t \perp r$. Se **t** passa pelo ponto $P(2, 3)$, então sua equação é dada por:

A) $2x + y - 3 = 0$
B) $2x + y + 1 = 0$
C) $2x - y - 1 = 0$
D) $2x - y + 3 = 0$

04. NHQ4
(EEAR) Dada a reta r: $2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto $P(5, 6)$, a distância de **P** à reta **r** é:

A) $\sqrt{91}$
B) $30\sqrt{13}$
C) $\frac{3\sqrt{91}}{91}$
D) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

05. (FGV-RJ) A distância entre duas retas paralelas é o comprimento do segmento perpendicular às retas que tem uma extremidade em uma reta e a outra extremidade na outra reta. No plano cartesiano, a distância entre as retas de equações $3x + 4y = 0$ e $3x + 4y + 10 = 0$ é:

A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5

06. 8WHA
(UFJF-MG–2018) Considere as retas $y = 5x + 8$ e $y = -5x + 8$. É correto afirmar que:

A) As retas são paralelas.
B) As retas são perpendiculares.
C) O ponto (4, 28) não pertence a nenhuma das duas retas.
D) O ponto (1, 10) pertence a pelo menos uma das duas retas.
E) As retas possuem um ponto em comum.

07. ØØN5
(Unioeste-PR) Os valores de **k** para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas ou perpendiculares entre si, respectivamente, são

A) $-\frac{3}{2}$ e 1.
B) −1 e 1.
C) 1 e −1.
D) −2 e 2.
E) 2 e −2.

08. 9T4S
(FGV-SP) Considere os pontos $A = (1, -2)$, $B = (-2, 4)$ e $C = (3, 3)$. A altura do triângulo ABC pelo vértice **C** tem equação:

A) $2y - x - 3 = 0$
B) $y - 2x + 3 = 0$
C) $2y + x + 3 = 0$
D) $y + 2x + 9 = 0$
E) $2y + x - 9 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

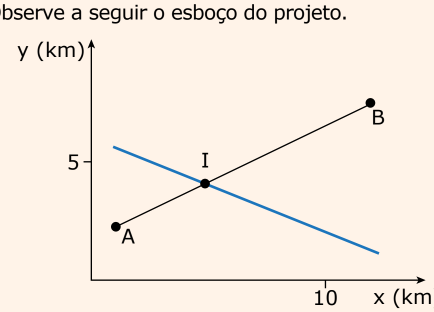
01. 1EXZ
(FEI-SP) A equação $\frac{y}{3} = x + 2$ representa, no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, uma reta que

A) é concorrente com a reta de equação $y = 3x + 5$.
B) é paralela à reta de equação $y = x + 3$.
C) é coincidente com a reta de equação $y = x + 6$.
D) intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 2).
E) intercepta o eixo das abscissas no ponto (−2, 0).

02. 9Q81
(FMU/FIAM-SP) A reta **s** passa pelo ponto $P = (2, 3)$ e é perpendicular à reta $2x - 3y = 7$. A equação geral dessa reta é:

A) $-3x + 2y - 12 = 0$
B) $2x - 3y + 5 = 0$
C) $3x + 2y - 12 = 0$
D) $3x - 2y = 0$
E) $-2x - 3y + 5 = 0$

03. (UERJ–2018) No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos $A(1, 2)$ e $B(11, 7)$. O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é $x + 3y = 17$. Observe a seguir o esboço do projeto.



Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção **I**.

MATEMÁTICA

04. KFPL (UCDB-MS) A equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento de extremos A(−1, 4) e B(5, −6) e é perpendicular à reta $2x - 5y + 3 = 0$ é:

A) $5x + 2y - 8 = 0$
B) $5x + 2y + 8 = 0$
C) $2x - 5y - 9 = 0$
D) $2x + 5y + 1 = 0$
E) $2x - 5y + 9 = 0$

05. (PUC-SP) Sejam **A**, **B**, **C** e **D** vértices consecutivos de um quadrado, tais que A = (1, 3) e **B** e **D** pertencem à reta de equação $x - y - 4 = 0$. A área desse quadrado, em unidades de superfície, é igual a:

A) $36\sqrt{2}$
B) 36
C) $32\sqrt{2}$
D) 32
E) $24\sqrt{2}$

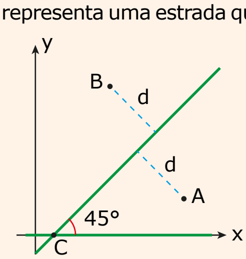
06. (UFJF-MG) Considere as retas r_1: $y = m_1x + b_1$ e r_2: $y = m_2 + b_2$ e tais que r_1 e r_2 são paralelas, a reta r_1 passa pelo ponto A(0, 2) e a reta r_2 passa pelo ponto B(1, 0). Sabendo que a reta ℓ, passando pelos pontos **A** e **B**, é perpendicular à reta r_1, qual é o valor do produto $m_2.b_1$?

A) $-\frac{1}{2}$
B) 0
C) $\frac{1}{2}$
D) 1
E) 2

07. 7MH2 (EsPCEx-SP) Considere a reta **t** mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta s: $2x - 3y + 12 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então, a distância do ponto M(1, 1) à reta **t** é:

A) $\frac{13\sqrt{3}}{11}$
B) $\frac{10\sqrt{13}}{13}$
C) $\frac{13\sqrt{11}}{13}$
D) $\frac{3\sqrt{11}}{13}$
E) $\frac{3\sqrt{3}}{11}$

08. 8NAD (Insper-SP) No plano cartesiano da figura, feito fora de escala, o eixo x representa uma estrada já existente, os pontos A(8, 2) e B(3, 6) representam duas cidades e a reta **r**, de inclinação 45°, representa uma estrada que será construída.



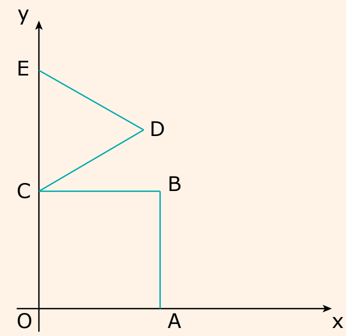
Para que as distâncias da cidade **A** e da cidade **B** até a nova estrada sejam iguais, o ponto **C**, onde a nova estrada intercepta a existente, deverá ter coordenadas:

A) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
B) (1, 0)
C) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
D) (2, 0)
E) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

09. (FGV-SP–2017) Os pontos de coordenadas cartesianas (2, 3) e (−1, 2) pertencem a uma circunferência. Uma reta que passa, necessariamente, pelo centro dessa circunferência tem equação:

A) $3x - y + 9 = 0$
B) $3x + y - 9 = 0$
C) $3x + y - 4 = 0$
D) $x + 3y - 4 = 0$
E) $x + 3y - 9 = 0$

10. CJVG (FUVEST-SP–2019)



Na figura, OABC é um quadrado e CDE é um triângulo equilátero tal que OC = CE = 2.

A) Determine a equação da reta que passa por **E** e por **A**.
B) Determine a equação da reta que passa por **D** e é perpendicular à reta $\overline{AE}$.
C) Determine um ponto **P** no segmento OA, de modo que a reta que passa por **E** e por P divida o quadrado em duas regiões, de tal forma que a área da região que contém o segmento OC seja o dobro da área da outra região.

SEÇÃO ENEM

01. Considere uma cidade em que as ruas são representadas por retas e as casas, por pontos. Num mapa cartesiano dessa cidade, com medidas em km, a padaria Pannetutti se localiza no ponto P(−5, 0) e o açougue Quasar se localiza no ponto Q(−1, −3).

Uma pessoa que estiver na origem desse mapa e quiser se dirigir à Rua Pedro Quintão, na qual se localizam a padaria e o açougue, terá de caminhar uma distância de, no mínimo,

A) 2 km.
B) 2,5 km.
C) 3 km.
D) 3,5 km.
E) 4 km.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. E
03. C
04. D
05. D
06. E
07. E
08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. C
03. (5, 4)
04. A
05. B
06. D
07. B
08. C
09. C
10. A) $y = -2x + 4$
B) $y = \frac{x}{2} + \frac{6 - \sqrt{3}}{2}$
C) O ponto O é dado por $\left(\frac{16}{9}; 0\right)$

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Áreas e Teoria Angular

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área **S** de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|D|}$$

Nela, D = determinante da matriz $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

OBSERVAÇÕES

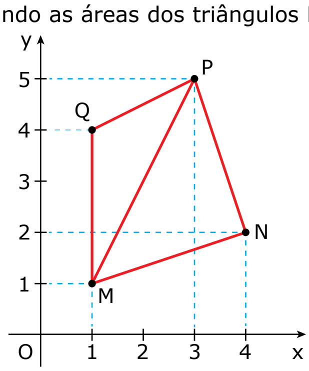
i) Se D = 0, então os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.

ii) Para se calcular a área de um polígono, podemos dividi-lo em triângulos e calcular a soma das áreas de cada um deles.

Exemplo:

Calcular a área do quadrilátero de vértices M(1, 1), N(4, 2), P(3, 5) e Q(1, 4).

Observando o esboço a seguir, obtemos a área do quadrilátero somando as áreas dos triângulos MNP e PQM.



Sejam D_{MNP} o determinante dos pontos **M**, **N** e **P** e D_{PQM} o determinante dos pontos **P**, **Q** e **M**.

Assim, temos, calculando pela regra de Sarrus:

$$D_{MNP} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix} \Rightarrow$$

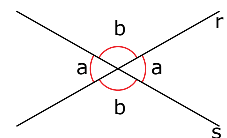
$$D_{MNP} = 1.2.1 + 1.1.3 + 1.4.5 - 3.2.1 - 5.1.1 - 1.4.1 = 10$$

E, da mesma forma: $D_{PQM} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$

Portanto, $S_{MNPQ} = S_{MNP} + S_{PQM} = \frac{1}{2}|10| + \frac{1}{2}|6| = 8$

ÂNGULO AGUDO ENTRE DUAS RETAS CONCORRENTES

Se duas retas **r** e **s** são concorrentes e não perpendiculares, elas determinam dois ângulos agudos **a** opostos pelo vértice e dois ângulos obtusos **b** opostos pelo vértice, tais que a + b = 180° e tg a = –tg b.



Cálculo do ângulo formado por duas retas

Sejam r: $y = m_rx + n_r$ e s: $y = m_sx + n_s$ duas retas concorrentes e não perpendiculares ($m_r.m_s \neq -1$).

O ângulo agudo φ entre elas é tal que:

$$\boxed{\text{tg } \varphi = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r.m_s}\right|}$$

Caso particular:

Sejam r: $y = m_rx + n_r$, $m_r \neq 0$, e s: $x = k$.

O ângulo agudo φ entre elas é tal que:

$$\boxed{\text{tg } \varphi = \left|\frac{1}{m_r}\right|}$$

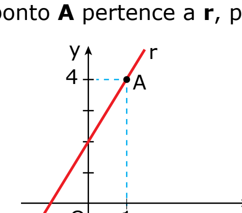
Exemplo:

Sejam r: y = 2x + 7 e s: y = –3x.

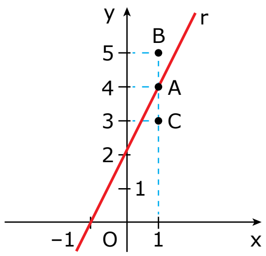
Então, $\text{tg } \varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1+2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E RETA

Consideremos, por exemplo, a reta **r** de equação reduzida y = 2x + 2, cujo gráfico é a figura a seguir, e o ponto A(1, 4). Observe que o ponto **A** pertence a **r**, pois 4 = 2 . 1 + 2.



Consideremos agora os pontos B(1, 5) e C(1, 3), que possuem abscissas iguais à de **A**. Como as ordenadas de **B** e **C** são diferentes da ordenada de **A**, tais pontos não pertencem à reta **r**.



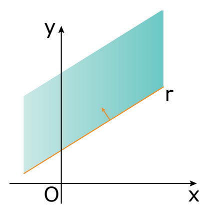
Assim:

- Sendo $y_B = 5$, temos $y_B > y_A$; e, portanto, o ponto **B** está acima de **A**.
- Sendo $y_C = 3$, temos $y_C < y_A$; e, portanto, o ponto **C** está abaixo de **A**.

Dessa forma, se y = mx + n é a equação reduzida de uma reta **r**, então temos que:

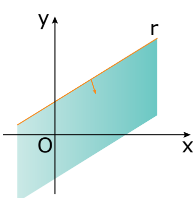
i) Os pontos que satisfazem a inequação y > mx + n estão acima da reta **r**.

$\boxed{y > mx + n}$



ii) Os pontos que satisfazem a inequação y < mx + n estão abaixo da reta **r**.

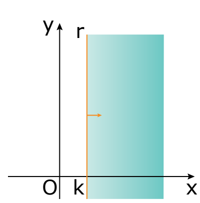
$\boxed{y < mx + n}$



Se a reta **r** é perpendicular ao eixo x e sua equação é x = k, de maneira análoga, concluímos que:

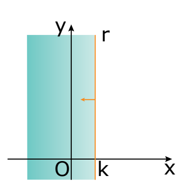
iii) Os pontos que satisfazem a inequação x > k, ou seja, os pontos de abscissa maior que **k**, estão à direita da reta **r**.

$\boxed{x > k}$



iv) Os pontos que satisfazem a inequação x < k, ou seja, os pontos de abscissa menor que **k**, estão à esquerda da reta **r**.

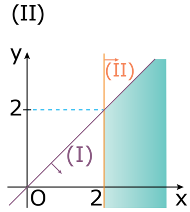
$\boxed{x < k}$



Exemplo:

Esboçar a região do plano delimitada por:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \quad \text{(I)} \\ x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

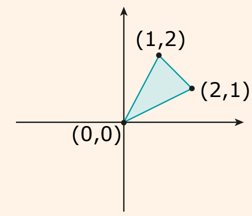


EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. K3A1 (PUC Rio) A região, na figura a seguir, é descrita pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ y \leq 2x \\ 2y \geq x \end{cases}$$



Quanto vale a área da figura?

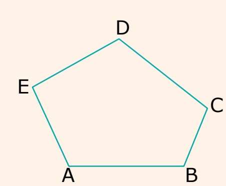
A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\frac{3}{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 3

02. (UECE–2019) No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual com origem no ponto **O**, as retas representadas pelas equações y = x e y + 4x − 20 = 0 se cortam no ponto **X**. Se **Y** é a interseção da reta y + 4x − 20 = 0 com o eixo dos **x** (eixo horizontal), então, a medida da área do triângulo YOX é igual a

u.a. = unidade de área.

A) 12 u.a.
B) 14 u.a.
C) 10 u.a.
D) 8 u.a.

03. PMQR (CEFET-PR) Um engenheiro cartográfico fez o levantamento topográfico de um terreno com contorno poligonal, conforme a figura, e obteve as seguintes coordenadas, em metros, para seus vértices: A(0, 0), B(10, 0), C(12, 4), D(6, 10) e E(−4, 8).



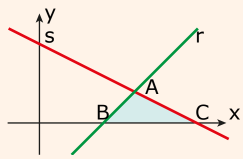
A área do terreno, em metros quadrados, é de

A) 112.
B) 122.
C) 132.
D) 144.
E) 154.

04. 1HVU (FGV-SP) A reta x + 3y − 3 = 0 divide o plano determinado pelo sistema cartesiano de eixos em dois semiplanos opostos. Cada um dos pontos (−2, 2) e (5, b) está situado em um desses dois semiplanos. Um possível valor de **b** é:

A) $\frac{1}{4}$
B) $-\frac{1}{4}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $-\frac{3}{4}$
E) $-\frac{1}{2}$

05. (PUC Rio) Sejam **r** e **s** as retas de equações y = x − 2 e $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico a seguir. Seja **A** o ponto de interseção das retas **r** e **s**. Sejam **B** e **C** os pontos de interseção de **r** e **s** com o eixo horizontal, respectivamente.



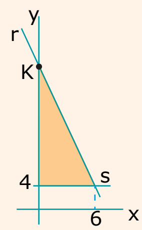
A área do triângulo ABC vale

A) 1,0.
B) 1,5.
C) 3,0.
D) 4,5.
E) 6,0.

06. 2XAN (UFSJ-MG) Os gráficos das funções $f(x) = 2$, $g(x) = 2x - 4$ e $h(x) = -x + 2$ delimitam uma região do plano cartesiano, cuja área em unidades de área é:

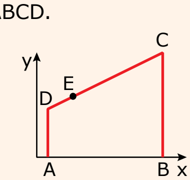
A) 6
B) 2
C) 3
D) 4

07. BRRB (UERN) A área do triângulo retângulo formada pela sobreposição das retas **r** e **s**, no gráfico, é igual a 36 unidades. Logo, a equação da reta **r** é:



A) $y = x + 12$
B) $y = -x + 16$
C) $y = -2x + 16$
D) $y = -2x + 12$

08. GK4K (UFMG) Neste plano cartesiano, está representado o quadrilátero ABCD.



Sabe-se que:

I. A(1, 0), C(11, 11) e E(3, 7).
II. o ponto **B** está no eixo x e o ponto **E**, no lado $\overline{CD}$.
III. os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos ao eixo y.

Então, é correto afirmar que a área do quadrilátero ABCD é:

A) 87,5
B) 82,5
C) 85
D) 86

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2018) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a medida da área da região limitada pelas retas $x + y = 5$; $x + y = 2$; $x - y = 0$ e $y = 0$ é igual a

A) $\frac{25}{4}$ u.a.
B) $\frac{23}{4}$ u.a.
C) $\frac{21}{4}$ u.a.
D) $\frac{19}{4}$ u.a.

u.a. = unidade de área.

02. QDL8 (FGV-SP) A região do plano cartesiano determinada pelas inequações $x + y \leq 5$, $y \leq 3$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ tem uma área **A**. O valor de **A** é:

A) 10
B) 10,5
C) 11
D) 11,5
E) 12

03. O9LY (UFMG) Considere as retas cujas equações são $y = -x + 4$ e $y = mx$, em que **m** é uma constante positiva. Nesse caso, a área do triângulo determinado pelas duas retas e o eixo das abscissas é:

A) $\frac{4m^2}{2m - 1}$
B) $4m^2$
C) $\frac{8m}{m + 1}$
D) $\frac{2m + 10}{2m + 1}$

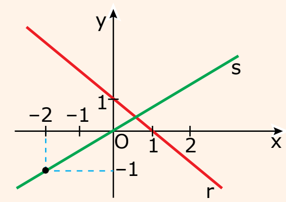
04. IIR3 (FGV-SP) Considere a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem simultaneamente as inequações:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A área dessa região é:

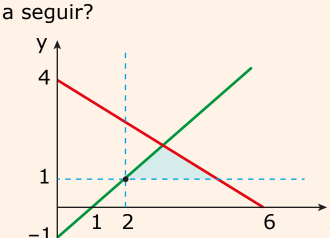
A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

05. MDC3 (FUVEST-SP) Na figura a seguir, **A** é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y). Sabendo que **A** está localizado abaixo da reta **r** e acima da reta **s**, tem-se:



A) $y < \frac{x}{2}$ e $y < -x + 1$
B) $y < \frac{x}{2}$ ou $y > -x + 1$
C) $\frac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$
D) $-x + 1 < y < \frac{x}{2}$
E) $\frac{x}{2} < y < -x + 1$

06. AMYX (UPE) Qual é a medida da área do triângulo destacado na figura a seguir?



A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{5}$
E) $\frac{5}{4}$

07. (UECE) Em um sistema de coordenadas cartesiano usual, os pontos P = (1, 2) e Q = (4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice **M** está sobre a reta paralela ao segmento PQ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é:

(u.a. = unidade de área)

A) 7 u.a.
B) 8 u.a.
C) 9 u.a.
D) 10 u.a.

MATEMÁTICA

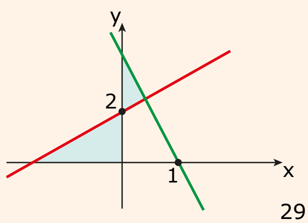
08. WL01

(FGV) Dados os pontos A(0, 0), B(5, 0), C(8, 5) e D(11, 8) no plano cartesiano ortogonal, **P** é um ponto do 1º quadrante tal que as áreas dos triângulos APB e CPD são, respectivamente, iguais a $\frac{25}{2}$ e 6. Em tais condições, o produto da abscissa pela ordenada de **P** pode ser igual a

A) 18.
B) 20.
C) 21.
D) 24.
E) 25.

09. IWHF

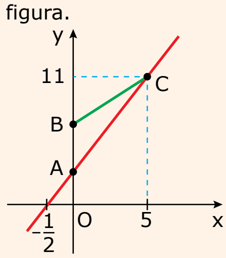
(UEMG–2017) No gráfico representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a –3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é:



A) 6 u.a.
B) $\frac{21}{5}$ u.a.
C) $\frac{29}{7}$ u.a.
D) $\frac{33}{7}$ u.a.

10. 09A1

(UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, a reta AC intercepta o eixo das abscissas no ponto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, e a área do triângulo de vértices **A**, **B** e **C** é 10. Então, a ordenada do ponto **B** é:

A) $\frac{20}{11}$
B) $\frac{31}{11}$
C) 4
D) 5
E) 6

SEÇÃO ENEM

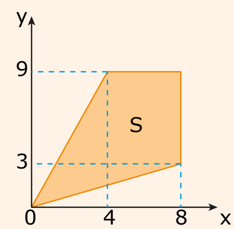
01. (Enem–2018) Para criar um logotipo, um profissional da área de *design* gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.

Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que:

A) $0 \leq x \leq y \leq 10$
B) $0 \leq y \leq x \leq 10$
C) $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
D) $0 \leq x + y \leq 10$
E) $0 \leq x + y \leq 20$

02. (Enem) Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área **S**) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, programador utilizará um *software* que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas.

As desigualdades que devem ser utilizadas no referido *software*, para o desenho da região de isolamento, são:

A) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
B) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
C) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
D) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
E) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. A	05. B	07. C
02. C	04. D	06. C	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. B	07. B	10. D
02. B	05. E	08. B	
03. C	06. E	09. C	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B	02. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Estudo Analítico da Circunferência

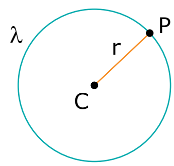
INTRODUÇÃO

Uma circunferência λ é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a um ponto fixo **C** é uma constante positiva **r**.

C: Centro da circunferência;

r: Raio da circunferência.

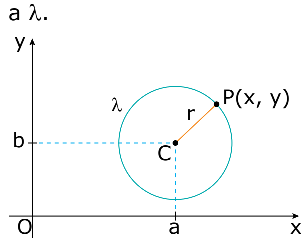
Em símbolos: $P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$



EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio **r**.

Obter uma equação da circunferência λ é encontrar uma relação entre as coordenadas **x** e **y** dos pontos do plano que pertencem a λ.



Seja P(x, y) um ponto genérico da circunferência. Temos:

$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$

$P \in \lambda \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$

$P \in \lambda \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Esta última igualdade é chamada de equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio **r**.

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Exemplos:

1º) Dar a equação reduzida da circunferência de centro **C** e raio **r** nos seguintes casos:

A) C(1, 2) e r = 4
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

B) C(–1, 2) e r = 5
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

C) C(0, –3) e $r = \sqrt{3}$
$x^2 + (y + 3)^2 = 3$

D) C(0, 0) e r = 1
$x^2 + y^2 = 1$

2º) Dar o centro **C** e o raio **r** da circunferência nos seguintes casos:

A) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$
C(3, 4) e r = 10

B) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$
C(–3, 1) e r = 4

C) $(x + 4)^2 + y^2 = 9$
C(–4, 0) e r = 3

D) $x^2 + y^2 = 7$
C(0, 0) e $r = \sqrt{7}$

OBSERVAÇÃO

Considerando-se a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, temos:

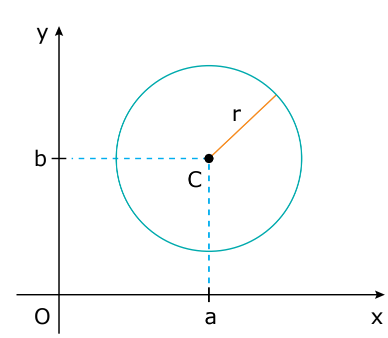
i) Se $k > 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa uma circunferência de centro C = (a, b) e raio $= \sqrt{k}$.

ii) Se $k = 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o ponto P = (a, b), pois $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \Rightarrow x - a = 0$ e $y - b = 0$.

iii) Se $k < 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais não pode ser negativa.

EQUAÇÃO NORMAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja a circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.



Sua equação reduzida é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Desenvolvendo-se a equação reduzida, temos:

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

Logo, obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Essa é a equação normal da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.

Se uma circunferência é dada pela sua equação normal, pode-se determinar seu centro e raio por comparação ou completando-se a soma dos quadrados para obtermos a equação reduzida, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo:

Obter o centro e o raio da circunferência:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

Reagrupando:

$x^2 - 2x + ... + y^2 + 4y + ... = 11$

$(x^2 - 2x + ...) + (y^2 + 4y + ...) = 11$

Adicionando 1 e 4 aos dois lados da equação para que a 1ª e a 2ª parcelas sejam quadrados perfeitos, temos:

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 11 + 1 + 4$

Fatorando:

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Essa é a equação reduzida da circunferência.

Portanto, a circunferência tem centro C(1, −2) e raio 4.

OBSERVAÇÃO

Na equação normal da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**, tem-se:

i) Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais a 1.

ii) Os coeficientes de **x** e de **y** são, respectivamente, o dobro com os sinais trocados, das coordenadas **a** e **b** do centro.

iii) Não existe termo da forma kxy, $k \neq 0$.

iv) $a^2 + b^2 - r^2$ é chamado termo independente.

Exemplo:

Para que a equação $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + nxy - p = 0$ represente uma circunferência, devemos ter:

$m = 1$ e $n = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y = p \Rightarrow$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = p + 4 + 9 \Rightarrow$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = p + 13$

$p + 13 > 0 \Rightarrow p > -13$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. E8QM (ESPM-SP) As coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação $x^2 - 4x + (y + 1)^2 = 0$ são, respectivamente,

A) (−2, 1) e 4.
B) (2, −1) e 2.
C) (4, −1) e 2.
D) (−1, 2) e $\sqrt{2}$.
E) (2, 2) e $\sqrt{2}$.

02. (UECE–2019) Em um plano munido com o sistema de coordenadas cartesianas usual, fixada uma unidade de comprimento (u.c), a equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ representa uma circunferência com centro no ponto P(p, q) cuja medida do raio é **r** u.c. Assim, é correto afirmar que o valor da soma p + q + r é igual a

A) 0.
B) 3.
C) 1.
D) 2.

03. BVVP (FEI-SP) Num sistema cartesiano ortogonal Oxy, tem-se uma circunferência centrada em C(3, −4) e de raio 5. Os valores de **m** para que o ponto M(3m, −4m) pertença à circunferência dada são

A) 0 e 2.
B) 1 e 3.
C) −1 e 3.
D) 2 e 5.
E) −3 e 4.

04. 3SBA (FMU/FIAM-SP) O centro da circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 4y - 25 = 0$ é:

A) $C\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$
B) $C\left(\frac{5}{2}, 2\right)$
C) $C\left(\frac{5}{2}, -2\right)$
D) $C\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$
E) $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$

05. XUWO (UFRGS-RS) Considere as circunferências definidas por $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ e $(x - 10)^2 + (y - 2)^2 = 9$, representadas no mesmo plano cartesiano.

As coordenadas dos pontos de interseção entre as circunferências são:

A) (7, 2)
B) (2, 7)
C) (10, 3)
D) (16, 9)
E) (4, 3)

06. S1JF (Fatec-SP) A circunferência de centro (2, 1) e raio 3 intercepta o eixo das abscissas nos pontos de abscissas:

A) $-2 + 2\sqrt{2}$ e $-2 - 2\sqrt{2}$
B) $2 + 2\sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$
C) $2 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$
D) $-1 - \sqrt{5}$ e $-1 + \sqrt{5}$
E) $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$

07. I82R (UEL-PR) Sejam A(−2, 1) e B(0, −3) as extremidades de um diâmetro de uma circunferência λ. A equação de λ é:

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$
B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$
C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
D) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$
E) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

08. EHIY (UFRGS-RS–2020) A área do quadrilátero formado pelos pontos de interseção da circunferência de equação $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ com os eixos coordenados é:

A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$
E) 12

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FUVEST-SP) No plano cartesiano Oxy, a circunferência **C** é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa 5 e contém o ponto (1, 2). Nessas condições, o raio de **C** vale:

A) $\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{5}$
C) 5
D) $3\sqrt{5}$
E) 10

02. 3T2B (UFU-MG) Inúmeras pinturas e desenhos em tela fazem uso de sobreposição de formas circulares, conforme ilustra a figura a seguir:

DELAUNAY, Robert. *Pinturas Circulares*. Disponível em: <http://www.google.com.br>. Acesso em: 01 jul. 2012.

