

Exercícios de Matemática Determinantes - 2

1. (Ufpr 95) Considere a matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem 4×4 , cujos elementos são mostrados a seguir. $a_{ij} =$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{se } i = j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

- 01) Na matriz A, o elemento a_{23} é igual ao elemento a_{32} .
- 02) Os elementos da diagonal principal da matriz A são todos nulos.
- 04) O determinante da matriz A é igual a - 4.
- 08) Se a matriz B é $[1 \ -1 \ 1 \ -1]$, então o produto B.A é a matriz -B.
- 16) Sendo I a matriz identidade de ordem 4, a matriz $A+I$ possui todos os elementos iguais a 1.

2. (Fgv 2003) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 3 e O a matriz nula também de ordem 3.

Assinale a alternativa correta:

- a) Se $A \cdot B = O$, então: $A = O$ ou $B = O$
- b) $\det(2 \cdot A) = 2 \det(A)$
- c) Se $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$
- d) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- e) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

3. (Ita 2005) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que (a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível

4. (Unitau 95) Sendo $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, onde,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ -2ij, & \text{se } i < j \\ 3j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Calcule o $\det B$:

- a) 13.
- b) - 25.
- c) 25.
- d) 20.
- e) - 10.

5. (Ita 96) Considere A e B matrizes reais 2×2 , arbitrárias. Das afirmações a seguir assinale a verdadeira. Justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

- a) Se A é não nula então A possui inversa.
- b) $(AB) = A B$
- c) $\det (AB) = \det (BA)$
- d) $\det A^2 = 2 \det A$
- e) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. (Puccamp 95) Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e tais que $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$, então é correto afirmar que

- a) $B = A^{-1} \rightarrow \det B = \det A$
- b) $B = A \rightarrow \det B = \det A$
- c) $\det A^2 = \det B^2 \rightarrow \det A = \det B$
- d) $\det (A+B) = \det A + \det B$
- e) $\det (3A) = 3 \cdot \det A$

7. (Mackenzie 96) Se A é uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ com elementos

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos (i + j)\pi, & \text{se } i = j \\ \sin \pi i, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

então, qualquer que seja n, $\det A$ é sempre igual a:

- a) $n/2$.
- b) 1.
- c) 0.
- d) n^2 .
- e) $2n^2$.

8. (Mackenzie 96) Na igualdade:

$$\log_3 [\det (2 \cdot A^{-1})] = \log_{27} [\det (2A)^{-1}],$$

A é uma matriz quadrada de quinta ordem com determinante não nulo. Então $\det A$ vale:

- a) 2^5 .
- b) 2^{10} .
- c) 3^5 .
- d) 3^{10} .
- e) 6^5 .

9. (Puccamp 97) São dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{2 \times 2}$, onde $a_{ij}=2i-3j$, e $B=(b_{ij})_{2 \times 2}$, onde

$$b_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i = j \\ i - j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Nessas condições, se $X = (B - A)^2$, o determinante da matriz X é igual a

- a) 224
- b) 286
- c) 294
- d) 306
- e) 324

10. (Pucmg 97) O termo geral da matriz $M_{2 \times 2}$ é $a_{ij} = 3i - 2j$. O valor do determinante de M é:

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

11. (Pucmg 97) M é uma matriz quadrada de ordem 3, e seu determinante é $\det(M)=2$. O valor da expressão $\det(M)+\det(2M)+\det(3M)$ é:

- a) 12
- b) 15
- c) 36
- d) 54
- e) 72

12. (Ufrs 97) Sendo $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz onde n é igual a 2 e $a_{ij} = i^2 - j$, o determinante da matriz A é

- a) -3
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 3

13. (Uel 98) Seja a matriz $A=(a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} \log_2 x & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Se o determinante de A é igual a -27, o valor de x é

- a) 1/8
- b) 1/4
- c) 1/2
- d) 4
- e) 8

14. (Ufsm 99) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem n e 0 a matriz nula de ordem n. Então, a afirmativa correta é a seguinte:

- a) Se A é a matriz transposta de A, então $\det A \neq \det A$.
- b) Se $\det A \neq 0$, existe a matriz inversa A^{-1} e $A^{-1} = 1/(\det A) \cdot (\text{cof} A)$, onde cof A é a matriz dos cofatores de A.
- c) Se $A \cdot B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
- d) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- e) Se $k \in \mathbb{R}$, então $\det(kA) = k \det A$, para todo k.

15. (Fuvest 2000) Se A é uma matriz 2×2 inversível que satisfaz $A^2 = 2A$, então o determinante de A será:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

16. (Unicamp 2000) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação: $\det A = 0$.

b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

17. (Ufsm 2000) Sejam A, B e C matrizes reais 3×3 , tais que $A \cdot B = C^{-1}$, $B = 2A$ e $\det C = 8$.

Então o valor do $|\det A|$ é

- a) 1/16
- b) 1/8
- c) 1
- d) 8
- e) 16

18. (Unesp 2001) Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, definida por $a_{ij} = -1 + 2i + j$, para $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$.

O determinante de A é:

- a) 22.
- b) 2.
- c) 4.
- d) -2.
- e) -4.

19. (Fgv 2002) A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $\det(A) = 7$. Nessas condições, $\det(3A)$ e $\det(A^{-1})$ valem respectivamente:

- a) 7 e -7
- b) 21 e 1/7
- c) 21 e -7
- d) 63 e -7
- e) 63 e 1/7

20. (Pucsp 2001) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos 7\pi / i & \text{se } i = j \\ \sin 7\pi / j & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

O determinante da matriz A é igual a

- a) $-(\sqrt{3}/2)$
- b) $-(1/2)$
- c) -1
- d) 1/2
- e) $(\sqrt{3}/2)$

21. (Ufrj 2001) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que

$$a_{ij} = 2, \text{ se } i < j \\ a_{ij} = 3i + j, \text{ se } i \geq j,$$

encontre o DETERMINANTE da matriz A .

