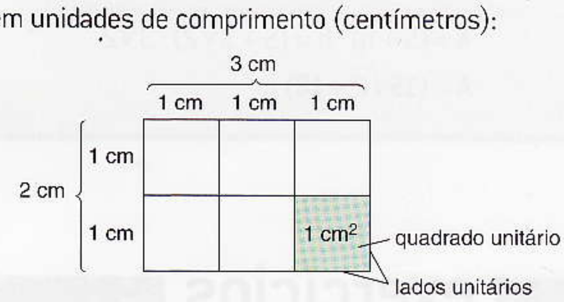
22 ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

Toda superfície plana ocupa uma extensão do plano. Determinar a área de uma superfície significa medir tal extensão.

Para isso, como para toda medição que se faz, é necessário definir uma unidade; no caso, vamos estabelecer um quadrado unitário, ou seja, um quadrado de lado 1, o qual possui, igualmente, área 1.

Área do retângulo

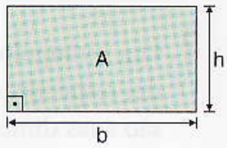
Se tivermos, por exemplo, um retângulo de dimensões 2 cm e 3 cm, para determinar a área ocupada pela sua superfície, poderemos decompor cada dimensão em unidades de comprimento (centímetros):



Como em cada uma das duas fileiras horizontais há três quadrados unitários, a área do retângulo mede $2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.

Na prática, mesmo nos casos em que as medidas de comprimento não são números inteiros, para obter a área A de um retângulo simplesmente multiplicamos as suas dimensões b e h:

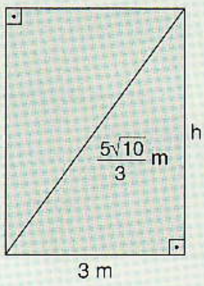
$$\boxed{A = b \cdot h}$$



A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

exemplo 1

A diagonal e a base de um retângulo medem $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ m e 3 m, respectivamente.



Para determinar a área desse retângulo, obtemos inicialmente sua altura:

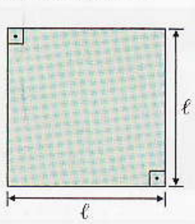
$$\left(\frac{5\sqrt{10}}{3}\right)^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{13}{3} \text{ m}$$

Daí, a área mede:

$$A = b \cdot h = 3 \cdot \frac{13}{3} = 13 \text{ m}^2$$

Área do quadrado

Um quadrado de lado ℓ nada mais é do que um retângulo de base ℓ e altura ℓ.



Na determinação de sua área vale a fórmula usada para a área do retângulo ($A = \ell \cdot \ell$), ou seja:

$$\boxed{A = \ell^2}$$

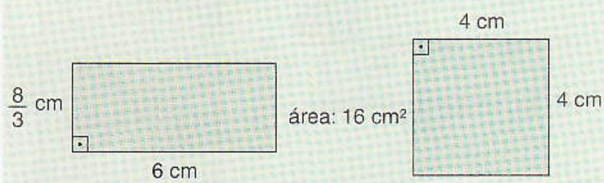
A área do quadrado é igual ao quadrado da medida do lado.

exemplo 2

Um quadrado ocupa a mesma extensão do plano que um retângulo de base 6 cm e altura $\frac{8}{3}$ cm.

Para determinar o lado do quadrado, podemos igualar as áreas:

$$6 \cdot \frac{8}{3} = \ell^2, \text{ onde } \ell = 4 \text{ cm}$$

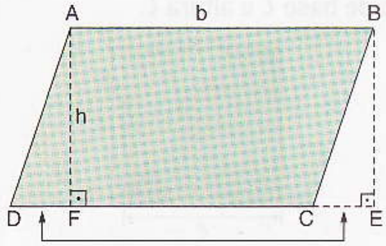


observação

Duas figuras planas — como as do exemplo acima — que possuem a mesma área são ditas figuras equivalentes.

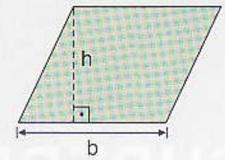
Área do paralelogramo

O paralelogramo ABCD da figura abaixo é equivalente ao retângulo ABEF, pois $\triangle ADF \equiv \triangle BCE$.



Assim, a área do paralelogramo é obtida da mesma maneira que a área do retângulo:

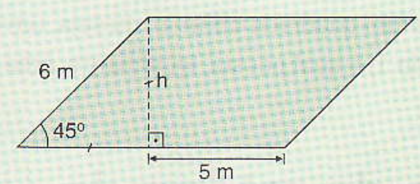
$$\boxed{A = b \cdot h}$$



A área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

exemplo 3

Para determinar a área do paralelogramo abaixo fazemos:



$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

Como o triângulo é isósceles e $A_{par} = b \cdot h$, vem:

$$A = (5 + h) \cdot h = (5 + 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2}$$
$$A = (15\sqrt{2} + 18) \text{ m}^2$$

exercícios

1. Determine a área de:

a) um retângulo de diagonal $5\sqrt{2}$ cm e altura $3\sqrt{2}$ cm.

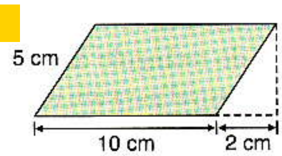
b) um quadrado de perímetro igual a 10 cm.

c) um paralelogramo de base $12\sqrt{2}$ cm e altura 5 cm.

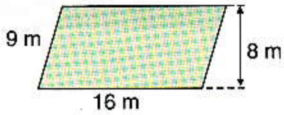
2. Um retângulo possui perímetro e área medindo, respectivamente, $16\sqrt{5}$ cm e 55 cm². Quais são suas dimensões?

3. Determine a área de cada um dos paralelogramos:

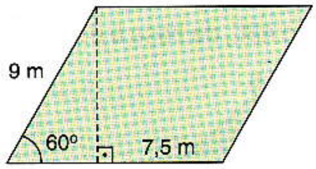
a)



b)



c)



4. Determine a área de um quadrado de:

a) lado 4x;

b) perímetro 4x;

c) diagonal 4x.

5. Determine a área do quadrado inscrito:

a) em um círculo de raio 2 cm;

b) em um semicírculo de raio 2 cm.

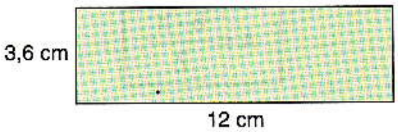
6. (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?

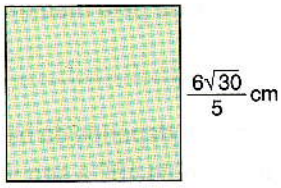
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

7. Pesquise a existência de figuras equivalentes entre as mostradas a seguir:

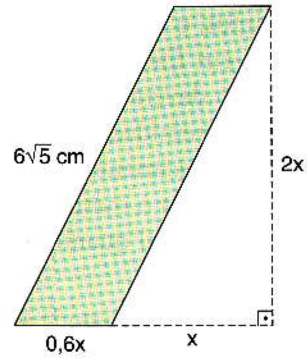
a) retângulo



b) quadrado



c) paralelogramo

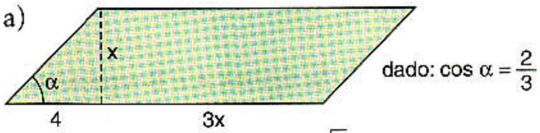


8. Um paralelogramo de lados medindo 8 cm e 6 cm é equivalente a um retângulo de dimensões 6 cm e $6,\overline{6}$ cm. Determine o seno do ângulo obtuso α formado entre os lados do paralelogramo.

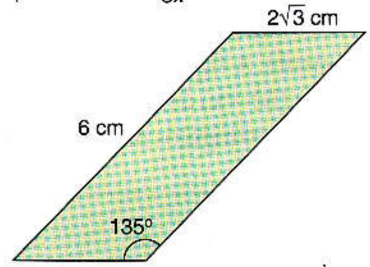
9. Uma placa retangular de vidro, de dimensões 3 dm e 5 dm, deve cobrir uma gravura de modo que, em torno dela, reste uma faixa uniforme de 5 cm de largura. Monte, com esses dados, uma matriz cujo determinante forneça, em dm^2, a área da faixa.

10. Determine a área de cada um dos paralelogramos abaixo:

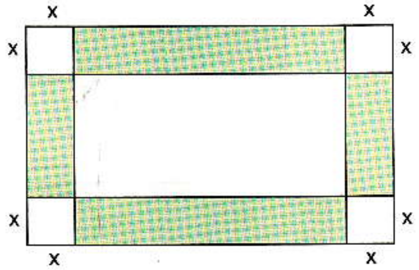
a)



b)



11. (UF-SC) Tem-se uma folha de cartolina com forma retangular, cujos lados medem 56 cm e 32 cm e deseja-se cortar as quinas, conforme a ilustração abaixo.



