Função Quadrática

INTRODUÇÃO

Sabe-se que, em cerca de 2000 a.C., os babilônios já estavam familiarizados com equações do segundo grau, aplicadas à resolução de problemas práticos. Um matemático indiano, de nome Bhaskara, promoveu um enorme avanço na resolução de equações do segundo grau ao desenvolver uma fórmula para o cálculo das suas raízes.

A função quadrática é uma das funções mais importantes da Matemática. Seu gráfico descreve uma curva extremamente importante, denominada parábola, que serve, por exemplo, para descrever a trajetória de um projétil lançado obliquamente no ar. Hoje, reconhecemos que a função quadrática é muito indicada para a modelagem de problemas nos quais é necessária a determinação de quantidades máximas ou mínimas, indicadas pelas coordenadas do seu vértice.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são constantes reais e $a \neq 0$, é dita função quadrática ou função polinomial do segundo grau. Seu gráfico é uma curva chamada **parábola**.

RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Fórmula de Bhaskara

Para encontrar as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, devemos fazer $f(x) = 0$.

Assim, obtemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Logo, temos $ax^2 + bx = -c$.

Multiplicando os dois membros por 4a, obtemos:

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando b^2 aos dois membros da equação, a fim de completar o quadrado do lado esquerdo, temos:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

O lado esquerdo da equação é um trinômio quadrado perfeito. Logo, podemos escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Denotando pela letra grega delta (Δ) o termo $b^2 - 4ac$, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Esse resultado é conhecido como Fórmula de Bhaskara.

OBSERVAÇÕES

i) Se $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais.

ii) Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais.

iii) Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas.

Exemplo:

Calcular as raízes da função $f(x) = x^2 + x - 12$.

Igualando a expressão a zero, temos $x^2 + x - 12 = 0$.

Ora, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.

Daí, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1.(-12) \Rightarrow \Delta = 1 + 48 \Rightarrow \Delta = 49$

Assim: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2}$

Denotando por x_1 e x_2 as raízes procuradas, temos:

$x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ e $x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Portanto, $S = \{-4, 3\}$.

Soma e produto das raízes

Sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Valem as seguintes relações:

i) Soma das raízes da função

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

ii) Produto das raízes da função

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo:

Calcular, utilizando as relações de soma e produto, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5 \text{ e}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 . x_2 = \frac{6}{1} \Rightarrow x_1 . x_2 = 6$$

Assim, os números que satisfazem essas condições são 2 e 3.

Portanto, S = {2, 3}.

FORMA FATORADA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, que possua raízes reais x_1 e x_2, pode ser escrita como um produto de duas funções do primeiro grau.

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Exemplo:

Escrever a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada.

Cálculo das raízes:

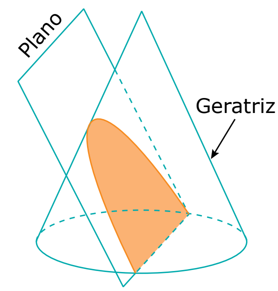
$\Delta = (-6)^2 - 4 . 2 . 4 \Rightarrow \Delta = 36 - 32 \Rightarrow \Delta = 4$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 . 2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{4} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2.$$

Assim, a função $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada, é $f(x) = 2(x - 1)(x - 2)$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Já sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Tal curva é definida, geometricamente, como a interseção de um cone de revolução e um plano paralelo a uma geratriz do cone, conforme figura a seguir:



Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, devemos seguir a seguinte sequência:

i) Determinar a concavidade da parábola.

Quando **a** (coeficiente de x^2) é positivo, a parábola tem concavidade para cima.

Quando **a** é negativo, a parábola tem concavidade para baixo.

ii) Determinar a interseção da parábola com o eixo Oy.

A parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, c).

iii) Determinar as interseções da parábola com o eixo Ox (raízes).

Conforme visto anteriormente, a existência ou não de raízes reais depende do valor de Δ, na Fórmula de Bhaskara.

Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais, ou seja, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um único ponto (tangencia o eixo Ox).

Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos.

iv) Determinar as coordenadas (x_v, y_v) do vértice **V** da parábola.

Vértice é o ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria. Como x_v pertence ao eixo de simetria, as abscissas dispostas de maneira simétrica em relação a x_v possuem a mesma imagem.

Logo, x_v é a média aritmética das raízes.

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ou } x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Substituindo, na função polinomial de 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos:

$$y_v = ax_v^2 + b.x_v + c \underset{x_v = \frac{-b}{2a}}{\Rightarrow} \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Portanto, o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Determinados esses valores, basta esboçarmos a parábola.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Fazer o esboço da parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolução:

Concavidade:

Temos $a = 2 > 0$, ou seja, a concavidade está voltada para cima.

Interseção com o eixo Oy:

Temos que $c = 1$, ou seja, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

Raízes:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, 1 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \Delta = 1$

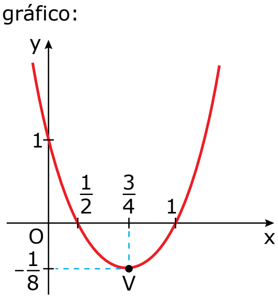
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\,.\,2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = 1$$

Logo, as raízes são $\frac{1}{2}$ e 1.

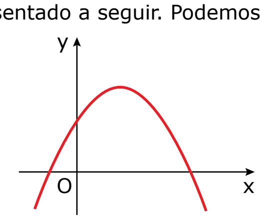
Vértice $V = (x_v, y_v)$:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-3)}{2\,.\,2} = \frac{3}{4} \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4\,.\,2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Esboço do gráfico:



02. (FAFI-MG) O gráfico de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ está representado a seguir. Podemos afirmar que:



A) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$.
B) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$.
C) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$.
D) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
E) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$.

Resolução:

Como a concavidade da parábola está voltada para baixo, temos $a < 0$. Além disso, observe que a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre em um ponto de ordenada positiva. Conforme visto anteriormente, esse ponto é igual a $(0, c)$. Logo, temos que $c > 0$.

Para investigar o sinal do **b**, vamos considerar a abscissa do vértice da parábola. Sabemos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

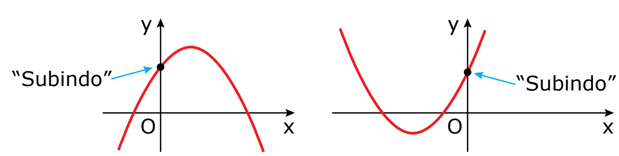
Pelo gráfico, verificamos que x_v é positivo. Como **a** é negativo, temos que $-b$ deve ser negativo. Isso ocorre somente se **b** for positivo.

Logo, $b > 0$.

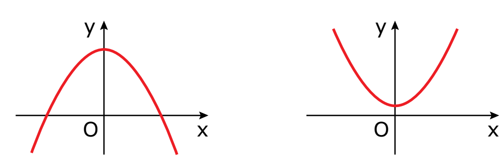
Regra prática para a determinação do sinal de b

No exercício anterior, mostramos uma maneira de determinar o coeficiente **b**. Veremos agora uma regra prática para a obtenção desse sinal.

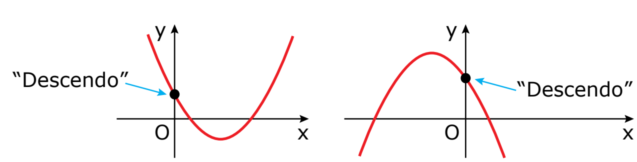
i) Se a função de 2º grau estiver num trecho crescente quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b > 0$.



ii) Se o vértice encontra-se exatamente no eixo das ordenadas, então $b = 0$.



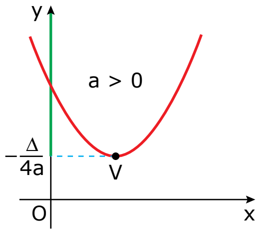
iii) Se a função de 2º grau estiver em um trecho decrescente quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b < 0$.



MATEMÁTICA

VALOR MÁXIMO E VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO

Se a > 0, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ apresenta concavidade voltada para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por **y**, que coincide com a ordenada do vértice y_v. Essa ordenada é o valor mínimo da função.

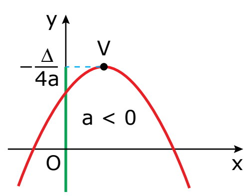


i) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função.

ii) A imagem (Im) da função, caso o domínio seja o conjunto dos números reais, é dada por:

$$\boxed{Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}}$$

Se a < 0, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade voltada para baixo. Nesse caso, verificamos que existe um valor máximo assumido por **y** e, analogamente, dizemos que a ordenada do vértice y_v é o valor máximo da função.



i) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.

ii) A imagem (Im) da função, caso o domínio seja o conjunto dos números reais, é dada por:

$$\boxed{Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}}$$

OBSERVAÇÃO

Caso o domínio de função não seja o conjunto dos números reais, o conjunto imagem dessa função pode depender das imagens das extremidades do domínio. O exercício resolvido a seguir ilustra esse ponto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. (UFU-MG) Sendo **x** e **y** números reais tais que $0 \leq x \leq 3$ e $y = x^2 - 2x$, os valores mínimo e máximo de **y** são, nessa ordem, iguais a

A) 0 e 6.
B) −1 e 9.
C) −1 e 6.
D) −1 e 3.
E) 3 e 9.

Resolução:

Raízes da função:

$x^2 - 2x = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 4$

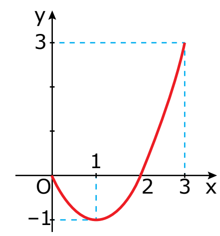
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$

Portanto, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Vértice:

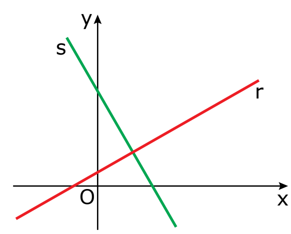
$$\left.\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2.a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-2)}{2.1} \Rightarrow x_v = 1 \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4.a} \Rightarrow y_v = -\frac{4}{4.1} \Rightarrow y_v = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = (1, -1)$$

A ordenada do ponto **V** é o valor mínimo da função, qualquer que seja o intervalo de **x** considerado. Para encontrar o valor máximo, primeiramente deve-se perceber que a função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$. Logo, os candidatos de valor máximo são y(0) = 0 e y(3) = 3 (extremidades do intervalo do domínio). Como y(3) > y(0), o valor máximo de **y** é 3. Observe o esboço do gráfico da função.

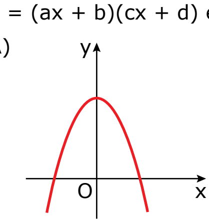


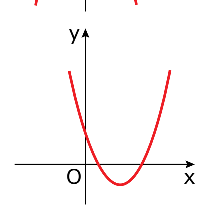
Os valores mínimo e máximo de **y** são, respectivamente, −1 e 3.

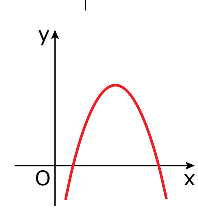
04. (UFV-MG) Na figura a seguir, a reta r: y = ax + b tem coeficiente angular positivo, e a reta s: y = cx + d tem coeficiente angular negativo.

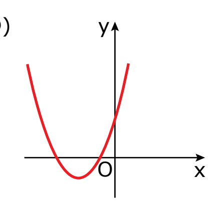


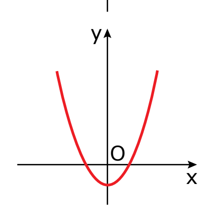
A figura que melhor representa o gráfico do trinômio y = (ax + b)(cx + d) é:

A)


B)


C)


D)


E)


Resolução:

Efetuando a multiplicação dos termos, obtemos $y = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Trata-se de uma função quadrática. Analisando as retas dadas, temos que **a** é positivo, **b** é positivo, **c** é negativo e **d** é positivo. Portanto, ac é negativo (concavidade voltada para baixo). Além disso, bd é positivo, ou seja, a parábola intercepta o eixo Oy em um ponto de ordenada positiva. Entre os gráficos, o único com essas características é o da alternativa A.

05. (Fafeid-MG) No instante t = 0, uma bola é atirada verticalmente para cima, de uma altura de 5 cm acima do solo. Após **t** segundos, a sua altura **s**, em cm, acima do solo, é dada por $s = 5 + 40t - 16t^2$. Assim, é correto afirmar que a altura máxima da bola, acima do solo, em cm, é igual a

A) 30.

B) 25.

C) 55.

D) 20.

Resolução:

O gráfico de s(t) é parabólico, com concavidade voltada para baixo. Assim, a altura máxima corresponde à ordenada do vértice:

$\Delta = 40^2 - 4(-16)5 \Rightarrow \Delta = 1\,600 + 320 \Rightarrow \Delta = 1\,920$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1\,920}{4(-16)} \Rightarrow y_v = -\frac{1\,920}{-64} \Rightarrow y_v = 30$$

A altura máxima alcançada é 30 cm.

06. (PUC Minas) Uma empresa fabrica **x** peças por dia, e seu lucro, em reais, é dado pela função $L(x) = 100(9 - x)(x - 1)$. O lucro máximo obtido pela empresa, por dia, em reais, é

A) 1 200.

B) 1 300.

C) 1 400.

D) 1 500.

E) 1 600.

Resolução:

Efetuando os produtos indicados, obtemos:

$L(x) = -100x^2 + 1\,000x - 900$

Observe que o lucro L(x) é uma função quadrática do número de peças **x**. Como a concavidade está voltada para baixo, o lucro máximo corresponde à ordenada do vértice.

$\Delta = 1\,000^2 - 4(-100)(-900) \Rightarrow$

$\Delta = 1\,000\,000 - 360\,000 \Rightarrow \Delta = 640\,000$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{640\,000}{4(-100)} \Rightarrow y_v = -\frac{640\,000}{-400} \Rightarrow$$

$y_v = 1\,600$

O lucro máximo é igual a R$ 1 600,00.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) Sejam **f** e **g** funções reais dadas por $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 2 + x$.

Os valores de **x**, tal que f(x) = g(x), são

A) x = 0 ou x = –1.

B) x = 0 ou x = 2.

C) x = 0 ou x = 1.

D) x = 2 ou x = –1.

E) $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

02. EEET (UEG-GO) Um processo de produção é modelado pela seguinte função $f(t) = -\alpha t^2 + 160\alpha t$, em que **t** é a temperatura do processo em graus Celsius e α é uma constante positiva. Para que se atinja o máximo da produção, a temperatura deve ser

A) –40 °C.

B) –80 °C.

C) 0 °C.

D) 40 °C.

E) 80 °C.

03. MA8Y (IFBA) Jorge planta tomates em uma área de sua fazenda, e resolveu diminuir a quantidade **Q** (em mil litros) de agrotóxicos em suas plantações, usando a lei $Q(t) = 7 + t^2 - 5t$, onde **t** representa o tempo, em meses, contado a partir de t = 0. Deste modo, é correto afirmar que a quantidade mínima de agrotóxicos usada foi atingida em

A) 15 dias.

B) 1 mês e 15 dias.

C) 2 meses e 10 dias.

D) 2 meses e 15 dias.

E) 3 meses e 12 dias.

04. (FGV-SP–2020) O número de turistas **x** que comparecem diariamente para um passeio de barco, relaciona-se com o preço **p** em reais cobrado por pessoa através da relação p = 300 – 2x.

Se o barco tiver 100 lugares, qual a receita máxima que pode ser obtida por dia?

A) R$ 10 000,00

B) R$ 11 500,00

C) R$ 10 750,00

D) R$ 11 000,00

E) R$ 11 250,00

05. THE4 (UECE) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções quadráticas dadas por $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ e $g(x) = x^2 + 8x + 17$. Se **M** é o valor máximo de **f** e **m** o valor mínimo de **g**, então, o produto M.m é igual a

A) 8.

B) 6.

C) 4.

D) 10.

MATEMÁTICA

06. QY49

(UCS-RS) O lucro obtido por um distribuidor com a venda de caixas de determinada mercadoria é dado pela expressão $L(x) = \left(\frac{6}{5}x - \frac{0,01}{5}x^2\right) - 0,6x$, em que **x** denota o número de caixas vendidas. Quantas caixas o distribuidor deverá vender para que o lucro seja máximo?

A) 60
B) 120
C) 150
D) 600
E) 1 500

07. L5RZ

(UFJF-MG) Um ônibus de 54 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa cobrou de cada passageiro a quantia de R$ 55,00 e mais R$ 2,50 por lugar vago. O número de passageiros que dá à empresa rentabilidade máxima é

A) 16.
B) 24.
C) 38.
D) 49.
E) 54.

08. POJF

(CEFET-MG) O saldo **S** de uma empresa **A** é calculado em função do tempo **t**, em meses, pela equação $S(t) = 3t^2 - 39t + 66$.

Considerando essa função, o saldo da empresa é negativo entre o

A) 2º e o 11º mês.
B) 4º e o 16º mês.
C) 1º e 4º e entre o 5º do 16º mês.
D) 2º e 5º e entre o 7º do 14º mês.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) Dada a função **f**, definida por $f(x) = x^2 + 9 - 6x$, o número de valores de **x** que satisfazem a igualdade $f(x) = -f(x)$ é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

02. SGJY

(Albert Einstein) Suponha que, em janeiro de 2016, um economista tenha afirmado que o valor da dívida externa do Brasil era de 30 bilhões de reais. Nessa ocasião, ele também previu que, a partir de então, o valor da dívida poderia ser estimado pela lei $D(x) = -\frac{9}{2}.\,x^2 + 18x + 30$ em que **x** é o número de anos contados a partir de janeiro de 2016 ($x = 0$). Se sua previsão for correta, o maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, e o ano em que isso ocorrerá, são, respectivamente,

A) 52 e 2020.
B) 52 e 2018.
C) 48 e 2020.
D) 48 e 2018.

03. DSTH

(UEMG) O lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, em que **L** é o lucro, **C** o custo da produção e **R** a receita do produto.

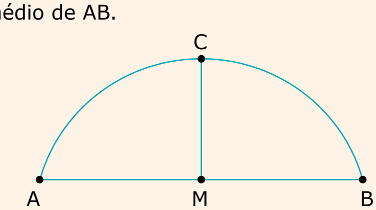
Uma fábrica de tratores produziu **n** unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(n) = n^2 - 1\,000n$ e a receita representada por $R(n) = 5\,000n - 2n^2$.

Com base nas informações acima, a quantidade **n** de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo corresponde a um número do intervalo:

A) $580 < n < 720$
B) $860 < n < 940$
C) $980 < n < 1\,300$
D) $1\,350 < n < 1\,800$

04. CBAC

(UNIFESP) A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. **M** é o ponto médio de AB.



A altura do arco, em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de **M**, é

A) 15.
B) 14.
C) 13.
D) 12.
E) 10.

05. K192

(ESPM-SP) O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de **x** unidades de um certo produto é dado pela função $L = k.(x + 10)(x - 50)$, em que **k** é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para **x** igual a

A) 24.
B) 22.
C) 15.
D) 20.
E) 18.

06. 43PA

(UFSM-RS) Um jogador de basquete lança uma bola em direção à cesta e ela descreve um arco de parábola. A lei que descreve essa parábola é $h(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + 2$, em que **t** é o tempo decorrido em segundos após o lançamento, e **h** é a altura em metros. Assim, é correto afirmar:

A) A bola atinge o solo em 5 s.
B) A imagem de h(t) é dada pelo conjunto $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{49}{9}\right\}$.
C) O vértice da parábola é o ponto $\left(\frac{5}{2}, \frac{49}{12}\right)$.
D) Para todo $t \in (-6, 1)$, $h(t) \geq 0$.
E) A altura máxima atingida pela bola é igual a $\frac{7}{3}$ m.

07. OVDX (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, o gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 9$ é uma parábola que tangencia o eixo das abscissas, e um de seus pontos com ordenada igual a 9 tem abscissa negativa. Nessas condições, o valor do parâmetro **m** está entre

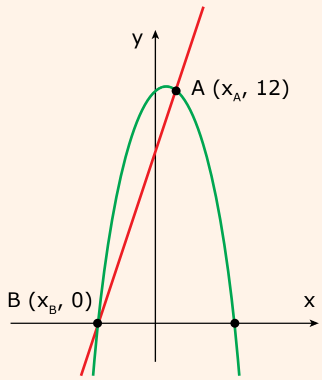
A) 1,5 e 2,5.

B) 2,5 e 3,5.

C) 3,5 e 4,5.

D) 4,5 e 5,5.

08. (CMRJ–2020) No mesmo plano cartesiano a seguir estão representados os gráficos das funções reais de variáveis reais, **p** e **r**, definidas por $p(x) = -x^2 + x + 12$ e $r(x) = kx + m$. Os pontos $A(x_A, 12)$ e $B(x_B, 0)$ são interseções dessas funções.



Nessas condições, o valor de k − m é:

A) −6

B) −4

C) 4

D) 6

E) 12

09. (Albert Einstein–2018) Para arrecadar recursos para a festa de formatura, os formandos de uma escola decidiram vender convites para um espetáculo. Cada formando recebeu para vender um número de convites que é igual ao número total de formandos mais 3. Se todos os formandos conseguirem vender todos os convites a 5 reais, o dinheiro arrecadado será menor do que R$ 26 270,00.

Nessas condições, o maior número de formandos que essa escola pode ter é múltiplo de

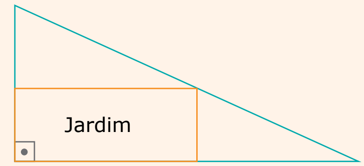
A) 12.

B) 13.

C) 14.

D) 15.

10. XPGF (UEG-GO) Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular, conforme figura a seguir:



Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9 m e 4 m, as dimensões do jardim, para que ele tenha a maior área possível, serão, respectivamente,

A) 2,0 m e 4,5 m.

B) 3,0 m e 4,0 m.

C) 3,5 m e 5,0 m.

D) 2,5 m e 7,0 m.

11. NVCQ (PUC-SP) Para abastecer seu estoque, um comerciante comprou um lote de camisetas ao custo de 16 reais a unidade. Sabe-se que em um mês, no qual vendeu (40 – x) unidades dessas camisetas ao preço unitário de **x** reais, o seu lucro foi máximo. Assim sendo, pela venda de tais camisetas nesse mês, o percentual de aumento repassado aos clientes, calculado sobre o preço unitário que o comerciante pagou na compra do lote, foi de

A) 80%.

B) 75%.

C) 60%.

D) 45%.

12. (USF-SP) A empresa **X** vende seus produtos de modo que o preço unitário (**p**) dependa da quantidade (**q**) de unidades vendidas. A relação de dependência entre as variáveis **p** e **q** é dada por: $p(q) = 40 - 0{,}2q$.

Em relação a essa situação, analise as afirmações a seguir.

I. Para que a receita da empresa seja R$ 2 000,00 é necessário produzir e vender 100 unidades.

II. 50 ou 150 unidades vendidas geram a mesma receita para a empresa.

III. A receita máxima da empresa nessa situação é R$ 2 000,00.

É correto o que se afirma em

A) I, II e III.

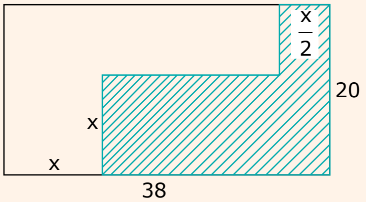
B) apenas II e III.

C) apenas I.

D) apenas II.

E) apenas I e III.

13. SHD1 (ESPM-SP) Um arquiteto projetou uma casa para ser construída num terreno retangular de 20 m por 38 m. A superfície ocupada pela casa, representada pela parte hachurada, deve atender às medidas indicadas na figura a seguir



A maior área que essa casa pode ter é de

A) 412 m².

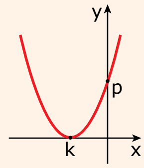
B) 384 m².

C) 362 m².

D) 428 m².

E) 442 m².

14. 8HJS (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (8 - m)$. O valor de k + p é:

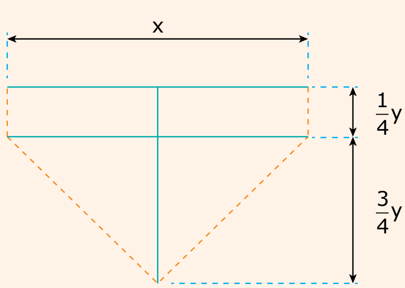


A) −2.
B) 2.
C) −1.
D) 1.
E) 3.

15. (UFV-MG) Um retângulo tem três de seus vértices nos pontos (0, 0), (x, 0) e (0, y), sendo **x** e **y** positivos, e o quarto vértice encontra-se sobre a reta $2x + 3y = 6$. Nessas condições, o retângulo de área máxima tem perímetro com medida igual a

A) 4.
B) 6.
C) 5.
D) 7.

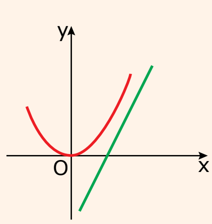
16. DJVE (UFPA) Um estudante, ao construir uma pipa, deparou-se com o seguinte problema: possuía uma vareta de miriti com 80 centímetros de comprimento, que deveria ser dividida em três varetas menores, duas necessariamente com o mesmo comprimento **x**, que será a largura da pipa, e outra de comprimento **y**, que determinará a altura da pipa. A pipa deverá ter formato pentagonal, como na figura a seguir, de modo que a altura da região retangular seja $\frac{1}{4}$y, enquanto a da triangular seja $\frac{3}{4}$y. Para garantir maior captação de vento, ele necessita que a área da superfície da pipa seja a maior possível.



A pipa de maior área que pode ser construída, nessas condições, possui área igual a

A) 350 cm².
B) 400 cm².
C) 450 cm².
D) 500 cm².
E) 550 cm².

17. 1YHØ (UFMG) Observe esta figura:



Nela, estão representados os gráficos das funções $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g(x) = 3x - 5$. Considere os segmentos paralelos ao eixo y, com uma das extremidades sobre o gráfico da função **f** e a outra extremidade sobre o gráfico da função **g**. Entre esses segmentos, seja **S** o que tem o menor comprimento. Assim, o comprimento do segmento **S** é

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{3}{4}$.
C) 1.
D) $\frac{5}{4}$.

18. HZSW (ACAFE-SC) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para todo **x** real, pode ser representada através da equação dada por $f(x - 1) - f(x) = 3 + 4x$. Sabendo que o gráfico da função f(x) é uma parábola e que o valor máximo dessa função é dado por uma constante real acrescida do valor do coeficiente independente da função, pode-se concluir que o valor dessa constante é

A) $\frac{25}{8}$.
B) $\frac{25}{4}$.
C) $\frac{1}{8}$.
D) $\frac{7}{8}$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KGAN (Enem–2017) A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Figura 1

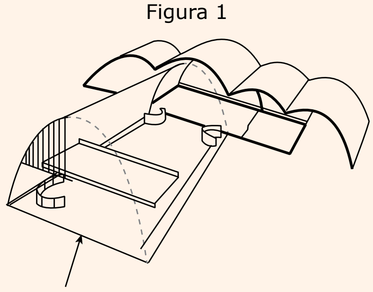
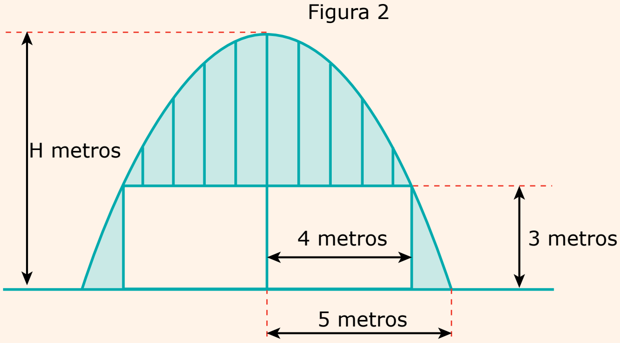


Figura 2



Qual a medida da altura **H**, em metro, indicada na figura 2?

A) $\frac{16}{3}$
B) $\frac{31}{5}$
C) $\frac{25}{4}$
D) $\frac{25}{3}$
E) $\frac{75}{2}$

02. (Enem–2017) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.

Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de

A) R$ 10,00.
B) R$ 10,50.
C) R$ 11,00.
D) R$ 15,00.
E) R$ 20,00.

03. JLCZ (Enem) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo **x** e **y** medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A) 18
B) 20
C) 36
D) 45
E) 54

04. (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que **h** representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A) muito baixa.
B) baixa.
C) média.
D) alta.
E) muito alta.

05. (Enem) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é:

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

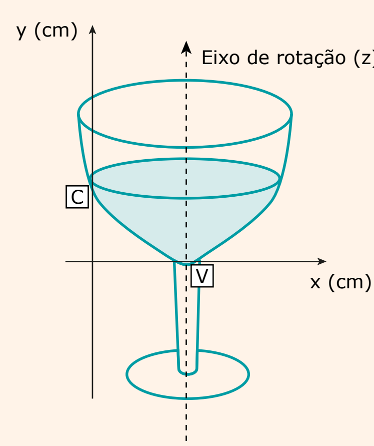
B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

06. (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo **z**, conforme mostra a figura



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, em que **C** é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto **V**, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo **x**.