Para a representação gráfica desses trabalhos artísticos, faz-se necessária a determinação de elementos geométricos associados. Suponha que, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas xOy, duas circunferências, presentes no desenho, sejam dadas pelas equações $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6$. Assim sendo, a reta que passa pelos centros dessas circunferências pode ser representada pela equação:

A) $2x + 3y = 9$
B) $2x + 3y = -9$
C) $x + 2y = 4$
D) $x + 2y = -4$

03. (UFTM-MG) Sabe-se que **M**, ponto médio do segmento AB, é centro de uma circunferência que passa pela origem (0, 0). Sendo A(–1, 4) e B(5, 2), conclui-se que o raio dessa circunferência é igual a:

A) $4\sqrt{5}$
B) $3\sqrt{5}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{17}$
E) $\sqrt{13}$

04. PNBN (FGV-SP) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo do ponto (5, 5) tem coordenadas cuja soma vale:

A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
E) $3\sqrt{2}$

05. CNZ3 (ULBRA-RS) As retas $2x - y - 4 = 0$ e $2x + 3y - 12 = 0$ interceptam-se no centro de uma circunferência de raio igual a 3. Então podemos dizer que

A) a circunferência possui centro no ponto (2, 3).
B) a circunferência corta o eixo y em dois pontos.
C) a circunferência corta o eixo x em um ponto.
D) a circunferência é tangente ao eixo x.
E) a circunferência é tangente ao eixo y.

06. ØØ6Ø (UECE–2020) Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos M(10, 0) e N(0, 10) são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência **C**. Se K(4, p) e L(4, q) são pontos distintos de **C**, então, a medida do comprimento do segmento KL, em u.c., é

u.c. = unidade de comprimento.

A) 10.
B) 12.
C) 14.
D) 16.

07. BOWG (EN-RJ) A equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos (3, 3) e (–3, 3) é:

A) $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 16x + 20 = 0$

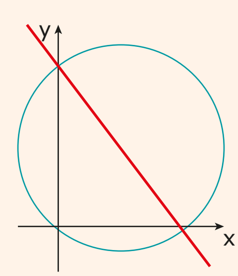
08. (EsPCEx-SP) Considere a circunferência $(\lambda)\ x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(1, \sqrt{3})$. Se a reta **t** é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de **t** com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é:

A) –2
B) $2 + \sqrt{3}$
C) 3
D) $3 + \sqrt{3}$
E) $3 + 3\sqrt{3}$

09. W6KU (EsPCEx-SP) Seja **C** a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em **C** a corda MN cujo ponto médio é P(–1, –1). O comprimento de MN (em unidade de comprimento) é igual a:

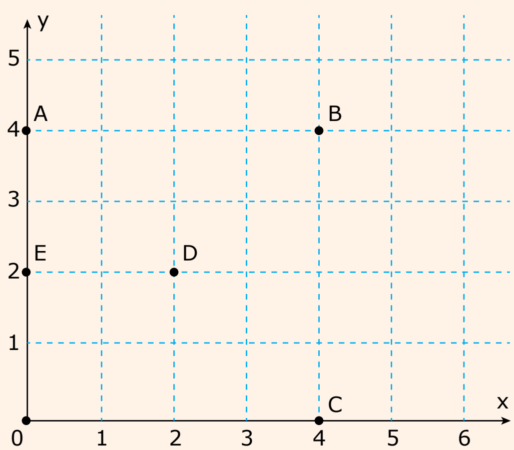
A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$
E) 2

10. VTTZ (UFPE) Uma circunferência está circunscrita ao triângulo com lados sobre as retas com equações $x = 0$, $y = 0$ e $4x + 3y = 24$, conforme a ilustração a seguir. Encontre a equação da circunferência e indique a soma das coordenadas de seu centro e de seu raio.



SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0, 4), B(4, 4), C(4, 0), D(2, 2) e E(0, 2).



Passando pelo ponto A, qual a equação forneceria a maior pontuação?

A) $x = 0$

B) $y = 0$

C) $x^2 + y^2 = 16$

D) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

E) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

02. (Enem–2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

A) 30.

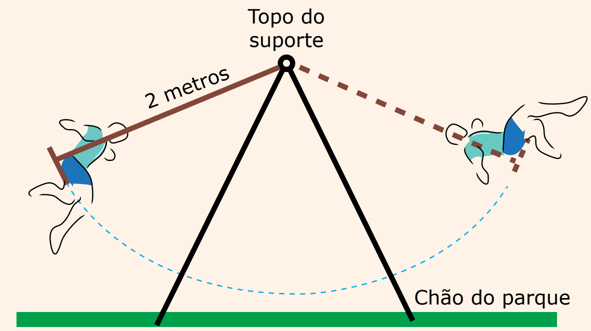
B) 40.

C) 45.

D) 60.

E) 68.

03. (Enem) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço; o eixo x, paralelo ao chão do parque, e o eixo y têm orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

A) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

B) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

C) $f(x) = x^2 - 2$

D) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

E) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B	03. A	05. A	07. A
02. C	04. A	06. B	08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. B	07. B
02. A	05. E	08. A
03. E	06. C	09. C

10. $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ e soma = 12

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E	02. B	03. D

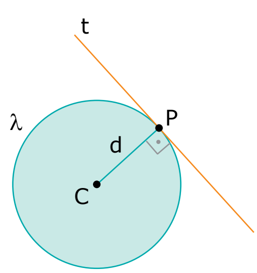
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Posições Relativas à Circunferência

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

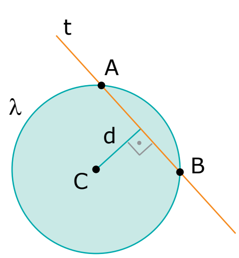
Considere, num plano, uma reta **t** e uma circunferência λ de centro **C** e raio **r**. Seja **d** a distância de **C** até a reta **t**. Em relação a λ, a reta **t** ocupa uma das três posições:

1ª) **t** é tangente a λ se, e somente se, d = r.



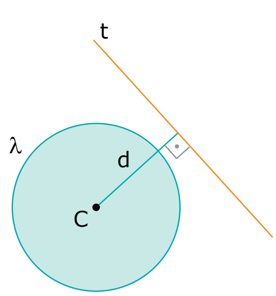
$\boxed{d = r}$

2ª) **t** é secante a λ se, e somente se, d < r.



$\boxed{d < r}$

3ª) **t** é exterior a λ se, e somente se, d > r.



$\boxed{d > r}$

Caso a reta **t** seja tangente ou secante à circunferência λ, obtemos os pontos de interseção resolvendo o sistema formado pelas equações de **t** e λ.

Assim, sendo Ax + By + C = 0 a equação de **t** e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ a equação de λ, temos o sistema:

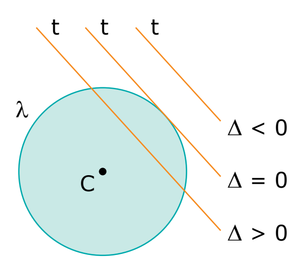
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & \text{(I)} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido facilmente pela substituição de (I) em (II), chegando-se a uma equação do 2º grau de uma incógnita. Sendo Δ o discriminante dessa equação, temos que:

i) Se Δ > 0, então a equação possui duas raízes reais e distintas (**t** é secante a λ).

ii) Se Δ = 0, então a equação possui duas raízes reais e iguais (**t** é tangente a λ).

iii) Se Δ < 0, então a equação não possui raízes reais (**t** é exterior a λ).



Exemplos:

1º) Qual é a posição relativa entre a reta (t) y = x + 1 e a circunferência (λ) $x^2 + y^2 = 2$?

1º modo

Comparar o raio **r** com a distância **d** do centro da circunferência até a reta.

λ: $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow C(0, 0)$ e $r = \sqrt{2}$

t: x – y + 1 = 0

Logo:

$$d(C, t) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \Rightarrow d(C, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(C, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, d < r. Portanto, **t** é secante a λ.

2º modo

Resolver o sistema formado pelas equações de **t** e λ.

$$\begin{cases} y = x + 1 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$x^2 + (x + 1)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (2)^2 - 4.(2).(-1) = 12 \Rightarrow \Delta > 0$

Portanto, $\Delta > 0$. Então, **t** é secante a λ.

2º) Obter a equação da circunferência do centro C(1, 2), tangente à reta t: $3x + 4y + 4 = 0$.

O raio da circunferência é igual à distância do centro até a reta.

$$r = d(C, t) = \frac{|3.1 + 4.2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

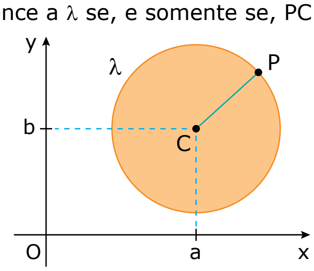
Portanto, a equação da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UM PONTO E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos, num plano cartesiano, uma circunferência λ: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Em relação a λ, um ponto $P(x_0, y_0)$ do plano ocupa uma das três posições:

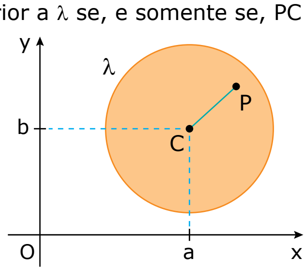
i) **P** pertence a λ se, e somente se, PC = r.



Logo, $PC^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0}$$

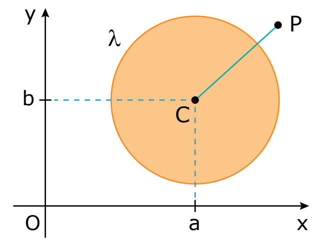
ii) **P** é interior a λ se, e somente se, PC < r.



Logo, $PC^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0}$$

iii) **P** é exterior a λ se, e somente se, PC > r.



Logo, $PC^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0}$$

Exemplos:

1º) Dada a circunferência λ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$, qual é a posição, em relação a λ, do ponto A(3, 1)?

Substituindo-se as coordenadas de **A** no 1º membro da equação de λ, temos:

$3^2 + 1^2 + 2 . 3 - 2 . 1 - 7 = 7 > 0$

Portanto, **C** é exterior a λ.

2º) Dada a circunferência λ: $x^2 + y^2 = 1$, qual é a posição, em relação a λ, do ponto A(0, −1)?

Substituindo as coordenadas de **A** no 1º membro da equação de λ, temos:

$0^2 + (-1)^2 - 1 = 0$

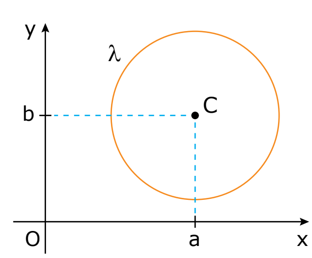
Portanto, **A** pertence a λ.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE PONTOS

Considere uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio **r**,

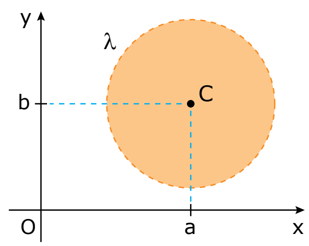
i) Os pontos que satisfazem a equação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ são os pontos de λ.



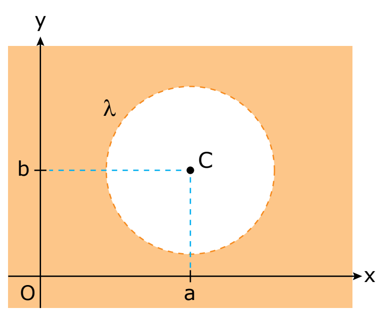
ii) Os pontos que satisfazem a inequação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ são os pontos interiores a λ.



iii) Os pontos que satisfazem a inequação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ são os pontos exteriores a λ.



Exemplos:

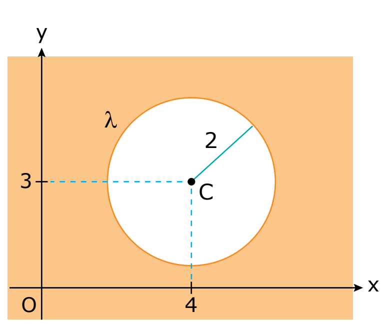
1º) Representar graficamente: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \geq 0$

$(x^2 - 8x + ...) + (y^2 - 6y + ...) \geq -21 \Rightarrow$

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) \geq -21 + 16 + 9 \Rightarrow$

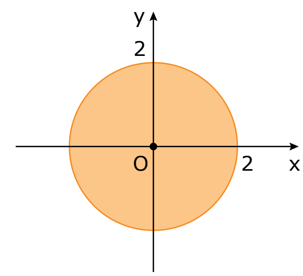
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 \geq 4$

Essa inequação representa os pontos da circunferência de centro (4, 3) e raio 2 e os pontos exteriores a ela.

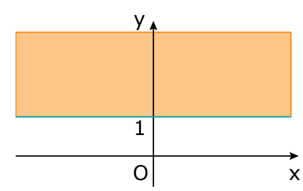


2º) Representar graficamente: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$

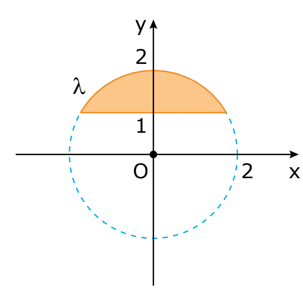
$x^2 + y^2 \leq 4$ é representada pelos pontos da circunferência de centro (0, 0) e raio 2 e pelos pontos interiores a ela.



$y \geq 1$ é representada pelos pontos de ordenada 1 e pelos pontos de ordenada maior que 1.



Portanto, o segmento circular λ a seguir é a representação dos pontos que satisfazem $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 1$.

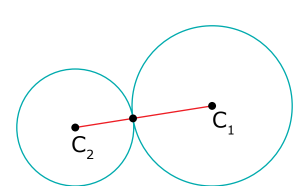


POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Dadas duas circunferências de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 ($r_1 \geq r_2$), sabemos, da geometria plana, que:

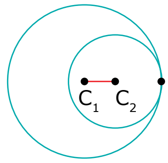
1º caso: Circunferências tangentes exteriormente

$\boxed{d(C_1, C_2) = r_1 + r_2}$



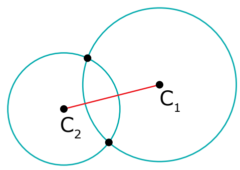
2º caso: Circunferências tangentes interiormente

$$\boxed{d(C_1, C_2) = r_1 - r_2}$$



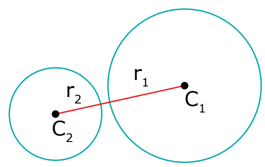
3º caso: Circunferências secantes

$$\boxed{r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2}$$



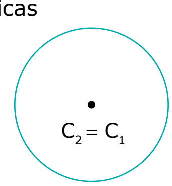
4º caso: Circunferências exteriores

$$\boxed{d(C_1, C_2) > r_1 + r_2}$$



Caso especial: Circunferências concêntricas

$$\boxed{d(C_1, C_2) = 0}$$



Exemplos:

1º) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 2 \end{cases}$

$\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = \sqrt{2} \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = 1 \Rightarrow r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

$\Rightarrow 2 - \sqrt{2} < 1 < 2 + \sqrt{2}$

(Circunferências secantes)

2º) $\lambda_1: (x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 1 \end{cases}$

$\lambda_2: (x - 4)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} C_2(4, 0) \\ r_2 = 2 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = 3 \Rightarrow d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow 1 + 2 + 3$

(Circunferências tangentes exteriormente)

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPF) Considere, num referencial xy, a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$. A equação que define uma reta tangente a essa circunferência é:

A) $x = 3$
B) $x = -3$
C) $y = 0$
D) $y = 5$
E) $x = 0$

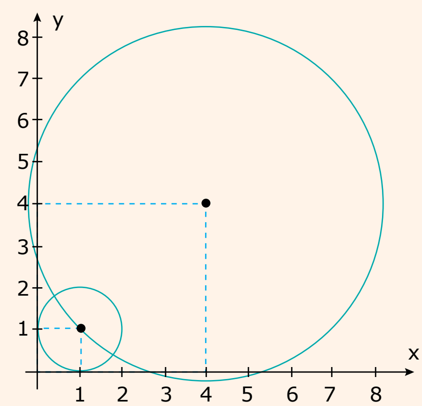
02. IKQM (PUC RS) O raio da circunferência centrada na origem que tangencia a reta de equação $y = x - 1$ é:

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E) $\sqrt{2} - 1$

03. (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, se a circunferência $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ possui **n** interseções com os eixos coordenados, então, o valor de **n** é:

A) 2
B) 1
C) 3
D) 4

04. S2MR (UEG-GO) Observe a figura a seguir:



Sabendo-se que a circunferência de maior raio passa pelo centro da circunferência de menor raio, a equação da circunferência de maior raio é:

A) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 18 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 18 = 0$

05. A04Q (UECE) No plano cartesiano usual, a equação da circunferência que contém os pontos $(-4, 0)$, $(4, 0)$ e $(0, 8)$ é $x^2 + y^2 + my + n = 0$. O valor da soma $m^2 + n$ é:

A) 30
B) 10
C) 40
D) 20

06. 9R9Y (EEAR–2017) As posições dos pontos A(1, 7) e B(7, 1) em relação à circunferência de equação $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$ são, respectivamente,

A) interna e interna.
B) interna e externa.
C) externa e interna.
D) externa e externa.

07. PQQR (Fatec-SP) Considere que **R** é a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem as sentenças $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ e $x \leq y$. A área de **R**, em unidades de superfície, é:

A) π
B) 2π
C) π^2
D) 4π
E) $4\pi^2$

08. FF5G (UDESC–2020) Se as circunferências $(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 5$ e $(x - 6)^2 + (y - b)^2 = 11{,}25$ são tangentes exteriores no ponto (3, 3), então o valor de a + b é igual a:

A) $\frac{11}{2}$
B) $\frac{14}{5}$
C) $\frac{19}{2}$
D) $\frac{5}{2}$
E) $\frac{13}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

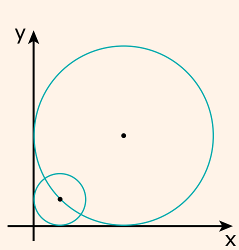
01. 8JBB (Mackenzie-SP–2018) Os valores de **a** para os quais as circunferências de equações $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 16$ são tangentes exteriormente são

A) −2 e 8.
B) 2 e 8.
C) −8 e 2.
D) 0 e 6.
E) −6 e 0.

02. WBBP (FGV) No plano cartesiano, uma circunferência tem centro C(5, 3) e tangencia a reta de equação $3x + 4y - 12 = 0$. A equação dessa circunferência é:

A) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 36 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 49 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 16 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 9 = 0$

03. 7YZØ (UNIFESP) Duas circunferências são tangentes aos eixos coordenados: o centro da circunferência menor pertence à circunferência maior, como mostra a figura a seguir:



Se o raio da maior é 2 cm, a medida, em centímetros, do raio da menor é:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $2 - \sqrt{2}$
C) $\sqrt{2} - 1$
D) $\frac{3}{5}$
E) $\frac{2}{3}$

04. 475U (UNIFESP) Determine a área da região do plano cartesiano definida pelo sistema de inequações:

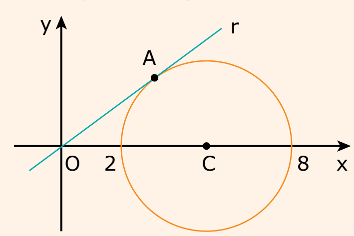
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq x \end{cases}$$

A) $3\pi + 2$
B) 2π
C) $2\pi - 1$
D) π
E) $\pi - 2$

05. (UFOP-MG) A equação da circunferência de centro P(3, 1) e tangente à reta **r**: $3x + 4y + 7 = 0$ é:

A) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 2y - 6x - 6 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

06. (Umesp) Na figura a seguir, a circunferência λ, com centro **C**, e a reta **r** são tangentes no ponto **A**.



As coordenadas do ponto **A** são, respectivamente,

A) 3 e 4.
B) 4 e 3.
C) $\frac{16}{5}$ e $\frac{12}{5}$.
D) $\frac{5}{2}$ e $\frac{15}{8}$.
E) $\frac{8}{3}$ e 2.

07. GXWM (UFPR) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 25 = 0$, no ponto P(3, 4), é:

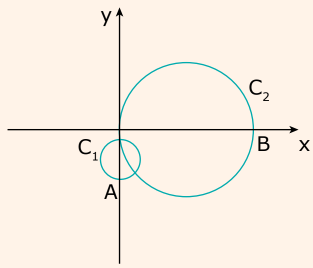
A) $-3x + 4y - 7 = 0$
B) $3x + 4y + 25 = 0$
C) $3x - 4y + 7 = 0$
D) $4x + 3y - 24 = 0$
E) $3x + 4y - 25 = 0$

08. C3ZZ

(UERN) Sejam duas circunferências C_1 e C_2, cujas equações são, respectivamente, iguais a

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 12x = 0.$$

A distância entre os pontos **A** e **B** dessas circunferências, conforme indicada na figura, é



A) 13.

B) 14.

C) 17.

D) 19.

09. U1ZD

(UEG-GO–2020) Sejam P_1 e P_2 os pontos de intersecção entre a circunferência de raio $r = \sqrt{5}$ centrada na origem e a reta $x - y + 1 = 0$. A distância entre P_1 e P_2 é igual a:

A) $\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{2}$

E) $3\sqrt{3}$

10. 29IC

(UDESC) Considerando que as retas $y = -x + 4$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = x + 2$ e tangenciam a circunferência **C**. É correto afirmar que a equação de **C** é:

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$

B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

E) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$

SEÇÃO ENEM

01. Um emblema de uma bandeira de uma escola de samba é uma figura geométrica definida por $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0$ quando projetada em um plano cartesiano com **x** e **y** dados em metros. Esse emblema será pintado em duas cores separadas pela reta $y = x$. A região acima da reta será pintada de verde, e a região abaixo será pintada de rosa. Considerando que a escola de samba pretende confeccionar 100 dessas bandeiras e que uma lata de tinta cobre 4 m² do emblema, determine a quantidade mínima de latas de tinta rosa a serem utilizadas. Adote $\pi = 3{,}14$.

A) 225

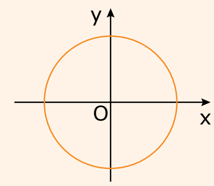
B) 320

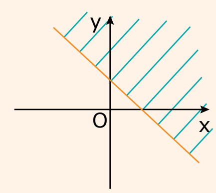
C) 354

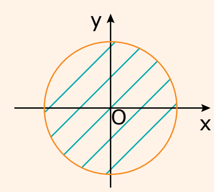
D) 450

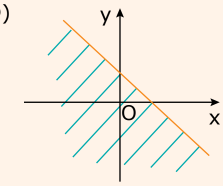
E) 500

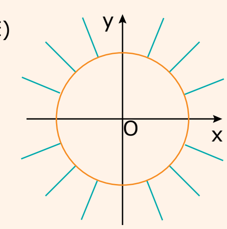
02. Um ex-marido foi proibido pela Justiça de se aproximar da ex-mulher, devendo manter uma distância fixa mínima de sua residência, localizada na origem do sistema cartesiano. A região que melhor representa os pontos proibidos para o ex-marido se localizar é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

SEÇÃO FUVEST/UNICAMP/UNESP

GABARITO

Meu aprovetamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. B	05. D	07. B
02. D	04. C	06. C	08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D	04. E	07. E	10. D
02. A	05. B	08. A	
03. B	06. C	09. D	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C

02. C

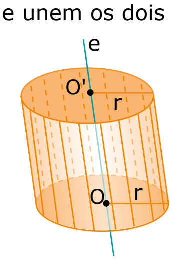
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Cilindros

Anagoria / Creative Commons

DEFINIÇÃO

Considere dois círculos de mesmo raio **r**, situados em dois planos paralelos, e a reta **e**, que passa pelos seus centros. Chama-se de cilindro circular a reunião dos segmentos paralelos à reta **e** que unem os dois círculos.



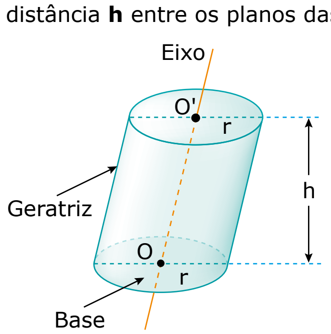
Podemos identificar, em um cilindro circular, os seguintes elementos:

i) Bases: círculos congruentes situados em planos paralelos.

ii) Eixo: a reta determinada pelos centros das bases.

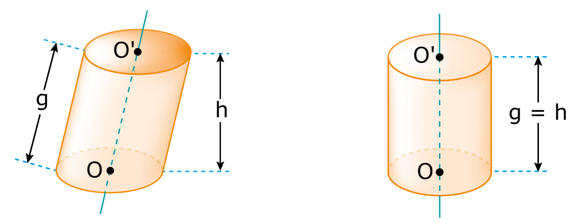
iii) Geratrizes: os segmentos, paralelos ao eixo, com extremidades nas circunferências das bases.

iv) Altura: distância **h** entre os planos das bases.



NOMENCLATURA

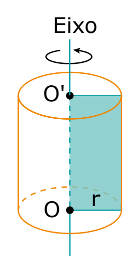
Um cilindro circular pode ser oblíquo ou reto, de acordo com a posição relativa entre as geratrizes e os planos das bases.



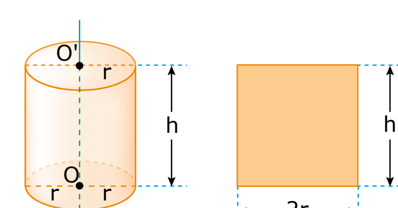
Cilindro oblíquo

Cilindro reto
(geratrizes perpendicular às bases)

O **cilindro circular reto** é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.

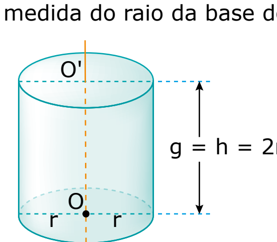


Seção meridiana é a interseção do cilindro com um plano que contém a reta OO' determinada pelos centros das bases. A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.



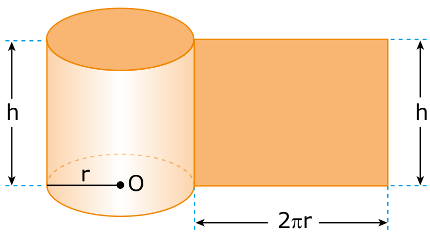
Cilindro reto Seção meridiana

Cilindro equilátero é um cilindro cuja seção meridiana é um quadrado, ou seja, a geratriz e a altura têm medidas iguais ao dobro da medida do raio da base do cilindro.



ÁREA LATERAL

Planificando a superfície lateral de um cilindro reto, obtemos um retângulo de dimensões $2\pi r$ e **h**. Logo, a superfície lateral de um cilindro circular reto é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e **h** (altura do cilindro).