Quanto deve medir x, em centímetros, para que a área da região colorida seja a maior possível?

12. (U. F. Pelotas-RS) Numa área reservada para o plantio de eucaliptos, o espaçamento das mudas — dispostas em fileiras — deve ser de 2,5 m e a plantação deverá iniciar a uma distância de 1 m das extremidades do terreno.
Baseado em seus conhecimentos e considerando que as fileiras tenham o mesmo número de mudas tanto na horizontal quanto na vertical, determine:

a) a quantidade máxima que pode ser plantada num terreno retangular, cujas medidas são $x + 3$ e $x + 5$ e cuja área é igual a 899 m^2.
b) a menor área e o menor perímetro do terreno para que haja o plantio de 289 mudas de eucalipto.

13. (Unicamp-SP) Supondo que a área média ocupada por uma pessoa em um comício seja de 2 500 cm^2, pergunta-se:

a) Quantas pessoas poderão se reunir em uma praça retangular que mede 150 metros de comprimento por 50 metros de largura?
b) Se $\frac{3}{56}$ da população de uma cidade lota a praça, qual é, então, a população da cidade?

14. (Unifesp-SP) As figuras *A* e *B* representam dois retângulos de perímetros iguais a 100 cm, porém de áreas diferentes, iguais a 400 cm^2 e 600 cm^2, respectivamente. A figura *C* exibe um retângulo de dimensões $(50 - x)$ cm e x cm, de mesmo perímetro que os retângulos das figuras A e *B*.

figura A

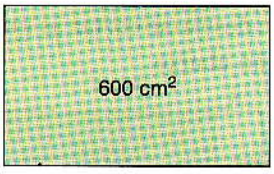


figura B

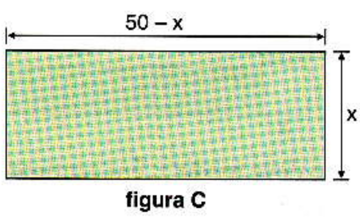


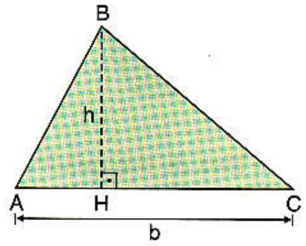
figura C

Determine:

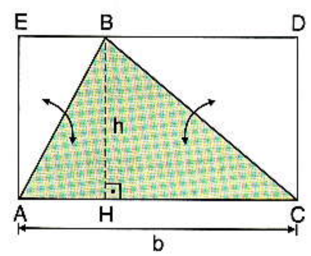
a) a lei, f(x), que expressa a área do retângulo da figura *C* e exiba os valores de *x* que fornecem a área do retângulo da figura *A*;
b) a maior área possível para um retângulo nas condições da figura *C*.

Área do triângulo

Seja o triângulo ABC, de base *b* e altura *h*, abaixo.



Vamos construir, sobre ele, o retângulo ACDE, como na figura.



Observe a congruência entre os triângulos ABE e ABH (caso LAL).

Como o mesmo ocorre entre os triângulos BCD e BCH, a área do triângulo ABC mede a metade da área do retângulo ACDE.

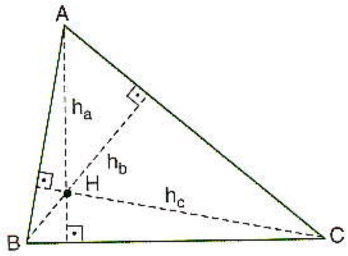
De modo geral, para um triângulo de base *b* e altura *h* — seja ele de que tipo for — podemos escrever:

$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura respectiva.

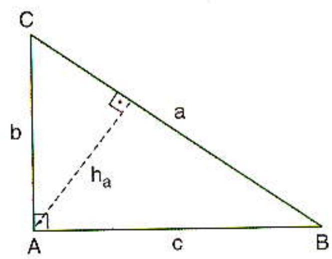
A área de um triângulo independe da base considerada. Assim, para o triângulo ABC a seguir, temos:

$$A = \frac{1}{2} BC \cdot h_a = \frac{1}{2} AB \cdot h_c = \frac{1}{2} AC \cdot h_b$$



Casos particulares

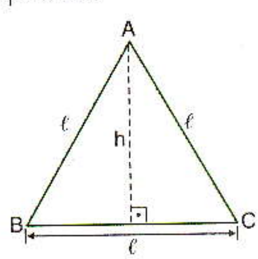
- Triângulo retângulo



Como $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, pela relação métrica $ah_a = bc$, concluímos que a área do triângulo retângulo vale metade do produto dos catetos:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} bc}$$

- Triângulo eqüilátero

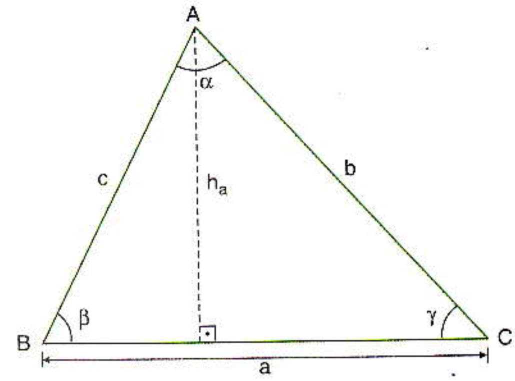


Como a altura do triângulo eqüilátero mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, a área é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

Outras expressões da área de um triângulo

- Em função de dois lados e do ângulo compreendido entre eles



Temos:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad \text{e} \quad \text{sen}\, \beta = \frac{h_a}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a = c \cdot \text{sen}\, \beta$$

Assim: $A = \frac{1}{2} ac\, \text{sen}\, \beta$

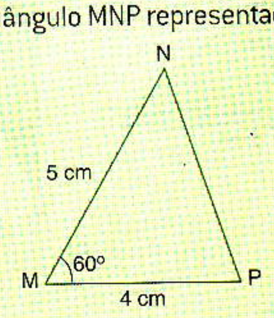
De modo geral:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} ac\, \text{sen}\, \beta = \frac{1}{2} bc\, \text{sen}\, \alpha \\ A = \frac{1}{2} ab\, \text{sen}\, \gamma \end{array}}$$

A área do triângulo vale a metade do produto de dois lados, multiplicada pelo seno do ângulo compreendido entre esses lados.

exemplo 4

Seja o triângulo MNP representado na figura.



Temos:

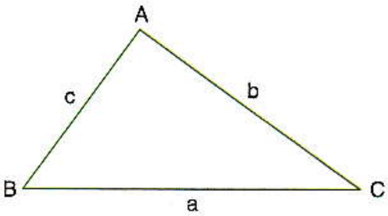
$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{sen}\, 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

- Em função dos três lados — fórmula de Hierão

Considerando o perímetro 2p do triângulo ABC a seguir, temos:

$$2p = a + b + c \quad \text{e} \quad \frac{a+b+c}{2} = p \text{ (semiperímetro)}$$



Demonstra-se, calculando uma das alturas do triângulo, que a área do triângulo ABC é dada por:

$$\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

exemplo 5

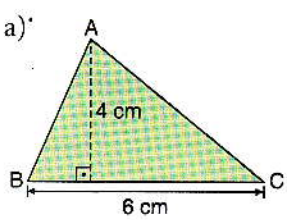
O triângulo de lados de medidas 5 cm, 8 cm e 11 cm tem perímetro $2p = 5 + 8 + 11 = 24$ cm e semiperímetro $p = 12$ cm. Assim, sua área é dada por:

$$A = \sqrt{12 \cdot (12-5) \cdot (12-8) \cdot (12-11)} =$$
$$= \sqrt{12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} \Rightarrow A = 4\sqrt{21} \text{ cm}^2$$

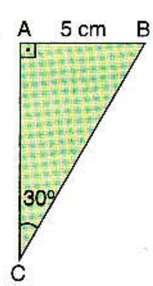
exercícios

15. Determine a área do triângulo ABC de cada caso:

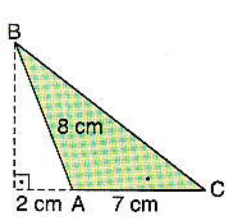
a)



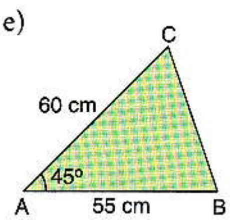
d)



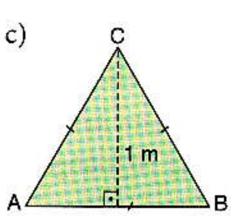
b)



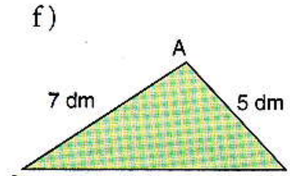
e)



c)



f)



16. Em um triângulo retângulo um dos catetos mede 11 cm e a hipotenusa tem medida excedendo 4 cm a medida do outro cateto. Determine a área do triângulo.