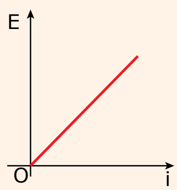
Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

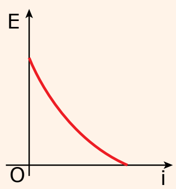
A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

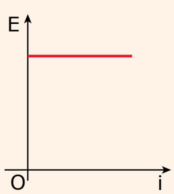
MATEMÁTICA

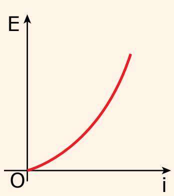
07. (Enem) Existem, no mercado, chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (**P**) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (**R**) e o quadrado da corrente elétrica (**i**) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (**E**), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

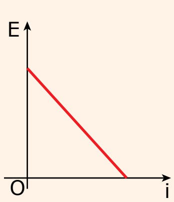
Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (**E**) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (**i**) que circula por ele?

A) 

B) 

C) 

D) 

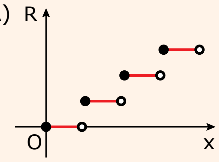
E) 

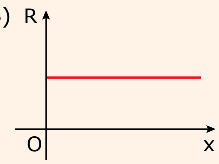
Instrução: Texto para as questões **08** e **09**.

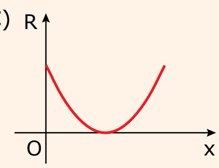
Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo **R** a rapidez de propagação, **P** o público-alvo e **x** o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

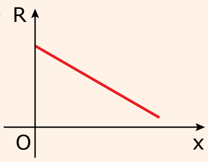
R(x) = k.x.(P – x), em que **k** é uma constante positiva, característica do boato.

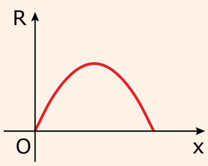
08. (Enem) O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para **x** real, é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

09. (Enem) Considerando o modelo anteriormente descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

A) 11 000
B) 22 000
C) 33 000
D) 38 000
E) 44 000

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aprovetamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. E	07. C
02. E	05. C	08. A
03. D	06. C	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	07. B	13. B
02. D	08. A	14. B
03. C	09. C	15. C
04. A	10. A	16. D
05. D	11. B	17. A
06. C	12. A	18. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	04. D	07. D
02. D	05. A	08. E
03. C	06. E	09. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Função Composta e Função Inversa

FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f: A → B é bijetora se, e somente se, essa função atende às seguintes condições:

i) A sua imagem (Im) é igual ao seu contradomínio (CD) (**f** é sobrejetora).

Observe que, ao representarmos simbolicamente uma função **f** na forma f: A → B, o conjunto **A** é o domínio da função, e o conjunto **B** é o contradomínio da função.

Portanto, a condição é satisfeita se, e somente se, Im = B.

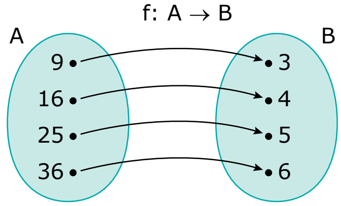
ii) Para quaisquer elementos x_1 e x_2 do domínio **A**, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$ (**f** é injetora).

Em outras palavras, cada elemento da imagem deve estar relacionado com um único elemento do domínio. Logo, uma função será bijetora quando for sobrejetora e injetora.

Exemplos:

1º) Em forma de diagrama

f: A → B



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = A = {9, 16, 25, 36}

Contradomínio: CD = B = {3, 4, 5, 6}

Imagem: Im = {3, 4, 5, 6}

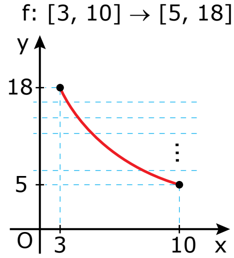
Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio.

2º) Em forma de gráfico

f: [3, 10] → [5, 18]



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = [3, 10]

Contradomínio: CD = [5, 18]

Imagem (projeção do gráfico no eixo das ordenadas): Im = [5, 18]

Logo, CD = Im.

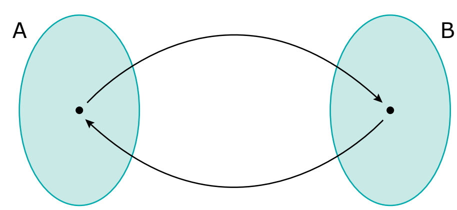
Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio. Para tal verificação, basta traçarmos linhas paralelas ao eixo das abscissas, a partir da imagem. Cada uma dessas linhas deve interceptar a curva em um único ponto, para que a condição seja satisfeita.

FUNÇÃO INVERSA

Considere o diagrama a seguir:

f: A → B



f^{-1}: B → A

No diagrama, está indicada uma função **f** que associa a cada elemento de **A** a sua imagem em **B**. A função inversa de **f**, indicada por f^{-1}, é a função que associa a cada elemento de **B** o elemento de **A** associado a **B** por **f**.

Observe que **f** deve ser uma função bijetora.

Uma função bijetora f: A → B é inversível, e sua inversa é a função f^{-1}: B → A se, e somente se, para todo $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

Cálculo da função inversa – regra prática

i) Trocar **x** por **y** e **y** por **x**.

ii) Isolar o novo **y**.

Exemplos:

Determinar a função inversa das seguintes funções.

1º) $f(x) = 3x$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**): $x = 3y$

(isolar o novo **y**): $y = \frac{x}{3}$

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

2º) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, para $x \neq -2$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**):

$x = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy = 2x + 1$

(isolar o novo **y**):

$y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$

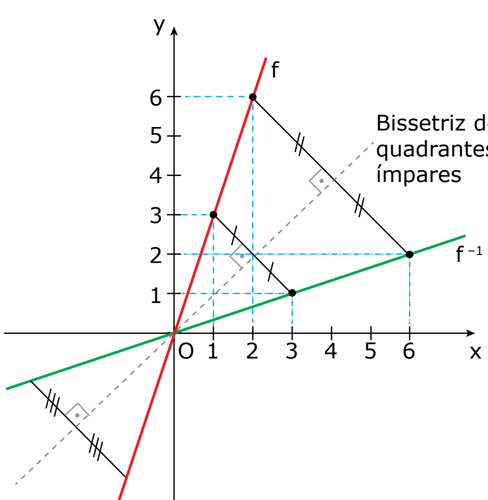
Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

OBSERVAÇÃO

- Os gráficos da função **f** de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo:

Esboçando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ em um mesmo sistema de eixos e considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFV-MG) Seja **f** a função real, tal que $f(2x - 9) = x$, para todo **x** real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para **c** igual a:

A) 5. C) 3. E) 1.

B) 7. D) 9.

Resolução:

Cálculo de f(c):

Fazendo $2x - 9 = k$, temos $x = \frac{k+9}{2}$. Portanto, temos que $f(k) = \frac{k+9}{2}$. Logo, podemos dizer que $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Então, para $x = c$, temos $f(c) = \frac{c+9}{2}$.

Cálculo de $f^{-1}(c)$:

Temos $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Trocando **x** por **y** e **y** por **x**, temos:

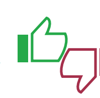
$x = \frac{y+9}{2} \Rightarrow y = 2x - 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 9$

Logo, para $x = c$, temos $f^{-1}(c) = 2c - 9$.

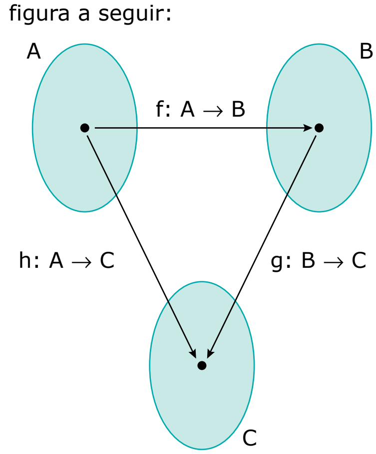
Fazendo $f(c) = f^{-1}(c)$, obtemos:

$\frac{c+9}{2} = 2c - 9 \Rightarrow 4c - 18 = c + 9 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

FUNÇÃO COMPOSTA



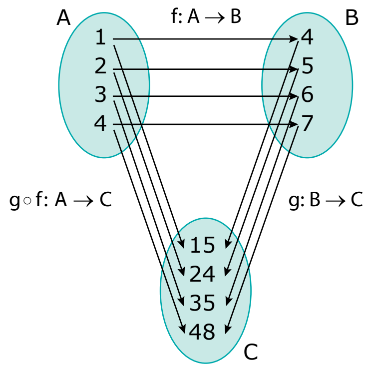
Sejam as funções **f** e **g**, tal que $f: A \to B$ e $g: B \to C$, conforme a figura a seguir:



Considere uma função $h: A \to C$ que produz os mesmos resultados que as funções **f** e **g** aplicadas em sequência, ou seja, que relaciona cada elemento de **A** com o correspondente elemento de **C** sem passar pelo conjunto **B**. Tal função **h** é denominada função composta de **f** e **g**.

Denotamos a função composta h(x) por g(f(x)) ou $g \circ f(x)$.

Como exemplo, considere os conjuntos **A**, **B** e **C** representados a seguir e sejam as funções f: A → B e g: B → C, tais que $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$. Vamos descobrir a expressão matemática da função g(f(x)), que relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.



Para calcular a expressão da função g(f(x)), devemos substituir o **x** na expressão de g(x) por f(x).

Assim, como $g(x) = x^2 - 1$, temos:

$g(f(x)) = f(x)^2 - 1$

Mas, $f(x) = x + 3$. Portanto, temos:

$g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 - 1$

Assim, $g(f(x)) = x^2 + 6x + 8$.

Observe que essa expressão realmente relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.

- Para x = 1, temos $g(f(1)) = 1^2 + 6 . 1 + 8 = 15$.
- Para x = 2, temos $g(f(2)) = 2^2 + 6 . 2 + 8 = 24$.
- Para x = 3, temos $g(f(3)) = 3^2 + 6 . 3 + 8 = 35$.
- Para x = 4, temos $g(f(4)) = 4^2 + 6 . 4 + 8 = 48$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. Sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x - 2$. Calcular:

A) f(g(2))

Resolução:

$f(g(2)) = f(0) = 3$

B) $f \circ g \circ g(1)$

Resolução:

$f \circ g \circ g(1) = f(g(g(1))) = f(g(-1)) = f(-3) = -3$

C) f(g(x))

Resolução:

$f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1$

D) $g \circ f(x)$

Resolução:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) - 2 = 2x + 3 - 2 = 2x + 1$

03. Considere as funções $f(x) = 4x + 11$ e $f(g(x)) = 6x - 10$. Determinar a expressão de g(x).

Resolução:

Pela definição de função composta, temos que $f(g(x)) = 4g(x) + 11$. Igualando esse resultado com a expressão fornecida, temos:

$4g(x) + 11 = 6x - 10 \Rightarrow 4g(x) = 6x - 21 \Rightarrow g(x) = \dfrac{6x - 21}{4}$

04. Sejam as funções $h(x) = 5x - 3$ e $t(h(x)) = 15x + 32$. Determinar a expressão de t(x).

Resolução:

$t(h(x)) = 15x + 32 \Rightarrow t(5x - 3) = 15x + 32 \quad \text{(I)}$

Vamos denotar 5x − 3 por **k**. Assim, temos:

$5x - 3 = k \Rightarrow x = \dfrac{k + 3}{5}$

Substituindo na expressão (I), temos:

$t(k) = 15.\left(\dfrac{k + 3}{5}\right) + 32 \Rightarrow t(k) = 3k + 9 + 32 \Rightarrow$

$t(k) = 3k + 41$

Daí, se a expressão vale para **k**, também vale para **x**, ou seja, $t(x) = 3x + 41$.

05. (UFU-MG) Seja **f** uma função real de variável real definida

por $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ f(f(-x)), & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Então, f(−1) é igual a

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) −1.
E) 3.

Resolução:

Para x = −1, temos f(−1) = f(f(1)).

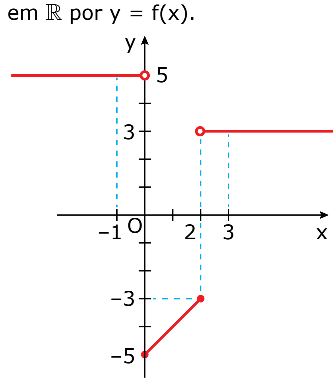
Mas $f(1) = 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 2$.

Logo, f(−1) = f(2).

Mas $f(2) = 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 3$.

Logo, f(−1) = 3.

06. (Mackenzie-SP) O gráfico a seguir representa uma função definida em $\mathbb{R}$ por y = f(x).



O valor de f(2) + f(f(−5)) é igual a

A) −2.
B) −1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

Resolução:

Pelo gráfico, verificamos que f(2) = −3.

Além disso, f(−5) = 5.

Logo, f(f(−5)) = f(5) = 3.

Portanto, f(2) + f(f(−5)) = −3 + 3 = 0.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

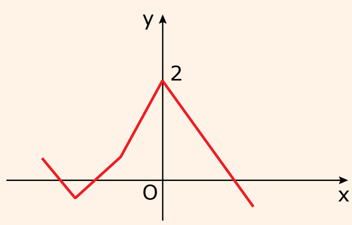
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 5LAK

(IFMA) Considere as funções afins f(x) e p(x), definidas de reais em reais, em que f(x) = 2x + 4 e p(x) = 6x − 2m, sendo **m** uma constante real. O valor de **m** para que p(f(x)) = f(p(x)) é

A) −7.
B) $\frac{1}{3}$.
C) 5.
D) 7.
E) −10.

02. (EFOA-MG) A figura a seguir representa o gráfico de uma função **f**.



O total de elementos **x** tais que f(f(x)) = 2 é

A) 2.
B) 4.
C) 0.
D) 3.
E) 1.

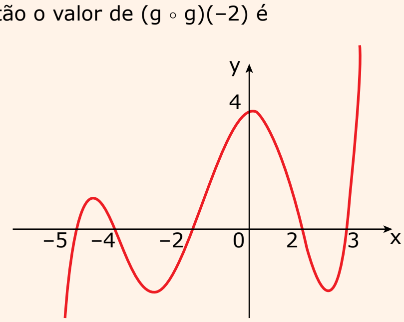
03. BHJE

(IFCE) Seja f:]1, +∞[⊂ ℝ → ℝ uma função dada por $f(x) = \frac{x}{x-1}$. A expressão da função composta g(x) = f(f(x+1)) é:

A) $g(x) = \frac{1}{x-1}$
B) $g(x) = \frac{x}{x-1}$
C) g(x) = x + 1
D) g(x) = x − 1
E) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

04. VRTX

(UPF-RS) Considere a função real **g**, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo g ∘ g a função composta de **g** com **g**, então o valor de (g ∘ g)(−2) é



A) 0.
B) 4.
C) 2.
D) −2.
E) −5.

05. GZKR

(UECE–2020) A função f: R − {−1} → R − {1}, definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$ é invertível. Considerando-se **g** sua inversa, o valor positivo de **k**, para o qual $f(k) + g(k) = \sqrt{3}$, é igual a

A) $3\sqrt{3}$.
B) $2\sqrt{3}$.
C) $\sqrt{3}$.
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

06. 3NM2

(UPF-RS–2018) Um estudo das condições ambientais de um município do Rio Grande do Sul indica que a taxa média de monóxido de carbono (CO) no ar será de C(P) = 0,2P − 1 partes por milhão (ppm) quando a população for **P** milhares de habitantes. Sabe-se que, em **t** anos, a população desse município será dada pela relação $P(t) = 50 + 0{,}05t^2$. O nível de monóxido de carbono, em função do tempo **t**, é dado por:

A) $C(t) = 9 + 0{,}01t^2$
B) $C(t) = 0{,}2(49 + 0{,}05t^2)$
C) $C(t) = 9 + 0{,}05t^2$
D) $C(t) = 0{,}1(1 + 0{,}05t^2) - 1$
E) $C(t) = 10 + 0{,}95t^2$

07. DXEL

(UERN) Considerando as funções f(x) = 3x − 2 e g(x) = −2x + 1, o valor de **k**, com k ∈ ℝ tal que $f(g(k))^{-1} = 1$ é

A) 3.
B) 2.
C) −1.
D) −5.

08. BJG7

(UECE) A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ é invertível. Se f^{-1} é sua inversa, então, o valor de $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2$ é

A) 1.
B) 4.
C) 9.
D) 16.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FGV-SP) Dada a função $f(x) = x^2 + 3$, qual o valor da expressão $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$?

A) 2x
B) 2x + 1
C) 2x − h
D) 2x − 1
E) 2x + h

02. P1T5

(UECE–2017) A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$, para $x \neq -\frac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa **g** pode ser expressa na forma $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, em que **a**, **b**, **c** e **d** são números inteiros.

Nessas condições, a soma a + b + c + d é um número inteiro múltiplo de

A) 6. B) 5. C) 4. D) 3.

03. (CEFET-MG) Dadas as funções f(x) = 2x – 1 e $g(x) = x^2 + 3x + c$, o maior valor inteiro de **c** tal que a equação g(f(x)) = 0 apresente raízes reais é

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

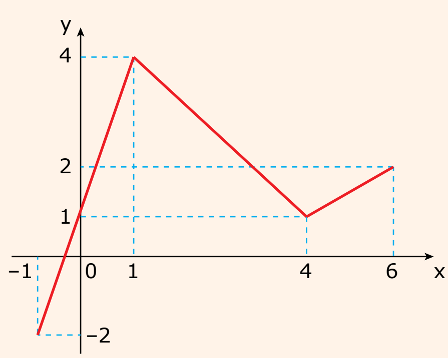
04. WWMA

(ESPM-SP) Sejam **f** e **g** funções reais, tal que f(2x + 1) = 2x + 4 e g(x + 1) = 2x – 1 para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que a função $f \circ g(x)$ é igual a:

A) 2x – 1
B) x + 2
C) 3x + 1
D) 2x
E) x – 3

05. TKXJ

(ACAFE-SC) O gráfico a seguir representa a função real f(x), definida no intervalo [–1, 6].



Considerando a função h(x) = f(x – 2), então, o valor da expressão dada por f(h(3)) + h(f(4)) é igual a

A) 7. B) –2. C) 5. D) –1.

06. HLLI

(IFCE) Se $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$ possui inversa:

A) $f^{-1}(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}$

B) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x^3+1}$

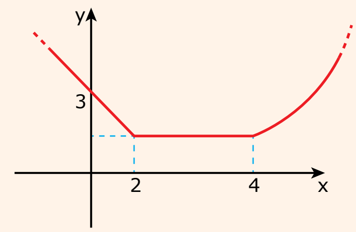
C) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

D) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

E) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$

07. AØH8

(ESPM-SP) A figura a seguir representa o gráfico cartesiano da função f(x).



Sabendo-se que f(1) = 2, o valor de f [f(π)] é

A) 1. B) $\frac{3}{2}$. C) $\frac{3}{4}$. D) 2. E) $\frac{5}{2}$.

08. N35N

(UFSM-RS) Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos. Assim, a função $g(x) = \frac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função f(x) = 40x + 1 converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. A função **h** que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é:

A) $h(x) = \frac{20}{3}x + \frac{1}{6}$

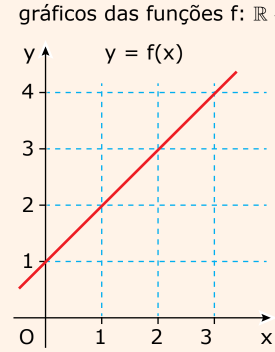
B) $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

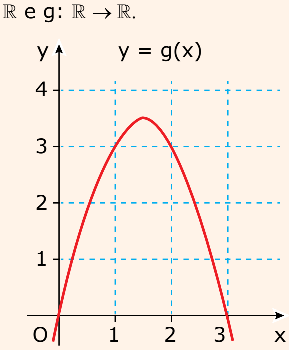
C) $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$

D) $h(x) = \frac{20x+1}{3}$

E) $h(x) = \frac{2x+1}{3}$

09. (UFJF-MG) A seguir, encontram-se representados os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.





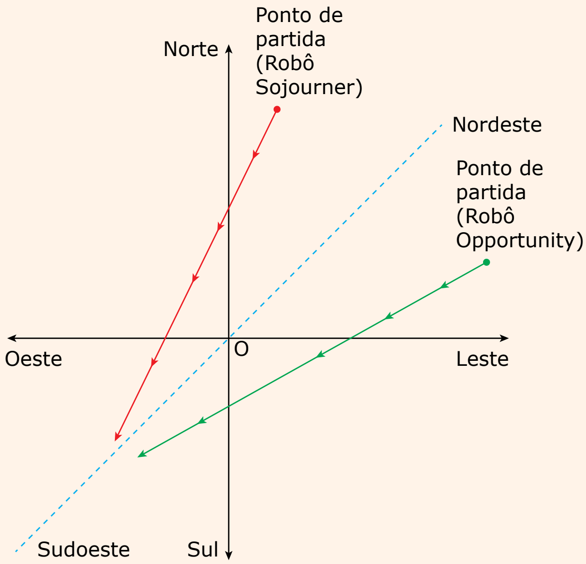
Sabendo que **f** possui inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o valor de $f \circ g \circ f^{-1}(2)$ é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

01. A figura a seguir indica as trajetórias de dois robôs, Sojourner e Opportunity, utilizados pela Agência Espacial Americana no projeto de exploração científica do planeta Marte. Considere que os dois robôs tenham partido, simultaneamente, de pontos distintos da superfície de Marte, com a mesma velocidade e em trajetória retilínea, em uma missão de exploração. Cada um dos robôs é controlado por um operador na Terra.



Sabe-se que o robô Sojourner intercepta a linha norte-sul a 4 km ao norte do ponto de referência **O**, e intercepta a linha leste-oeste a 2 km a oeste desse mesmo ponto de referência. Considerando-se que a trajetória do robô Opportunity seja simétrica à trajetória do robô Sojourner em relação à linha sudoeste-nordeste, e que não ocorram imprevistos que atrasem os robôs, pode-se afirmar que eles vão se encontrar a, aproximadamente,

(Considere: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$)

A) 1,4 km do ponto O.

B) 2,8 km do ponto O.

C) 4,2 km do ponto O.

D) 5,6 km do ponto O.

E) 7,0 km do ponto O.

02. Uma das etapas da implementação de uma rotina de programação de computadores consiste na determinação de um parâmetro φ. Esse parâmetro é obtido da seguinte forma:

- Um dado de entrada **x** é inserido no programa.
- Multiplica-se **x** por 8.
- Adiciona-se 11 ao resultado anterior.

Em uma etapa subsequente, o programador calcula um parâmetro σ, utilizando o valor de φ calculado anteriormente, do seguinte modo:

- Adiciona-se 13 ao valor de φ.
- Eleva-se o valor obtido ao quadrado.

Um programador decidiu determinar o parâmetro σ em uma única etapa, a partir do dado de entrada **x**. A expressão matemática correspondente a essa operação é:

A) $\sigma = 64(x^2 + 6x + 9)$

B) $\sigma = 64(x^2 + 11x + 13)$

C) $\sigma = 64(x^2 + 9)$

D) $\sigma = 64(x^2 - 3x + 12)$

E) $\sigma = 64(4x^2 + 6x + 9)$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E	05. D
02. D	06. A
03. C	07. D
04. B	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E	06. D
02. C	07. D
03. B	08. C
04. D	09. E
05. D	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	02. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Inequações

INTRODUÇÃO

Sabemos que uma inequação é uma relação caracterizada pela presença de sinais de desigualdade: >, <, ≥ ou ≤. Vejamos alguns exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x - 3 > 18$.

$x - 3 > 18 \Rightarrow x > 21$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 21\}$

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-2 \leq \frac{x+4}{3} < 8$.

Multiplicando-se todos os termos da inequação por 3, temos:

$-6 \leq x + 4 < 24$

Subtraindo-se 4 de todos os termos, temos:

$-10 \leq x < 20$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 20\}$

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Inicialmente, vamos calcular as raízes da função:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4 . 1 . 6 = 1$

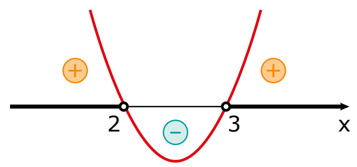
$x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

Representando no gráfico, temos:

- Estudo do sinal

$y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$

$y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$



Portanto, o conjunto solução é dado por:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2$ ou $x > 3\}$

INEQUAÇÃO PRODUTO

Chamamos de inequação produto a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por um produto de funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo.

Exemplos:

1º) $(x - 2).(x - 3) \geq 0$

2º) $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$

3º) $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$

Para resolver uma inequação produto, devemos estudar o sinal de cada uma das funções que estão sendo multiplicadas. Em seguida, obtemos o resultado analisando os sinais obtidos e utilizando o chamado **quadro de sinais**.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 2).(x - 3) \geq 0$.

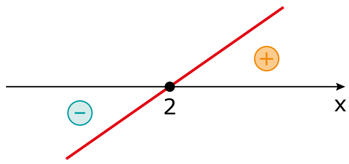
Vamos denotar cada função por y_1 e y_2 e estudar o sinal de cada uma delas.

$\overbrace{(x-2)}^{y_1}.\overbrace{(x-3)}^{y_2} \geq 0$

- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = x - 2$

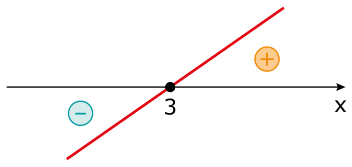
Raiz: $x = 2$



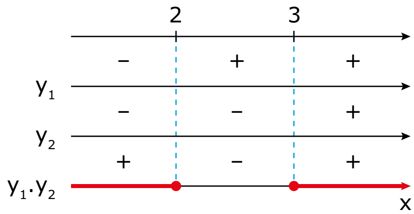
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = x - 3$

Raiz: $x = 3$



- Quadro de sinais



Como queremos saber em quais intervalos o produto é positivo ou igual a zero, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

OBSERVAÇÃO

As inequações do 2º grau que possuam raízes reais podem ser fatoradas e, portanto, transformadas em inequações produto. Nesse caso, podem ser resolvidas como descrito anteriormente. Por exemplo, a inequação $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ pode ser escrita na forma $(x - 2)(x - 3) \geq 0$ e resolvida com o uso do quadro de sinais.

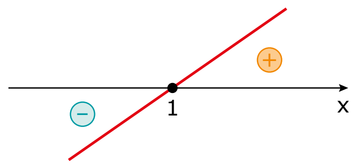
2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$.

$$\overbrace{(x-1)}^{y_1}.\overbrace{(x^2-4x+3)}^{y_2} \geq 0$$

- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = x - 1$

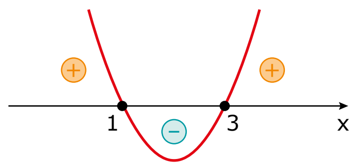
Raiz: $x = 1$



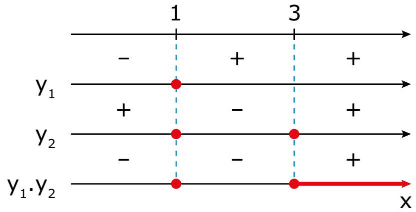
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = x^2 - 4x + 3$

Raízes: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$



- Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x \geq 3\}$.

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$.

$$\overbrace{(2x^2-5x)}^{y_1}.\overbrace{(2+x-x^2)}^{y_2} < 0$$

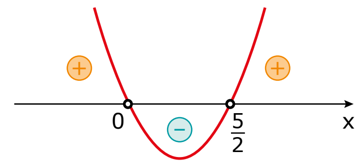
- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = 2x^2 - 5x$

Raízes: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{2}$.

$y_1 > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > \frac{5}{2}$

$y_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$



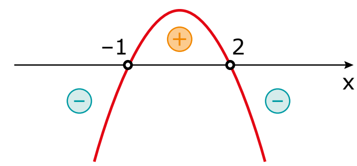
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = 2 + x - x^2$

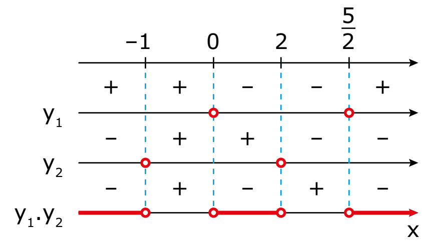
Raízes: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$

$y_2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

$y_2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 2$



- Quadro de sinais



Queremos saber para que valores de **x** temos $y_1.y_2 < 0$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 2 \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$.

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Chamamos de inequação quociente a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por uma divisão envolvendo funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo. Convém ressaltar que, como se trata de uma divisão, devemos verificar suas condições de existência, ou seja, o denominador não pode ser nulo.

Exemplos:

1º) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-3} \le 0$ **2º)** $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-6x+9} \ge 0$

O procedimento para resolução é análogo ao adotado nas inequações produto.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2-2x+1}{x-3} \le 0$.

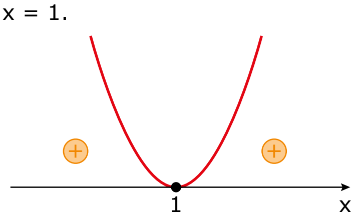
Condição de existência: $x \neq 3$

$$\dfrac{\overbrace{x^2-2x+1}^{y_1}}{\underbrace{x-3}_{y_2}} \le 0$$

- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = x^2 - 2x + 1$

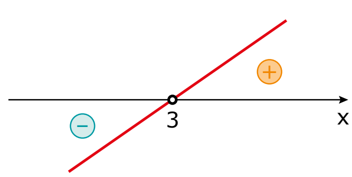
Raiz: $x = 1$.



