PROFESSOR FERRETTO

Questões Discursivas - Matemática

01. (Uerj) Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra.

Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

02. (Ufpe) Os alunos de uma turma cursam alguma(s) dentre as disciplinas Matemática, Física e Química. Sabendo que:

- o número de alunos que cursam Matemática e Física excede em 5 o número de alunos que cursam as três disciplinas;
- existem 7 alunos que cursam Matemática e Química, mas não cursam Física;
- existem 6 alunos que cursam Física e Química, mas não cursam Matemática;
- o número de alunos que cursam exatamente uma das disciplinas é 150;
- o número de alunos que cursam pelo menos uma das três disciplinas é 190.

Quantos alunos cursam as três disciplinas?

03. (Fuvest) Resolva os três itens abaixo.

a) O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão.

b) Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4.

c) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $n(2n+1)$, qualquer que seja $n \geq 1$. Encontre o vigésimo termo dessa progressão.

04. (Uerj) A sequência a_n é definida do seguinte modo:

$a_1 = 5$
$a_{n+1} = a_n + 3$

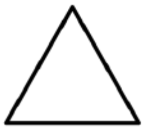
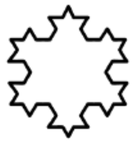
Determine a média aritmética dos 51 primeiros termos dessa sequência.

05. (Uel) Um estandarte é um tipo de bandeira que pode representar um país, uma instituição civil ou religiosa, um clube de futebol, uma escola de samba. Uma artesã fez um estandarte e o enfeitou, em sua parte inferior, com pedaços de fita de tamanhos diferentes. Sabendo que o menor pedaço de fita mede 8 cm e que o comprimento dos pedaços de fita aumenta de 2,5 em 2,5 centímetros, responda aos itens a seguir, desconsiderando possíveis perdas.

a) Considerando que o maior pedaço de fita mede 125,5 cm, quantos pedaços de fita foram utilizados para confeccionar o estandarte?

b) Supondo que a artesã tenha utilizado 60 pedaços de fita, qual será o comprimento total dos pedaços de fita utilizados?

06. (Fuvest) O Floco de Neve de Koch (ou Estrela de Koch) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

Passo 0: começa-se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.	Passo 1: divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.	Passo 2: repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior.
		

Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda:

a) Qual é o número de lados da figura no Passo 3?

b) Qual é o perímetro da figura no Passo 5?

c) A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6.000.000.000.000 (seis trilhões)?

Note e adote:

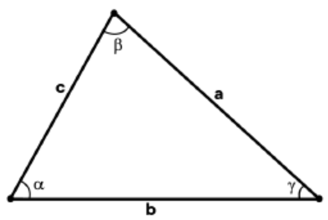
$\log 2 = 0{,}301$

07. (Unicamp) Considere a sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

08. (Unicamp) Considere o triângulo exibido na figura abaixo, com lados de comprimentos a, b e c e ângulos α, β e γ.



a) Suponha que a sequência (α, β, γ) é uma progressão aritmética (PA). Determine a medida do ângulo β.

b) Suponha que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \sqrt{2}$. Determine o valor de $\tan \beta$.

09. (Fuvest)

João e Maria jogam dados em uma mesa. São cinco dados em forma de poliedro regulares: um tetraedro, um cubo, um octaedro, um dodecaedro e um icosaedro. As faces são numeradas de 1 a 4 no tetraedro, de 1 a 6 no cubo, etc. Os dados são honestos, ou seja, para cada um deles, a probabilidade de qualquer uma das faces ficar em contato com a mesa, após o repouso do dado, é a mesma.

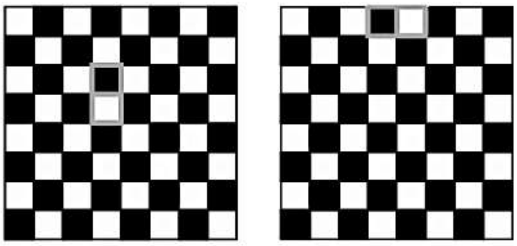
Num primeiro jogo, Maria sorteia, ao acaso, um dos cinco dados, João o lança e verifica o número da face que ficou em contato com a mesa.

a) Qual é a probabilidade de que esse número seja maior do que 12?

b) Qual é a probabilidade de que esse número seja menor do que 5?

Num segundo jogo, João sorteia, ao acaso, dois dos cinco dados. Maria os lança e anota o valor da soma dos números das duas faces que ficaram em contato com a mesa, após o repouso dos dados.
c) Qual é a probabilidade de que esse valor seja maior do que 30?

10. (Unifesp) Um tabuleiro de xadrez possui 64 casas quadradas. Duas dessas casas formam uma dupla de casas contíguas se estão lado a lado, compartilhando exatamente um de seus lados. Veja dois exemplos de duplas de casas contíguas nos tabuleiros.



Dispõem-se de duas peças, uma na forma ☺, e outra na forma ☹, sendo que cada uma cobre exatamente uma casa do tabuleiro.
a) De quantas maneiras diferentes é possível colocar as peças ☺ e ☹ em duplas de casas contíguas de um tabuleiro de xadrez?
b) Considere as 64 casas de um tabuleiro de xadrez como sendo os elementos de uma matriz $A = (a_{ij})_{8\times 8}$. Coloca-se a peça ☺, ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro tal que $i = j$. Em seguida, a peça ☹ será colocada, também ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro que esteja desocupada. Na situação descrita, calcule a probabilidade de que as peças ☺ e ☹ tenham sido colocadas em duplas de casas contíguas do tabuleiro.

11. (Ufpe) Um casal está fazendo uma trilha junto com outras 10 pessoas. Em algum momento, eles devem cruzar um rio em 4 jangadas, cada uma com capacidade para 3 pessoas (excluindo o jangadeiro). De quantas maneiras, os grupos podem ser organizados para a travessia, se o casal quer ficar na mesma jangada?

12. (Ufpr) Um cadeado com segredo possui três engrenagens, cada uma contendo todos os dígitos de 0 a 9. Para abrir esse cadeado, os dígitos do segredo devem ser colocados numa sequência correta, escolhendo-se um dígito em cada engrenagem. (Exemplos: 237, 366, 593...)

a) Quantas possibilidades diferentes existem para a escolha do segredo, sabendo que o dígito 3 deve aparecer obrigatoriamente e uma única vez?
b) Qual é a probabilidade de se escolher um segredo no qual todos os dígitos são distintos e o dígito 3 aparece obrigatoriamente?

13. (Unesp) Bianca está preparando saquinhos com balas e pirulitos para os convidados da festa de aniversário de sua filha. Cada saquinho irá conter 5 balas e 3 pirulitos, ou 3 balas e 4 pirulitos, já que ambas as combinações resultam no mesmo preço. Para fazer os saquinhos, ela dispõe de 7 sabores diferentes de balas (limão, menta, morango, framboesa, caramelo, canela e tutti-frutti) e 5 sabores diferentes de pirulito (chocolate, morango, uva, cereja e framboesa). Cada bala custou 25 centavos e cada pirulito custou x centavos, independentemente dos sabores.
a) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja balas de um mesmo sabor nem pirulitos de um mesmo sabor em cada saquinho? Qual o preço de cada pirulito?
b) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja sabores repetidos em cada saquinho?

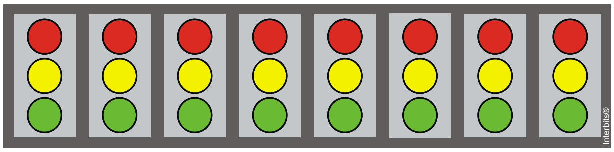
14. (Unesp) Está previsto que, a partir de 1º de janeiro de 2017, entrará em vigor um sistema único de emplacamento de veículos para todo o Mercosul, o que inclui o Brasil. As novas placas serão compostas por 4 letras e 3 algarismos.
Admita que no novo sistema possam ser usadas todas as 26 letras do alfabeto, incluindo repetições, e os 10 algarismos, também incluindo repetições. Admita ainda que, no novo sistema, cada carro do Mercosul tenha uma sequência diferente de letras e algarismos em qualquer ordem. Veja alguns exemplos das novas placas.

No novo sistema descrito, calcule o total de placas possíveis com o formato “Letra-Letra-Algarismo-Algarismo-Algarismo-Letra-Letra”, nessa ordem. Em seguida, calcule o total geral de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa. Deixe suas respostas finais em notação de produto ou de fatorial.