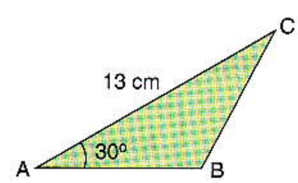
17. Determine a área de um triângulo cujos lados medem:

a) 6 cm, 9 cm e 12 cm
b) 8 m, 8 m e 10 m
c) 4 cm, 4 cm e 4 cm
d) 12 dm, 16 dm e 20 dm

18. Compare as áreas de:

a) um triângulo de lado medindo 10 cm, 12 cm e 16 cm e um quadrado de diagonal com medida $2\sqrt{30}$ cm.
b) um triângulo de lados medindo 10 cm, 14 cm e 16 cm e um retângulo de base com $\frac{17}{2}$ cm e diagonal medindo $\frac{\sqrt{545}}{2}$ cm.

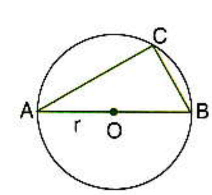
19. A área do $\triangle ABC$ da figura vale 26 cm². Determine a medida do lado $\overline{AB}$.



20. Qual é a medida do ângulo compreendido entre o maior lado e o menor lado do triângulo cujos lados medem 5 cm, 8 cm e 7 cm?

21. (FEI-SP) O lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC é diâmetro de uma circunferência de raio 2 cm; o vértice *C* é ponto dessa circunferência. Nessas condições, determine o maior valor que a área do triângulo ABC pode assumir.

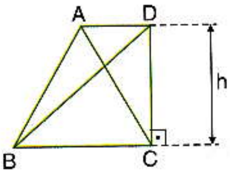
22. (U. F. Viçosa-MG) Seja $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de raio *r*, e seja *C* um ponto pertencente a ela, distinto de *A* e *B*, conforme figura abaixo.



a) Sendo o ângulo $A\hat{B}C = \beta$, determine a área do triângulo ABC, em função de β e *r*.
b) Essa área é máxima para qual valor de β?

23. (UF-PA) A base e a altura de um triângulo medem, respectivamente, $6x$ e $x + 1$, e a base e a altura de um retângulo medem, respectivamente, $2x + 2$ e $x + 2$, com $x \in \mathbb{R}_+^*$. Encontre os valores de x para que a área do triângulo seja maior que a área do retângulo.

24. (U. F. Ouro Preto-MG) O triângulo eqüilátero ABC e o triângulo retângulo BCD têm a mesma altura *h*.

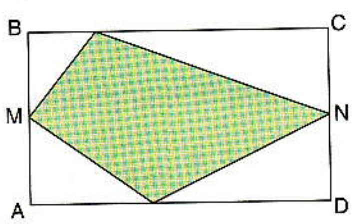


Se a área do triângulo ABC é $4\sqrt{3}$, calcule:

a) a área do triângulo BCD.
b) a área do triângulo ACD.

25. (UF-GO) Dado o triângulo ABC, retângulo em *A*, toma-se um ponto *D* sobre o lado $\overline{BC}$. Sabendo-se que $\overline{AB}$ mede 1 cm e o ângulo oposto a esse lado mede 30°, determine a medida do segmento $\overline{BD}$, de modo que a área do triângulo ABC seja o triplo da área do triângulo ABD.

26. (UF-MS) Na figura abaixo, o retângulo ABCD tem área igual a 20 m^2.

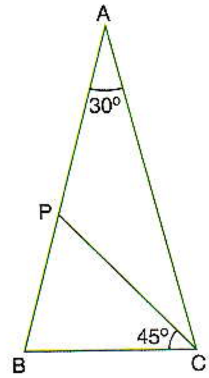


Se *M* e *N* são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, então a área da região colorida é igual a x m^2. Qual é o valor de x?

27. (UF-SC) Considere um triângulo eqüilátero cujo lado mede 12 cm de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em cm^2) do quadrado.

28. (U. F. Juiz de Fora-MG) Um triângulo isósceles tem perímetro de 32 cm e o cosseno de um dos ângulos congruentes é $\frac{3}{5}$. Calcule a área do triângulo.

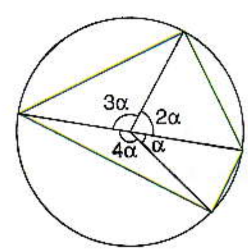
29. (UF-MG) Na figura abaixo, os comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são iguais. O comprimento do segmento $\overline{BC}$ é 1.



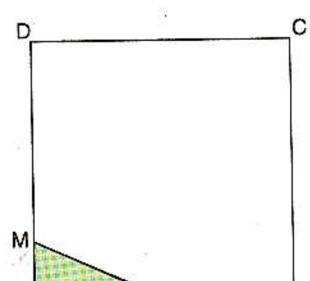
Considerando essas informações, calcule:

a) o comprimento do segmento $\overline{CP}$;
b) a área do triângulo ACP.

30. (Fuvest-SP, adaptado) Calcule a área do quadrilátero inscrito numa circunferência de raio unitário, como indicado na figura.



31. (U. F. Ouro Preto-MG) Dado um quadrado ABCD, cujo lado mede 20 cm, marcam-se os pontos *M* em $\overline{AD}$ e *P* em $\overline{AB}$, tais que PB = 2AM.

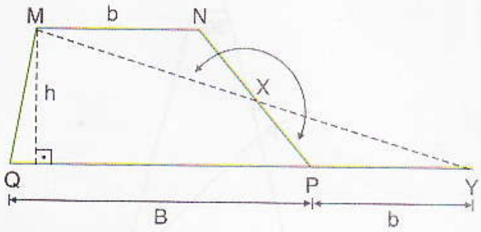


Calcule a distância AM para que a área do triângulo AMP seja máxima.

Área do trapézio

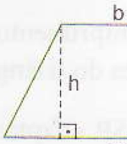
Seja o trapézio MNPQ da figura, de bases *B* e *b* e altura *h*.

Prolongando-se a base maior de um segmento de medida *b* (medida da base menor), notamos que os triângulos formados, MNX e YPX, são congruentes (caso ALA_0).



Assim, a área do trapézio pode ser dada como a área do triângulo MQY:

$$\boxed{A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$



A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das bases pela altura.

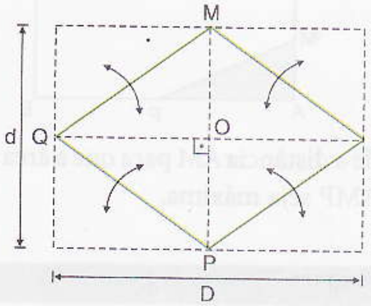
exemplo 6

A área de um trapézio de bases 6 dm e 3 dm e altura 2 dm é dada por:

$$A = \frac{6 + 3}{2} \cdot 2 \Rightarrow A = 9 \text{ dm}^2$$

Área do losango

Seja o losango MNPQ da figura, de diagonais *D* e *d*.



Construído o retângulo de dimensões *D* e *d*, notamos que, sendo congruentes os oito triângulos retângulos formados, a extensão ocupada pelo losango vale a metade da ocupada pelo retângulo. Assim:

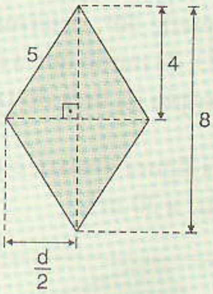
$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

A área do losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.

exemplo 7

Um losango de lado $\ell = 5$ cm e diagonal D = 8 cm possui a diagonal *d* dada pelo teorema de Pitágoras:

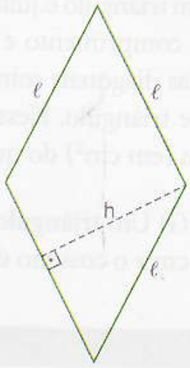
$$5^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow \frac{d}{2} = 3 \Rightarrow d = 6 \text{ cm}$$



Assim, a área do losango vale:

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A = 24 \text{ cm}^2$$

Também pode ser encontrada, se necessário, a área de um losango considerando-o como um paralelogramo:

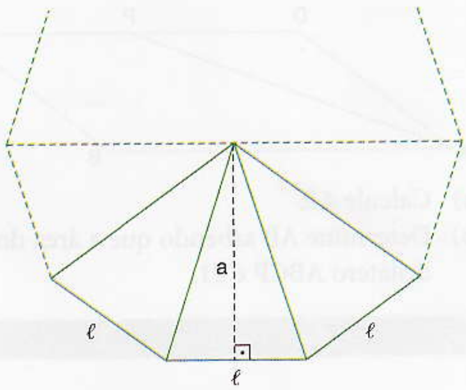


$A = \ell \cdot h$

Área do polígono regular

Apótema de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um lado.