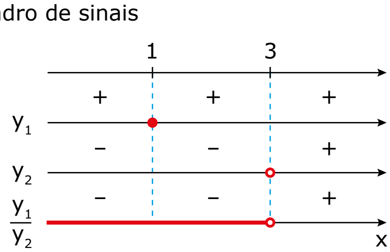
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = x - 3$

Raiz: $x = 3$.



- Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-6x+9} \ge 0$.

$$\dfrac{\overbrace{x^2-2x-8}^{y_1}}{\underbrace{x^2-6x+9}_{y_2}} \ge 0$$

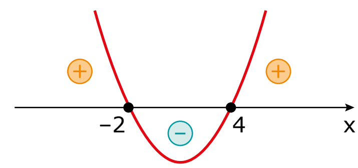
- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = x^2 - 2x - 8$

$y_1 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 4$

$y_1 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

Raízes: $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$



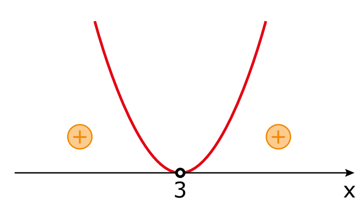
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = x^2 - 6x + 9$

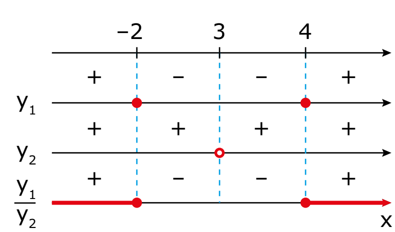
Condição de existência: $x \neq 3$

$y_2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Raízes: $x = 3$



- Quadro de sinais



Queremos saber para que valores de **x** temos

$\dfrac{y_1}{y_2} \ge 0$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2$ ou $x \ge 4\}$.

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ–2020) Um número **N**, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é:

A) 2
B) 7
C) 16
D) 17

02. MPJ6 (UFG-GO) Duas empresas **A** e **B** comercializam o mesmo produto. A relação entre o patrimônio **y** e o tempo de atividade em anos **x** de cada empresa é representada, respectivamente, por:

A: $x - 2y + 6 = 0$ e B: $x - 3y + 15 = 0$

Considerando essas relações, o patrimônio da empresa **A** será superior ao patrimônio da empresa **B** a partir de quantos anos?

A) 3 B) 5 C) 9 D) 12 E) 15

03. 9HP3 (PUC Rio) A soma dos valores inteiros que satisfazem a desigualdade $x^2 + 6x \le -8$ é

A) −9.
B) −6.
C) 0.
D) 4.
E) 9.

04. J2ØL (PUC Rio) Considere as funções reais $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x$. Qual é o maior inteiro para o qual vale a desigualdade $f(x) < g(x)$?

A) −3
B) −1
C) 0
D) 3
E) 4

05. 9B1M (IFSP) Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5\,500$

$-8n + 3\,501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **n** representava o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, é correto afirmar que o total de foguetes que o comando descobriu foi de

A) 3 000 foguetes.
B) 2 192 foguetes.
C) 1 097 foguetes.
D) 1 096 foguetes.
E) 195 foguetes.

06. VZZS (CEFET-MG–2018) O número de soluções inteiras pertencentes ao conjunto solução da inequação $\frac{(3x-9)}{2} \cdot \frac{(x+6)}{3} < 0$ em $\mathbb{R}$ é

A) 4. B) 6. C) 8. D) 10.

07. L5I5 (PUC Rio) Considere a inequação $\frac{x+1}{-x-5} \le 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Qual é o conjunto solução da inequação?

A) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
B) $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$
C) $[0, \infty)$
D) $[-5, \infty)$
E) $(-1, \infty)$

08. GC5V (UESPI) Em qual dos seguintes intervalos abertos o gráfico da parábola $y = 3x^2 - 4x - 3$ fica abaixo do gráfico da parábola $y = x^2 + 3$?

A) (−1, 4)
B) (0, 5)
C) (−2, 1)
D) (−2, 4)
E) (−1, 3)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SZA7 (PUC Rio) A soma das soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$ em que **x** pertence ao conjunto dos números naturais é

A) 3. B) 4. C) 5. D) 6. E) 8.

02. (CEFET-MG) O conjunto solução **S**, em $\mathbb{R}$, da inequação $-4.(2x-1).\left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0$ é

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$.

B) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$.

C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.

D) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$.

03. 6GYP (UFU-MG) Suponha que, para realizar traduções de textos egípcios para um museu brasileiro, um tradutor **X** cobre um valor fixo de R$ 440,00, acrescido de R$ 3,20 por linha traduzida. Por outro lado, um tradutor **Y**, para executar o mesmo trabalho, cobra um fixo de R$ 800,00, mais R$ 2,30 por linha traduzida.

Nessas condições, o número que corresponde à quantidade mínima de linhas a serem traduzidas de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **Y** é

A) um quadrado perfeito.
B) divisível por 5.
C) um número ímpar.
D) divisível por 3.

04. PJTG (IFCE) O conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação $(5x^2 - 6x - 8)(2 - 2x) < 0$ é

A) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup]-\infty, 1[$.

B) $S =]2, +\infty[\cup \left]-\frac{4}{5}, 1\right[$.

C) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup]1, +\infty[$.

D) $S = \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup]1, 2[$.

E) $S = \left]-\frac{4}{5}, 1\right[\cup]2, +\infty[$.

05. (CEFET-MG) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da inequação $\frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{4} > 1$ é o intervalo:

A) $]-\infty, -3[$

B) $\left]-\infty, -\frac{3}{7}\right[$

C) $\left]\frac{-3}{7}, \infty\right[$

D) $]-3, \infty[$

06. VRQ7

(Unimontes-MG) Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x+1}$ é:

A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 \leq x < 1\right\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$

D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

07. GPU7

(UERN) A soma de todos os números inteiros que satisfazem simultaneamente a inequação produto $(3x - 7)(x + 4) < 0$ e a inequação quociente $\frac{2x+1}{5-x} > 0$ é

A) 3.

B) 5.

C) 6.

D) 7.

08. BVYO

(ACAFE-SC) Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função R(x) = 3,8x, em que **x** representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

A) [240, 248]

B) [248, 260]

C) [252, 258]

D) [255, 260]

09. 6J4Y

(Mackenzie-SP) A função $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto da solução:

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2 \text{ ou } 1 \leq x < 3\}$

B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$

C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$

D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$

E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$

10. 37ZH

(UNEB-BA) Uma empresa pode gastar, no máximo, R$ 15 000,00 para comprar 400 unidades de certo material. De determinada marca, o material custa R$ 25,00 por unidade, e de outra, de melhor qualidade, custa R$ 45,00 por unidade.

Efetuada a compra, tem-se que a razão entre o número de unidades compradas da melhor marca e o da marca inferior deve ser, no máximo:

A) $\frac{5}{9}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{5}{3}$

E) $\frac{9}{5}$

11. (UFJF-MG) Dadas as desigualdades, em $\mathbb{R}$:

I. $3x + 1 < -x + 3 \leq -2x + 5$

II. $\frac{4x-1}{x-2} \leq 1$

O menor intervalo que contém todos os valores de **x** que satisfazem, simultaneamente, às desigualdades I e II é:

A) $\left]\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right]$

B) $\left]-2, -\frac{3}{2}\right]$

C) $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right]$

D) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

E) $\left[\frac{4}{3}, \frac{3}{5}\right[$

12. YOPI

(Umesp) A função $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4-x^2}}$ tem como domínio, no campo dos reais, os valores de **x** que se encontram na alternativa:

A) $\mathbb{R} - \{4\}$

B) $x < -4$ ou $x \geq 0$

C) $0 \leq x < 4$

D) $0 \leq x < 2$

E) $0 < x < 2$

13. (UFJF-MG–2018) Dadas as funções f(x) = x + 3 e $g(x) = \frac{13-9}{x+2}$, determine o maior subconjunto dos números reais tal que f(x) > g(x).

A) $]5, +\infty[$

B) $]-2, 5[$

C) $]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$

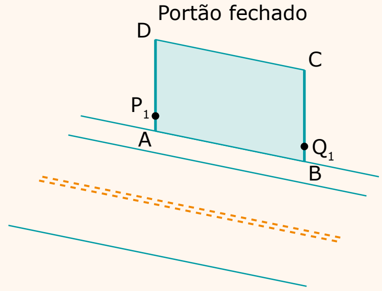
D) $]-\infty, 3[$

E) $]-2, 3[\cup]5, +\infty[$

14. 9J20

(Insper-SP) O acesso à garagem de um edifício é guardado por um portão retangular que fica normalmente fechado. Para abrir a passagem para os veículos que por ali circulam, o portão sobe e se inclina, conforme figuras a seguir:

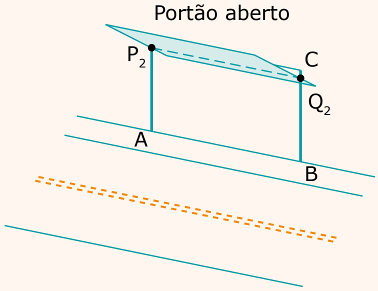
Portão fechado



MATEMÁTICA

Distantes 0,5 m do nível da calçada (pontos **A** e **B**), os pontos P_1 e Q_1 indicam as posições das extremidades de um eixo que sustenta o portão.

Portão aberto



O portão, que tem 3 m de altura, sobe e, simultaneamente, gira 60 graus em torno desse eixo, até ficar totalmente aberto, suspenso nas posições indicadas por P_2 e Q_2.

O portão é feito soldando-se placas quadradas de 1 m^2, que não podem ser cortadas, e pesam 15 kg cada uma. Se o eixo que movimenta o portão pode sustentar até 250 kg, a maior largura AB que o portão pode ter é

A) 3,0 m.
B) 3,5 m.
C) 4,0 m.
D) 4,5 m.
E) 5,0 m.

15. IY2A (UEMA) Uma função consiste na associação de dois conjuntos **A** e **B** de números reais, por meio de uma lei **f**. O subconjunto dos elementos de **A** que corresponde a um, e somente um, elemento de **B** é denominado domínio da função D(f). Considerando que a expressão

$$f(x) = \sqrt{\frac{(2x^2 - 8)(x^2 + x - 6)}{x^2 + 2x - 3}}$$ é uma função, determine o domínio de f(x).

A) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x > 1;\ x \leq -2 \text{ e } x \neq -3\}$
B) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x > 1;\ x < -2 \text{ e } x \neq -3\}$
C) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x > 1;\ x \geq -2 \text{ e } x = -3\}$
D) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1;\ x \leq -2 \text{ e } x = 3\}$
E) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1;\ x > -2 \text{ e } x \neq 3\}$

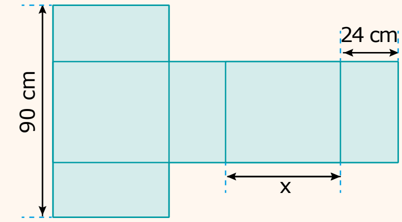
SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X. Os valores possíveis para **X** são, apenas:

A) X > 1 500
B) X < 3 000
C) 1 500 < X < 2 250
D) 1 500 < X < 3 000
E) 2 250 < X < 3 000

02. (Enem) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para **x**, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Ana, é

A) 25.
B) 33.
C) 42.
D) 45.
E) 49.

03. (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade **q** de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade **q** também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda de quantidade **q** de produtos é dado pela expressão LT(q) = FT(q) − CT(q).

Considerando-se as funções FT(q) = 5q e CT(q) = 2q + 12 como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. A	05. D	07. B
02. D	04. B	06. C	08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	05. B	09. B	13. E
02. B	06. C	10. D	14. E
03. C	07. A	11. D	15. A
04. E	08. B	12. D	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	02. E	03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Função Afim

INTRODUÇÃO

Chamamos de função polinomial do primeiro grau, ou função afim, toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que f(x) = ax + b, sendo **a** e **b** números reais e a $\neq$ 0. O gráfico de uma função afim é uma reta.

Na função f(x) = ax + b, temos:

i) O número **a** é chamado **coeficiente angular, inclinação** ou **declividade**.

ii) O número **b** é chamado **coeficiente linear**.

Exemplos:

1º) y = 3x + 5

2º) f(x) = −4x + 17

3º) y = −8x

4º) f(x) = x − 5

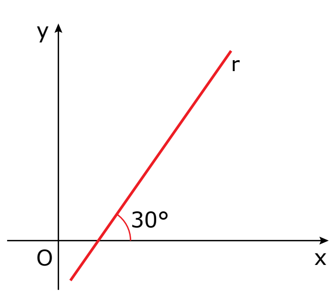
CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR

O coeficiente angular **a** é definido como a tangente do ângulo formado pela reta e pelo eixo x, tomado no sentido anti-horário. Esse ângulo é chamado de ângulo de inclinação.

Exemplos:

Calcular o coeficiente angular da reta **r** em cada caso.

1º)



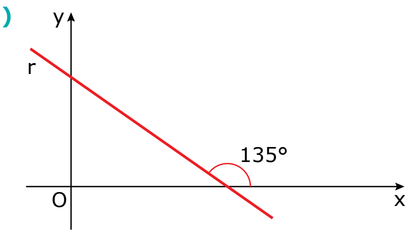
O coeficiente angular é dado por a = tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é agudo, sua tangente é positiva.

Assim, para a > 0, a função é **crescente**.

2º)



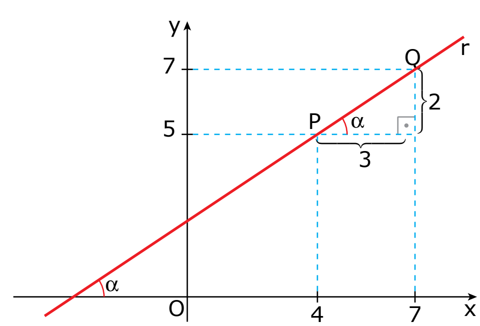
O coeficiente angular é dado por a = tg 135° = −1.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é obtuso, sua tangente é negativa.

Assim, para a < 0, a função é **decrescente**.

3º) **r** contém os pontos P = (4, 5) e Q = (7, 7).



O ângulo de inclinação é indicado na figura por α. Assim, temos a = tg α.

Logo, a tangente do ângulo α pode ser calculada no triângulo retângulo indicado.

Daí, tg $\alpha = \frac{2}{3}$, ou seja, a = $\frac{2}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Sejam A = (x_A, y_A) e B = (x_B, y_B) dois pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim. O coeficiente angular **a** é dado por:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou, então, } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}\text{, em que } \begin{cases} \Delta y \to \text{variação em } \mathbf{y} \\ \Delta x \to \text{variação em } \mathbf{x} \end{cases}.$$

ESBOÇO DO GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma y = ax + b, é conveniente conhecermos os pontos de interseção desse gráfico com os eixos coordenados.

i) Interseção da reta com o eixo Oy

Fazendo x = 0, temos y = a.0 + b = b. Logo, o ponto de interseção da reta com o eixo Oy é dado pelo ponto (0, b).

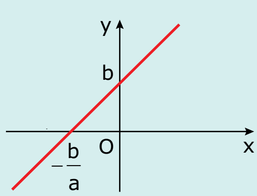
ii) Interseção da reta com o eixo Ox

Fazendo y = 0, temos 0 = ax + b, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

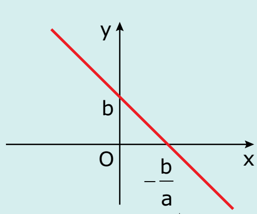
Esse valor é chamado **raiz** ou **zero** da função. Portanto, o ponto de interseção da reta com o eixo Ox é dado por $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Marcando esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas, temos:

a > 0
(função crescente)



a < 0
(função decrescente)



Exemplo:

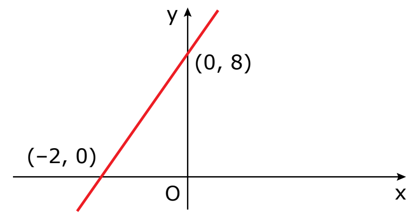
Construir o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que f(x) = 4x + 8.

Temos a = 4 e b = 8.

O número **b** indica a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy. Logo, esse ponto é igual a (0, 8).

O número $-\frac{b}{a}$ indica a abscissa do ponto de interseção da reta com o eixo Ox. Temos: $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2$. Logo, esse ponto é igual a (–2, 0).

Marcando esses pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, basta uni-los para obter o esboço da reta.

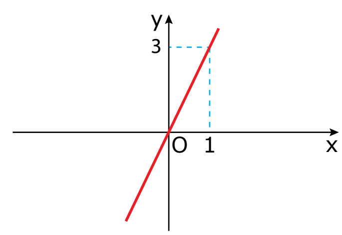


OBSERVAÇÃO

Considere uma função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax + b. Se b = 0, a função é chamada **função linear,** e seu gráfico é uma reta passando pela origem do sistema de coordenadas.

Exemplo:

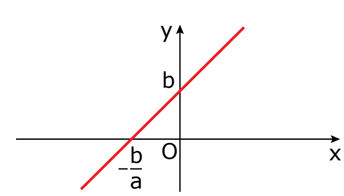
Esboçar o gráfico da função linear y = 3x.



ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

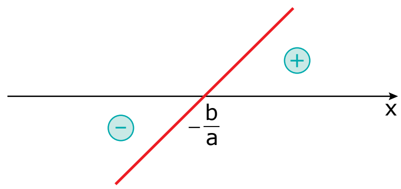
Estudar o sinal de uma função f(x) significa descobrir os valores de **x** para os quais f(x) < 0 ou f(x) = 0 ou f(x) > 0.

Como exemplo, tomemos o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que y = ax + b, com a > 0.



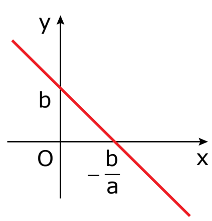
Observe que $-\frac{b}{a}$ é o ponto no qual a função é nula, ou seja, é uma raiz. Para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos.

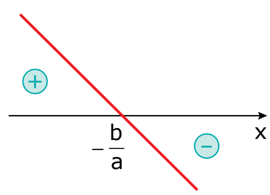
Já para valores de **x** maiores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são positivos**.** Indicamos esses resultados no esquema a seguir:



Os sinais **–** e **+** representam os sinais de **y** para o intervalo de **x** considerado.

Analogamente, com a < 0, observamos que, para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são positivos. Já para valores de **x** maiores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos. Indicamos esses resultados no esquema a seguir:





RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Exemplos:

Resolver cada inequação a seguir:

1º) $3x - 7 > 0$

$3x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$

Conjunto solução (S): $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}\right\}$

2º) $\frac{x-4}{3} \leq 2x - 5$

$x - 4 \leq 6x - 15 \Rightarrow -5x \leq -11$

Multiplicando os dois membros por –1, temos:

$5x \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{11}{5}\right\}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

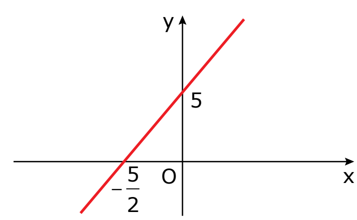
01. Encontrar a expressão matemática e fazer um esboço do gráfico da função afim que contém os pontos A = (1, 7) e B = (–3, –1).

Resolução:

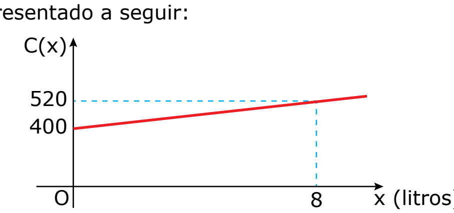
A expressão geral da função afim é dada por y = ax + b. Substituindo as coordenadas dos pontos **A** e **B**, temos o sistema linear: $\begin{cases} a + b = 7 \\ -3a + b = -1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos a = 2 e b = 5. Portanto, a expressão da função é y = 2x + 5. Para esboçarmos o seu gráfico, é necessário encontrar as suas interseções com os eixos coordenados. Fazendo x = 0, temos que y = 5. Fazendo y = 0, temos que $x = -\frac{5}{2}$ (raiz). Portanto, os pontos (0, 5) e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ indicam as interseções com os eixos Oy e Ox, respectivamente.

Esboço do gráfico:



02. O custo **C** de produção de **x** litros de certa substância é dado por uma função afim, com x ≥ 0, cujo gráfico está representado a seguir:



Nessas condições, quantos litros devem ser produzidos de modo que o custo de produção seja igual a R$ 580,00?

Resolução:

Uma função afim é da forma C(x) = ax + b. Do gráfico, temos que C(0) = 400. Mas C(0) = b. Logo, b = 400.

Sabemos que C(8) = a.8 + b = 520. Substituindo o valor de **b**, temos 8a + 400 = 520 ⇒ 8a = 120 ⇒ a = 15.

Portanto, o custo de produção é dado por C(x) = 15x + 400. Fazendo C(x) = 580, temos:

15x + 400 = 580 ⇒ 15x = 180 ⇒ x = 12

Portanto, devem ser produzidos 12 litros.

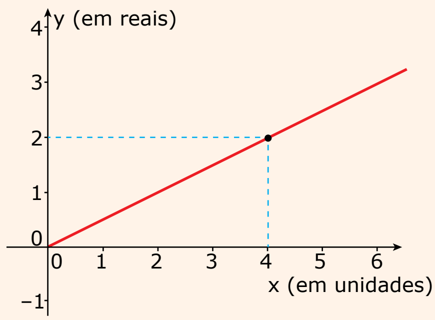
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FGV-SP) Uma função polinomial **f** do 1º grau é tal que f(3) = 6 e f(4) = 8. Portanto, o valor de f(10) é

A) 16.
B) 17.
C) 18.
D) 19.
E) 20.

02. N8J2 (IFSP) O gráfico a seguir apresenta informações sobre a relação entre a quantidade comprada **x** e o valor total pago **y** para um determinado produto que é comercializado para revendedores.



Um comerciante que pretende comprar 2 350 unidades desse produto para revender pagará, nessa compra, o valor total de

A) R$ 4 700,00.
B) R$ 2 700,00.
C) R$ 3 175,00.
D) R$ 8 000,00.
E) R$ 1 175,00.

03. 4NR3 (PUC Minas) A função linear R(t) = at + b expressa o rendimento **R**, em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo **t** é contado em meses, R(1) = –1 e R(2) = 1. Nessas condições, o rendimento obtido nessa aplicação, em quatro meses, é

A) R$ 3 500,00.
B) R$ 4 000,00.
C) R$ 5 000,00.
D) R$ 5 500,00.

04. (UECE–2019) Carlos é vendedor em uma pequena empresa comercial. Seu salário mensal é a soma de uma parte fixa com uma parte variável. A parte variável corresponde a 2% do valor alcançado pelas vendas no mês. No mês de abril, as vendas de Carlos totalizaram R$ 9 450,00, o que lhe rendeu um salário de R$ 1 179,00. Se o salário de Carlos em maio foi de R$ 1 215,00, então o total de suas vendas neste mês ficou entre

A) R$ 11 300,00 e R$ 11 340,00.
B) R$ 11 220,00 e R$ 11 260,00.
C) R$ 11 260,00 e R$ 11 300,00.
D) R$ 11 180,00 e R$ 11 220,00.

05. GN8B (UFG-GO) Para uma certa espécie de grilo, o número **N**, que representa os cricrilados por minuto, depende da temperatura ambiente **T**. Uma boa aproximação para essa relação é dada pela lei de Dolbear, expressa na fórmula N = 7T – 30, com **T** em graus Celsius. Um desses grilos fez sua morada no quarto de um vestibulando às vésperas de suas provas. Com o intuito de diminuir o incômodo causado pelo barulho do inseto, o vestibulando ligou o condicionador de ar, baixando a temperatura do quarto para 15 °C, o que reduziu pela metade o número de cricrilados por minuto. Assim, a temperatura, em graus Celsius, no momento em que o condicionador de ar foi ligado era, aproximadamente, de

A) 75.
B) 36.
C) 30.
D) 26.
E) 20.

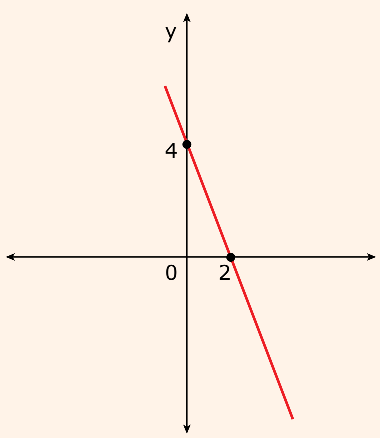
06. X2MT (UCS-RS) O salário mensal de um vendedor é de R$ 750,00 fixos mais 2,5% sobre o valor total, em reais, das vendas que ele efetuar durante o mês. Em um mês em que suas vendas totalizarem **x** reais, o salário do vendedor será dado pela expressão:

A) 750 + 2,5x
B) 750 + 0,25x
C) 750,25x
D) 750(0,25x)
E) 750 + 0,025x

07. ELTC (Unesp) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função f(h) = 17.h, em que **h** indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função g(h) = (15,3)h. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal. Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é

A) 2 501.
B) 2 601.
C) 2 770.
D) 2 875.
E) 2 970.

08. 25WD (CEFET-MG–2020) Considere o gráfico da função real f(x) = –2x + 4, representado no plano cartesiano a seguir



A função afim, g(x), cujo gráfico é simétrico ao dessa função f(x) em relação ao eixo y, é dada por:

A) g(x) = 2x + 4
B) g(x) = 2x – 4
C) g(x) = –2x – 4
D) g(x) = –4x + 2

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EPCAR-MG–2017) João, ao perceber que seu carro apresentara um defeito, optou por alugar um veículo para cumprir seus compromissos de trabalho. A locadora, então, lhe apresentou duas propostas:

- plano **A**, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 50,00 e mais R$ 1,60 por quilômetro rodado.
- plano **B**, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 64,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.

João observou que, para certo deslocamento que totalizava **k** quilômetros, era indiferente optar pelo plano **A** ou pelo plano **B**, pois o valor final a ser pago seria o mesmo.

É correto afirmar que **k** é um número racional entre

A) 14,5 e 20.

B) 20 e 25,5.

C) 25,5 e 31.

D) 31 e 36,5.

02. N223 (UFSM-RS) De acordo com dados da UNEP – Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente, a emissão de gases do efeito estufa foi de 45 bilhões de toneladas de CO_2 em 2005 e de 49 bilhões de toneladas em 2010. Se as emissões continuarem crescendo no mesmo ritmo atual, a emissão projetada para 2020 é de 58 bilhões de toneladas. Porém, para garantir que a temperatura do planeta não suba mais que 2 °C até 2020, a meta é reduzir as emissões para 44 bilhões de toneladas.

Suponha que a meta estabelecida para 2020 seja atingida e considere que **Q** e **t** representam, respectivamente, a quantidade de gases do efeito estufa (em bilhões de toneladas) e o tempo (em anos), com t = 0 correspondendo a 2010, com t = 1 correspondendo a 2011 e assim por diante, sendo **Q** uma função afim de **t**.

A expressão algébrica que relaciona essas quantidades é

A) $Q = -\frac{9}{10}t + 45$

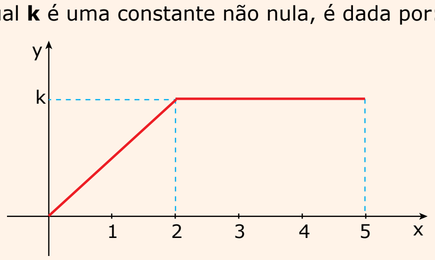
B) $Q = -\frac{1}{2}t + 49$

C) $Q = -5t + 49$

D) $Q = \frac{1}{2}t + 45$

E) $Q = \frac{9}{10}t + 49$

03. DGDH (UEG-GO) A função f(x) que representa o gráfico a seguir, no qual **k** é uma constante não nula, é dada por:



A) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ x, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

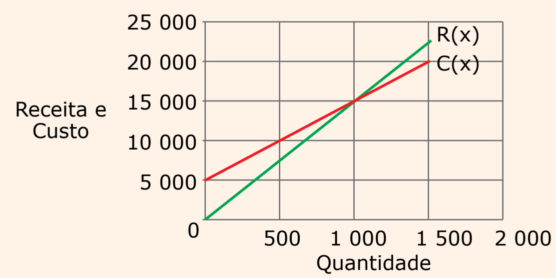
B) $f(x) = \begin{cases} k, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ 3k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ kx, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} kx, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

04. (FGV-SP) Os gráficos a seguir representam as funções receita mensal R(x) e custo mensal C(x) de um produto fabricado por uma empresa, em que **x** é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1 350 unidades por mês?



A) 1 740

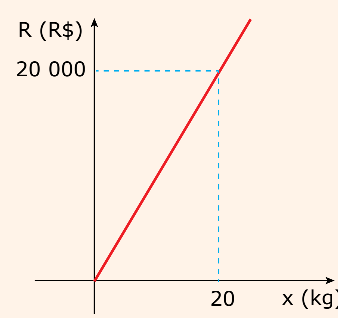
B) 1 750

C) 1 760

D) 1 770

E) 1 780

05. (UCS-RS) O custo total **C**, em reais, de produção de **x** kg de certo produto é dado pela expressão C(x) = 900x + 50. O gráfico a seguir é o da receita **R**, em reais, obtida pelo fabricante, com a venda de **x** kg desse produto.