15. (Fuvest) Deseja-se formar uma comissão composta por sete membros do Senado Federal brasileiro, atendendo às seguintes condições: (i) nenhuma unidade da Federação terá dois membros na comissão, (ii) cada uma das duas regiões administrativas mais populosas terá dois membros e (iii) cada uma das outras três regiões terá um membro.

a) Quantas unidades da Federação tem cada região?
b) Chame de N o número de comissões diferentes que podem ser formadas (duas comissões são consideradas iguais quando têm os mesmos membros). Encontre uma expressão para N e simplifique-a de modo a obter sua decomposição em fatores primos.
c) Chame de P a probabilidade de se obter uma comissão que satisfaça as condições exigidas, ao se escolher sete senadores ao acaso. Verifique que $P < 1/50$.

16. (Uerj) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

— cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
— qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
— duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

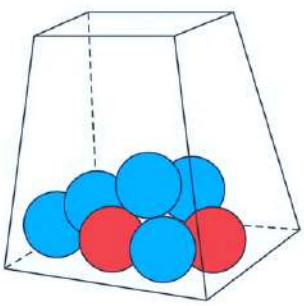
17. (Unicamp) O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gorduras (lipídios) no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como "bom colesterol"), colesterol LDL (o "mau colesterol") e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: CT = LDL + HDL + TG/5. A tabela abaixo mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

Indicador	Valores normais
CT	Até 200 mg/dl
LDL	Até 130 mg/dl
HDL	Entre 40 e 60 mg/dl
TG	Até 150 mg/dl

a) O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198 mg/dl, e que a de triglicérides era igual a 130 mg/dl. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?

b) Acidentalmente, o laboratório SangueBom deixou de etiquetar as amostras de sangue de cinco pessoas. Determine de quantos modos diferentes seria possível relacionar essas amostras às pessoas, sem qualquer informação adicional. Na tentativa de evitar que todos os exames fossem refeitos, o laboratório analisou o tipo sanguíneo das amostras, e detectou que três delas eram de sangue O+ e as duas restantes eram de sangue A+. Nesse caso, supondo que cada pessoa indicasse seu tipo sanguíneo, de quantas maneiras diferentes seria possível relacionar as amostras de sangue às pessoas?

18. (Uerj) Em uma urna há sete bolinhas, sendo duas delas vermelhas e cinco azuis. Quatro do total de bolinhas serão sorteadas ao acaso.

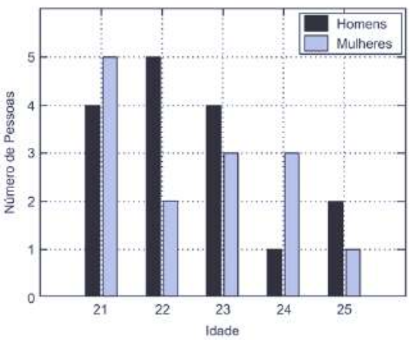


Calcule a probabilidade de pelo menos uma das bolinhas sorteadas ser vermelha.

19. (Unifesp) Em uma classe de 16 alunos, todos são fluentes em português. Com relação à fluência em línguas estrangeiras, 2 são fluentes em francês e inglês, 6 são fluentes apenas em inglês e 3 são fluentes apenas em francês.

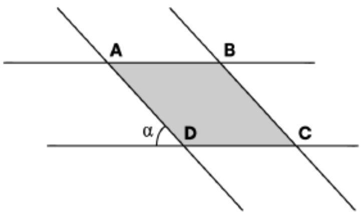
a) Dessa classe, quantos grupos compostos por 2 alunos podem ser formados sem alunos fluentes em francês?
b) Sorteando ao acaso 2 alunos dessa classe, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja fluente em inglês?

20. (Unicamp) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição da idade de um grupo de pessoas.



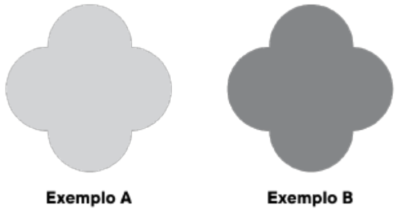
a) Mostre que, nesse grupo, a média de idade dos homens é igual à média de idade das mulheres.
b) Escolhendo ao acaso um homem e uma mulher desse grupo, determine a probabilidade de que a soma de suas idades seja igual a 49 anos.

21. (Unesp) Na figura, as retas AB e CD são paralelas, assim como as retas AD e BC. A distância entre $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é 3 cm, mesma distância entre $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.



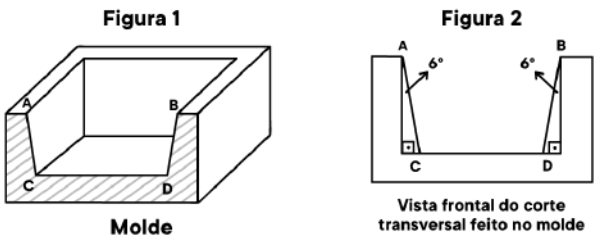
a) Calcule o perímetro do paralelogramo ABCD, formado pelas intersecções das retas, na situação em que $\alpha = 60°$.
b) Considere que S seja a área do paralelogramo ABCD representado na figura. Determine S em função de α e determine a área mínima do paralelogramo ABCD.

22. (Uel) Um *quatrefoil* é uma figura simétrica comumente usada em arte, design e arquitetura. Sua forma é antiga e o nome vem do latim, significando “quatro folhas”. Ele possui quatro folhas de mesmo tamanho, com formato circular, interconectadas, as quais se sobrepõem ligeiramente, e se assemelha a uma flor de quatro pétalas. Considere dois exemplos de quatrefoil, a seguir.



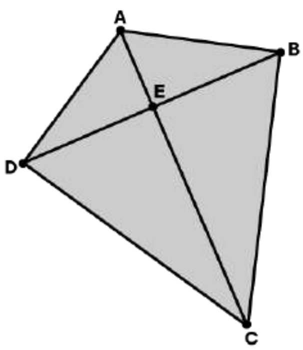
Pretende-se construir um quatrefoil similar ao apresentado no Exemplo A, no qual as folhas são formadas por semicírculos. Sabendo que seu perímetro deve ser de $28\pi\ cm$ determine a área total da figura a ser construída. Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

23. (Unesp) A figura 1 indica o corte transversal em um molde usado para a fabricação de barras de ouro. A figura 2 representa a vista frontal da secção transversal feita no molde, sendo ABCD um trapézio isósceles com $AC = BD = 10\ cm$.



Adote: $sen\ 6° = 0{,}104;\ \ \cos 6° = 0{,}994$.
a) Calcule a diferença entre as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
b) Admitindo que a área do trapézio ABCD seja igual a 99,4 cm^2, calcule a soma das medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

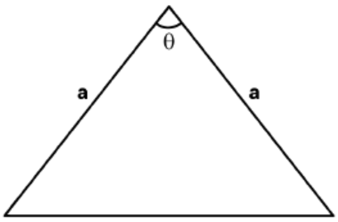
24. (Uerj) Para construir a pipa representada na figura abaixo pelo quadrilátero ABCD, foram utilizadas duas varetas, linha e papel.



As varetas estão representadas pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A linha utilizada liga as extremidades A, B, C e D das varetas, e o papel reveste a área total da pipa. Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares em E, e os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são retos.

Se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ medem, respectivamente, 18 cm e 32 cm, determine o comprimento total da linha, representada por $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$.

25. (Unicamp) A figura abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de comprimento $a = 5\ cm$ e um dos ângulos internos igual a θ em que $\cos\theta = 3/5$.

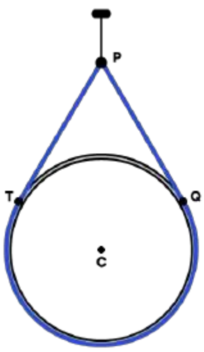


a) Calcule a área desse triângulo.
b) Determine o comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

26. (Fuvest) Uma cerca tem formato de um polígono regular de n lados, cada lado com comprimento ℓ. A égua Estrela pasta amarrada à cerca por uma corda, também de comprimento ℓ no exterior da região delimitada pelo polígono. Calcule a área disponível para pasto supondo que:

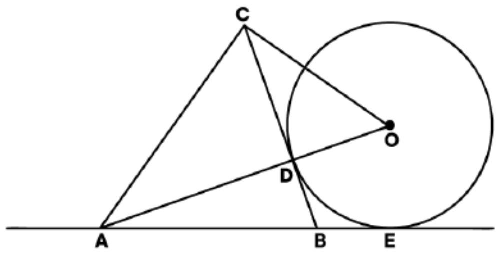
a) a extremidade da corda presa à cerca está fixada num dos vértices do polígono;
b) a extremidade da corda pudesse deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca.