Todo polígono regular de n lados de medida ℓ pode ser decomposto em n triângulos de base ℓ e altura a, sendo a o apótema do polígono.



A área do polígono é dada por:

$$A = n \cdot A_{\triangle} = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \underbrace{n\ell}_{\text{perímetro}} \cdot \frac{a}{2} = 2p \cdot \frac{a}{2} = \underbrace{p}_{\text{semiperímetro}} \cdot a$$

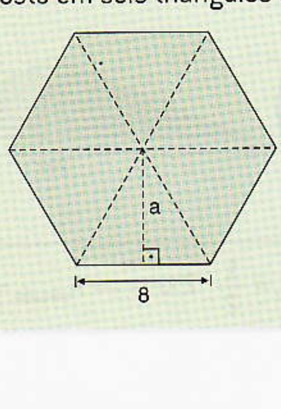
Em geral:

$$\boxed{A = p \cdot a}$$

A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

exemplo 8

Na determinação da área de um hexágono regular de lado 8 cm, devemos notar que ele pode ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros.



O apótema do hexágono é a própria altura de cada triângulo:

$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

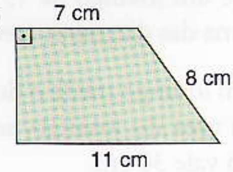
Assim:

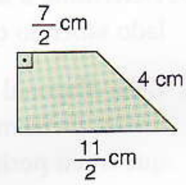
$$A = p \cdot a = \frac{6\ell}{2} \cdot a = 3 \cdot \ell \cdot a = 3 \cdot 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

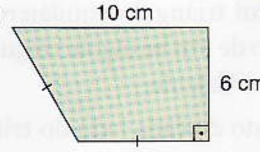
$$A = 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

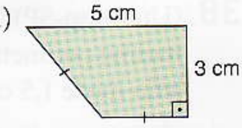
exercícios

32. Determine a área de cada trapézio retângulo:

a) 

c) 

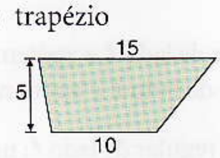
b) 

d) 

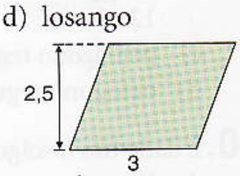
A seguir, compare as respostas de a e c, bem como de b e d.

33. Considere em centímetros as medidas indicadas e determine a área de cada polígono:

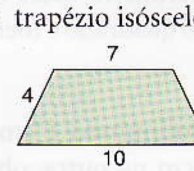
a) trapézio



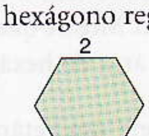
d) losango



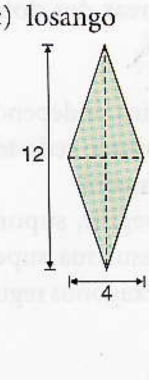
b) trapézio isósceles



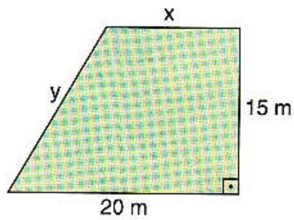
e) hexágono regular



c) losango



34. (UF-AL) Na figura, tem-se a planta de um terreno com forma de trapézio e área de 240 m².



Determine o perímetro do terreno.

35. O perímetro de um trapézio isósceles vale 22 cm. Se uma das bases mede o dobro da outra e cada lado oblíquo mede 3,5 cm, quanto mede a área do trapézio?

36. Determine a área de um losango de 13 dm de lado sabendo que uma das diagonais mede 1 m.

37. Uma diagonal de um losango mede o dobro da outra. Determine a área do losango, sabendo que o seu perímetro vale 30 cm.

38. (Unicamp-SP) Um triângulo eqüilátero tem o mesmo perímetro de um hexágono regular cujo lado mede 1,5 cm. Calcule:

a) o comprimento de cada lado do triângulo;
b) a razão entre as áreas do hexágono e do triângulo.

39. Determine a área de um:

a) hexágono regular de lado medindo 6 cm.
b) hexágono regular de apótema medindo $12\sqrt{3}$ cm.
c) pentágono regular de lado ℓ e apótema a.
d) octógono regular de lado ℓ e apótema a.

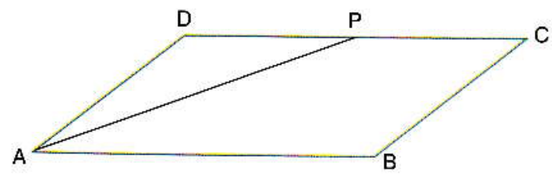
40. É dado um hexágono regular de lado ℓ; um quadrado tem o mesmo perímetro desse hexágono. Mostre que a área do quadrado é menor que a área do hexágono.

41. Seja um retângulo; diminuindo 1 cm numa base e aumentando 1 cm na outra, obtém-se um trapézio. Compare as áreas dos dois quadriláteros.

42. (U. F. Pelotas-RS) O brasileiro, independentemente de classe econômica, desde cedo tem familiaridade com a bola de futebol.
Nos cálculos propostos a seguir, suporemos uma bola de couro que possui sua superfície coberta com pentágonos e hexágonos regulares.
Baseando-se em seus conhecimentos e considerando que os hexágonos que cobrem a bola têm a distância do centro ao ponto médio de cada um dos seus lados iguais a 3 cm, determine:

a) a área de cada hexágono.
b) o perímetro de cada pentágono.

43. (Fuvest-SP) No paralelogramo ABCD abaixo, tem-se que AD = 3 e $D\hat{A}B = 30°$. Além disso, sabe-se que o ponto P pertence ao lado $\overline{DC}$ e à bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$.

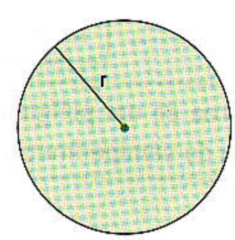


a) Calcule AP.
b) Determine AB sabendo que a área do quadrilátero ABCP é 21.

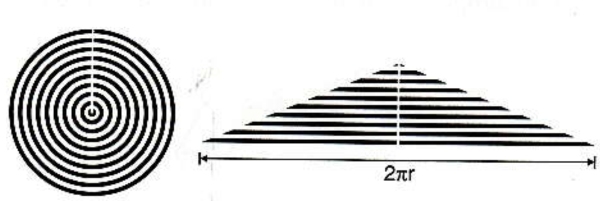
Área do círculo e de suas partes

Um círculo de raio r tem a área dada pelo produto:

$$\boxed{A = \pi r^2}$$



Intuitivamente, com auxílio da figura abaixo, podemos perceber que a área do círculo, assemelhada à área de um triângulo, de fato, é dada pela expressão acima.



$$\boxed{A_{círculo} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \Rightarrow A_{círculo} = \pi r^2}$$

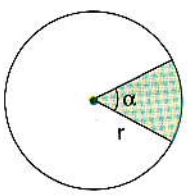
exemplo 9

Um círculo de comprimento 20π m possui diâmetro de 20 m e, portanto, raio de 10 m.

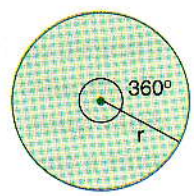
Assim, sua área mede $\pi \cdot 10^2 = 100\,\pi\ m^2$

Área do setor circular

Seja um setor de α^o e raio *r*.



setor de α^o



setor de 360°

A área do setor é diretamente proporcional à medida do ângulo central. Vamos calcular a área pela regra de três:

	área		ângulo central (graus)
setor:	A	————	α^o
círculo:	πr^2	————	360^o

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^o} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^o}}$$

No caso de ser dada em radianos a medida do setor (lembrando que 2π rad equivalem a uma volta completa no ciclo), basta trocar 360^o por 2π. Assim:

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^o} = \frac{\pi r^2 \alpha}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{r^2 \alpha}{2}$$

exemplo 10

Determinar a área de um setor de 60° num círculo de raio de 5 cm significa também determinar a área de um setor de $\frac{\pi}{3}$ rad do mesmo círculo:

$$A = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 60^o}{360^o} = \frac{25\pi}{6}\,cm^2 \Leftrightarrow A = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{25\pi}{6}\,cm^2$$

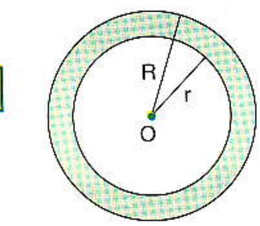
Ainda podemos pensar nesse setor ocupando a sexta parte do círculo ($360^o : 60^o = 6$). Daí:

$$A_{setor} = \frac{1}{6}A_{círculo} = \frac{1}{6}25\pi = \frac{25\pi}{6}\ cm^2$$

Área da coroa circular

A área de uma coroa circular de raios *R* e *r*, com $R > r$, como abaixo, é dada pela diferença entre as áreas dos círculos de raios *R* e *r*, nesta ordem:

$$\boxed{A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)}$$



exercícios

44. Determine a área de um círculo:

a) de raio 6 dm.

b) de raio $\frac{6}{\pi}$ dm.

c) de diâmetro 4 cm.

d) de 20π cm de perímetro.