Qual porcentagem da receita obtida com a venda de 1 kg do produto é lucro?

A) 5%.

B) 10%.

C) 12,5%.

D) 25%.

E) 50%.

06. UXCR (FGV) Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00. Seja **x** a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita.

A soma dos algarismos de **x** é:

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

MATEMÁTICA

07. HEMD

(FGV-SP) Uma fábrica de paletós trabalha com um custo fixo mensal de R\$ 10 000,00 e um custo variável de R\$ 100,00 por paletó. O máximo que a empresa consegue produzir, com a atual estrutura, é 500 paletós por mês. O custo médio na produção de **x** paletós é igual ao quociente do custo total por **x**.

O menor custo médio possível é igual a

A) R\$ 100,00.
B) R\$ 105,00.
C) R\$ 110,00.
D) R\$ 115,00.
E) R\$ 120,00.

08. UYV8

(CEFET-MG) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R\$ 5,00 e mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado (**R**) num dia é função da quantidade total (**x**) de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $R(x) = ax + b$, em que **a** é o preço cobrado por quilômetro e **b** a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R\$ 410,00 então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de:

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20

09. (PUC-SP) O prefeito de certa cidade solicitou a uma equipe de trabalho que obtivesse uma fórmula que lhe permitisse estudar a rentabilidade mensal de cada um dos ônibus de uma determinada linha. Para tal, os membros da equipe consideraram que havia dois tipos de gastos – uma quantia mensal fixa (de manutenção) e o custo do combustível – e que os rendimentos seriam calculados multiplicando-se 2 reais por quilômetro rodado. A tabela a seguir apresenta esses valores para um único ônibus de tal linha, relativamente ao mês de outubro de 2008.

	Outubro
Quantia fixa (reais)	1 150
Consumo de combustível (litros/100 km)	40
Custo de 1 litro de combustível (reais)	4
Rendimentos/km (reais)	2
Distância percorrida (km)	x

Considerando constantes os gastos e o rendimento, a menor quantidade de quilômetros que o ônibus deverá percorrer no mês para que os gastos não superem o rendimento é

A) 2 775.
B) 2 850.
C) 2 875.
D) 2 900.
E) 2 925.

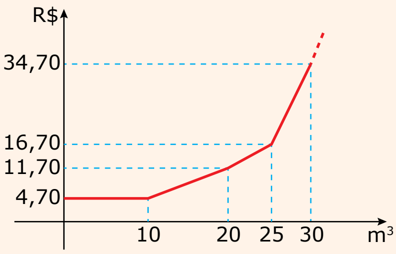
10. (UFJF-MG–2020) Um tanque é abastecido por uma torneira e o volume de água, em milhares de litros, em seu interior, é dado por $V_1(t) = 3t + 13$, com **t** contado em horas a partir do instante $t = 0$ em que a torneira é aberta.

No instante t_1 em que o volume de água atinge a capacidade máxima do tanque, a torneira é automaticamente fechada e, imediatamente, um registro é aberto permitindo que a água acumulada nesse tanque abasteça caixas-d'água menores. A partir do momento em que esse registro é aberto, o volume d'água no tanque passa a ser descrito pela função $V_2(t) = -2t + 58$, para $t \geq t_1$, até que o tanque esteja completamente vazio.

A) Calcule a capacidade máxima do tanque.
B) Em quanto tempo o tanque estará vazio depois de fechada a torneira e aberto o registro?

11. GC2B

(UFJF-MG) Para desencorajar o consumo excessivo de água, o Departamento de Água de certo município aumentou o preço desse líquido. O valor mensal pago em reais por uma residência, em função da quantidade de metros cúbicos consumida, é uma função cujo gráfico é a poligonal representada a seguir:

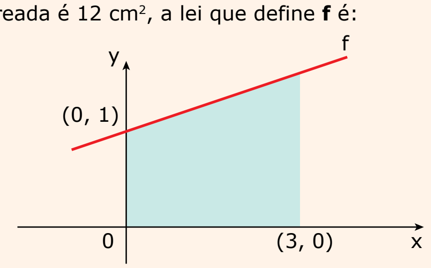


De acordo com o gráfico, quanto ao pagamento relativo ao consumo mensal de água de uma residência, é correto afirmar que, se o consumo

A) for nulo, a residência estará isenta do pagamento.
B) for igual a 5 m³, o valor pago será menor do que se o consumo for igual a 10 m³.
C) for igual a 20 m³, o valor pago será o dobro do que se o consumo for igual a 10 m³.
D) exceder 25 m³, o valor pago será R\$ 16,70 acrescido de R\$ 3,60 por m³ excedente.
E) for igual a 22 m³, o valor pago será R\$ 15,00.

12. OLSL

(Ibmec-RJ) Considere a figura seguinte, na qual um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função **f**. Sabendo-se que a área da região sombreada é 12 cm², a lei que define **f** é:



A) $y = 2x - 1$
B) $y = -2x + 1$
C) $y = \left(\frac{2x}{3}\right) + 1$
D) $y = \left(\frac{5x}{2}\right) + 1$
E) $y = 2x + 1$

13. 6ILO

(UESC-BA) O monitoramento do número de batimentos cardíacos por minuto, relacionando-o com a idade do indivíduo, não só pode evitar enfartes fulminantes como também auxiliar na determinação dos limites a serem respeitados na prática de atividades físicas. A fórmula clássica utilizada na determinação do número máximo de batimentos cardíacos por minuto (bpm), $F_{Máx.} = 220 - i$, em que **i** é a idade, é bastante controversa, pois pode errar de duas maneiras – os mais jovens podem extrapolar seus limites e os mais velhos ficarem aquém dos que poderiam atingir.

Estudos mostraram que se utilizando a fórmula $F = 60 + k(F_{Máx.} - 60)$, em que $55\% \leq k \leq 70\%$, se pode determinar uma faixa de batimentos cardíacos por minuto dentro da qual é possível conseguir benefícios através dos exercícios, evitando sobrecargas.

Nessas condições, um indivíduo com 50 anos de idade pode fazer exercícios físicos, com segurança, dentro da faixa de batimentos por minuto, entre

A) 108 e 125.
B) 121 e 136.
C) 130 e 142.
D) 138 e 153.
E) 150 e 166.

14. 9RVR

(UPE) Um dos reservatórios d'água de um condomínio empresarial apresentou um vazamento a uma taxa constante, às 12 h do dia 1º de outubro. Às 12 h dos dias 11 e 19 do mesmo mês, os volumes d'água no reservatório eram, respectivamente, 315 mil litros e 279 mil litros. Dentre as alternativas seguintes, qual delas indica o dia em que o reservatório esvaziou totalmente?

A) 16 de dezembro.
B) 17 de dezembro.
C) 18 de dezembro.
D) 19 de dezembro.
E) 20 de dezembro.

SEÇÃO ENEM

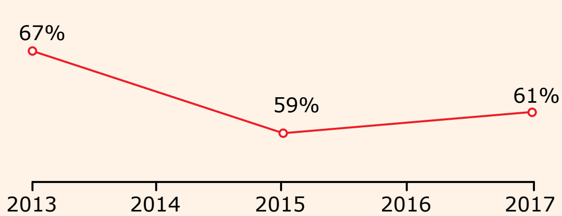
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de **X** a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia **Y**, em reais, que essa empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

A) $Y = 80X + 920$
B) $Y = 80X + 1\ 000$
C) $Y = 80X + 1\ 080$
D) $Y = 160X + 840$
E) $Y = 160X + 1\ 000$

02. (Enem–2018) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.

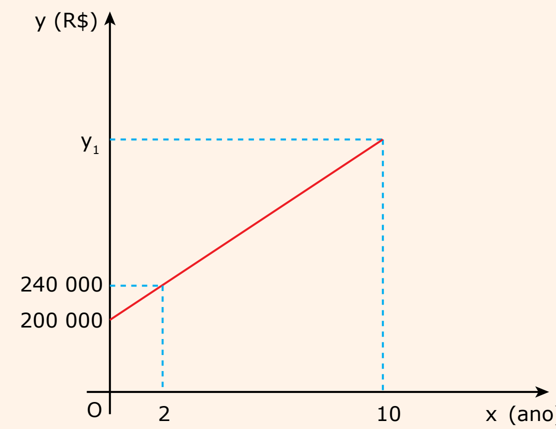


Disponível em: <http://pni.datasus.gov.br>. Acesso em: 05 nov. 2017.

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

A) 62,3%.
B) 63,0%.
C) 63,5%.
D) 64,0%.
E) 65,5%.

03. (Enem–2017) Um sítio foi adquirido por R$ 200 000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico, e que essa tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.

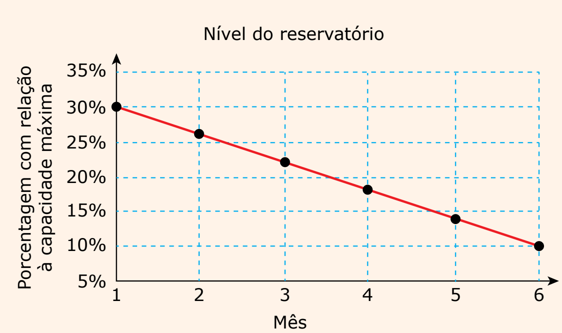


O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de

A) 190 000.
B) 232 000.
C) 272 000.
D) 400 000.
E) 500 000.

04. CQQN

(Enem) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

A) 2 meses e meio.
B) 3 meses e meio.
C) 1 mês e meio.
D) 4 meses.
E) 1 mês.

05. (Enem) Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) x consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

A) 134,1
B) 135,0
C) 137,1
D) 138,6
E) 143,1

06. (Enem) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$

$Q_D = 46 - 2P$,

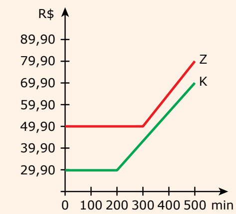
em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e **P** é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

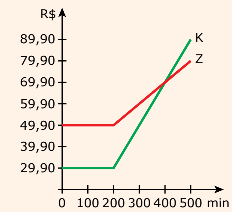
Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

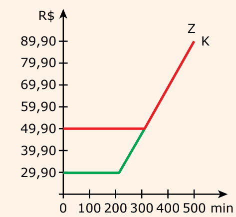
A) 5
B) 11
C) 13
D) 23
E) 33

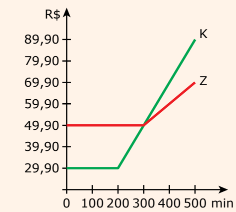
07. (Enem) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano **K**, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano **Z**, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

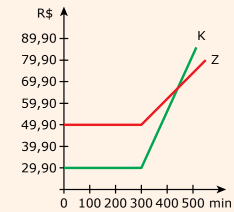
O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

A)


B)


C)


D)


E)


SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. E
03. C
04. B
05. D
06. E
07. B
08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. B
03. E
04. B
05. A
06. D
07. E
08. C
09. C
10.
    A) 40 L
    B) 20 h
11. D
12. E
13. B
14. E

Seção Enem

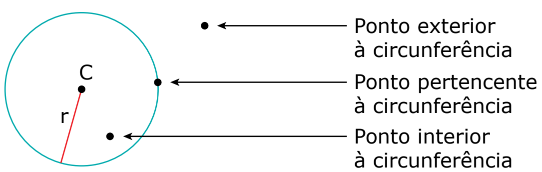
Acertei ______ Errei ______

01. D
02. B
03. D
04. A
05. C
06. B
07. D

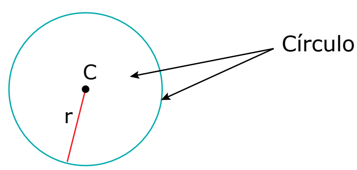
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Circunferência

Sendo **C** um ponto de um plano α e **r** uma medida positiva, chamamos circunferência de centro **C** e raio **r** o conjunto dos pontos do plano α que distam de **C** a medida **r**.

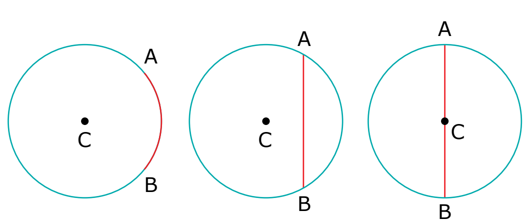


A união de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.



Arcos e cordas

Dois pontos **A** e **B** de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro **C** da circunferência é chamada de **diâmetro**.



PERÍMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

Todas as circunferências são semelhantes entre si. Por isso, a razão entre a medida **C** do comprimento (perímetro) de uma circunferência e a medida 2r de seu diâmetro é constante, isto é:

$$\boxed{\frac{C}{2r} = \text{constante}}$$

A constante $\frac{C}{2r}$ é simbolizada pela letra grega π (pi), e sabemos, hoje, que essa constante é um número irracional, isto é, tem infinitas casas decimais e não é periódica:

$$\pi = 3{,}14159265...$$

Da sentença $\frac{C}{2r} = \pi$, podemos concluir que:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

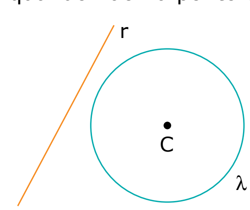
Portanto, o perímetro de uma circunferência é igual ao produto da medida do diâmetro por π.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Uma reta **r** e uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, admitem as seguintes posições relativas:

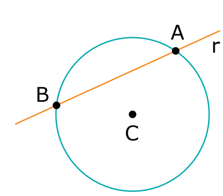
Exterior

r é exterior a λ quando não há ponto comum entre elas.



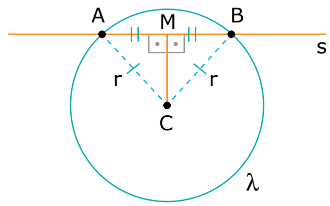
Secante

Uma secante a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.



Dizemos que a reta e a circunferência são secantes.

Propriedades da secante

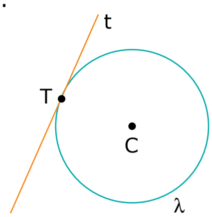


i) Se uma reta **s**, secante a uma circunferência λ (C, r), intercepta λ em dois pontos distintos **A** e **B** e se **M** é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{CM}$ é perpendicular à secante **s** (ou perpendicular à corda $\overline{AB}$).

ii) Se uma reta **s**, secante a uma circunferência λ (C, r), intercepta λ em dois pontos distintos **A** e **B**, então a reta perpendicular a **s**, conduzida pelo centro **C**, passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.

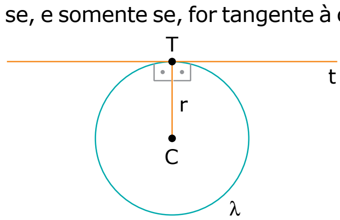
Tangente

Uma tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência num único ponto, denominado ponto de tangência.



Propriedade da tangente

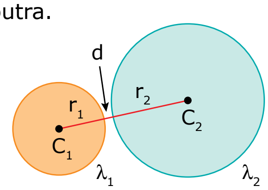
Toda reta é perpendicular a um raio na extremidade da circunferência se, e somente se, for tangente à circunferência.



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

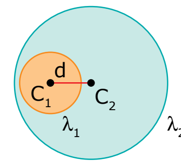
Duas circunferências λ_1 e λ_2, de centros C_1 e C_2 e de raios r_1 e r_2, contidas em um mesmo plano, admitem as posições relativas a seguir:

Externas: quando todos os pontos de qualquer uma delas são externos à outra.



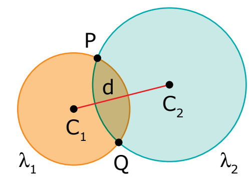
$d > r_1 + r_2$

Uma interna à outra: quando todos os pontos de uma delas são internos à outra.



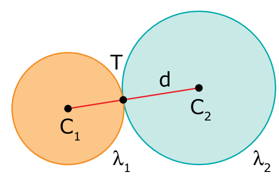
$d < |r_1 - r_2|$

Secantes: quando têm exatamente dois pontos distintos em comum.

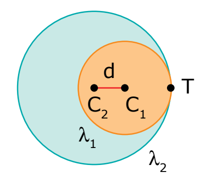


$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

Tangentes: quando têm um único ponto em comum.



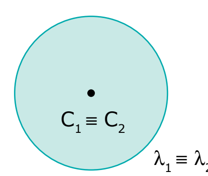
$d = r_1 + r_2$



$d = |r_1 - r_2|$

Em duas circunferências tangentes, os centros C_1 e C_2 e o ponto de tangência **T** são colineares.

Coincidentes: quando possuem todos os seus pontos em comum.

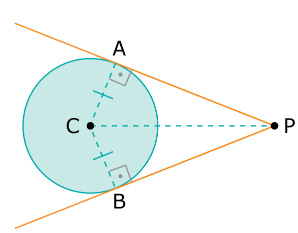


$$\begin{cases} d = 0 \\ r_1 = r_2 \end{cases}$$

QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS E INSCRITÍVEIS

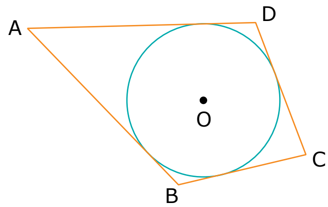
Segmentos tangentes

Se de um ponto **P** conduzimos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com **A** e **B** na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.



Quadrilátero circunscrito

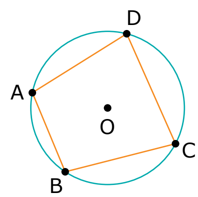
Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.



A soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Quadrilátero inscrito

Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, tem os vértices numa circunferência.

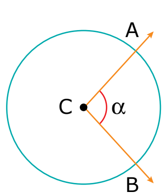


Os ângulos opostos são suplementares.

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo central de uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.

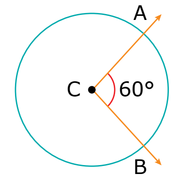


α = Ângulo central
$\overset{\frown}{AB}$ = Arco determinado pelo ângulo central

$$\boxed{\alpha = \overset{\frown}{AB}}$$

Define-se a medida, em graus, de um arco de circunferência como a medida do ângulo central que o determina.

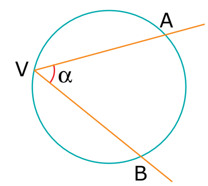
Exemplo:



$m(A\hat{C}B) = m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$

Ângulo inscrito em uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** dessa circunferência.

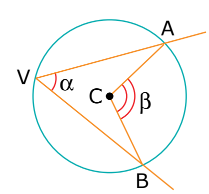


α = Ângulo inscrito
$\overset{\frown}{AB}$ = Arco determinado pelo ângulo inscrito

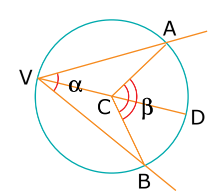
A medida do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração:

Traçando o ângulo central β e o diâmetro $\overline{VD}$ passando por **C**, temos:



e



Observe que os triângulos CVA e CVB são isósceles, portanto $C\hat{V}A = C\hat{A}V$ e $C\hat{V}B = C\hat{B}V$.

$A\hat{C}D$ é ângulo externo ao triângulo CVA, assim:

$$A\hat{C}D = C\hat{V}A + C\hat{A}V = 2.C\hat{V}A \Rightarrow C\hat{V}A = \frac{A\hat{C}D}{2}$$

$B\hat{C}D$ é ângulo externo ao triângulo CVB, assim:

$$B\hat{C}D = C\hat{V}B + C\hat{B}V = 2.C\hat{V}B \Rightarrow C\hat{V}B = \frac{B\hat{C}D}{2}$$

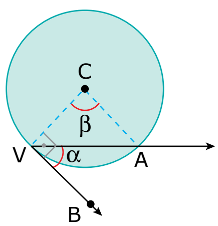
$$\alpha = C\hat{V}A + C\hat{V}B = \frac{A\hat{C}D}{2} + \frac{B\hat{C}D}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2}.(A\hat{C}D + B\hat{C}D) \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}}$$

Ângulo de segmento

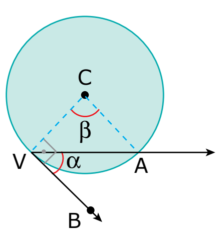
Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência, com um lado tangente e o outro secante à circunferência, é chamado de **ângulo de segmento**.



Um ângulo de segmento e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos correspondentes** dessa circunferência.

A medida do ângulo de segmento é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração:



O ângulo $C\hat{V}A$ é complementar de $A\hat{V}B$.

Logo, $m(C\hat{V}A) = 90° - \alpha$.

Se o triângulo CVA é isósceles, pois $\overline{CV} \equiv \overline{CA}$, então $C\hat{V}A = C\hat{A}V = 90° - \alpha$. Assim, pela soma dos ângulos internos do $\triangle$CVA:

$$\beta + 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = \beta \Rightarrow$$

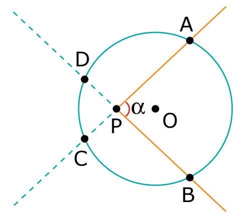
$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}}$$

Ângulo excêntrico

Interior

Se o vértice de um ângulo é interior à circunferência e não coincide com o seu centro, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico interior**.

A medida de um ângulo excêntrico interior é igual à semissoma das medidas dos arcos interceptados por ele e por seu oposto pelo vértice.

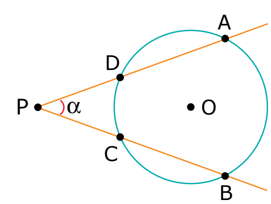


$$\boxed{\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}}$$

Exterior

Se o vértice de um ângulo é exterior à circunferência e seus lados são secantes a ela, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico exterior**.

A medida de um ângulo excêntrico exterior é igual à semidiferença das medidas dos arcos que ele intercepta.



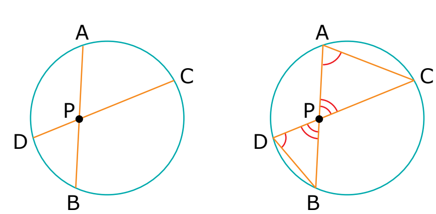
$$\boxed{\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}}$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ponto interior à circunferência

Se, em uma circunferência, duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ concorrem em um ponto **P**, então:

$$\boxed{PA.PB = PC.PD}$$



Demonstração:

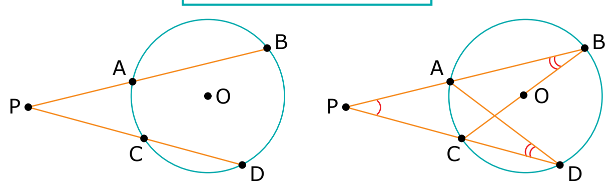
Observe que os triângulos APC e DPB são semelhantes, pelo caso AA ($P\hat{A}C$ e $P\hat{D}B$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco, e $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}B$ são opostos pelo vértice). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

Ponto exterior à circunferência

i) Se duas retas secantes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, concorrentes em **P**, interceptam uma circunferência em **A**, **B**, **C** e **D**, conforme a figura a seguir, então:

$$\boxed{PA.PB = PC.PD}$$



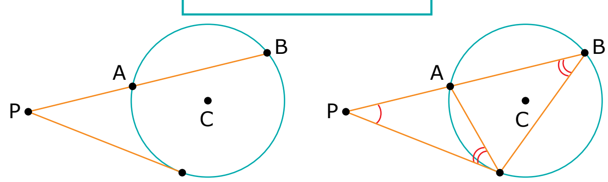
Demonstração:

Observe que os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pelo caso AA ($A\hat{P}C$ é ângulo comum aos dois triângulos, e $P\hat{B}C$ e $P\hat{D}A$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

ii) Se uma reta secante $\overleftrightarrow{AB}$ e uma tangente $\overleftrightarrow{PT}$, concorrentes em **P**, interceptam uma circunferência em **A**, **B** e **T**, conforme a figura a seguir, então:

$$\boxed{(PT)^2 = PA.PB}$$



Demonstração:

Observe que os triângulos PAT e PTB são triângulos semelhantes, pelo caso AA ($A\hat{P}T$ é um ângulo comum aos dois triângulos; $P\hat{B}T$, inscrito na circunferência, e $P\hat{T}A$, ângulo de segmento, determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow (PT)^2 = PA.PB$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFPE–2019) Ruan começou os treinamentos para correr uma meia maratona: 21 km de distância. Seu treinador sugeriu que iniciasse os treinos correndo distâncias menores e fosse aumentando a cada semana, até que suportasse os 21 km sem muitas alterações na frequência cardíaca. Ruan, então, decidiu fazer os treinamentos correndo em torno de uma praça circular cujo raio é de 35 metros. Quantas voltas, no mínimo, ele precisaria dar nessa praça para alcançar os 21 km de distância percorrida? (Adote $\pi = 3$)

A) 100
B) 10
C) 50
D) 200
E) 300

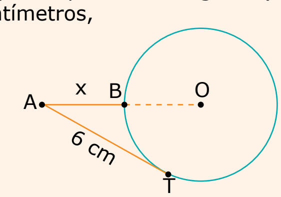
02. CVWY (UFTM-MG) O maior relógio de torre de toda a Europa é o da Igreja St. Peter, na cidade de Zurique, Suíça, que foi construído durante uma reforma do local, em 1970.

O ESTADO DE S. PAULO (Adaptação).

O mostrador desse relógio tem formato circular, e o seu ponteiro dos minutos mede 4,35 m. Considerando $\pi \cong 3{,}1$, a distância que a extremidade desse ponteiro percorre durante 20 minutos é, aproximadamente,

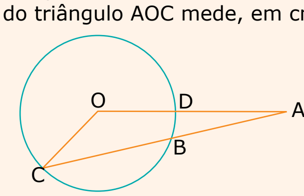
A) 10 m.
B) 9 m.
C) 8 m.
D) 7 m.
E) 6 m.

03. VI8C (FUVEST-SP) O raio da circunferência da figura é 2,5 cm. AT = 6 cm (**T** é o ponto de tangência). Então, AB = x vale, em centímetros,



A) 2.
B) 9.
C) 3.
D) 3,5.
E) 4.

04. 9ØLA (Cesgranrio) Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto **O** é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm,



A) 36.
B) 45.
C) 48.
D) 50.
E) 54.

05. 5AOU (IFCE) Em uma engrenagem, uma roda tem 90 cm de comprimento e dá 600 voltas, enquanto outra, menor, dá 1 800 voltas. O raio da roda menor, em centímetros, é:

A) $\frac{12}{\pi}$
B) $\frac{15}{\pi}$
C) $\frac{5}{2\pi}$
D) $\frac{3\pi}{2}$
E) π

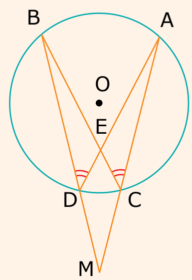
06. (IFSC-SC) Considere a seguinte situação: Durante a Oktoberfest, em Blumenau-SC, um conjunto de bicicletas com rodas de diâmetro 26 polegadas percorreu 855,6 m em linha reta, durante o desfile na Rua XV de Novembro. Sabendo-se que 1 polegada equivale a 2,5 cm e que $\pi = 3{,}1$, é correto afirmar que, durante o desfile, a roda realizou

A) 600 voltas.
B) 800 voltas.
C) menos de 400 voltas.
D) mais de 1 200 voltas.
E) entre 400 e 500 voltas.

MATEMÁTICA

07. C6IZ

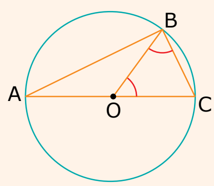
(Mackenzie-SP) Na figura a seguir, sabe-se que $C\hat{A}D = 20°$ e $C\hat{E}D = 70°$. Então, $A\hat{M}B$ é igual a



A) 50°.
B) 45°.
C) 60°.
D) 22°30'.
E) 30°.

08. 3D1C

(UFRRJ) Um arquiteto vai construir um obelisco de base circular. Serão elevadas sobre essa base duas hastes triangulares, conforme figura a seguir, em que o ponto **O** é o centro do círculo de raio 2 m e os ângulos $B\hat{O}C$ e $O\hat{B}C$ são iguais.



O comprimento do segmento AB é:

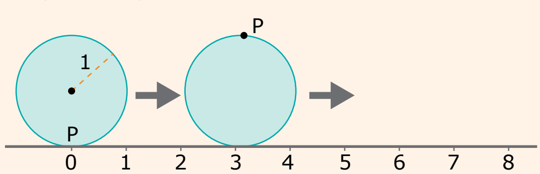
A) 2 m
B) 3 m
C) $3\sqrt{2}$ m
D) $2\sqrt{5}$ m
E) $2\sqrt{3}$ m

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. APA2

(UFRGS-RS) Um disco de raio 1 gira ao longo de uma reta coordenada na direção positiva, como representado na figura a seguir:



Considerando-se que o ponto **P** está inicialmente na origem, a coordenada de **P**, após 10 voltas completas, estará entre

A) 60 e 62.
B) 62 e 64.
C) 64 e 66.
D) 66 e 68.
E) 68 e 70.

02. (FGV–2017) Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

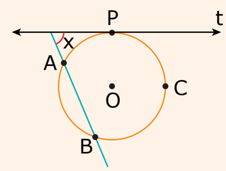
A) 63 cm.
B) 12,6 m.
C) 6,3 km.
D) 12,6 km.
E) 63 km.