Portanto, a área lateral do cilindro é:

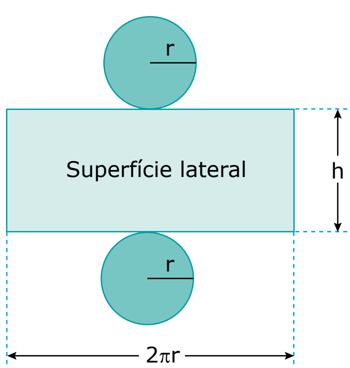
$$\boxed{A_\ell = 2\pi rh}$$

ÁREA TOTAL

A área total de um cilindro é a soma da área lateral (A_ℓ) com as áreas das duas bases ($A_B = \pi r^2$); logo:

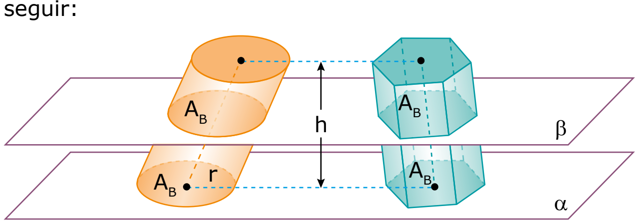
$$A_T = A_\ell + 2A_B \Rightarrow A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_T = 2\pi r(h + r)}$$



VOLUME DO CILINDRO

Consideremos um cilindro e um prisma, ambos de altura **h** e área da base A_B. Suponhamos que os dois sólidos possuam bases num mesmo plano α, como mostrado na figura a seguir:



Qualquer plano β paralelo a α que seciona o prisma também seciona o cilindro, determinando seções de mesma área A_B. Podemos afirmar, então, que os dois sólidos têm volumes iguais.

$$\boxed{V_{cilindro} = V_{prisma} = A_B.h}$$

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

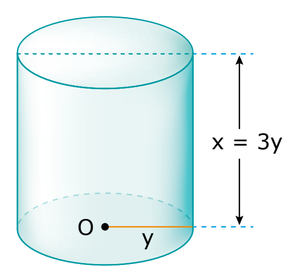
01. (Unesp) Considerar um cilindro circular reto de altura **x** cm e raio da base igual a **y** cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determinar **x** e **y** nos seguintes casos:

A) O volume do cilindro é 243 cm³ e a altura é igual ao triplo do raio.

B) A área da superfície lateral do cilindro é 450 cm² e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

Resolução:

A)



Como o volume do cilindro é 243 cm³, temos:

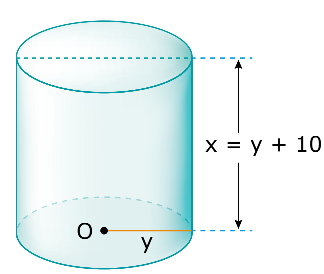
$V = A_B.x \Rightarrow 243 = \pi y^2.3y \Rightarrow 243 = 9.y^3 \Rightarrow$

$y^3 = 27 \Rightarrow y = 3$ cm

Mas, $x = 3y \Rightarrow x = 9$ cm.

Portanto, $x = 9$ cm e $y = 3$ cm.

B)



Como a área lateral do cilindro é 450 cm², temos:

$A_\ell = 2\pi y.x \Rightarrow 450 = 6y.(y + 10) \Rightarrow$

$75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$

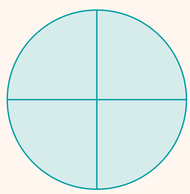
$y = 5$, pois $y > 0$

Logo, $x = y + 10 \Rightarrow x = 15$ cm.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

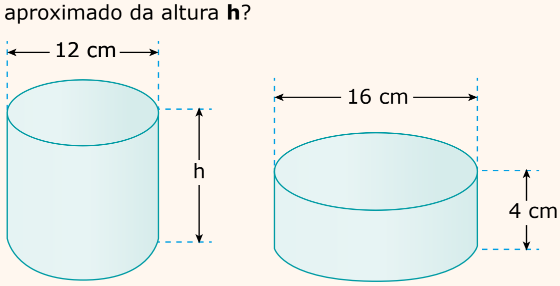
01. (UEG-GO–2020) A porta giratória de um banco é composta por dois retângulos perpendiculares entre si, que se interceptam no eixo do cilindro gerado pela rotação desses retângulos. O desenho a seguir ilustra a área do piso ocupada pela porta giratória.



Sabendo-se que o diâmetro dessa área é 1,60 m e que a altura da porta é 2,30 m, o volume do cilindro ocupado pela porta giratória ao girar é igual a:

A) $3,68\pi$ m³
B) $1,472\pi$ m³
C) $1,84\pi$ m³
D) $3,3856\pi$ m³
E) $4,232\pi$ m³

02. 5I8K (UFPR) As duas latas na figura a seguir possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual é o valor aproximado da altura **h**?



A) 5 cm
B) 6 cm
C) 6,25 cm
D) 7,11 cm
E) 8,43 cm

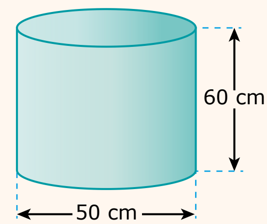
03. (PUC Rio) O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado 3 cm em torno de um dos seus lados é, em cm³:

A) 3π
B) 6π
C) 9π
D) 18π
E) 27π

04. XMEF (UEG-GO) Em uma festa, um garçom, para servir refrigerante, utilizou uma jarra no formato de um cilindro circular reto. Durante o seu trabalho, percebeu que, com a jarra completamente cheia, conseguia encher oito copos de 300 mL cada. Considerando-se que a altura da jarra é de 30 cm, então a área interna da base dessa jarra, em cm², é:

A) 10
B) 30
C) 60
D) 80

05. QQLA (IFSC-SC) A lata a seguir deverá ser produzida a partir de uma chapa de metal que possui 0,8 g por centímetro quadrado de área.



Sabendo que essa lata não possui tampa, é correto afirmar que a massa de cada lata desse tipo será de

A) $2\,900\pi$ g.
B) $5\,250\pi$ g.
C) $10\,400\pi$ g.
D) $13\,000\pi$ g.
E) $8\,420\pi$ g.

06. (Unesp) A base metálica de um dos tanques de armazenamento de látex de uma fábrica de preservativos cedeu, provocando um acidente ambiental. Nesse acidente, vazaram 12 mil litros de látex. Considerando a aproximação $\pi = 3$, e que 1 000 litros correspondem a 1 m³, se utilizássemos vasilhames na forma de um cilindro circular reto, com 0,4 m de raio e 1 m de altura, a quantidade de látex derramado daria para encher exatamente quantos vasilhames?

A) 12
B) 20
C) 22
D) 25
E) 30

07. ZK2X (UEG-GO) Uma coluna de sustentação de determinada ponte é um cilindro circular reto. Sabendo-se que, na maquete que representa essa ponte, construída na escala 1:100, a base da coluna possui 2 cm de diâmetro e 9 cm de altura, o volume, em m³ de concreto, utilizado na coluna é:

Use: $\pi = 3,14$.

A) 2,826
B) 28,26
C) 282,6
D) 2 826

08. RO8S (IFSC-SC) Uma Metalúrgica fabrica tanques em formato de cilindros retos para armazenar combustíveis. Um desses reservatórios tem área lateral de 5π metros quadrados e o seu volume possui a capacidade de 10π metros cúbicos.

Nessas condições, é correto afirmar que a medida do raio da base desse reservatório é

A) 16 m.
B) 80 cm.
C) 8 m.
D) 40 dm.
E) 4π m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

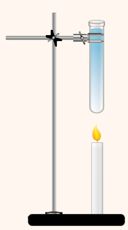
01. LQZQ (Unifor-CE–2018) Em virtude da grande escassez de água no estado do Ceará, foi decidida em reunião do condomínio do edifício Castel Gandolfo, a construção de uma nova cisterna, a fim de aumentar o volume de água armazenada. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro. Ficou decidido que a nova cisterna deverá armazenar 81 m³.

MATEMÁTICA

Mantendo-se o mesmo formato e a mesma altura da atual, qual deve ser o aumento do raio da nova cisterna para atingir o volume desejado? (Use π = 3,0.)

A) 0,5 metro
B) 1,0 metro
C) 2,0 metros
D) 2,5 metros
E) 3,0 metros.

02. (CMMG–2018) Em trabalhos de laboratório, é comum acompanhar o comportamento de líquidos em aquecimento. Os líquidos, da mesma forma que os sólidos, passam por uma dilatação quando são aquecidos. Por não possuírem forma específica, os líquidos assumem o formato do recipiente em que foram alojados. Ao analisar o comportamento térmico de um líquido, percebe-se que sua dilatação ocorre ao mesmo tempo em que ocorre a dilatação do recipiente, ou seja, quando aquecido, o complexo (líquido + recipiente) se dilata. Na prática, quando somente se considera que a capacidade do frasco aumentou, a dilatação observada para o líquido será uma dilatação aparente. A dilatação real sofrida pelo líquido é superior à dilatação aparente e é idêntica à soma da dilatação aparente com a dilatação do recipiente.



Durante um experimento prático de aquecimento de determinado líquido, foi utilizado um tubo de ensaio graduado que indicava, inicialmente, a marcação de um volume de 30 cm³.

Após 4 minutos de aquecimento, o volume no tubo de ensaio indicava 32 cm³ e também uma elevação de, aproximadamente, 3 mm na altura do líquido armazenado no tubo de ensaio.

Considerando-se as informações dadas, pode-se concluir que o diâmetro do tubo de ensaio, após o aquecimento, era de, aproximadamente:

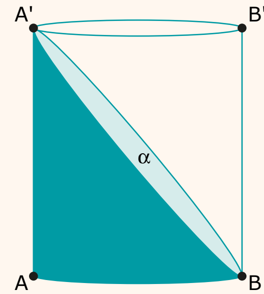
A) 4 cm
B) 3 cm
C) 2 cm
D) 1,5 cm

03. (UFRGS-RS–2018) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque.

Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m³.

A) 57
B) 60
C) 63
D) 66
E) 69

04. 08T0 (UERJ–2017) Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4 cm e altura AA′ de 10 cm. O plano α, perpendicular à seção meridiana ABB′A′, que passa pelos pontos B e A′ das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



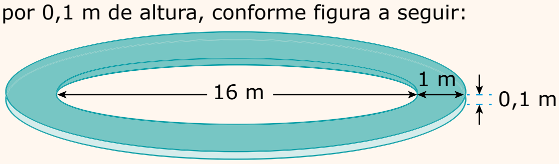
O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm³, é igual a:

A) 8π
B) 12π
C) 16π
D) 20π

05. (IFCE) Dentre todos os retângulos de perímetro P = 40 cm, iremos rotacionar o de área máxima em torno de um de seus lados, gerando um cilindro. O volume deste cilindro, em cm³, é:

A) 500π
B) 25π
C) 50π
D) 100π
E) $1\,000\pi$

06. 6A2P (UFPB) Sr. Ptolomeu construirá em sua chácara um jardim de formato circular com 16 m de diâmetro. Contornando o jardim, haverá uma calçada, medindo 1 m de largura por 0,1 m de altura, conforme figura a seguir:



Use: π = 3,14.

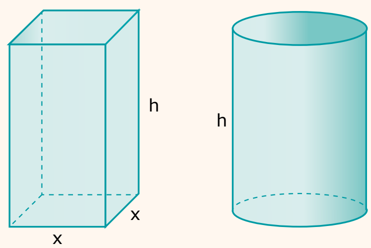
Supondo que o preço médio do m³ da calçada a ser construída é de 100 reais, conclui-se que a despesa do Sr. Ptolomeu com a construção da calçada será, aproximadamente, de

A) 685,30 reais.
B) 653,80 reais.
C) 583,30 reais.
D) 533,80 reais.
E) 835,30 reais.

07. BP70 (UECE) Um fabricante de latas de alumínio com a forma de cilindro circular reto vai alterar as dimensões das latas fabricadas de forma que o volume seja preservado. Se a medida do raio da base das novas latas é o dobro da medida do raio da base das antigas, então a medida da nova altura é

A) a metade da medida da altura das latas antigas.
B) um terço da medida da altura das latas antigas.
C) um quarto da medida da altura das latas antigas.
D) dois terços da medida da altura das latas antigas.

08. MSRY
(UFTM-MG) Um paralelepípedo reto-retângulo, de volume V_1, e um cilindro circular reto, de raio R = 0,5 m e volume V_2, têm a mesma altura h = 4 m.



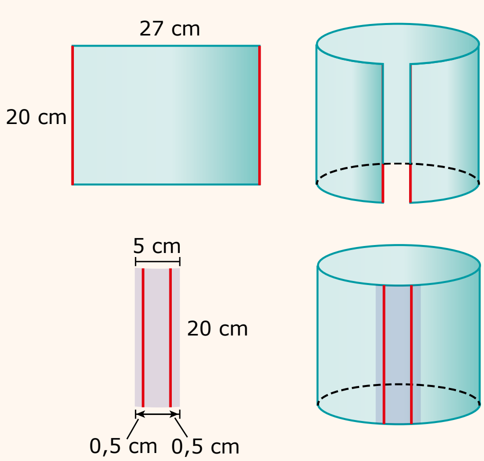
Se $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$, então a medida **x** da aresta da base do paralelepípedo é igual a:

A) $5\sqrt{2}$
B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
E) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

09. T77K
(IFAL) Uma determinada empresa fabrica latas de óleo, em formato cilíndrico, com capacidade total de 1 litro e recebe uma encomenda para fabricar latas de mesmo formato, com capacidade total de $\frac{1}{2}$ litro, mas que estas sejam da mesma altura das latas de 1 litro. Qual é a razão entre os diâmetros da lata de 1 litro e da nova lata de $\frac{1}{2}$ litro?

A) 2
B) $2^{\frac{1}{2}}$
C) π
D) $\pi^{\frac{1}{2}}$
E) $3^{\frac{1}{2}}$

10. DU5L
(Unesp–2018) Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm, conforme indica a figura.



Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando π = 3,1, o volume desse cilindro é igual a

A) 1 550 cm³.
B) 2 540 cm³.
C) 1 652 cm³.
D) 4 805 cm³.
E) 1 922 cm³.

11. (ACAFE-SC) As colunas de sustentação de uma determinada ponte são formadas por cilindros retos, sem bases (são cilindros vazados, que posteriormente serão preenchidos com concreto), de 8 metros de diâmetro e com capacidade de 314 000 litros. Para a confecção desses cilindros, a indústria usa chapas metálicas retangulares de 3,15 m × 1,56 m. As chapas serão unidas por fletes também metálicos que serão soldados ao longo das dimensões da chapa (despreze as dimensões dos filetes).

Considere as afirmações a seguir, assinalando V para as verdadeiras e F para as falsas.

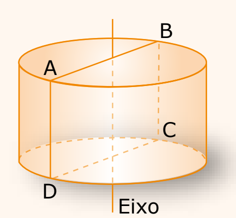
Use π = 3,14.

( ) A altura do cilindro é um número entre 5 metros e 7 metros.
( ) Quando planificado, o cilindro torna-se um retângulo cujo lado maior mede entre 7 metros e 10 metros.
( ) O número de chapas utilizadas na construção de um cilindro pertence ao intervalo [28, 36].

A sequência correta, de cima para baixo, é:

A) F–F–V
B) V–V–F
C) V–V–V
D) V–F–V

12. WOJB
(UFMG) Em um cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura a seguir:



O volume desse cilindro é de

A) $\frac{250}{\pi}$ cm³.
B) $\frac{500}{\pi}$ cm³.
C) $\frac{625}{\pi}$ cm³.
D) $\frac{125}{\pi}$ cm³.

13. F4JC
(UDESC–2018) Uma coroa cilíndrica é a região espacial situada entre dois cilindros concêntricos de mesma altura, um com raio **R** e outro com raio **r**, sendo r < R. Se a altura, o volume e a soma das medidas dos raios dessa coroa cilíndrica são, respectivamente, 4 cm, 4,25π cm³ e 4,25 cm, então a área total de sua superfície é:

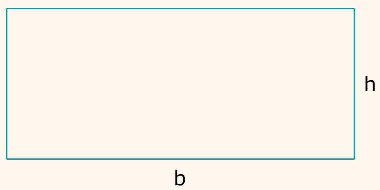
A) 34π cm²
B) 18,0625π cm²
C) 20,125π cm²
D) 18,125π cm²
E) 36,125π cm²

MATEMÁTICA

14. (PUC-SP) Dispõe-se de **N** tubos cilíndricos, todos iguais entre si, cada qual com diâmetro interno de 4 cm. Se esses tubos transportam a mesma quantidade de água que um único tubo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 12 cm e cujo comprimento é igual ao dobro do comprimento dos primeiros, então:

A) N > 15
B) 10 < N < 15
C) 6 < N < 10
D) N < 6

15. 88P7 (UFPR–2017)

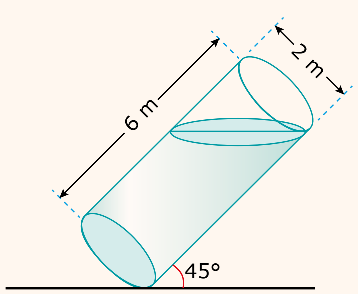


Na modelagem matemática de um processo de fabricação, é comum supor que não há perda de material com emendas, sobreposição de partes, etc.

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com diâmetro de 120 cm e capacidade de 1,5 m^3. Neste problema, estamos nos referindo a um cilindro circular reto perfeito. Para fazer a lateral desse cilindro, será usada uma chapa metálica retangular de comprimento **b** e altura **h**. Use π = 3,14 e dê suas respostas com duas casas decimais.

A) Calcule o comprimento **b** que a chapa deve ter.
B) Calcule a altura **h** que a chapa deve ter.

16. U422 (UFU-MG) Considere um tanque cilíndrico de 6 metros de comprimento e 2 metros de diâmetro que está inclinado em relação ao solo em 45°, conforme mostra a figura a seguir. Sabendo-se que o tanque é fechado na base que toca o solo e aberto na outra, qual é o volume máximo de água que o tanque pode conter antes de derramar?



SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2020) Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d'água: tipo **A** e tipo **B**. Ambas têm o formato cilíndrico e possuem o mesmo volume, e a altura da caixa-d'água do tipo **B** é igual a 25% da altura da caixa-d'água do tipo **A**.

Se **R** denota o raio da caixa-d'água do tipo **A**, então o raio da caixa-d'água do tipo **B** é:

A) $\frac{R}{2}$
B) 2R
C) 4R
D) 5R
E) 16R

02. (Enem–2018) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.

No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	9	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

03. (Enem–2017) Com o objetivo de reformar os tambores cilíndricos de uma escola de samba, um alegorista decidiu colar adereços plásticos na forma de losango, como ilustrado na figura 1, nas faces laterais dos tambores. Nesta colagem, os vértices opostos **P** e **Q** do adereço deverão pertencer às circunferências do topo e da base do tambor cilíndrico, respectivamente, e os vértices opostos **R** e **S** deverão coincidir após a colagem do adereço no tambor, conforme ilustra a figura 2. Considere que o diâmetro do cilindro correspondente ao tambor meça 0,4 metro. Utilize 3,1 como aproximação para π.

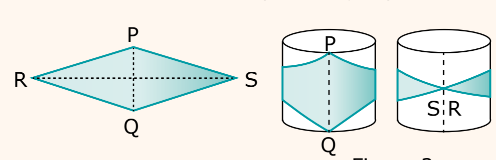


Figura 1 Figura 2

A diagonal RS do adereço a ser confeccionado pelo alegorista deve medir, em metro,

A) 0,124.
B) 0,400.
C) 0,496.
D) 1,240.
E) 2,480.

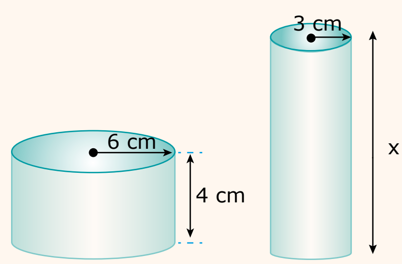
04. (Enem) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

A) 0,5
B) 1,0
C) 2,0
D) 3,5
E) 8,0

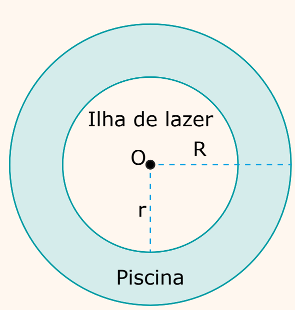
05. (Enem) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V_1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V_2.



A medida da altura desconhecida vale

A) 8 cm.
B) 10 cm.
C) 16 cm.
D) 20 cm.
E) 40 cm.

06. (Enem) Num parque aquático, existe uma piscina infantil, na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que, após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.



Considere 3 como o valor aproximado para π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de:

A) 1,6.
B) 1,7.
C) 2,0.
D) 3,0.
E) 3,8.

07. (Enem) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois, com o calor, ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

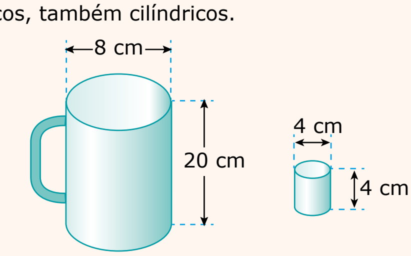
CIÊNCIA HOJE DAS CRIANÇAS. FNDE; Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de

Utilize: $\pi = 3$.

A) 20 mL.
B) 24 mL.
C) 100 mL.
D) 120 mL.
E) 600 mL.

08. (Enem) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.

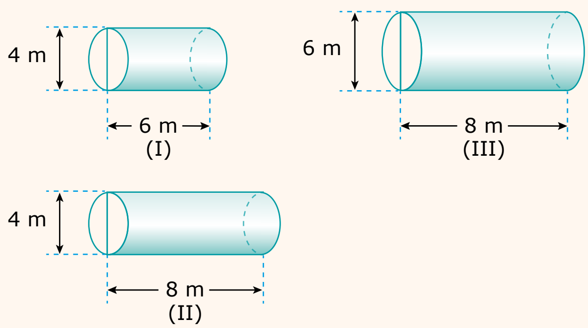


Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade miníma de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

09. (Enem) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento. Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto?

Considere: $\pi \cong 3$.



A) I, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

B) I, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

C) II, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

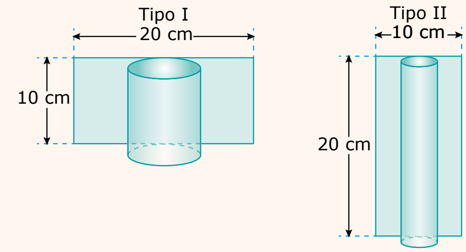
D) III, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

E) III, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

10. (Enem) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível) foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a

A) R$ 230,40.
B) R$ 124,00.
C) R$ 104,16.
D) R$ 54,56.
E) R$ 49,60.

11. (Enem) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm × 10 cm (conforme ilustram as figuras a seguir). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

A) o triplo.
B) o dobro.
C) igual.
D) a metade.
E) a terça parte.

SEÇÃO FUVEST/UNICAMP/UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. D
03. E
04. D
05. A
06. D
07. B
08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. B
03. C
04. D
05. E
06. D
07. C
08. C
09. B
10. A
11. D
12. B
13. E
14. A
15.
 A) b = 3,768 m
 B) h = 1,33 m
16. 5π m³

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. D
03. D
04. C
05. B
06. A
07. C
08. A
09. D
10. D
11. B

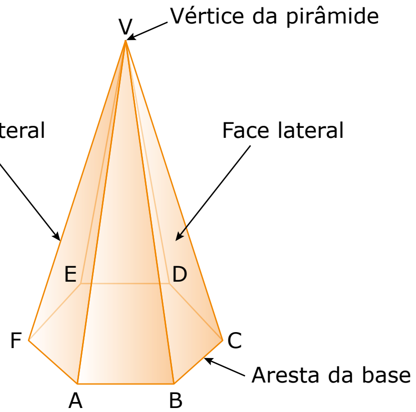
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Pirâmides

DEFINIÇÃO

Pirâmide é todo poliedro convexo construído unindo-se os vértices de um polígono qualquer (base da pirâmide) a um mesmo ponto (vértice da pirâmide) situado fora do plano desse polígono.

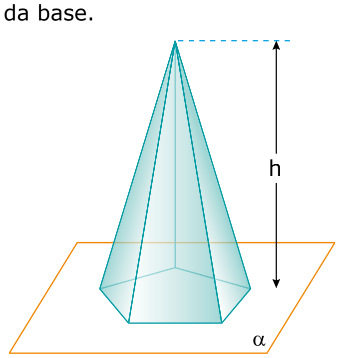
Na figura a seguir, temos uma pirâmide de base ABCDEF e vértice **V**. Com exceção da base, as demais faces são formadas por um lado da base e pelo vértice da pirâmide. São sempre triângulos e denominadas faces laterais.



Podemos, então, identificar, na pirâmide mostrada, os seguintes elementos:

- **i)** Base: face ABCDEF
- **ii)** Arestas da base: AB, BC, CD, DE, EF e FA
- **iii)** Faces laterais: os triângulos BCV, CDV, DEV, EFV, FAV e ABV
- **iv)** Arestas laterais: CV, DV, EV, FV, AV e BV

A altura de uma pirâmide é a distância **h** entre o vértice e o plano (α) da base.



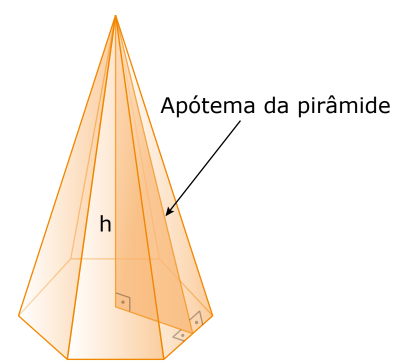
NOMENCLATURA

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

PIRÂMIDE REGULAR

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes, e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Chama-se apótema de uma pirâmide regular a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.

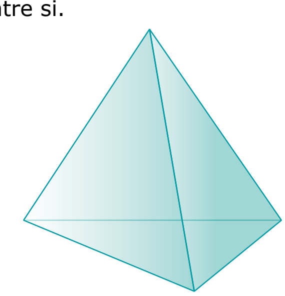


Pirâmide regular hexagonal

TETRAEDRO

Tetraedro é uma pirâmide triangular.

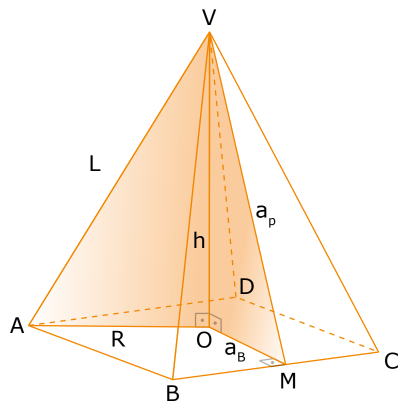
Tetraedro regular é um tetraedro que possui as seis arestas congruentes entre si.



Tetraedro

RELAÇÕES NUMA PIRÂMIDE REGULAR

Considere a pirâmide quadrangular regular VABCD:



Nela:

VM = a_p é o apótema da pirâmide regular (altura da face lateral);

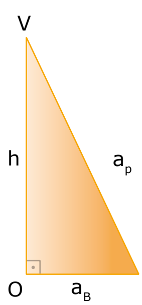
OM = a_B é o apótema da base;

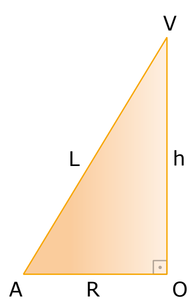
OA = **R** é o raio da circunferência circunscrita à base;

VA = **L** é a aresta lateral da pirâmide;

VO = **h** é a altura da pirâmide.

Dos triângulos sombreados na figura anterior, tiramos as seguintes relações, válidas para toda pirâmide regular:





$$\boxed{a_p^2 = h^2 + a_B^2}$$

$$\boxed{L^2 = h^2 + R^2}$$

ÁREAS LATERAL E TOTAL

Para uma pirâmide qualquer, a área lateral corresponde à soma das áreas de todas as faces laterais.

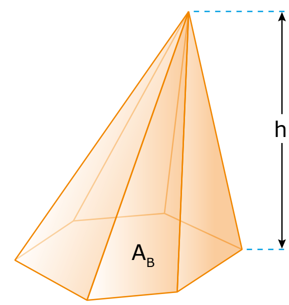
Como as faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes, para calcularmos a área lateral, fazemos a área de uma face lateral multiplicada pelo número de faces laterais.

A área total de uma pirâmide corresponde à soma da área lateral com a área da base:

$$\boxed{A_T = A_\ell + A_B}$$

VOLUME

Sejam A_B a área da base e **h** a altura de uma pirâmide qualquer. O volume **V** dessa pirâmide é dado por:



$$\boxed{V = \frac{1}{3}.A_B.h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

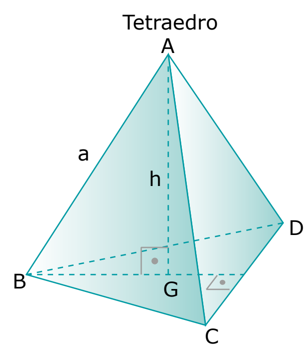
01. De um tetraedro regular de aresta **a**, calcular:

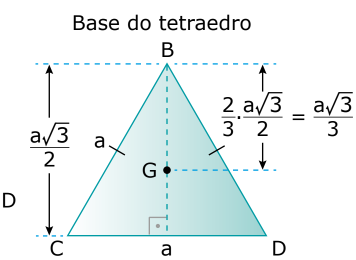
A) a área total A_T.

