Estratégia
Militares

Estratégia
Militares

Álgebra Elementar

Matemática

@profvictorso

Conjuntos Numéricos

@profvictorso

Conjunto dos Números Naturais

Axiomas de Peano

I) Todo número natural tem um único sucessor.
II) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
III) Existe um único número natural, chamado “um” e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
IV) Seja X um conjunto de números naturais, se $1 \in X$ e o sucessor de todo elemento de X pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Princípio da Indução Finita (PIF)

O PIF diz que:
Uma propriedade $P(n)$ relativa aos números naturais $n \geq n_0$ é válida se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:
I) $P(n_0)$ é válida. Para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.
II) Para $K \in \mathbb{N}$, se $P(K)$ é válida, então $P(K+1)$ também é válida.

Princípio da Indução Finita (PIF)

Demonstre $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Operações Fundamentais

Adição e Multiplicação

a) Associativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(ab)c=a(bc)$$

b) Comutativa:

$$a+b=b+a$$
$$ab=ba$$

c) Distributiva

$$a(b+c)=ab+ac$$

d) Elemento neutro da adição:

$$a+0=a$$

e) Elemento neutro da multiplicação:

$$a\cdot 1=a$$

Desigualdades

Propriedades da desigualdade

a) Transitividade:

$$a < b \text{ e } b < c \rightarrow a < c$$

b) Tricotomia

$$a < b \; ou \; a = b \; ou \; a > b$$

c) Monotonicidade: se $a < b$ e $c > 0$

$$a + c < b + c$$

$$ac < bc$$

Conjunto dos Números Inteiros

Propriedades da soma e multiplicação

a) Comutativa

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

b) Associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

c) Distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

d) Elemento neutro da soma

$$a + 0 = a$$

e) Elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a$$

Propriedades da soma e multiplicação

f) Elemento simétrico

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$

g) Se $c \neq 0$:

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

h) $a \cdot 0 = 0$

i) $(-a)b = -ab$

j) $(-a)(-b) = ab$

k) $ab = 0 \rightarrow a = 0 \; ou \; b = 0$

Propriedades da desigualdade

a) Tricotomia dos Inteiros

$a \in \mathbb{Z} \rightarrow a > 0 \; ou \; a = 0 \; ou \; a < 0$

b) Translação

Se $a \geq b$ e $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \geq b + c$

c) Se $a > b \; e \; c > 0$

$$ac > bc$$

Propriedades da desigualdade

d) Se $a > b\ e\ c < 0$

$$ac < bc$$

e) Transitividade

$$\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \rightarrow a + c \geq b + d$$

Divisibilidade

Prof. Victor So

Divisibilidade

Prof. Victor So

Divisibilidade

(OBMEP) Qual dos números abaixo é divisível por 2 e 3?

a) 334
b) 335
c) 336
d) 337
e) 338

Divisibilidade

Prove que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Divisibilidade

Prove que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Divisibilidade

Prove que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Números Primos

Prof. Victor So

Decomposição em fatores primos

Decomposição em fatores primos

Quantidade de divisores de um número

Máximo Divisor Comum

Máximo Divisor Comum

Prof. Victor So

Máximo Divisor Comum

Propriedades

a) $mdc(n, n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $mdc(m, n) = mdc(n, m)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ não ambos nulos

c) $mdc(n, 0) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Algoritmo de Euclides

Algoritmo de Euclides

HORA DE PRATICAR!

Questão

Calcule o MDC entre 11352 e 40.

Mínimo Múltiplo Comum

Mínimo Múltiplo Comum

Prof. Victor So

Mínimo Múltiplo Comum

Conjunto dos Números Reais

Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

Operações com números racionais

Se $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$, temos:

a) Igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

b) Adição

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

c) Multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Propriedades dos racionais

Se $a, c, e \in \mathbb{Z}$ e $b, d, f \in \mathbb{Z}^*$:

a) Associativa

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

b) Comutativa

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

c) Elemento neutro da adição

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$$

d) Elemento simétrico

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$$

Propriedades dos racionais

e) Elemento neutro da multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

f) Distributiva

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

Conjunto dos Números Irracionais $\mathbb{I}$

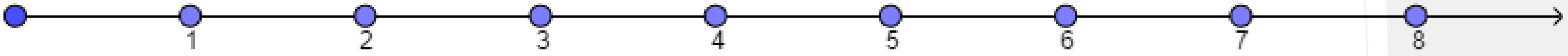
Definição:

Se $\boldsymbol{x}$ é um número irracional, então ele não poderá ser escrito como uma fração de irredutível.

