Soluções Canguru 2009 – Nível S

1. Há 200 peixes em um aquário, dos quais 1% são azuis e o restante, amarelos. Quantos peixes amarelos devem ser retirados do aquário, de modo que os peixes azuis passem a representar 2% dos peixes do aquário?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 20 **(D)** 50 **(E)** 100

1. Alternativa E

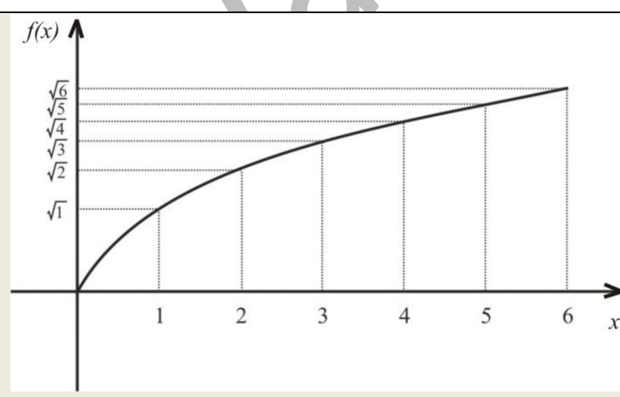
Há 1% de 200 = 2 peixes azuis no aquário. Seja n o número de peixes amarelos que devem ser retirados do aquário, de modo que os 2 peixes azuis passem a representar 2% do total de peixes que sobrarem. Então $\frac{2}{200-n} = 2\% = 0,02 \Leftrightarrow 2 = 4 - 0,02n \Leftrightarrow n = \frac{2}{0,02} = 100$.

2. Qual é o maior dos números a seguir?

(A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ **(B)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ **(D)** $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ **(E)** $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

2. Alternativa A

A função $f(x)=\sqrt{x}$ é crescente, mas a taxa de crescimento é negativa, ou seja, quando x percorre intervalos regulares, ao assumir valores inteiros, os valores sucessivos de suas raízes definem intervalos progressivamente menores, conforme ilustrado na figura. Portanto, o maior dos números apresentados é $\sqrt{2}-\sqrt{1}$.



3. Para quantos inteiros positivo n o número n^2+n é primo?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** Um número finito maior do que 2. **(E)** Um número infinito.

3. Alternativa B

O número n^2+n é par para todo inteiro positivo. Há somente um inteiro positivo primo, o número 2. Portanto, n^2+n é primo se, e somente se, $n = 1$.

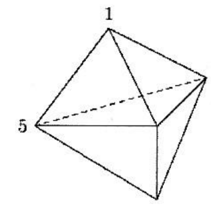
4. Maria, Vilmar e Osias foram a uma lanchonete. Cada um deles consumiu três copos de suco, dois sorvetes e cinco salgados. Qual dos valores a seguir poderia ser o valor total da conta, em reais?

(A) 39,20 **(B)** 38,20 **(C)** 37,20 **(D)** 36,20 **(E)** 35,20

4. Alternativa C

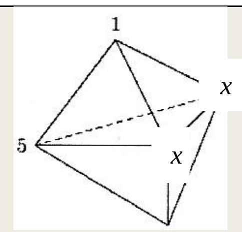
Supondo que os três dividam igualmente a conta, concluímos que o total deve ser divisível por 3. O único valor nessas condições é 37, 20.

5. O sólido representado tem 6 faces triangulares, com um número em cada vértice. A soma dos números dos vértices em cada face é igual para todas as faces. Os números 1 e 5, conforme figura, são dois dos cinco números dos vértices. Qual é a soma desses cinco números?



(A) 9 **(B)** 12 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 24

5. Alternativa C

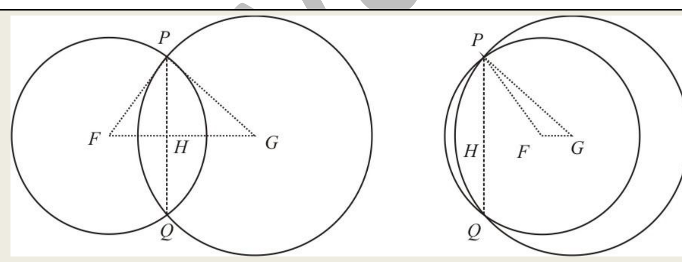


Seja x o número no vértice das duas faces com 1 e 5 nos vértices. Temos então $5+1+x=x+x+1 \Leftrightarrow x=5$. Portanto, no 5º vértice deve estar o número 1. A soma dos números nos cinco vértices é 5 + 5 + 5 + 1 +1 =17.