03. (UTFPR) Duas cordas cortam-se no interior de um círculo. Os segmentos da primeira são expressos por 6x e 2x + 2 e os da segunda por 2x e 8x – 2. Com isso podemos determinar que o comprimento da maior corda vale

A) 24.
B) 30.
C) 32.
D) 34.
E) 38.

04. IHDG

(IFSP) Na figura, a reta **t** é tangente, no ponto **P**, ao círculo de centro **O**. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 100° e a do arco $\overset{\frown}{BCP}$ é 194°. O valor de **x**, em graus, é



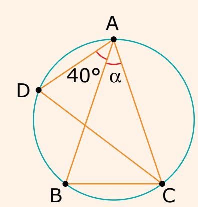
A) 53.
B) 57.
C) 61.
D) 64.
E) 66.

05. (EFOMM-RJ–2020) Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência de centro **O**. Sejam O' e **E** o encontro do triângulo ABC e o ponto médio do arco BC que não contém o ponto **A**, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos EB, EO' e EC.

A) EB = EO' = EC
B) EB < EO' = EC
C) EB > EO' > EC
D) EB = EO' > EC
E) EB < EO' < EC

06. EØEB

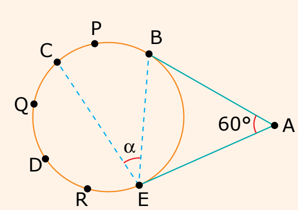
(UFES) Na figura, **A**, **B**, **C** e **D** são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é



A) 10°.
B) 15°.
C) 20°.
D) 25°.
E) 30°.

07. M7YB

(FGV) Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos **B** e **E**, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$.

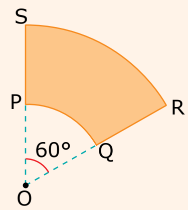


Se os arcos $\overset{\frown}{BPC}$, $\overset{\frown}{CQD}$ e $\overset{\frown}{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a

A) 20°.
B) 40°.
C) 45°.
D) 60°.
E) 80°.

08. NT95

(UFRGS-RS) Considere o setor circular de raio 6 e ângulo central 60° da figura a seguir:

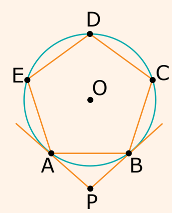


Se **P** e **Q** são pontos médios, respectivamente, de OS e OR, então o perímetro da região sombreada é:

A) $\pi + 6$
B) $2\pi + 6$
C) $3\pi + 6$
D) $\pi + 12$
E) $3\pi + 12$

09. 6624

(CEFET-MG) Na figura a seguir, o pentágono regular está inscrito numa circunferência de centro **O** e as semirretas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos **A** e **B**, respectivamente.

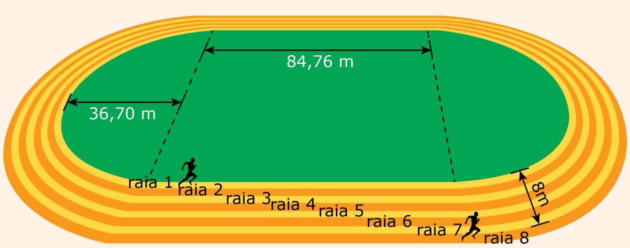


A medida do ângulo $A\hat{P}B$, em graus, é igual a

A) 36.
B) 72.
C) 108.
D) 154.

10. SORI

(UEL-PR) Uma pista de corrida de 400 m é constituída por trechos retos e semicirculares, conforme a figura a seguir:



Suponha que dois atletas, nas curvas, sempre se mantenham na parte mais interna de suas raias, de modo a percorrerem a menor distância nas curvas, e que a distância medida a partir da parte interna da raia 1 até a parte interna da raia 8 seja de 8 m.

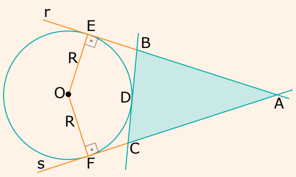
Para que ambos percorram 400 m, quantos metros o atleta da raia mais externa deve partir à frente do atleta da raia mais interna?

Dado: $\pi = 3{,}14$

A) 10,00 m.
B) 25,12 m.
C) 32,46 m.
D) 50,24 m.
E) 100,48 m.

11. 3LLF

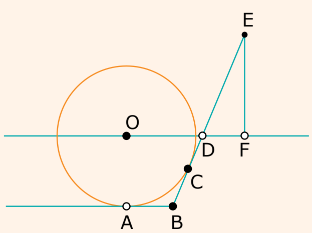
(EPCAR-MG–2017) Na figura, **E** e **F** são, respectivamente, pontos de tangência das retas **r** e **s** com a circunferência de centro **O** e raio **R**. **D** é ponto de tangência de BC com a mesma circunferência e $\overline{AE} = 20$ cm.



O perímetro do triângulo ABC (hachurado), em centímetros, é igual a

A) 20.
B) 10.
C) 40.
D) 15.

12. (CEFET-RJ) Na figura a seguir, **O** é o centro de uma circunferência que tangencia a semirreta BA no ponto **A** e tangencia o segmento BE no ponto **C**. Sabendo ainda que BA é paralela à reta OF, que o segmento EF é perpendicular à OF e que o menor arco da circunferência com extremidades em **A** e **C** mede 60°, podemos afirmar que o ângulo $D\hat{E}F$ mede



A) 20°.
B) 30°.
C) 50°.
D) 60°.

13. B9VH

(ITA-SP) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se **r** é o raio da circunferência inscrita e **a** é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma a + r (em cm) é igual a

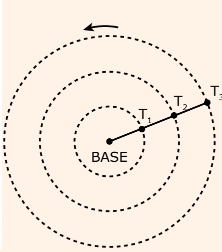
A) 12.
B) 11.
C) 10.
D) 9.
E) 8.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SC3S

(Enem–2017) Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move-se com velocidade constante.



Um pivô de três torres (T_1, T_2 e T_3) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre T_1 são iguais a 50 m. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em 25 horas. Use 3 como aproximação para π.

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres T_1, T_2 e T_3 devem ser, em metro por hora, de

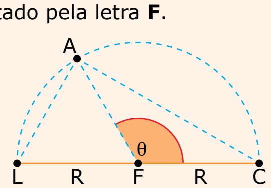
A) 12, 24 e 36.
B) 6, 12 e 18.
C) 2, 4 e 6.
D) 300, 1 200 e 2 700.
E) 600, 2 400 e 5 400.

02. (Enem) Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro **d** em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando-se a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

A) πd B) 2πd C) 4πd D) 5πd E) 10πd

03. (Enem) Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio **R**, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra **L**, a chegada está representada pela letra **C** e a letra **A** representa o atleta. O segmento LC é um diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra **F**.

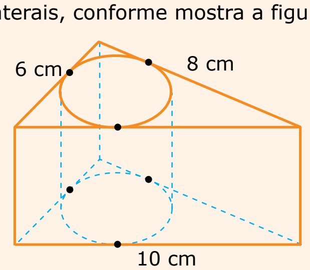


Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com segmento FC.

Quantos graus medirá o ângulo θ quando o segmento AC medir **R** durante a corrida?

A) 15°. B) 30°. C) 60°. D) 90°. E) 120°.

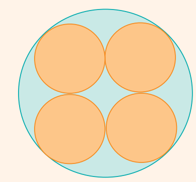
04. (Enem) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

A) 1 cm.
B) 2 cm.
C) 3 cm.
D) 4 cm.
E) 5 cm.

05. (Enem) Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior.



Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a

A) 12 cm.
B) $12\sqrt{2}$ cm.
C) $24\sqrt{2}$ cm.
D) $6(1 + \sqrt{2})$ cm.
E) $12(1 + \sqrt{2})$ cm.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. B
03. E
04. E
05. B
06. E
07. E
08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. E
04. D
05. A
06. C
07. B
08. C
09. C
10. D
11. C
12. B
13. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

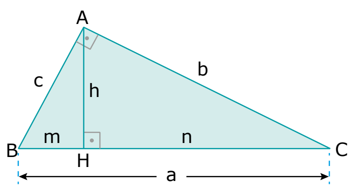
01. A
02. D
03. C
04. B
05. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Triângulo Retângulo

INTRODUÇÃO

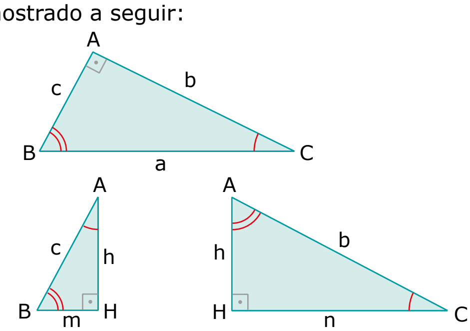
Considere o triângulo retângulo ABC a seguir:



Em que:

- **b** e **c** são as medidas dos catetos;
- **a** é a medida da hipotenusa;
- **h** é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- **m** é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- **n** é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Pela altura relativa à hipotenusa, separamos o triângulo retângulo em dois outros triângulos semelhantes a ele, como mostrado a seguir:



Pela semelhança entre esses triângulos, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} ah = bc \\ c^2 = am \\ ch = bm \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = an \\ ah = bc \\ bh = cn \end{cases}$$

$$\Delta HBA \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow \begin{cases} bh = cn \\ ch = bm \\ h^2 = mn \end{cases}$$

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$

Como $n + m = a$, concluímos que:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

OBSERVAÇÃO

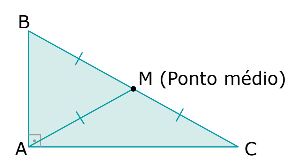
O recíproco Teorema de Pitágoras também é válido, ou seja, se, em um triângulo, o quadrado de um lado for igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo será retângulo.

Resumindo as relações encontradas e excluindo as repetidas, vale a pena memorizar as seguintes:

i) $b^2 = an$	**iv)** $ah = bc$
ii) $c^2 = am$	**v)** $a^2 = b^2 + c^2$
iii) $h^2 = mn$	

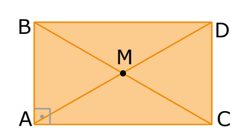
MEDIDA DA MEDIANA RELATIVA À HIPOTENUSA

Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.



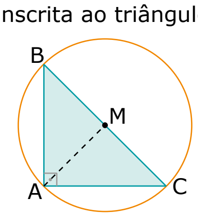
$$\boxed{AM = \frac{BC}{2}}$$

Para provar essa propriedade, construa o retângulo ABDC e suas diagonais. As diagonais de um retângulo são congruentes e o ponto comum às duas é o ponto médio de cada uma. Logo, este é o ponto médio, **M**, da hipotenusa do triângulo ABC:



Como $AD = BC$ e $AM = \frac{AD}{2}$, concluímos que $AM = \frac{BC}{2}$.

Outra maneira de verificar tal propriedade é por meio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.



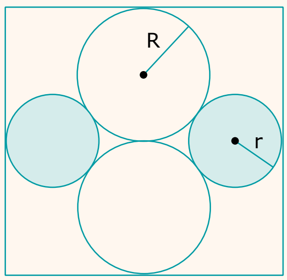
Como o ângulo inscrito na circunferência é reto, o arco $\overset{\frown}{BC}$ que ele "enxerga" mede 180°. Portanto, o segmento $\overline{BC}$ é o diâmetro, e o ponto médio **M** é o centro da circunferência. Logo, a medida $\overline{AM}$ é igual ao raio da circunferência, de onde conclui-se que $AM = \frac{BC}{2}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. HFVT

(ESPM-SP) A figura mostra um quadrado, dois círculos claros de raios **R** e dois círculos escuros de raios **r**, tangentes entre si e aos lados do quadrado.



A razão entre **R** e **r** é igual a:

A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

02. B4DQ

(IFPE) Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:

1. Ande 200 metros na direção norte;
2. Ande 120 metros na direção leste;
3. Ande 50 metros na direção sul;
4. Ande 40 metros na direção oeste.

Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, a distância calculada por Luiz foi de

A) 170 metros.

B) 150 metros.

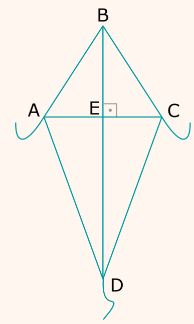
C) 180 metros.

D) 200 metros.

E) 210 metros.

03. J07V

(CEFET-MG) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero ABCD sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$. A vareta $\overline{BD}$ da pipa intercepta a vareta $\overline{AC}$ em seu ponto médio **E**, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ usadas são, respectivamente, 25 cm e 20 cm, e a medida de $\overline{AC}$ equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de $\overline{BD}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a:

A) 25.

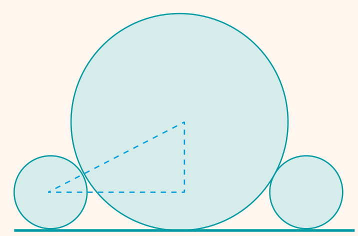
B) 40.

C) 55.

D) 70.

04. Ø379

(UESPI) Uma circunferência de raio **R** é tangente externamente a duas circunferências de raio **r**, com r < R. As três circunferências são tangentes a uma mesma reta, como ilustrado a seguir. Qual a distância entre os centros das circunferências de raio **r**?



A) $4\sqrt{Rr}$

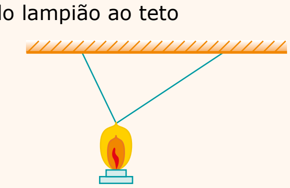
B) $3\sqrt{Rr}$

C) $2\sqrt{Rr}$

D) $\sqrt{Rr}$

E) $\frac{\sqrt{Rr}}{2}$

05. (UFRGS-RS) O lampião, representado na figura, está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$, a distância do lampião ao teto



A) 1,69.

B) 1,3.

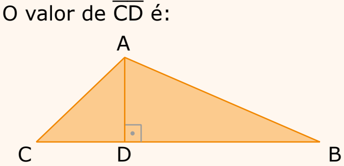
C) 0,6.

D) $\frac{1}{2}$.

E) $\frac{6}{13}$.

06. 96Q8

(FUVEST-SP) Na figura a seguir, tem-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6. O valor de $\overline{CD}$ é:



A) $\frac{17}{12}$

B) $\frac{19}{12}$

C) $\frac{23}{12}$

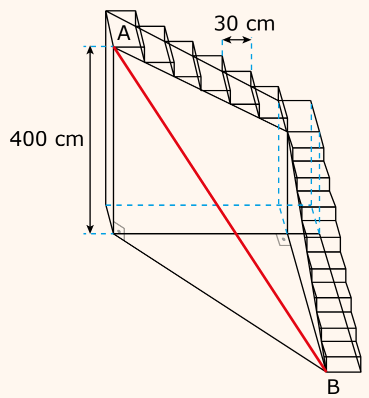
D) $\frac{25}{12}$

E) $\frac{29}{12}$

07. (Mackenzie-SP) A soma entre as medidas da altura e da base de um retângulo é de 14 cm. Se a diagonal mede 10 cm, então as medidas da altura e da base do retângulo são, respectivamente,

A) 2 cm e 12 cm.
B) 9 cm e 5 cm.
C) 10 cm e 4 cm.
D) 8 cm e 6 cm.
E) 11 cm e 3 cm.

08. 4DDY (IFSC) Para acessar o topo de uma plataforma de saltos a 400 cm de altura, um atleta deve subir uma escadaria que possui 8 degraus no primeiro lance e 6 degraus no segundo lance de escada, conforme mostra a figura a seguir:



Sabendo que cada degrau possui 30 cm de profundidade, é correto afirmar que o comprimento, em cm, da haste metálica AB utilizada para dar sustentação à plataforma é

A) 300.
B) 400.
C) 500.
D) 200.
E) 100.

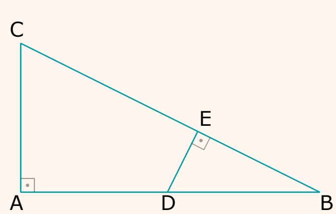
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EsPCEx-SP–2018) Os centros de dois círculos distam 25 cm. Se os raios desses círculos medem 20 cm e 15 cm, a medida da corda comum a esses dois círculos é

A) 12 cm.
B) 24 cm.
C) 30 cm.
D) 32 cm.
E) 36 cm.

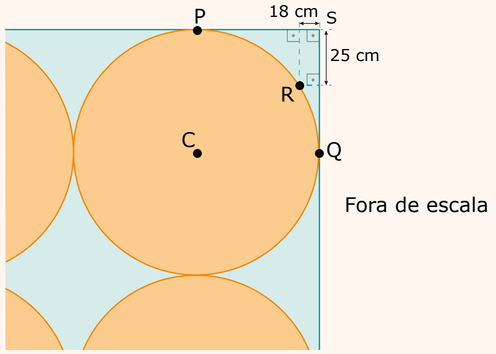
02. ALTH (CEFET-MG) Na figura, os triângulos ABC e BDE são triângulos retângulos, onde $\overline{AC} = 2$, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{AD} = 2\,\overline{DE}$.



Desenhando o triângulo ACD a medida do segmento CD é igual a:

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$

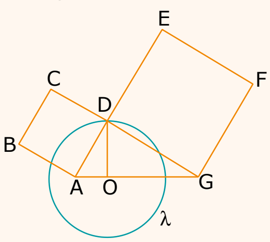
03. RRCR (UNIFESP–2018) Em um tapete retangular decorado com círculos idênticos, o círculo de centro **C** tangencia as laterais do tapete em **P** e **Q**. O ponto **R** pertence à circunferência desse círculo e está à distância de 18 cm e de 25 cm das laterais do tapete, como mostra a figura.



A) Calcule a distância de **R** até o canto superior do tapete, indicado por **S**. Deixe a resposta indicada com raiz quadrada.

B) Calcule o raio dos círculos que compõem a decoração do tapete.

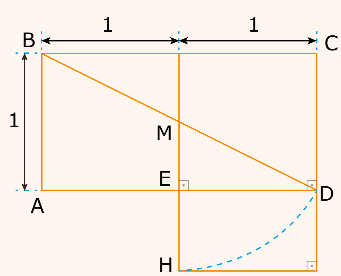
04. QT1F (CEFET-MG) Na figura a seguir, os quadrados ABCD e DEFG possuem áreas iguais a 9 e 16 m² respectivamente. O triângulo ADG é retângulo em **D** e λ é a circunferência cujo centro está no ponto **O**.



Sabendo-se que a área de um círculo de raio **r** é πr^2, então o valor da área delimitada por λ, em m², é igual a:

A) $4{,}5\,\pi$
B) $5{,}76\,\pi$
C) $7{,}24\,\pi$
D) $9{,}30\,\pi$

05. 9Y7M (CEFET-MG) Nesta figura, ABCD é um retângulo e DH é um arco de circunferência cujo centro é o ponto **M**.



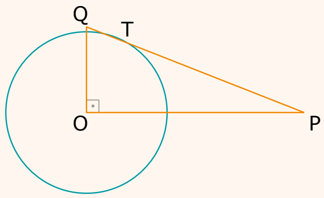
O segmento EH em unidades de comprimento, mede:

A) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
B) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$
C) $\dfrac{1}{3}$
D) $\dfrac{1}{2}$
E) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

MATEMÁTICA

06. IYV4

(UDESC–2018) Na figura a seguir sem escala, o raio da circunferência de centro **O** é r = 3 cm e o segmento OP mede 5 cm.

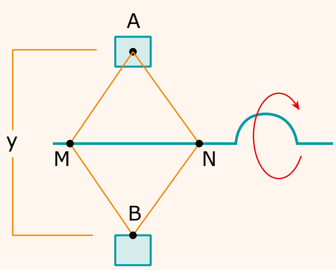


Sabendo que o segmento PQ tangencia a circunferência no ponto **T**, pode-se dizer que o segmento OQ mede

A) 1,25 cm.
B) 5 cm.
C) 3,75 cm.
D) 4 cm.
E) 3,5 cm.

07. IX7A

(UERJ) Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:

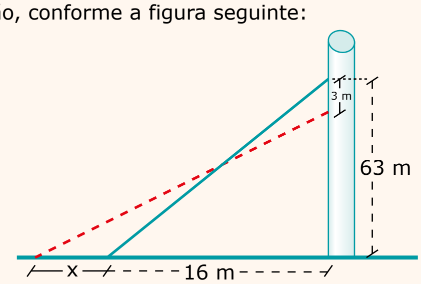


Considere as seguintes medidas:
AM = AN = BM = BN = 4 dm; MN = x dm; AB = y dm.
O valor, em decímetros, de **y** em função de **x** corresponde a:

A) $\sqrt{16 - 4x^2}$
B) $\sqrt{64 - x^2}$
C) $\dfrac{\sqrt{16 - 4x^2}}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{64 - 2x^2}}{2}$

08. Q2FW

(IFPE) Durante a construção de uma torre de televisão, fez-se necessário o uso de um cabo de aço para sustentação. O pé desse cabo está fincado a 16 m de distância da base da torre e o seu topo a 63 m de altura, conforme a figura. Refeitos os cálculos, decidiu-se que o topo do cabo deve ser deslocado 3 m para baixo ao longo da torre, alterando assim a posição da extremidade fixada ao chão, conforme a figura seguinte:

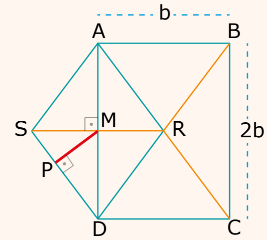


Considerando a nova orientação, de quanto será o deslocamento **x** do pé do cabo de sustentação em relação à posição anterior?

A) 3 m.
B) 8 m.
C) 9 m.
D) 13 m.
E) 15 m.

09. 9DH1

(CEFET-MG) Nessa figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem **b** e 2b. O ponto **R** pertence aos segmentos AC e BD e, ARDS é um quadrilátero em que **M** é ponto médio do segmento RS.

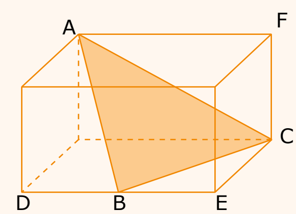


O segmento MP, expresso em função de **b**, é:

A) $\dfrac{b\sqrt{5}}{5}$
B) $\dfrac{b\sqrt{5}}{3}$
C) $\dfrac{2b\sqrt{5}}{3}$
D) $\dfrac{3b\sqrt{5}}{5}$

10. 56A3

(ESPM-SP) A figura a seguir representa um paralelepípedo reto-retângulo de medidas AF = 4, FC = 3 e CE = $2\sqrt{3}$, sendo **B** o ponto médio de $\overline{DE}$. O perímetro do triângulo ABC é igual a



A) 12.
B) 14.
C) 13.
D) 15.
E) 11.

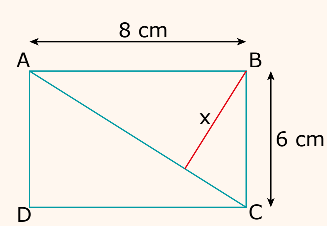
11.

(UECE) No quadrado MNPQ, **R** é o ponto médio do lado PQ, **S** é um ponto do segmento NR tal que os segmentos MS e NR são perpendiculares. Se a medida do segmento MS é 3 cm, então a medida do lado do quadrado é

A) $\sqrt{5}$ cm.
B) $1,5\sqrt{5}$ cm.
C) $2,0\sqrt{5}$ cm.
D) $2,5\sqrt{5}$ cm.

12. LZ8Y

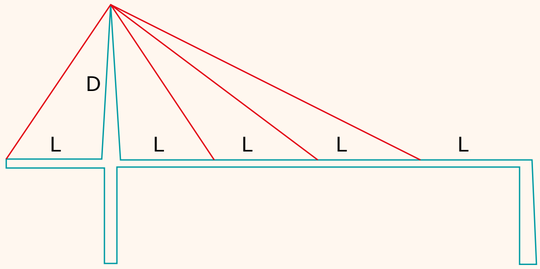
(Unifor-CE) A figura seguinte mostra um retângulo ABCD e AC é a diagonal desse retângulo.



Se um coelho sai do vértice **A** para o vértice **D**, depois segue para o vértice **C**, volta para o vértice **A** através da diagonal AC e vai para o vértice **B**, e, por fim, percorre a distância **x** do vértice **B** a diagonal AC, então o coelho andou

A) 34,8 cm.
B) 35,6 cm.
C) 36,8 cm.
D) 37,5 cm.
E) 38,8 cm.

13. QUP9 (UFPA) Uma passarela construída em uma BR no Pará tem um vão livre de comprimento 4L. A sustentação da passarela é feita a partir de 3 cabos de aço presos em uma coluna à esquerda a uma altura **D** da passarela. Esta coluna por sua vez é presa por um cabo de aço preso a um ponto na mesma altura da passarela, e a uma distância **L** da passarela, conforme representa a figura a seguir:



Supondo L = 9 m e D = 12 m, o comprimento total dos quatro cabos de aço utilizados é, em metros:

A) 57

B) 111

C) $21 + \sqrt{1\,341}$

D) $30 + 6\sqrt{13} + 3\sqrt{97}$

E) $30 + 2\sqrt{13} + \sqrt{97}$

14. (ESPM-SP–2019) Uma praça tem a forma de um quadrado de 200 m de lado. Partindo juntas de um mesmo canto **P**, duas amigas percorrem o perímetro da praça caminhando em sentidos opostos, com velocidades constantes. O primeiro encontro delas se dá em um ponto **A** e o segundo, em um ponto **B**. Se a medida do segmento PA é 250 m, então o segmento PB mede

A) 50 m.

B) 100 m.

C) 150 m.

D) 200 m.

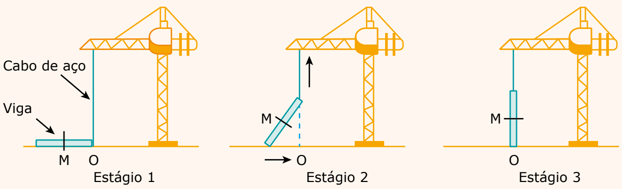
E) 250 m.

15. (UFPR) A tela de uma TV está no formato *widescreen*, no qual a largura e a altura estão na proporção de 16 para 9. Sabendo que a diagonal dessa tela mede 37 polegadas, qual é sua largura e qual a sua altura, em centímetros? (Para a simplificar os cálculos, use as aproximações $\sqrt{337} \cong 18{,}5$ e uma polegada $\cong 2{,}5\,\text{cm}$.)

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

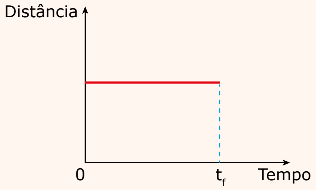
01. (Enem–2018) Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicialmente no solo.



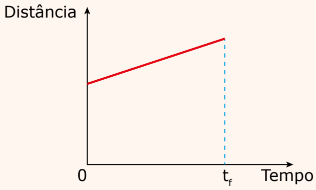
Na figura, o ponto **O** representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo t = 0 (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto **O**, enquanto a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto **O**. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto **M** representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

O gráfico que descreve a distância do ponto **M** ao ponto **O**, em função do tempo, entre t = 0 e t_f, é:

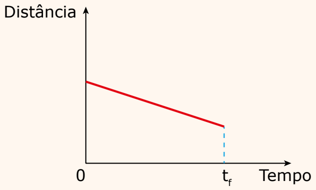
A)



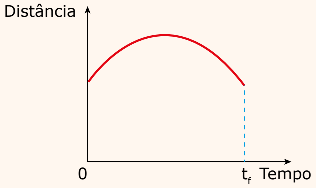
B)



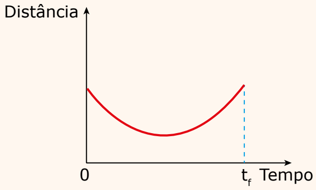
C)



D)

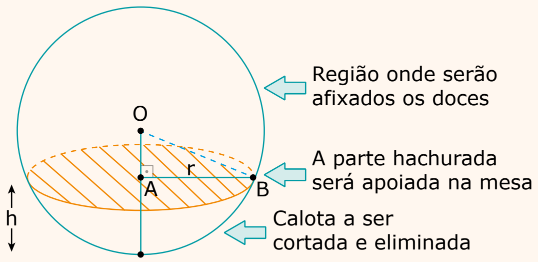


E)



MATEMÁTICA

02. 6M9V (Enem–2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade desse suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio **r** da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.

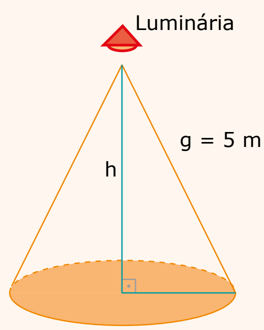


Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura **h**, em centímetro, igual a:

A) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$ C) 1 E) 5

B) $10 - \sqrt{91}$ D) 4

03. (Enem) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

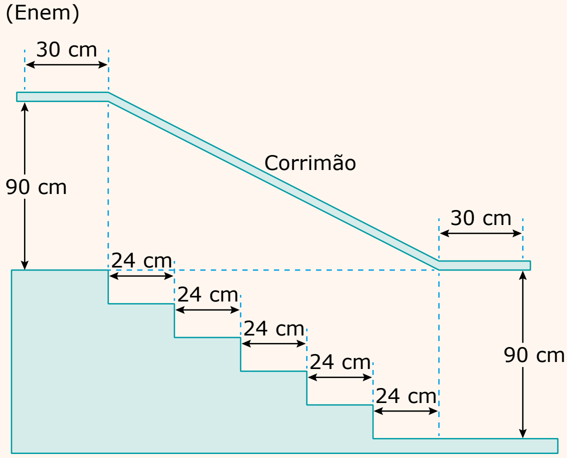


Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m², considerando $\pi \cong 3{,}14$, a altura **h** será igual a

A) 3 m. C) 5 m. E) 16 m.