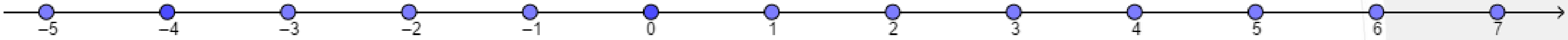
Conjunto dos Números Irracionais $\mathbb{I}$

Prof. Victor So

Reta dos Naturais



Reta dos Inteiros



Reta dos Reais

Reta dos Reais

Potenciação e Radiciação

$$a \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Operações usuais

a) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

b) $\sqrt{a}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a$

c) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

d) $\sqrt{a+b}^{\,2} = a+b$

e) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Desigualdades para o Conjunto dos Reais

1) Tricotomia dos Reais

$$a \in \mathbb{R} \to (a < 0 \; ou \; a = 0 \; ou \; a > 0)$$

2) Translação

$$a \geq b \; e \; c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a + c \geq b + c$$

3) Produto da desigualdade

$$a \geq b \; e \; c \geq 0 \to ac \geq bc$$

$$a \geq b \; e \; c \leq 0 \to ac \leq bc$$

4) Inversa

$$a \geq b \; e \; ab > 0 \to \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$

5) Transitividade

$$a \geq b \; e \; b \geq c \to a \geq c$$

6) Soma da desigualdade

$$a \geq b \; e \; c \geq d \to a + c \geq b + d$$

7) Potenciação

$$a \geq b \; e \; a, b > 0 \to a^2 \geq b^2$$

Produto Notável e Fatoração

@profvictorso

Produto notável

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Fatoração

a) $a(x+y) = ax + ay$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

d) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

g) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

h) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

i) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$

j) $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$

k) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - b^{2m-1}a + b^{2m}\right)$

Demonstrações

a) $a(x + y) = ax + ay$

$$a(x + y) = ax + ay$$

b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demonstrações

c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Situação análoga à (b), a única diferença é a presença do sinal negativo em b. Aplicando a distributiva:

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

d) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Distributiva:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Demonstrações

e) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \left(a^2 + 2ab + b^2\right)(a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Colocando $3ab$ em evidência:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Demonstrações

f) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Situação análoga à letra (e):

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\big(a+(-b)\big)^3 = a^3 + (-b)^3 + 3a(-b)\big(a+(-b)\big)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Demonstrações

g) $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Vamos manipular a expressão $a^3 + b^3$.

Somando e subtraindo os termos $a^2b \ e \ ab^2$ da expressão, temos:

$$a^3 + b^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2$$

Fatorando a expressão:

$$a^3 + a^2b + ab^2 + \mathrm{b}^3 - a^2b - ab^2$$

$$a^2(a + b) + b^2(a + b) - ab(a + b)$$

$$(a + b)\left(a^2 + b^2 - ab\right)$$

$$(a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

Demonstrações

h) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$$a^3 - b^3 = a^3 - b^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2 = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 + a^2b - ab^2$$

$$= a^2(a-b) + b^2(a-b) + ab(a-b)$$

$$= (a-b)\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$

$$= \left(a-b)(a^2 + ab + b^2\right)$$

Demonstrações

i) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

Somando e subtraindo os termos $3a^2b\ e\ 3ab^2$ da expressão:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3a^2b - 3a^2b + 3ab^2 - 3ab^2$$

Organizando os termos:

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$$

$$\left(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2\right) + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$$

Fazendo $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$:

$$(a + b)^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$$

Fatorando os termos:

$$[(a + b)^3 + c^3] - 3ab(c + a + b)$$

Demonstrações

Lembrando que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, temos:

$$[(a + b)^3 + c^3] - 3ab(c + a + b)$$

$$(a + b + c)\left[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\right] - 3ab(a + b + c)$$

$$(a + b + c)\left(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab\right)$$

$$(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$$

Demonstrações

j) $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$

$$A = a\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$$

$$= a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^{n-2}a^2 + ab^{n-1}$$

$$B = b\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$$

$$= a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^{n-1}a + b^n$$

$$A - B = a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^{n-2}a^2 + ab^{n-1} - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^{n-1}a + b^n)$$

$$A - B = a^n - b^n$$

Demonstrações

Também podemos escrever:

$$A - B = a\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right) - b\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$$

$$A - B = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$$

$$\therefore a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right)$$

Demonstrações

k) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - b^{2m-1}a + b^{2m}\right)$

$$A = a\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + a^{2m-2}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^2 - b^{2m-1}a + b^{2m}\right)$$
$$= a^{2m+1} - a^{2m}b + a^{2m-1}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^3 - b^{2m-1}a^2 + b^{2m}a$$

$$B = b\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + a^{2m-2}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^2 - b^{2m-1}a + b^{2m}\right)$$
$$= a^{2m}b - a^{2m-1}b^2 + a^{2m-2}b^3 - \cdots + b^{2m-1}a^2 - b^{2m}a + b^{2m+1}$$

$$A + B$$
$$= a^{2m+1} - a^{2m}b + a^{2m-1}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^3 - b^{2m-1}a^2 + b^{2m}a + a^{2m}b - a^{2m-1}b^2$$
$$+ a^{2m-2}b^3 - \cdots + b^{2m-1}a^2 - b^{2m}a + b^{2m+1}$$

$$A + B = a^{2m+1} + b^{2m+1}$$

Demonstrações

Também podemos escrever:

$$A+B=a\left(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^{2}-\cdots+b^{2m-2}a^{2}-b^{2m-1}a+b^{2m}\right)+$$
$$b\left(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^{2}-\cdots+b^{2m-2}a^{2}-b^{2m-1}a+b^{2m}\right)$$

$$A+B=(a+b)\left(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^{2}-\cdots+b^{2m-2}a^{2}-b^{2m-1}a+b^{2m}\right)$$

$$\therefore a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)\left(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^{2}-\cdots+b^{2m-2}a^{2}-b^{2m-1}a+b^{2m}\right)$$

Fatoração usando raízes

Aplicação

Simplifique

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$$

Aplicação

Encontre o valor da expressão:

$$\sqrt{5999^2 + 5999 + 6000}$$

Aplicação

Sabendo que $a + b + c = 0$ e $abc = 1$, calcule $a^3 + b^3 + c^3$

(Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

a) $x^2 + y^2 - 9y^2 - 2xy$

(Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

b) $x^6 - y^6$

(Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

f) $x^6 - 1$

(Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

m) $a^5 + b^5 - ab^4 - a^4b$

(Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

n) $(x-y)^3+(y-z)^3-(x-z)^3$

Redução ao Absurdo

@profvictorso

Redução ao Absurdo

O método da Redução ao Absurdo é usado para provar a veracidade de uma proposição.

