MATAMÁTICA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

SETOR I

ENEM 2011

Módulo 1. Equação do 1º grau e problemas do 1º grau

1. Equação do 1º grau

$$ax + b = 0 \text{ , com } a \neq 0 \Rightarrow V = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$$

2. Problemas do 1º grau

I. Ler o enunciado e identificar a incógnita.
II. Relacionar as informações com a incógnita, numa equação.
III. Resolver a equação.
IV. Apresentar os resultados.

Módulo 2. Equação do 2º grau (I)

1. Fórmula resolutiva (Bhaskara)

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

2. Existência das raízes

I. $\Delta < 0$ – Nenhuma raiz real
II. $\Delta = 0$ – Duas raízes reais e iguais (uma raiz dupla)
III. $\Delta > 0$ – Duas raízes reais e distintas

Módulo 3. Equação do 2º grau (II)

1. Relações de Girard

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2. Obtenção da equação do 2º grau a partir de suas raízes

$$\left.\begin{array}{l} S = x_1 + x_2 \\ \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Módulo 4. Mudança de variável e equação irracional

1. Mudança de variável

I. Substituir a variável de tal forma que a equação fique do 2º grau.
II. Resolver a equação.
III. Retornar à variável inicial.

2. Equação irracional

I. Isolar um radical.
II. Elevar a igualdade, membro a membro, a um determinado expoente de tal forma que se elimine a raiz.
III. Resolver a equação.
IV. Verificar os resultados, caso o termo tenha sido elevado a um expoente par.

Módulo 5. Teoria dos conjuntos

I. Conceito, notação e apresentação
II. Relação de pertinência
III. Relação de inclusão e subconjunto
IV. Conjunto vazio
V. Igualdade de conjuntos
VI. Conjunto de partes

Módulo 6. Operações com conjuntos

1. União de conjuntos
$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

2. Intersecção de conjuntos
$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$

3. Diferença de conjuntos
$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$

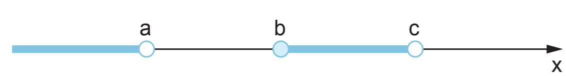
4. Conjunto complementar
$C_A^B = A - B$ para $B \subset A$

5. Número de elementos da união de conjuntos
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Módulo 7. Conjuntos numéricos

1. Notação e constituição
I. Números naturais: $\mathbb{N}$
II. Números inteiros: $\mathbb{Z}$
III. Números racionais: $\mathbb{Q}$
IV. Números reais: $\mathbb{R}$

2. Intervalos reais



$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a \text{ ou } b \le x < c\} = \left]-\infty;\ a\right[\cup [b;\ c[$

Módulo 8. Funções: introdução

1. Produto cartesiano
$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \text{ e } y \in B\}$

2. Relação binária
Uma relação binária de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

3. Função
Função é uma relação binária de A em B tal que todo elemento de A tem para si um correspondente único no conjunto B, que é a sua imagem.

O conjunto A é dito domínio da função – todo elemento do domínio possui imagem e essa imagem, para ele, é única – e o conjunto B é dito contradomínio da função – nem todo elemento do contra domínio é necessariamente imagem de algum elemento do domínio. Os elementos do contradomínio que forem imagens determinam o conjunto imagem.

Módulo 9 · Função: domínio de função real

1. Função real

É toda função em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos, não vazios, de $\mathbb{R}$.

2. Definição

Quando o domínio e o contradomínio de uma função real não forem especificados, sendo apresentada somente a sentença que a define, diremos:

a) Domínio de uma função real é o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual são possíveis todas as operações indicadas na sentença (lei da função).

b) Contradomínio de uma função real é o conjunto $\mathbb{R}$.

3. Determinação do domínio

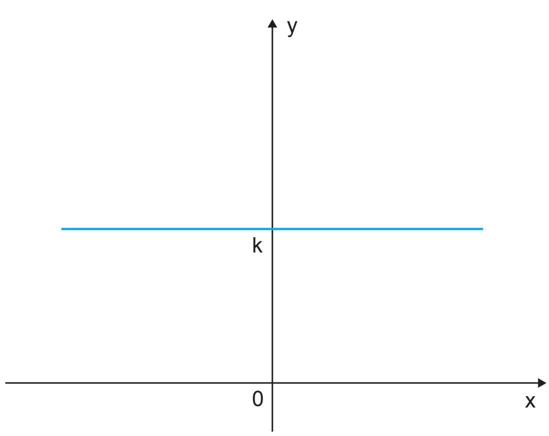
$$f(x) = \frac{N}{E(x)} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, E(x) \neq 0\}$$

$$f(x) = \sqrt[2n]{E(x)},\ n \in N^* \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, E(x) \geq 0\}$$