B) 4 m. D) 9 m.

04. (Enem)

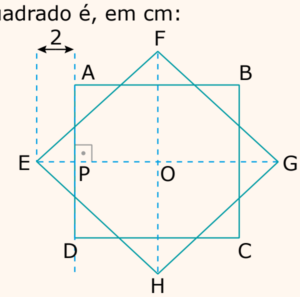


Na figura anterior, que representa o projeto de uma escada de 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

A) 1,8 m. C) 2,0 m. E) 2,2 m.

B) 1,9 m. D) 2,1 m.

05. Antônio adora soltar pipas. Para confeccionar uma pipa nova, ele faz uma armação com dois quadrados iguais ABCD e EFGH, ambos com lado **a** e centro **O**, conforme a figura. Se EP = 2 cm, então podemos afirmar que o lado **a** do quadrado é, em cm:



A) $4(\sqrt{3}+1)$ C) $\sqrt{3} + 2$ E) $4(\sqrt{2}+1)$

B) $4 + \sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. C
- 04. A
- 05. E
- 06. E
- 07. D
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. D
- 03.
  - A) $\overline{RS} = \sqrt{949}$
  - B) 73 cm
- 04. B
- 05. A
- 06. C
- 07. B
- 08. C
- 09. A
- 10. B
- 11. B
- 12. C
- 13. D
- 14. B
- 15. L = 80 cm
  H = 45 cm

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. B
- 04. D
- 05. E

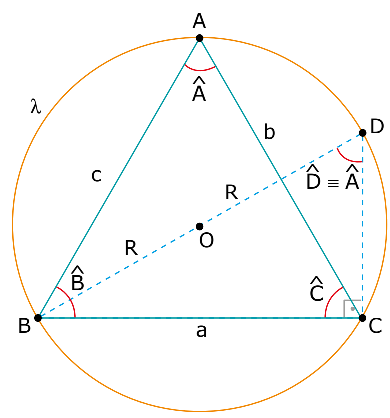
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

LEI DOS SENOS

Considere um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência λ de raio **R**. Traçando o diâmetro BD, temos que o triângulo BCD é retângulo em **C**, pois o ângulo $B\hat{C}D$ "enxerga" um arco de 180°.

O ângulo $\hat{D}$ é congruente ao ângulo $\hat{A}$, pois ambos são inscritos na circunferência e "enxergam" o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$.



Do triângulo BCD, temos que:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$$

Analogamente, conclui-se que $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

A Lei dos Senos pode, então, ser enunciada da seguinte maneira:

Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, e a constante de proporcionalidade é igual ao dobro do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, ou seja:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

OBSERVAÇÃO

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares são iguais, isto é:

$$\boxed{\text{sen } (180° - x) = \text{sen } x}$$

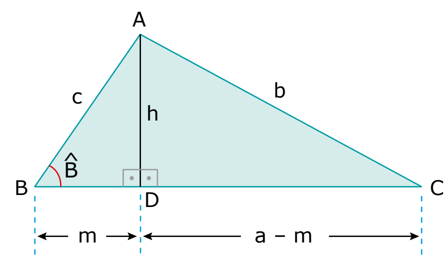
Por exemplo, sendo x = 60°, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\text{sen } (180° - x) = \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

LEI DOS COSSENOS

Considere um triângulo ABC qualquer e sua altura AD.



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos formados, temos:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + m^2 \\ b^2 = h^2 + (a - m)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - m^2 & \text{(I)} \\ b^2 = h^2 + (a - m)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2.a.m$ (III)

Mas, no triângulo ABD, $\cos \hat{B} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c.\cos \hat{B}$. (IV)

Substituindo (IV) em (III):

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$

Analogamente, conclui-se que $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C} \end{cases}$

A Lei dos Cossenos pode, então, ser enunciada da seguinte maneira:

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

OBSERVAÇÃO

Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, ou seja:

$$\cos(180° - x) = -\cos x$$

Por exemplo, sendo $x = 45°$, temos:

$\cos x = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e

$\cos(180° - x) = \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

NATUREZA DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo, quanto aos seus ângulos, é classificado em acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Sabe-se que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo, e vice-versa. Assim, conhecendo as medidas dos três lados, podemos determinar as medidas dos três ângulos pela Lei dos Cossenos e, portanto, classificar o triângulo.

Seja o triângulo ABC, com lados medindo **a**, **b** e **c**, em que $a \geq b \geq c$.

Tem-se três possibilidades quanto à natureza do triângulo ABC:

i) O ΔABC é acutângulo se, e somente se, $a^2 < b^2 + c^2$.

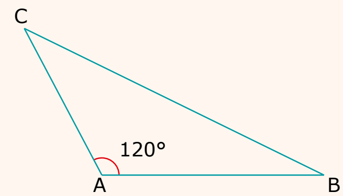
ii) O ΔABC é retângulo se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$.

iii) O ΔABC é obtusângulo se, e somente se, $a^2 > b^2 + c^2$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

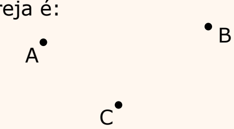
01. 4FUC (UFTM-MG) Na figura estão posicionadas as cidades vizinhas **A**, **B** e **C**, que são ligadas por estradas em linha reta. Sabe-se que, seguindo por essas estradas, a distância entre **A** e **C** é de 24 km, e entre **A** e **B** é de 36 km.



Nesse caso, pode-se concluir que a distância, em km, entre **B** e **C** é igual a:

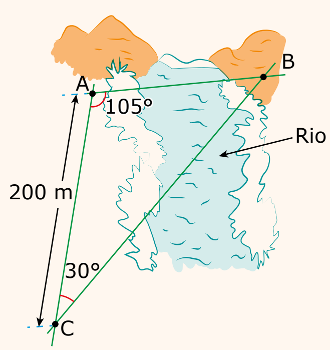
A) $8\sqrt{17}$
B) $12\sqrt{19}$
C) $12\sqrt{23}$
D) $20\sqrt{15}$
E) $20\sqrt{13}$

02. 2DOD (IFSul) Em certa cidade, a igreja está localizada no ponto **A**, a prefeitura no ponto **B**, e a livraria no ponto **C**, como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, a distância da livraria à igreja é:



A) $17\sqrt{5}$ m
B) $5\sqrt{7}$ m
C) $25\sqrt{7}$ m
D) $7\sqrt{5}$ m

03. YQJE (UFPB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, **A** e **B**, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, **C**, distante 200 m do ponto **A** e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto **A**. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura a seguir:



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto **A** ao ponto **B** é de:

A) $200\sqrt{2}$
B) $180\sqrt{2}$
C) $150\sqrt{2}$
D) $100\sqrt{2}$
E) $50\sqrt{2}$

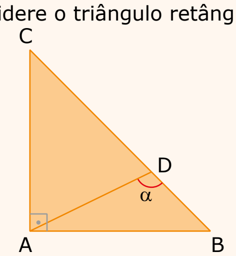
04. IAJY (UECE) A medida do cosseno do maior dos ângulos internos do triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 8 m, 10 m e 15 m é igual a

A) −0,38125.
B) −0,42112.
C) −0,43713.
D) −0,46812.

05. S76U (IFPE) Sandro é velejador e está participando de uma competição. O barco de Sandro está se deslocando em linha reta e ele identifica os pontos **A**, **B** e **C** marcados na carta náutica por onde o seu barco vai passar. Quando o barco está no ponto **A**, ele avista um farol (**F**) na costa e mede o ângulo $F\hat{A}C$ de 30°. Após navegar 4 milhas náuticas, o barco chega no ponto **B**. Ele calcula o ângulo $F\hat{B}C$ e encontra 75°. Qual a distância, em milhas náuticas, do ponto **B** ao farol?

A) $\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$
C) 4
D) $4\sqrt{2}$
E) 8

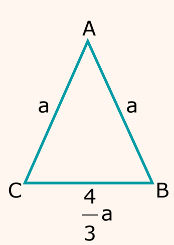
06. 18GT (UFU-MG) Considere o triângulo retângulo a seguir:



Sabendo-se que $\alpha = 120°$, AB = AC = 1 cm, então AD é igual a

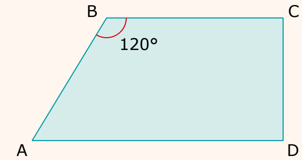
A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm.
B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.
C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm.
D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm.

07. (Unimontes-MG) Considere o triângulo isósceles ABC da figura a seguir. É correto afirmar que o cosseno do ângulo $\hat{A}$ vale:



A) $\frac{1}{9}$
B) $\frac{2}{9}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{3}$

08. OZ39 (UFMG) Esta figura representa o quadrilátero ABCD.



Sabe-se que AB = 1 cm e AD = 2 cm; o ângulo $A\hat{B}C$ mede 120°; e o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Então, é correto afirmar que o comprimento do segmento $\overline{BD}$ é

A) $\sqrt{3}$ cm.
B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm.
C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm.
D) $\sqrt{2}$ cm.

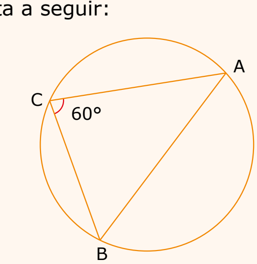
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFAL–2019) Um triângulo possui lados iguais a 6, 9 e 11. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é:

A) $\frac{11}{15}$
B) $-\frac{1}{27}$
C) $\frac{26}{33}$
D) $-\frac{2}{27}$
E) −1

02. AØ64 (UFJF-MG) Uma praça circular de raio **R** foi construída a partir da planta a seguir:

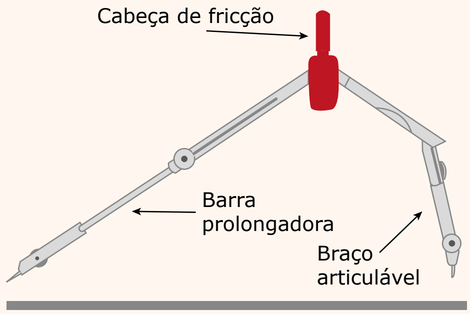


Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que $\overline{AB}$ = 80 m. De acordo com a planta e as informações dadas, é correto afirmar que a medida de **R** é igual a

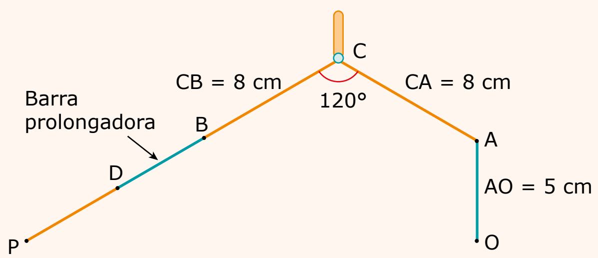
A) $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ m.
B) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ m.
C) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ m.
D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

03. JVUS (UFU-MG–2019) O compasso é um instrumento usado no desenho artístico e no desenho técnico. Um exemplo de compasso especial é o compasso articulável, que possui cabeça de fricção para ajuste preciso e suave do raio, um braço articulável e outro com barra prolongadora do braço, onde fica a ponta seca, conforme ilustra a figura a seguir:

MATEMÁTICA



O esquema a seguir mostra um compasso articulável ajustado de modo que o braço articulável AO é perpendicular a AB e OP.



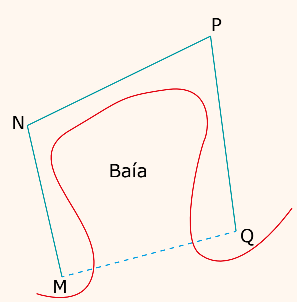
Para essa configuração, a medida, em cm, do raio da circunferência traçado com o compasso é:

A) $5\sqrt{3}$
B) $8\sqrt{3}$
C) $9\sqrt{3}$
D) $13\sqrt{3}$

04. (UECE–2019) A medida, em graus, do maior dos ângulos internos de um triângulo, cujas medidas dos lados são, respectivamente, 3 m, 5 m e 7 m, é

A) 120.
B) 80.
C) 130.
D) 100.

05. P071 (UEFS-BA)



As cidades **M** e **Q** são separadas por uma baía, como na figura anterior. Para ir de uma a outra, um motorista precisa atualmente dirigir $12\sqrt{2}$ km até outra cidade **N**, mais 21 km até a cidade **P**, e outros 21 km de **P** até **Q**. As estradas que ligam essas cidades são praticamente retas e formam ângulos de 105°, em **N**, e 60°, em **P**.

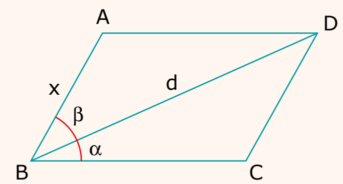
Se uma ponte for construída sobre a baía, ligando **M** diretamente a **Q** (reta pontilhada na figura), o trajeto entre as duas cidades poderá ser reduzido para

A) 12 km.
B) 15 km.
C) $12\sqrt{2}$ km.
D) 18 km.
E) $16\sqrt{2}$ km.

06. 5A2J (UECE) Sejam **x**, **y** e **z** as medidas dos lados do triângulo XYZ e **R** a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Se o produto dos senos dos ângulos internos do triângulo é $\frac{k.x.y.z}{R^3}$, então o valor de **k** é:

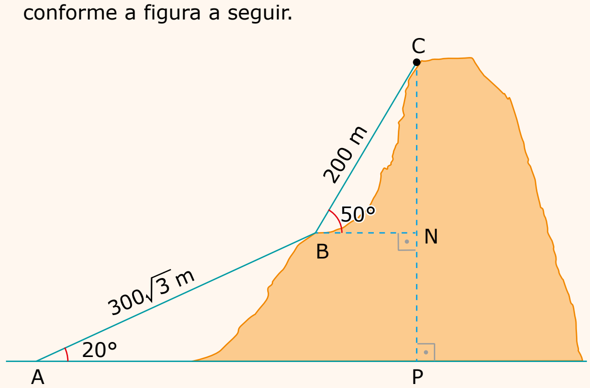
A) 0,500
B) 0,250
C) 0,125
D) 1,000

07. UGQO (EN-RJ) A figura a seguir mostra um paralelogramo ABCD. Se **d** representa o comprimento da diagonal BD e α e β são ângulos conhecidos (ver figura), podemos afirmar que o comprimento **x** do lado AB é igual a:



A) d.cos β
B) $\frac{d.\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}$
C) d.sen β
D) $\frac{d.\cos\beta}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}$
E) $d.\cos(180° - (\alpha+\beta))$

08. 3J0R (UFPB) Para explorar o potencial turístico de uma cidade, conhecida por suas belas paisagens montanhosas, o governo pretende construir um teleférico, ligando o terminal de transportes coletivos ao pico de um morro, conforme a figura a seguir.



Para a construção do teleférico, há duas possibilidades:

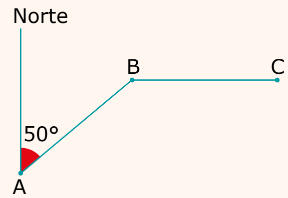
- o ponto de partida ficar localizado no terminal de transportes coletivos (ponto **A**), com uma parada intermediária (ponto **B**), e o ponto de chegada localizado no pico do morro (ponto **C**);
- o ponto de partida ficar localizado no ponto **A** e o de chegada localizado no ponto **C**, sem parada intermediária.

Supondo que $\overline{AB} = 300\sqrt{3}$ m, $\overline{BC} = 200$ m, $B\hat{A}P = 20°$ e $C\hat{B}N = 50°$, é correto afirmar que a distância entre os pontos **A** e **C** é de

A) 700 m.
B) 702 m.
C) 704 m.
D) 706 m.
E) 708 m.

09. FLA7

(FGV) A figura a seguir mostra a trajetória de Renato com seu barco.



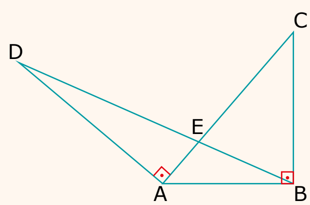
Renato saiu do ponto **A** e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto **B**, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto **B**, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto **C**.

Calcule a distância do ponto **A** ao ponto **C**.

Dados: sen 20° = 0,342, cos 20° = 0,940.

10. ØQLZ

(Mackenzie-SP)



Na figura anterior, ABC e AED são triângulos retângulos. Se $m(\overline{AC}) = \ell$, $m(B\hat{A}C) = \alpha$, $m(A\hat{D}E) = \beta$ e $m(B\hat{A}C) = m(A\hat{D}E) = 90°$, então $m(\overline{BD})$ é:

A) $\ell \,.\, \cos\alpha$

B) $\ell \,.\, \text{sen}^2\,\alpha$

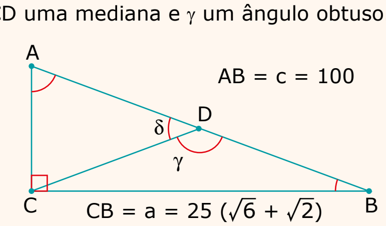
C) $\ell \,.\, \cos\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$

D) $\dfrac{\ell \,.\, \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\beta}$

E) $\dfrac{\ell \,.\, \text{sen}^2\,\alpha}{\cos\beta}$

11. V6Y5

(UFU-MG) A figura a seguir, sem escala, apresenta informações parciais de um triângulo retângulo ABC, sendo CD uma mediana e γ um ângulo obtuso.



Com base nessas informações, determinam-se as medidas dos ângulos δ e γ que possibilitam encontrar os ângulos internos do triângulo ABC. Esses ângulos internos são

Observação: $\sqrt{6}.\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

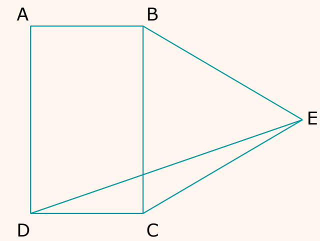
A) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 15°$ e $B\hat{A}C = 75°$.

B) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 10°$ e $B\hat{A}C = 80°$.

C) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 20°$ e $B\hat{A}C = 70°$.

D) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 30°$ e $B\hat{A}C = 60°$.

12. (UFRGS-RS–2020) Na figura a seguir, tem-se um retângulo ABCD, de lados $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AD} = 5$, e um triângulo equilátero BEC, construído sobre o lado $\overline{BC}$.



A medida de $\overline{DE}$ é

A) $\sqrt{34 + 15\sqrt{2}}$.

B) $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$.

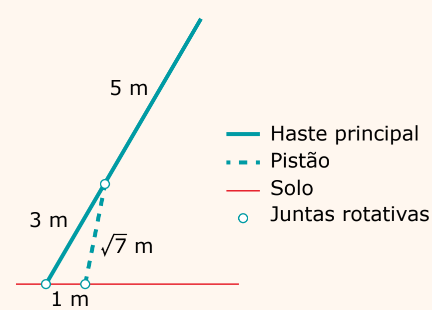
C) 7.

D) $\sqrt{19}$.

E) $\sqrt{34 + 15\sqrt{3}}$.

13. WJEI

(UDESC-SC) Um guindaste industrial simples, usado para elevar cargas até o topo de uma máquina em uma fábrica, é formado por duas partes principais: uma haste rígida de 8 m de comprimento fixada ao solo em uma de suas extremidades; e um pistão hidráulico que pode variar de 2 m a 3 m de comprimento, fixado em uma de suas extremidades ao solo, em um ponto a 1 m da base da haste principal, e na outra extremidade em um ponto da haste a 3 m de sua base, conforme figura. Todas as três junções (haste com o solo, pistão com o solo e haste com o pistão) são rotativas (como uma dobradiça).



De acordo com a figura, a altura que a ponta elevada da haste principal atingirá quando o pistão hidráulico estiver estendido em $\sqrt{7}$ m será de

A) $4\sqrt{3}$ m.

B) $\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$ m.

C) 4 m.

D) $4\sqrt{7}$ m.

E) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m.

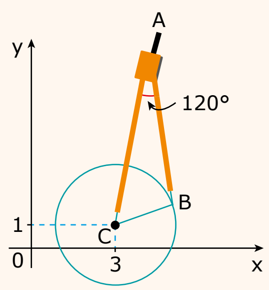
MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. C2ZG

(Enem–2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto **C**, a ponta do grafite está representada pelo ponto **B** e a cabeça do compasso está representada pelo ponto **A** conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

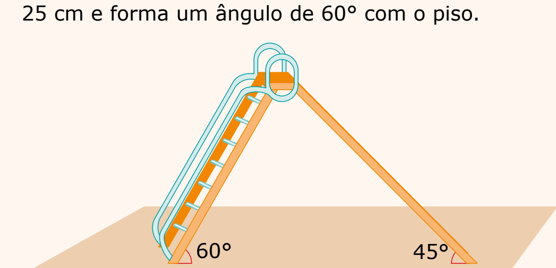
Tipo de material	Intervalo de valores de raio
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

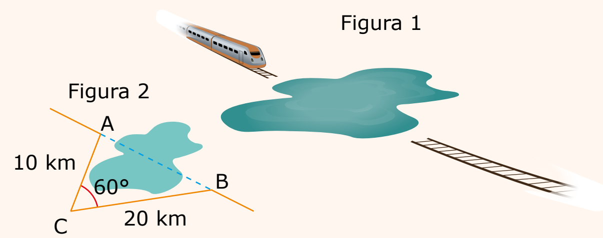
02. Em escolas infantis, é comum encontrar um brinquedo, chamado escorregador, constituído de uma superfície plana inclinada e lisa (rampa), por onde as crianças deslizam, e de uma escada. No pátio da escolinha Casa Feliz, há um escorregador, apoiado em um piso plano e horizontal, cuja escada tem 8 degraus espaçados de 25 cm e forma um ângulo de 60° com o piso.



O comprimento da rampa, sabendo-se que ela forma com o chão um ângulo de 45°, é de

A) $\sqrt{3}$ m.
B) $\sqrt{6}$ m.
C) $2\sqrt{2}$ m.
D) $2\sqrt{3}$ m.
E) $2\sqrt{6}$ m.

03. Uma empresa, ao construir uma linha férrea, acaba por deparar-se com uma nascente de água e seu curso será alterado para garantir um custo menor de construção, figuras 1 e 2. Sabe-se que o aumento do custo de construção depende da diferença entre a distância efetiva de construção (soma das distâncias dos segmentos AC e BC) e a distância inicialmente planejada (medida do segmento AB). O valor encontrado pela construtora nessa diferença de percurso, em km, é:



A) $5(\sqrt{3} - 1)$
B) $5(2 - \sqrt{3})$
C) $10(\sqrt{3} - 1)$
D) $10(2 - \sqrt{3})$
E) $10(3 - \sqrt{3})$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. D
04. A
05. B
06. A
07. A
08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. D
04. A
05. B
06. C
07. B
08. A
09. AC = 18,8 km
10. D
11. A
12. E
13. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. B
03. E

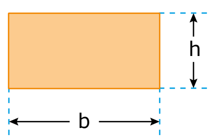
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Áreas de Polígonos

ÁREA DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS

Retângulo

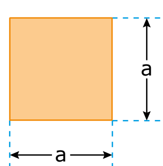
A área **A** de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = b.h$$

Quadrado

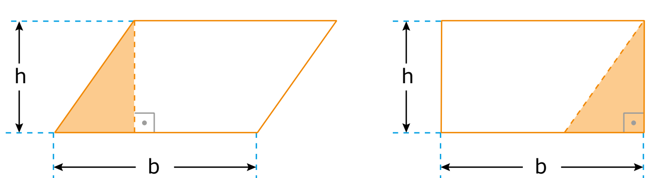
O quadrado é um retângulo de lados iguais. Logo, sua área **A** é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = a^2$$

Paralelogramo

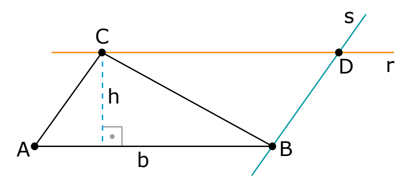
A área de um paralelogramo de base **b** e altura **h** é igual à área de um retângulo de base **b** e altura **h**. Observe:



$$A = b.h$$

Triângulo

Consideremos um triângulo ABC, cuja base $\overline{AB}$ mede **b** e a altura relativa a essa base mede **h**. Traçando por **C** a reta **r** paralela à base, e por **B** a reta **s** paralela ao lado $\overline{AC}$, obtemos o paralelogramo ABDC a seguir:



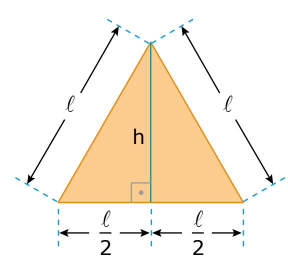
Como o triângulo BCD é congruente ao triângulo ABC e a área **A** do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo, então, temos:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Ou seja, a área do triângulo é metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Triângulo equilátero

Pelo Teorema de Pitágoras, calcula-se facilmente a medida **h** da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, obtendo:



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

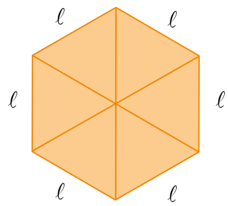
Logo, a área **A** desse triângulo é:

$$A = \frac{\ell.\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Hexágono regular

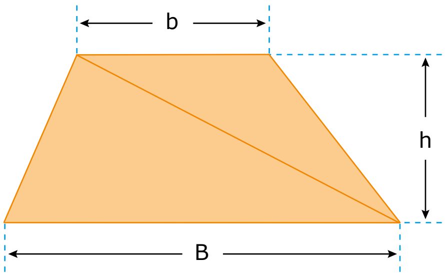
As diagonais de um hexágono regular dividem-no em seis triângulos equiláteros. Assim, a área **A** de um hexágono regular de lado ℓ é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ.



$$A = 6.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\sqrt{3}\ell^2}{2}}$$

Trapézio

Traçando uma diagonal de um trapézio de altura **h** e bases **b** e **B**, dividimo-lo em dois triângulos de altura **h** e bases de medidas **b** e **B**. Observe a figura.



A área **A** do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos. Assim, temos:

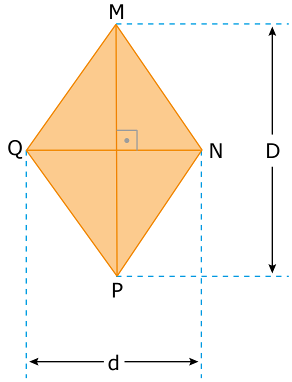
$$A = \frac{B.h}{2} + \frac{b.h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(B+b).h}{2}}$$

Portanto, a área **A** do trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.

Losango

Consideremos um losango cujas diagonais medem **D** e **d**. Sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem é o ponto médio de cada uma.

Observe, portanto, que a área **A** do losango é o dobro da área do triângulo de base **d** e altura $\frac{D}{2}$.



$$A = 2.\frac{d.\frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d.D}{2}}$$

Portanto, a área **A** do losango é metade do produto das medidas das diagonais.

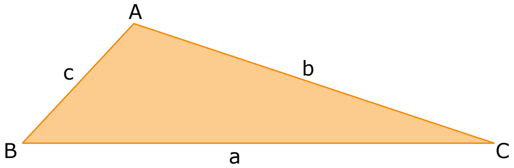
OBSERVAÇÃO

O losango também é paralelogramo. Logo, sua área pode ser calculada como a área de um paralelogramo.

EXPRESSÕES DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Em função das medidas dos lados – Teorema de Heron

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, sendo o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$,



temos que a área do triângulo ABC é:

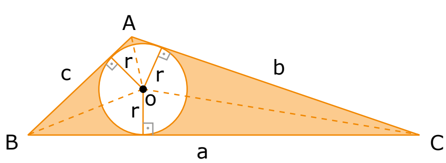
$$\boxed{A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$$

Em função do semiperímetro e do raio da circunferência inscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, com semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, e a circunferência inscrita de raio **r**, então a área do triângulo ABC é:

$$\boxed{A = p.r}$$

Demonstração:



$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta BCO} + A_{\Delta ACO} + A_{\Delta ABO} \Rightarrow$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} \Rightarrow$$

$$A_{\Delta ABC} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right).r \Rightarrow$$

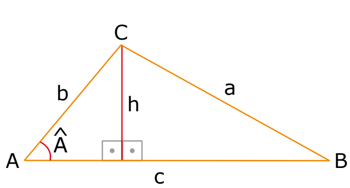
$$A_{\Delta ABC} = p.r$$

Em função da medida de dois lados e do ângulo compreendido entre eles

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c** e ângulo de medida $\hat{A}$, compreendido pelos lados **b** e **c**, temos que a área desse triângulo é:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen }\hat{A}}$$

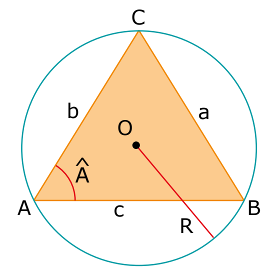
Demonstração:



$$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta ABC} = \dfrac{c.h}{2} \\ \text{sen }\hat{A} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \text{ sen }\hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{b.c.\text{sen }\hat{A}}{2}$$

Em função das medidas dos lados e do raio da circunferência circunscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, inscrito em uma circunferência de raio **R**.