6. Duas circunferências, uma de centro F e raio 13 e outra de centro G e raio 15, intersectam-se nos pontos P e Q. O comprimento do segmento de reta $\overline{PQ}$ é 24. Qual dos valores a seguir poderia ser o comprimento do segmento de reta $\overline{FG}$?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 9 **(D)** 14 **(E)** 18

6. Alternativa D



Nas condições dadas, há duas possibilidades de intersecção das duas circunferências, apresentadas na figura. À esquerda, os triângulos PFH e PGH são retângulos, FP = 13, PG = 15 e PH = 12. Usando o teorema de Pitágoras concluímos que HG = 9 e FH = 5. Logo, FG = 14. À direita, temos FG = 9 – 5 = 4. Portanto, o comprimento do segmento $\overline{FG}$ pode ser 14.

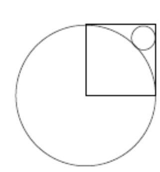
7. Uma caixa contém 2 meias brancas, 3 vermelhas e 4 azuis. Luísa sabe que um terço das meias estão furadas, mas não sabe as cores das meias estragadas. Pegando ao acaso meias da caixa, ela espera encontrar duas meias em bom estado e da mesma cor. Quantas meias ela deve retirar até ter a certeza de ter esse par de meias?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

7. Alternativa D

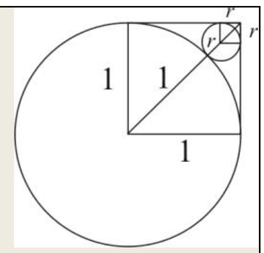
Há 9 meias. Portanto, o número de meias com furos é 3 e o número de meias boas é 6. Pode ser que Luísa pegue duas primeiras meias de mesma cor, sem buracos, mas a pior possibilidade é que ela pegue três meias de cores diferentes e furadas e, em seguida, mais três meias de cores diferentes, ou seja, ela pode pegar 6 meias sem ter um par de meias de mesma cor, em boas condições. Logo, ela precisa retirar 7 meias para ter certeza de que isso irá ocorrer.

8. O quadrado da figura tem lado de medida 1. Qual é o raio da circunferência menor?



(A) $\sqrt{2}-1$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(D)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

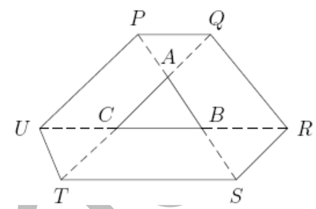
8. Alternativa E



O raio da circunferência maior é igual ao lado do quadrado maior e o raio *r* da circunferência menor é igual ao lado do quadrado menor. A diagonal do quadrado maior mede $\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$ e é igual à soma do raio da circunferência maior, do raio da circunferência menor e da diagonal do quadrado menor. A diagonal do quadrado menor mede $r\sqrt{2}$. Portanto,

$$1+r+r\sqrt{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow r\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\left(1-\sqrt{2}\right)^2.$$

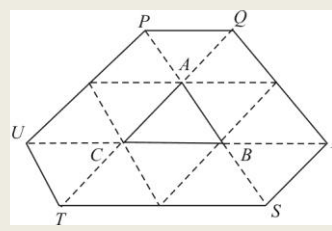
9. Os lados do triângulo *ABC* são estendidos nos dois sentidos até os pontos *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* e *U* de modo que *PA* = *AB* = *BS*, *TC* = *CA* = *AQ* e *UC* = *CB* = *BR*. Se a área do triângulo *ABC* é 1, qual é a área do hexágono *PQRSTU*?



(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** Outro valor.

9. Alternativa D

Traçando paralelas aos lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ pelos pontos *C*, *B* e *A*, respectivamente, dividimos o hexágono em 13 triângulos. Cada um dos 12 triângulos é congruente (pelos casos LAL ou ALA de congruência) ao triângulo *ABC*, de área 1. Portanto, o hexágono *PQRSTU* tem área 13.



10. Queremos pintar os quadrados do tabuleiro usando as cores *A*, *B*, *C* e *D* de modo que quadrados vizinhos não têm a mesma cor (quadrados com um vértice comum apenas também são considerados vizinhos). Alguns dos quadrados já foram pintados conforme figura. Quais cores seriam possíveis para o quadrado cinza?

A	B			
C	D			
		B		
B				

(A) Somente *A* e *B*. **(B)** Somente *C*. **(C)** Somente *D*.

(D) Somente *C* e *D*. **(E)** Qualquer uma das 4 cores.