Módulo 10 · Função constante e função do 1º grau

1. Função constante

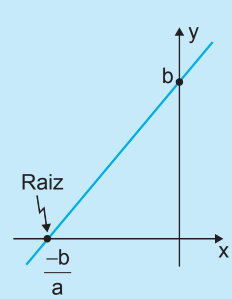
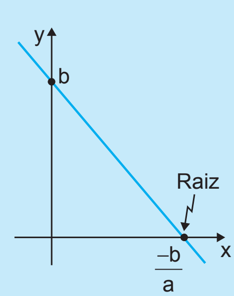
- Sentença: $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$
- Gráfico: reta paralela ao eixo 0x



- $D = \mathbb{R}$
- $CD = \mathbb{R}$
- $Im = \{ k \}$

2. Função do 1º grau

- Sentença: $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$
- Raiz: $ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a}$
- Gráfico: $\begin{cases} \text{reta crescente para } a > 0 \\ \text{reta decrescente para } a < 0 \end{cases}$

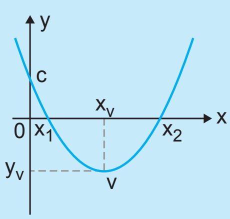
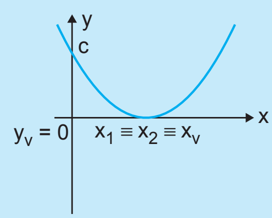
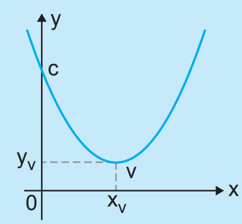
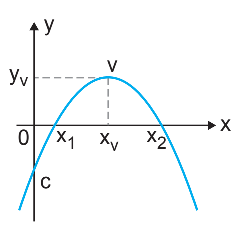
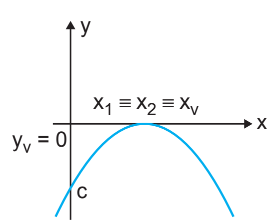
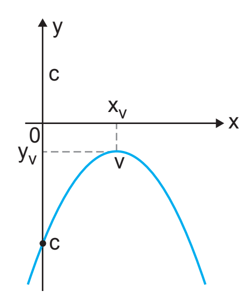
f(x) = ax + b, com a ≠ 0	
$a > 0$	$a < 0$
	
Função crescente	Função decrescente
$D = CD = Im = \mathbb{R}$	

Módulo 11 · Função do 2º grau: introdução

1. Apresentação

- Sentença: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$
- Gráfico: parábola
- Raízes: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$
- Domínio e contradomínio: $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$
- Vértice: $V(x_v\ ;\ y_v)$ com $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$
- Conjunto Imagem: $a > 0 \rightarrow Im = \{y \in \mathbb{R} \ /\ y \geq y_v\}$
  $a < 0 \rightarrow Im = \{y \in \mathbb{R} \ /\ y \leq y_v\}$

2. Resumo gráfico

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
a > 0			
a < 0			

Módulo 12 · Função do 2º grau: pontos extremos

1. Pontos extremos

A função do 2º grau atinge o seu valor extremo na ordenada do vértice. Essa ordenada representa o valor mínimo quando a função é representada graficamente por uma parábola de concavidade voltada para cima, e o valor máximo quando a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

3. Ordenada do vértice: y_v

Graficamente, o y_v representa o ponto extremo da função do 2º grau. Se $a > 0$, y_v é o ponto de mínimo valor da função. Se $a < 0$, y_v é o ponto de máximo valor da função.

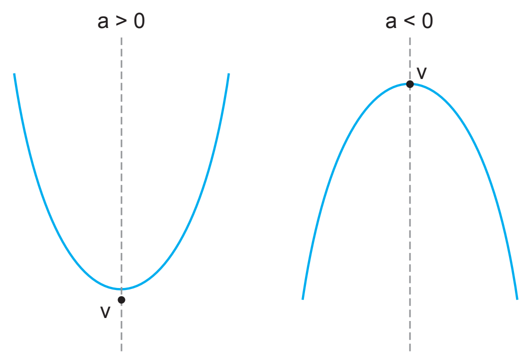
O valor de y_v pode ser obtido, também, substituindo-se a variável, na sentença, pelo x_v. Assim:

$y \ = f(x\ )$ ou, ainda:

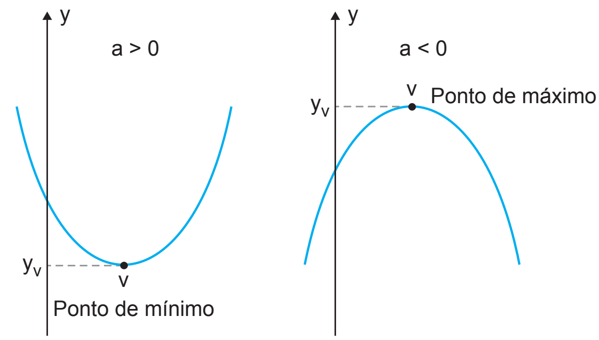
2. Abscissa do vértice: x_V

Graficamente, o x_V é o ponto por onde passa o eixo de simetria da parábola. É dado por:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$



$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

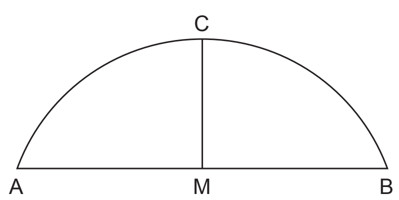


Módulo 13 · Função do 2º grau: exercícios

Aplicação

Situações do cotidiano, nas mais diversas áreas de conhecimento, são resolvidas estudando-se os pontos extremos (máximo e mínimo) das raízes, o sinal e a taxa de variação da função do 2º grau.