45. Um círculo é equivalente a um quadrado de 6 cm de lado. Adote $\pi = 3{,}14$ e determine a medida aproximada do raio do círculo.

46. (UF-GO) Um pivô central é usado para a irrigação de um terreno circular de 500 m de raio. Quantos metros cúbicos de água são necessários para irrigar o terreno, espalhando em média 5 litros por metro quadrado? (Adote $\pi = 3{,}1$.)

47. Determine a área de um setor circular de raio 6 cm cujo ângulo central mede:

a) 60°

b) $\frac{\pi}{6}$ rad

c) 50°

d) 120°

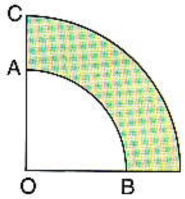
e) $\frac{\pi}{2}$ rad

f) π rad

48. Determine a área da superfície colorida:

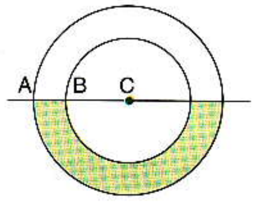
a) $\widehat{AB} = \pi$ cm

$AC = \dfrac{OA}{2}$

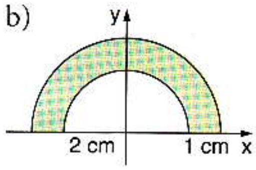


c) AB = 2 cm

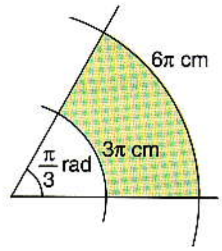
BC = 3 cm



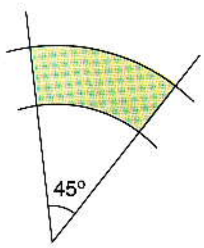
b)



d)

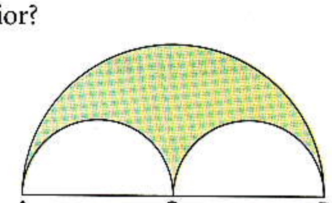


49. A região colorida na figura abaixo tem $\dfrac{32\pi}{25}$ m^2 de área.



Se o raio do arco maior mede 4 m, quanto mede o raio do menor?

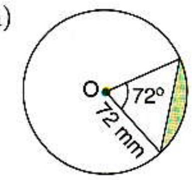
50. Dado $AO = OB = \dfrac{5}{2}$ cm, qual é a área da região externa às semicircunferências menores e interna à maior?



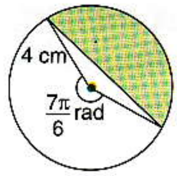
51. Dois triângulos eqüiláteros, cada um com área de $9\sqrt{3}$ cm^2, são dispostos de modo que um ângulo de um deles apareça como oposto pelo vértice a um dos ângulos do outro triângulo. Com centro nesse vértice, traça-se uma circunferência de 6 cm de raio. Determine a área da parte interna à circunferência, porém externa aos triângulos.

52. Determine a área da região colorida:

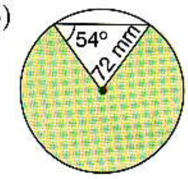
a)



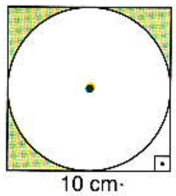
c)



b)

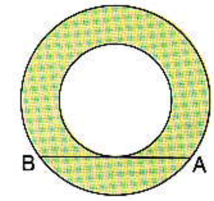


d)



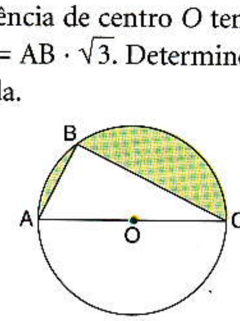
53. Com centros em cada um dos vértices de um triângulo eqüilátero de altura medindo $2\sqrt{3}$ cm, são traçados três arcos de diâmetros com medidas iguais às dos lados do triângulo. Determine a área da superfície interna ao triângulo mas externa aos setores.

54. (Mackenzie-SP) Na coroa circular abaixo, a corda AB tangencia a circunferência menor.

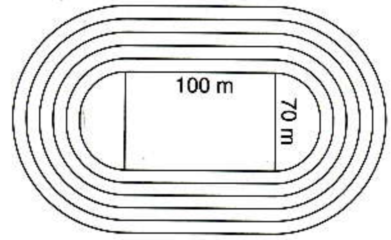


Dado AB = m, calcule a área da coroa circular.

55. A circunferência de centro O tem diâmetro de 8 cm e $BC = AB \cdot \sqrt{3}$. Determine a área da região colorida.

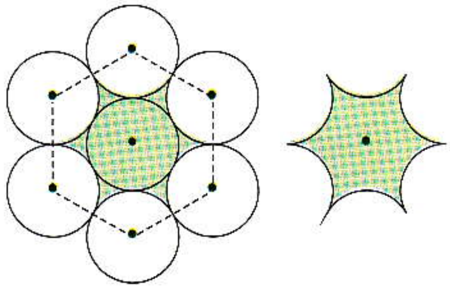


56. (UF-GO) A figura a seguir é o esboço de uma pista de atletismo, com cinco raias de 60 cm de largura cada. As raias são delimitadas por retas e semicircunferências concêntricas, sendo que a raia mais interna circunscreve um campo de futebol de 70 m por 100 m.



A pista será revestida com material para amortecimento de impactos que custa R$ 15,00 o metro quadrado. Qual é, aproximadamente, o valor a ser gasto com o material de revestimento da pista?

57. (Unifesp-SP) Na figura são exibidas sete circunferências. As seis exteriores, cujos centros são vértices de um hexágono regular de lado 2, são tangentes à interna. Além disso, cada circunferência externa é também tangente às outras duas que lhe são contíguas.

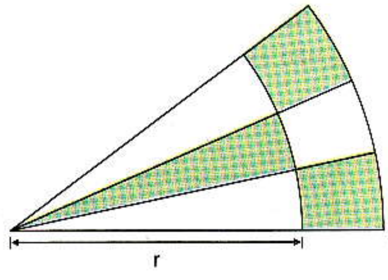


Nessas condições, calcule:

a) a área da região colorida, apresentada em destaque à direita;

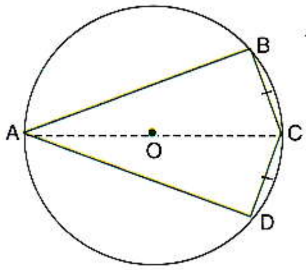
b) o perímetro da figura que delimita a região colorida.

58. (UF-RJ) Um setor circular de ângulo θ e raio 1 foi dividido em três setores de mesmo ângulo. Cada um desses setores foi dividido em duas regiões por um arco de círculo concêntrico com o setor e de raio r, como ilustrado na figura.



Se A_1 é a soma das áreas das regiões coloridas e A_2 é a soma das áreas das regiões claras, determine o valor de r que torna verdadeira a igualdade $A_1 = A_2$.

59. (UF-RJ) Na figura a seguir, o ponto O significa o centro de uma região circular de raio r = 5 m. O arco $\widehat{BC}$ é igual ao arco $\widehat{CD}$ e a medida do segmento $\overline{AB}$ é 8 m. O polígono ABCD representa uma piscina vista do alto.



Determine a área da região circular que está fora da piscina. (Considere $\pi = 3,14$.)

Áreas de figuras semelhantes

Relembremos o que foi visto no capítulo 10.

Duas figuras são semelhantes, quando:

- possuem a mesma forma;
- todos os ângulos de uma são congruentes aos respectivos ângulos da outra;
- todos os elementos lineares de uma são diretamente proporcionais aos respectivos elementos da outra.

Assim, para duas figuras semelhantes, sendo K a razão de semelhança da segunda para a primeira e A a área da primeira delas, podemos assegurar que a área da segunda figura será $K^2 \cdot A$.

exemplo 11

Se um triângulo eqüilátero possui área $A_1 = 9\sqrt{3}$ cm² e outro triângulo eqüilátero tem área $A_2 = 36\sqrt{3}$ cm², significa que $K^2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{36\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = 4$; portanto, K = 2 é a razão de semelhança (do maior para o menor).