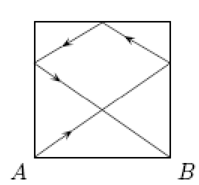
10. Alternativa D

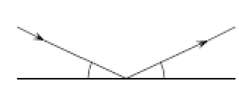
A	B	A	B	A
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B

A	B	A	B	A
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B
D	C	D	C	D
B	A	B	A	B

A disposição inicial das letras permite que se escrevam alternadamente *A* e *B* em linhas e colunas separadas por linhas e colunas de *C* e *D*, também alternadamente. Com isso, obtêm-se dois preenchimentos do tabuleiro, conforme ilustração. Se tentarmos colocar no quadrado cinza a letra *A* ou a letra *B*, a simetria é quebrada e não é possível preencher o tabuleiro obedecendo à regra da não vizinhança de letras iguais. Portanto, no quadrado cinza, podem aparecer apenas as letras *C* e *D*.

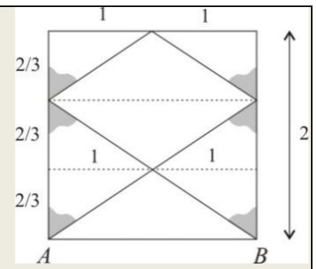
11. Numa mesa de bilhar quadrada de lado 2 m, uma bola é atirada de um canto. Depois de tocar três lados, a bola atinge o canto B, conforme figura. Quantos metros a bola percorreu? (Lembre-se que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, conforme indicado na figura da direita).





(A) 7 **(B)** $2\sqrt{13}$ **(C)** 8 **(D)** $4\sqrt{3}$ **(E)** $2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

11. Alternativa B



Traçando paralelas, podemos destacar 6 triângulos retângulos congruentes, conforme indicado na figura. Um dos catetos mede 1 m e o outro mede $\frac{2}{3}$ m. Utilizando o teorema de Pitágoras em qualquer um dos 6 triângulos, calculamos o comprimento da hipotenusa, igual a $\sqrt{1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$. A bola percorreu $6\times\frac{\sqrt{13}}{3}=2\sqrt{13}$ m.

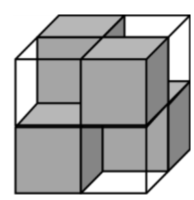
12. 2009 cangurus, alguns de cor clara e outros de cor escura, comparam suas alturas. Sabe-se que um canguru claro é mais alto do que exatamente 8 cangurus escuros, outro canguru claro é mais alto do que exatamente 9 cangurus, outro claro é mais alto do que exatamente 10 cangurus, e assim por diante, até o canguru claro que é mais alto do que todos os cangurus escuros. Qual é o número de cangurus claros?

(A) 1000 **(B)** 1001 **(C)** 1002 **(D)** 1003 **(E)** A situação apresentada é impossível.

12. Alternativa B

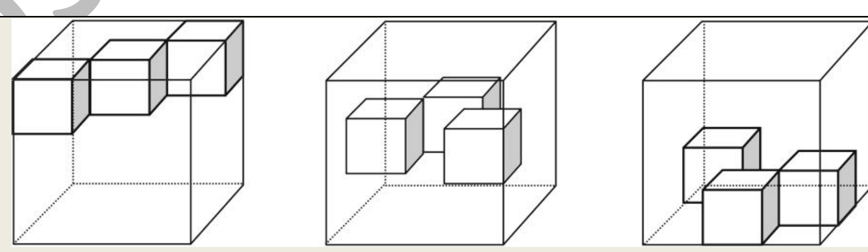
Se o canguru claro de número 1 é maior do que 8 cangurus escuros, o de número 2 é maior do que 9 cangurus escuros, etc. Assim, o canguru escuro número *n* é maior do que *n* + 7, número total de cangurus escuros. Como o número total de cangurus é 2009, temos $n+n+7=2009 \Leftrightarrow 2n=2002 \Leftrightarrow n=1001$, ou seja, o número de cangurus claros é 1001.

13. Um cubo 2 × 2 × 2 é formado por quatro cubos 1 × 1 × 1 brancos transparentes e por quatro cubos 1 × 1 × 1 pretos não transparentes, como na figura. Eles estão colocados de tal forma que o cubo maior é não transparente, no sentido de que não é possível ver através dele nem do topo para a base, nem da frente para o fundo e nem da esquerda para a direita. Pelo menos quantos cubos pretos teríamos que usar para formar um cubo 3 × 3 × 3 não transparente?



(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 18

13. Alternativa B



Num cubo 3 × 3 × 3, devemos distribuir os cubos unitários de modo a obliterar a visão de 9 quadradinhos unitários que compõem a visão de qualquer face. No mínimo 9 cubos são necessários. A figura mostra que 9 bastam para tornar opaco o cubo nas 3 vistas (topo, lateral e frente): 3 cubos na camada de cima (figura à esquerda), 3 cubos na camada do meio e 3 cubos na camada de baixo (figura à direita).