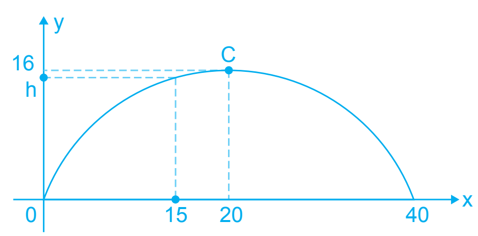
1. (Unifesp) A figura mostra um arco parabólico, ACB, de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. M é o ponto médio de AB:



A altura do arco, em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de M, é:

a) 15
b) 14
c) 13
d) 12
e) 10

Resposta: A



$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 40)$

$f(20) = a \cdot 20 \cdot (-20) = 16$

$a = -\dfrac{1}{25}$

$f(x) = -\dfrac{1}{25} \cdot x \cdot (x - 40)$

Módulos 14/15 · Inequações de 1º e 2º graus

1. Propriedades das desigualdades

P_1: $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$

P_2: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Consequência: $a + b > c \Rightarrow a + b - b > c - b$

$\therefore\ a > c - b$

P_3: $a > b$ e $c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c > b \cdot c & \text{se } c > 0 \\ a \cdot c < b \cdot c & \text{se } c < 0 \end{cases}$

2. Inequação do 1º grau

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ ax + b \geq 0 \\ ax + b < 0 \\ ax + b \leq 0 \end{cases} \qquad \text{com } a \neq 0$$

A resolução de uma inequação do 1º grau é feita com o mesmo procedimento matemático de resolução da equação do 1º grau, respeitando-se as propriedades das desigualdades.

3. Inequação do 2º grau

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \end{cases} \qquad \text{com } a \neq 0$$

A resolução da inequação do 2º grau é feita com o auxílio da função do 2º grau. Associamos a expressão do 2º grau à função do 2º grau, estudamos a sua variação de sinais e, posteriormente, selecionamos os valores da variável que tornam a sentença verdadeira.

Esses valores determinam o conjunto solução da inequação.

Módulo 16 · Inequações: produto e quociente (I)

1. Apresentação

$$f(x) \cdot g(x) \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

2. Resolução

a) Analisar a variação de sinais de cada uma das funções.

b) Determinar a variação de sinais da operação indicada.

c) Selecionar os valores da variável que tornam a sentença verdadeira e apresentar a solução.

Módulo 17 · Inequações: produto e quociente (II)

$$f(x)\cdot g(x)\begin{cases} >0 \\ \geq 0 \\ <0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{f(g)}\begin{cases} >0 \\ \geq 0 \\ <0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

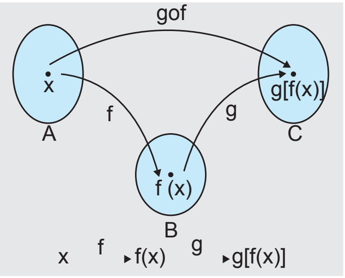
Módulo 18 · Função composta

1. Conceito

Vamos considerar uma função f definida de um conjunto A para um conjunto B, de tal maneira que todo elemento de B seja imagem de, pelo menos, um elemento de A. Consideremos, também, uma função g definida desse conjunto B para um conjunto C. Assim, podemos tomar um elemento x do conjunto A que, pela sentença f, determina uma imagem f(x) no conjunto B. Esta imagem f(x), pelo uso da sentença g, pode determinar no conjunto C uma imagem g[f(x)]. A sentença resultante dessa substituição de f(x) na sentença g será chamada de função composta de f com g.

2. Notação

A composição g[f(x)] poderá ser representada por (gof)(x), ou gof(x), ou, ainda, simplesmente, gof, que será lido g "bola" f.



Módulo 19 · Tipos de função

1. Função injetora

Uma função f definida do conjunto A no conjunto B é considerada injetora se elementos distintos de A apresentarem imagens distintas em B, ou seja, nenhum elemento de B será imagem de mais de um elemento de A.

$$f : A \to B \text{ é injetora} \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. Função sobrejetora

Uma função f definida do conjunto A no conjunto B é considerada sobrejetora se cada um dos elementos de B for imagem de, pelo menos, um elemento de A, ou seja, se o contradomínio de f for igual ao conjunto imagem.

$$f : A \to B \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow Im(f) = B$$

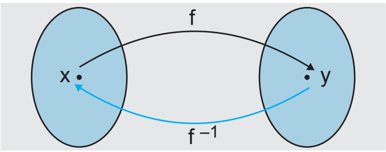
3. Função bijetora

Uma função f definida do conjunto A no conjunto B é considerada bijetora se, e somente se, ela apresentar características de função injetora e função sobrejetora.