De fato:

$$A_1 = 9\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ell_1 \cdot \frac{\ell_1\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_1^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell_1 = 6 \text{ cm}$$

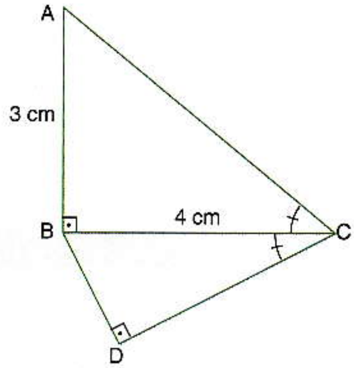
$$A_2 = 36\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\ell_2^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \Rightarrow \ell_2 = 12 \text{ cm}$$

Temos:

$$K = \frac{12 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 2$$

exercícios

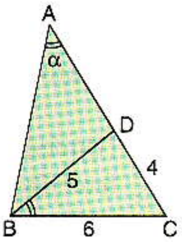
60. Quanto mede a área do $\triangle BCD$?



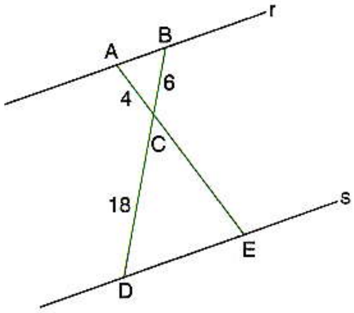
61. A área de um hexágono regular mede o triplo da área de outro hexágono regular. Qual é a razão de semelhança (do menor para o maior) entre os dois hexágonos?

62. São dados dois pentágonos semelhantes, cujas áreas medem $12x$ cm^2 e $20x$ cm^2. Se o menor lado do menor pentágono mede 2 cm, quanto mede o menor lado do maior pentágono?

63. Ache o percentual da superfície do triângulo ABC ocupada pela superfície do triângulo BDC.



64. Sendo r // s, quanto mede $\overline{AB}$, se a área do triângulo acutângulo CDE é igual a $\frac{135}{4}\sqrt{7}$?



Matemática e natureza

A geometria dos fractais

A Geometria euclidiana que estudamos em toda a nossa vida escolar não é suficiente para descrever determinadas formas geométricas, como uma nuvem, um cristal de neve, uma couve-flor, uma folha de samambaia e muitas outras que vemos na natureza. Sua existência desafia a ciência a estudar as formas que a Geometria tradicional não explica. A geometria dos fractais nasceu dessa necessidade.

As raízes desse ramo da Matemática estão no século XIX, embora haja algumas indicações em épocas bem mais remotas, como na Grécia homérica, na Índia e na China. Porém, somente há poucos anos, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos computadores, a geometria dos fractais vem se consolidando.

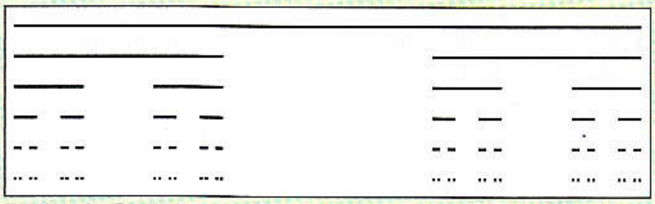
O "pai" dos fractais é o francês Benoit Mandelbrot (1924-), que no início dos anos 1980 impulsionou os estudos sobre essas formas geométricas. Esta frase atribuída a ele sintetiza o espírito da Geometria de que falamos: "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta".

Lucidio Studio, Inc./Corbis

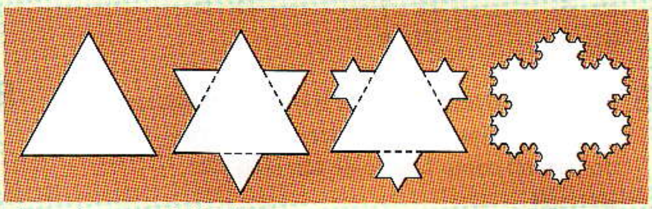
Cada pequena parte da folha de samambaia se parece com a folha inteira.

Estruturas geométricas complexas, os fractais (do latim, *fractus*, "quebrado", "fraturado") caracterizam-se por repetir um determinado padrão com ligeiras e constantes variações. Como conseqüência dessa auto-similaridade, as diferentes partes de um fractal se mostram similares ao todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.

O estudo sistemático dos fractais é devido principalmente ao russo Georg Cantor (1845-1918), matemático criador de um tipo simples de fractal obtido pela divisão de um segmento em três partes iguais e supressão da parte central. Repetindo-se o processo várias vezes, sobram linhas finas chamadas de *Cantor dust*, a poeira de Cantor.

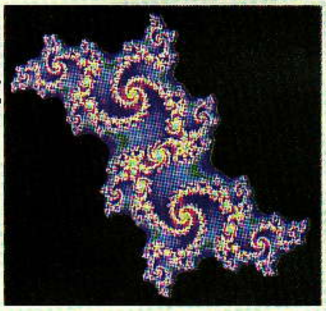

Poeira de Cantor

Outro exemplo conhecido de fractal é o floco de neve proposto pelo matemático sueco Helge von Koch (1870-1924) em 1904. Nele procura-se estudar geometricamente a forma de um floco de neve. Divide-se cada lado de um triângulo eqüilátero em três partes iguais, e traçam-se retas de modo que três novos triângulos eqüiláteros sejam acrescentados na parte central de cada um dos lados do triângulo original. Repetem-se esses procedimentos, sempre acrescentando um novo triângulo eqüilátero a cada lado.


Floco de neve de Koch

Dessa forma, obtém-se uma figura cada vez mais complexa que em teoria possui uma superfície finita, mas perímetro e número de vértices infinitos.

Os fractais possuem forte apelo estético, por isso muitas imagens e figuras fractais são usadas em exposições de arte.

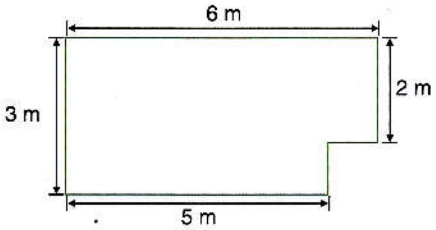

Gregory Sams/SPL

Para saber mais sobre esse assunto, você pode pesquisar em:
www.sbfisica.org.br/fne/Vol6/Num1/complexidade.pdf
math.rice.edu/~lanius/frac/ (em inglês)

testes de vestibulares

1. (FMU/Fiam/Faam-SP) A figura abaixo representa uma sala cuja área, em metros quadrados, é:

a) 17
b) 18
c) 20
d) 30
e) 36



2. (UF-PI) Se os lados de um triângulo medem 1 cm, 1 cm e $\sqrt{3}$ cm, a área desse triângulo, em centímetros quadrados, é igual a:

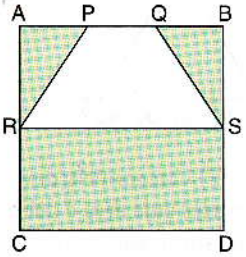
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3. (ESPM-SP) Aumentando-se o comprimento de um retângulo em 20% e diminuindo-se a sua largura em 20%, a sua área:

a) aumenta 20%.
b) diminui 20%.
c) aumenta 4%.
d) diminui 4%.
e) não se altera.

4. (UF-MA) Na figura a seguir, o quadrado ABCD tem 18 cm de lado e R é o ponto médio do lado $\overline{AC}$.



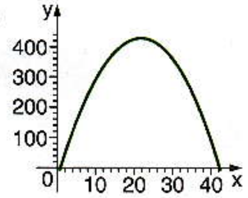
Sabendo-se que $\overline{AB}$ é dividido em três segmentos congruentes $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$ e que PQRS é um trapézio, a área da parte colorida, em centímetros quadrados, vale:

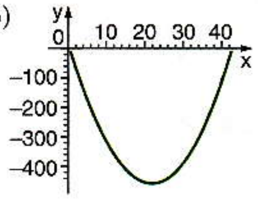
a) 432
b) 324
c) 216
d) 108
e) 98

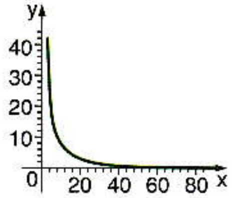
5. (Mackenzie-SP) Um retângulo, cujo lado menor mede 3 m, foi totalmente dividido por retas paralelas aos seus lados. Com a divisão, foram obtidos 1 200 quadrados congruentes, cada um com lado de 15 cm. A medida do maior lado do retângulo, em metros, é:

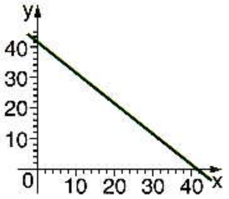
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

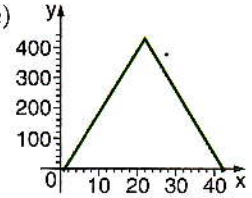
6. (U. E. Londrina-PR) Um terreno retangular tem 84 m de perímetro. O gráfico que descreve a área *y* do terreno como função de um lado *x* é:

a)


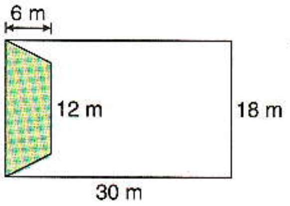
b)


c)


d)


e)


7. (Unifesp-SP) Um comício deverá ocorrer num ginásio de esportes cuja área é delimitada por um retângulo, como mostrado na figura a seguir.