27. (Unesp) Uma peça circular de centro C e raio 12 cm está suspensa por uma corda azul, perfeitamente esticada e fixada em P. Os pontos T e Q são de tangência dos segmentos retilíneos da corda com a peça, e a medida do ângulo agudo $T\hat{P}Q$ é 60°.



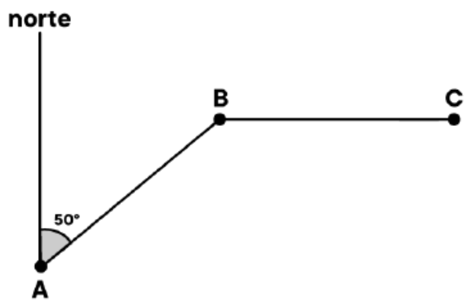
Desprezando-se as espessuras da corda, da peça circular e do gancho que a sustenta, calcule a distância de P até o centro C da peça. Adotando $\pi = 3{,}1$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$ nas contas finais, calcule o comprimento total da corda.

28. (Fuvest) Na figura abaixo, a circunferência de centro em O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, $AD = 2r$ e o ângulo $A\hat{C}O$ é reto. Determine, em função de r,



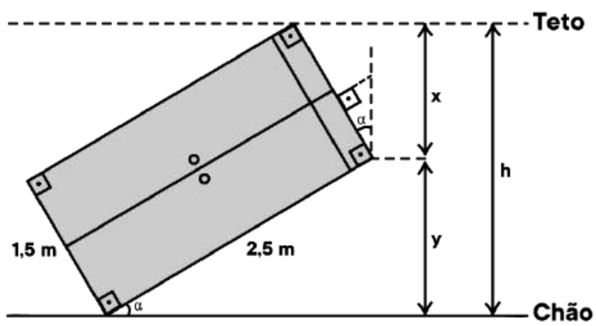
a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC;
b) a medida do segmento $\overline{CO}$.

29. (Fgvrj) A figura abaixo mostra a trajetória de Renato com seu barco.



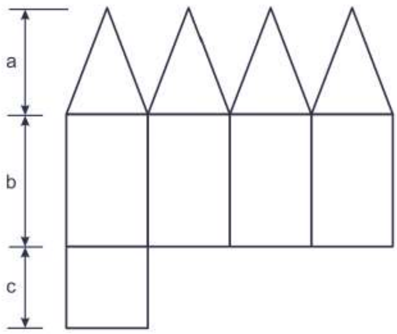
Renato saiu do ponto A e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto B, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto B, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto C.
Calcule a distância do ponto A ao ponto C.
Dados: $sen\ 20° = 0{,}342$ e $cos\ 20° = 0{,}940$.

30. (Unifesp) Por razões técnicas, um armário de altura 2,5 metros e largura 1,5 metro está sendo deslocado por um corredor, de altura h metros, na posição mostrada pela figura.



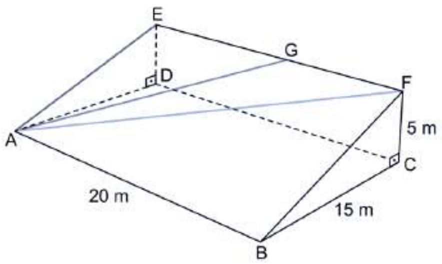
a) Calcule h para o caso em que $\alpha = 30°$.
b) Calcule h para o caso em que $x = 1{,}2\ m$.

31. (Unicamp) A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.



a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.
b) Para $a = 13\ cm, b = 16\ cm$ e $c = 10\ cm$, calcule o volume desse poliedro.

32. (Unesp) Uma rampa, com a forma de prisma reto, possui triângulos retângulos ADE e BCF nas bases do prisma, e retângulos nas demais faces. Sabe-se que $AB = 20\ m, BC = 15\ m$ e $CF = 5\ m$. Sobre a face ABFE da rampa estão marcados os caminhos retilíneos $\overline{AE}, \overline{AG}$ e $\overline{AF}$ com G sendo um ponto de $\overline{EF}$, como mostra a figura.



a) Calcule a medida do segmento $\overline{AE}$. Em seguida, assuma que a inclinação de subida (razão entre vertical e horizontal) pelo caminho $\overline{AG}$ seja igual a $1/4$ e calcule a medida do segmento $\overline{EG}$.
b) Considere os seguintes dados para responder a este item:

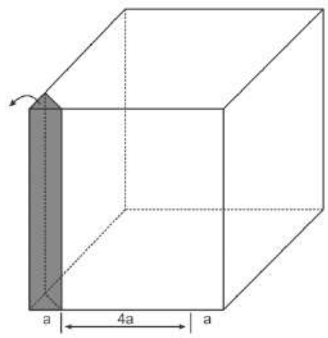
α	$7{,}1°$	$11{,}3°$	$14{,}0°$	$18{,}4°$
$\tan\alpha$	0,125	0,200	0,250	0,333

Comparando-se o caminho $\overline{AF}$ com o caminho $\overline{AE}$, nota-se que o ângulo de inclinação de $\overline{AF}$ e de $\overline{AE}$, em relação ao plano que contém o retângulo $ABCD$, aumentou. Calcule a diferença aproximada, em graus, desses ângulos.

33. (Unicamp) Numa piscina em formato de paralelepípedo, as medidas das arestas estão em progressão geométrica de razão $q > 1$.

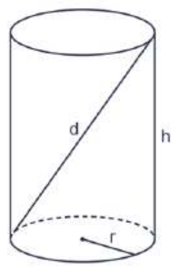
a) Determine o quociente entre o perímetro da face de maior área e o perímetro da face de menor área.
b) Calcule o volume dessa piscina, considerando $q = 2$ e a área total do paralelepípedo igual a $252\ m^2$.

34. (Fgv) Os quatro cantos de cubo de aresta $6a$ são cortados, obtendo-se um novo sólido geométrico sem os quatro prismas retos, como o prisma indicado como exemplo na figura abaixo.



a) Qual é a área do sólido geométrico formado em termos de a?
b) Qual é o volume do novo sólido geométrico formado em termos de a?

35. (Unicamp) Seja um cilindro circular reto com raio da base de comprimento $r = 2\ cm$ e altura de comprimento h. Seja d a maior distância entre dois pontos desse cilindro, como ilustra a figura abaixo.



a) Supondo que o cilindro tenha volume igual a um litro, calcule sua área de superfície total.
b) Determine o valor de d no caso em que (r, h, d) seja uma progressão geométrica.

36. (Fgv) Uma pirâmide de base quadrada é seccionada por um plano paralelo à sua base, distante 2 m dela. A área total da pirâmide menor, obtida pela secção, é igual à metade da área total da pirâmide original.

a) Calcule a altura da pirâmide original.
b) Calcule o volume do tronco de pirâmide obtido pela secção para o caso em que a aresta da base da pirâmide maior mede 3 m.

37. (Uel) Considere uma lata, com o formato de um cilindro reto de altura $h\,cm$ e raio $r\,cm$ (Figura 1), completamente cheia de doce de leite. Parte do doce dessa lata foi transferido para dois recipientes (Figura 2), iguais entre si e em forma de cone, que têm a mesma altura da lata e o raio da base igual à metade do raio da base da lata. Considere também que os dois recipientes ficaram completamente cheios de doce de leite.

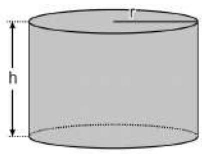


Figura 1

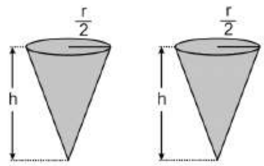


Figura 2

Desprezando a espessura do material de que são feitos os recipientes e a lata, determine quantos outros recipientes, também em forma de cone, mas com a altura igual à metade da altura da lata e de mesmo raio da lata (Figura 3), podem ser totalmente preenchidos com o doce de leite que restou na lata.

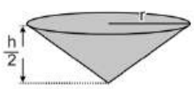


Figura 3

Observação: Na lata e nos recipientes completamente cheios de doce de leite, o doce não excede a altura de cada um deles e, na transferência do doce de leite da lata para os recipientes, não há perda de doce.

38. (Ufpr) Uma jarra de vidro em forma cilíndrica tem 15 cm de altura e 8 cm de diâmetro. A jarra está com água até quase a borda, faltando 1 cm de sua altura para ficar totalmente cheia.
a) Se uma bolinha de gude de 2 cm de diâmetro for colocada dentro dessa jarra, ela deslocará que volume de água?
b) Quantas bolinhas de gude de 2 cm de diâmetro serão necessárias para fazer com que a água se desloque até a borda superior da jarra?