Módulo 20 · Função inversa

1. Conceito

Dada a função f, necessariamente bijetora, definida de A em B, a sua inversa, de notação f^{-1}, é a função definida de B em A, de tal modo que se $(x; y) \in f$, então $(y; x) \in f^{-1}$.



$A = D(f) = CD(f^{-1}) = Im(f^{-1})$
$B = D(f^{-1}) = CD(f) = Im(f)$

2. Determinação

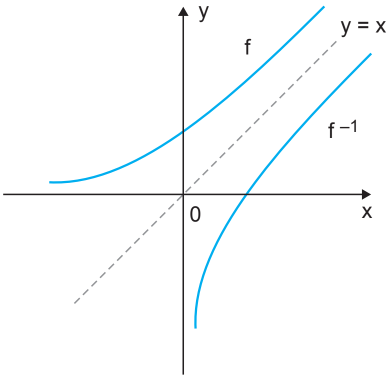
A determinação da sentença que define a inversa da função f é feita em duas etapas:

1) Expressar x em função de y.

2) "Permutar", para efeito de notação, x com y, substituindo por y^{-1} ou por f^{-1}.

3. Propriedades

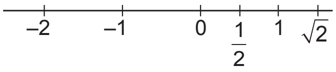
- P_1: $(f^{-1})^{-1} = f$
- P_2: Se $f[g(x)] = x$, então $g = f^{-1}$
- P_3: Os gráficos de uma função f e sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, a reta de equação $y = x$.



Módulo 21 · Função modular

1. Interpretação geométrica de módulo de um número real

Todo número real pode ser associado a um ponto pertencente a um eixo orientado, de origem 0, denominado eixo real.



Definimos módulo de um número real como a distância entre o ponto que o representa no eixo real e a origem desse eixo. Sendo módulo uma distância, é fácil concluir que apresentará sempre um valor maior ou igual a zero. A representação do módulo do número real x é dada $|x|$.

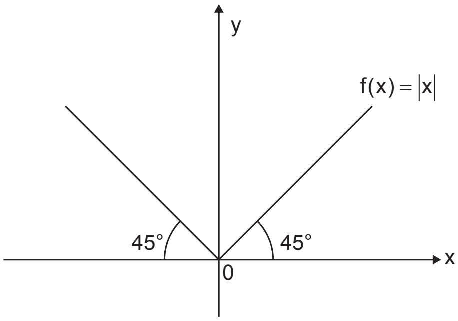
2. Definição de módulo de um número real

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

3. Função modular

- Sentença: $f(x) = |x|$
- Gráfico: semirretas bissetrizes do 1º e do 2º quadrante
- Domínio e contradomínio: $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$
- Conjunto Imagem: $\mathbb{R}_+$ (reais não negativos)

4. Resumo gráfico



Módulo 22 · Equação modular

1. Introdução

Para resolução das equações modulares, além da definição de módulo e de sua interpretação geométrica, é importante observarmos as propriedades decorrentes da definição de módulo.

2. Propriedades dos módulos

Sendo x e y números reais e a um número real e não negativo, temos:

- P_1: $|x| \geq 0$ para $\forall$ x real e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- P_2: $|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ ou $x = a$
- P_3: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = -y$ ou $x = y$
- P_4: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- P_5: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$
- P_6: $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, para $n \in \mathbb{N}^*$
- P_7: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
- P_8: $|x| > a \Rightarrow x < -a$ ou $x > a$

Módulo 23 · Inequação modular

1. Introdução

Para resolução das inequações modulares, assim como ocorreu com as equações modulares, além da definição de módulo e de sua interpretação geométrica, são importantes as propriedades dos módulos, em especial duas delas, que recordaremos a seguir.

2. Propriedades dos módulos

- P_7: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
- P_8: $|x| > a \Rightarrow x < -a$ ou $x > a$

Módulo 24 · Equação exponencial

$$\begin{cases} a^{E_1(x)} = a^{E_2(x)} \Rightarrow E_1(x) = E_2(x) \\ a^{E_1(x)} = b^{E_2(x)} \Rightarrow \text{Logaritmo} \end{cases}$$

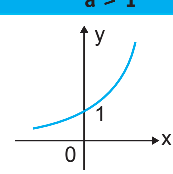
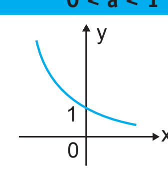
Para as bases positivas, distintas e diferentes de 1

Módulo 25 · Função exponencial

1. Apresentação

- Sentença: $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.
- Domínio e contradomínio: $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$.
- Conjunto imagem: $\mathbb{R}^*_+$ (reais positivos).