Por segurança, a coordenação do evento limitou a concentração no local a 5 pessoas para cada 2 m^2 de área disponível. Excluindo-se a área ocupada pelo palanque, com a forma de um trapézio (veja as dimensões da parte colorida na figura), quantas pessoas, no máximo, poderão participar do evento?

a) 2 700
b) 1 620
c) 1 350
d) 1 125
e) 1 050

8. (Puccamp-SP) Considere o fragmento de texto seguinte.

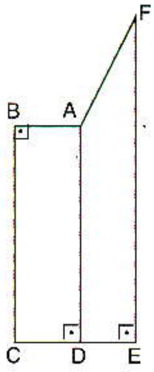
> Células solares convertem a energia da luz do Sol em energia elétrica. Para cada centímetro quadrado de célula solar que recebe a luz direta do Sol, cerca de 0,01 watt de potência elétrica é aproveitável.

Para que uma célula solar, na forma de um hexágono regular, libere 18 watts de potência, o comprimento do lado dessa célula deverá ser, em centímetros:

a) 13,20
b) 18,60
c) 26,40
d) 37,20
e) 52,80

(Dado: $\sqrt[4]{3} = 1{,}32$.)

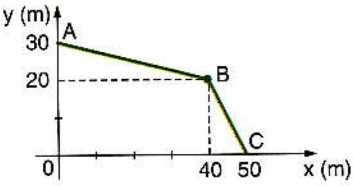
9. (Mackenzie-SP) Os quadriláteros ABCD e ADEF têm áreas iguais.



Se BC = 4 cm, CE = $\dfrac{9}{4}$ cm e EF = 6 cm, a medida de $\overline{AF}$, em centímetros, é:

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{6}$
c) $\dfrac{5}{2}$
d) $\dfrac{7}{3}$
e) $\sqrt{5}$

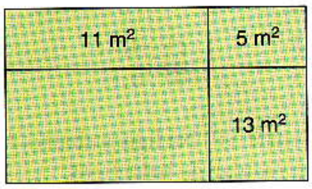
10. (UF-GO) Um terreno tem a planta representada num plano cartesiano, como mostra o gráfico abaixo.



A área do terreno, em metros quadrados, é:

a) 1 400
b) 1 100
c) 1 000
d) 900
e) 800

11. (U. F. Viçosa-MG) Um terreno retangular foi dividido em quatro lotes retangulares, três dos quais são conhecidas as áreas, como ilustra a figura a seguir.



A área total do terreno, em metros quadrados, é:

a) 55,6
b) 56,6
c) 57,6
d) 58,6
e) 59,6

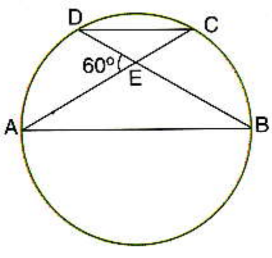
12. (U. F. Juiz de Fora-MG) Considere um *outdoor* de uma propaganda publicitária, construído em formato retangular, com área de 104 m^2 e com um dos lados 5 m maior do que o outro. Sobre a medida x do maior lado desse *outdoor*, é correto afirmar que:

a) $9 \leqslant x \leqslant 11$
b) $6 \leqslant x \leqslant 8$
c) $12 \leqslant x \leqslant 14$
d) $x \geqslant 26$
e) $x \leqslant 6$

13. (Faap-SP) Cinco quadrados iguais são colocados lado a lado, formando um retângulo cujo perímetro é 372 cm. A área de cada quadrado, em centímetros quadrados, é:

a) 72
b) 124
c) 324
d) 900
e) 961

14. (UE-PI) Na ilustração abaixo, $\overline{AB}$ é um diâmetro paralelo à corda $\overline{CD}$ e o ângulo $A\hat{E}D$ mede 60°.



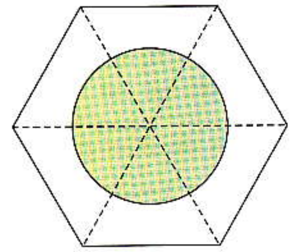
Se a área do triângulo ABE é 24, qual a área do triângulo CDE?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

15. (UCDB-MS) Um cavalo se encontra preso num cercado de pastagem, cuja forma é um trapézio retângulo, com bases medindo 70 m e 130 m, e altura de 80 m. Ele está amarrado a uma corda de 70 m que está fixada em um dos cantos que apresenta ângulo reto. Admitindo que o cavalo consuma toda a pastagem a seu alcance, é correto afirmar que:

a) a área de pastagem consumida pelo cavalo é maior que 4 000 m^2.
b) o cavalo consome mais de 50% da pastagem existente no cercado.
c) a área da pastagem que sobra no cercado é o dobro da área consumida pelo cavalo.
d) o perímetro do cercado é 380 m.
e) se, após consumir toda a pastagem a seu alcance, a corda for fixada no outro canto que apresenta ângulo reto, o cavalo terá a mesma área de pastagem à sua disposição, comparada àquela inicial.

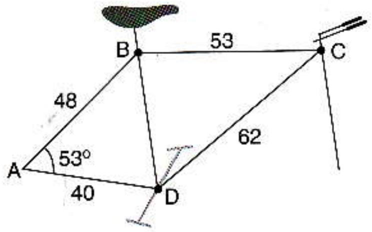
16. (Vunesp-SP) Um salão de festas na forma de um hexágono regular, com 10 m de lado, tem ao centro uma pista de dança na forma de um círculo, com 5 m de raio.



A área, em metros quadrados, da região do salão de festas que não é ocupada pela pista de dança é:

a) $25(30\sqrt{3} - \pi)$
b) $25(12\sqrt{3} - \pi)$
c) $25(6\sqrt{3} - \pi)$
d) $10(30\sqrt{3} - \pi)$
e) $10(15\sqrt{3} - \pi)$

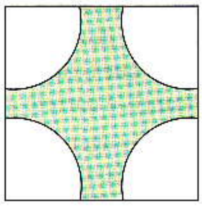
17. (Puccamp-SP) Considere que, na figura abaixo, tem-se a planificação do quadro de uma bicicleta e as medidas estão indicadas em centímetros. (Dado: sen 53° = 0,8.)



A área do triângulo ABD, em centímetros quadrados, é:

a) 480
b) 576
c) 640
d) 768
e) 824

18. (ESPM-SP) A figura abaixo representa uma marca onde os arcos têm centros nos vértices do quadrado de lado igual a 10 cm.



Se as partes branca e colorida devem ter a mesma área, a medida do raio de cada arco, em centímetros, deve ser:

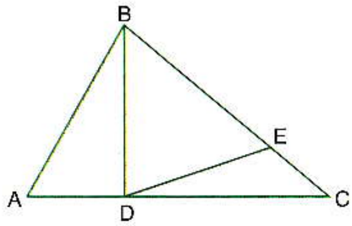
a) 4,50
b) 4,40
c) 4,25
d) 4,15
e) 4,00

(Considere $\sqrt{2\pi} = 2{,}5$.)

19. (FGV-SP) Em uma cidade do interior, a praça principal, em forma de um setor circular de 180 m de raio e 200 m de comprimento do arco, ficou lotada no comício político de um candidato a prefeito. Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, a melhor estimativa do número de pessoas presentes no comício é:

a) 30 mil
b) 40 mil
c) 70 mil
d) 90 mil
e) 100 mil

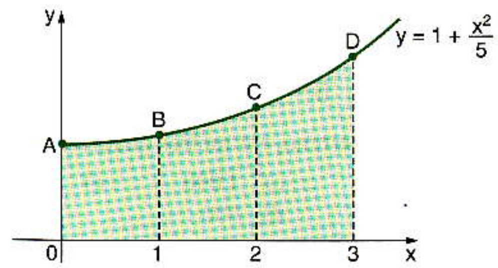
20. (UF-PI) A área do triângulo ABC, na figura abaixo, é igual a A. Temos também $\overline{AD} = \frac{1}{3}\ \overline{AC}$ e $\overline{EC} = \frac{1}{4}\ \overline{BC}$.