A área do triângulo ABC inscrito na circunferência é:

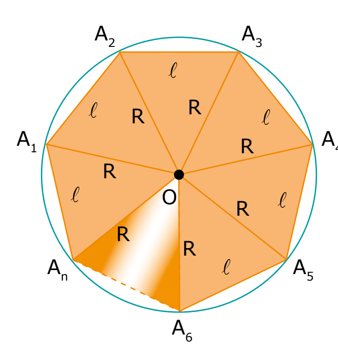
$$\boxed{A = \frac{a.b.c}{4R}}$$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} . b . c . \text{sen }\hat{A} \\ \dfrac{a}{\text{sen }\hat{A}} = 2R \Rightarrow \text{sen }\hat{A} = \dfrac{a}{2R} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{a . b . c}{4R}$$

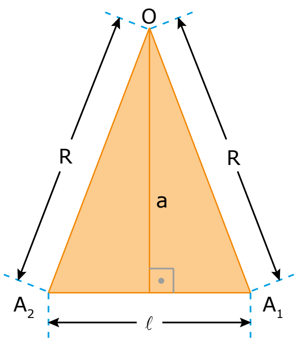
ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

Considere um polígono regular $A_1A_2A_3A_4...A_n$, de **n** lados de medida ℓ e semiperímetro $p = \frac{n\ell}{2}$, inscrito em uma circunferência de centro **O** e raio **R**. O polígono pode ser dividido em **n** triângulos isósceles congruentes.



MATEMÁTICA

Traça-se, em um dos triângulos, o apótema **a** do polígono.



A área A_T desse triângulo é dada por $A_T = \dfrac{\ell . a}{2}$.

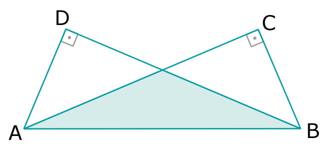
Como o polígono possui **n** triângulos, então sua área A_P é dada por:

$$A_P = n.A_T \Rightarrow A_P = n.\frac{\ell . a}{2} \Rightarrow A_P = \frac{n.\ell}{2}.a \Rightarrow$$

$$\boxed{A_P = p.a}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (UNIFESP) Dois triângulos congruentes ABC e ABD, de ângulos 30°, 60° e 90°, estão colocados como mostra a figura, com as hipotenusas AB coincidentes.



Se AB = 12 cm, a área comum aos dois triângulos, em centímetros quadrados, é igual a:

A) 6

B) $4\sqrt{3}$

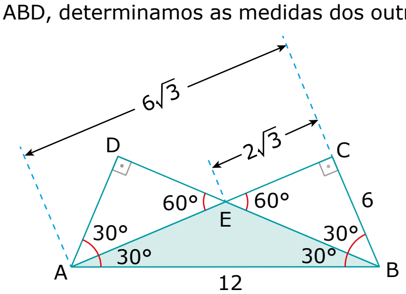
C) $6\sqrt{3}$

D) 12

E) $12\sqrt{3}$

Resolução:

Dados AB = 12 cm e os ângulos internos dos triângulos ABC e ABD, determinamos as medidas dos outros lados.



$$\text{sen } 30° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{12} \Rightarrow BC = 6 \text{ cm}$$

$$\cos 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{12} \Rightarrow AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CE}{6} \Rightarrow CE = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Portanto, a área, em cm², do triângulo ABE vale:

$$A_{\Delta ABE} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta BEC} \Rightarrow A_{\Delta ABE} = \frac{6.6\sqrt{3}}{2} - \frac{6.2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A_{\Delta ABE} = 12\sqrt{3}$$

02. (UFV-MG) Seja **f** a função definida por f(x) = sen x, x ≥ 0. Num mesmo sistema de coordenadas, considere os pontos $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, **C** e **D**, em que **C** e **D** estão sobre o gráfico de **f**, cujas abscissas são, respectivamente, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{6}$. Unindo-se esses pontos, obtém-se o quadrilátero ABCD, cuja área vale:

A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{5}$

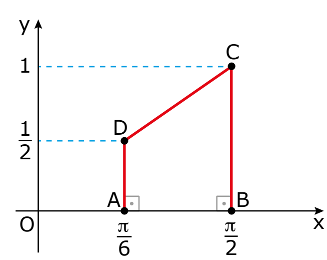
D) $\frac{\pi}{3}$

Resolução:

Temos os pontos $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ e $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Como os pontos **C** e **D** pertencem ao gráfico de f(x) = sen x, temos:

$$C\left(\frac{\pi}{2}, \text{sen } \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ e } D\left(\frac{\pi}{6}, \text{sen } \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow D\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

Substituindo os pontos **A**, **B**, **C** e **D** em um mesmo sistema de coordenadas, temos:



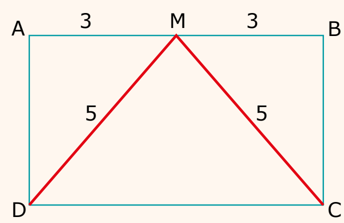
Logo, temos um trapézio retângulo cuja área vale:

$$A = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{\cancel{3}}{2} . \frac{\pi}{\cancel{3}}}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

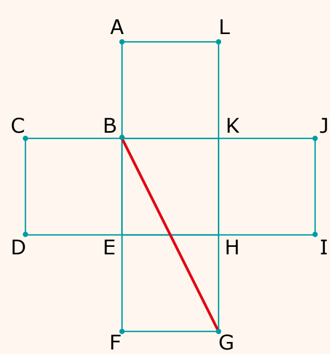
01. (PUC Rio) Considere o retângulo ABCD:



Seja **M** o ponto médio do lado AB. Sabemos que AM = MB = 3 e que DM = MC = 5. Quanto vale a área do triângulo AMD?

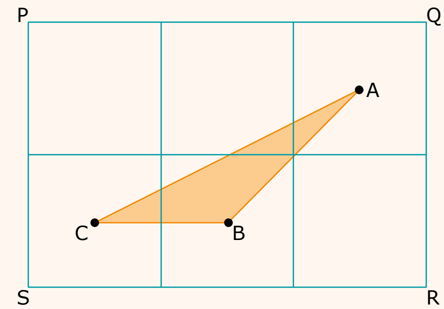
A) 4
B) 6
C) $\frac{15}{2}$
D) 10
E) 15

02. BT56 (CEFET-RJ) O quintal da casa de Manoel é formado por cinco quadrados ABKL, BCDE, BEHK, HIJK e EFGH, de igual área e tem a forma da figura a seguir. Se $BG = \sqrt{20}$ m, então a área do quintal é



A) 20 m².
B) 30 m².
C) 40 m².
D) 50 m².

03. (CEFET-RJ) O retângulo PQRS é formado por seis quadrados cujos lados medem 2 cm. O triângulo ABC, em seu interior, possui os vértices definidos pela interseção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.

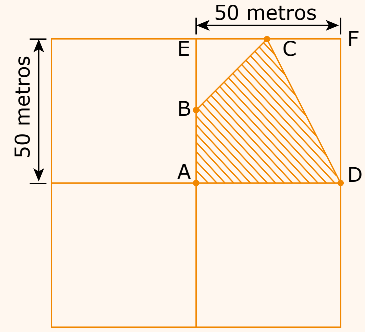


Determine a área do triângulo ABC tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a 2 cm.

04. J6VP (IFCE) Sobre os lados AB e BC do retângulo ABCD são tomados os pontos **M** e **N**, respectivamente, de tal forma que AM, MB e BN tenham medida 1, e NC tenha medida 3. Nessas condições, a área do triângulo MND é

A) 4.
B) 2.
C) 3.
D) 3,5.
E) 2,5.

05. KY18 (CEFET-MG) A área quadrada de um sítio deve ser dividida em quatro partes iguais, também quadradas, e, em uma delas, deverá ser mantida uma reserva de mata nativa (área hachurada), conforme mostra a figura a seguir:



Sabendo-se que **B** é o ponto médio do segmento AE e **C** é o ponto médio do segmento EF, a área hachurada, em m², mede

A) 625,0.
B) 925,5.
C) 1 562,5.
D) 2 500,0.

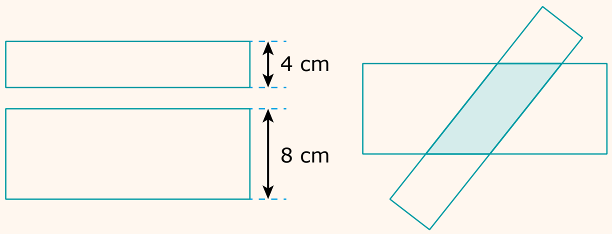
06. E4J7 (UECE) O palco de um teatro tem a forma de um trapézio isósceles cujas medidas de suas linhas de frente e de fundo são respectivamente 15 m e 9 m. Se a medida de cada uma de suas diagonais é 15 m, então a medida da área do palco, em m², é

A) 80.
B) 90.
C) 108.
D) 1 182.

MATEMÁTICA

07. W6U4

(UPE) Dois retângulos foram superpostos, e a intersecção formou um paralelogramo, como mostra a figura seguinte:

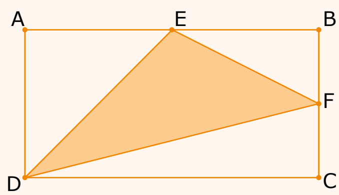


Sabendo-se que um dos lados do paralelogramo mede 4,5 cm, quanto mede a área desse paralelogramo?

A) 12 cm².
B) 16 cm².
C) 24 cm².
D) 32 cm².
E) 36 cm².

08. 5H4U

(UFJF-MG) No retângulo ABCD a seguir, tem-se que **E** e **F** são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



A razão entre as áreas do triângulo DEF e do retângulo ABCD é:

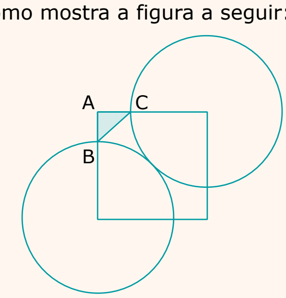
A) $\frac{2}{5}$
B) $\frac{3}{8}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{5}{8}$
E) $\frac{3}{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SØDN

(UFRGS-RS) Dois círculos tangentes e de mesmo raio têm seus respectivos centros em vértices opostos de um quadrado, como mostra a figura a seguir:

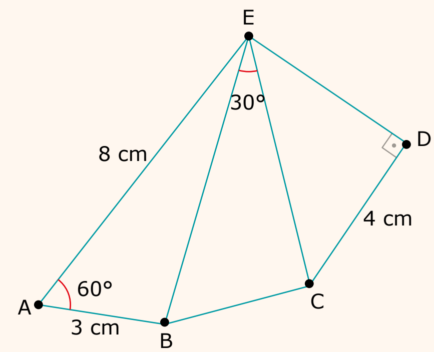


Se a medida do lado do quadrado é 2, então a área do triângulo ABC mede:

A) $3 - 2\sqrt{2}$
B) $6 - 4\sqrt{2}$
C) $12 - 4\sqrt{2}$
D) $\pi(3 - \sqrt{2})$
E) $\pi(6 - 4\sqrt{2})$

02. FG00

(Albert Einstein–2017) No pentágono ABCDE da figura, o lado $\overline{AB}$ mede 3 cm; o lado $\overline{AE}$ mede 8 cm; o lado $\overline{CD}$ mede 4 cm e os ângulos $B\hat{E}C$, $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem 30°, 60° e 90°, respectivamente.

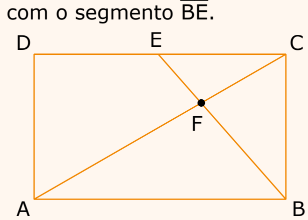


Sendo a área do triângulo BCE igual a 10,5 cm², a medida, em cm, do lado $\overline{DE}$ é:

A) $\sqrt{18}$
B) $\sqrt{20}$
C) $\sqrt{22}$
D) $\sqrt{24}$

03. B3YT

(FUVEST-SP) A figura representa um retângulo ABCD, com AB = 5 e AD = 3. O ponto **E** está no segmento $\overline{CD}$, de maneira que CE = 1, e **F** é o ponto de interseção da diagonal $\overline{AC}$ com o segmento $\overline{BE}$.

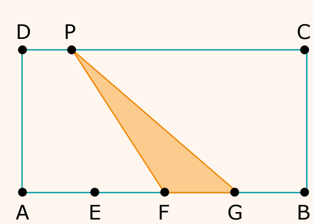


Então, a área do triângulo BCF vale:

A) $\frac{6}{5}$
B) $\frac{5}{4}$
C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{7}{5}$
E) $\frac{3}{2}$

04. 8JEK

(UFRGS-RS–2018) No retângulo ABCD a seguir, estão marcados os pontos **E**, **F** e **G** de forma que o lado AB está dividido em 4 partes iguais e **P** é um ponto qualquer sobre o lado DC.



A razão entre a área do triângulo PFG e a área do retângulo ABCD é:

A) $\frac{1}{8}$

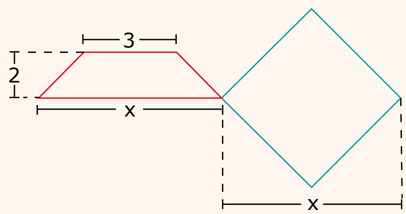
B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{2}$

E) 1

05. (CEFET-MG) A figura a seguir representa a justaposição de um trapézio isósceles e um quadrado.



Se a área do trapézio vale 10, então o perímetro da figura vale:

A) $10 + 18\sqrt{2}$

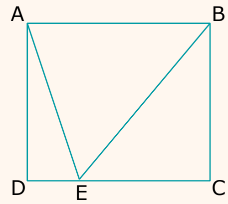
B) $7 + 21\sqrt{2}$

C) $11 + 13\sqrt{2}$

D) $9 + 11\sqrt{2}$

06. K8B6

(UFU-MG) Na figura a seguir, a área do triângulo ADE corresponde a 20% da área do quadrado ABCD. Para que a área do triângulo EBC seja igual a 30 cm², o lado do quadrado ABCD deve ser igual a



A) 10 cm.

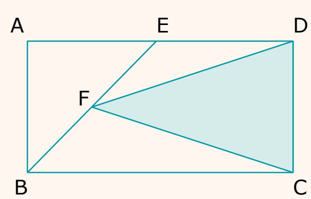
B) $10\sqrt{2}$ cm.

C) $5\sqrt{3}$ cm.

D) 5 cm.

07. G1ØQ

(IFCE) Na figura seguinte, os segmentos AB, AE e ED possuem o mesmo comprimento. Sendo **F** o ponto médio do segmento BE e sabendo-se que ABCD é um retângulo de área 200 m², é correto concluir-se que a área do triângulo CDF, em metros quadrados, vale



A) 120.

B) 100.

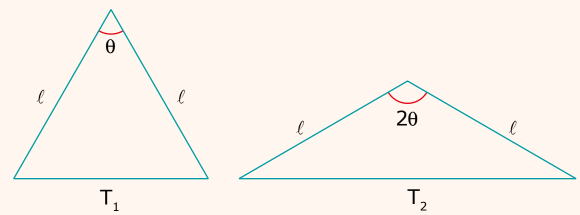
C) 90.

D) 75.

E) 50.

08. AA51

(Insper-SP) Movendo as hastes de um compasso, ambas de comprimento ℓ, é possível determinar diferentes triângulos, como os dois representados a seguir, fora de escala.



Se a área do triângulo T_1 é o triplo da área do triângulo T_2, então o valor de cos θ é igual a:

A) $\frac{1}{6}$

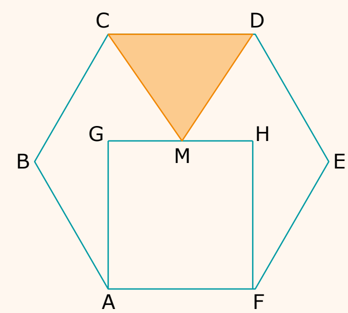
B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

09. (UFRGS-RS–2020) Considere o hexágono regular ABCDEF de lado 1. Sobre o lado $\overline{AF}$ do hexágono, constrói-se o quadrado AGHF, como mostra a figura a seguir. Sendo **M** o ponto médio $\overline{GH}$, constrói-se o triângulo CDM.



A área do triângulo CDM é

A) $\sqrt{3} - 1$.

B) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

C) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

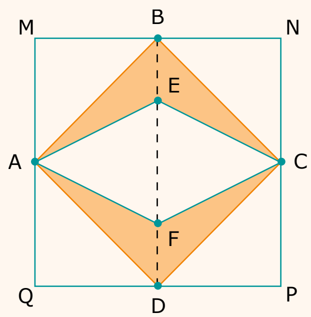
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. HJHX

(Fatec-SP) Na figura, os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são pontos médios dos lados do quadrado MNPQ de lado de medida ℓ. Os pontos **E** e **F** pertencem ao segmento $\overline{BD}$ de modo que $BE = FD = \frac{\ell}{4}$.

A área do quadrado MNPQ é igual a **k** vezes a área da superfície destacada em laranja.

MATEMÁTICA



Assim sendo, o valor de **k** é:

A) 2

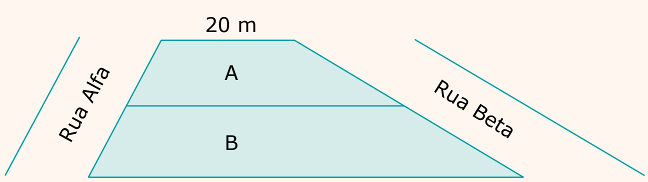
B) 4

C) 6

D) 8

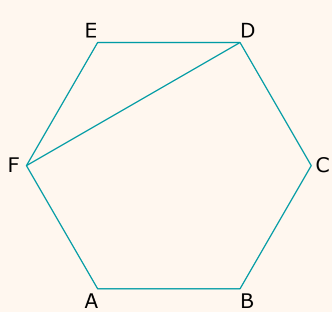
E) 10

11. (UERJ) Dois terrenos, **A** e **B**, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:



As áreas de **A** e **B** são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno **A** mede 20 m. Calcule o comprimento **x**, em metros, da lateral maior do terreno **B**.

12. (UFRGS-RS–2018) Considere o hexágono regular ABCDEF, no qual foi traçado o segmento FD medindo 6 cm, representado na figura a seguir:



A área do hexágono mede, em cm²,

A) $18\sqrt{3}$.

B) $20\sqrt{3}$.

C) $24\sqrt{3}$.

D) $28\sqrt{3}$.

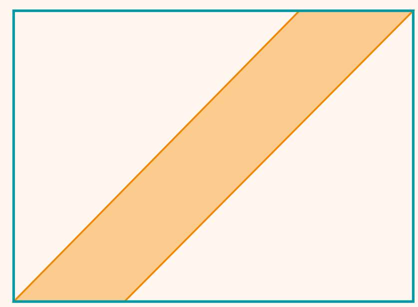
E) $30\sqrt{3}$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2017) Uma família possui um terreno retangular com 18 metros de largura e 24 metros de comprimento. Foi necessário demarcar nesse terreno dois outros iguais, na forma de triângulos isósceles, sendo que um deles será para o filho e o outro para os pais. Além disso, foi demarcada uma área de passeio entre os dois novos terrenos para o livre acesso das pessoas.

Os terrenos e a área de passeio são representados na figura.



A área de passeio calculada pela família, em metro quadrado, é de

A) 108.

B) 216.

C) 270.

D) 288.

E) 324.

02. ØDQ8 (Enem) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

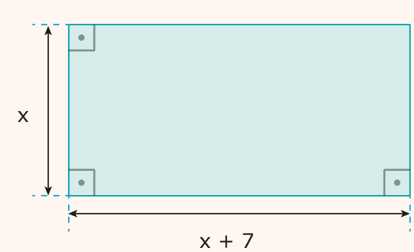


Figura A

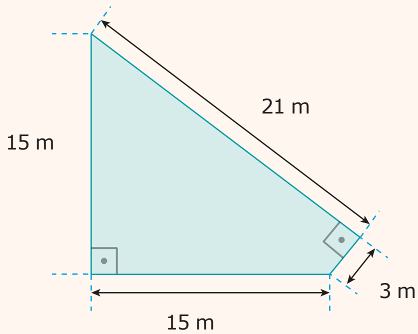


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

A) 7,5 e 14,5.

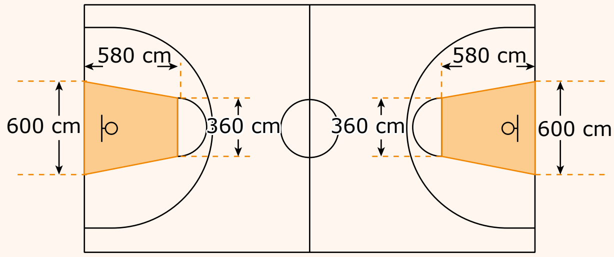
B) 9,0 e 16,0.

C) 9,3 e 16,3.

D) 10,0 e 17,0.

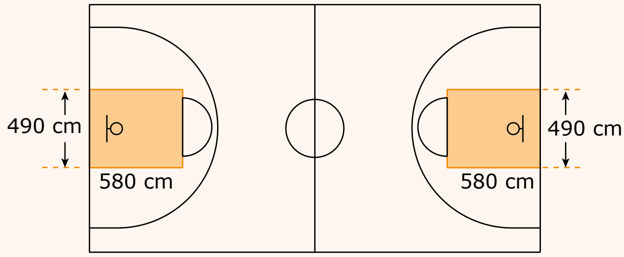
E) 13,5 e 20,5.

03. (Enem) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

A) aumento de 5 800 cm².

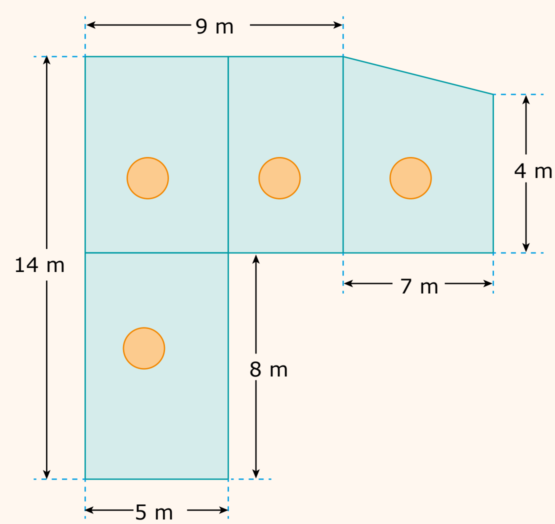
B) aumento de 75 400 cm².

C) aumento de 214 600 cm².

D) diminuição de 63 800 cm².

E) diminuição de 272 600 cm².

04. (Enem) Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo **A**, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m² de área, ou modelo **B**, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m² de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



Avaliando-se todas as informações, serão necessários

A) quatro unidades do tipo **A** e nenhuma unidade do tipo **B**.

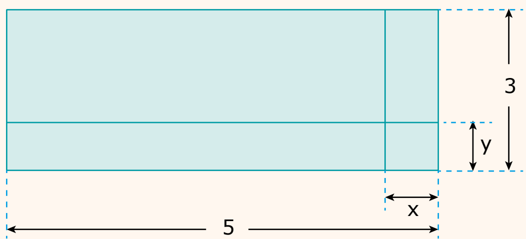
B) três unidades do tipo **A** e uma unidade do tipo **B**.

C) duas unidades do tipo **A** e duas unidades do tipo **B**.

D) uma unidade do tipo **A** e três unidades do tipo **B**.

E) nenhuma unidade do tipo **A** e quatro unidades do tipo **B**.

05. (Enem) Um forro retangular de tecido traz, em sua etiqueta, a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

A) $2xy$

B) $15 - 3x$

C) $15 - 5y$

D) $-5y - 3x$

E) $5y + 3x - xy$

06. (Enem) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

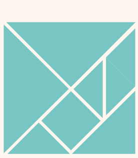


Figura 1

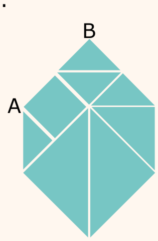


Figura 2


Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

A) 4 cm^2.

B) 8 cm^2.

C) 12 cm^2.

D) 14 cm^2.

E) 16 cm^2.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. 2 cm^2
- 04. E
- 05. C
- 06. C
- 07. E
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. B
- 04. A
- 05. A
- 06. A
- 07. D
- 08. A
- 09. B
- 10. B
- 11. x = 100 m
- 12. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

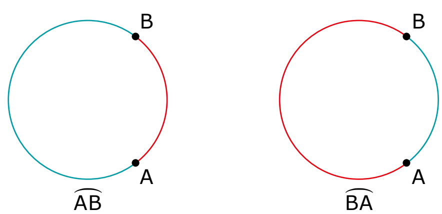
- 01. A
- 02. B
- 03. A
- 04. C
- 05. E
- 06. B

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %

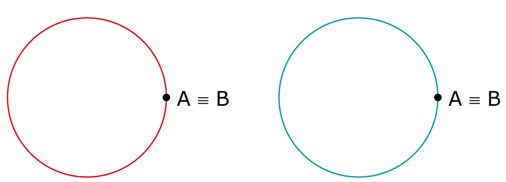
Arcos e Ciclo Trigonométrico

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Dois pontos, **A** e **B**, de uma circunferência dividem-na em duas partes denominadas **arcos**; **A** e **B** são as extremidades de cada um desses arcos, que indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$ ou $\overset{\frown}{BA}$.



Se **A** coincide com **B**, temos um arco de uma volta e um arco nulo.

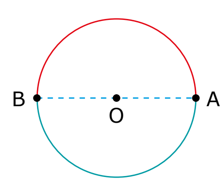


Arco de 1 volta — Arco nulo

Se **A** e **B** são as extremidades de um mesmo diâmetro, temos um arco de meia-volta.

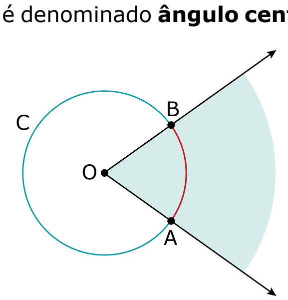
O: centro da circunferência

$\overset{\frown}{AB}$: arco de meia-volta



ÂNGULO CENTRAL

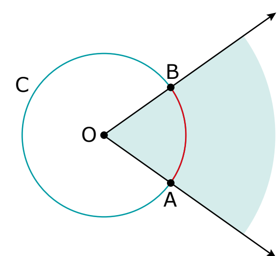
Todo ângulo coplanar com uma circunferência **C**, cujo vértice é o centro de **C**, é denominado **ângulo central** relativo a **C**.



$\overset{\frown}{AB}$: arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$

O arco de circunferência contido num ângulo central é chamado de arco correspondente a esse ângulo.

Como a todo ângulo central de **C** corresponde um único arco de **C** contido nesse ângulo, e a todo arco de **C** corresponde um único ângulo central de **C**, a medida de um ângulo central, relativo a uma circunferência, e a medida do arco correspondente, numa mesma unidade, são iguais.



$m(A\hat{O}B) = m(\overset{\frown}{AB})$

MEDIDAS DE ÂNGULOS E ARCOS

Medida em graus

Dividindo-se uma circunferência em 360 arcos congruentes entre si, cada um desses arcos medirá um grau (1°).

Dividindo-se um arco de 1° em 60 arcos congruentes entre si, cada um desses arcos medirá um minuto (1').

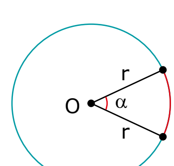
Dividindo-se um arco de 1' em 60 arcos congruentes entre si, cada um desses arcos medirá um segundo (1").

Portanto, 1° = 60' e 1' = 60".

Para um arco de circunferência com medida **a** graus, **b** minutos e **c** segundos, escrevemos a°b'c".

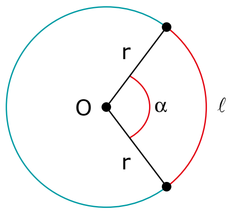
Radiano

Arco de 1 radiano (rad) é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.



Arco de 1 radiano (1 rad)

Indicando por α a medida, em radianos, de um arco de comprimento ℓ contido numa circunferência de raio **r**, temos:



$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{r}}$$

É importante observar que a medida de um ângulo, em radianos, só é igual ao comprimento de seu arco se r = 1.

As medidas de arcos de circunferências em graus e em radianos são diretamente proporcionais:

$$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

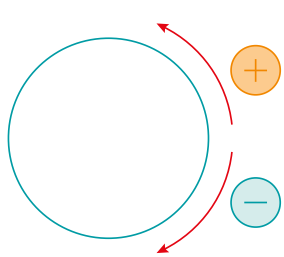
Esse fato nos possibilita obter uma forma de conversão de unidades por meio de uma regra de três simples:

Medida em graus		Medida em radianos
a	____________	α
180	____________	π

$$\boxed{\frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

Arco orientado

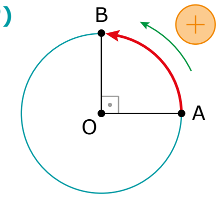
Em Trigonometria, adotamos o sentido anti-horário de percurso como positivo e o sentido horário de percurso como negativo.