2. Resumo gráfico

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
crescente	decrescente

Módulo 26 · Inequação exponencial

$$a > 1 \begin{cases} a^{E_1(x)} > a^{E_2(x)} \Leftrightarrow E_1(x) > E_2(x) \\ a^{E_1(x)} < a^{E_2(x)} \Leftrightarrow E_1(x) < E_2(x) \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \begin{cases} a^{E_1(x)} > a^{E_2(x)} \Leftrightarrow E_1(x) < E_2(x) \\ a^{E_1(x)} < a^{E_2(x)} \Leftrightarrow E_1(x) > E_2(x) \end{cases}$$

Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Módulo 27 · Logaritmos: definição

1. Definição e nomenclatura

$$\log_a N = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = N \begin{cases} N - \text{logaritmando} \\ a - \text{base} \\ \alpha - \text{logaritmo} \end{cases}$$

2. Decorrências da definição

$\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a^n = n$

$\log_a a = 1$ $\qquad$ $a^{\log_a N} = N$

Módulo 28 · Logaritmos: condições de existência

1. Condições de existência

$$\log_a N = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = N \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

2. Logaritmo neperiano

- $\ell n\, x = \log_e x$, sendo e = 2,718282... O número **e** é irracional. Ele é dito número de Euler.
- A notação do logaritmo neperiano de x pode ser $\ell n\, x$.

Módulo 29 · Logaritmos: propriedades

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

- P_1: $\log_a(N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$
- P_2: $\log_a\left(\dfrac{N}{M}\right) = \log_a N - \log_a M$
- P_3: $\log_a B^n = n \cdot \log_a B$
- P_4: $\log_a \sqrt[n]{B} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a B$
- P_5: $\log_{a^n} B = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a B$

Módulo 30 · Logaritmos: equações logarítmicas

1. Equação logarítmica

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

- $\log_a E(x) = \alpha \Leftrightarrow E(x) = a^\alpha$
- $\log_a E_1(x) = \text{Log}_a E_2(x) \Leftrightarrow E_1(x) = E_2(x)$

2. Cologaritmo

- $\text{colog}_a N = -\log_a N = \log_a\left(\dfrac{1}{N}\right)$

3. Antilogaritmo

- $\text{antilog}_a \alpha = N \Leftrightarrow \log_a N = \alpha$

Módulo 31 · Logaritmos: mudança de base

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$$

Consequências da mudança de base:

$$\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$$

$$\log_c a \cdot \log_a N = \log_c N$$

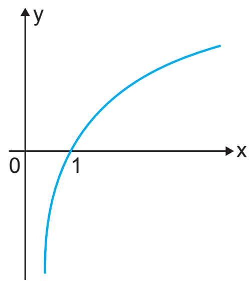
Módulo 32 · Logaritmos: função logarítmica

1. Apresentação

- Sentença: $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$
- Domínio: $D = \mathbb{R}^*_+$
- Contradomínio e conjunto imagem: $CD = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

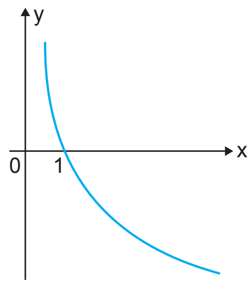
2. Resumo gráfico

a > 1



crescente

0 < a < 1



decrescente

Módulo 33 · Logaritmos: inequação logarítmica

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

$$a > 1 \begin{cases} \log_a E_1(x) > \log_a E_2(x) \Leftrightarrow E_1(x) > E_2(x) \\ \log_a E_1(x) < \log_a E_2(x) \Leftrightarrow E_1(x) < E_2(x) \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \begin{cases} \log_a E_1(x) > \log_a E_2(x) \Leftrightarrow E_1(x) < E_2(x) \\ \log_a E_1(x) < \log_a E_2(x) \Leftrightarrow E_1(x) > E_2(x) \end{cases}$$

Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Módulo 34 · Progressão aritmética: definição e termo geral

1. Definição

- $a_n = a_{n-1} + r$, sendo $n \in \mathbb{R}^*$ e r a razão da PA

2. Classificação

- $r > 0$: progressão aritmética crescente
- $r < 0$: progressão aritmética decrescente
- $r = 0$: progressão aritmética constante

3. Termo geral

- $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, com $n \in \mathbb{R}^*$

4. Artifícios

- PA com três termos: $(a - r, a, a + r) \to$ razão: r
- PA com quatro termos: $(a - 3r, a - r, a + r, a + 3r) \to$ razão: 2r
- PA com cinco termos: $(a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r) \to$ razão: r

5. Propriedade

Sejam a, b e c três termos consecutivos de uma PA. Tem-se que:

- $b = \dfrac{a + c}{2}$ (O termo médio é a média aritmética dos outros dois termos.)

Módulo 35 · Progressão aritmética: soma dos termos

1. Termos equidistantes dos extremos

Considere-se a PA: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_p, \ldots a_q, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Os termos a_p e a_q serão ditos equidistantes dos extremos se, e somente se, $p + q = n + 1$.

A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma desses extremos.