A Redução ao Absurdo fundamenta-se no **princípio do terceiro excluído** e no **princípio da não-contradição**.

Se queremos provar que uma proposição p é verdadeira usando o método da redução ao absurdo, devemos supor que $\neg p$ é verdadeira e, utilizando as definições e teorias envolvidas, tentamos chegar a um absurdo (ou contradição). Desse modo, se a negação da proposição é falsa (sendo uma contradição), então a própria proposição é verdadeira.

Questão

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Supondo que $\sqrt{2}$ seja racional, então ele poderá ser escrito como um número racional da forma irredutível $\frac{b}{a}$, a, b primos entre si e positivos.

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$$

$$\sqrt{2}a = b$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e desenvolvendo:

$$\left(\sqrt{2}a\right)^2 = b^2$$

$$\sqrt{2}^2 a^2 = b^2$$

$$2a^2 = b^2$$

Questão

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

$2a^2$ é um número par, então pela igualdade b^2 deve ser um número par.

$$b^2 \text{ é } par \Rightarrow b \text{ é } par$$

Logo, podemos escrever $b = 2c$.

Substituindo $b = 2c$ na equação:

$$2a^2 = b^2$$
$$2a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$
$$a^2 = 2c^2$$

a^2 pode ser escrito como múltiplo de 2, logo ele é par.

$$a^2 \text{ é } par \Rightarrow a \text{ é } par$$

Absurdo! a e b não podem ser pares ao mesmo tempo, pois ambos são primos entre si.

$$\therefore \sqrt{2} \text{ é irracional}$$

Questão

Se a^2 é par, então a é par.

Vamos supor que a não seja par, ou seja, a é ímpar.

Se a é ímpar, podemos escrever:

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Elevando a ao quadrado, obtemos:

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$ é um inteiro, então vamos definir:

$$2k^2 + 2k = \beta \in \mathbb{Z}$$

Substituindo em a^2:

$$a^2 = 2\beta + 1$$

Como $\beta \in \mathbb{Z}$, então a^2 é ímpar. Mas da hipótese inicial, a^2 é par. Logo, chegamos a um absurdo.

Disso, concluímos que a é par.

Sistemas de Numeração

@profvictorso

Sistema decimal

Cada algarismo de um número na base 10 deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$.

Veja os exemplos:

$$357 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$1048 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$15 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$1{,}15 = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

$$-5{,}2 = -\left(5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1}\right)$$

Sistema de numeração na base b

Seja b a base de um sistema de numeração e $b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$.

Podemos representar os números usando a seguinte sequência de símbolos:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_b$$

Onde a_i representa o algarismo do número. Esse algarismo deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Um detalhe que devemos nos atentar é caso $b > 10$, os algarismos (a_i) acima ou igual a 10 devem ser substituídos por letras maiúsculas do alfabeto:

$$A = 10$$

$$B = 11$$

$$C = 12$$

$$\vdots$$

Sistema de numeração na base b

Como o sistema de numeração usual é o decimal, representamos os números nessa base sem os parênteses e o subíndice b.

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots \equiv \pm(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_{10}$$

Para representar os negativos, basta inserir o sinal negativo na frente do maior algarismo.

Vamos ver alguns sistemas de numeração.

Sistemas de numeração

Sistema binário

Esse é o sistema de numeração na base 2.

O sistema binário é usado na computação para representar os bits.

Os números na base 2 são conhecidos como números binários.

Cada algarismo de um número binário pode assumir os valores 0 ou 1.

Exemplo de números binários:

$$(10101{,}101)_2$$

$$(111{,}111)_2$$

Sistemas de numeração

Sistema octal

Sistema de numeração na base 8. Os algarismos devem pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Exemplo:

$$(7103{,}25)_8$$

Sistemas de numeração

Sistema hexadecimal

Sistema de numeração na base 16. Perceba que nesse caso, os algarismos podem ser maiores ou iguais a 10. Dessa forma, os algarismos devem pertencer ao conjunto:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

Exemplos:

$$F5A4$$

$$100FFF$$

$$ABCDEF123$$

Lembrando que nesse caso: $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$.

Mudança de base b para base decimal

Para converter um número na base b para a base decimal, basta expandir o número da seguinte forma:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \cdots$$

Exemplos:

$$(13{,}2)_4 = 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1}$$

$$= 7{,}5$$

$$(ACF)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$$

$$= 2767$$

Mudança de base decimal para base b

Seja $(X)_{10}$ a representação de um número na base decimal. Então:

$$(X)_{10} = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots)_b$$

Queremos encontrar os algarismos a_i. Vamos separar os dígitos de X em parte inteira e parte fracionária.