14. Na ilha dos verazes e mentirosos, 25 pessoas esperam numa fila. Todo mundo, exceto a primeira pessoa da fila, diz que a pessoa da frente é um mentiroso. O primeiro da fila disse que todos atrás dele são mentirosos. Quantos mentirosos há na fila? (os verazes sempre dizem a verdade, ao passo que os mentirosos sempre falam mentira)

(A) 0 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 24 **(E)** Impossível determinar.

14. Alternativa C

Se o primeiro da fila é veraz, então todos atrás dele são mentirosos. Logo, o segundo da fila é mentiroso e de fato é, porque ele diz que o primeiro da fila é mentiroso. Mas o terceiro da fila, ao afirmar que a pessoa à sua frente é mentirosa, está dizendo a verdade. Isto contradiz a hipótese de que o primeiro da fila diz a verdade ao afirmar que todos atrás de si são mentirosos.
Portanto, o primeiro da fila mente, o segundo da fila diz a verdade, o terceiro da fila mente, e assim, por diante, até o 25º da fila, que mente. Portanto, há 13 mentirosos na fila (de 1 a 25 há 13 números ímpares).

15. Qual é o algarismos das unidades do número $1^2 - 2^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

15. Alternativa E

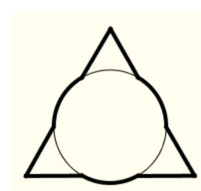
$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + \cdots - 2008^2 + 2009^2 = 1 + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(5^2 - 4^2\right) + \cdots \left(2009^2 - 2008^2\right) =$

$1 + (3-2)(3+2) + (5-4)(5+4) + \cdots (2009-2008)(2009+2008) = 1 + 5 + 9 + \cdots + 4017$

As parcelas da soma são termos da progressão aritmética de razão 4, primeiro termo 1 e número n de termos dado por $4017 = 1 + 4(n-1) \Leftrightarrow n = 1005$. A soma desses termos é:

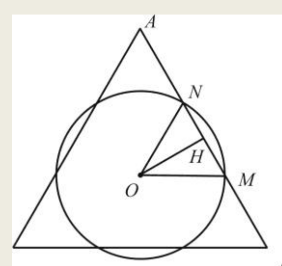
$\frac{(1+4017)}{2} \times 1005 = 2009 \times 1005$. O algarismo das unidades do produto é 5.

16. Colocamos sobre um triângulo de lado 3 um círculo de raio 1, fazendo coincidir os centros da duas figuras. Qual é o perímetro da figura que obtemos, representada em linha grossa no desenho?



(A) $3 + 2\pi$ **(B)** $6 + \pi$ **(C)** $9 + \frac{\pi}{3}$ **(D)** 3π **(E)** $9 + \pi$

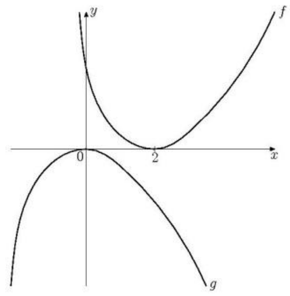
16. Alternativa B



O centro da circunferência de raio 1 coincide com o ortocentro O do triângulo equilátero de lado 3. Como a altura do triângulo é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, a distância do centro da circunferência ao lado $\overline{AB}$ do triângulo é $OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sendo M e N intersecções da circunferência com um dos lados do triângulo, concluímos que os triângulos congruentes OHM e OHN são retângulos. Em particular, no triângulo OHM temos $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $OM = 1$, logo $\cos\left(H\hat{O}M\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m\left(H\hat{O}M\right) = 30^{\text{O}}$ e $HM = \frac{1}{2}$. A parte da figura correspondente ao lado $\overline{AB}$ corresponde aos segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{MB}$ mais o arco NM, com o comprimento igual a $1 + 1 + \frac{2\pi \cdot 60^{\text{O}}}{360^{\text{O}}} = 2 + \frac{\pi}{3}$. Portanto, o perímetro da figura é $3\left(2 + \frac{\pi}{3}\right) = 6 + \pi$.

17. As funções *f* e *g* têm seus gráficos na figura. Qual das igualdades a seguir é uma relação entre essas funções?

(A) $g(x) = f(x+2)$
(B) $g(x-2) = -f(x)$
(C) $g(x) = -f(-x+2)$
(D) $g(-x) = -f(-x+2)$
(E) $g(2-x) = -f(x)$



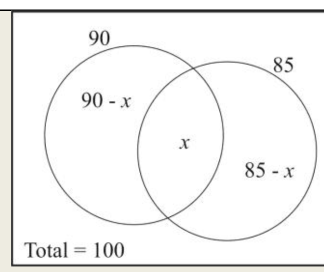
17. Alternativa B

A curva representando *g* irá coincidir com a curva da *f* se sofrer uma translação horizontal de 2 unidades para a direita e uma reflexão em relação ao eixo *Ox*. Portanto, $-g(x-2) = f(x) \Leftrightarrow g(x-2) = -f(x)$.

