Exercícios de Matemática
Funções – Função Bijetora

1. (Ufpe) Sejam A e B conjuntos com m e n elementos respectivamente. Analise as seguintes afirmativas:
( ) Se $f:A\longrightarrow B$ é uma função injetora então $m\leq n$.
( ) Se $f:A\longrightarrow B$ é uma função sobrejetora então $m\geq n$.
( ) Se $f:A\longrightarrow B$ é uma função bijetora então m=n.
( ) Se $f:A\longrightarrow B$ é uma função bijetora então o gráfico de f é um subconjunto de $A\times B$ com $m\times n$ elementos.
( ) Se m=n o número de funções bijetoras $f:A\longrightarrow B$ é m!

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES.
(Ufpe) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a letra (V) se a afirmativa for verdadeira ou (F) se for falsa.

2. Sejam as funções $f:IR\longrightarrow IR$ e $g:(0,+\infty)\longrightarrow |R$ dadas respectivamente por $f(x)=5^x$ e $g(x)=\log_5 x$. Analise as afirmativas a seguir:
( ) $f(x) > 0 \quad \forall x \in |R$.
( ) g é sobrejetora.
( ) $g(f(x)) = x \ \forall x \in |R$.
( ) $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 5$
( ) Se a e b são reais e a < b, então f(a) < f(b).

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO
(Ufba) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos.

3. Considerando-se as funções

$f(x) = x - 4$,
$g(x) = x^2 - 5x + 6$,

é verdade:

(01) Todos os zeros de g(x) estão contidos no domínio de $h(x)=\log(x^2-4)$.
(02) A sentença que define (fog)(x) é x^2-5x+2.
(04) g(x) é crescente, para todo $x \in [3, +\infty[$.
(08) O gráfico de f(x) intercepta os eixos coordenados no ponto (0, 0).
(16) (gof)(x) é função bijetora em R.
(32) Os gráficos de f(x) e g(x) se interceptam nos pontos (0,-4), (1,2).
(64) O conjunto imagem da função $t(x)= 2^a$, sendo a=f(x) é R^*_+.

Soma ( )

4. (Ita) Considere os conjuntos S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0,1} e as afirmações:

I - $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
II - $\{2\} \subset (S - U)$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III - Existe uma função $f: S \longrightarrow T$ injetiva.
IV - Nenhuma função $g: T \longrightarrow S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)
a) apenas I.
b) apenas IV.
c) apenas I e IV.
d) apenas II e III.
e) apenas III e IV.

5. (Unicamp) Sejam N o conjunto dos números naturais e $f:N\longrightarrow N$ uma função que satisfaz as propriedades:
a) dado qualquer $m\in N$ existe $n\in N$ tal que $f(n)\geq m$.
b) $A_i\{s \in N;\ s \leq f(x)\}$ está contido no conjunto imagem de f, para todo $i\in N$.
Mostre que f é sobrejetora.

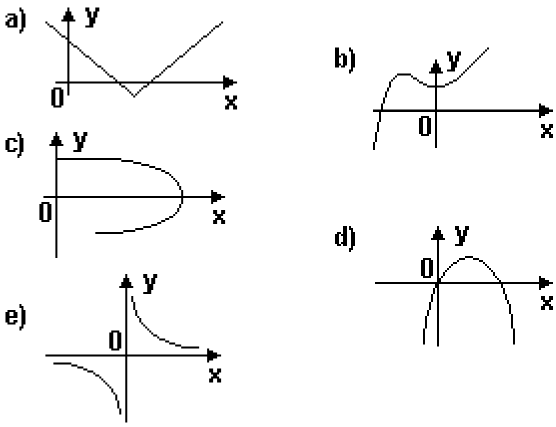
6. (Ita) Seja $f: IR \longrightarrow IR$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3x + 3, & x\leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x>0 \end{cases}$$

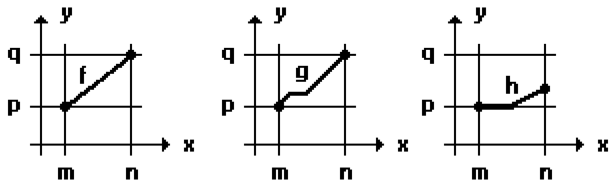
Então:
a) f é bijetora e (f o f)(-2/3) = $f^{-1}(21)$.
b) f é bijetora e (f o f)(-2/3) = $f^{-1}(99)$.
c) f é sobrejetora mas não é injetora.
d) f é injetora mas não é sobrejetora.
e) f é bijetora e (f o f)(-2/3) = $f^{-1}(3)$.

7. (Ufpe) Seja A um conjunto com 3 elementos e B um conjunto com 5 elementos. Quantas funções injetoras de A em B existem?

8. (Ufpe) Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora y=f(x)?



9. (Uff) Considere as funções f, g e h, todas definidas em [m, n] com imagens em [p, q] representadas através dos gráficos a seguir:



Pode-se afirmar que:
a) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
b) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
c) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
d) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.
e) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

10. (Ita) Seja f: IR⟶IR a função definida por $f(x) = -3a^x$,
onde a é um número real, $0 < a < 1$.

Sobre as afirmações:
(I) $f(x+y) = f(x)\, f(y)$, para todo x, y, $\in$ IR.
(II) f é bijetora.
(III) f é crescente e f ( ] 0, + ∞ [ ) =] -3,0 [.