22. (Fei 99) As faces de um cubo foram numeradas de 1 a 6, depois em cada face do cubo foi registrada uma matriz de ordem 2, com elementos definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + f & \text{se } i = j \\ j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde f é o valor associado à face correspondente.

Qual o valor do determinante da matriz registrada na face 5?

- a) 63
- b) 61
- c) 60
- d) 6
- e) 0

23. (Mackenzie 2001) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de terceira ordem tal que

$$a_{ij} = -3, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j$$

então o determinante de A vale:

- a) -27
- b) 27
- c) 1/27
- d) -1/27
- e) zero

24. (Ufes 2001) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 com $\det(A) = 3$ e se k é um número real tal que $\det(kA) = 192$, então o valor de k é

- a) 4
- b) 8
- c) 32
- d) 64
- e) 96

25. (Ufv 2002) Seja A uma matriz inversível de ordem 2. Se $\det(2A) = \det(A^2)$, então o valor de $\det A$ é:

- a) 3
- b) 4
- c) 2
- d) 0
- e) 1

26. (Ufc 2002) Sejam A e B matrizes 3×3 tais que $\det A = 3$ e $\det B = 4$. Então $\det(A \times 2B)$ é igual a:

- a) 32
- b) 48
- c) 64
- d) 80
- e) 96

27. (Ufsm 2002) Seja A uma matriz 2×2 com determinante não-nulo. Se $\det A^2 = \det(A + A)$, então $\det A$ é

- a) - 4
- b) 1
- c) 4
- d) 8
- e) 16

28. (Pucsp 2003) Indica-se por $\det A$ o determinante de uma matriz quadrada A. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, em que

$$a_{ij} = \begin{cases} \operatorname{sen}[(\pi/4) \cdot (i + j)], & \text{se } i = j \\ \operatorname{sen}[x \cdot (i - j)], & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Quantos números reais x, tais que $-2\pi < x < 2\pi$, satisfazem a sentença $\det A = 1/4$?

- a) 10
- b) 8
- c) 6
- d) 4
- e) 2

29. (Mackenzie 2003) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com determinante maior que zero e A^{-1} a sua inversa. Se $16 \cdot \det A^{-1} = \det(2A)$, então o determinante de A vale:

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 2
- e) 16

30. (Pucmg 2003) A matriz A é de quarta ordem, e seu determinante é -8. Na equação $\det(2A) = 2x - 150$, o valor de x é:

- a) 11
- b) 16
- c) 43
- d) 67

31. (Ufsm 2003) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem n. Se $\det A = \det B \neq 0$, então $\det[(1/2) \cdot A \cdot B^{-1}]$ é igual a

- a) $1/(2^n)$
- b) $1/2$
- c) $(1/2) \cdot \det A$
- d) $[1/(2^n)] \cdot \det A$
- e) 2^n

32. (Ita 2004) Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se, e somente se, A possui uma linha ou uma coluna nula.

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$, então $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $(\sqrt{2}) + 1$ e a segunda por $(\sqrt{2}) - 1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

- a) apenas II.
- b) apenas III.
- c) apenas I e II.
- d) apenas II e III.
- e) todas.

33. (Ufv 2004) Na matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 2, os elementos a_{11} , a_{12} , a_{21} e a_{22} , nesta ordem, apresentam a seguinte propriedade: "Os três primeiros estão em progressão aritmética e os três últimos em progressão geométrica, ambas de mesma razão". Se $a_{12} = 2$, o determinante de A vale:

- a) -8
- b) 8
- c) 0
- d) -4
- e) 4

34. (Ufscar 2005) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 3 tal que,

$$a_{ij} = \begin{cases} p, & \text{se } i = j \\ 2p, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

com p inteiro positivo. Em tais condições, é correto afirmar que, necessariamente, $\det A$ é múltiplo de

- a) 2.
- b) 3.
- c) 5.
- d) 7.
- e) 11.

GABARITO

1. $01 + 02 + 08 + 16 = 27$
2. [D]
3. a) Se B é inversível, temos:
 $AB = BA \Leftrightarrow AB \cdot B^{-1} = BA \cdot B^{-1} \Leftrightarrow$
 $A = BA \cdot B^{-1} \Leftrightarrow B^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot BA \cdot B^{-1} \Leftrightarrow$
 $B^{-1} \cdot A = A \cdot B^{-1}$
 c.q.d.
- b) Como A e B comutam, tem-se:
 $A^2 + 2AB - B = 0 \Leftrightarrow B = A(A + 2B)$
 Aplicando determinantes em ambos os membros, obtemos:
 $\det B = \det [A (A+2B)] \Leftrightarrow$
 $\det B = \det A \cdot \det (A+2B)$
 Como B é inversível, $\det B = k$, $k \neq 0$.
 Supondo que A não é inversível, isto é, $\det A = 0$, temos:
 $k = 0 \cdot \det (A+2B) \Leftrightarrow k = 0$
 O que é uma contradição, pois $k \neq 0$.
 Portanto, A é inversível.
 c.q.d.
4. [A]
5. [C]
6. [B]
7. [B]
8. [B]
9. [E]
10. [E]
11. [E]
12. [E]
13. [A]
14. [B]
15. [E]
16. a) 1 e - 2
 b) $V = \{(\alpha; \alpha; \alpha)\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$
17. [B]
18. [D]
19. [E]
20. [A]
21. $\det (A) = 18$
22. [B]
23. [A]
24. [A]
25. [B]
26. [E]
27. [C]
28. [B]
29. [D]
30. [A]
31. [A]
32. [D]
33. [A]
34. [C]