18. Quatro problemas foram propostos a cada um dos 100 participantes de uma olimpíada de Matemática. 90 deles resolveram o primeiro problema, 85 resolveram o segundo problema, 80 resolveram o terceiro problema e 70 resolveram o quarto problema. Pelo menos quantos participantes resolveram todos os quatro problemas?

(A) 10 **(B)** 15 **(C)** 20 **(D)** 25 **(E)** 30

18. Alternativa D

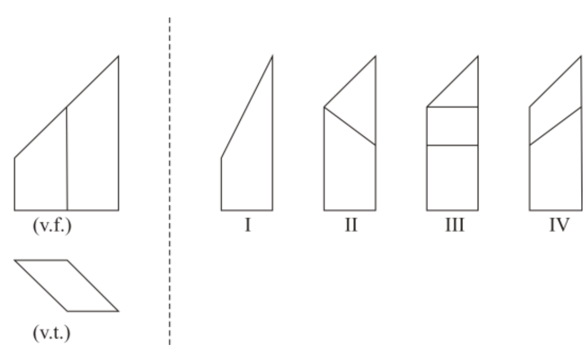


O número de participantes que responderam à 1ª e também à 2ª questão não pode ser menor do que 90 + 85 – 100 = 75. Isto pode ser entendido pelo diagrama de Venn ao lado:
$(90-x)+x+(85-x)=100 \Leftrightarrow 175-100=x$
Dos que responderam à 2ª e à 3ª não é menor do que 85 + 80 – 100 = 65; desses, os que responderam também à 1ª questão, não podem ser em número menor do que 90 + 65 – 100 = 55.
Finalmente, dos que responderam à 4ª e também às três primeiras, o número não pode ser menor do que 70 + 55 – 100 = 25.

19. Na figura abaixo, você tem a vista frontal (v.f.) e a vista de topo (v.t.) de um sólido geométrico. Qual das figuras de I a IV descreve a vista pela esquerda?

(A) Figura I. **(B)** Figura II. **(C)** Figura III. **(D)** Figura IV.

(E) Nenhuma delas.



19. Alternativa D

O tampo do sólido é um paralelogramo (vista de topo) inclinado (vista frontal). Note que na vista frontal todas as arestas do tampo pertencem à mesma linha. Entretanto, na vista lateral pela esquerda, duas arestas paralelas, inclinadas, são visíveis. O único desenho com essas características é o (IV).

20. Na tabela 3 × 3 foram escritos números reais tais que a soma em cada linha, cada coluna e cada diagonal é a mesma. Dois desses números são mostrados na figura. Qual é o número escrito na casa com a letra *a*?

a		
		47
	63	

(A) 16 **(B)** 51 **(C)** 54 **(D)** 55 **(E)** 110

20. Alternativa D

a	y	$x+16$
$y+16$		47
x	63	

Podemos utilizar 6 variáveis e montar o sistema para determinar o valor de *a*. Em vez disso, vamos preencher as casas usando o mínimo de variáveis. Escrevendo *x* no canto inferior esquerdo, no canto superior direito teremos *x* + 16, pois *x* + 63 = *x* + 16 +47; escrevendo *y* na casa vazia da primeira linha, teremos *y* + 16 na casa vazia da primeira coluna, pelo mesmo motivo. A partir da casa com *x*, podemos escrever no canto inferior direito $a+y+16-63=a+y-47$ e tomando como base a casa com *y* + 16 podemos escrever no centro *a* + *x* – 47.
A partir da casa *a* podemos escrever
$a+x-47+a+y-47=y+x+16 \Leftrightarrow 2a=110 \Leftrightarrow a=55$.

a	y	$x+16$
$y+16$	$a+x-47$	47
x	63	$a+y-47$

21. Dois corredores *A* e *B* correm ao redor de um estádio, mantendo sempre suas velocidades. O corredor *A* é mais rápido, levando apenas 3 minutos por volta. Os dois partiram juntos do mesmo lugar e 8 minutos depois, *A* alcançou *B* pela primeira vez. Quanto tempo leva o corredor *B* para dar uma volta completa?