Definindo X_i como a parte inteira de X e X_f como a parte fracionária, temos:

$$X_i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

$$X_f = \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{a_{-3}}{b^3} + \cdots$$

Para encontrar X_i, usamos o método conhecido como divisões sucessivas e encontramos a parte inteira de X. Veja:

$$X_i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Mudança de base decimal para base b

Dividindo a equação por b, encontramos:

$$\frac{X_i}{b} = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1 + \frac{a_0}{b}$$

a_0 é o resto da divisão de X_i por b e $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1$ é um número inteiro.

Se dividirmos o número $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1$ por b novamente, encontramos a_1. E assim repetimos essa operação até encontrarmos todos os dígitos.

Na prática, dividimos o número X_i por b sucessivamente até que o quociente das divisões sucessivas seja zero.

Para encontrar X_f, usamos o método multiplicações sucessivas. Veja:

$$X_f = \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{a_{-3}}{b^3} + \cdots$$

Mudança de base decimal para base b

Multiplicando a equação por b:

$$X_f b = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{b^1} + \frac{a_{-3}}{b^2} + \cdots$$

Dessa forma, a_{-1} torna-se a parte inteira da operação acima e $\frac{a_{-2}}{b^1} + \frac{a_{-3}}{b^2} + \cdots$ é a parte fracionária.

Se multiplicarmos essa parte fracionária por b, encontramos a_{-2}.

Repetimos essa operação até encontrar todos os dígitos fracionários.

Na prática, multiplicamos X_f por b até que não haja mais parte fracionária.

Mudança de base decimal para base b

Exemplo:

Vamos transformar o número $745{,}4$ na base decimal para a base 8.

Mudança de base decimal para base b

Mudança de Base

base b_1 → base decimal → base b_2

Mudança de base de potências do mesmo primo

Quando as bases forem potências de um mesmo número primo, podemos usar o método do reagrupamento para mudar as bases.

Exemplo:

Converter $(1010101111)_2$ para a base 16:

Nesse caso, devemos ver quantos algarismos binários são necessários para representar o maior algarismo hexadecimal.

O maior é $F = 15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1111.$

Vemos que precisamos de 4 algarismos binários. Então, devemos separar o número na base 2 em blocos de 4 algarismos:

$$(1010101111)_2 = (10.1010.1111)_2$$
$$= (0010.1010.1111)_2$$

Mudança de base de potências do mesmo primo

Perceba que completamos o bloco mais à esquerda com zeros, isso deverá ser feito quando faltar números nesse bloco.

Os algarismos na base 16 serão a conversão de cada bloco em decimal.

$$0010 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$$

$$1010 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10 = A$$

$$1111 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 15 = F$$

Dessa forma:

$$(1010101111)_2 = (2AF)_{16}$$

Exemplo

Obtenha a representação na base 4 do número $(10101{,}01)_2$

Convertendo para decimal:

$$(10101{,}01)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$
$$= 21{,}25$$

21,25 é fracionário, então devemos dividir em parte inteira e parte fracionária.

Convertendo 21,25 para a base 4:

21	4		
1	5	4	
	1	1	4
		1	0

Desigualdades

@profvictorso

Desigualdade de Cauchy

Para $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}}$$

Demonstração:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Teorema de Cauchy

Para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n}}$$

Demonstração:

Vamos provar por PIF.

Verificando a veracidade da propriedade para $n = 1$:

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \geq 1$$

Logo, é válido para $n = 1$.

Agora, vamos provar a tese através da hipótese para $k \in \mathbb{N}$:

Hipótese:

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}_+^* \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$$

Tese:

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}_+^* \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

Para todos os termos unitários:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1} = 1$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + 1 \geq k + 1$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

Para termos distintos:

Temos que ter necessariamente termos maiores que 1 e termos menores que 1.

Pela hipótese, temos:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{k-1} \cdot (x_k \cdot x_{k+1}) = 1$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + (x_k \cdot x_{k+1}) \geq k$$

Sem perda de generalidade, vamos supor $x_k > 1$ e $x_{k+1} < 1$. Somando $-x_k \cdot x_{k+1}$ nos dois lados da desigualdade:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + (x_k \cdot x_{k+1}) - x_k \cdot x_{k+1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1}$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1}$$

Somando $x_k + x_{k+1}$ nos dois lados da desigualdade acima:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1} + x_k + x_{k+1}$$

Agora, vamos somar $(1-1)$ nos dois lados da desigualdade:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}+1-1\geq k-x_k\cdot x_{k+1}+x_k+x_{k+1}+1-1$$

Vamos fatorar o lado direito da desigualdade:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geq k+1-x_k\cdot x_{k+1}+x_{k+1}+x_k-1$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geq k+1-x_{k+1}(x_k-1)+(x_k-1)$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geq k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1})$$

Da suposição inicial:

$$x_k>1\Rightarrow x_k-1>0$$

$$x_{k+1}<1\Rightarrow 1-x_{k+1}>0$$

Portanto:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geq k+1+\underbrace{(x_k-1)}_{>0}\underbrace{(1-x_{k+1})}_{>0}\geq k+1$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$$

Demonstração:

Para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (a_1x + b_1)^2 \geq 0 \\ (a_2x + b_2)^2 \geq 0 \\ \vdots \\ (a_nx + b_n)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2 \geq 0 \\ a_2^2x^2 + 2a_2b_2x + b_2^2 \geq 0 \\ \vdots \\ a_n^2x^2 + 2a_nb_nx + b_n^2 \geq 0 \end{cases}$$

Somando as desigualdades, temos:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq 0$$

Para essa inequação ser satisfeita $\forall x$, devemos ter $\Delta \leq 0$:

$$\Delta = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \leq 0$$

$$\therefore (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

Desigualdade das Médias

Para $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\boldsymbol{M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H}}$$

Onde:

$$M_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Demonstração:

1) $M_Q \geq M_A$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

Fazendo $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$, temos:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)n$$

Dividindo ambos os lados por $n^2 > 0$:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n^2} \leq \frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)}{n}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

$$M_A \leq M_G$$

$$\therefore M_G \geq M_A$$

2) $M_A \geq M_G$

Pela definição de M_G:

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$
$$\Rightarrow M_G^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

Dividindo a igualdade por M_G^n:

$$\frac{x_1}{M_G} \cdot \frac{x_2}{M_G} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{M_G} = 1$$

Usando o teorema de Cauchy:

$$\frac{x_1}{M_G} \cdot \frac{x_2}{M_G} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{M_G} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x_1}{M_G} + \frac{x_2}{M_G} + \dots + \frac{x_n}{M_G} \geq n$$

Logo:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq M_G$$
$$\therefore M_A \geq M_G$$

3) $M_G \geq M_H$

Sabemos que $M_A \geq M_G$, então:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

Substituindo $x_i = \frac{1}{a_i}, 0 < i < n$, temos:

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}}$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\therefore M_G \geq M_H$$

(ITA/2002) Mostre que $\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$, para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

O valor numérico de $C_{8,4}$ é:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$= 70$$

Assim, temos que provar a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > 70$$

Como $MA \geq MG$, usando os termos $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$MA \geq MG$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$$

Somando-se 2 na desigualdade obtida e elevando à quarta potência, encontramos:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq (2+2)^4$$

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq (4)^4$$

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 256 > 70$$

Congruências Lineares

@profvictorso

Definição

Seja $a, b \in \mathbb{Z}$. a é congruente a b módulo n quando a dividido por n deixa o mesmo resto da divisão de b por n.

A sua notação usual é dada por:

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

Lê-se a é congruente a b módulo n.

Exemplos:

Definição

Propriedades

Para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$:

I) Adição:

$$\begin{cases} a \equiv b \ (mod\ n) \\ c \equiv d \ (mod\ n) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{a} \pm \mathrm{c} \equiv b \pm d \ (mod\ n)$$

II) Multiplicação:

$$\begin{cases} a \equiv b \ (mod\ n) \\ c \equiv d \ (mod\ n) \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \ (mod\ n)$$

Propriedades

Para $k \in \mathbb{Z}$:

III) Adição de uma constante:

$$a \equiv b \ (mod\ n) \Rightarrow a \pm k \equiv b \pm k \ (mod\ n)$$

IV) Multiplicação de uma constante:

$$a \equiv b \ (mod\ n) \Rightarrow ak \equiv bk \ (mod\ n)$$

V) Potência:

Seja $n \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv b \ (mod\ n) \Rightarrow a^n \equiv b^n \ (mod\ n)$$

HORA DE PRATICAR!

Questão

Complete as lacunas abaixo:

a) $21 \equiv (\quad) \ (mod\ 5)$

b) $34 \equiv (\quad) \ (mod\ 7)$

c) $-64 \equiv (\quad) \ (mod\ 3)$

d) $-11 \equiv (\quad) \ (mod\ 5)$

e) $1021 \equiv (\quad) \ (mod\ 2)$

f) $7589 \equiv (\quad) \ (mod\ 15)$

Questão

Calcular o resto da divisão de $\left(1006^{1006}+1004^{1004}\right)^{1005}$ por 5.

Podemos usar a propriedade (V):

$$a \equiv b \ (mod\ n) \Rightarrow a^n \equiv b^n \ (mod\ n)$$

$$\left(1006^{1006}+1004^{1004}\right)^{1005} \equiv \left((1)^{1006}+(-1)^{1004}\right)^{1005} \ (mod\ 5)$$

$$\left((1)^{1006}+(-1)^{1004}\right)^{1005} = (1+1)^{1005} = 2^{1005}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \left(1006^{1006}+1004^{1004}\right)^{1005} \equiv 2^{1005} \ (mod\ 5)}$$

$$2^{1005} = 2 \cdot 2^{1004}$$

$$= 2 \cdot 2^{4 \cdot 251}$$

$$\boldsymbol{= 2 \cdot \left(2^4\right)^{251}}$$

$$2^{1005} = 2 \cdot \left(2^4\right)^{251}$$

$$2 \cdot \left(2^4\right)^{251} \equiv 2 \cdot (1)^{1005} \ (mod\ 5)$$

$$2 \cdot \left(2^4\right)^{251} \equiv 2 \ (mod\ 5)$$

$$\therefore \left(1006^{1006}+1004^{1004}\right)^{1005} \equiv 2 \ (mod\ 5)$$

Questões

@profvictorso

(ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

(ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

(ITA/2019)