B) a medida **h** da altura.

C) o seu volume **V**.

Resolução:





A) Área total:

$$A_T = 4A_B = 4\left(\frac{1}{2}\,.\,a\,.\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A_T = a^2\sqrt{3}$$

B) Cálculo da altura:

Do triângulo AGB, temos:

$$h^2 = a^2 - (BG)^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

C) Volume:

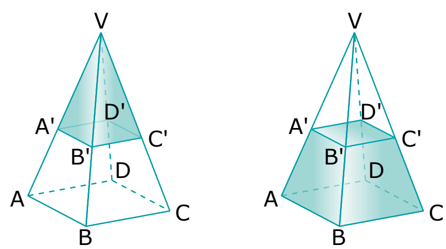
$$V = \frac{1}{3}.A_B.h, \text{ em que } A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } h = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Então:}$$

$$V = \frac{1}{3}\,.\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,.\,\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

SEÇÃO DE UMA PIRÂMIDE POR UM PLANO PARALELO À BASE

Quando secionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos.

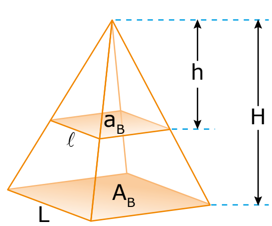
O sólido que contém o vértice é uma nova pirâmide, e o sólido que contém a base da pirâmide é um tronco de pirâmide de bases paralelas.



A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm bases semelhantes, e os elementos lineares homólogos (arestas das bases, arestas laterais, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos que elas são semelhantes.

Razão de semelhança

Dadas duas pirâmides semelhantes, a razão entre dois elementos lineares homólogos é denominada razão de semelhança. Essa razão será representada por **k**.



$$\boxed{\frac{H}{h} = \frac{L}{\ell} = k}$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:

$$\frac{A_B}{a_B} = \frac{L^2}{\ell^2} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_B}{a_B} = k^2}$$

Para razões entre volumes das pirâmides semelhantes, em que **V** e **v** são os volumes das pirâmides grande e pequena, respectivamente, temos:

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.H}{\frac{1}{3}.a_B.h} = \frac{A_B}{a_B}.\frac{H}{h} = k^2.k = k^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{V}{v} = k^3}$$

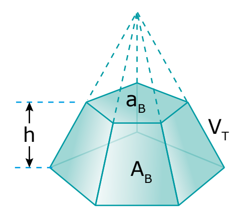
GENERALIZANDO

i) A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

Dadas a área da base maior (A_B), a área da base menor (a_B) e **h** a medida da altura do tronco, o volume do tronco da pirâmide pode ser obtido por meio da fórmula:

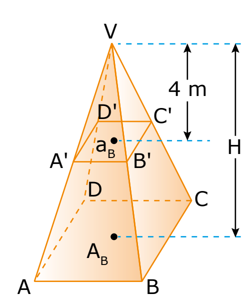


$$\boxed{V_T = \frac{h}{3}\left[A_B + \sqrt{A_B.a_B} + a_B\right]}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (UFSC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m² de área. A 4 m do vértice, traça-se um plano paralelo à base, e a seção assim feita tem 64 m² de área. Qual a altura da pirâmide?

Resolução:



A_B = 144 m²

a_B = 64 m²

Fazendo semelhança entre as pirâmides VABCD e VA'B'C'D', temos:

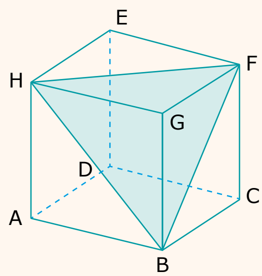
$$\frac{A_B}{a_B} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{144}{64} = \left(\frac{H}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{H}{4} \Rightarrow H = 6 \text{ m}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. J5NO

(UFRGS-RS–2019) Considere o paralelepípedo de vértices **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H** e a pirâmide de vértices **B**, **F**, **G**, **H**, inscrita no paralelepípedo, representados na figura a seguir.



A razão entre o volume da pirâmide e o volume do paralelepípedo é:

A) $\frac{1}{6}$
B) $\frac{1}{5}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{1}{2}$

02. WFEA

(UFPR) Um prisma possui 17 faces, incluindo as faces laterais e as bases inferior e superior. Uma pirâmide cuja base é idêntica à base do prisma, possui quantas arestas?

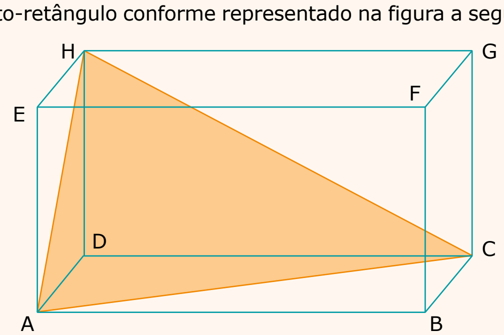
A) 26
B) 28
C) 30
D) 32
E) 34

03. (UTFPR–2017) Uma barraca de *camping* foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente,

A) $6\sqrt{3}$ m² e $6\sqrt{3}$ m³.
B) $3\sqrt{3}$ m² e $3\sqrt{3}$ m³.
C) $5\sqrt{3}$ m² e $2\sqrt{3}$ m³.
D) $2\sqrt{3}$ m² e $5\sqrt{3}$ m³.
E) $4\sqrt{3}$ m² e $8\sqrt{3}$ m³.

04. WJSN

(UFRGS-RS) Considere ABCDEFGH um paralelepípedo reto-retângulo conforme representado na figura a seguir:



Se as arestas do paralelepípedo medem 3, 6 e 10, o volume do sólido ACDH é:

A) 10
B) 20
C) 30
D) 60
E) 90

05. H8WC

(UFMG) Em uma indústria de velas, a parafina é armazenada em caixas cúbicas, cujo lado mede **a**.

Depois de derretida, a parafina é derramada em moldes em formato de pirâmides de base quadrada, cuja altura e cuja aresta da base medem, cada uma, $\frac{a}{2}$.

Considerando-se essas informações, é correto afirmar que, com a parafina armazenada em apenas uma dessas caixas, enche-se um total de

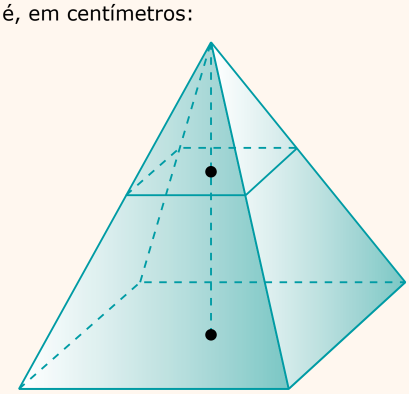
A) 6 moldes.
B) 8 moldes.
C) 24 moldes.
D) 32 moldes.

06. W95H

(EsPCEx-SP) Determine o volume (em cm³) de uma pirâmide retangular de altura "a" e lados da base "b" e "c" (**a**, **b** e **c** em centímetros), sabendo que a + b + c = 36 e "a", "b" e "c" são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

A) 16
B) 36
C) 108
D) 432
E) 648

07. (UFMG) Corta-se uma pirâmide regular de base quadrangular e altura 4 cm por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais. A altura do tronco de pirâmide obtido é, em centímetros:



A) 1
B) $4 - 2\sqrt[3]{4}$
C) 2
D) $4 - \sqrt{2}$
E) $4 - \sqrt[4]{2}$

08. VWY2 (UPE) Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um *designer* projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta 20 cm que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina nas faces laterais, e com uma placa de prata na base. Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado, e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

Considere: $\sqrt{3} = 1,7$.

A) 24 000

B) 18 000

C) 16 000

D) 14 000

E) 12 000

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. MUJ4 (UFSM-RS) Desde a descoberta do primeiro plástico sintético da história, esse material vem sendo aperfeiçoado e aplicado na indústria. Isso se deve ao fato de o plástico ser leve, ter alta resistência e flexibilidade. Uma peça plástica usada na fabricação de um brinquedo tem a forma de uma pirâmide regular quadrangular em que o apótema mede 10 mm e a aresta da base mede 12 mm. A peça possui para encaixe, em seu interior, uma parte oca de volume igual a 78 mm^3. O volume, em mm^3, dessa peça é igual a

A) 1 152.

B) 1 074.

C) 402.

D) 384.

E) 306.

02. (UECE–2018) Considere uma pirâmide regular hexagonal reta, cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em m^2, é:

A) $115\sqrt{39}$

B) $150\sqrt{39}$

C) $125\sqrt{39}$

D) $140\sqrt{39}$

03. (UECE–2020) O volume, em m^3, de um poliedro convexo, cujos vértices são os centros das faces de um cubo, cuja medida da aresta é igual a 1 m, é:

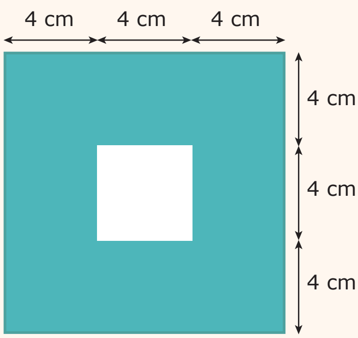
A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$

04. 0054 (Albert Einstein–2018) Uma peça tem a forma de uma pirâmide reta, de base quadrada, com 15 cm de altura e é feita de madeira maciça. A partir da base dessa peça, foi escavado um orifício na forma de um prisma de base quadrada. A figura mostra a visão inferior da base da peça (base da pirâmide).



Esse orifício tem a maior profundidade possível, isto é, sem atravessar as faces laterais da pirâmide. O volume de madeira, em cm^3, que essa peça contém é

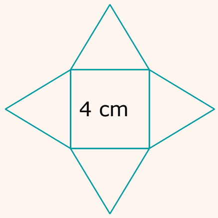
A) 560.

B) 590.

C) 620.

D) 640.

05. AQKH (UFPR) Temos, a seguir, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



A) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^3

B) $16\sqrt{3}$ cm^3

C) 32 cm^3

D) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ cm^3

E) $\frac{64}{3}$ cm^3

06. LNAF (ACAFE-SC) Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21 cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{8}{27}$ do volume da pirâmide original.

A distância (em cm) da base da pirâmide até essa seção é um número

A) fracionário.

B) primo.

C) múltiplo de 3.

D) quadrado perfeito.

07. 3T8R (UNISC-RS) Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado **q**. Sabendo que as faces laterais dessa pirâmide são triângulos equiláteros, pode-se afirmar que o seu volume é:

A) $q^3\sqrt{2}$

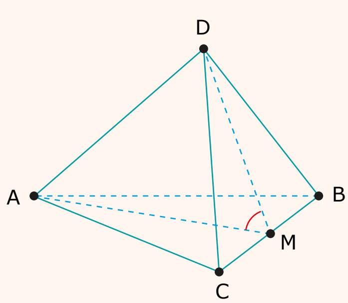
B) $\frac{q^3\sqrt{2}}{6}$

C) $\frac{q\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{q^3\sqrt{3}}{6}$

E) $\frac{q^3\sqrt{3}}{3}$

08. C9UJ (UERJ–2017) Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admite que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é **M**.



O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{2}{5}$

09. (UECE) Se a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide (incluindo a base) é 3 600°, então, a base da pirâmide é um polígono com

A) 9 lados.

B) 10 lados.

C) 11 lados.

D) 12 lados.

10. B6T6 (FGV-SP) Um cubo de aresta 12 cm é secionado duas vezes, formando três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como mostra a figura 1. Em seguida, o cubo é novamente secionado, como indicam as linhas tracejadas na figura 2, de modo que os dois cortes feitos dividem o cubo original em três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como no primeiro caso. Ao final de todas as seções, o cubo foi dividido em nove peças.

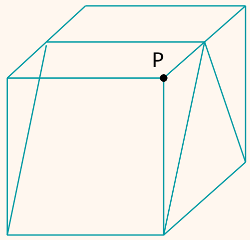


Figura 1

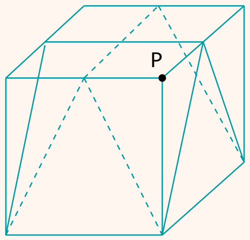


Figura 2

O volume da peça final que contém o vértice **P**, em cm^3, é igual a

A) 144.

B) 152.

C) 288.

D) 432.

E) 466.

11. (FUVEST-SP) Em um tetraedro regular de lado **a**, a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a:

A) $a\sqrt{3}$

B) $a\sqrt{2}$

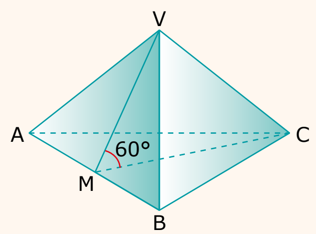
C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

12. KNNG

(FUVEST-SP) A figura a seguir representa uma pirâmide de base triangular ABC e vértice **V**. Sabe-se que ABC e ABV são triângulos equiláteros de lado ℓ, e que **M** é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se a medida do ângulo $V\hat{M}C$ é 60°, então o volume da pirâmide é:



A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^3$

B) $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^3$

C) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3$

D) $\frac{\sqrt{3}}{16}\ell^3$

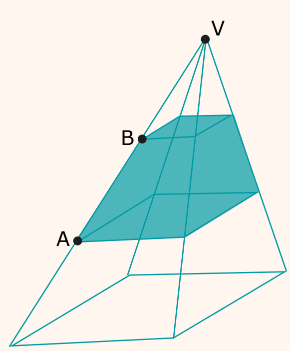
E) $\frac{\sqrt{3}}{18}\ell^3$

13. QMSM

(UERJ–2019) Observe na imagem uma pirâmide de base quadrada, seccionada por dois planos paralelos à base, um contendo o ponto A e o outro o ponto B. Esses planos dividem cada aresta lateral em três partes iguais.

Considere as seguintes medidas da pirâmide:

- altura = 9 cm;
- aresta da base = 6 cm;
- volume total = 108 cm³.



O volume da região compreendida entre os planos paralelos, em cm³, é:

A) 26

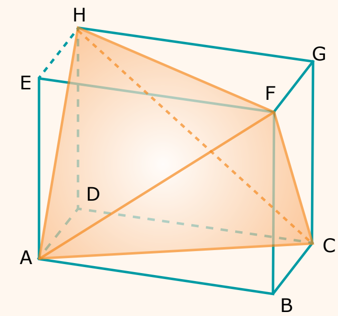
B) 24

C) 28

D) 30

14. ZF99

(UFRGS-RS–2017) Considere ABCDEFGH paralelepípedo reto-retângulo, indicado na figura a seguir, tal que $\overline{AB}$ = 4, $\overline{AE}$ = 3 e $\overline{BC}$= 2.



O volume do tetraedro AHFC é

A) 4.

B) 8.

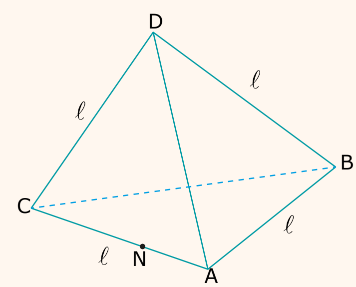
C) 12.

D) 16.

E) 18.

15. SJF4

(UFJF-MG) Na figura a seguir, ABCD é um tetraedro regular de lado ℓ e **N** é um ponto sobre a aresta AC tal que $2\overline{AN} = \overline{NC}$.



A) Calcule $\overline{DN}$.

B) Calcule a área do triângulo BDN.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. IWHN

(Enem) É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

A) Quadrados, apenas.

B) Triângulos e quadrados, apenas.

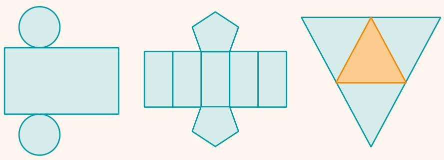
C) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.

D) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.

E) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

MATEMÁTICA

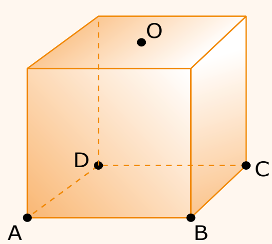
02. (Enem) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.

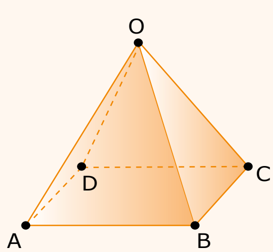


Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

03. (Enem) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele:





Os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **O** do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto **O** é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de **O** em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

A) todos iguais.
B) todos diferentes.
C) três iguais e um diferente.
D) apenas dois iguais.
E) iguais dois a dois.

SEÇÃO FUVEST/UNICAMP/UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. A
- 04. C
- 05. C
- 06. D
- 07. B
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. A
- 04. A
- 05. D
- 06. B
- 07. B
- 08. B
- 09. C
- 10. A
- 11. D
- 12. D
- 13. C
- 14. B

15.
- A) $\frac{\sqrt{7}}{3}\ell$
- B) $\frac{\sqrt{19}}{12}\ell^2$

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

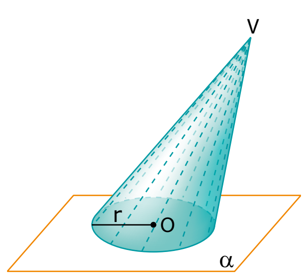
- 01. E
- 02. A
- 03. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Cones

DEFINIÇÃO

Considere um círculo de centro O e raio **r** situado num plano α e um ponto **V** fora de α. Chama-se cone circular a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em **V** e a outra no círculo.



Podemos identificar, em um cone circular, os seguintes elementos:

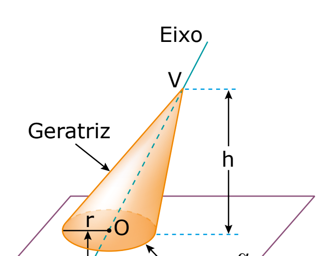
Base: o círculo de centro **O** e raio **r**.

Vértice: o ponto **V**.

Geratrizes: os segmentos com uma extremidade em **V** e a outra na circunferência da base.

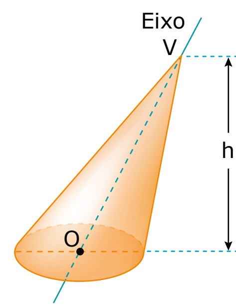
Altura: distância entre o vértice do cone e o plano da base.

Eixo: a reta que contém o vértice e o centro da base.

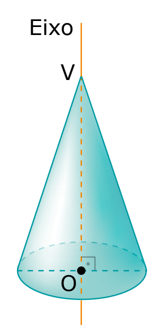


NOMENCLATURA

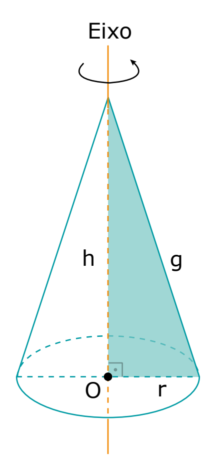
Se o eixo do cone é oblíquo ao plano da base, temos um cone circular oblíquo.



Se o eixo do cone é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular reto.

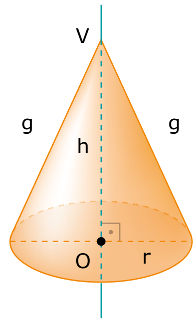


O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

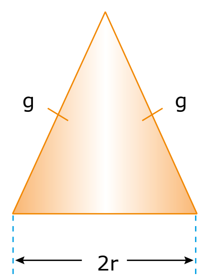


$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Seção meridiana é a interseção do cone com um plano que contém o seu eixo. A seção meridiana de um cone circular reto ou cone de revolução é um triângulo isósceles.

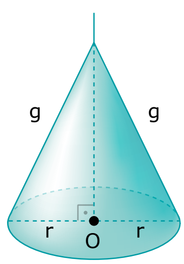


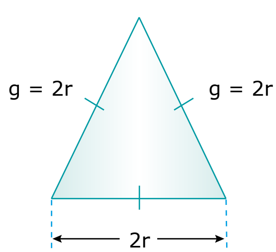
Cone reto



Seção meridiana

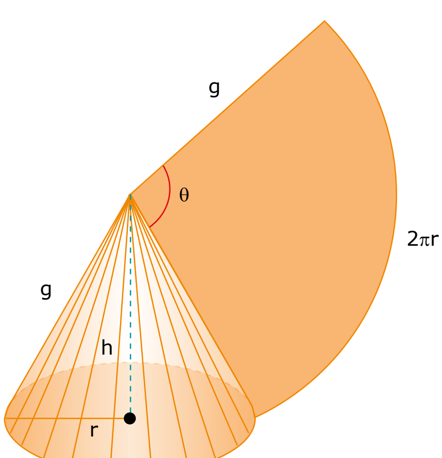
Cone equilátero é um cone cuja seção meridiana é um triângulo equilátero $\left(g = 2r \text{ e } h = r\sqrt{3}\right)$.





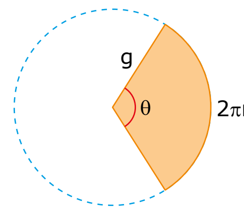
ÁREA LATERAL

Planificando a superfície lateral de um cone reto, obtemos um setor circular de raio **g** (geratriz) e cujo arco correspondente mede $2\pi r$. Logo, a superfície lateral de um cone reto de raio de base **r** e geratriz **g** é equivalente a um setor circular de raio **g** e comprimento do arco $2\pi r$.



A área lateral do cone reto pode, então, ser calculada por uma simples proporção:

Comprimento do arco	Área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_ℓ



Daí, temos:

$$A_\ell = \frac{2\pi r.\pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi r g}$$

Para determinar o ângulo θ, fazemos uma outra proporção:

Comprimento do arco	Ângulo
$2\pi g$	2π rad ou 360°
$2\pi r$	θ

Assim, temos:

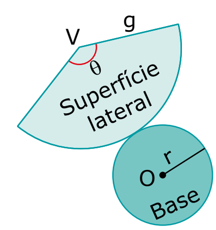
$$\boxed{\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = \frac{360 r}{g} \text{ graus}}$$

ÁREA TOTAL

A área total de um cone é a soma da área lateral (A_ℓ) com a área da base (A_B); logo:

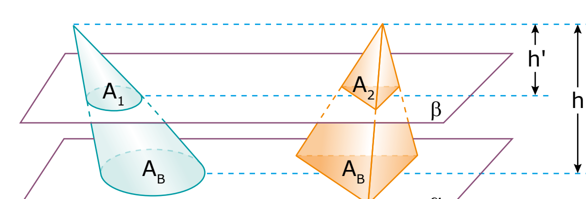
$$A_T = A_\ell + A_B \Rightarrow A_T = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_T = \pi r(g + r)}$$



VOLUME DO CONE

Consideremos um cone e um tetraedro, ambos de altura **h** e área da base A_B. Suponhamos que os dois sólidos possuam bases em um mesmo plano α, como mostrado na figura a seguir:



Qualquer plano β paralelo a α que seciona o cone também seciona o tetraedro. Sendo as áreas das seções A_1 e A_2, respectivamente, temos:

$$\frac{A_1}{A_B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A_2}{A_B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Logo, $A_1 = A_2$, para todo plano β paralelo a α. Então, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$\boxed{V_{Cone} = V_{Tetraedro} = \frac{1}{3}.A_B.h}$$

O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:

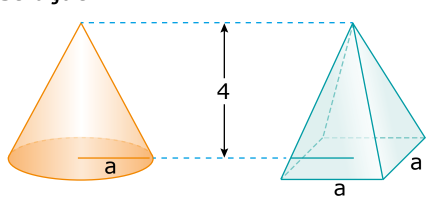
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC RS) O raio da base de um cone circular reto e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular têm mesma medida. Sabendo que suas alturas medem 4 cm, então a razão entre o volume do cone e o da pirâmide é:

A) 1
B) 4
C) $\frac{1}{\pi}$
D) π
E) 3π

Resolução:



Sejam **a** o raio da base do cone e **a** a aresta da base da pirâmide.

Sejam V_c e V_p o volume do cone e da pirâmide, respectivamente. Logo,

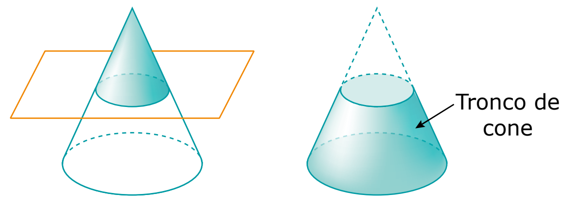
- $V_c = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}\pi a^2 4 = \frac{4}{3}\pi a^2$ e
- $V_p = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}a^2 4 = \frac{4}{3}a^2$

Assim, a razão entre os volumes é:

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^2}{\frac{4}{3}a^2} = \pi$$

TRONCO DE CONE

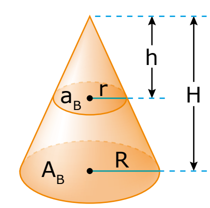
Secionando-se um cone por um plano paralelo à base, obtemos um sólido denominado tronco de cone. Veja:



O novo cone e o cone primitivo têm bases semelhantes, e os elementos lineares homólogos (raios das bases, geratrizes, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos que eles são semelhantes.

Razão de semelhança

Dados dois cones semelhantes, a razão entre dois elementos lineares homólogos é denominada razão de semelhança. Essa razão será representada por **k**.



$$\boxed{\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = k}$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:

$$\boxed{\frac{A_B}{a_B} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = k^2}$$

Para razões entre volumes dos cones semelhantes, em que **V** e **v** são os volumes dos cones grande e pequeno, respectivamente, temos:

$$\boxed{\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.H}{\frac{1}{3}.a_B.h} = \frac{A_B}{a_B}.\frac{H}{h} = k^2.k = k^3}$$

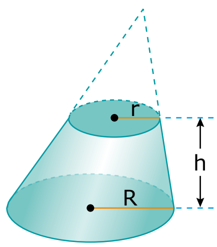
Podemos, então, generalizar da seguinte maneira:

i) A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

VOLUME DO TRONCO DE CONE

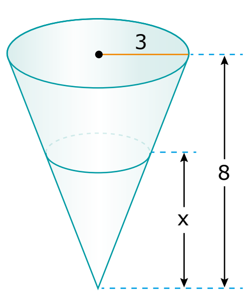
Dados o raio **R** da base maior, o raio **r** da base menor e **h** a medida da altura do tronco, o volume do tronco de cone pode ser obtido por meio da fórmula:



$$V_T = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2]$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (FUVEST-SP) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura **x** atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:



A) $\frac{8}{3}$ cm.
B) 6 cm.
C) 4 cm.
D) $4\sqrt{3}$ cm.
E) $4\sqrt[3]{4}$ cm.

Resolução:

Chamamos de **V** o volume de suco e de água.

O volume do cone grande é, então, 2V.

Como os cones das figuras são semelhantes, então a razão entre os seus volumes é igual ao cubo da razão entre as alturas. Assim, temos:

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{8}{x}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = 4\sqrt[3]{4} \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

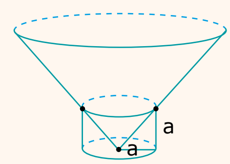
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FMP-RJ–2017) Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{5}$
C) 3
D) 4
E) 5

02. 7FFS (PUC-RS) Uma casquinha de sorvete na forma de cone foi colocada em um suporte com formato de um cilindro, cujo raio da base e a altura medem **a** cm, conforme a figura.



O volume da parte da casquinha que está no interior do cilindro, em cm^3, é:

A) $\frac{\pi a^2}{2}$
B) $\frac{\pi a^2}{3}$
C) $\frac{\pi a^3}{2}$
D) $\frac{\pi a^3}{3}$
E) $\frac{\pi a^3}{6}$

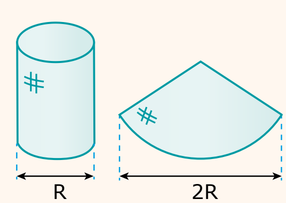
03. KNMZ (UEMG) Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de

Considere $\pi \cong 3$.

A) 5,76 m.
B) 4,43 m.
C) 6,38 m.
D) 8,74 m.

04. TH3M (Unicamp-SP) Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a

A) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.
B) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.
C) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro.
D) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

05. G6P5 (UPE) Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 1 a seguir:

Considere $\pi \cong 3$.