(A) 6 min **(B)** 8 min **(C)** 4 min 30 s **(D)** 4 min 48 s **(E)** 4 min 20 s

21. Alternativa D

Em 8 minutos o corredor *A* percorre $\dfrac{8\,\text{min}}{3\,\text{min/ volta}}=2\dfrac{2}{3}\ \text{voltas}$. Nesse tempo o corredor *B* já tinha dado mais de uma volta, pois do contrário o corredor *A* o teria alcançado antes. Não tinha dado mais de 2 voltas, porque aí teria a mesma velocidade de *A*. Logo, passados 8 minutos, completava $1\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ voltas.
Portanto, o tempo para *B* dar uma volta é $8\,\text{min}\div\dfrac{5}{3}=4{,}8\,\text{min}=4\,\text{min}\ 48\ \text{s}$.

22. Seja Z a quantidade de números de 8 algarismos distintos e não nulos. Quantos números de 8 algarismos distintos e não nulos são divisíveis por 9?

(A) $\dfrac{Z}{8}$ **(B)** $\dfrac{Z}{3}$ **(C)** $\dfrac{Z}{9}$ **(D)** $\dfrac{8Z}{9}$ **(E)** $\dfrac{7Z}{8}$

22. Alternativa C

A quantidade de números de 8 algarismos não nulos e distintos é Z = 9!
A soma de todos os algarismos de 1 a 9 é igual a 45. Se quisermos formar números de 8 algarismos escolhidos entre eles, de modo que o número seja divisível por 9, não devemos escolher o 9, pois nesse caso a soma dos demais algarismos é 45 – 9 = 36, número divisível por 9. A quantidade de números nessas condições é 8!
Como 9! = 9.8!, concluímos que a quantidade de números divisíveis por 9, de 8 algarismos distintos não nulos é $\dfrac{Z}{9}$.

23. Considere os números de dez algarismos, sendo eles 1, 2 ou 3, de modo que dois algarismos vizinhos diferem de 1. Quantos números assim formados existem?

(A) 16 **(B)** 32 **(C)** 64 **(D)** 80 **(E)** 100

23. Alternativa C

Podemos começar a escrever o número a partir da esquerda.
Começando com 1, o próximo algarismo só pode ser o 2; em seguida, podemos escrever 1 ou 3; o próximo, somente o 2; novamente, 1 ou 3; em seguida, somente o 2; novamente 1 ou 3; em seguida, somente o 2; mais uma vez, 1 ou 3; o último algarismo (o das unidades), somente o 2. Pelo princípio multiplicativo da contagem, podemos escrever $1\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1=16$ números diferentes. Começando com 3, ocorre o mesmo. Teremos, novamente, mais 16 números diferentes.
Se começarmos com o 2, o próximo é 1 ou 3; em seguida, 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3 e, finalmente, 1 ou 3, como algarismos das unidades. Pelo mesmo princípio, teremos $1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2=32$ números diferentes. Portanto, no total teremos 16 + 16 + 32 = 64 números assim formados.

24. Para quantos inteiros $n\geq3$ existe um n-ágono convexo cujos ângulos encontram-se na razão $1:2:3:\ldots:n$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** Mais de 5.

24. Alternativa B

Sejam $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ os ângulos internos de modo que estejam na razão $1:2:3:\ldots:n$. Temos $\frac{\alpha_1}{1}=\frac{\alpha_2}{2}=\cdots=\frac{\alpha_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}i}=\frac{(n-2)180^{\circ}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{(n-2)360^{\circ}}{n(n+1)}$. O maior dos ângulos internos deve ser menor do que 180°, pois o polígono é convexo, logo $\alpha_n=\frac{n(n-2)360^{\circ}}{n(n+1)}<180^{\circ}\Leftrightarrow 2n-4<n+1\Leftrightarrow n<5$.

Como $n\geq3$, concluímos que n = 3 ou n = 4.

25. Participaram de uma olimpíada de Matemática 55 crianças. Na correção das provas, as questões foram marcadas com + (a questão foi resolvida corretamente) ou – (a questão resolvida erradamente) ou com 0 (a questão foi deixada em branco). Após a correção, verificou-se que não havia duas provas com o mesmo número de + e –. Pelo menos quantas questões havia na prova da olimpíada?

(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

25. Alternativa B

Com uma única questão, há 3 respostas possíveis, que vamos representar da seguinte maneira: $1^0 0^+ 0^-, 0^0 1^+ 0^-$ ou $0^0 0^+ 1^-$, respectivamente, não respondeu, acertou 1 ou errou 1.