39. (Unesp) Um cone circular reto de geratriz medindo $12\,cm$ e raio da base medindo $4\,cm$ foi seccionado por um plano paralelo à sua base, gerando um tronco de cone, como mostra a figura 1.

A figura 2 mostra a planificação da superfície lateral S desse tronco de cone, obtido após a secção.

Figura 1

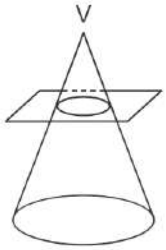
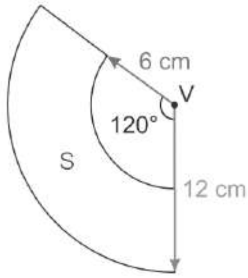


Figura 2



Calcule a área e o perímetro da superfície S. Calcule o volume do tronco de cone indicado na figura 1.

40. (Unicamp) A numeração dos calçados obedece a padrões distintos, conforme o país. No Brasil, essa numeração varia de um em um, e vai de 33 a 45, para adultos. Nos Estados Unidos a numeração varia de meio em meio, e vai de 3,5 a 14 para homens e de 5 a 15,5 para mulheres.

a) Considere a tabela abaixo.

Numeração brasileira (t)	Comprimento do calçado (x)
35	23,8 cm
42	27,3 cm

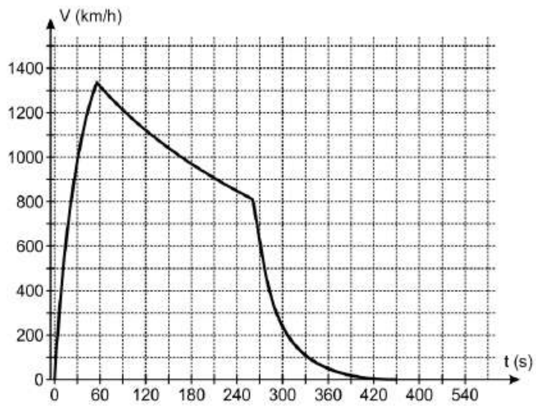
Suponha que as grandezas estão relacionadas por funções afins $t(x) = ax + b$ para a numeração brasileira e $x(t) = ct + d$ para o comprimento do calçado. Encontre os valores dos parâmetros a e b da expressão que permite obter a numeração dos calçados brasileiros em termos do comprimento, *ou* os valores dos parâmetros c e d da expressão que fornece o comprimento em termos da numeração.
b) A numeração dos calçados femininos nos Estados Unidos pode ser estabelecida de maneira aproximada pela função real f definida por $f(x) = 5(x - 20)/3$, em que x é o comprimento do calçado em cm. Sabendo que a numeração dos calçados n_k forma uma progressão aritmética de razão 0,5 e primeiro termo $n_1 = 5$, em que $n_k = f(c_k)$, com k natural, calcule o comprimento c_5.

41. (Unicamp) Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na tabela e no gráfico abaixo.

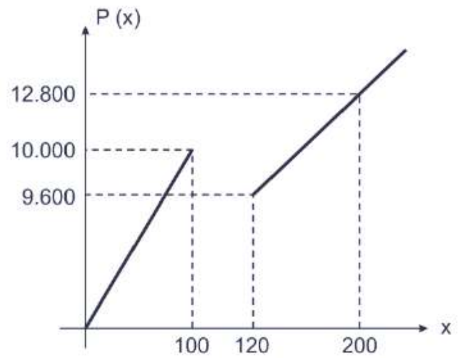
a) Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no 30º segundo.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

b) Com base no gráfico, determine o valor aproximado da velocidade máxima atingida e o tempo, em segundos, em que Felix superou a velocidade do som. Considere a velocidade do som igual a 1.100 km/h.



42. (Ufu) Com o objetivo de aumentar as vendas, uma fábrica de peças oferece preços promocionais aos clientes atacadistas que compram a partir de 120 unidades. Durante esta promoção, a fábrica só aceitará dois tipos de encomendas: até 100 peças ou, pelo menos, 120 peças. O preço $P(x)$, em reais, na venda de x unidades, é dado pelo gráfico seguinte, em que os dois trechos descritos correspondem a gráficos de funções afins.



(Figura ilustrativa e sem escalas)

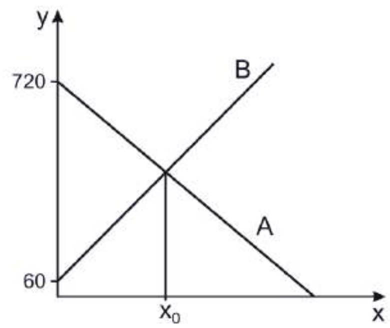
Nestas condições, qual o maior número de peças que se pode comprar com $R\$ \ 9.800,00$?

43. (Uel) ViajeBem é uma empresa de aluguel de veículos de passeio que cobra uma tarifa diária de R$ 160,00 mais R$ 1,50 por quilômetro percorrido, em carros de categoria A. AluCar é uma outra empresa que cobra uma tarifa diária de R$ 146,00 mais R$ 2,00 por quilômetro percorrido, para a mesma categoria de carros.

a) Represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções que determinam as tarifas diárias cobradas pelas duas empresas de carros da categoria A que percorrem, no máximo, 70 quilômetros.

b) Determine a quantidade de quilômetros percorridos para a qual o valor cobrado é o mesmo. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados.

44. (Uerj) O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x.



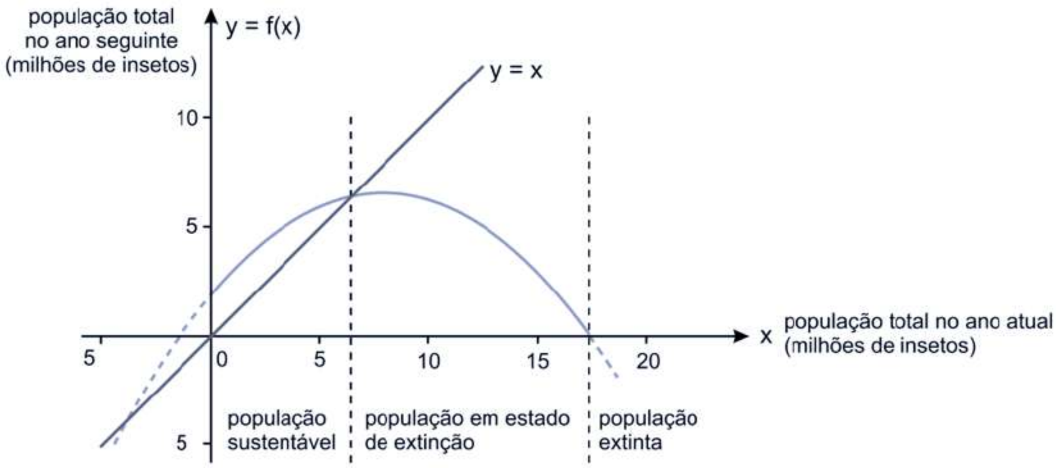
Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.

45. (Ufpr) Tripla pitagórica é uma sequência de três números inteiros positivos que satisfazem o famoso Teorema de Pitágoras. Em outras palavras, se a sequência (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então o triângulo de lados a, b e c é um triângulo retângulo. Por exemplo, (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são triplas pitagóricas.

a) Verifique se a sequência (20, 21, 29) é uma tripla pitagórica. Justifique sua resposta.

b) Justifique por que a sequência de números inteiros (n, n+3, n+5) não constitui uma tripla pitagórica para nenhum n inteiro positivo.

46. (Unesp) O gráfico da parábola dada pela função $f(x) = -\frac{3}{40}(x^2 - 16x - 24)$ indica, para uma determinada população de insetos, a relação entre a população total atual (x) e a população total no ano seguinte, que seria $f(x)$. Por exemplo, se a população atual de insetos é de 1 milhão $(x = 1)$ no ano seguinte será de 2,925 milhões, já que $f(1) = 2{,}925$.
Dizemos que uma população de insetos está em tamanho sustentável quando a população total do ano seguinte é maior ou igual a população total atual, o que pode ser identificado graficamente com o auxílio da reta $(y = x)$.

