

VESTIBULARES
2021



Sumário

Apresentação	3
Instruções Gerais	3
Análise da aula	4
<i>Essa Disciplina no Vestibular</i>	4
<i>Roteiro da Aula</i>	4
<i>Questões da Aula Separadas por Nível</i>	6
Bizus	7



Apresentação



Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

SOBRE O BIZUÁRIO: Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

Instruções Gerais

Chegamos em uma das aulas com maior incidência no vestibular. Com 9% de representatividade nos últimos anos de vestibular de ITA, polinômios também é uma das matérias mais interdisciplinares que tem no edital, pois geralmente caem muitas questões de trigonometria, determinantes e até de geometria plana que envolvem polinômios. Essa é uma das aulas mais pesadas, então é interessante que você tenha paciência para pensar nos exercícios que não está conseguindo, pois esse processo de tentativa e erro é interessante para desenvolver resiliência em provas. A parte de polinômios está dividida em duas aulas, nessa e na próxima. É bom que você estude na ordem que as aulas aparecem, faz mais sentido didaticamente. Dito isso, vamos para a aula.



Quanto à questão de como estudar o Buzuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.
- “Sangue no olho” e “faca nos dentes” são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

Observação: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

Análise da aula

Essa Disciplina no Vestibular

Para essa aula, a parte de polinômios que mais cai no vestibular são os capítulos de operações fundamentais e de divisão. Na prática, a segunda aula de polinômios vai ter uma aplicabilidade na prova ainda maior, pois trata de equações algébricas. Porém, é interessante que você faça essa aula muito bem para obter um maior rendimento na próxima. Praticamente todas as questões que envolvem equações do terceiro grau no vestibular você irá usar o algoritmo de Briot-Ruffini, que é visto nessa aula. Outra relação muito importante, que pode parecer trivial, é saber que $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$. Isso será abordado com frequência pelo ITA em diversas questões. Sabendo disso, vamos para o roteiro!

Roteiro da Aula



- ❖ A aula começa com conceitos bem básicos de polinômios. Se você já estudou essa matéria antes pode pular todo o capítulo **01**.
- ❖ O capítulo **02** dessa aula é referente à identidade de polinômios. Pode parecer algo muito básico, e é, mas possui uma aplicabilidade enorme tanto nas demonstrações de teoremas quanto em questões. Saber que se dois polinômios são iguais para todo x implica na igualdade dos coeficientes é bem interessante. Esse parte é aplicável também em funções, na parte de equações funcionais.
- ❖ No capítulo **03** temos as operações básicas de polinômios. Se você já conhece o método de divisão de polinômios, pode pular esse capítulo. Se não, certifique-se de que você sabe como multiplicar e somar polinômios.
- ❖ No capítulo **04**, o qual é a parte mais densa da aula, temos o método de dividir polinômios. Parece complicado, mas com prática vamos entender bem o que está acontecendo.
- ❖ O capítulo **04** inicia com o método de Descartes para divisão de polinômios. Esse é um método demorado de fazer essa conta e se torna inviável em situação de prova. É bom você conhecê-lo, mas dificilmente será usado no vestibular.
- ❖ O tópico **4.2** não é interessante para a prova do ITA. Porém, Por ser muito curto, acho legal você lê-lo e entender o que está escrito ali por questão de prática e para abrir sua mente para novas ideias de demonstração.
- ❖ Em **4.3** temos o método que será usado, de fato, para dividir polinômios na prova. É muito parecido com o método usado para dividir valores numéricos. Não há segredo para aprender a dividir polinômios e ficar bom nisso, com a prática de muitos exercícios você ganhará velocidade e precisão nos cálculos.
- ❖ Em **4.4** temos um algoritmo muito usado nas provas do ITA. Também não há segredo no algoritmo de Briot-ruffini, o bizu é aprender a técnica do algoritmo e praticar muito que, com o tempo, você obterá excelência nos cálculos. Nesse mesmo capítulo, em **4.4.1**, é mostrado um método de divisão de polinômios por $ax + b$. Em caso de prova, o melhor jeito é fazer por algoritmo de divisão mesmo, pois você terá isso massificado, reduzindo assim as chances de errar e o tempo de execução da questão.
- ❖ Em **4.5** temos o teorema do resto e em **4.6** temos o teorema de D'Alembert, que é consequência do teorema do resto. São teoremas interessantes e relativamente tranquilos de serem entendidos e aplicados.
- ❖ Não se esqueça que um bizu muito forte para polinômios é fatorá-lo no produto de fatores que levam em conta as suas raízes. Tomemos um polinômio $P(x)$ de grau n , com raízes x_1, x_2, \dots, x_n e com coeficiente líder a . Podemos escrever $P(x)$ da forma: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Isso é bem importante.
- ❖ Todo o capítulo **05** pode ser considerado um apêndice, pois se trata de uma matéria que não cai diretamente no vestibular do ITA. No ITA cai esboço de gráfico, mas sempre é um gráfico que dá para fazer com artifícios do ensino médio. Porém, saber cálculo pode ajudar. Nesse caso, para o ITA, o interessante é saber calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$. Sabendo disso,



aconselho dar uma lida no capítulo, entender o exemplo da aula e ir direto para a lista de questões.

- ❖ Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar no exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Se force a fazer de forma ligeira, sem pensar muito. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizado possível. Você que já é mais experiente pode seguir as questões na ordem que aparecerem.

Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Polinômios que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

Fáceis	Médias	Difíceis
1 até 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 42, 43, 102	39, 40, 41, 48, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 97, 98, 99, 100, 101	44, 45, 46, 48, 49, 51, 52, 53, 94, 95



- ❖ **Questão:** Seja um polígono regular de n lados de vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ inscrito em uma circunferência de raio 1. Calcule:

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \cdot \dots \cdot \overline{A_1A_n}$$

Solução:

Seja a equação $z^n = 1$

Sabemos por fatoração que $(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1$

E seja z_1, z_2, \dots, z_n as raízes de $z^n = 1$.

Assim, podemos escrever:

$$z^n - 1 = 0$$

$$(z - 1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = z^n - 1$$

$$(z - 1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$$

$$(z - 1)[(z - z_2) \dots (z - z_n) - (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})] \equiv 0$$

Existem infinitos valores de z tal que

$$(z - z_2) \dots (z - z_n) - (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = 0$$

O único polinômio que satisfaz essa condição é o polinômio identicamente nulo. Sendo assim, temos:

$$(z - z_2) \dots (z - z_n) - (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) \equiv 0$$

Em particular, para $z = 1$,

$$(1 - z_2) \dots (1 - z_n) = n$$

Aplicando o módulo na equação, obtemos:

$$|1 - z_2| \dots |1 - z_n| = n$$

Dos complexos, sabemos que as soluções de uma equação da forma $z^n = 1$ formam um polígono regular centrado na origem e inscrito em uma circunferência de raio 1 em que uma das soluções se encontra no ponto $(1,0)$ no plano de Argand-Gauss. Sendo assim, $|1 - z_2| \dots |1 - z_n|$ me dá exatamente o valor do produto inicial pedido na questão! Logo:

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \cdot \dots \cdot \overline{A_1A_n} = n$$



Essa questão é muito boa, pois treina essa ideia de fatorar o polinômio levando em consideração as raízes da equação. Além de envolver de forma bem interessante os conceitos de números complexos com polinômios.

- ❖ Nunca se esqueça que o ITA adora misturar polinômios com PA, PG, determinantes, etc. Geralmente essas são questões tranquilas na prova e você deve garanti-las.