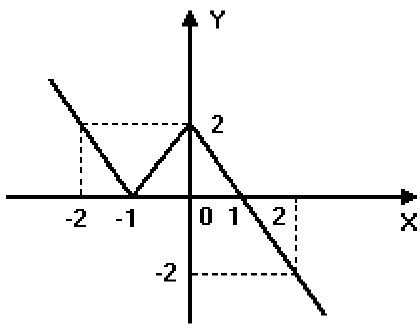
Podemos concluir que:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Todas as afirmações são verdadeiras.
c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

11. (Mackenzie) Analisando graficamente as funções (I), (II), (III) e (IV) a seguir.

I) $f(x) = x + (2|x|)/x$ de IR* em IR
II) $g(x) = 3x - x^3$ de $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ em [-2, 2]
Obs.: g (-1) é mínimo
III) $h(x) = (1/3)^x$ de IR em IR^*_+
IV) t(x) = 3, de IR em {3}

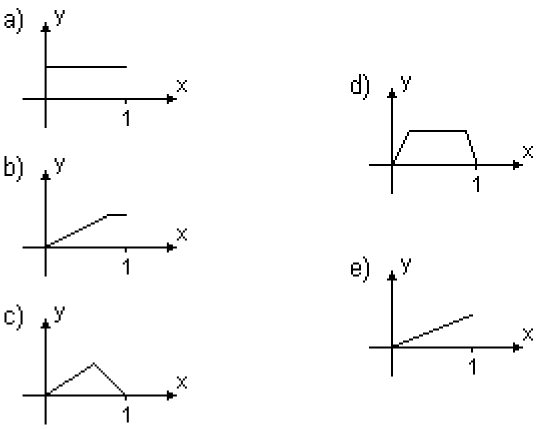
O número de funções sobrejetoras é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

12. (Puccamp) Seja f a função de IR em IR, dada pelo gráfico a seguir



É correto afirmar que
a) f é sobrejetora e não injetora.
b) f é bijetora.
c) f(x) = f(-x) para todo x real.
d) f(x) > 0 para todo x real.
e) o conjunto imagem de f é] - ∞; 2].

13. (Unifesp) Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de x correspondem valores distintos de y". Tais funções são chamadas injetoras.
Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?



14. (Ufrn) Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E.
Se f: E⟶P é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então
a) f não pode ser uma função bijetora.
b) f não pode ser uma função injetora.
c) f é uma função sobrejetora.
d) f é necessariamente uma função injetora.

15. (Ufc) Sejam a, b, c e d números reais com $a \neq b$ e $c \neq d$. Suponha que $f:[a,b] \longrightarrow [c,d]$ é uma função estritamente crescente (isto é, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$) e sobrejetiva. Então podemos afirmar corretamente que:

a) f[(a+b)/2] = (c + d)/2

b) f(a) = c e f(b) = d

c) f(a) + f(b) ∈ [c, d]

d) f(b) - f(a) ∈ [c, d]

e) | f(a) | < | f(b) |

16. (Ita) Seja D = R - {1} e f : D ⟶ D uma função dada por
f(x) = (x + 1)/(x - 1).
Considere as afirmações:

I - f é injetiva e sobrejetiva.
II - f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III - f(x) + f(1/x) = 0, para todo x ∈ D, x ≠ 0.
IV - f(x) . f(-x) = 1, para todo x ∈ D.

Então, são verdadeiras
a) apenas I e III.
b) apenas I e IV.
c) apenas II e III.
d) apenas I, III e IV.
e) apenas II, III e IV.

17. (Uem) Considere as funções reais f e g definidas por f(x) = x+2 e $g(x)=x^2$, para todo x real. Nessas condições, assinale o que for correto.
01) As funções f e g são sobrejetoras.
02) Os domínios de (f . g)(x) e f(x)/g(x) diferem por um único número real.
04) $f^2(x) = (f \circ f)(x) = x^2 + 4x + 4$.
08) Os gráficos de f e de g se interceptam no ponto P(2,4).
16) As funções f e g são injetoras no intervalo [0,∞).
32) O único valor de x para o qual a função F(x) = (g o f)(x) se anula é zero.
64) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$ e $(g \circ f)(x) = x^2 + 4x + 4$.

18. (Ufsc) Assinale a soma dos números associados à(s) proposição(ões) CORRETA(S).

(01) A representação dos pontos do plano através de pares ordenados de números reais (x, y) deve estar sempre referenciada a um sistema de eixos ortogonais.

(02) Um subconjunto A dos números reais será denominado intervalo quando a implicação "($a, b \in A$ e $a < x < b$) $\longrightarrow$ ($x \in A$)" for verdadeira.

(04) É possível obter uma bijeção entre o conjunto N dos números naturais e o conjunto Z dos números inteiros.

(08) É possível obter uma bijeção entre o conjunto N dos números naturais e o conjunto Q_+ dos números racionais positivos.

(16) Se $a < b$ são dois números racionais existem sempre x racional e y irracional com $a < x < b$ e $a < y < b$.

GABARITO

1. V V V F V

2. V V V V V

3. 02 + 04 + 64 = 70

4. [B]

5. A função f:IN⟶IN é sobrejetora se, e somente se, Im(f)=IN.

Seja y ∈ IN.

Pelo item a), dado y ∈ IN, Existe i ∈ IN / f(i)≥y.

Pelo item b), y ∈ A_i = {y ∈ IN; y≤f(i)} e A_i ⊂ Im(f), assim se y ∈ A_i ⊂ Im(f) então y ∈ Im(f).

Portanto, ∀ y ∈ IN, Existe x ∈ IN / y = f(x), ou seja Im(f) = IN.

6. [B]

7. 60

8. [E]

9. [A]

10. [E]

11. [D]

12. [A]

13. [E]

14. [C]

15. [B]

16. [A]

17. itens corretos: 02, 08, 16 e 64
itens incorretos: 01, 04 e 32

18. proposições corretas: 02, 04, 08 e 16
proposições incorretas: 01