- $p + q = n + 1 \Rightarrow a_p + a_q = a_n + a_1$

2. Soma dos n primeiros termos da PA

Seja S_n a notação que representa a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Assim:

- $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Módulo 36 · Progressão geométrica: definição e termo geral

1. Definição

- $a_n = a_{n-1} \cdot q$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e r a razão da PG.

2. Classificação

- $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$: progressão geométrica crescente.
- $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$: progressão geométrica decrescente.
- $q = 1$: progressão geométrica constante
- $q < 0$: progressão geométrica alternante
- $a_1 = 0$ ou $q = 0$: progressão geométrica singular

3. Termo geral

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Artifícios

- PG com três termos: $\left(\frac{a}{q}; a; a \cdot q\right) \rightarrow$ razão: q
- PG com quatro termos: $\left(\frac{a}{q^3}; \frac{a}{q}; a \cdot q; a \cdot q^3\right) \rightarrow$ razão: q^2
- PG com cinco termos: $\left(\frac{a}{q^2}; \frac{a}{q}; a; a \cdot q; a \cdot q^2\right) \rightarrow$ razão: q

5. Propriedade

Sejam a, b e c três termos consecutivos de uma PG. Tem-se que:

- $b = \sqrt{a \cdot c} \Rightarrow b^2 = a \cdot c$ (O termo médio é a média geométrica dos outros dois termos.)

Módulo 37 · Progressão geométrica: soma dos termos

Seja S_n a notação que representa a soma dos **n** primeiros termos de uma progressão geométrica. Assim:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}, \text{ para } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \cdot n, \text{ para } q = 1$$

Módulo 38 · Progressão geométrica convergente

1. Condição

$$-1 < q < 1, \text{ ou seja, } |q| < 1$$

2. Limite da soma dos infinitos termos

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Módulo 39 · Números complexos: apresentação

1. Forma algébrica

$$z = a + bi, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

- a é a parte real $\rightarrow a = \mathrm{Re}(z)$.
- bi é a parte imaginária.
- b é o coeficiente da parte imaginária $\rightarrow b = \mathrm{Im}(z)$.
- i é a unidade imaginária $\rightarrow i^2 = -1$.
- $b = 0 \Rightarrow$ z é um número real.
- $a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow$ z é um número imaginário puro.

2. Igualdade de números complexos na forma algébrica

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

3. Adição e subtração de números complexos na forma algébrica

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

4. Multiplicação de números complexos na forma algébrica

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

5. Número complexo conjugado

$z = a + bi \Rightarrow \bar{z}\ a - bi$

Módulo 40 · Números complexos: divisão

1. Divisão de números complexos na forma algébrica

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$$

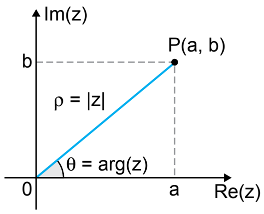
2. Potências, de expoente natural, da unidade imaginária

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$

$i^n = i^r$, sendo r o resto da divisão do número natural n por 4.

Módulo 41 · Números complexos: forma trigonométrica

1. Plano complexo – Plano de Argand-Gauss



- $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (módulo de z)
- $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho}$

  ($\theta \to$ argumento de z, $0 \le \theta < 2\pi$)
- $P \to$ afixo de z

2. Propriedades dos módulos

1ª) $|z| = |\overline{z}|$

2ª) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

3ª) $|z^n| = |z|^n$

4ª) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, para $w \neq 0$

3. Número complexo na forma trigonométrica

$$\boxed{z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)}$$

Módulo 42 · Números complexos: operações na forma trigonométrica

1. Multiplicação e divisão

$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]}$$

2. Potenciação

$z = \rho \cdot (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$$\boxed{z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\cdot\theta) + i\operatorname{sen}(n\cdot\theta)]}$$

Módulo 43 · Polinômios: introdução

1. Apresentação

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e a_n $\rightarrow$ constantes não nulas (coeficientes)
- $x \rightarrow$ um número qualquer real ou não real (variável)
- $n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0 \rightarrow$ expoentes da variável (números naturais)
- $a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, \ldots, a_{n-1}x, a_n \rightarrow$ termos do polinômio (monômios)

2. Grau do polinômio

Grau do monômio de maior grau. O grau do monômio é igual ao expoente da variável.

3. Valor numérico do polinômio

Dado o polinômio P(x), o seu valor numérico para $x = \alpha$,
α -
titui, no polinômio, a variável x por α e efetuam-se as operações indicadas.

4. Polinômio nulo

Um polinômio é dito identicamente nulo, ou simplesmente nulo, quando apresenta valor numérico zero para qualquer valor atribuído à variável. Não se define grau para polinômio nulo.

5. Raiz do polinômio

Valor da variável para o qual o valor numérico do polinômio é zero.

6. Polinômios idênticos

Dois polinômios são ditos idênticos quando apresentam o mesmo valor numérico para qualquer que seja o valor atribuído à variável.