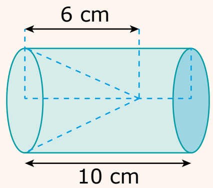
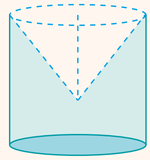


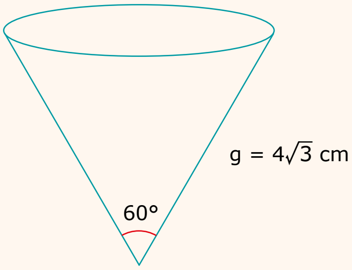
Figura 1


Peça

Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos?

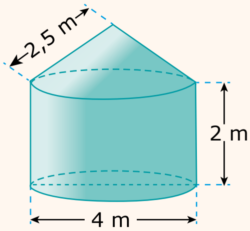
A) $2,16 \cdot 10^5$
B) $7,2 \cdot 10^4$
C) $2,8 \cdot 10^5$
D) $8,32 \cdot 10^4$
E) $3,14 \cdot 10^5$

06. (ESPM-SP–2020) A geratriz (g) do cone circular reto mostrado na figura a seguir mede $4\sqrt{3}$ cm. O volume desse cone, em cm³, é igual a:



A) 24π
B) $18\sqrt{3}\pi$
C) 36π
D) 12π
E) $6\sqrt{3}\pi$

07. L2B6 (UFPB) A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de 40 reais por m² construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura a seguir:

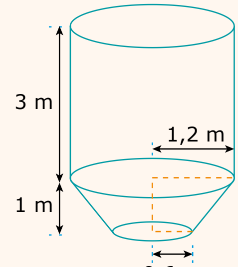


Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de

Dado: $\pi = 3,14$.

A) 100 960.
B) 125 600.
C) 140 880.
D) 202 888.
E) 213 520.

08. L4WO (UPF) Um reservatório de água tem formato de um cilindro circular reto de 3 m de altura e base com 1,2 m de raio, seguido de um tronco de cone reto cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 1,2 m e 0,6 m respectivamente, e altura 1 m, como representado na figura a seguir:



Nesse reservatório, há um vazamento que desperdiça $\frac{1}{3}$ do seu volume por semana.

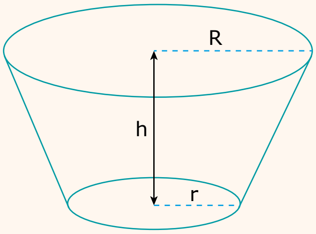
Considerando a aproximação $\pi \cong 3$ e sabendo que 1 dm³ = 1 L, esse vazamento é de

A) 4 320 litros.
B) 15,48 litros.
C) 15 480 litros.
D) 12 960 litros.
E) 5 160 litros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. ØHAM (UEL-PR–2020) Foram construídas cisternas em uma comunidade localizada no sertão nordestino, em pontos estratégicos, para que os moradores daquela localidade pudessem se abastecer de água, principalmente na época das secas. As cisternas foram construídas com formato de tronco de cone, com as seguintes medidas: o raio da base inferior mede 1 m, o raio da base superior mede 2 m e a altura mede 1,5 m, como mostra a figura a seguir.



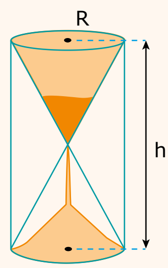
Na época de secas, caminhões-pipas abastecem essas cisternas. Esse tipo de caminhão possui um tanque de armazenamento de água em formato cilíndrico, com 2 metros de diâmetro e 8 metros de comprimento.

Despreze as espessuras dos materiais dos quais são feitos as cisternas e o tanque do caminhão-pipa e suponha que as cisternas estejam completamente vazias de água e o tanque completamente cheio, considere ainda que não há desperdício algum de água.

Nessas condições, quantos tanques de caminhões-pipas completamente cheios de água são necessários para abastecer, no mínimo, 17 cisternas?

MATEMÁTICA

02. FXW7 (UCS) Uma ampulheta tem a forma de dois cones circulares retos idênticos (mesmo raio e mesma altura) no interior de um cilindro circular reto, conforme mostra a figura.



O volume da parte do cilindro sem os dois cones é igual ___________ soma dos volumes desses cones. Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

A) à
B) ao dobro da
C) à metade da
D) a um terço da
E) a dois terços da

03. (UFC-CE) Ao secionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice do cone é igual a um terço da sua altura, obtemos dois sólidos: um cone circular reto S_1 e um tronco de cone S_2. A relação $\dfrac{\text{volume}(S_2)}{\text{volume}(S_1)}$ é igual a:

A) 33
B) 27
C) 26
D) 9
E) 3

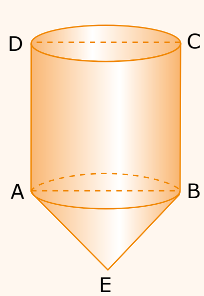
04. (Unifor-CE) Parte do líquido de um cilindro circular reto que está cheio é transferido para dois cones circulares retos idênticos de mesmo raio e mesma altura do cilindro. Sabendo-se que os cones ficaram totalmente cheios e que o nível da água que ficou no cilindro é de 3 m, a altura do cilindro é de

A) 5 m.
B) 6 m.
C) 8 m.
D) 9 m.
E) 12 m.

05. Ø73E (UEFS-BA–2017) Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm^2, mede, aproximadamente:

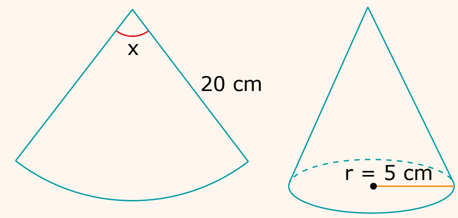
A) $4\pi\sqrt{6}$
B) $4\pi\sqrt{5}$
C) 4π
D) $\pi\sqrt{3}$
E) $\pi\sqrt{2}$

06. (Mackenzie-SP) No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e AE = BE = $\sqrt{10}$. O volume desse sólido é:



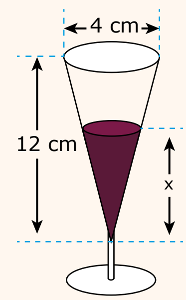
A) $\dfrac{5\pi}{2}$
B) $\dfrac{4\pi}{3}$
C) 4π
D) 5π
E) 3π

07. 9JJ9 (UEL-PR) Uma chapa com forma de um setor de raio 20 cm e ângulo de **x** graus é manuseada para se transformar num cone. Se o raio da base do cone obtido é r = 5 cm, então o valor de **x** é:



A) 60°
B) 75°
C) 80°
D) 85°
E) 90°

08. ZMAY (UFPR) A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.



A) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?
B) Obtenha uma expressão para o volume **V** de líquido nessa taça, em função da altura **x** indicada na figura.

09. 83WJ (PUC-SP–2018) Considere um cilindro reto de área lateral igual a 64π cm^2 e um cone reto, com volume igual a 128π cm^3 cujo raio da base é o dobro do raio da base do cilindro.

Sabendo que a altura do cone é 2 cm menor do que a altura do cilindro, e que a altura do cilindro é um número inteiro, a área lateral desse cone é

A) 100π cm^2.
B) 80π cm^2.
C) 64π cm^2.
D) 40π cm^2.

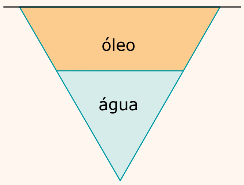
10. (Mackenzie-SP) Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é 128π cm^3. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm^2, é:

A) 144π
B) 120π
C) 80π
D) 72π
E) 64π

11. 91K1 (IFRS–2017) Um cone com altura igual a $\dfrac{30}{\pi}$ dm e raio de 1 dm é colocado com o vértice para baixo a fim de coletar a água de uma torneira que pinga 1 litro de água a cada hora, sendo o intervalo entre um pingo e outro constante. Qual é o tempo necessário para que a água atinja a metade da altura do cone?

A) 1 hora e 15 minutos
B) 1 hora e 25 minutos
C) 2 horas e 30 minutos
D) 3 horas e 30 minutos
E) 5 horas

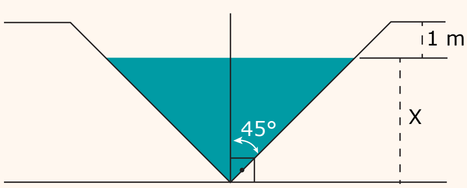
12. DXIC (UCB-DF–2017)



O desenho mostra a secção de um reservatório subterrâneo em forma de cone reto. Sabendo que a altura do reservatório é de 6 m, e que ele contém a mesma quantidade de água e óleo, a altura da coluna de água é

A) menor que 2 metros.
B) maior que 2 metros e menor que 3 metros.
C) maior que 3 metros e menor que 4 metros.
D) maior que 4 metros e menor que 5 metros.
E) maior que 5 metros.

13. 25QW (UERJ–2018) Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45°. Foram retirados desse depósito 19 m³ de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em 1 m e passou a ter **X** metros de altura.



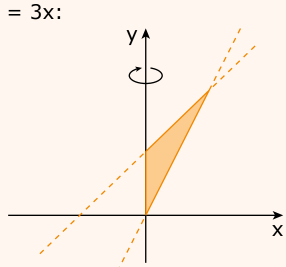
Considerando $\pi = 3$, calcule a altura **X** do nível de óleo.

14. LL5M (UFG-GO) A terra retirada na escavação de uma piscina semicircular de 6 m de raio e 1,25 m de profundidade foi amontoada, na forma de um cone circular reto, sobre uma superfície horizontal plana. Admita que a geratriz do cone faça um ângulo de 60° com a vertical e que a terra retirada tenha volume 20% maior do que o volume da piscina.

Nessas condições, a altura do cone, em metros, é de:

A) 2,0
B) 2,8
C) 3,0
D) 3,8
E) 4,0

15. U9WR (UFMG) Na figura a seguir, está representada a região **T**, do plano cartesiano, limitada pelo eixo y e pelas retas $y = x + 1$ e $y = 3x$:



Seja **S** o sólido obtido pela rotação da região **T** em torno do eixo y. Então, é correto afirmar que o volume de **S** é:

A) $\frac{\pi}{24}$
B) $\frac{\pi}{12}$
C) $\frac{\pi}{8}$
D) $\frac{\pi}{4}$

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de natal, conforme as figuras 1 e 2.

Figura 1

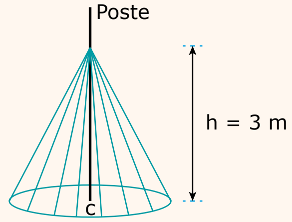


Figura 2

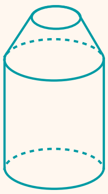
A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto **C** (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram um pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

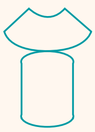
A) 4,00.
B) 4,87.
C) 5,00.
D) 5,83.
E) 6,26

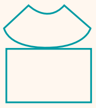
02. (Enem–2017) Para divulgar sua marca, uma empresa produziu um porta-canetas de brinde, na forma do sólido composto por um cilindro e um tronco de cone, como na figura.

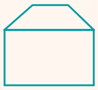


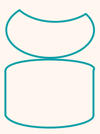
Para recobrir toda a superfície lateral do brinde, essa empresa encomendará um adesivo na forma planificada dessa superfície.

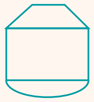
Que formato terá esse adesivo?

A) 

B) 

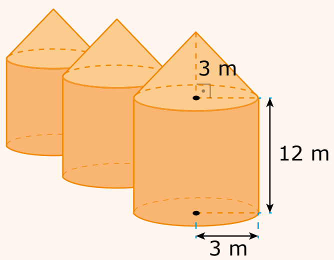
C) 

D) 

E) 

03. K4IØ

(Enem) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A) 6.
B) 16.
C) 17.
D) 18.
E) 21.

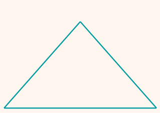
04. (Enem) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

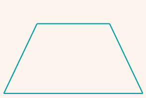
Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

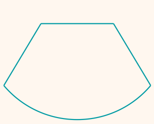
A) 1,44
B) 6,00
C) 7,20
D) 8,64
E) 36,00

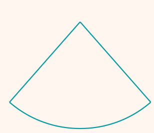
05. (Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

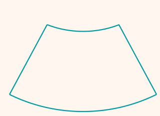
Qual deverá ser a forma do adesivo?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

06. (Enem) Nas empresas em geral, são utilizados dois tipos de copos plásticos descartáveis, ambos com a forma de troncos de cones circulares retos:

- copos pequenos, para a ingestão de café: raios das bases iguais a 2,4 cm e 1,8 cm e altura igual a 3,6 cm;
- copos grandes, para a ingestão de água: raios das bases iguais a 3,6 cm e 2,4 cm e altura igual a 8,0 cm.

Uma dessas empresas resolve substituir os dois modelos de copos descartáveis, fornecendo para cada um de seus funcionários canecas com a forma de um cilindro circular reto de altura igual a 6 cm e raio da base de comprimento igual a **y** centímetros. Tais canecas serão usadas tanto para beber café como para beber água.

Sabe-se que o volume de um tronco de cone circular reto, cujos raios das bases são respectivamente iguais a **R** e **r** e a altura é **h**, é dado pela expressão:

$$V_{\text{Tronco de cone}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

O raio **y** da base dessas canecas deve ser tal que y^2 seja, no mínimo, igual a:

A) 2,664 cm.
B) 7,412 cm.
C) 12,160 cm.
D) 14,824 cm.
E) 19,840 cm.

SEÇÃO FUVEST/UNICAMP/UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. D
03. A
04. A
05. A
06. A
07. E
08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. 8
02. B
03. C
04. D
05. B
06. E
07. E
08.
   A) $V = 16\pi$ cm³
   B) $V_{\text{líquido}} = \frac{x^3\pi}{108}$ cm³
09. B
10. A
11. A
12. D
13. X = 2
14. C
15. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. B
03. D
04. B
05. E
06. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

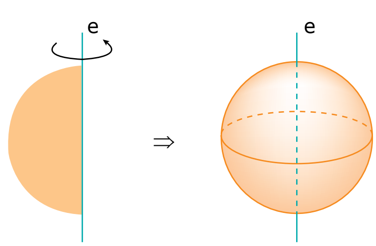
Esferas

Shawn Smith / Creative Commons

INTRODUÇÃO

Considere um ponto **O** e um segmento de medida **R**. Denomina-se esfera de centro **O** e raio **R** o conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a medida OP seja menor ou igual a **R**.

A esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

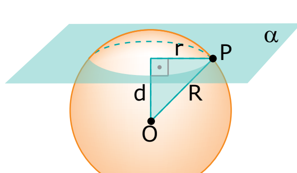


Seção

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.

Sendo **R** o raio da esfera, **d** a distância do plano secante ao centro e **r** o raio da seção, vale a relação:



$$\boxed{r^2 = R^2 - d^2}$$

ÁREA E VOLUME

Área da esfera

Chama-se superfície da esfera de centro **O** e raio **R** ao conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a medida OP seja igual a **R**.

A área **A** da superfície de uma esfera de raio **R** é dada por:

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Volume da esfera

O volume **V** de uma esfera de raio **R** é dado por:

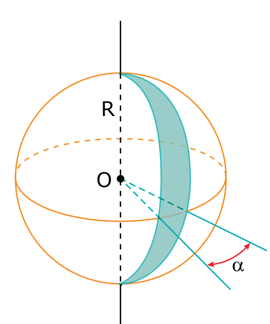
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

FUSO E CUNHA

Fuso esférico

É a região da superfície da esfera compreendida entre duas semicircunferências com extremidades nos polos da esfera.

O ângulo α, medido na seção equatorial, e o raio **R** da esfera caracterizam o fuso.



Área do fuso

Sendo α o ângulo do fuso, temos:

- Com α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——————— } 4\pi R^2 \\ \alpha \text{ ——————— } A_{Fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{Fuso} = \frac{\alpha}{360°}.4\pi R^2}$$

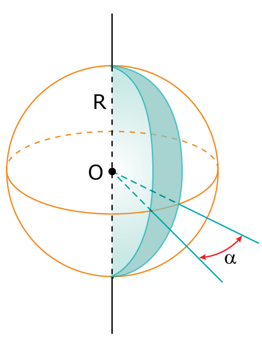
- Com α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ ——————— } 4\pi R^2 \\ \alpha \text{ ——————— } A_{Fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{Fuso} = \alpha.2R^2}$$

Cunha esférica

É a região da esfera compreendida entre dois semicírculos que contêm o seu diâmetro.

A cunha fica determinada pelo raio da esfera e pela medida do ângulo α.



Volume da cunha

Sendo α o ângulo da cunha, temos:

- Com α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——————— } \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha \text{ ——————— } V_{Cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{Cunha} = \frac{\alpha}{360°}.\frac{4}{3}\pi R^3}$$

- Com α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ ——————— } \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha \text{ ——————— } V_{Cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{Cunha} = \frac{\alpha\, 2R^3}{3}}$$

Perceba que a cunha equivale à fração $\frac{\alpha°}{360°}$ ou $\frac{\alpha}{2\pi}$ da esfera.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUCPR) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3 cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2 cm. Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale, aproximadamente

A) 1 cm.

B) 1,5 cm.

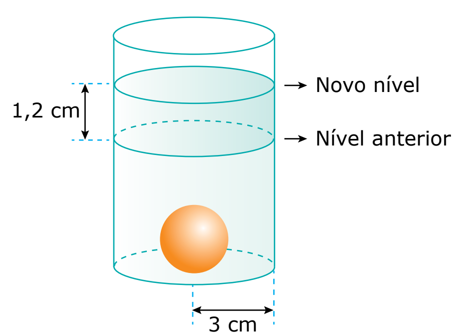
C) 2 cm.

D) 2,5 cm.

E) 3 cm.

Resolução:

Ao mergulharmos totalmente uma bolinha em um recipiente cilíndrico de raio 3 cm, o nível da água sobe 1,2 cm. Veja a figura:



O volume da esfera imersa no cilindro é igual ao volume de água deslocada, que corresponde a um cilindro de raio 3 cm e altura 1,2 cm (em azul escuro). Assim:

$V_{Esfera} = V_{Água\ deslocada} \Rightarrow$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi.3^2 \ .\ 1,2 \Rightarrow$

$r^3 = 8,1 \Rightarrow$

$r \cong 2$ cm

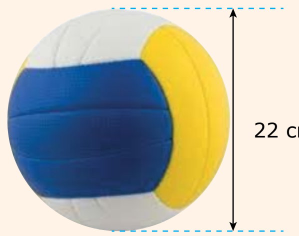
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 6BNW (UFRGS-RS–2018) Fundindo três esferas idênticas e maciças de diâmetro 2 cm, obtém-se uma única esfera maciça de raio

A) $\sqrt[3]{3}$.
B) $\sqrt[3]{4}$.
C) $\sqrt[3]{6}$.
D) 3.
E) 6.

02. VJPG (UEA-AM) Determinado tipo de bola de vôlei é uma esfera com 22 cm de diâmetro, confeccionada com 18 gomos de couro, agrupados em 6 conjuntos coloridos com 3 gomos cada um, sendo 2 conjuntos na cor amarela, 2 conjuntos na cor azul e 2 conjuntos na cor branca, conforme mostra a figura.



Disponível em: <http://uolesporte.blogosfera.uol.com.br>.

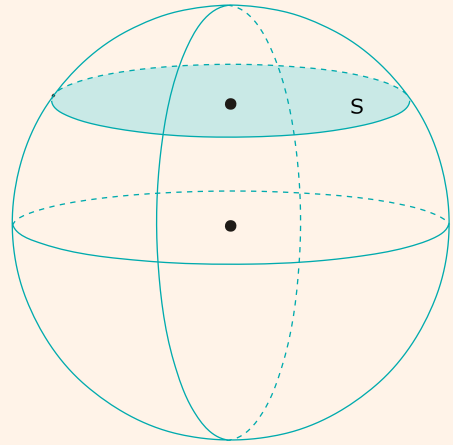
Utilizando $\pi = 3$ e sabendo que todos os conjuntos coloridos têm a mesma área, é correto concluir que a área aproximada de todos os gomos amarelos dessa bola, em cm², é:

A) 495
B) 484
C) 472
D) 446
E) 418

03. 3FJL (UFU-MG) Dispõe-se de um cilindro maciço circular reto, feito de alumínio, cujo raio da base mede 4 cm e cuja a altura mede 10 cm. Esse cilindro será derretido e, com o material fundido, serão fabricadas esferas de aço de raio 2 cm. Supondo que nesse processo não ocorra perda de material, então o número de esferas a serem fabricadas a partir do cilindro dado é igual a:

A) 13
B) 15
C) 14
D) 16

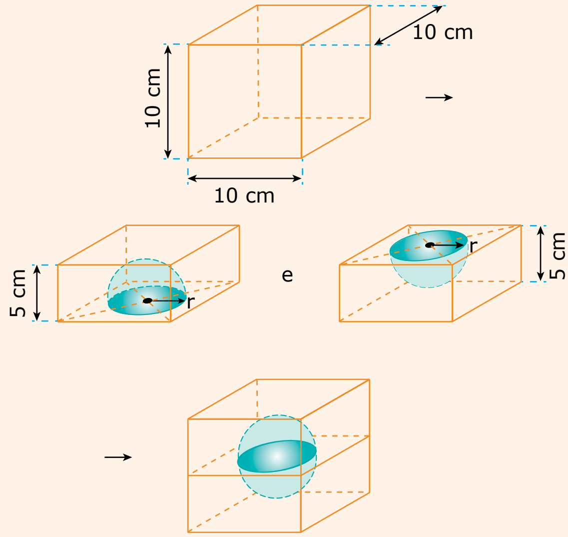
04. 00J5 (UDESC-SC) Seja **S** uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme a figura.



Se **S** está a 3 cm do centro da esfera e tem área igual a 16π cm² então o volume desta esfera é

A) 36π cm³.
B) $\frac{256\pi}{3}$ cm³.
C) 100π cm³.
D) 16π cm³.
E) $\frac{500\pi}{3}$ cm³.

05. 2IW3 (Unesp) Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.



Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm³ e admitindo $\pi \cong 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é:

A) 63
B) 634
C) 630
D) 632
E) 638

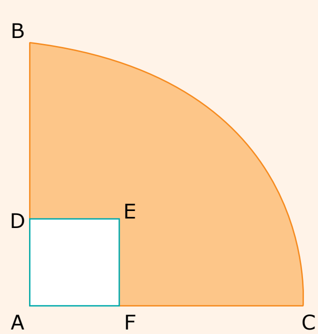
06. V2YF (UE-GO–2017) Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

A) 2 vezes maior.
B) 3 vezes maior.
C) 9 vezes maior.
D) 12 vezes maior.
E) 20 vezes maior.

07. (FUVEST-SP) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio dessa circunferência é

A) 1 cm.
B) 2 cm.
C) 3 cm.
D) 4 cm.
E) 5 cm.

08. 3FCC (UFMG) Observe esta figura.



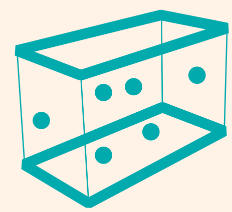
Nela, ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1 cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360°, em torno da reta AB, da região hachurada na figura. Sabe-se que o volume de uma esfera de raio **r** é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$. Dessa forma, esse sólido tem um volume de

A) 14π cm³.
B) 15π cm³.
C) 16π cm³.
D) 17π cm³.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. F44J (UPE–2018) Foram colocadas esferas de raio 5,0 cm dentro de um aquário que tem o formato de um paralelepípedo de 1,25 m de largura, 2,0 m de comprimento e 1,0 m de altura, cheio de água, ocupando sua capacidade máxima. Aproximadamente, quantas esferas terão que ser colocadas nesse aquário para que 10% do volume contido no seu interior seja derramado? Adote $\pi \cong 3,0$.



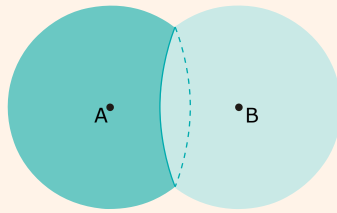
A) 250
B) 300
C) 325
D) 450
E) 500

02. (Unifor) Uma bola de basquete em forma esférica não passa pelo aro da cesta cuja borda é circular. Se o raio do aro mede 60 cm e a distância entre o centro do aro e o centro da bola é igual a 80 cm, o raio da bola é de

A) 90 cm.
B) 100 cm.
C) 120 cm.
D) 140 cm.
E) 160 cm.

03. V7D0 (UERJ) Na fotografia a seguir, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio **R**, unidas de tal modo que a distância entre seus centros **A** e **B** é igual ao raio **R**. A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

A) $\frac{\pi R^2}{2}$

B) $\frac{3\pi R^2}{2}$

C) $\frac{3\pi R^2}{4}$

D) $\frac{4\pi R^2}{3}$

04. (UEG-GO) Suponha que haja laranjas no formato de uma esfera com 6 cm de diâmetro e que a quantidade de suco que se obtém ao espremer cada laranja é $\frac{2}{3}$ de seu volume, sendo o volume dado em litros. Nessas condições, se quiser obter 1 litro de suco de laranja, deve-se espremer no mínimo

(Use: π = 3,14.)

A) 13 laranjas.

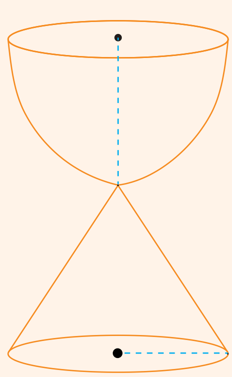
B) 14 laranjas.

C) 15 laranjas.

D) 16 laranjas.

05. H6B9

(CEFET-MG) Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total **V** constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura a seguir.



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de **V**. Portanto o volume de areia, em cm^3, é:

A) 16π

B) $\frac{64\pi}{3}$

C) 32π

D) $\frac{128\pi}{3}$

E) 64π

06. KDX8

(EsPCEx-SP) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida **R**, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}$R, então o raio da esfera mede:

A) $\frac{2}{3}$R

B) $\frac{3}{4}$R

C) $\frac{4}{9}$R

D) $\frac{1}{3}$R

E) $\frac{9}{16}$R

07. NTDC

(UECE) Um círculo de raio **R** gira em torno de seu diâmetro, gerando uma esfera de volume **V**. Se o raio do círculo é aumentado em 50%, então o volume da esfera é aumentado em

A) 100,0%.

B) 125,0%.

C) 215,0%.

D) 237,5%.

08. SB93

(UFRGS-RS) Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm, que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é:

A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16

MATEMÁTICA

09. 50TL
(UECE) Duas esferas que se tangenciam estão em repouso sobre um plano horizontal. Os volumes das esferas são respectivamente $2\,304\pi$ m³ e 36π m³. A distância, em metros, entre os pontos de contato das esferas com o plano é igual a:

A) 9

B) 12

C) 15

D) 10

10. 3375
(PUC-SP–2017) O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm², é:

A) $42\sqrt{2}\pi$

B) $36\sqrt{3}\pi$

C) $32\sqrt{2}\pi$

D) $24\sqrt{3}\pi$

11. 6KGV
(Unesp) Diferentes tipos de nanomateriais são descobertos a cada dia, viabilizando produtos mais eficientes, leves, adequados e, principalmente, de baixo custo. São considerados nanomateriais aqueles cujas dimensões variam entre 1 e 100 nanômetros (nm), sendo que 1 nm equivale a 10^{-9} m, ou seja, um bilionésimo de metro. Uma das características dos nanomateriais refere-se à relação entre seu volume e sua área superficial total.

Por exemplo, em uma esfera maciça de 1 cm de raio, a área superficial e o volume valem 4π cm² e $\left(\frac{4}{3}\right)\pi$ cm³, respectivamente. O conjunto de nanoesferas de 1 nm de raio, que possui o mesmo volume da esfera dada, tem a soma de suas áreas superficiais:

A) 10 vezes maior que a da esfera.

B) 10^3 vezes maior que a da esfera.

C) 10^5 vezes maior que a da esfera.

D) 10^7 vezes maior que a da esfera.

E) 10^9 vezes maior que a da esfera.

12. (UFPE) Um cilindro reto de ferro é derretido, e o ferro obtido, que tem o mesmo volume do cilindro, é moldado em esferas com raio igual à metade do raio da base do cilindro. Se a altura do cilindro é quatro vezes o diâmetro de sua base, quantas são as esferas obtidas?