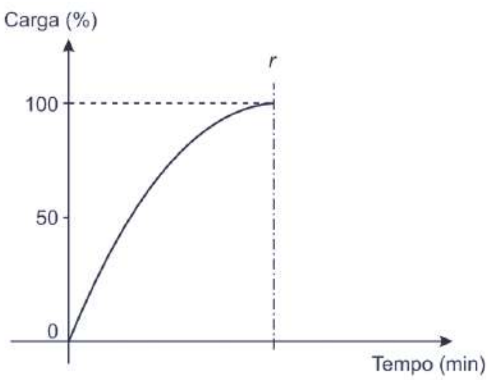


Determine a população total atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero $\left(adote\ \sqrt{22} = 4{,}7\right)$, e determine a população total atual para qual a sustentabilidade é máxima, ou seja, o valor de x para o qual a diferença entre a população do ano seguinte e do ano atual, nessa ordem, é a maior possível.

47. (Fuvest) Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.
a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?
b) Quanto recebeu cada um deles?

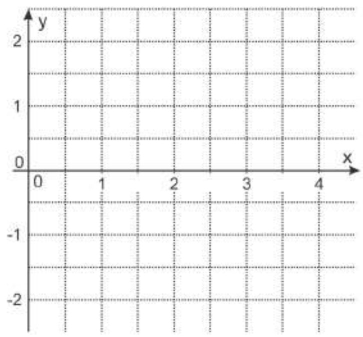
48. (Fgv) João colocou para carregar seu celular que estava completamente descarregado e, em seguida, anotou diversas vezes o tempo decorrido de carregamento, em minutos, e a porcentagem correspondente da carga total que estava acumulada naquele instante. O tempo até o final do carregamento durou exatamente duas horas.

João representou suas observações como pontos no plano cartesiano, onde, no eixo horizontal, assinalou o tempo decorrido após o início do carregamento e, no vertical, a correspondente carga acumulada. Esses pontos sugeriram que uma boa aproximação para a relação entre essas duas grandezas era o arco da parábola de eixo r representado no gráfico abaixo:



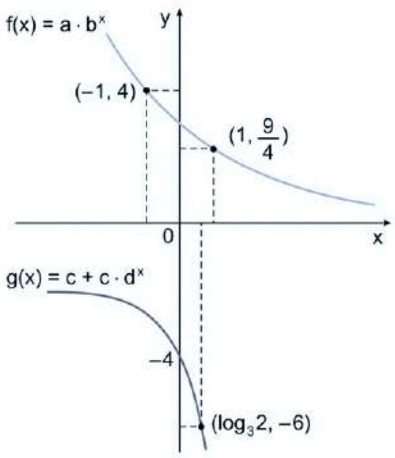
a) Determine a expressão da função que fornece, para cada valor x do tempo de carregamento (em minutos), a porcentagem y da carga total acumulada até aquele instante.
b) Determine a porcentagem da carga total acumulada após 1 hora de carregamento.

49. (Unicamp) Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x. No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.
a) Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \leq x \leq 4$.



b) Considere os pontos de coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M = (1, c)$ determine a e b.

50. (Unesp) Os gráficos a seguir referem-se às funções exponenciais f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = a \cdot b^x$ e $g(x) = c + c \cdot d^x$ com a, b, c e d sendo números reais, $0 < b \neq 1$ e $0 < d \neq 1$.

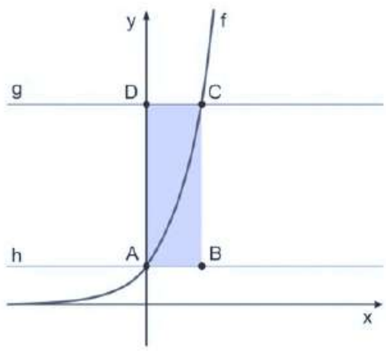


a) Determine a função f e as coordenadas do ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo y.
b) Determine a função g e a equação da assíntota do seu gráfico.

51. (Ufu) O setor de controle de qualidade de um frigorífico avalia o funcionamento de algumas de suas câmaras de refrigeração. Um boi foi abatido e parte de seu corpo foi colocado em uma câmara, mantida a uma temperatura constante de $-10\ °C$ para resfriamento. Nela, instalou-se um termômetro para aferir a oscilação na temperatura desse corpo.
Considere que a temperatura do corpo, em graus Celsius, varie com o tempo t, em minutos, de acordo com a função $T(t) = -10 + a \cdot 5^{bt}$ em que a e b são constantes reais e t, o tempo decorrido após o corpo ser colocado na câmara de refrigeração. Assim, após 80 minutos, foi observado que a temperatura do corpo era de $0\ °C$ e que, após 2 horas e 40 minutos, essa temperatura passou para $-8\ °C$.

Levando-se em consideração essas informações, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar
a) os valores das constantes reais a e b.
b) o instante de tempo t, em horas, a partir do qual $T(t) \leq -9{,}6\ °C$.

52. (Uerj) Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 8$ e $h(x) = k$, sendo $x \in \mathbb{R}$ e k uma constante real.



No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices A e C são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente. Determine a área desse retângulo.

53. (Unifesp) Em um jogo disputado em várias rodadas consecutivas, um jogador ganhou metade do dinheiro que tinha a cada rodada ímpar e perdeu metade do dinheiro que tinha a cada rodada par.

a) Sabendo que o jogador saiu do jogo ao término da 4ª rodada com R$ 202,50, calcule com quanto dinheiro ele entrou na 1ª rodada do jogo.
b) Suponha que o jogador tenha entrado na 1ª rodada do jogo com R$ 1.000,00, terminando, portanto, essa rodada com R$ 1.500,00 e que tenha saído do jogo ao término da 20ª rodada. Utilizando $\log 2 \cong 0{,}301$, $\log 3 \cong 0{,}477$ e os dados da tabela, calcule com quanto dinheiro, aproximadamente, ele saiu do jogo.

x	Valor aproximado de 10^x
1,5	32
1,55	35
1,6	40
1,65	45
1,7	50
1,75	56
1,8	63
1,85	71

54. (Unesp) Leia a matéria publicada em junho de 2016.

Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias

O dia mundial do vento, 15 de junho, terá um marco simbólico este ano. Antes do final do mês, a fonte de energia que começou a se tornar realidade no país há seis anos alcançará 10 GW, sendo que o potencial brasileiro é de 500 GW A perspectiva é a de que, em metade deste tempo, o Brasil duplique os 10 GW.

(www.portalabeeolica.org.br. Adaptado.)

Considerando que a perspectiva de crescimento continue dobrando a cada três anos, calcule o ano em que o Brasil atingirá 64% da utilização do seu potencial eólico. Em seguida, calcule o ano aproximado em que o Brasil atingirá 100% da utilização do seu potencial eólico, empregando um modelo exponencial de base 2 e adotando $\log 2 \cong 0{,}3$ no cálculo final.

55. (Unesp) O cálculo aproximado da área da superfície externa de uma pessoa pode ser necessário para a determinação da dosagem de algumas medicações. A área A (em cm^2) da superfície externa de uma criança pode ser estimada por meio do seu "peso" P (em kg) e da sua altura H (em cm) com a seguinte fórmula, que envolve logaritmos na base 10:

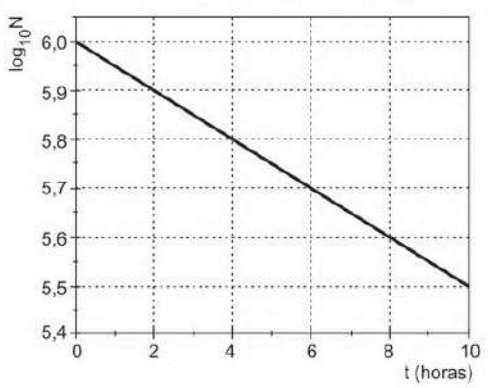
$$\log A = 0{,}425 \cdot \log P + 0{,}725 \cdot \log H + 1{,}84$$

(Delafield Du Bois e Eugene Du Bois. A formula to estimate the approximate surface area if height and weight be known, 1916. Adaptado.)

Rafael, uma criança com 1 m de altura e 16 kg de "peso", precisa tomar uma medicação cuja dose adequada é de 1 mg para cada 100 cm^2 de área externa corporal. Determine a dose adequada dessa medicação para Rafael.
Adote nos seus cálculos $\log 2 = 0{,}30$ e a tabela a seguir.

x	10^x
3,3	1995
3,4	2512
3,5	3162
3,6	3981
3,7	5012
3,8	6310
3,9	7943

56. (Fuvest) O número N de átomos de um isótopo radioativo existente em uma amostra diminui com o tempo t, de acordo com a expressão $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo N_0 o número de átomos deste isótopo em $t = 0$ e λ a constante de decaimento. Abaixo, está apresentado o gráfico do $\log_{10} N$ em função de t, obtido em um estudo experimental do radiofármaco Tecnécio 99 metaestável (^{99m}Tc), muito utilizado em diagnósticos do coração.