Módulo 44 · Polinômios: divisão

1. Divisão de polinômios

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \qquad \begin{cases} P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ G_P = G_D + G_Q \\ R(x) \equiv 0 \text{ ou } G_R < G_D \end{cases}$$

2. Divisão por (x – a)
Dispositivo prático de Briot-Ruffini

A divisão de um polinômio P(x) pelo binômio do 1º grau (x – a) é efetuada de uma forma mais simples usando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

3. Teorema do resto

$$P(x) \div (x - a) \Rightarrow R = P(a)$$

4. Teorema de D'Alembert

$$P(x) \text{ é divisível por } (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Módulo 45 · Polinômios: critérios de divisibilidade

1. 1º critério

$$P(x) \text{ é divisível por } (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0.$$

2. 2º critério

$$P(x) \text{ é divisível por } (x - a) \cdot (x - b) \Leftrightarrow P(a) = 0 \text{ e } P(b) = 0.$$

3. 3º critério

P(x) será divisível por $(x - a)^2$ se, e somente se, P(x) for divisível por (x – a) e o quociente dessa divisão for, também, divisível por (x – a).

Critério geral

P(x) será divisível por D(x) se, e somente se, as raízes de D(x) forem também raízes de P(x).

Módulo 46 · Equações algébricas: introdução

1. Apresentação

Equação algébrica, ou equação polinomial, é um polinômio igualado a zero.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

2. Raiz ou solução

É o valor da variável que anula o polinômio. Resolver uma equação polinomial é obter todas as suas raízes e apresentá-las reunidas num conjunto que pode ser chamado de conjunto solução ou conjunto verdade.

3. Multiplicidade de uma raiz

Em algumas equações polinomiais, um mesmo número é raiz várias vezes. Nesses casos, esse número é dito raiz múltipla. Multiplicidade de uma raiz é o número de vezes que um mesmo número é raiz da equação. Quando o número é raiz uma única vez, ele é dito raiz simples da equação.

Módulo 47 · Equações algébricas: teorema fundamental da álgebra e teorema da decomposição

1. Teorema fundamental da álgebra

Toda equação algébrica de grau n, **n** $\in \mathbb{N}^*$, admite pelo menos uma raiz, real ou não real.

• Consequência – Toda equação algébrica de grau n, **n** $\in \mathbb{N}^*$, admite exatamente n raízes (reais ou não reais – múltiplas ou distintas).

2. Teorema da decomposição

Todo polinômio

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

apresentado na forma

$P(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots (x - x_n$

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ são as raízes da equação $P(x) = 0$.

3. Observação

Dado o polinômio

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

será uma de suas raízes.

Módulo 48 · Equações algébricas: relações de Girard

- $a_0x + a_1 = 0 \Rightarrow \left\{ x_1 = \dfrac{-a_1}{a_0} \right.$

- $a_0x^2 + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$

- $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \dfrac{-a_3}{a_0} \end{cases}$

Módulo 49 · Equações algébricas: teorema das raízes complexas não reais

Seja a equação algébrica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + ... + a_n = 0$, de coeficientes reais.

Se o número complexo, não real, $z = a + bi$ for uma raiz dessa equação, então o seu conjugado, $\overline{z} = a - bi$, também será raiz da equação.

Consequência

Numa equação algébrica, de coeficientes reais e grau ímpar, pelo menos uma de suas raízes é real.

Módulo 50 · Equações algébricas: pesquisa de raízes racionais

Dada a equação $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, de coeficientes inteiros, caso ela admita raízes racionais, essas serão da forma $\frac{p}{q}$, sendo p divisor de a_n e q divisor de a_0.

Módulo 51 · Matrizes: conceitos e operações

1. Definição

Matriz é uma tabela de números distribuídos de maneira organizada em linhas e colunas.

2. Apresentação

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Tipos de matrizes

- Matriz linha
- Matriz coluna
- Matriz nula
- Matriz quadrada
  - Matriz diagonal
  - Matriz identidade
- Matriz transposta
- Matriz oposta
- Matriz simétrica
- Matriz antissimétrica

4. Operações com matrizes

- Igualdade de matrizes
- Adição e subtração de matrizes
- Multiplicação de uma matriz por uma constante
- Mutiplicação de matrizes

5. Propriedades

P_1: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

P_2: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

P_3: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

P_4: $A \cdot I = I \cdot A = A$

P_5: $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

P_6: $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$

P_7: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Módulo 52 · Definição e cálculo de determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3

1. Definição

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada, calculado com auxílio da tabela que representa a matriz.

2. Apresentação

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn} \Rightarrow \det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Cálculo

- Matriz quadrada de ordem 1
- Matriz quadrada de ordem 2
- Matriz quadrada de ordem 3 – regra de Sarrus

Módulo 53 · Determinantes: teoremas de Laplace e Jacobi

1. Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n é dado pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer, linha ou coluna, pelos seus respectivos cofatores.

2. Teorema de Jacobi

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n não se altera quando a uma de suas filas soma-se uma outra fila, paralela à primeira, previamente multiplicada por uma constante.