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

(ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

II. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) verdadeira(s)

II. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ITA/2018)

Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$

b) $3x^2 + 6x + 8$

c) $13x^2 + 16x + 12$

d) $7x^2 + 5x + 9$

e) $9x^2 + 3x + 10$

(ITA/2018)

Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$

b) $3x^2 + 6x + 8$

c) $13x^2 + 16x + 12$

d) $7x^2 + 5x + 9$

e) $9x^2 + 3x + 10$

(ITA/2003)

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24

b) 36

c) 48

d) 54

e) 72

Prof. Victor So

(ITA/2003)

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24

b) 36

c) 48

d) 54

e) 72

(IME/2020)

Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:

a) 46 e 277

b) 45 e 275

c) 44 e 275

d) 45 e 277

e) 46 e 275

Observação:

cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

Para A, o algarismo mais significativo dos seus elementos na base decimal é 1:

$$\begin{matrix} 1 \\ 10, \dots, 19 \\ 100, \dots, 199 \\ 1000 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A} = \left\{1, \underbrace{10, \dots, 19}_{10\ \boldsymbol{elementos}}, \underbrace{100, \dots, 199}_{100\ \boldsymbol{elementos}}, 1000\right\}}$$

A cardinalidade do conjunto $\boldsymbol{A}$ é:

$$\boxed{\boldsymbol{n(A)} = 1 + 10 + 100 + 1 = 112}$$

Os elementos de $\boldsymbol{B}$ na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2:

$$\boldsymbol{B} = \left\{\begin{matrix} (2)_4 \\ (20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4 \\ (200)_4, \dots, (233)_4 \\ (2000)_4, \dots, (2333)_4 \\ (20000)_4, \dots, (23333)_4 \end{matrix}\right\}$$

Os elementos de $\boldsymbol{B}$ na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2:

$$(20000)_4 = 2 \cdot 4^4 = 512$$

$$(200000)_4 = 2 \cdot 4^5 = 2048 > 1000$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{matrix} (2)_4 \\ (20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4 \\ (200)_4, \dots, (233)_4 \\ (2000)_4, \dots, (2333)_4 \\ (20000)_4, \dots, (23333)_4 \end{matrix} \right\}$$

Converter os números de $\boldsymbol{B}$ e escrevê-los na base decimal:

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{matrix} (2)_4 \\ (20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4 \\ (200)_4, \dots, (233)_4 \\ (2000)_4, \dots, (2333)_4 \\ (20000)_4, \dots, (23333)_4 \end{matrix} \right\}$$

$$(2)_4 \Rightarrow 2$$

$$\underbrace{(20)_4}_{2\cdot 4=8}, (21)_4, (22)_4, \underbrace{(23)_4}_{(30)_4-1=3\cdot 4-1=11} \Rightarrow 8, \dots, 11$$

$$\underbrace{(200)_4}_{2\cdot 4^2=32}, \dots, \underbrace{(233)_4}_{(300)_4=3\cdot 4^2-1=47} \Rightarrow 32, \dots, 47$$

$$\underbrace{(2000)_4}_{2\cdot 4^3=128}, \dots, \underbrace{(2333)_4}_{(3000)_4-1=3\cdot 4^3-1=191} \Rightarrow 128, \dots, 191$$

$$\underbrace{(20000)_4}_{2\cdot 4^4=512}, \dots, \underbrace{(23333)_4}_{(30000)_4-1=3\cdot 4^2-1=767} \Rightarrow 512, \dots, 767$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \left\{2, \underbrace{8, \dots, 11}_{4\ \boldsymbol{elementos}}, \underbrace{32, \dots, 47}_{16\ \boldsymbol{elementos}}, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ \boldsymbol{elementos}}, \underbrace{512, \dots, 767}_{256\ \boldsymbol{elementos}}\right\}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \left\{1, \underbrace{10, \dots, 19}_{10\ \boldsymbol{elementos}}, \underbrace{100, \dots, 199}_{100\ \boldsymbol{elementos}}, 1000\right\}}$$

Intersecção de $\boldsymbol{A}$ com $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \left\{\mathbf{10}, \mathbf{11}, \underbrace{\mathbf{128}, \dots, \mathbf{191}}_{\mathbf{64}\ \boldsymbol{elementos}}\right\}$$

$$\boxed{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = 66}$$

As cardinalidades das diferenças são dadas por:

$$\boldsymbol{n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=112-66=46}$$

$$\boldsymbol{n(B-A)=341-66=275}$$

(IME/2020)

Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:

a) 46 e 277

b) 45 e 275

c) 44 e 275

d) 45 e 277

e) 46 e 275

Observação:

cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

(IME/2020)

O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:

a) $[1, 16000]$

b) $[16001, 17000]$

c) $[17001, 18000]$

d) $[18001, 19000]$

e) $[19001, \infty)$

Inicialmente, vamos calcular o número de divisores de 1800:

$$
\begin{array}{l|l}
1800 & 2 \\
900 & 2 \\
450 & 2 \\
225 & 3 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

O número de divisores de 1800 é dado pelo produto dos expoentes dos seus fatores somado a 1:

$$\boldsymbol{n_D} = (3+1)(2+1)(2+1) = 36$$

Temos 36 divisores para o número $\mathbf{1800}$.