A partir do gráfico, determine
a) o valor de $\log_{10} N_0$;
b) o número N_0 de átomos radioativos de ^{99m}Tc;
c) a meia-vida $T_{1/2}$ do ^{99m}Tc.

Note e adote: A meia-vida $(T_{1/2})$ de um isótopo radioativo é o intervalo de tempo em que o número de átomos desse isótopo existente em uma amostra cai para a metade; $\log 2 = 0{,}3$; $\log 5 = 0{,}7$.

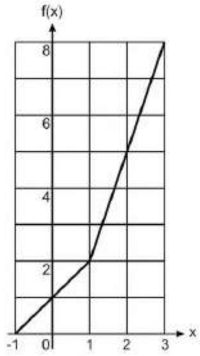
57. (Fuvest) Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$$c(t) = 400 - k \log_3(at + 1),$$

em que t é dado em horas e $c(t)$ é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas.

a) Qual é a concentração do analgésico no instante inicial $t = 0$?
b) Calcule as constantes a e k, sabendo que, no instante $t = 2$, a concentração do analgésico no sangue é metade da concentração no instante inicial e que, no instante $t = 8$, a concentração do analgésico no sangue é nula.

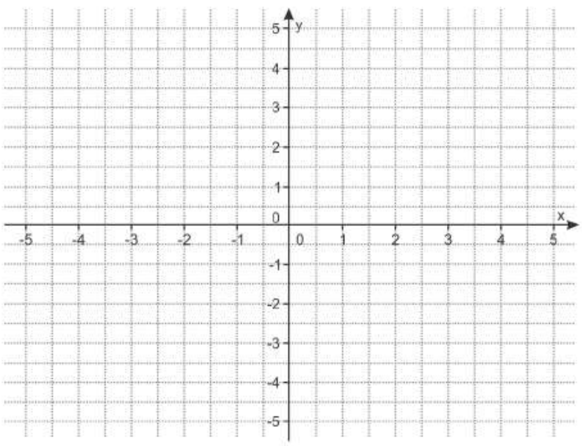
58. (Unicamp) Considere a função $f(x) = 2x + |x + p|$, definida para x real.



a) A figura acima mostra o gráfico de $f(x)$ para um valor específico de p. Determine esse valor.
b) Supondo, agora, que $p = -3$, determine os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 12$.

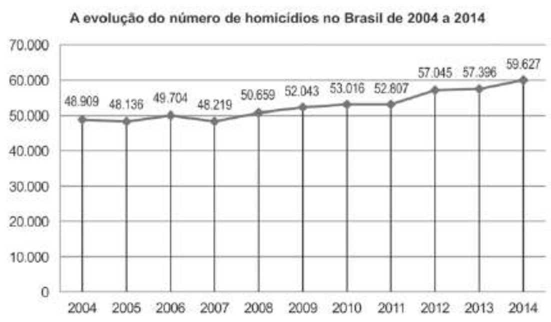
59. (Unicamp) Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leq x \leq 4$.



b) Determine os valores dos números reais a e b para os quais a equação $\log_a(x + b) = f(x)$ admite como soluções $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$.

60. (Ufsc) O gráfico abaixo representa a evolução do número de homicídios no Brasil em função do tempo, no período de 2004 a 2014.



Fonte: Atlas da Violência IPEA 2016, 19 jul. 2016, p. 8. [Adaptado].

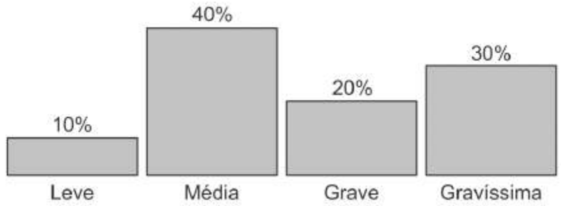
Com base nos dados do gráfico, responda aos itens a e b.
a) Identifique entre que anos consecutivos foi registrado o maior aumento no número de homicídios.
b) Determine o aumento percentual identificado no item a.
c) O estudo apresentado no Atlas da Violência IPEA 2016 ressalta que, embora os homens representem a vasta maioria das vítimas de homicídio no Brasil, de 2004 a 2014 houve um crescimento de 11,6% da taxa de homicídios entre mulheres, apesar das políticas públicas desenvolvidas para minimizar o problema, como a Lei Maria da Penha e as medidas de prevenção à violência doméstica institucionalizadas desde 2006. Determine o número de mulheres assassinadas por dia no Brasil, tomando como referência o ano de 2014 (365 dias), em que 4.757 mulheres foram vítimas de morte por agressão.
d) O estudo apresentado no Atlas da Violência IPEA 2016 divide a população em dois grupos disjuntos, um de negros (pretos e pardos) e outro de não negros (indivíduos brancos, amarelos e indígenas). De 2004 a 2014, há uma discrepância alarmante na evolução da taxa de homicídios entre esses dois grupos: enquanto a de negros cresceu 18,2%, a de não negros caiu 14,6%. Isso fez com que, em 2014, para cada não negro morto, 2,4 indivíduos negros fossem mortos. Através de uma fração irredutível, determine a probabilidade de que na ocorrência aleatória de um homicídio a vítima seja um indivíduo não negro.

61. (Unicamp) O Código de Trânsito Brasileiro classifica as infrações, de acordo com a sua natureza, em leves, médias, graves e gravíssimas. A cada tipo corresponde uma pontuação e uma multa em reais, conforme a tabela abaixo.

Infração	**Pontuação**	**Multa***
Leve	3 pontos	R$ 53,00
Média	4 pontos	R$ 86,00
Grave	5 pontos	R$ 128,00
Gravíssima	7 pontos	R$ 192,00

* Valores arredondados

a) Um condutor acumulou 13 pontos em infrações. Determine todas as possibilidades quanto à quantidade e à natureza das infrações cometidas por esse condutor.
b) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição de 1.000 infrações cometidas em certa cidade, conforme a sua natureza. Determine a soma das multas aplicadas.



62. (Unesp) Sabendo-se que $\cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$, para quais valores de x a função $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$?

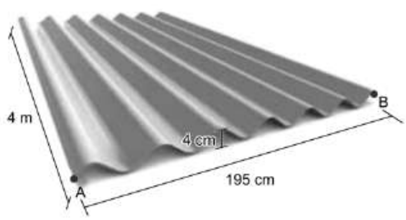
63. (Unicamp) Seja a função $f(x) = \frac{2+sen\,x}{2+\cos x}$, definida para todo número real x.

a) Mostre que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
b) Seja θ um número real tal que $f(\theta) = 2$. Determine os possíveis valores para $sen\,\theta$.

64. (Uel) Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês 4 (abril), teve R$ 50.000,00 de lucro e que, no mês 6 (junho), o lucro foi de R$ 30.000,00.
Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro L no mês t daquele ano é definida por

$L(t) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$ em que $1 \leq t \leq 12$, $a > 0$ e $b > 0$.

65. (Unifesp) Uma chapa retangular metálica, de área igual a $8{,}132\ m^2$, passa por uma máquina que a transforma, sem nenhuma perda de material, em uma telha ondulada. A figura mostra a telha em perspectiva.



A curva que liga os pontos A e B, na borda da telha, é uma senóide.

Considerando um sistema de coordenadas ortogonais com origem em A e de forma que as coordenadas de B, em centímetros, sejam $(195, 0)$, a senóide apresentará a seguinte configuração:

a) Calcule o comprimento da senóide indicada no gráfico, do ponto A até o ponto B.
b) Determine a expressão da função cujo gráfico no sistema de coordenadas é a senóide de A até B. Determine o domínio, a imagem e o período dessa função.

66. (Ufpr) Considere a função $f(x) = 4\cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) - 3$, com $x \in (-\infty, +\infty)$.

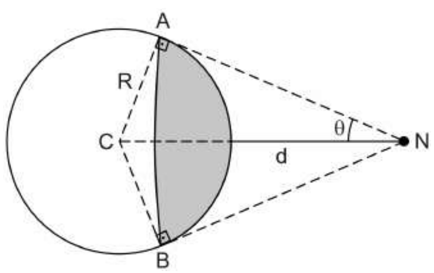
a) Qual é o valor mínimo que a função f atinge?
b) Para que valores de x temos $f(x) = -1$?