Módulo 54 · Determinantes: propriedades, regra de Chió e teorema de Binet

1. Propriedades

O determinante é nulo quando a matriz apresenta:

- P_1: uma fila nula;
- P_2: duas filas paralelas iguais;
- P_3: duas filas paralelas proporcionais;
- P_4: o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta ($\det A = \det A^t$);
- P_5: o determinante de uma matriz troca de sinal quando se permuta a posição de duas de suas filas paralelas quaisquer;

- P_6: o determinante de uma matriz fica multiplicado pela constante α quando se multiplica uma única das filas da matriz pela constante α;
- Consequência: $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$, sendo n a ordem da matriz A;
- P_7: composição ou decomposição de determinantes;

$$\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 2 & b & y \\ 3 & c & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & d & x \\ 2 & e & y \\ 3 & f & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+d & x \\ 2 & b+e & y \\ 3 & c+f & z \end{vmatrix};$$

- P_8: o determinante de uma matriz quadrada que apresenta todos os elementos de um mesmo lado da diagonal principal iguais a zero, matriz triangular, é igual ao produto dos elementos dessa diagonal principal.

2. Teorema de Binet

Para as matrizes quadradas A e B, de mesma ordem, tem-se:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

3. Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

4. Regra de Chió

Dada uma matriz quadrada de ordem n, a regra de Chió apresenta uma outra matriz quadrada, de ordem (n – 1), com o mesmo determinante da primeira.

Módulo 55 · Matriz inversa

1. Definição

Dada a matriz A, quadrada e de ordem n, a sua inversa, de mesma ordem e com notação A^{-1}, é a matriz tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

2. Existência

Dada a matriz A, quadrada e de ordem n, temos:

- $\det A = 0 \Rightarrow \nexists\, A^{-1}$. Nesse caso, a matriz A é dita matriz singular.
- $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$. Nesse caso, a matriz A é dita matriz não singular.

3. Determinação

Dada a matriz A, quadrada e de ordem n, com $\det A \neq 0$, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adj}\, A$$

4. Propriedades

- $P_1 : \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $P_2 : \left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$
- $P_3 : \left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $P_4 : \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

5. Observação

Dada a matriz A, quadrada e de ordem n, e a sua inversa, representada por B, temos:

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{cof}\,(a_{ji})$$

Módulo 56 · Sistemas lineares: regra de Cramer

1. Apresentação

- Equação linear: equação na qual as incógnitas apresentam expoente igual a 1.
- Sistema linear: é um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares com n incógnitas.
- Solução de um sistema linear: conjunto ordenado que é solução de todas as equações desse sistema, simultaneamente.

2. Classificação

$$\text{Sistema linear} \begin{cases} \text{possível} \begin{cases} \text{determinado} \rightarrow \text{uma única solução} \\ \text{indeterminado} \rightarrow \text{infinitas soluções} \end{cases} \\ \text{impossível} \rightarrow \text{não admite solução} \end{cases}$$

3. Sistema normal

Chama-se sistema normal aquele que admite n ($n \geq 1$) equações e n incógnitas, cujo determinante D é diferente de zero. O determinante D é formado pelos coeficientes das incógnitas que devem ser colocadas na mesma ordem em todas as equações.

O sistema normal é sempre possível e determinado.

4. Regra de Cramer

Com o uso da regra de Cramer, a incógnita α é determinada por $\alpha = \frac{D_\alpha}{D}$, sendo D_α o determinante D quando se substituem os coeficientes da incógnita α pelos termos independentes das equações. O uso da regra de Cramer só é possível na resolução do sistema chamado normal.

Módulo 57 · Sistemas lineares: método do escalonamento

1. Apresentação

Um sistema linear é dito escalonado quando, de uma equação para a outra, diminui o número de incógnitas.

2. Procedimento para o escalonamento de um sistema linear

Um sistema linear não tem alteração no seu conjunto solução quando:

- troca-se a ordem de suas equações;
- multiplicam-se ou dividem-se os coeficientes de uma de suas equações por uma constante não nula;
- soma-se a uma de suas equações uma outra equação, previamente multiplicada por uma constante.

Módulo 58 · Sistemas lineares: classificação, discussão e sistema linear homogêneo

1. Classificação

• Se o determinante D for diferente de zero, num sistema linear com o número de equações igual ao número de incógnitas, o sistema é possível e determinado (sistema normal).

• Caso o determinante D seja igual a zero ou o número de equações seja diferente do número de incógnitas, deve-se escalonar o sistema e, então, ele será:

– possível e indeterminado, se o número de incógnitas passar a ser maior que o número de equações;

– impossível, se apresentar uma sentença falsa.

2. Sistema linear homogêneo (SLH)

• Sistema linear homogêneo é aquele em que o termo independente de todas as equações é igual a zero.

• Propriedade do SLH

– Todo sistema linear homogêneo é possível, pois a n-ênupla (0, 0, 0,..., 0) é sempre solução. Ela é chamada também de solução trivial ou imprópria do sistema.

– Quando o SLH é indeterminado, além da solução trivial, ele admite outras infinitas soluções que são as chamadas soluções próprias do sistema.