13. 3C77
(UEFS-BA) Uma bolha de sabão, esférica, não estouraria se sua área superficial fosse, no máximo, 44% maior.

Logo, ela poderia conter um volume de ar em seu interior, sem estourar, até

A) 32,4% maior.

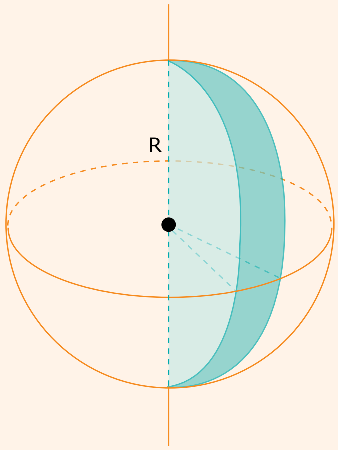
B) 44% maior.

C) 53,6% maior.

D) 66% maior.

E) 72,8% maior.

14. (Unesp) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida **R** cm foi cortada em 12 fatias iguais, em que cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio **R** cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de **R**:

A) A área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico).

B) Quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio **R**, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi(R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2.h$, sendo **h** a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de **R**) deverá ser igual a:

A) 2R

B) 4R

C) 6R

D) 9R

E) 12R

02. (Enem) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

(Use: $\pi = 3$.)

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

A) 168.

B) 304.

C) 306.

D) 378.

E) 514.

03. (Enem) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na figura 1, uma foto de um globo da morte e, na figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

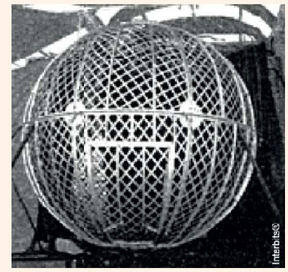


Figura 1

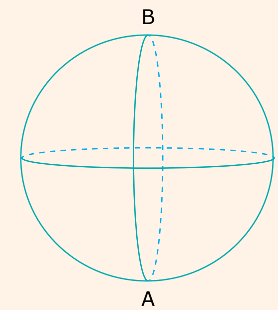
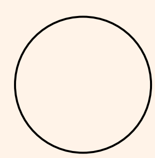


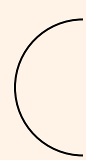
Figura 2

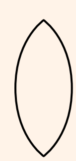
Na figura 2, o ponto **A** está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto **B** e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos **A** e **B**.

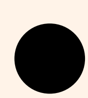
Disponível em: <www.baixaki.com.br>. Acesso em: 29 fev. 2012.

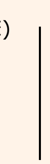
A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

A) 

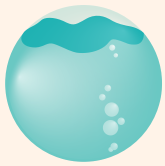
B) 

C) 

D) 

E) 

04. (Enem) Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

 1 385 km	Toda a água do planeta 1,39 bilhão de km³
 406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km³
 272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km³
 58 km	Água doce superficial 104,59 mil de km³

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares + ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é:

A) $\frac{1}{343}$ C) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{136}{203}$

B) $\frac{1}{49}$ D) $\frac{29}{136}$

05. (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (figura 1), porém, um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

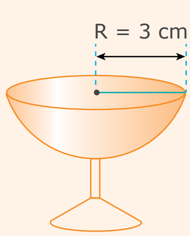


Figura 1

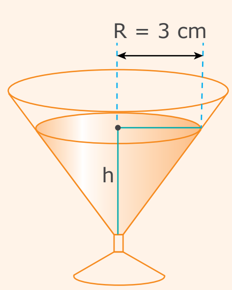


Figura 2

Considere: $V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{Cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

A) 1,33. C) 12,00. E) 113,04.

B) 6,00. D) 56,52.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. B
- 04. E
- 05. D
- 06. C
- 07. E
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. C
- 04. B
- 05. A
- 06. B
- 07. D
- 08. B
- 09. B
- 10. C
- 11. D
- 12. 48
- 13. E
- 14.
  - A) $\frac{\pi R^2}{3}$ cm²
  - B) $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm²

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. E
- 03. E
- 04. A
- 05. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Matemática

Bernoulli
Sistema de Ensino

SUMÁRIO

FRENTE A

FRENTE B

FRENTE C

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 2 24/03/2021 09:47:08

MATEMÁTICA

FRENTE A

Caderno Extra

MÓDULO 15

LOGARITMOS

01. (UFMG) Para todo $x > 0$ e todo $y > 0$, a afirmativa correta é:

A) $\log (x + y) = \log x + \log y$

B) $\dfrac{\log xy}{y} = \log x$

C) $x \log x = \log x^2$

D) $\log \dfrac{1}{x} = -\log x$

E) $(\log x^2)^3 = \log x^6$

02. (FGV-SP) Admitindo-se os valores: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, a equação $4^x = 12$ terá uma raiz

A) negativa.

B) superior a 2.

C) inteira.

D) inferior a 3.

E) imaginária.

03. (Cesgranrio) A expressão $|\log (5.\log 100)|^2$ vale

A) 50.

B) 25.

C) 16.

D) 4.

E) 1.

04. (UECE) Se $k = \log_5 (6 + \sqrt{35})$, então $5^k + 5$ é igual a

A) 6.

B) 8.

C) 12.

D) 16.

E) $11 + \sqrt{35}$.

05. (Vunesp) Considere os seguintes números reais:

$$a = \frac{1}{2},\ b = \log_{\sqrt{2}} 2,\ c = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

A) c < a < b

B) a < b < c

C) c < b < a

D) a < c < b

E) b < a < c

06. (Mackenzie-SP) Se $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \dfrac{1}{x} = -1$, então $\log_4 x$ é igual a

A) $\dfrac{1}{4}$.

B) $\dfrac{1}{2}$.

C) −1.

D) 1.

E) −2.

07. (UFTM-MG) O valor de $\dfrac{\log 8}{\log \frac{1}{8}}$ é igual a:

A) 6.log 2

B) log 2

C) 1

D) 0

E) −1

08. (Mackenzie-SP) Se $2^m = 3$, então $\log_2 54$ é igual a:

A) 2m + 3

B) 3m + 1

C) 6m

D) m + 6

E) m + 3

09. (Fatec-SP) Se **M** é o menor número inteiro solução da inequação $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-x+1} < \dfrac{9}{16}$, então $\log_2 M$ é igual a

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 3.

E) 4.

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 3 24/03/2021 09:47:11

10. (UFOP-MG) O conjunto solução da equação $2^{2.\log_2 \sqrt{\frac{2+x}{x}}} = x$ é:

A) {1, 2}

B) {–1}

C) {2}

D) ∅

11. (Unicamp-SP) Seja f: $(2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$. Assinale a única alternativa que corresponde à solução da equação f(x) = 1.

A) $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

B) $1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

C) $2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

D) $1 + 2\sqrt{6}$

E) $3 + \sqrt{6}$

12. (Unicamp-SP) Calcule o valor da expressão a seguir, em que **n** é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de **n**.

$$E = \log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)$$

13. (FUVEST-SP) Seja $x = 2^{1\,000}$. Sabendo que $\log_{10} 2$ é aproximadamente igual a 0,30103, pode-se afirmar que o número de algarismos de **x** é

A) 300.

B) 301.

C) 302.

D) 1 000.

E) 2 000.

14. (FUVEST-SP) Sejam **x** e **y** números positivos. A igualdade log (x + y) = log x + log y é verdadeira se, e somente se:

A) x = 2 e y = 2

B) $x = \frac{5}{3}$ e $y = \frac{5}{2}$

C) x = y

D) xy = 1

E) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

15. (UFV-MG) A altura, em metros, de um indivíduo de uma determinada etnia pode ser modelada pela função $H(t) = \frac{1,8}{1 + (2,6) \,.\, 10^{-0,1t}}$, em que **t** é dado em anos. Usando esse modelo e considerando log 2 = 0,3 e log 13 = 1,1, em que log representa o logaritmo decimal, é correto afirmar que o tempo mínimo necessário, em anos, para que um indivíduo dessa etnia atinja 1,2 metro é

A) 7.

B) 6,5.

C) 7,5.

D) 8.

16. (FUVEST-SP) Pressionando a tecla "Log" de uma calculadora, aparece, no visor, o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 88 888 888 (oito oitos). Quantas vezes a tecla "Log" precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

17. (Mackenzie-SP) Se **a**, **b** e **c** são reais positivos tais que a + b + c = 1, então:

A) log a > 0

B) log a.log b.log c < 0

C) log a + log b > 0

D) log a + log b + log c = 0

E) log b.log c < 0

18. (UFMG) Em uma danceteria, há um aparelho com várias caixas de som iguais. Quando uma dessas caixas é ligada no volume máximo, o nível **R** de ruído contínuo é de 95 dB. Sabe-se que:

I. $R = 120 + 10.\log_{10} I_s$, em que I_s é a intensidade sonora, dada em watt/m²;

II. a intensidade sonora I_s é proporcional ao número de caixas ligadas.

Seja **N** o maior número dessas caixas de som que podem ser ligadas, simultaneamente, sem que se atinja o nível de 115 dB, que é o máximo suportável pelo ouvido humano. Então, é correto afirmar que **N** é

A) menor ou igual a 25.

B) maior que 25 e menor ou igual a 50.

C) maior que 50 e menor ou igual a 75.

D) maior que 75 e menor ou igual a 100.

GABARITO

01. D	10. C
02. D	11. A
03. E	12. –2
04. E	13. C
05. A	14. E
06. D	15. A
07. E	16. B
08. B	17. B
09. C	18. D

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 4 24/03/2021 09:47:14

MÓDULO 16

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

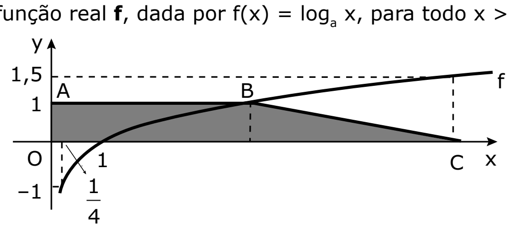
01. (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$, com $h(t)$ em metros e **t** em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

A) 9.
B) 8.
C) 5.
D) 4.
E) 2.

02. (UFJF-MG) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_{10} (x^2 - 6x + 10)$. Então, o valor de $f(6) - f(-2)$ é:

A) 26
B) $\log_{10} 26$
C) 1
D) $\log_{10} \dfrac{5}{13}$
E) $1 + \log_{10} 26$

03. (Fatec-SP) Na figura a seguir, está representada a função real **f**, dada por $f(x) = \log_a x$, para todo $x > 0$.



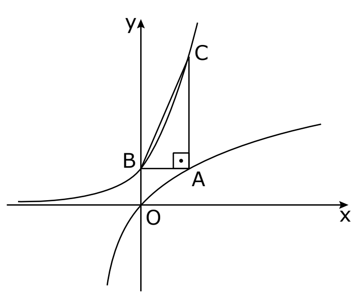
De acordo com os dados da figura, é correto concluir que a área do trapézio ABCO, em unidades de superfície, é:

A) 4.
B) 4,5.
C) 5.
D) 5,5.
E) 6.

04. (FGV-SP) O número de soluções da equação $2^x - 4 = \log_2 (x + 4)$ é:

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

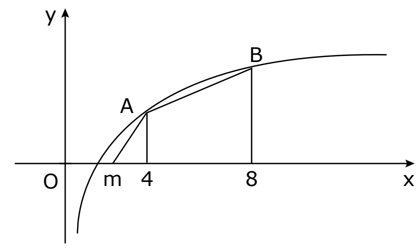
05. (Mackenzie-SP) A figura mostra os esboços dos gráficos das funções $f(x) = 2^{2x}$ e $g(x) = \log_2 (x + 1)$.



A área do triângulo ABC é:

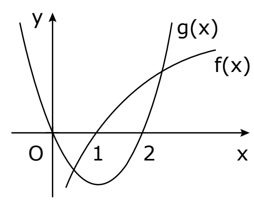
A) $\dfrac{1}{4}$.
B) $\dfrac{5}{2}$.
C) $\dfrac{3}{2}$.
D) 3.
E) $\dfrac{1}{3}$.

06. (PUC Minas) Na figura, os pontos **A** e **B** pertencem ao gráfico da função $y = \log_2 x$. A medida da área do trapézio de vértices **A**, **B**, (4, 0) e (8, 0) é cinco vezes a medida da área do triângulo de vértices **A**, (4, 0) e (m, 0). Então, o valor de **m** é:



A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.

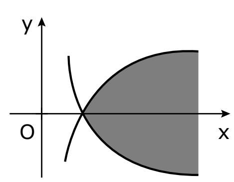
07. (UNIFESP) A figura representa os gráficos das funções $f(x) = \log_{10} x$ e $g(x) = x^2 - 2x$.

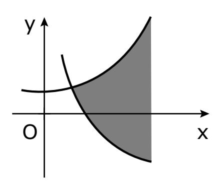


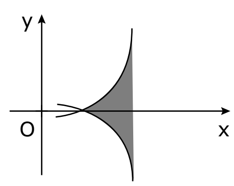
Pode-se afirmar que a equação $x^2 - 2x = \log_{10} x$

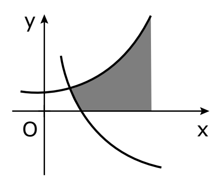
A) não tem solução.
B) tem somente uma solução.
C) tem duas soluções positivas.
D) tem duas soluções cujo produto é negativo.
E) tem duas soluções cujo produto é nulo.

08. (Unimontes-MG) O esboço que melhor representa o conjunto solução do sistema de inequações $\begin{cases} \log x - y \geq 0 \\ \log x + y \geq 0 \end{cases}$ é:

A)


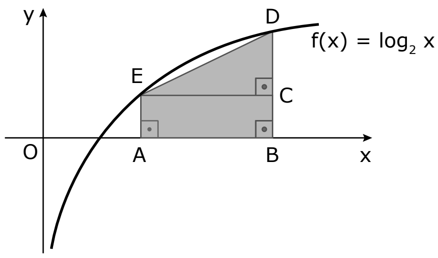
C)


B)


D)


MATEMÁTICA

09. (UFSCar-SP) A curva a seguir indica a representação gráfica da função $f(x) = \log_2 x$, sendo **D** e **E** dois dos seus pontos.



Se os pontos **A** e **B** têm coordenadas respectivamente iguais a (k, 0) e (4, 0), com **k** real e k > 1, a área do triângulo CDE será igual a 20% da área do trapézio ABDE quando **k** for igual a:

A) $\sqrt[3]{2}$

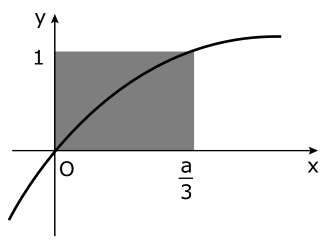
B) $\sqrt{2}$

C) $2\sqrt[3]{2}$

D) $2\sqrt{2}$

E) $3\sqrt[4]{2}$

10. (Mackenzie-SP) A figura mostra o esboço do gráfico da função $f(x) = \log_a (x + b)$. A área do retângulo assinalado é:



A) 1.

B) $\frac{1}{2}$.

C) $\frac{3}{4}$.

D) 2.

E) $\frac{4}{3}$.

11. (UFU-MG) O conjunto solução da inequação $\log_2 (3 - x) - \log_2 (2x + 1) \geq 1$, no conjunto dos números reais, é:

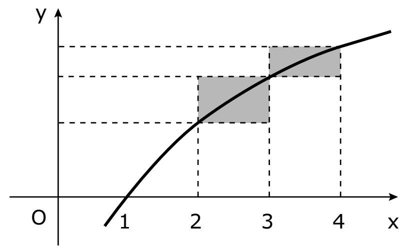
A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{5}\right\}$

B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq \frac{1}{5}\right\}$

C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x \geq -\frac{1}{2}\right\}$

D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 3\right\}$

12. (FUVEST-SP) A curva da figura a seguir representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para x > 0. Assim, a área da região sombreada, formada pelos dois retângulos, é:



A) $\log_{10} 2$

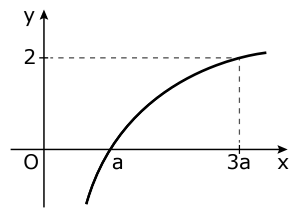
B) $\log_{10} 3$

C) $\log_{10} 4$

D) $\log_{10} 5$

E) $\log_{10} 6$

13. (Mackenzie-SP) Na figura, temos o esboço do gráfico da função definida por $y = \log_{(a + b)} (x - b)$. O valor de $\frac{a}{b}$ é:



A) 2.

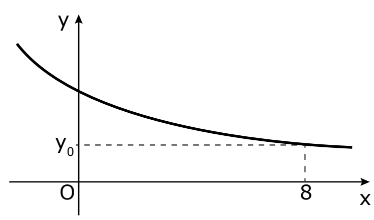
B) 3.

C) 4.

D) 5.

E) 6.

14. (UFJF-MG) A seguir, encontra-se representado o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, em que a > 0.



De acordo com as informações apresentadas, podemos afirmar que:

A) a > 1 e $\log_a \sqrt[3]{y_0} = 0$

B) 0 < a < 1 e $\log_a \sqrt[3]{y_0} = 2$

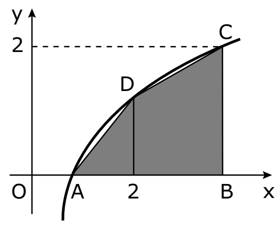
C) 0 < a < 1 e $\log_a \sqrt[3]{y_0} = \frac{8}{3}$.

D) a > 1 e $\log_a \sqrt[3]{y_0} = \frac{8}{3}$.

E) 0 < a < 1 e $\log_a \sqrt[3]{y_0} = 24$

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 6 24/03/2021 09:47:27

15. (UFJF-MG) Na figura a seguir, encontram-se representados o gráfico da função f: $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$, e o polígono ABCD. Os pontos **A**, **C** e **D** estão sobre o gráfico de **f**. Os pontos **A** e **B** estão sobre o eixo das abscissas. O ponto **C** tem ordenada 2, o ponto **D** tem abscissa 2 e BC é perpendicular ao eixo das abscissas.



Sabendo que os eixos estão graduados em centímetros, a área do polígono ABCD é

A) 2,5 cm².
B) 3 cm².
C) 3,5 cm².
D) 4 cm².
E) 4,5 cm².

16. (FGV-SP) O gráfico que representa uma função logarítmica do tipo $f(x) = 2 + a \log (bx)$, com **a** e **b** reais, passa pelos pontos de coordenadas $\left(\frac{1}{50}, 6\right)$ e $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$. Esse gráfico cruza o eixo x em um ponto de abscissa:

A) $\frac{\sqrt[3]{10}}{4}$
B) $\frac{14}{25}$
C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
D) $\frac{7}{10}$
E) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

GABARITO

01. B	05. C	09. C	13. B
02. D	06. C	10. B	14. C
03. E	07. C	11. A	15. C
04. C	08. A	12. A	16. C

MÓDULO 17

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E ARRANJOS

01. (Mackenzie-SP) Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto {0; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, são em número de:

A) 6^3
B) 420
C) $5 \cdot 6^2$
D) $5 \cdot 4^3$
E) 380

02. (FUVEST-SP) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários, aproximadamente:

A) 100 dias.
B) 10 anos.
C) 1 século.
D) 10 séculos.
E) 100 séculos.

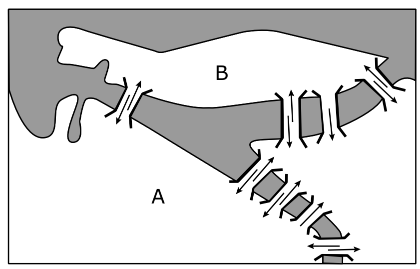
03. (UFPE) Uma prova de Matemática é constituída de 16 questões do tipo múltipla escolha, tendo cada questão 5 alternativas distintas. Se todas as 16 questões forem respondidas ao acaso, o número de maneiras distintas de se preencher o cartão de respostas será:

A) 80
B) 16^5
C) 5^{32}
D) 16^{10}
E) 5^{16}

04. (FUVEST-SP) Uma caixa eletrônica de banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário deseja fazer um saque de R$ 100,00. De quantas maneiras diferentes a caixa eletrônica poderá fazer esse pagamento?

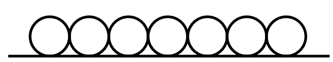
A) 5
B) 6
C) 11
D) 15
E) 20

05. (UFPE) Na figura a seguir, temos um esboço de parte do centro da cidade do Recife com suas pontes. As setas indicam o sentido do fluxo de tráfego de veículos. De quantas maneiras, utilizando apenas o esboço, poderá uma pessoa ir de carro do ponto **A** ao ponto **B** (marco zero) e retornar ao ponto de partida passando exatamente por três pontes distintas?



A) 8
B) 13
C) 17
D) 18
E) 20

06. (Mackenzie-SP) Cada um dos círculos da figura a seguir deverá ser pintado com uma cor, escolhida entre quatro disponíveis. Sabendo que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, então, o número de formas de se pintar os círculos é:



A) 7^4
B) $7! \cdot 4!$
C) $3 \cdot 7!$
D) 4^5
E) 2 916

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 7 24/03/2021 09:47:32

07. (UECE) A quantidade de números inteiros positivos menores que 400 que podemos formar, utilizando somente os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que não figurem algarismos repetidos, é _________________.

08. (UFU-MG) Com os algarismos do conjunto {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} serão formados números pares de três algarismos distintos e maiores que 400. A quantidade de números assim formados é:

A) 15.
B) 60.
C) 85.
D) 90.
E) 95.

09. (UFJF-MG) Uma empresa fornece a seus funcionários um cartão de acesso ao seu escritório e uma senha, que é um número com 4 algarismos, escolhidos entre os elementos do conjunto {1, 2, 3, 4}. Não são admitidas senhas em que um mesmo algarismo apareça 3 vezes ou mais. Qual é o número máximo de senhas desse tipo que poderão ser oferecidas pela empresa?

A) 204
B) 208
C) 240
D) 252
E) 256

10. (UFU-MG) A prova de um concurso é composta somente de 10 questões de múltipla escolha, com as alternativas **A**, **B**, **C** e **D** por questão. Sabendo-se que, no gabarito da prova, não aparece a letra **A** e que a letra **D** aparece apenas uma vez, quantos são os gabaritos possíveis de ocorrer?

A) 4^{10}
B) 2^{10}
C) 2^9
D) $10 \cdot 2^9$

11. (UFU-MG) Considere nove barras de metal que medem, respectivamente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 metros. Quantas combinações de cinco barras, ordenadas em ordem crescente de comprimento, podem ser feitas de tal forma que a barra de 5 metros ocupe sempre a quarta posição?

A) 32
B) 16
C) 20
D) 18
E) 120

12. No quadro a seguir:

					L
				L	I
			L	I	N
		L	I	N	E
	L	I	N	E	A
L	I	N	E	A	R

De quantos modos é possível formar a palavra LINEAR partindo de um **L** e indo sempre para a direita ou para baixo?

13. Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtêm permutando os algarismos 3, 5, 7, 9, o número 7 953 ocupa a n-ésima posição. O valor de **n** é:

A) 18.
B) 16.
C) 17.
D) 19.
E) 20.

14. (PUC Minas) Cada um dos participantes de uma corrida de bicicleta é identificado por meio de um número, múltiplo de cinco, formado por três algarismos. O algarismo das centenas é tirado do conjunto A = {1, 2, 3, 4} e os demais pertencem ao conjunto B = {0, 5, 6, 7, 8, 9}. O número máximo de ciclistas participantes dessa corrida é:

A) 40.
B) 48.
C) 120.
D) 144.

15. (UFMG) Nas filas compostas das **n** pessoas A_1, A_2, ... , A_n, nenhuma das pessoas A_1 ou A_2 ficará nas extremidades. Determine o número de filas que poderão ser formadas com essa condição.

16. (ITA-SP) Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: o número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

A) 204
B) 206
C) 208
D) 210
E) 212

17. (IME-RJ) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

I. a senha utilizada possui 4 dígitos;
II. o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
III. o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que, com certeza, ele consiga entrar na casa.

Teclado numérico

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 8 24/03/2021 09:47:33

GABARITO

01. B	10. D
02. E	11. B
03. E	12. 32
04. C	13. A
05. C	14. B
06. E	15. $(n^2 - 5n + 6)(n - 2)!$
07. 61	16. E
08. C	17. 171
09. A	

MÓDULO 18

PERMUTAÇÕES

01. (Unimontes-MG) Quantos dos anagramas da palavra PINGA começam com a letra **G**?

A) 120
B) 6
C) 5
D) 24

02. (PUC-Campinas-SP) O número de anagramas da palavra EXPLODIR, nos quais as vogais aparecem juntas, é:

A) 360.
B) 720.
C) 2 160.
D) 1 440.
E) 4 320.

03. (UFU-MG) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe se sente junto de seu filho?

A) 6
B) 18
C) 12
D) 36
E) 48

04. (UFF-RJ) Com as letras da palavra PROVA, podem ser escritos **x** anagramas que começam por vogal e **y** anagramas que começam e terminam por consoante. Os valores de **x** e **y** são, respectivamente:

A) 48 e 36.
B) 48 e 72.
C) 72 e 36.
D) 24 e 36.
E) 72 e 24.

05. (UEL-PR) Considere todos os números inteiros positivos que podem ser escritos permutando-se os algarismos do número 2 341. Quantos dos números considerados são menores que 2 341?

A) 9
B) 15
C) 27
D) 84
E) 120

06. (UFAL) Traipu é um município alagoano situado próximo às margens do Rio São Francisco com população aproximada de 24 000 habitantes. Considerando as letras da palavra TRAIPU, o número de anagramas em que as vogais nunca aparecem juntas é:

A) 696.
B) 684.
C) 600.
D) 576.
E) 144.

07. (UFJF-MG) Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para viagem é:

A) 12.
B) 24.
C) 48.
D) 120.

08. (UNIRIO-RJ) Uma família formada por 3 adultos e 2 crianças vai viajar num automóvel de 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Sabendo-se que só 2 pessoas podem dirigir e que as crianças devem ir atrás e na janela, o número total de maneiras diferentes através das quais essas 5 pessoas podem ser posicionadas, não permitindo crianças irem no colo de ninguém, é igual a:

A) 120.
B) 96.
C) 48.
D) 24.
E) 8.

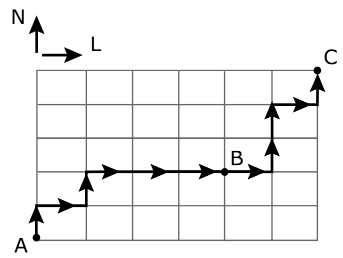
09. (UFPR) Um grupo de 8 pessoas vai entrar em um veículo no qual existem 3 lugares voltados para trás e 5 lugares voltados para frente. No grupo, há 2 pessoas que preferem bancos voltados para trás, 3 pessoas que preferem bancos voltados para frente, e as demais não têm preferência. O número de possibilidades para a ocupação dos lugares pelas 8 pessoas é:

01. 2 160, se forem respeitadas as preferências.
02. 40 320, se não forem consideradas as preferências.
08. 720, se forem respeitadas as preferências.
16. 20 160, se não forem consideradas as preferências.
32. 180, se forem respeitadas as preferências.

Soma (   )

MATEMÁTICA

10. (FUVEST-SP) A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade, em que estão assinalados as casas de João (**A**), de Maria (**B**), a escola (**C**) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual é o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para o norte ou para o leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



11. (UFF-RJ) Três ingleses, quatro americanos e cinco franceses serão dispostos em fila (dispostos em linha reta), de modo que as pessoas de mesma nacionalidade estejam sempre juntas. De quantas maneiras distintas a fila poderá ser formada de modo que o primeiro da fila seja um francês?

12. (ITA-SP) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO que não apresentam as cinco vogais juntas é:

A) 12!
B) 8!.5!
C) 12! – 8!.5!
D) 12! – 8!
E) 12! – 7!.5!

13. (FGV-SP) José quer dispor 8 CDs numa disqueteira tipo torre de 8 lugares. São 5 CDs de diferentes bandas de *rock*, além de 3 outros de *jazz*, de bandas distintas. De quantos modos eles podem ser dispostos, de maneira que tanto os CDs de *rock* quanto os de *jazz* estejam numa determinada ordem, podendo estar misturados os CDs dos dois tipos de música?