67. (Unicamp) Sabendo que k é um número real, considere a função $f(x) = k\,sen\,x + \cos x$, definida para todo número real x.

a) Seja t um número real tal que $f(t) = 0$. Mostre que $f(2t) = -1$.
b) Para $k = 3$, encontre todas as soluções da equação $[f(x)]^2 + [f(-x)]^2 = 10$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

68. (Ufscar) Suponha que o planeta Terra seja uma esfera de centro C e raio R. Na figura, está representado o planeta Terra e uma nave espacial N. A fração visível da superfície da Terra por um astronauta na nave N é dada em função do ângulo θ, mostrado na figura, pela expressão:

$$f(\theta) = \frac{1 - sen\,\theta}{2}$$

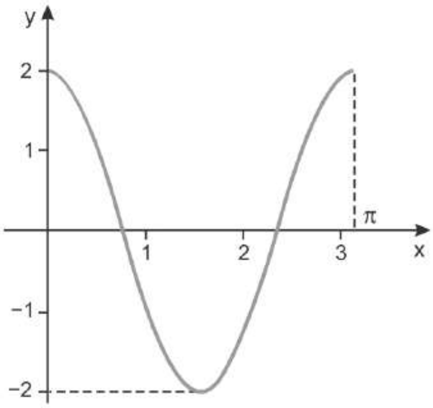


a) Determine o ângulo θ, em graus, para o qual é visível da nave a quarta parte da superfície da Terra e a distância d da nave à superfície da Terra neste caso. (Use a aproximação $R = 6.400\ km$)

b) Se um astronauta numa nave, a uma distância d da Terra, avista a superfície da Terra com ângulo $\theta = 15°$, determine a fração visível da superfície da Terra pelo astronauta. (Use as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{6} = 2{,}4$)

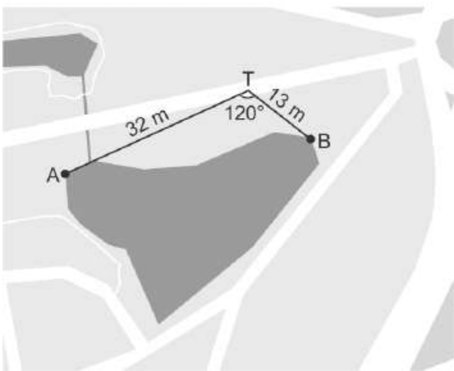
69. (Uerj) Considere a função real f, de variável real x, definida pelo seguinte determinante:

$f(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 2 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$ para $0 \leq x \leq \pi$. Observe o gráfico da função f.



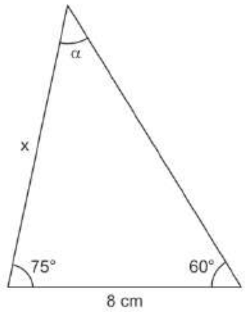
Determine os valores de x para os quais $f(x) = 1$.

70. (Uerj) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32\ m$; $BT = 13\ m$ e $A\hat{T}B = 120°$, representadas no esquema abaixo.



Calcule a distância aproximada, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

71. (Ufpr) Considere o triângulo a seguir.



a) Quanto mede o ângulo α?
b) Quanto mede x?

72. (Unicamp) Considere o polinômio cúbico $P(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que $P(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de $P(x)$, determine o valor de $|z|$.

73. (Udesc) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes quadradas de ordem 2 cujas entradas são definidas por $a_{ij} = i^2 - i \cdot j$ e $b_{ij} = \begin{cases} 3j - i, se\ i \leq j \\ i^3 - j^2, se\ i > j \end{cases}$. Explicitando seus cálculos, determine a matriz X que satisfaz a equação matricial $(A + B)^T + mX = n(A \cdot B)$, onde m e n são, respectivamente, a maior e a menor raiz real do polinômio $p(t) = t^4 + t^3 - 6t^2$.

74. (Fgv) Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios A, B e C a dois países da América Central, P_1 e P_2. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz Q:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{array}$$

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por tonelada, como indica a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\circ} \text{ empresa} \\ \leftarrow 2^{\circ} \text{ empresa} \end{array}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. O que representa o elemento a_{13} da matriz produto?
b) Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto A, com a segunda empresa, aos dois países?
c) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas? Por quê?

75. (Ufpr) Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = det\begin{bmatrix} \cos(2x) & sen\,x & 0 \\ \cos x & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $f(0)$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
b) Para quais valores de x se tem $f(x) = 0$?

76. (Uerj) Considere uma matriz A com 3 linhas e 1 coluna, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, de cima para baixo.
Considere, também, uma matriz B com 1 linha e 3 colunas, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13 nesta ordem, da esquerda para a direita.

Calcule o determinante da matriz obtida pelo produto de AxB.

77. (Unicamp) Seja a matriz de ordem 2 x 3, dada por A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Seja C a matriz de ordem 3 x 2, cujos elementos são dados por $c_{ij} = (-1)^{i+j}$, para i = 1, 2, 3 e j = 1, 2. Determine o produto AC.
b) Determine a solução do sistema linear A $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, nas variáveis reais x, y e z, em que (x, y, z) é uma progressão aritmética.

78. (Unicamp) Sabendo que p e q são números reais, considere as matrizes

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$.

a) Prove que para quaisquer p e q teremos $B^T AB \geq 0$.
b) Determine os valores de p e q para os quais o sistema linear nas variáveis reais x, y e z, A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ = B, tem infinitas soluções.

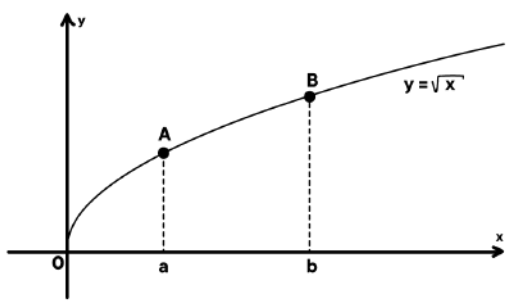
79. (Unicamp) Considere a matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde a, b e c são números reais.

a) Encontre os valores de a, b e c de modo que $A^T = -A$.
b) Dados a = 1 e b = –1, para que os valores de c e d o sistema linear A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ tem infinitas soluções?

80. (Fgvrj) Um fazendeiro compra semanalmente um saco de farelo de milho, um saco de farelo de soja e um saco de farelo de cevada, mas compra também um saco extra de um desses três produtos. Quando o saco extra é o de milho, o peso total dos quatro sacos é de 110 kg, quando o saco extra é o de soja, o peso total dos quatro sacos é de 106 kg e quando o saco extra é o de cevada, o peso total dos quatro sacos é de 104 kg. Os pesos dos sacos de cada produto são sempre iguais.

Determine o peso de um saco de cada produto.

81. (Unicamp) A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$, em que os pontos A e B têm abscissas $x_A = a > 0$ e $x_B = b > a$, e O é a origem do sistema de coordenadas.

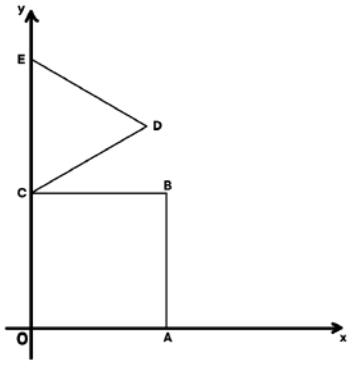


a) Prove que os pontos A, B e $C = (-\sqrt{ab}, 0)$, são colineares.
b) Para $b = 3$, determine o valor de a para o qual a distância da origem ao ponto A é igual à distância do ponto A ao ponto B.

82. (Unicamp) No plano cartesiano, considere a reta r de equação $2x + y = 1$ e os pontos de coordenadas $A = (1, 4)$ e $B = (3, 2)$.

a) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta r e a reta que passa pelos pontos A e B.
b) Determine a equação da circunferência na qual um dos diâmetros é o segmento $\overline{AB}$.

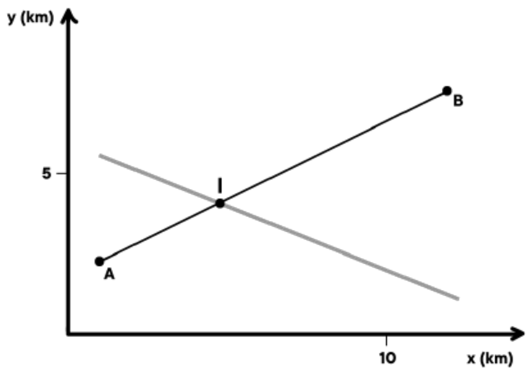
83. (Fuvest)



Na figura, $OABC$ é um quadrado e CDE é um triângulo equilátero tal que $OC = CE = 2$.