Com duas questões, temos as 6 possibilidades:

$2^0 0^+ 0^-$

$1^0 1^+ 0^-$ ou $1^0 0^+ 1^-$

$0^0 2^+ 0^-$ ou $0^0 1^+ 1^-$ ou $0^0 0^+ 2^-$

Com três questões, temos as 10 possibilidades:

$3^0 0^+ 0^-$

$2^0 1^+ 0^-$ ou $2^0 0^+ 1^-$

$1^0 2^+ 0^-$ ou $1^0 1^+ 1^-$ ou $1^0 0^+ 2^-$

$0^0 3^+ 0^-$ ou $0^0 2^+ 1^-$ ou $0^0 1^+ 2^-$ ou $0^0 0^+ 3^-$

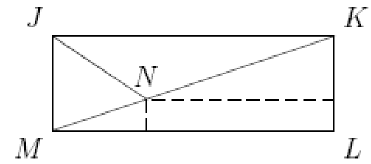
Com n questões, temos então $1+2+\ldots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ respostas diferentes possíveis. Como o número de crianças é 55, devemos ter

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 55 \Leftrightarrow n^2+3n-108 \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{-3-\sqrt{441}}{2} \text{ ou } n \geq \frac{-3+\sqrt{441}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \leq -12 \text{ ou } n \geq 9$$

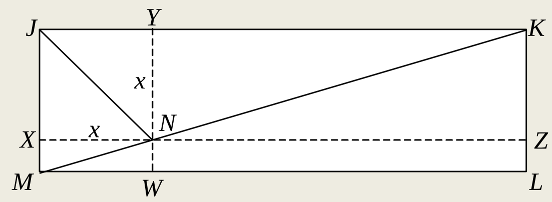
Logo, havia pelo menos 9 questões na prova.

26. Em um retângulo *JKLM*, a bissetriz do ângulo $K\hat{J}M$ corta a diagonal $\overline{KM}$ no ponto *N*. As distâncias entre *N* e os lados $\overline{LM}$ e $\overline{KL}$ são, respectivamente, 1 e 8. Portanto, *LM* é igual a



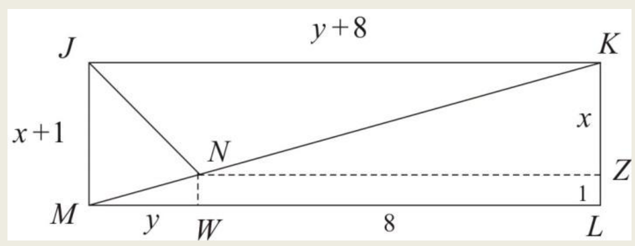
(A) $8+2\sqrt{2}$ **(B)** $11-\sqrt{2}$ **(C)** 10 **(D)** $8+3\sqrt{2}$ **(E)** $11+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

26. Alternativa A



1ª Solução:
Projete o ponto *N* nos lados *JM* e *JK*. Como *JN* é bissetriz então *NX* = *NY* = *x*. Como as áreas de *KYN* e *NZK* são iguais, bem como as áreas de *MNX* e *NMW* e as áreas de *JKM* e *LMK*, então área *JYNX* = área *JKM* – área *KYN* – área *MNX* = área *LMK* – área *NZK* – área *NMW* = área *NZLW*, de modo que $x^2 = 1\cdot 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$. Portanto *LM* = $x+8 = 8+2\sqrt{2}$.

2ª solução:



Do teorema das bissetrizes no triângulo *JKM* e do teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos de hipotenusas *MN* e *NK*, temos: $\dfrac{JM}{JK} = \dfrac{MN}{NK} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{y+8} = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+8^2}}$ [1]. Da semelhança dos triângulos retângulos *NKZ* e *MKL*, temos $\dfrac{x}{8} = \dfrac{x+1}{y+8} \Leftrightarrow y = \dfrac{8}{x}(x+1) - 8 = \dfrac{8}{x}$ [2]. Substituindo [2] em [1] temos:

$$\frac{x+1}{\frac{8}{x}(x+1)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{8}{x}\right)^2+1}{x^2+64}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} = \frac{64+x^2}{x^2\left(x^2+64\right)} \Leftrightarrow x^4 = 64 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

.Temos $LM = 8 + x = 8+2\sqrt{2}$.

27. Quantos valores distintos existem para *k*, se $k = \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b}$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6

27. Alternativa B

Se $a+b+c \neq 0$, então $k = \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b} = \dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \dfrac{1}{2}$;

se $a+b+c=0$ então $b+c=-a,\ c+a=-b$ e $a+b=-c$ e estando definidas as frações, temos

$$k = \frac{a}{b+c} = \frac{a}{-a} = \frac{b}{a+c} = \frac{b}{-b} = \frac{c}{a+b} = \frac{c}{-c} = -1$$

Logo, *k* tem 2 valores.