A) 336
B) 20 160
C) 56
D) 6 720
E) 40 320

14. (FUVEST-SP) Com as 6 letras da palavra FUVEST, podem ser formadas 6! = 720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começará com:

A) EV
B) FU
C) FV
D) SE
E) SF

15. (Unioeste-PR) Para desafiar seus alunos, um professor solicitou que efetuassem todas as permutações possíveis sem repetições com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, para formar números de 5 algarismos. Colocando os números obtidos em ordem crescente, o lugar ocupado pelo número 34 512 é o

A) 74º.
B) 58º.
C) 83º.
D) 65º.
E) 59º.

16. (ITA-SP) Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 (cinco) algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, a posição do número 61 473 será:

A) 76º.
B) 78º.
C) 80º.
D) 82º.
E) N.d.a.

17. (FUVEST-SP) Um lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso:

1. A família Sousa quer ocupar um mesmo banco.
2. Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.

Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros no lotação é igual a:

A) 928.
B) 1 152.
C) 1 828.
D) 2 412.
E) 3 456.

GABARITO

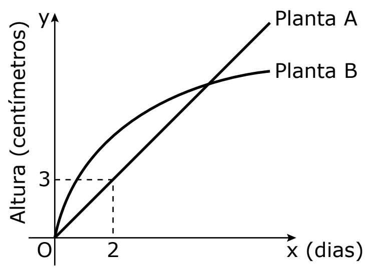
01. D
02. E
03. E
04. A
05. A
06. D
07. C
08. E
09. Soma = 03
10. 150
11. 34 560 maneiras
12. C
13. C
14. D
15. D
16. A
17. E

Caderno Extra

MÓDULO 15

POSIÇÕES RELATIVAS E DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

01. (Vunesp) Duas plantas de mesma espécie, **A** e **B**, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta **A** é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta **B** pode ser descrito pela lei matemática $y = \frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura.



Determine:

A) A equação da reta.

B) O dia em que as plantas **A** e **B** atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

02. (ITA-SP) Dados os pontos A(0, 8), B(–4, 0) e C(4, 0), sejam **r** e **s** as retas tais que A, B $\in$ r, B, C $\in$ s. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de P(5, 3) às retas **r** e **s**, respectivamente. Então, a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:

A) y + x = 5

B) y + 2x = 5

C) 3y – x = 15

D) x + y = 2

E) N.d.a.

03. (CEFET-PR) Considere as retas r: 4x – 3y + 17 = 0 e s: 4x – 3y – 8 = 0. A distância entre **r** e **s** é

A) $\frac{17}{9}$.

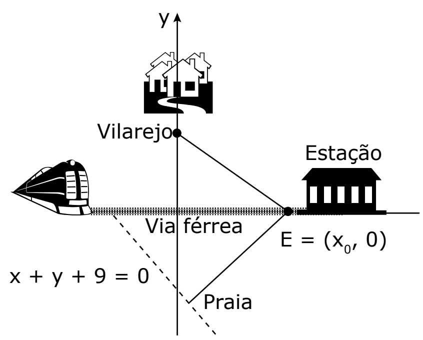
B) $\frac{25}{3}$.

C) 50.

D) 25.

E) 5.

04. (Uneb-BA) Pretende-se construir uma estação em uma via férrea que passa entre um vilarejo e uma praia. Para evitar animosidades entre os habitantes das duas localidades, a estação deve ser localizada de modo que esteja equidistante de ambas, conforme ilustra a figura. Equacionando o problema, introduz-se um sistema de coordenadas cartesianas xOy, em que o vilarejo corresponde ao ponto V = (0, 7), a praia é aproximada pela reta de equação x + y + 9 = 0 – tracejada na figura –, a linha férrea corresponde ao eixo das abscissas e a localização da estação, a determinar, ao ponto E = (x_0, 0).



Com base nessas suposições e sabendo que a distância do ponto **E** à praia é dada por $\frac{\sqrt{2}}{2}.|x_0 + 9|$, julgue os itens seguintes:

( ) A reta que passa pelo ponto **E** é perpendicular à praia e tem declividade igual a 1.

( ) Há duas localizações possíveis para a construção da estação.

( ) Uma estrada em linha reta ligando a estação ao vilarejo seria paralela à praia.

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 11 24/03/2021 09:47:37

05. (ITA-SP) Considere a reta **r** mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então, a distância do ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ à reta **r** é:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

C) $3^{1}3$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

GABARITO

01. A) $y = \frac{3}{2}x$

B) $x = 6$ e $y = 9$

02. A

03. E

04. V V F

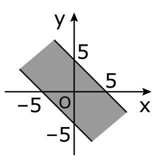
05. B

MÓDULO 16

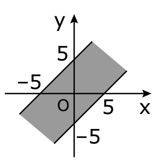
ÁREAS E TEORIA ANGULAR

01. (FGV-SP) A representação gráfica da sentença $|x| + |y| \le 5$ é:

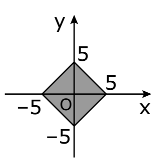
A)



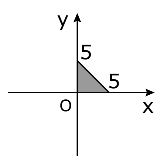
B)



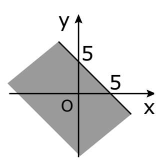
C)



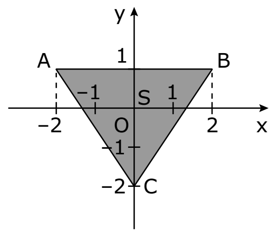
D)



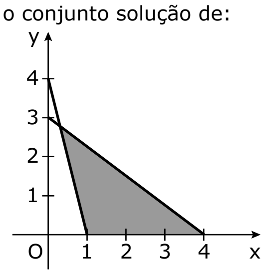
E)



02. (Fuvest-SP) Seja **S** a região do plano cartesiano representada pelo triângulo ABC e seu interior. Determine um sistema de inequações que caracterize os pontos (x, y) pertencentes a **S**.



03. (UFES) A região triangular sombreada a seguir pode ser descrita como o conjunto solução de:



A) $\begin{cases} 4y + 3x \le 12 \\ y + 4x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 4y + 3x \le 12 \\ y + 4x \ge 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 4y + 3x \ge 12 \\ y + 4x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} 4y + 3x \ge 12 \\ y + 4x \ge 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

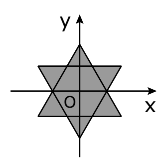
E) $\begin{cases} 4y + 3x \le 12 \\ y + 4x \le 4 \\ y \le 0 \end{cases}$

04. (UFPE) Considere os seguintes sistemas de inequações:

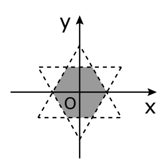
$$S_1 = \begin{cases} y < 1 \\ y > \left(1 + \sqrt{2}\right)x - 2 \\ y > -\left(1 + \sqrt{2}\right)x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} y > -1 \\ y < \left(1 + \sqrt{2}\right)x + 2 \\ y < -\left(1 + \sqrt{2}\right)x + 2 \end{cases}$$

Assinale a alternativa cuja área sombreada do gráfico representa $S_1 \cup S_2$.

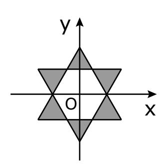
A)



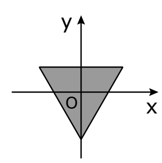
B)



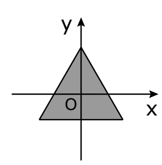
C)



D)



E)



05. (Unicamp-SP) Determine a área do triângulo formado pelas retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 12 24/03/2021 09:47:49

GABARITO

01. C

02. $\begin{cases} 3x + 2y + 4 \geq 0 \\ 3x - 2y - 4 \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$

03. B

04. A

05. 12

MÓDULO 17

ESTUDO ANALÍTICO DA CIRCUNFERÊNCIA

01. (UFES) Uma circunferência com centro no ponto P = (a, b) passa pelo ponto Q = (–a, b). O raio dessa circunferência é:

A) $\sqrt{a^2 + b^2}$

B) $|a|$

C) $|b|$

D) $2|a|$

E) $2|b|$

02. (UFMG) Determine a equação da circunferência na qual os pontos $A = (2, -\sqrt{3})$ e $B = (0, \sqrt{3})$ são diametralmente opostos.

03. (UEL-PR) Considere os pontos A(0, 0), B(2, 3) e C(4, 1). O segmento $\overline{BC}$ é um diâmetro da circunferência de equação:

A) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 11 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 4x + 9y + 11 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

E) $x^2 + y - 4x - 9y + 9 = 0$

04. (Fuvest-SP) Com relação a três circunferências no plano, com centros não colineares, podemos afirmar que:

A) sempre existe um ponto comum às três circunferências.

B) existe, no máximo, um ponto comum às três circunferências.

C) podem existir dois pontos comuns às três circunferências.

D) nunca existe ponto comum às três circunferências.

E) existem exatamente três pontos comuns às três circunferências.

05. (Udesc) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos A(5, 5), B(–3, 1) e C(2, –4).

06. (FUVEST-SP) Considere o triângulo ABC, em que A = (0, 4), B = (2, 3) e **C** é um ponto qualquer da circunferência $x^2 + y^2 = 5$. A abscissa do ponto **C** que torna a área do triângulo ABC a menor possível é:

A) –1.

B) $-\frac{3}{4}$.

C) 1.

D) 2.

E) $\frac{3}{4}$.

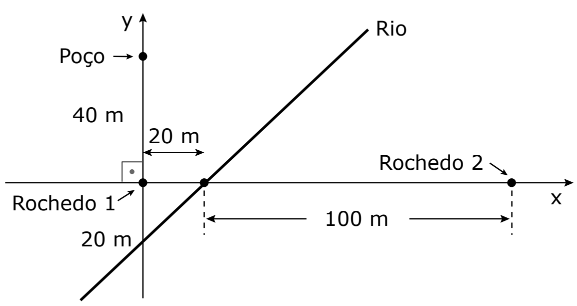
07. (Unicamp-SP)

A) Identifique as circunferências de equações $x^2 + y^2 = x$ e $x^2 + y^2 = y$, calculando o raio e o centro das mesmas. Esboce seus gráficos.

B) Determine os pontos de interseção dessas circunferências e mostre que as retas a elas tangentes em cada um desses pontos são perpendiculares entre si.

08. (Vunesp) Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que contêm as diagonais desse quadrado.

09. (FUVEST-SP) Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações: o tesouro está enterrado num ponto da linha reta entre os dois rochedos; está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto).



A) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isto o sistema de coordenadas mostrado na figura.

B) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada **x** do ponto (x, 0), em que o tesouro está enterrado.

10. (Unicamp-SP) Os ciclistas **A** e **B** partem do ponto P(–1, 1) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista **A** segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista **B**, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o km. Pergunta-se:

A) Quais as coordenadas do ponto **Q**, distinto de **P**, em que haverá cruzamento das duas trajetórias?

B) Se a velocidade do ciclista **A** for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista **B** para que cheguem no mesmo instante ao ponto **Q**?

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 13 24/03/2021 09:47:51

GABARITO

01. D

02. $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

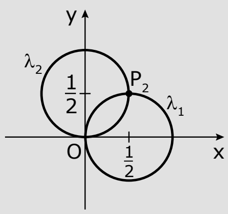
03. B

04. B

05. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

06. C

07. A) Observe a figura:



$$\lambda_1: x^2 + y^2 = x \begin{cases} C_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ r_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda_2: x^2 + y^2 = x \begin{cases} C_2\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ r_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

B) Um dos pontos de interseção é (0, 0), e as retas tangentes às respectivas circunferências por esse ponto são x = 0 e y = 0, que são perpendiculares. O outro ponto de interseção é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, e as retas tangentes às respectivas circunferências por esse ponto são $y = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$, que são perpendiculares.

08. $y = x - 1$ e $y = -x + 5$

09. A) $0 < x < 120$;
$y = 0$;
$x^2 + (y - 40)^2 > 50^2$;
$|x - y - 20| < 20\sqrt{2}$

B) $30 < x < 20(1 + \sqrt{2})$

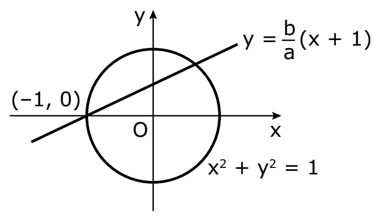
10. A) (7, 7)

B) 10π km/h

MÓDULO 18

POSIÇÕES RELATIVAS À CIRCUNFERÊNCIA

01. (UFLA-MG) Obtenha, em função de **a** e **b**, as coordenadas dos pontos de interseção entre a reta e a circunferência a seguir:



02. (UFMG) Considere a circunferência **C** de centro (2, 0) e raio 3, e o ponto $M = (3, 2\sqrt{2})$. Determine os pontos de interseção da reta tangente a **C** em **M** com os eixos coordenados.

03. (UFMG) Uma reta contendo a origem é tangente às circunferências $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$ e $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = R^2$. Determine o valor de **R**.

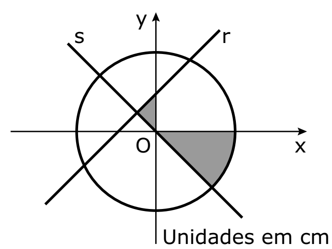
04. (UFMG) Sejam **r** e **s** as retas de equações $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 3$, respectivamente.

A) Determine a equação da reta que passa pelo ponto (0, 3) e é perpendicular a **r**.

B) Determine a equação da circunferência que passa pelo ponto (0, 3) e tangencia as retas **r** e **s**.

05. (UERJ) Observe as regiões sombreadas do plano cartesiano, que correspondem aos pontos que satisfazem o sistema de inequações a seguir:

$$\begin{cases} y \le x + 1 \\ y \ge -x \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ xy \le 0 \end{cases}$$



Calcule**:**

A) o ângulo formado entre as retas **r** e **s**.

B) a área total das regiões sombreadas.

GABARITO

01. $P_1(-1, 0)$ e $P_2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)$

02. $P(11, 0)$ e $Q\left(0, \frac{11\sqrt{2}}{4}\right)$

03. $\frac{3}{2}$

04. A) $y = -\frac{x}{2} + 3$

B) $\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$

05. A) 90°

B) $A = \frac{1 + 2\pi}{4}$

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 14 24/03/2021 09:47:56

MATEMÁTICA

FRENTE C

Caderno Extra

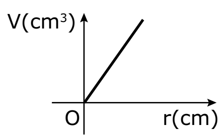
MÓDULO 15

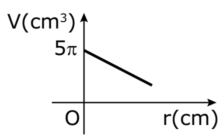
CILINDROS

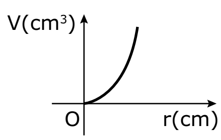
01. (USP) As células da bactéria *Escherichia coli* têm formato cilíndrico, com $8 \cdot 10^{-7}$ metros de diâmetro. O diâmetro de um fio de cabelo é de aproximadamente $1 \cdot 10^{-4}$ metros. Dividindo-se o diâmetro de um fio de cabelo pelo diâmetro de uma célula de *Escherichia coli*, obtém-se, como resultado:

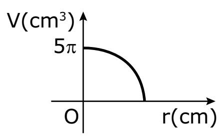
A) 125
B) 250
C) 500
D) 1 000
E) 8 000

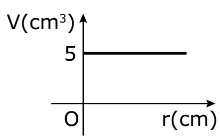
02. (FGV-SP) O gráfico que melhor representa a dependência entre o volume e o raio da base de todos os cilindros que têm 5 cm de altura é:

A) 

B) 

C) 

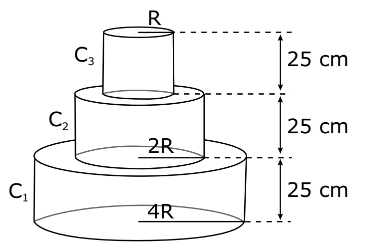
D) 

E) 

03. (UFJF-MG) A planificação de um cilindro circular reto permite fazer seu molde, a fim de poder reproduzi-lo. O molde do cilindro circular reto é composto de

A) dois retângulos.
B) dois círculos.
C) dois retângulos e dois círculos.
D) dois retângulos e um círculo.
E) um retângulo e dois círculos.

04. (UFMA) Uma padaria produz bolos de casamento no formato indicado na figura a seguir. O bolo é composto de 3 cilindros C_1, C_2 e C_3 de mesma altura. O raio do cilindro acima é metade do raio do cilindro imediatamente abaixo. Se o volume total do bolo é 52 500 cm³, então, o volume do cilindro C_3, na figura, é



A) 3 500 cm³.
B) 2 500 cm³.
C) 4 500 cm³.
D) 5 500 cm³.
E) 6 500 cm³.

05. (Enem) João tem uma loja onde fabrica e vende moedas de chocolate com diâmetro de 4 cm e preço de R$ 1,50 a unidade. Pedro vai a essa loja e, após comer várias moedas de chocolate, sugere ao João que ele faça moedas com 8 cm de diâmetro e mesma espessura e cobre R$ 3,00 a unidade. Considerando que o preço da moeda depende apenas da quantidade de chocolate, João

A) aceita a proposta de Pedro, pois, se dobra o diâmetro, o preço também deve dobrar.
B) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 12,00.
C) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 7,50.
D) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 6,00.
E) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 4,50.

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 15 24/03/2021 09:47:58

06. (Unimontes-MG) Pretende-se construir duas caixas: uma, de forma cilíndrica, e outra, de forma cúbica, com a mesma altura. Sabendo-se que o contorno da base de cada caixa tem comprimento igual a 4π cm, é correto afirmar que

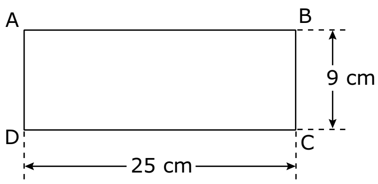
A) as duas caixas têm o mesmo volume.

B) o volume da caixa cilíndrica é um terço do volume da caixa cúbica.

C) o volume da caixa cilíndrica é maior que o volume da caixa cúbica.

D) o volume da caixa cilíndrica é a metade do volume da caixa cúbica.

07. (UEL-PR) Um fabricante de latas com formato de um cilindro possui chapas retangulares de alumínio com as dimensões: 25 cm de largura por 9 cm de comprimento, conforme a figura que segue. Ele deseja saber como utilizar essas chapas de forma a ter maior capacidade para as latas oriundas de tais chapas. Ele pensou em duas formas de confeccionar essas latas: unindo o lado AD da chapa de alumínio ao lado BC formando uma lata que tem o formato de um cilindro circular reto C_1 ou unindo o lado AB ao lado DC formando uma lata cujo formato é um cilindro circular reto C_2.



Com base nessas informações, considere as afirmativas a seguir:

I. A área da superfície lateral do cilindro C_1 é igual à área da superfície lateral do cilindro C_2.

II. A capacidade do cilindro C_1 é maior que a capacidade do cilindro C_2.

III. Se o fabricante dobrar as dimensões da chapa, a capacidade do cilindro C_1 dobra.

IV. Se o fabricante dobrar as dimensões da chapa, a área da superfície lateral do cilindro C_2 dobra.

Estão corretas apenas as afirmativas

A) I e II.

B) I e III.

C) II e IV.

D) I, III e IV.

E) II, III e IV.

08. (Enem) Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade. Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem. Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco **a** com a altura da embalagem tradicional **h**?

A) $a = \frac{h}{12}$

B) $a = \frac{h}{6}$

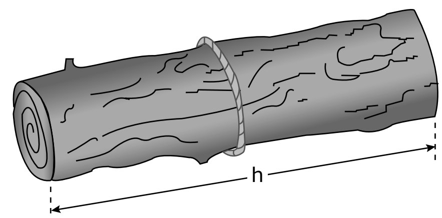
C) $a = \frac{2h}{3}$

D) $a = \frac{4h}{3}$

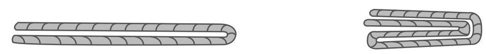
E) $a = \frac{4h}{9}$

09. (Enem) Em muitas regiões do estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.



III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização. Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

A) 30%.

B) 22%.

C) 15%.

D) 12%.

E) 5%.

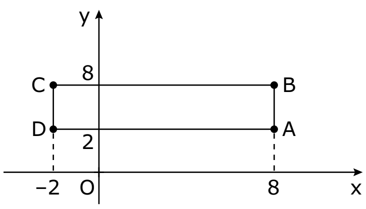
10. (UFSJ-MG) Uma maneira como antigamente se calculava o volume de um tronco de madeira em forma de um cilindro circular reto era a seguinte: media-se o comprimento da circunferência da base; em seguida, calculava-se a área de um quadrado que tivesse como perímetro esse comprimento; por último, obtinha-se o volume desejado multiplicando-se o valor dessa área pela altura do tronco.

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 16 24/03/2021 09:48:02

Sabendo-se que um certo tronco de madeira tem 12 metros de altura e que o erro ao calcular seu volume, como antigamente, é de 2,25 metros cúbicos, é correto afirmar que, admitindo-se o arredondamento para 3 do valor de π (pi) o volume certo desse tronco, em metros cúbicos, é igual a

A) 11,25.
B) 6,75.
C) 9.
D) 8.

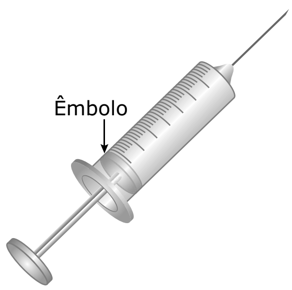
11. (CEFET-MG) O sólido **S** é formado pela rotação completa do retângulo ABCD em torno do eixo **x**.



O volume de **S** é:

A) 550π
B) 600π
C) 640π
D) 720π
E) 780π

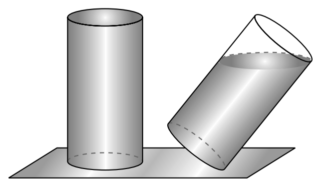
12. (UFG-GO) A figura a seguir representa uma seringa no formato de um cilindro circular reto, cujo êmbolo tem 20 mm de diâmetro. Essa seringa está completamente cheia de um medicamento e é usada para injetar doses de 6 mL desse medicamento. Com base nessas informações, determine quantos milímetros o êmbolo se desloca no interior da seringa ao ser injetada uma dose.



13. (UEG-GO) Um torneiro mecânico recebeu a encomenda de uma peça a ser confeccionada pela junção de uma chapa de metal retangular com uma chapa do mesmo metal que tem forma de um semicírculo. Além disso, na chapa retangular, deverão ser feitos dois furos redondos para que a peça possa ser fixada por parafusos. Se as dimensões da chapa retangular são de 10 cm e 8 cm, o raio do semicírculo é de 4 cm e o diâmetro de cada furo é de 4 cm, sendo que cada cm^2 da chapa de metal pesa 15 gramas, então o peso de 1 000 dessas peças prontas é

A) 1 600 quilos.
B) 1 400 quilos.
C) 1 200 quilos.
D) 1 000 quilos.

14. (FGV-SP) Inclinando-se em 45° um copo cilíndrico reto de altura 15 cm e raio da base 3,6 cm, derrama-se parte do líquido que completava totalmente o copo, conforme indica a figura:

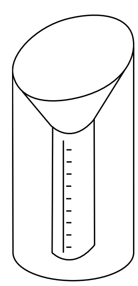


Admitindo-se que o copo tenha sido inclinado com movimento suave em relação à situação inicial, a menor quantidade de líquido derramada corresponde a um percentual do líquido contido inicialmente no copo de

A) 48%.
B) 36%.
C) 28%.
D) 24%.
E) 18%.

15. (Unicamp-SP) Um pluviômetro é um aparelho utilizado para medir a quantidade de chuva precipitada em determinada região. A figura de um pluviômetro padrão é exibida a seguir. Nesse pluviômetro, o diâmetro da abertura circular existente no topo é de 20 cm. A água que cai sobre a parte superior do aparelho é recolhida em um tubo cilíndrico interno. Esse tubo cilíndrico tem 60 cm de altura e sua base tem $\frac{1}{10}$ da área da abertura superior do pluviômetro.

Observação: a figura não está em escala.



A) Calcule o volume do tubo cilíndrico interno.
B) Supondo que, durante uma chuva, o nível da água no cilindro interno subiu 2 cm, calcule o volume de água precipitado por essa chuva sobre um terreno retangular com 500 m de comprimento por 300 m de largura.

16. (UFC-CE) Em um contêiner de 10 m de comprimento, 8 m de largura e 6 m de altura, podemos facilmente empilhar 12 cilindros de 1 m de raio e 10 m de altura cada, bastando dispô-los horizontalmente, em três camadas de quatro cilindros cada. Porém, ao fazê-lo, um certo volume do contêiner sobrará como espaço vazio.

Adotando 3,14 como aproximação para π, é correto afirmar que a capacidade volumétrica desse espaço vazio é

A) inferior à capacidade de um cilindro.

B) maior que a capacidade de um cilindro, mas menor que a capacidade de dois cilindros.

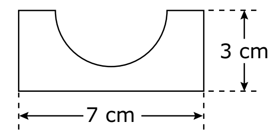
C) maior que a capacidade de dois cilindros, mas menor que a capacidade de três cilindros.

D) maior que a capacidade de três cilindros, mas menor que a capacidade de quatro cilindros.

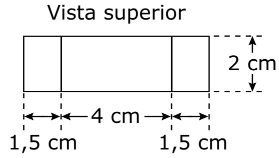
E) maior que a capacidade de quatro cilindros.

17. (UFSCar-SP) Retirando-se um semicilindro de um paralelepípedo reto retângulo, obtivemos um sólido cujas fotografias, em vista frontal e vista superior, estão indicadas nas figuras:

Vista frontal



Vista superior



Se a escala das medidas indicadas na fotografia é 1 : 100, o volume do sólido fotografado, em m³, é igual a:

A) $2(14 + 2\pi)$

B) $2(14 + \pi)$

C) $2(14 - \pi)$

D) $2(21 - \pi)$

E) $2(21 - 2\pi)$

18. (ITA-SP) Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A seção fica a 5 cm do eixo e separa, na base, um arco de 120°. Sendo de $30\sqrt{3}$ cm² a área da seção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm³:

A) $30\pi - 10\sqrt{3}$

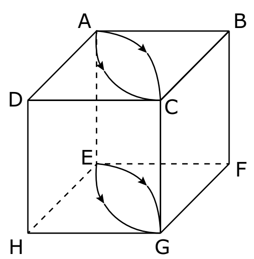
B) $30\pi - 20\sqrt{3}$

C) $20\pi - 10\sqrt{3}$

D) $50\pi - 25\sqrt{3}$

E) $100\pi - 75\sqrt{3}$

19. (Vunesp) As arestas do cubo ABCDEFGH da figura medem 1 m. Seja S_1 a parte do cubo que a face AEHD geraria se sofresse uma rotação de 90° em torno do DH até coincidir com DCGH, e seja S_2 a parte do cubo que a face ABFE geraria se sofresse uma rotação de 90° em torno de BF até coincidir com BCGF.

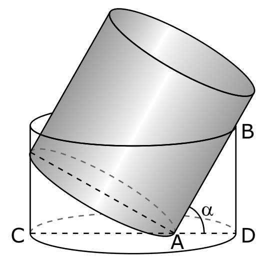


Nessas condições:

A) Determine o volume de S_1 e o de S_2.

B) Determine o volume de $S_1 \cap S_2$.

20. (UFMG) Nesta figura, estão representados um tanque cilíndrico e um cilindro sólido metálico, ambos circulares retos.



O cilindro sólido encontra-se apoiado sobre o fundo e a lateral do tanque, que está, inicialmente, vazio. Sabe-se que:

I. a altura e o raio do tanque medem, respectivamente, $2\sqrt{3}$ m e 3 m.

II. o ponto **A** pertence ao diâmetro CD da base do tanque.

III. o ângulo $\alpha = B\hat{A}D$ mede 60°.

A) Calcule o raio do cilindro sólido metálico.

B) Calcule o volume de água necessário para, na situação descrita, se encher completamente o tanque.

21. (UEL-PR) Um *designer* deseja projetar um recipiente para perfume no formato da figura 1 a seguir. O recipiente é resultado da intersecção de 2 cilindros iguais com 10 cm de altura cada um, cujas bases possuem raio igual a 6 cm. Sabe-se que o segmento de reta $\overline{AB}$, representado na figura 2 a seguir, une a interseção das circunferências das bases de centros C_1 e C_2, e passa exatamente pelo ponto médio do segmento $\overline{C_1C_2}$. É correto afirmar que o recipiente comportará um volume igual a:

Figura 1

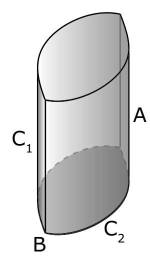
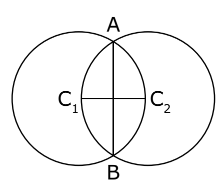


Figura 2



A) $(240\pi - 360\sqrt{3})$ cm³.