O menor número natural ímpar que possui 36 divisores é da forma:

$$\boldsymbol{I} = 3^{\boldsymbol{a}} \cdot 5^{\boldsymbol{b}} \cdot 7^{\boldsymbol{c}} \cdot 11^{\boldsymbol{d}} \cdot \ldots$$

Ela deve satisfazer:

$$(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})(\boldsymbol{b}+\mathbf{1})(\boldsymbol{c}+\mathbf{1})(\boldsymbol{d}+\mathbf{1})\ldots=\mathbf{36}$$

Fatorando-se o número 36, temos as seguintes possibilidades:

$$36 = \begin{cases} 36 \cdot 1 \\ 18 \cdot 2 \\ 9 \cdot 4 \\ 3 \cdot 12 \\ \mathbf{3 \cdot 3 \cdot 4} \\ \mathbf{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \\ 6 \cdot 6 \\ \mathbf{2 \cdot 3 \cdot 6} \end{cases}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 21$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$$

$$= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 27$$

(IME/2020)

O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:

a) $[1, 16000]$

b) $[16001, 17000]$

c) $[17001, 18000]$

d) $[18001, 19000]$

e) $[19001, \infty)$

(IME/2018)

Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

a) 2008010

b) 2012061

c) 2034145

d) 2044145

e) 2052061

(IME/2018)

Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

a) 2008010

b) 2012061

c) 2034145

d) 2044145

e) 2052061

(IME/2018)

Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

Prof. Victor So

Prof. Victor So

(IME/2018)

Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x-1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:

a) 10001111

b) 11011011

c) 11100111

d) 11011110

e) 11110001

Prof. Victor So

(IME/2018)

Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x-1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:

a) 10001111

b) 11011011

c) 11100111

d) 11011110

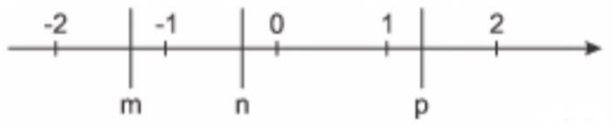
e) 11110001

Questões

@profvictorso

(AFA/2018)

Na reta dos números reais abaixo, estão representados os números m, n e p.



Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) $\sqrt{\frac{m-n}{p}}$ não é um número real.

( ) $(p+m)$ pode ser um número inteiro.

( ) $\frac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

A sequência correta é

a) V-V-F b) F-V-V c) F-F-F d) V-F-V

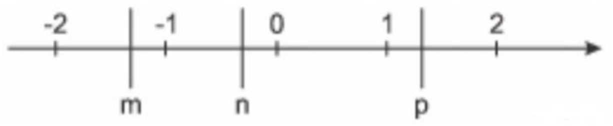
I. $\sqrt{\frac{m-n}{p}}$ não é um número real.

II. $(p+m)$ pode ser um número inteiro.

III. $\frac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

(AFA/2018)

Na reta dos números reais abaixo, estão representados os números m, n e p.



Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

(   ) $\sqrt{\frac{m-n}{p}}$ não é um número real.

(   ) $(p+m)$ pode ser um número inteiro.

(   ) $\frac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

A sequência correta é

a) V-V-F   b) F-V-V   c) F-F-F   d) V-F-V

(AFA/2017)

Sejam os números reais

$$a = \frac{\sqrt{(-1)^2} \cdot 0{,}1222\ldots}{(1{,}2)^{-1}}$$

$$b = \text{comprimento de uma circunferência de raio 1}$$

$$c = \sqrt{12} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{147}$$

Sendo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ os conjuntos numéricos, assinale a alternativa FALSA.

a) $\{a, c\} \subset \mathbb{Q}$

b) $c \in (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$

c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \supset \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

d) $\{a, c\} \subset (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})$

Prof. Victor So

(AFA/2017)

Sejam os números reais

$$a = \frac{\sqrt{(-1)^2} \cdot 0{,}1222\ldots}{(1{,}2)^{-1}}$$

$$b = \text{comprimento de uma circunferência de raio 1}$$

$$c = \sqrt{12} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{147}$$

Sendo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ os conjuntos numéricos, assinale a alternativa FALSA.

a) $\{a, c\} \subset \mathbb{Q}$

b) $c \in (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$

c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \supset \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

d) $\{a, c\} \subset (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})$

(AFA/2013)

Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$$A = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$$

$$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$$

$$D = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos $A, B\ e\ D$, nesta ordem, é

a) $-3; 0{,}5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}; \sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10};\ -5$ e 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}; 3$ e $2,\overline{31}$

Prof. Victor So

(AFA/2013)

Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$$A = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$$

$$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$$

$$D = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos $A, B\ e\ D$, nesta ordem, é

a) $-3; 0{,}5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}; \sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10};\ -5$ e 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}; 3$ e $2,\overline{31}$

(AFA/2011)

Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) α pode ser escrito na forma $\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha \in [(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$

d) $[(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})] \supset \alpha$

Prof. Victor So

(AFA/2011)

Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) α pode ser escrito na forma $\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha \in [(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$

d) $[(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})] \supset \alpha$

Prof. Victor So

(AFA/2011)

Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) α pode ser escrito na forma $\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha \in [(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$

d) $[(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})] \supset \alpha$

(Escola Naval/2018)

Quantos números inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7 ?

a) 47

b) 142

c) 289

d) 333

e) 428

Prof. Victor So

Prof. Victor So

(Escola Naval/2018)