28. Os números 1; 2; 3; . . . ; 99 estão distribuídos em *n* grupos sob as condições:
I. Cada número está exatamente em um grupo.
II. Há pelo menos dois números em cada grupo.
III. Se dois números estão em um mesmo grupo, então sua soma não é divisível por 3.
O menor número *n* com essa propriedade é:

(A) 3 **(B)** 9 **(C)** 33 **(D)** 34 **(E)** 66

28. Alternativa C

Como dois números no mesmo grupo não podem ter como soma um número múltiplo de 3, os 33 números 3, 6, 9, …, 99, todos múltiplos de 3, não podem estar no mesmo grupo. Portanto, há pelo menos 33 grupos. Lembrando que cada grupo possui pelo menos dois números, podemos apresentar uma maneira de distribuir os números em 33 grupos: {2,3}, {5,6}, {8,9}, ... , {92,93}, {95, 96, 98} e {1, 4, 7, ... , 97, 99} (neste último grupo, o número 99 está acompanhado de todos os números da forma 3*k* + 1). Portanto, o menor *n* é 33.

29. Samanta e suas três irmãs reservaram um camarote com quatro lugares no teatro. Samanta e duas irmãs chegam mais cedo e sentam-se aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que Samanta tenha que sair do seu assento quando sua irmã mais nova chegar e insistir que quer o assento que lhe estava reservado e o mesmo façam as outras irmãs que se veem obrigadas a se levantar?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

29. Alternativa B

Há 4! = 24 maneiras de as três irmãs se sentarem nos quatro lugares (permutamos as três irmãs e o lugar vazio). Para facilitar, vamos representar por *A*, *B* e *N* as três irmãs de Samanta, sendo *N* a mais nova, e Samanta, por *S*. Das 24 situações, Samanta deve se levantar nas seguintes:
I) Samanta se senta no lugar de *N*. As outras duas irmãs e o lugar vazio podem se permutar de 3! = 6 maneiras.
II) Uma das irmãs *A* ou *B* se senta no lugar de *N* e Samanta se senta no lugar dela. Há duas maneiras de escolher a irmã que se senta no lugar de *N*. O lugar de Samanta está determinado, pois senta-se no lugar da irmã que está sentada no lugar de *N*. A outra irmã e o lugar vazio podem ser permutadas de 2! maneiras. Portanto, esta situação pode ocorrer de $2\times 2! = 4$ maneiras.
III) Uma das irmãs *A* ou *B* se senta no lugar de *N*, a outra delas se senta no lugar daquela e Samanta se senta no lugar desta (por exemplo, *A* se senta no lugar de *N*, *B* se senta no lugar de *A* e *S* se senta no lugar de *B*). Nesse caso, basta escolher quem se senta no lugar de *N*; os demais lugares estão determinados. Logo, esta situação ocorre de 2 maneiras.
Assim, a probabilidade de Samanta ter que se levantar do lugar que não lhe era reservado é $\frac{6+4+2}{24}=\frac{1}{2}$.

30. Uma sequência de inteiros é definida por $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ para $n \geq 0$. Qual é o resto da divisão euclidiana de a_{2009} por 7?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 6

30. Alternativa B

Os restos na divisão por 7 dos primeiros termos na sequência são 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1, 1, 2, 5, … Como cada termo da sequência depende somente dos dois anteriores, os restos se repetem em ciclos 1, 2, 5, 6, 6, 0, 6, 1, 0, 1, que tem tamanho 10. Assim, o resto da divisão de a_{2009} por 7 é igual ao resto da divisão de a_9 por 7, que é 1.

Observação: o uso da congruência módulo 7 pode facilitar os cálculos, pois

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$$
$$a_2 = a_0 + (a_1)^2 = 1 + 4 = 5$$
$$a_3 = a_1 + (a_2)^2 = 2 + 25 = 27;\ 27 \equiv 6(m\acute{o}d\,7)$$
$$a_4 = a_2 + (a_3)^2 = 5 + 729 = 734;\ 734 \equiv 6(m\acute{o}d\,7)$$
$$a_5 = a_3 + (a_4)^2 = 27 + 538756 = 538783; 538783 \equiv 0(m\acute{o}d\,7)$$

Os cálculos são trabalhosos, mas podemos usar as propriedades da congruência para facilitá-los. Assim, na última linha, em vez de calcular o resto da divisão de 538 783 por 7, bastaria ter feito:

$$a_3 \equiv 6(m\acute{o}d\,7)$$
$$a_4 \equiv 6(m\acute{o}d\,7)$$
$$a_5 = a_3 + (a_4)^2 \equiv 6 + 6^2 \equiv 0(m\acute{o}d\,7)$$

Em seguida, $a_6 = a_4 + (a_5)^2 \equiv 6 + 0^2 \equiv 6(m\acute{o}d\,7)$, etc.