B) $(240\pi - 180\sqrt{3})$ cm³.

C) $(120\pi - 180\sqrt{3})$ cm³.

D) $(120\pi - 90\sqrt{3})$ cm³.

E) $(60\pi - 270\sqrt{3})$ cm³.

GABARITO

01. A
02. C
03. E
04. B
05. D
06. C
07. A
08. D
09. B
10. C
11. B
12. 19,1 mm
13. C
14. B
15. A) 600π cm³
    B) 300 m³
16. D
17. E
18. E
19. A) $V_1 = V_2 = \frac{\pi}{4}$ m³
    B) $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ m³
20. A) $r = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ m
    B) $V_{\text{água}} = \left(18\pi\sqrt{3} - \frac{128\pi}{9}\right)$ m³
21. B

MÓDULO 16

PIRÂMIDES

01. (UFPA) Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais. Se a diagonal da base mede 3 cm, então o volume mede, em unidades cúbicas:

A) $\frac{27}{8}$

B) $\frac{27}{4}$

C) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

02. (Cesgranrio) Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais a **x**. O volume dessa pirâmide é:

A) $\frac{x^3\sqrt{2}}{3}$

B) $\frac{x^3\sqrt{2}}{6}$

C) $\frac{x^3\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{x^3\sqrt{3}}{6}$

E) x^3

03. (Vunesp) Seja P_1 uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado. Cortamos P_1 por um plano paralelo à base e que dista da base a metade da altura **h** de P_1. Seja P_2 a pirâmide menor resultante desse corte, V_1 o volume de P_1 e V_2 o volume de P_2. Então:

A) Não dá para comparar os volumes V_1 e V_2.

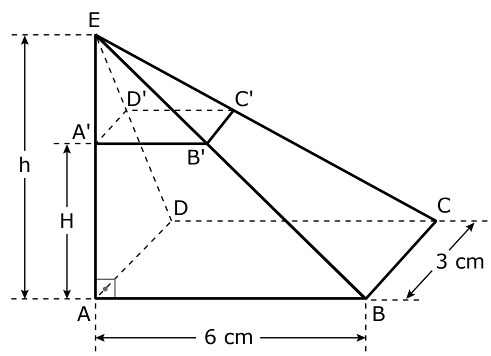
B) $V_2 = \frac{V_1}{9}$

C) V_1 é igual a 8 vezes V_2.

D) $\frac{V_1}{9} < V_2 < \frac{V_1}{8}$

E) $\frac{V_1}{8} < V_2 < \frac{V_1}{7}$

04. (Vunesp) A figura representa uma pirâmide com vértice num ponto **E**. A base é um retângulo ABCD, e a face EAB é um triângulo retângulo com o ângulo reto no vértice **A**. A pirâmide apresenta-se cortada por um plano paralelo à base, na altura **H**. Esse plano divide a pirâmide em dois sólidos: uma pirâmide EA'B'C'D' e um tronco de pirâmide de altura **H**.

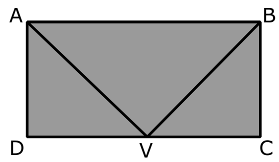


Sabendo-se que H = 4 cm, AB = 6 cm, BC = 3 cm e a altura h = AE = 6 cm, determine:

A) O volume da pirâmide EA'B'C'D'.

B) O volume do tronco de pirâmide.

05. (Cesgranrio) A figura mostra a vista de cima de uma pirâmide VABCD de base retangular ABCD. A projeção ortogonal do vértice **V**, sobre o plano da base, divide a aresta $\overline{CD}$ ao meio. Se $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 5$ e a altura da pirâmide é 5, então o comprimento da aresta $\overline{VB}$ é:



A) $\frac{20}{3}$

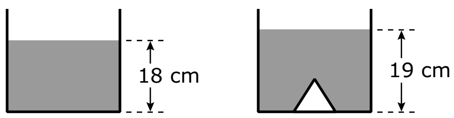
B) $\frac{15}{2}$

C) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

D) $5\sqrt{2}$

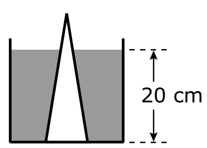
E) $5\sqrt{3}$

06. (UFRJ) Em um tanque no formato de um cubo de aresta 25 cm, contendo líquido, foi posta uma pirâmide P_1, de altura igual a 6 cm, com a base apoiada no fundo do tanque. Com isso, o nível de líquido passou de 18 cm para 19 cm.



A) Calcule o volume em cm^3 da pirâmide P_1.

B) A pirâmide P_1 foi retirada do tanque, e o nível de líquido voltou ao inicial. Uma pirâmide P_2 de 30 cm de altura, foi então posta no tanque, com base apoiada no fundo, o que elevou em 2 cm o nível de líquido.



Determine o volume da pirâmide P_2.

07. (UFOP-MG) A área total da superfície de um tetraedro regular, cuja altura da face vale $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, é:

A) 1

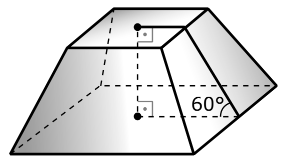
B) $\sqrt{2}$

C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $\sqrt{6}$

08. (UEL-PR) Considere o tronco de uma pirâmide regular de bases quadradas, representado na figura a seguir:



Se as diagonais das bases medem $10\sqrt{2}$ cm e $4\sqrt{2}$ cm, a área total desse tronco, em centímetros quadrados, é

A) 168.

B) 186.

C) 258.

D) 266.

E) 284.

09. (UFF-RJ) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 metros de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles, cuja altura relativa à base mede 179 metros. A área da base dessa pirâmide, em m^2, é

A) 13 272.

B) 26 544.

C) 39 816.

D) 53 088.

E) 7 943.

10. (Unifor-CE) Uma pirâmide regular tem $6\sqrt{3}$ cm de altura, e a aresta da base mede 8 cm. Se os ângulos internos da base e de todas as faces laterais dessa pirâmide somam 1 800°, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:

A) 576

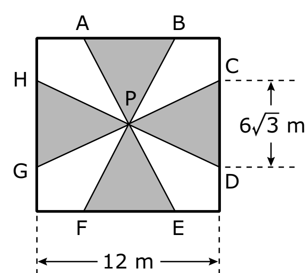
B) $576\sqrt{3}$

C) 1 728

D) $1\,728\sqrt{3}$

E) 3 456

11. (Unimontes-MG) Para fazer uma barraca, a partir de um quadrado de centro **P** e lado 12 m, foram traçados quatro triângulos isósceles e determinados os lados: $AB = CD = EF = GH = 6\sqrt{3}$, conforme a figura a seguir:

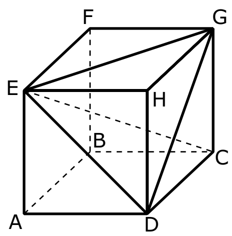


2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 20 24/03/2021 09:48:20

Recortados os lados AP, BP, CP, DP, EP, FP, GP, HP, foi montada a barraca (pirâmide quadrangular). Qual é a altura da barraca?

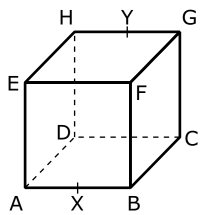
A) 1,2 m
B) 3 m
C) $3\sqrt{7}$ m
D) $6\sqrt{3}$ m

12. (UFF-RJ) Considere o cubo de vértices **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**, representado na figura a seguir:



Sabendo que a área do triângulo DEC é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m², calcule o volume da pirâmide, cujos vértices são **D**, **E**, **G** e **C**.

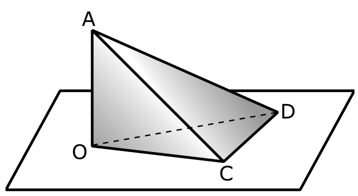
13. (FUVEST-SP) No cubo de aresta **a** mostrado na figura adiante, **X** e **Y** são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Considere a pirâmide de vértice **F** e cuja base é o quadrilátero XCYE.



Calcule, em função de **a**,

A) o comprimento do segmento $\overline{XY}$.
B) a área da base da pirâmide.
C) o volume da pirâmide.

14. (FUVEST-SP) O triângulo ACD é isósceles de base $\overline{CD}$ e o segmento $\overline{OA}$ é perpendicular ao plano que contém o triângulo OCD, conforme a figura:

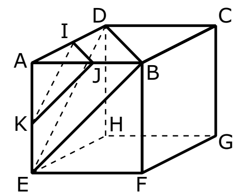


Sabendo-se que OA = 3, AC = 5 e sen $O\hat{C}D = \frac{1}{3}$, então a área do triângulo OCD vale:

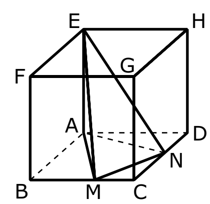
A) $\frac{16\sqrt{2}}{9}$
B) $\frac{32\sqrt{2}}{9}$
C) $\frac{48\sqrt{2}}{9}$
D) $\frac{64\sqrt{2}}{9}$
E) $\frac{80\sqrt{2}}{9}$

15. (UFMG) Considere um tetraedro regular de vértices **A**, **B**, **C** e **D**, cujas arestas medem **r**. Considere, ainda, que **M** e **N** são pontos médios das arestas $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Calcule a área do triângulo AMN.

16. (Vunesp) Seciona-se o cubo ABCDEFGH, cuja aresta mede 1 m, pelo plano BDE, passando por vértices do cubo e pelo plano IJK, passando por pontos médios de lados do cubo, como na figura a seguir. Calcule o volume do tronco de pirâmide IJKDBE, assim formado.



17. (CEFET-MG) Na figura, tem-se um cubo, em que **M** e **N** são pontos médios das arestas BC e CD, respectivamente.

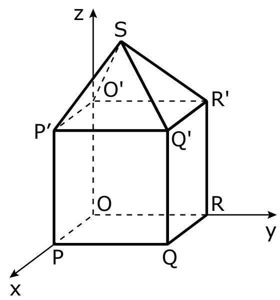


Sendo V_p o volume da pirâmide EAMN e V_c o volume do cubo, a relação $\frac{V_p}{V_c}$ é

A) $\frac{1}{8}$.
B) $\frac{1}{6}$.
C) $\frac{1}{5}$.
D) $\frac{1}{4}$.
E) $\frac{1}{3}$.

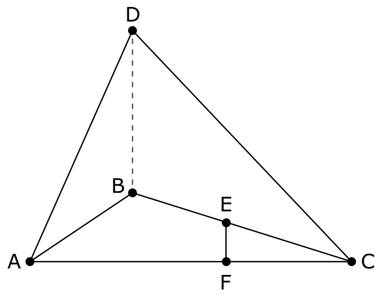
18. (UFRJ) O sólido representado na figura é formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular, cuja base coincide com a face superior do cubo. O vértice **O** do cubo é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas Oxyz. Os vértices **P**, **R** e O’ pertencem respectivamente aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz. O vértice **S** tem coordenadas (2, 2, 8).

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 21 24/03/2021 09:48:28



Considere o plano z = k, que divide o sólido em duas partes de volumes iguais. Determine o valor de **k**.

19. (FASEH-MG–2016) Na figura, ABCD é um tetraedro cuja altura é o segmento DB e a base é o triângulo, retângulo em B, ABC.

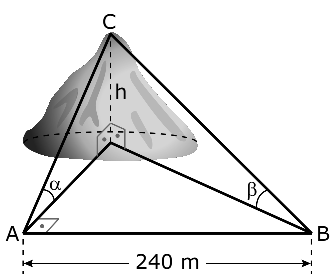


O segmento EF, com 3 cm, é perpendicular ao lado AC da base. Além disso, BE = 11 cm e EC = 5 cm.

Se DB = 6 cm, o volume do tetraedro ABCD, em cm^3, é igual a

A) 576.
B) 360.
C) 192.
D) 60.

20. (UFV-MG) Para medir a altura **h** de uma montanha, um topógrafo se posiciona em um ponto **A**, ao sul da torre, e mede o ângulo α = 60°, que é a elevação da montanha nesse ponto. Caminhando 240 m a leste de **A** e posicionando-se em um ponto **B**, ele mede outro ângulo de elevação que é β = 30°, conforme ilustra a figura a seguir:



Calcule:

A) O valor, em graus, do ângulo $C\hat{A}B$.
B) A altura **h** da montanha em metros.

GABARITO

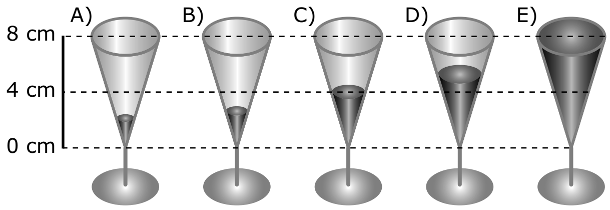
01. B
02. B
03. C
04. A) $\frac{4}{3}$ cm^3
B) $\frac{104}{3}$ cm^3
05. E
06. A) 625 cm^3
B) $\frac{16\,875}{13}$ cm^3
07. C
08. E
09. D
10. A
11. A
12. $\frac{1}{6}$ m^3
13. A) $a\sqrt{2}$
B) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$
C) $\frac{a^3}{3}$
14. B
15. $A = \frac{r^2\sqrt{11}}{16}$
16. $\frac{7}{48}$ m^3
17. A
18. $k = \frac{8}{3}$
19. C
20. A) 90°
B) $60\sqrt{6}$ m

MÓDULO 17

CONES

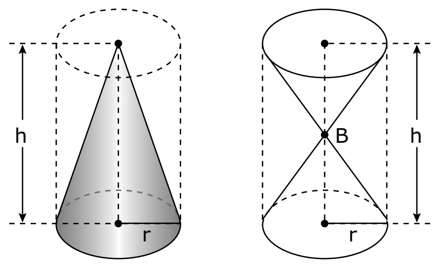
01. (UFJF-MG) Uma taça em forma de um cone circular reto estava cheia de vinho até a borda. Depois de se ter tomado metade do vinho, a figura que melhor representa a quantidade de bebida que restou na taça é:

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 22 24/03/2021 09:48:32



02. (UFPE) Um cone circular reto, com altura igual a 60 cm, é interceptado por um plano perpendicular ao seu eixo, resultando numa circunferência de raio igual a 40 cm. Se a distância deste plano à base do cone é de 30 cm, quanto mede o raio, em cm, da base do cone?

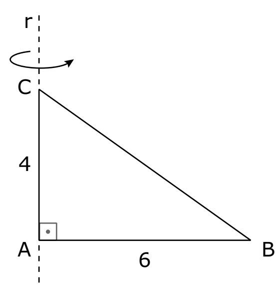
03. (UFLA-MG) Sobre um cilindro de raio **r** e de altura **h**, são obtidos cones da forma descrita no desenho. Calcule a razão entre o volume do cone à esquerda e a soma dos volumes dos dois cones à direita, definidos por um ponto **B** sobre o eixo que une os dois centros dos círculos da base do cilindro.



04. (ITA-SP) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e 15π dm^2 de área lateral, o valor de seu volume, em dm^3, é:

A) 9π
B) 15π
C) 36π
D) 20π
E) 12π

05. (Mackenzie-SP) Na rotação do triângulo ABC da figura a seguir, em torno da reta **r**, o lado AB descreve um ângulo de 270°. Desta forma, o sólido obtido tem volume:

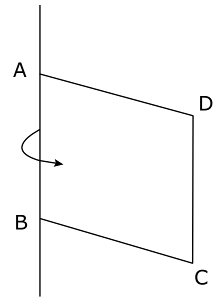


A) 48π
B) 144π
C) 108π
D) 72π
E) 36π

06. (PUC-SP) Considere o triângulo isósceles ABC, tal que AB = BC = 10 cm e CA = 12 cm. A rotação desse triângulo em torno de um eixo que contém o lado AB gera um sólido cujo volume, em centímetros cúbicos, é:

A) 256π
B) $298,6\pi$
C) $307,2\pi$
D) 316π
E) $328,4\pi$

07. (CEFET-MG) Na figura a seguir, o quadrilátero ABCD é um losango cujo lado mede 5 cm e a distância do vértice **D** ao lado AB mede 3 cm.



O volume do sólido gerado pela rotação completa do losango em torno do lado AB, em cm^3, é:

A) 40π
B) 45π
C) 50π
D) 55π
E) 60π

08. (Cesgranrio) De um cone de centro da base **O** e de altura **H** (Figura I), obtém-se um tronco de cone de altura $\frac{H}{2}$ (Figura II). Nesse tronco, faz-se um furo cônico com vértice **O**, como indicado na figura III. Se o volume do cone da figura I for **V**, então, o volume do sólido da figura III será:

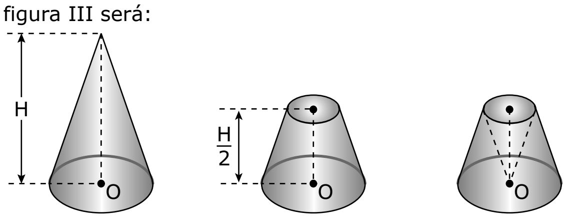


Figura I Figura II Figura III

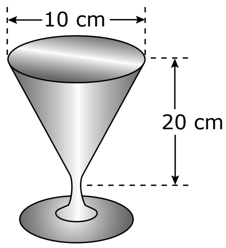
A) $\frac{3V}{4}$

B) $\frac{V}{2}$

C) $\frac{5V}{8}$

D) $\frac{2V}{3}$

09. (UFSCar-SP) Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de *milk shake* com as dimensões mostradas no desenho.



A) Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o *milk shake*, calcule qual foi o volume, em mL, ingerido pelo casal. (Adote: $\pi = 3$.)

B) Se um deles beber sozinho até a metade da altura do copo, quanto do volume total, em porcentagem, terá bebido?

10. (UERJ) Para revestir externamente chapéus em forma de cones com 12 cm de altura e diâmetro da base medindo 10 cm, serão utilizados cortes retangulares de tecido, cujas dimensões são 67 cm por 50 cm. Admita que todo o tecido de cada corte poderá ser aproveitado. O número mínimo dos referidos cortes necessários para forrar 50 chapéus é igual a

A) 3. B) 4. C) 5. D) 6.

11. (UFMG) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base mede $\sqrt{7}$ cm, contém água até a altura de 2 cm (figura I). Colocando-se um sólido em formato de cone circular reto dentro desse recipiente, de forma que a base do cone fique totalmente apoiada na base do recipiente, o nível da água sobe até a altura de 3 cm, conforme mostrado na figura II.

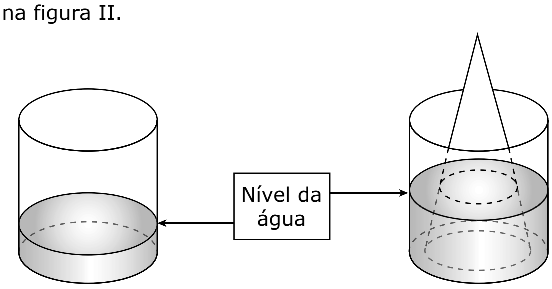


Figura I Figura II

Sabe-se que a medida da altura do cone é 6 cm. Assim sendo, calcule o raio desse cone.

12. (CEFET-MG) Um reservatório em forma cônica, totalmente cheio, de altura 6 e raio da base 2, está com o vértice **A** voltado para baixo. Devido a um vazamento nesse vértice, a altura da água passou a ser 3, como mostra a figura I.

Para fazer o reparo, esse reservatório foi invertido, ficando com o vértice **A** voltado para cima.

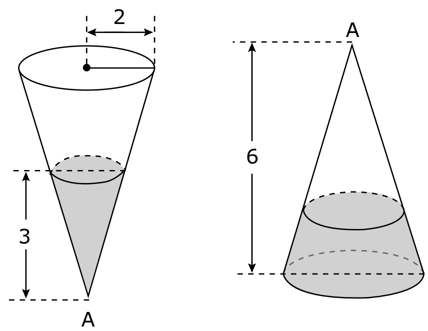


Figura I Figura II

A água depositada no fundo do recipiente, com essa movimentação, conforme figura II, formou um tronco de cone, cuja altura é:

A) $25 + 3\sqrt[3]{7}$

B) $12 + 3\sqrt[3]{7}$

C) $12 - 3\sqrt[3]{7}$

D) $6 + 3\sqrt[3]{7}$

E) $6 - 3\sqrt[3]{7}$

13. (UFRGS-RS) Um cone circular reto é tal que cada seção obtida pela interseção de um plano que passa por seu vértice e pelo centro da sua base é um triângulo retângulo de catetos iguais. Se cortarmos esse cone ao longo de uma geratriz, abrindo e planificando sua superfície lateral, será obtido um setor circular cujo ângulo central tem medida α. Então:

A) $\alpha < 180°$

B) $180° \leq \alpha < 200°$

C) $200° \leq \alpha < 220°$

D) $220° \leq \alpha < 240°$

E) $\alpha \geq 240°$

14. (UFC-CE) Um ponto **L** dista 2r unidades de comprimento do centro de uma circunferência cujo raio mede **r** unidades de comprimento. A partir de **L**, conduza duas tangentes à circunferência e denote os pontos de tangência por **P** e **T**. Então, a área lateral do cone circular reto gerado pela rotação do triângulo LPT, tendo como eixo de rotação a mediana que parte de **L**, medida em unidades de área, é:

A) πr^2

B) $\dfrac{3\pi r^2}{2}$

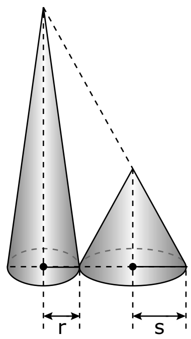
C) $\dfrac{\pi r^2}{2}$

D) $2\pi r^2$

E) $5\pi r^2$

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 24 24/03/2021 09:48:41

15. (UFRJ) Dois cones circulares retos têm bases tangentes e situadas no mesmo plano, como mostra a figura. Sabe-se que ambos têm o mesmo volume e que a reta que suporta uma das geratrizes de um passa pelo vértice do outro.



Sendo **r** o menor entre os raios das bases, **s** o maior e $x = \frac{r}{s}$, determine **x**.

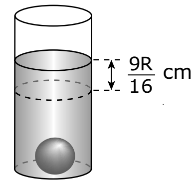
GABARITO

01. D
02. 80 cm
03. A razão entre os volumes é 1.
04. E
05. E
06. C
07. B
08. A
09. A) 500 mL
    B) 87,5%
10. B
11. R = 2 cm
12. E
13. E
14. B
15. $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

MÓDULO 18

ESFERAS

01. (UFPR) Um recipiente com água tem, internamente, o formato de um cilindro reto com base de raio **R** cm. Mergulhando nesse recipiente uma esfera de metal de raio **r** cm, o nível da água sobe $\frac{9R}{16}$ cm. Qual é o raio dessa esfera?



A) $r = \frac{3R}{4}$ cm
B) $r = \frac{9R}{16}$ cm
C) $r = \frac{3R}{5}$ cm
D) $r = \frac{R}{2}$ cm
E) $r = \frac{2R}{3}$ cm

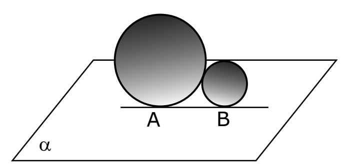
02. (Unimontes-MG) Numa oficina de Geometria, os alunos estavam trabalhando com massa de modelar. Com certa quantidade de massa, eles fizeram uma bola de raio **r**. Com a mesma quantidade de massa, e reduzindo o raio à metade, o número de bolas que eles fizeram foi:

A) 8.
B) 2.
C) 4.
D) 6.

03. (UFPE) Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com esse ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? (Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.)

A) 3
B) 9
C) 18
D) 21
E) 27

04. (Unimes-SP) Duas esferas tangentes exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos **A** e **B** têm raios iguais a 9 cm e 4 cm. Calcule a distância entre os pontos **A** e **B**.



A) 11 cm.
B) 12 cm.
C) 13 cm.
D) 14 cm.
E) 15 cm.

MATEMÁTICA

05. (UEL-PR) A hidrosfera, ou "esfera de água", corresponde à totalidade das águas dos oceanos e mares, dos sistemas fluviais e lacustres, e da água subterrânea. Costuma-se dizer que a Terra é o Planeta Água.Se essa totalidade de água fosse distribuída uniformemente sobre a superfície terrestre, formaria uma camada com altura média de 3 000 m, considerando a Terra esférica com raio de 6 000 km.

Com base nas informações anteriores e em relação ao tema, é correto afirmar:

I. Se a Terra fosse um modelo com 20 m de diâmetro, a água seria representada por uma camada de 3 mm de espessura.

II. Se a Terra fosse um modelo com 20 m de diâmetro, a água seria representada por uma camada de 5 mm de espessura.

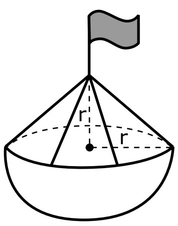
III. Se a Terra fosse um modelo com 12 m de diâmetro, a água seria representada por uma camada de 3 m.

IV. Se a Terra fosse um modelo com 12 m de diâmetro, a água seria representada por uma camada de 3 mm de espessura.

Assinale a alternativa que contém todas as afirmativas corretas.

A) I e II
B) I e III
C) II e IV
D) I, III e IV
E) II, III e IV

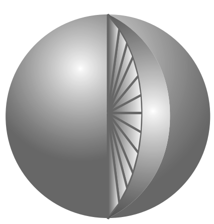
06. (UFU-MG) Boias de sinalização marítima são construídas de acordo com a figura a seguir, em que um cone de raio da base e altura **r** é sobreposto a um hemisfério de raio **r**.



Aumentando-se **r** em 50%, o volume da boia é multiplicado por:

A) 8.
B) $\frac{27}{8}$.
C) $\frac{9}{4}$.
D) 4.

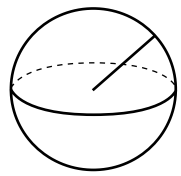
07. (UNAERP-SP) Determine o volume de uma cunha esférica, fabricada a partir de uma esfera de 6 m de diâmetro e um ângulo diedro de 36°, representada a seguir:



A) $4{,}0\pi$ m³.
B) $0{,}4\pi$ m³.
C) $3{,}6\pi$ m³.
D) $1{,}2\pi$ m³.
E) $3{,}2\pi$ m³.

08. (UFTM-MG) Sendo **S** a área da superfície de uma célula esférica, **V** o volume da célula e **k** uma constante numérica, pode-se escrever **V** em função de **S** como $V(S) = kS\sqrt{S}$.

$$\left(\begin{array}{l}\textbf{Dados: } S = 4\pi R^2 \\ \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3\end{array}\right)$$



Nas condições dadas, o valor de **k** é igual a:

A) $\frac{1}{3\sqrt{\pi}}$
B) $\frac{1}{6\sqrt{\pi}}$
C) $\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$
D) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$
E) $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$

09. (Unesp) O raio da base de um cone é igual ao raio de uma esfera de 256π cm² de área. A geratriz do cone é $\frac{5}{4}$ do raio. A razão entre o volume do cone e o volume da esfera é:

A) $\frac{2}{32}$.
B) $\frac{3}{32}$.
C) $\frac{6}{32}$.
D) $\frac{12}{32}$.
E) $\frac{18}{32}$.

10. (PUC Rio) Uma esfera de raio R_1, um cilindro circular reto com o raio da base igual a R_2 e com altura $2R_2$, e um cone reto de base circular com o raio R_3 e altura $2R_3$ têm todos o mesmo volume. Vale, então, que:

A) $\sqrt[3]{2}R_1 = \sqrt[3]{3}R_2 = R_3$
B) $R_1 = \sqrt[3]{3}R_2 = \sqrt[3]{2}R_3$
C) $\sqrt[3]{2}R_1 = R_2 = \sqrt[3]{3}R_3$
D) $\sqrt[3]{3}R_1 = \sqrt[3]{2}R_2 = R_3$
E) $R_1 = \sqrt[3]{2}R_2 = \sqrt[3]{3}R_3$

GABARITO

01. A	06. B
02. A	07. C
03. E	08. B
04. B	09. C
05. C	10. A

2021_6V_V5_MAT_EX_BOOK.indb 26 24/03/2021 09:48:51