Quantos números inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7 ?

a) 47

b) 142

c) 289

d) 333

e) 428

(Escola Naval/2013)

Considere uma fração cuja soma de seus termos é 7. Somando-se três unidades ao seu numerador e retirando-se três unidades de seu denominador, obtém-se a fração inversa da primeira. Qual é o denominador da nova fração?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

(Escola Naval/2013)

Considere uma fração cuja soma de seus termos é 7. Somando-se três unidades ao seu numerador e retirando-se três unidades de seu denominador, obtém-se a fração inversa da primeira. Qual é o denominador da nova fração?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

(Escola Naval/2013)

Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir:

1º) se a renda bruta anual é menor que $R\$\ 10.000{,}00$ não é taxado;

2º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$\ 10.000{,}00$ e menor que $R\$\ 20.000{,}00$ é taxado em 10%;

3º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$\ 20.000{,}00$ é taxado em 20%.

A pessoa que ganhou no ano $R\$\ 17.370{,}00$ após ser descontado o imposto, tem duas possibilidades para o rendimento bruto. A diferença entre esses rendimentos é

a) $R\$\ 17.370{,}00$ b) $R\$\ 15.410{,}40$ c) $R\$\ 3.840{,}50$ d) $R\$\ 2.412{,}50$ e) $R\$\ 1.206{,}60$

Prof. Victor So

(Escola Naval/2013)

Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir:

1º) se a renda bruta anual é menor que $R\$\ 10.000,00$ não é taxado;

2º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$\ 10.000,00$ e menor que $R\$\ 20.000,00$ é taxado em 10%;

3º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$\ 20.000,00$ é taxado em 20%.

A pessoa que ganhou no ano $R\$\ 17.370,00$ após ser descontado o imposto, tem duas possibilidades para o rendimento bruto. A diferença entre esses rendimentos é

a) $R\$\ 17.370,00$ b) $R\$\ 15.410,40$ c) $R\$\ 3.840,50$ d) $R\$\ 2.412,50$ e) $R\$\ 1.206,60$

(EFOMM/2019)

Numa equação, encontramos o valor de 884. Para chegar a esse resultado, somamos os quadrados de dois números pares, consecutivos e positivos. Determine o quociente da divisão do maior pelo menor

a) $0,87$.

b) $0,95$.

c) $1,03$.

d) $1,07$.

e) $1,10$.

Prof. Victor So

(EFOMM/2019)

Numa equação, encontramos o valor de 884. Para chegar a esse resultado, somamos os quadrados de dois números pares, consecutivos e positivos. Determine o quociente da divisão do maior pelo menor

a) $0{,}87$.

b) $0{,}95$.

c) $1{,}03$.

d) $1{,}07$.

e) $1{,}10$.

(EFOMM/2018)

Um aluno do 1º ano da EFOMM fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuía e pagou, após cada compra, $R\$\,2{,}00$ de estacionamento. Se, após toda essa atividade, ainda ficou com $R\$\,20{,}00$, a quantia que ele possuía inicialmente era de

a) $R\$\,814{,}00$.

b) $R\$\,804{,}00$.

c) $R\$\,764{,}00$.

d) $R\$\,714{,}00$.

e) $R\$\,704{,}00$.

Prof. Victor So

Prof. Victor So

(EFOMM/2018)

Um aluno do 1º ano da EFOMM fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuía e pagou, após cada compra, $R\$\ 2{,}00$ de estacionamento. Se, após toda essa atividade, ainda ficou com $R\$\ 20{,}00$, a quantia que ele possuía inicialmente era de

a) $R\$\ 814{,}00$.

b) $R\$\ 804{,}00$.

c) $R\$\ 764{,}00$.

d) $R\$\ 714{,}00$.

e) $R\$\ 704{,}00$.

(EFOMM/2018)

No "Baile dos FERAS", os organizadores notaram que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes, no início do evento, era de $\frac{7}{10}$. Ao final do show, os organizadores observaram no local o aumento de 255 homens e a redução de 150 mulheres, de modo que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes depois disso passou a ser $\frac{9}{10}$. Qual é o número total de pessoas que estiveram presentes em algum momento no show?

a) 3.954.

b) 3.570.

c) 3.315.

d) 1.950.

e) 1.365.

Prof. Victor So

(EFOMM/2018)

No “Baile dos FERAS”, os organizadores notaram que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes, no início do evento, era de $\frac{7}{10}$. Ao final do show, os organizadores observaram no local o aumento de 255 homens e a redução de 150 mulheres, de modo que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes depois disso passou a ser $\frac{9}{10}$. Qual é o número total de pessoas que estiveram presentes em algum momento no show?

a) 3.954.

b) 3.570.

c) 3.315.

d) 1.950.

e) 1.365.

(EFOMM/2009)

Qual é o número inteiro cujo produto por 9 é um número natural composto apenas pelo algarismo 1?

a) 123459

b) 1234569

c) 12345679

d) 12345789

e) 123456789

Prof. Victor So

(EFOMM/2009)

Qual é o número inteiro cujo produto por 9 é um número natural composto apenas pelo algarismo 1?

a) 123459

b) 1234569

c) 12345679

d) 12345789

e) 123456789

Obrigado

@profvictorso

Estratégia
Militares