Julgue as afirmações a seguir.

a) A área do triângulo DEC é $\frac{1}{6}$ da área do triângulo ABC.
b) A área do triângulo DEC é 25% da área do triângulo BCD.
c) A área do triângulo BDC é o dobro da área do triângulo ABD.
d) A área do triângulo DEC é 35% da área do triângulo BDE.

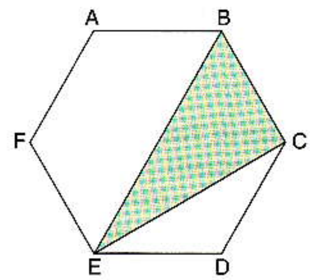
21. (U. F. Viçosa-MG) Uma das maneiras utilizadas pelos agrimensores para medir a área de um terreno é aproximar a região por polígonos com áreas fáceis de calcular (por exemplo, triângulos, retângulos, trapézios, etc.). Suponha que um terreno tenha o formato dado pela região colorida no gráfico abaixo, onde a curva representa o gráfico da função dada por $y = 1 + \frac{x^2}{5}$.



O valor aproximado da área dessa região, quando substituímos os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CD}$ por segmentos de retas, é:

a) 4,3
b) 4,5
c) 4,9
d) 5,1
e) 5,5

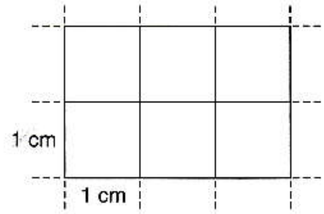
22. (Mackenzie-SP) Na figura abaixo, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 cm.



A área do triângulo BCE, em centímetros quadrados, é:

a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
d) $3\sqrt{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

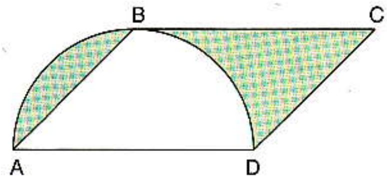
23. (Unifesp-SP) Considere a malha quadriculada exibida pela figura abaixo, composta por 6 quadrículas de 1 cm de lado cada.



A soma das áreas de todos os possíveis retângulos determinados por essa malha, em centímetros quadrados, é:

a) 6
b) 18
c) 20
d) 34
e) 40

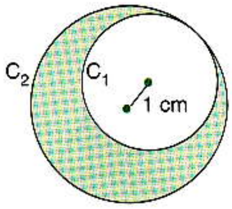
24. (Mackenzie-SP) Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo cujo lado $\overline{BC}$ é tangente, no ponto B, à circunferência de diâmetro AD = 6.



A área da região colorida é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

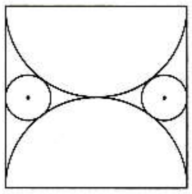
25. (UF-MS) Na figura abaixo, as circunferências C_1 e C_2 são tangentes entre si.



Se a distância entre os seus centros é igual a 1 cm e a área da região colorida é igual a 50% da área de C_2, então as medidas dos raios C_1 e C_2, em centímetros, são, respectivamente:

a) $1 + \sqrt{2}$ e $2 + \sqrt{2}$
b) $1 - \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$
c) $3 + 2\sqrt{2}$ e $4 + 2\sqrt{2}$
d) $1 + 2\sqrt{2}$ e $2 + 2\sqrt{2}$
e) $2 + \sqrt{2}$ e $3 + \sqrt{2}$

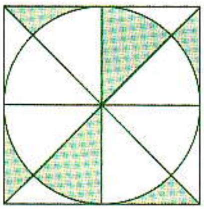
26. (ESPM-SP) Na figura abaixo, os dois círculos de raios unitários são tangentes aos semicírculos e aos lados do quadrado.



A área desse quadrado é:

a) 42,25
b) 49,00
c) 56,25
d) 64,00
e) 72,25

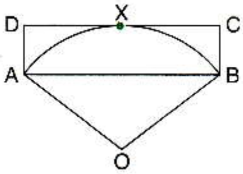
27. (Vunesp-SP) Uma empresa tem o logotipo mostrado a seguir.



Se a medida do raio da circunferência inscrita no quadrado é 3 cm, a área de toda a região colorida, em centímetros quadrados, é:

a) $9 - \frac{9\pi}{4}$
b) $18 - \frac{9\pi}{4}$
c) $18 - \frac{9\pi}{2}$
d) $36 - \frac{9\pi}{4}$
e) $36 - \frac{9\pi}{2}$

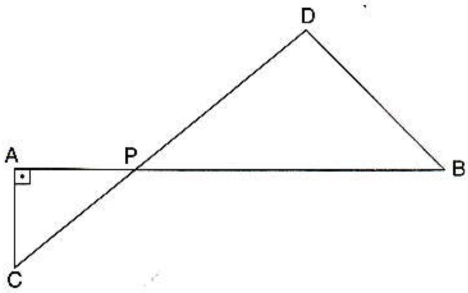
28. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, OAB é um setor circular com centro em O, ABCD é um retângulo e o segmento $\overline{CD}$ é tangente em X ao arco de extremos A e B do setor circular.



Se $AB = 2\sqrt{3}$ e $AD = 1$, então a área do setor OAB é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{3}$
e) $\frac{7\pi}{3}$

29. (Ibmec-RJ) Na figura abaixo, temos $\overline{AB} = \overline{CD} = 15$ cm e $\overline{PC} = 5$ cm. O segmento de reta $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e mede 4 cm.



Então, a área do triângulo PBD, em cm^2, vale:

a) 24
b) 30
c) 36
d) 42
e) 48

desafios

1. (UF-PA) A figura 3 ao lado é comumente reconhecida como um "fractal" (em que pequenas partes são cópias reduzidas do todo) e é constituída por uma infinidade de círculos de raios cada vez menores. Sua construção é dada a seguir.

A partir de um triângulo eqüilátero ABC (veja a figura 1), cujo lado tem comprimento *L*, considere a circunferência nele inscrita. A reta paralela ao lado BC e tangente à circunferência inscrita intercepta o lado AB no ponto *D* e o lado AC no ponto *E*, formando um novo triângulo eqüilátero ADE. Fazendo construções equivalentes para os lados AC e AB, determinaremos dois novos triângulos eqüiláteros BFG e CHI. Para cada um dos triângulos, ADE, BFG e CHI, repetimos esse processo, obtendo três novas circunferências inscritas e nove triângulos menores, como na figura 2. Esse processo pode ser repetido indefinidamente, gerando círculos cada vez menores e formando a figura 3.

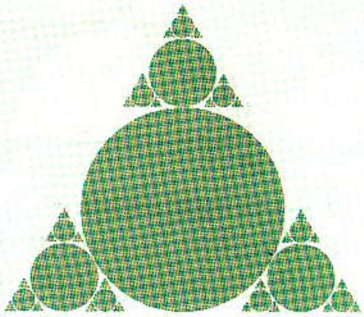


figura 3

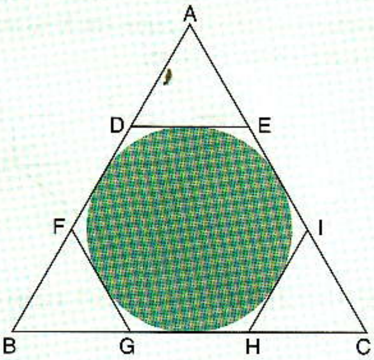


figura 1

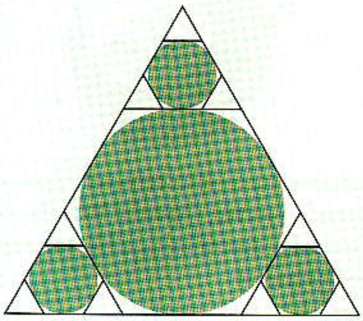


figura 2

Lembre-se de que o raio do círculo inscrito é igual a um terço da altura do triângulo eqüilátero.

a) Calcule a área do primeiro círculo construído e a área de um dos círculos menores da figura 2, em função do lado *L* do triângulo inicial.

b) As somas das áreas dos círculos congruentes (de mesmo raio), em ordem decrescente, formam uma progressão geométrica. Calcule a soma dos infinitos termos dessa progressão.

2. Aumenta-se um lado de um retângulo em 1 m e diminui-se, também de 1 m, outro lado do mesmo retângulo. Com essas alterações, forma-se um quadrado. Em quantos metros quadrados a área do quadrado excede a do retângulo?

3. (PUC-RJ) Seja ABC um triângulo eqüilátero de área 30 cm^2. Seja PQR, com *P* no lado $\overline{BC}$, *Q* no lado $\overline{CA}$ e *R* no lado $\overline{AB}$, outro triângulo eqüilátero. Dado que o ângulo $C\hat{P}Q$ é reto, determine:

a) os ângulos $A\hat{Q}R$ e $B\hat{R}P$;

b) a área do triângulo PQR.