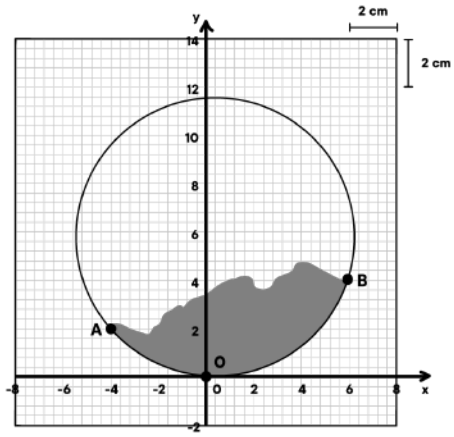
a) Determine a equação da reta que passa por E e por A.
b) Determine a equação da reta que passa por D e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE}$.
c) Determine um ponto P no segmento OA, de modo que a reta que passa por E e por P divida o quadrado em duas regiões, de tal forma que a área da região que contém o segmento OC seja o dobro da área da outra região.

84. (Uerj) No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos $A(1, 2)$ e $B(11, 7)$. O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é $x + 3y = 17$. Observe abaixo o esboço do projeto.



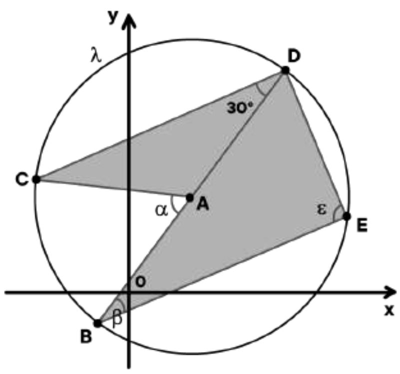
Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

85. (Unesp) Uma expedição arqueológica encontrou um pedaço de um prato de cerâmica antigo, supostamente circular. Para estimar o tamanho do prato, os arqueólogos desenharam o pedaço de cerâmica encontrado, em tamanho real, em um plano cartesiano de origem $O(0, 0)$. A circunferência do prato passa pela origem do plano cartesiano e pelos pontos $A(-4, 2)$ e $B(6, 4)$, como mostra a figura.



a) A área do pedaço de cerâmica é aproximadamente igual à área do triângulo ABO. Calcule a área desse triângulo, em cm^2.
b) Calcule as coordenadas do ponto em que estaria localizado o centro do prato cerâmico circular nesse sistema de eixos cartesianos ortogonais.

86. (Unifesp) No plano cartesiano de eixos ortogonais foi desenhada uma circunferência λ, de centro A e equação geral $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Os pontos B, C, D e E pertencem a λ, sendo $\overline{BD}$ um diâmetro de λ. Sabe-se ainda que a medida do ângulo $C\hat{D}B$ é de $30°$ e que $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são segmentos paralelos.



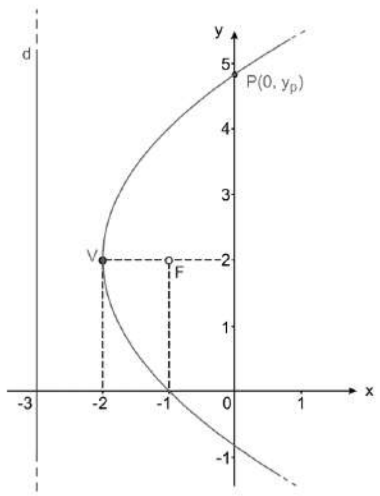
a) Determine as medidas dos ângulos $C\hat{A}B$, $D\hat{B}E$ e $B\hat{E}D$, indicadas na figura por α, β e ε.
b) Calcule a área do pentágono côncavo $ACDEB$, destacado na figura em cinza.

87. (Fuvest) No plano cartesiano, $0xy$, a circunferência C tem centro no ponto $P = (2, 1)$, e a reta t é tangente a C no ponto $Q = (-1, 5)$.

a) Determine o raio da circunferência C.
b) Encontre uma equação para a reta t.
c) Calcule a área do triângulo PQR, sendo R o ponto de interseção de t com o eixo $0x$.

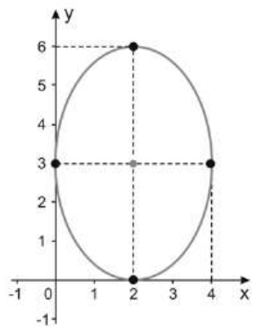
88. (Unesp) Uma empresa oferece frete gratuito para entregas do seu produto em um raio de até 25 km do depósito. Para a distância que ultrapassar 25 km, medida em linha reta desde o depósito, a empresa cobra $R\$\ 20{,}00$ por quilômetro que ultrapasse os 25 km iniciais gratuitos. Essa cobrança também é feita de forma proporcional em caso de frações de quilômetros.
Um consumidor do produto reside 20 km a leste do depósito e x km ao sul. Apresente uma figura representando a situação descrita e determine o valor máximo de x para que esse consumidor tenha direito ao frete gratuito na entrega do produto em sua residência. Em seguida, determine o custo do frete C (em reais), em função de x, para o caso em que $C(x) \neq 0$.

89. (Unesp) Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d, de equação $x = -3$, e um ponto F, de coordenadas $(-1, 2)$. Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta d forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V, de coordenadas $(-2, 2)$ e o ponto P, de coordenadas $(0, y_P)$.



Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e de P. Em seguida, calcule y_P.

90. (Unesp) A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.



Valendo-se das informações contidas nesta representação, determine a equação reduzida da elipse.

91. (Ita) Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

92. (Unicamp) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: $r, -r$ e s.

a) Determine os valores de r e s.
b) Calcule $p(z)$ para $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária.

93. (Unesp) Identifique o lugar geométrico das imagens dos números complexos Z, tais que $|Z| + |3 \cdot Z| = 12$.

94. (Ufpr) Considere o número complexo $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.

a) Calcule o módulo de z e escreva a forma polar de z.
b) Calcule o valor da expressão $z^{27} + z^{24} + 1$.
(Sugestão: use a fórmula de De Moivre)

95. (Ufpr) Considere o número complexo $z_0 = 4i + \frac{13}{2+3i}$

a) Determine a parte real e a parte imaginária de z_0.
b) Determine a e b, de modo que $z = 1 - i$ seja solução da equação $z^2 + az + b = 0$.

96. (Unicamp) Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

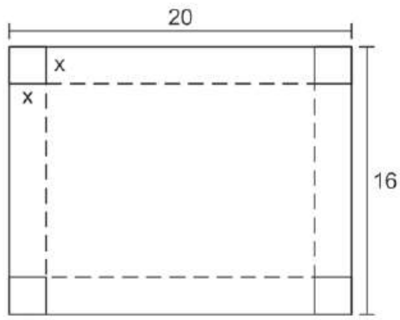
a) Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.
b) Sejam e e f números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis x e y, $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Determine para que valores da razão q esse tem solução única.

97. (Fuvest) Os coeficientes a, b e c do polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e $1 + \alpha i$, com $\alpha > 0$, são raízes da equação $P(x) = 0$ e que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é 8, determine

a) o valor de α;
b) o quociente de $P(x)$ por $(x + 1)$.

98. (Unesp) Uma raiz da equação $x^3 - (2a - 1)x^2 - a(a + 1)x + 2a^2(a - 1) = 0$ é $(a - 1)$. Quais são as outras duas raízes dessa equação?

99. (Fuvest) Considere uma folha de papel retangular com lados 20 cm e 16 cm. Após remover um quadrado de lado x cm de cada um dos cantos da folha, foram feitas 4 dobras para construir uma caixa (sem tampa) em forma de paralelepípedo reto-retângulo com altura x cm. As linhas tracejadas na figura indicam onde as dobras foram feitas.



a) Expresse o volume da caixa em função de x.
b) Determine o conjunto dos valores de x para os quais o volume da caixa é maior ou igual a 384 cm^3.

100. (Unicamp) Considere o polinômio $P(x) = x^2 - 11x + k + 2$, em que x é variável real e k um parâmetro fixo, também real.

a) Para qual valor do parâmetro k o resto do quociente de $P(x)$ por $(x - 1)$ é igual a 3?
b) Supondo, agora, $k = 4$, e sabendo que a e b são raízes de $P(x)$, calcule o valor de $sen\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right)$.

notas