Todo arco de circunferência não nulo no qual adotamos um sentido de percurso é chamado de **arco orientado**.

Exemplos:

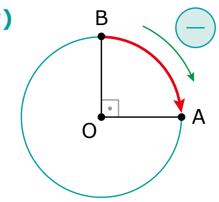
1º)



O: centro da circunferência

Arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ tem medida $\frac{\pi}{2}$ rad ou 90°.

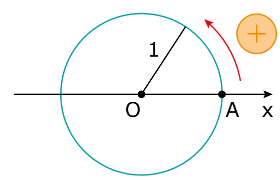
2º)



O: centro da circunferência

Arco orientado $\overset{\frown}{BA}$ tem medida $-\frac{\pi}{2}$ rad ou –90°.

Ciclo trigonométrico

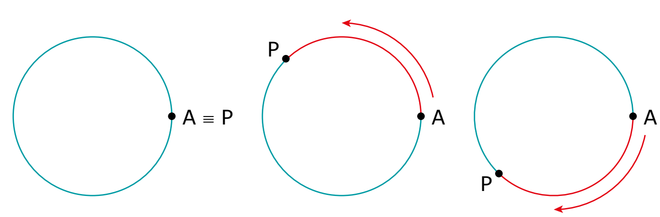


Toda circunferência orientada de centro **O** e raio unitário na qual escolhemos um ponto de origem dos arcos é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Adotaremos, como origem dos arcos, o ponto **A** de interseção do ciclo com o semieixo positivo das abscissas Ox.

No ciclo trigonométrico, a medida absoluta α, em radianos, de um arco e o comprimento ℓ desse arco são iguais, pois $\alpha = \frac{\ell}{r}$ e r = 1.

Logo, podemos associar cada número real a um único ponto **P** do ciclo trigonométrico com o seguinte procedimento:

Se $\alpha = 0$, tomamos P ≡ A.
Se $\alpha > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário.
Se $\alpha < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário.

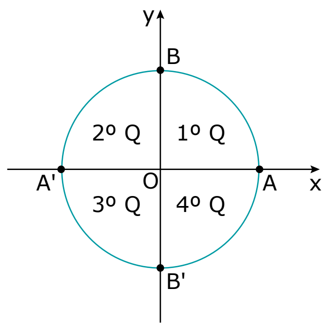


$m(\overset{\frown}{AP}) = 0$ $\quad$ $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha > 0$ $\quad$ $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha < 0$

O ponto **P** é a imagem de α no ciclo trigonométrico.

Convenções

i) O sistema de coordenadas xOy divide a circunferência trigonométrica em quatro quadrantes:

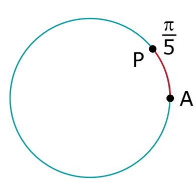


ii) Será omitido o símbolo rad nos arcos trigonométricos em radianos.

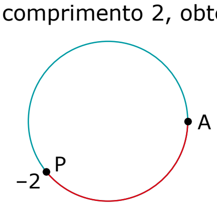
iii) Como todo arco trigonométrico tem, como extremidade, um mesmo ponto, denotaremos o arco apenas pelo outro ponto.

Exemplos:

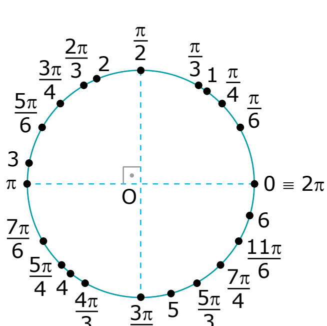
1º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\frac{\pi}{5}$, obtemos o arco de $\frac{\pi}{5}$.

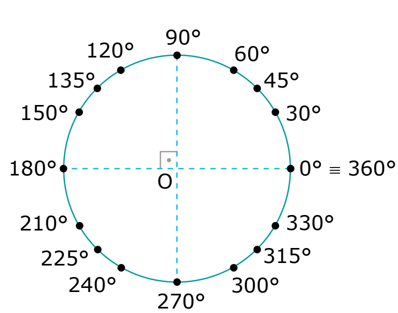


2º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido horário, um arco de comprimento 2, obtemos o arco –2.



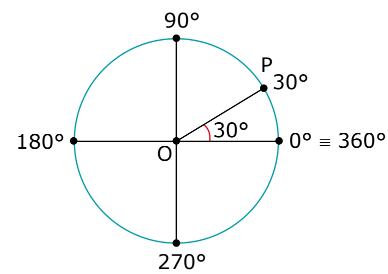
Obtemos, assim, o ciclo trigonométrico em radianos e em graus.





ARCOS CÔNGRUOS

Consideremos **P** a imagem de um arco de 30° no ciclo trigonométrico.



No sentido anti-horário, dando 1, 2, 3, ... voltas completas, obtemos os arcos de 30° + 1 . 360° = 390°, 30° + 2 . 360° = 750°; 30° + 3 . 360° = 1 110°, ..., todos associados a **P**.

Também no sentido horário, dando 1, 2, 3, ... voltas completas, obtemos os arcos de 30° – 1 . 360° = –330°, 30° – 2 . 360° = –690°; 30° – 3 . 360° = –1 050°, ..., todos associados a **P**.

Logo, podemos associar ao ponto **P** infinitos arcos de medida positiva, bem como infinitos arcos de medida negativa. Tais arcos podem ser representados por:

$30° + k.360°;\ k \in \mathbb{Z}$ ou, em radianos, $\frac{\pi}{6} + k.2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Como os arcos têm a mesma origem, **A**, e a mesma imagem, **P**, dizemos que eles são côngruos entre si ou, simplesmente, **côngruos**.

As medidas dos arcos côngruos a um arco de medida α são dadas por:

$\alpha + k.2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ ou, em graus, $\alpha + k.360°;\ k \in \mathbb{Z}$

Se $0 \leq \alpha < 2\pi$ (ou $0° \leq \alpha < 360°$), o arco de medida α é a **determinação principal** ou a 1ª determinação não negativa desses arcos côngruos entre si.

Notemos que a diferença entre as medidas de dois arcos côngruos entre si é igual ao produto de um número inteiro por 2π (ou é múltiplo de 360°), isto é, sempre equivale a um número inteiro de voltas completas.

Exemplos:

1º) Os arcos de medidas $\frac{27\pi}{5}$ e $-\frac{13\pi}{5}$ são côngruos entre si, pois $\frac{27\pi}{5} - \left(-\frac{13\pi}{5}\right) = \frac{27\pi}{5} + \frac{13\pi}{5} = 8\pi = 4.2\pi$.

MATEMÁTICA

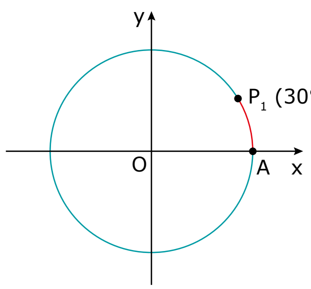
2º) Os arcos de medidas $\frac{27\pi}{7}$ e $\frac{6\pi}{7}$ não são côngruos entre si, pois $\frac{27\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = 3\pi$ (não é um produto de um inteiro por 2π).

3º) Os arcos de medidas 1 110° e 390° são côngruos entre si, pois 1 110° – 390° = 720° = 2 . 360°.

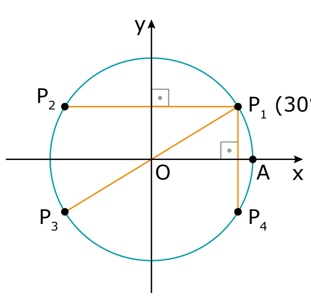
4º) Os arcos de medidas –30° e 320° não são côngruos entre si, pois –30° – 320° = –350° (não é múltiplo de 360°).

SIMETRIAS

Consideremos o ponto P_1 associado à medida 30°, no ciclo trigonométrico.

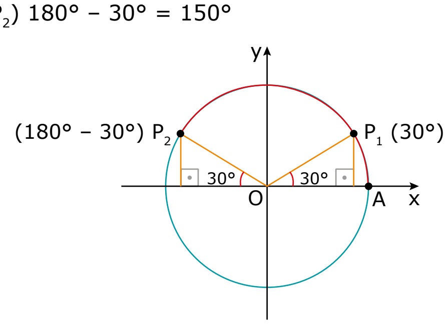


Pelo ponto P_1, traçando três retas, uma delas perpendicular ao eixo das ordenadas, outra que passa pela origem do sistema, e a terceira perpendicular ao eixo das abscissas, obtemos os pontos P_2, P_3 e P_4, respectivamente.



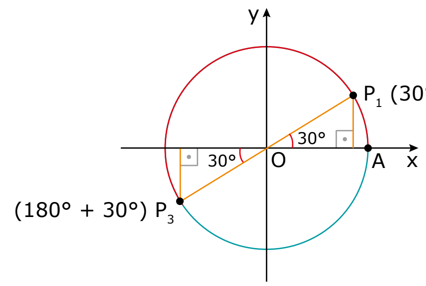
Os pontos P_2, P_3 e P_4 são chamados de simétricos (ou correspondentes) do ponto P_1 nos diversos quadrantes. Suas medidas **x** ($0° \le x \le 360°$) são:

P_2) 180° – 30° = 150°

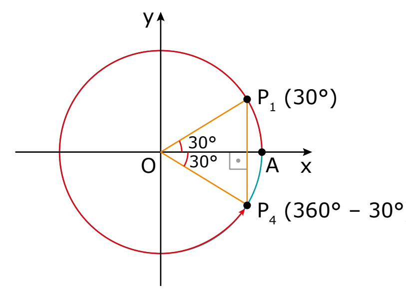


Analogamente, temos:

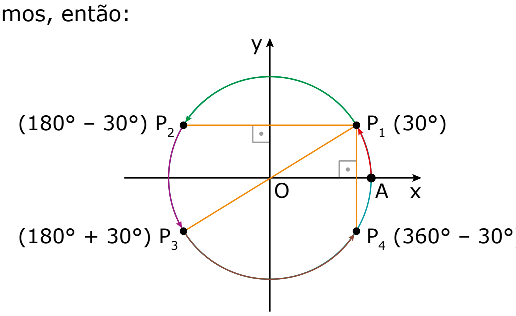
P_3) 180° + 30° = 210°



P_4) 360° – 30° = 330°

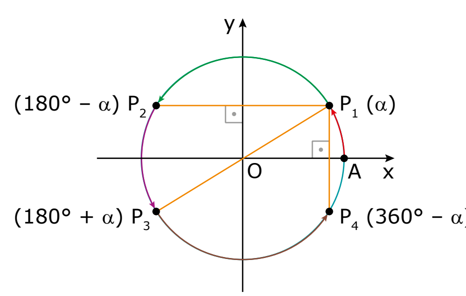


Temos, então:

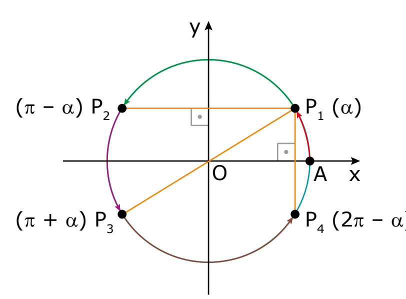


De maneira geral:

i) Se α for uma medida em graus:



ii) Se α for uma medida em radianos:



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. ZPX7 (Unemat-MT) Quanto ao arco 4555°, é correto afirmar:

A) Pertence ao segundo quadrante e tem como côngruo o ângulo de 55°.

B) Pertence ao primeiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 75°.

C) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 195°.

D) Pertence ao quarto quadrante e tem como côngruo o ângulo de 3115°.

E) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 4195°.

02. D794 (UFSCar-SP) Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que melhor aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é (considere π = 3,14)

A) 37,7 cm.
B) 25,1 cm.
C) 20 cm.
D) 12 cm.
E) 3,14 cm.

03. (UFMS–2020) Às 12 horas, os ponteiros dos minutos e das horas se superpõem e, às 13 horas, eles fazem um ângulo de 30°. Seguindo esse raciocínio, o valor da soma dos ângulos formados às 15h30min e às 18h40min é:

A) 150°
B) 115°
C) 75°
D) 40°
E) 35°

04. K339 (UEG-GO) Na competição de *skate* a rampa em forma de **U** tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*, uma delas é a "180 *allie frontside*", que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180°, um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de

A) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.

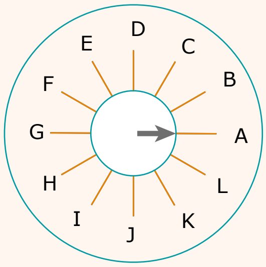
B) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.

C) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.

D) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.

E) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

05. (Unifor-CE) O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura a seguir, em que as 12 letras, **A**, **B**, ..., **L**, estão igualmente espaçadas (o ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo) e a posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada.



Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor (onde a seta está gravada), de acordo com as seguintes instruções, a partir da posição indicada:

1) $\frac{2}{3}\pi$ no sentido anti-horário.

2) $\frac{3}{2}\pi$ no sentido horário.

3) $\frac{3}{4}\pi$ no sentido anti-horário.

Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver

A) no ponto médio entre **L** e **A**.

B) na posição **B**.

C) na posição **K**.

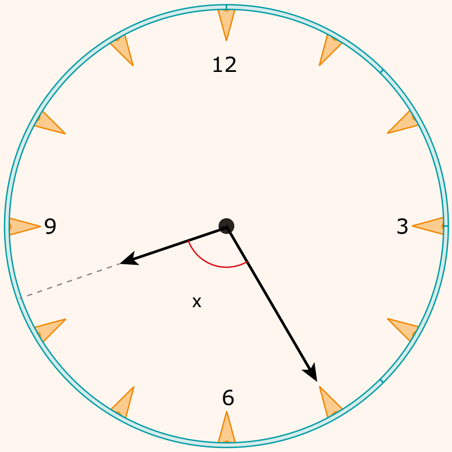
D) em algum ponto entre **J** e **K**.

E) na posição **H**.

06. SZXF (UNEB-BA) Em um círculo, um ângulo central de 20 graus determina um arco de 5 cm. Qual o tamanho do arco, em cm, determinado por um ângulo central de 40 graus?

A) 5
B) 10
C) 20
D) 40
E) 60

07. GSXR (CEFET-MG) Se o relógio da figura marca 8h e 25min, então o ângulo **x** formado pelos ponteiros é



A) 12° 30'.
B) 90°.
C) 102° 30'.
D) 120°.

MATEMÁTICA

08. J5GR (UDESC) O relógio *Tower Clock*, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

A) $\frac{\pi}{12}$

B) $\frac{\pi}{36}$

C) $\frac{\pi}{6}$

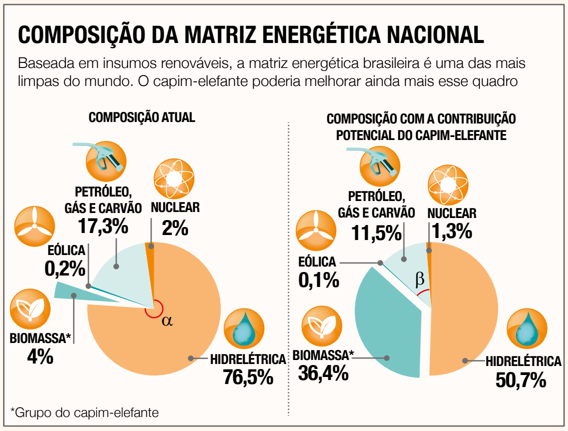
D) $\frac{\pi}{18}$

E) $\frac{\pi}{9}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UNEB-BA) A conversão de capim-elefante em energia não polui. Mesmo o gás carbônico, CO_2, emitido durante a queima da biomassa utilizada, é menor do que o consumido pela gramínea durante todo o seu crescimento.



GOVERNO FEDERAL.

Considere, no gráfico, que α é a medida do ângulo do setor circular, associado à energia hidrelétrica na composição da matriz energética nacional atual, e que β é a medida do ângulo do setor circular, associado a petróleo, gás e carvão na composição da matriz energética nacional com a contribuição potencial do capim-elefante.

VARGAS, 2010, p. 112-114.

Nessas condições, $\alpha - \beta$ é igual a:

A) $\frac{17\pi}{10}$ rad

B) $\frac{13\pi}{10}$ rad

C) $\frac{11\pi}{10}$ rad

D) $\frac{9\pi}{10}$ rad

E) $\frac{7\pi}{10}$ rad

02. (UFAM) O menor valor não negativo côngruo ao arco de $\frac{21\pi}{5}$ rad é igual:

A) $\frac{\pi}{5}$ rad

B) $\frac{7\pi}{5}$ rad

C) π rad

D) $\frac{9\pi}{5}$ rad

E) 2π rad

03. R1AX (EN-RJ) Rola-se, sem deslizar, uma roda de 1 metro de diâmetro, por um percurso reto de 30 centímetros, em uma superfície plana. O ângulo central de giro da roda, em radianos, é

A) 0,1.

B) 0,2.

C) 0,3.

D) 0,6.

E) 0,8.

04. 8LVT (UEA) Caminhando 100 metros pelo contorno de uma praça circular, uma pessoa descreve um arco de 144°. Desse modo, é correto afirmar que a medida, em metros, do raio da circunferência na praça é:

A) $125\ \pi$

B) $\frac{175}{\pi}$

C) $\frac{125}{\pi}$

D) $\frac{250}{\pi}$

E) $250\ \pi$

05. ANJ4 (IFSP) Considere uma circunferência de centro **O** e raio 6 cm. Sendo **A** e **B** pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco AB é 5π cm. A medida do ângulo central AÔB, correspondente ao arco AB considerado, é

A) 120°.

B) 150°.

C) 180°.

D) 210°.

E) 240°.

06. P91Q (PUC Campinas-SP) A babá eletrônica, que cantava pontualmente às nove da noite, dava o sinal para que o filho de Ramiro fosse para a cama, mas ele nunca conseguia dormir antes das 21h30min. Certo dia, ele subiu para o quarto às 21h e só dormiu às 21h40min. Nesse instante, os ponteiros do relógio carrilhão da sala, que funcionava perfeitamente, formavam entre si um ângulo agudo de medida

A) 50°.

B) 50° 30′.

C) 52°.

D) 52° 40′.

E) 55°.

07. J2SJ (UFG-GO) As cidades de Goiânia e Curitiba têm, aproximadamente, a mesma longitude. Goiânia fica a uma latitude de 16° 40', enquanto a latitude de Curitiba é de 25° 25'. Considerando-se que a Terra seja aproximadamente esférica, com a linha do equador medindo, aproximadamente, 40 000 km, a distância entre as duas cidades, em quilômetros, ao longo de um meridiano,

A) é menor que 700.

B) fica entre 700 e 800.

C) fica entre 800 e 900.

D) fica entre 900 e 1 000.

E) é maior que 1 000.

08. JXWG (IFAL) Considerando-se o arco trigonométrico $\alpha = \frac{23\pi}{3}$ rad, assinale a alternativa falsa.

A) α = 1 308°

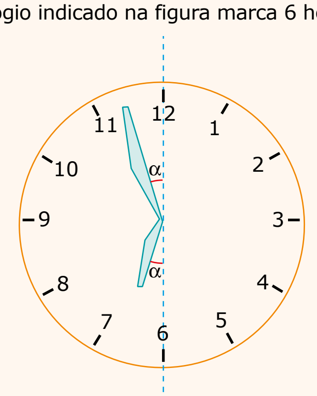
B) α dá três voltas e para no 4° quadrante.

C) sen α = –sen 60°

D) cos α = cos 60°

E) α dá três voltas e para no 1° quadrante.

09. (FGV) O relógio indicado na figura marca 6 horas e



A) $55\frac{7}{13}$ minutos.

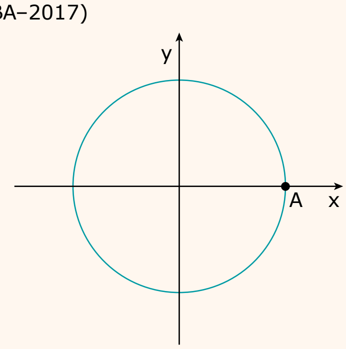
B) $55\frac{5}{11}$ minutos.

C) $55\frac{5}{13}$ minutos.

D) $54\frac{5}{11}$ minutos.

E) $54\frac{2}{11}$ minutos.

10. TRD4 (EBMSP-BA–2017)



O círculo na figura representa, no sistema de coordenadas cartesianas, uma pista onde uma pessoa **P** costuma correr, visando aos benefícios à saúde que essa prática traz. Um determinado dia, **P** parte do ponto representado por A = (120, 0), de onde começa a correr no sentido anti-horário, mantendo uma velocidade de 4 metros por segundo.

Considerando-se $\pi = 3$, pode-se afirmar que, após 32 minutos de corrida, **P** estará no ponto de coordenadas **x** e **y**, tais que:

A) $y = -\sqrt{3}x$

B) $y = -\sqrt{2}x$

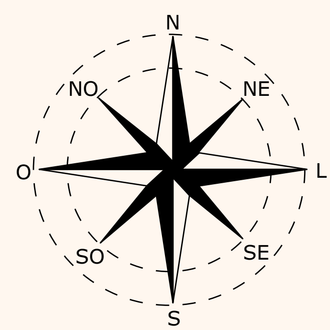
C) $y = \sqrt{2}x$

D) $y = \sqrt{3}x$

E) $y = 2\sqrt{3}x$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmara de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmara está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmara, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmara?

A) 75° no sentido horário.

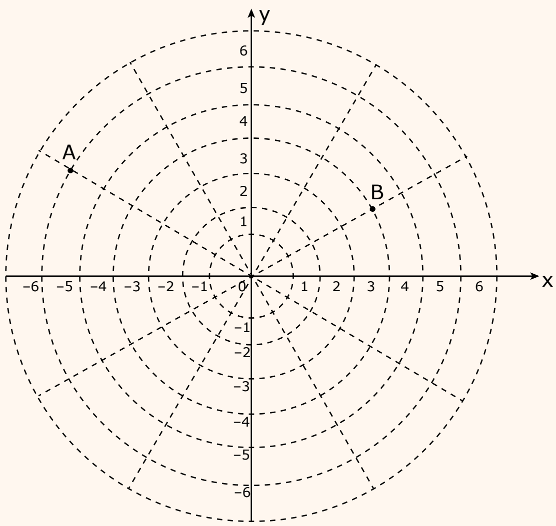
B) 105° no sentido anti-horário.

C) 120° no sentido anti-horário.

D) 135° no sentido anti-horário.

E) 165° no sentido horário.

02. (Enem–2018) Sobre o sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0, 0).

Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a:

A) $\frac{2.\pi 1}{3}+8$

B) $\frac{2.\pi 2}{3}+6$

C) $\frac{2.\pi 3}{3}+4$

D) $\frac{2.\pi 4}{3}+2$

E) $\frac{2.\pi 5}{3}+2$

03. (Enem) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o esqueitista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade esqueite vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

A) uma volta completa.

B) uma volta e meia.

C) duas voltas completas.

D) duas voltas e meia.

E) cinco voltas completas.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. B
- 04. A
- 05. A
- 06. B
- 07. C
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. D
- 04. C
- 05. B
- 06. A
- 07. D
- 08. E
- 09. C
- 10. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. A
- 03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

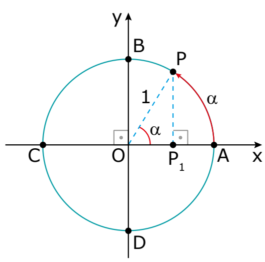
Funções Seno e Cosseno

FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função y = f(x) é periódica, de período **p**, se existe $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo **x** pertencente ao domínio da função.

FUNÇÃO SENO

No ciclo trigonométrico a seguir, α é a medida do ângulo $A\hat{O}P$, e o triângulo OP_1P é retângulo.



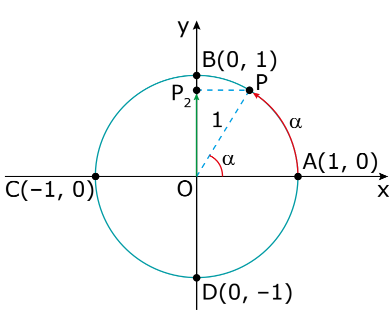
Utilizando a definição de seno para ângulos agudos em um triângulo retângulo, podemos escrever:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{P_1P}{OP}$, em que OP = 1, e P_1P é a ordenada de **P**, ou seja:

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \text{ordenada de } \mathbf{P}}$$

A função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a ordenada do ponto **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) a todo número α.

$\text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \alpha \to \text{sen}\,\alpha = OP_2$

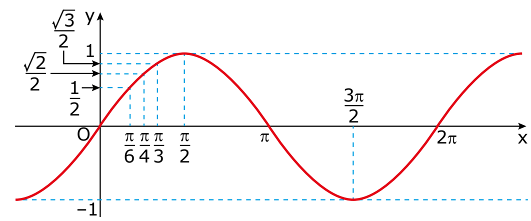


Dizemos também que OP_2 é o seno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$.

$$\boxed{\text{sen}\,A\hat{O}P = \text{sen}\,\overset{\frown}{AP} = OP_2}$$

O eixo Oy passa a ser denominado, então, eixo dos senos.

Gráfico da função seno (senoide)



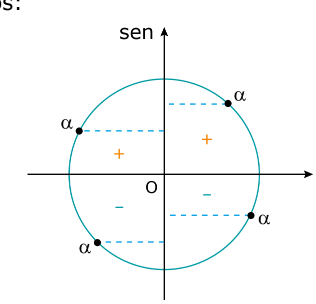
A imagem da função seno é o intervalo [−1, 1], isto é, $-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1$, para todo **x** real.

> A função seno é periódica, e seu período é 2π.

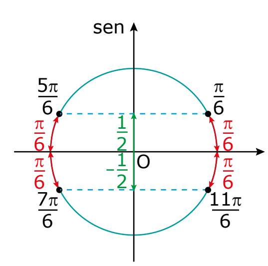
Sinal

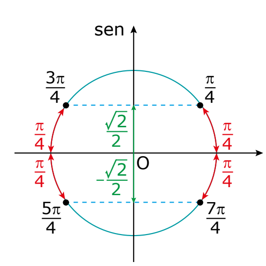
Vamos analisar o sinal de sen α quando **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.

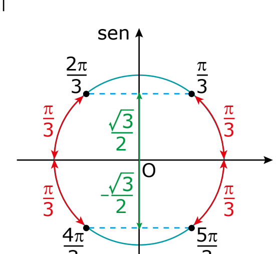
Eixo dos senos:



Valores notáveis







Senos de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medida α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\,\alpha,\ k \in \mathbb{Z}}$$

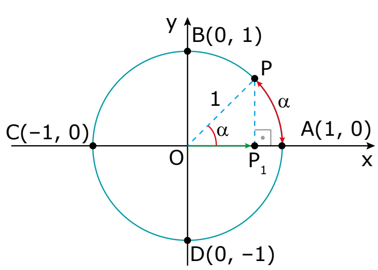
Exemplos:

1º) $\text{sen}\dfrac{25\pi}{6} = \text{sen}\dfrac{13\pi}{6} = \text{sen}\dfrac{\text{AC}}{\text{OA}} = \dfrac{1}{2}$

2º) A determinação principal do arco de medida $\dfrac{29\pi}{3}$ rad mede $\dfrac{5\pi}{3}$ rad. Então, $\text{sen}\dfrac{29\pi}{3} = \text{sen}\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

FUNÇÃO COSSENO

No ciclo trigonométrico a seguir, α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o triângulo OP_1P é retângulo.



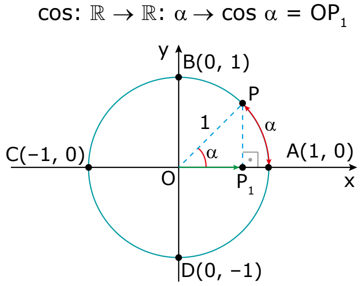
Utilizando a definição de cosseno para ângulos agudos num triângulo retângulo, podemos escrever:

$\cos\alpha = \dfrac{OP_1}{OP}$, em que $OP = 1$, e OP_1 é a abscissa de **P**, ou seja:

$$\boxed{\cos\alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}}$$

A função cosseno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a abscissa do ponto **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) a todo número α.

$$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \alpha \to \cos\alpha = OP_1$$

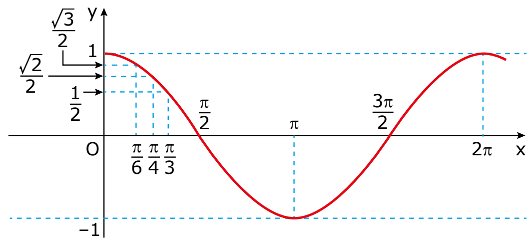


Dizemos, também, que OP_1 é o cosseno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$, e indicamos da seguinte forma:

$$\boxed{\cos A\hat{O}P = \cos \overset{\frown}{AP} = OP_1}$$

O eixo Ox passa a ser denominado, então, eixo dos cossenos.

Gráfico da função cosseno (cossenoide)

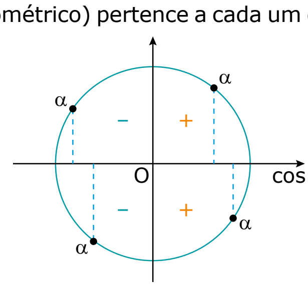


A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo **x** real.

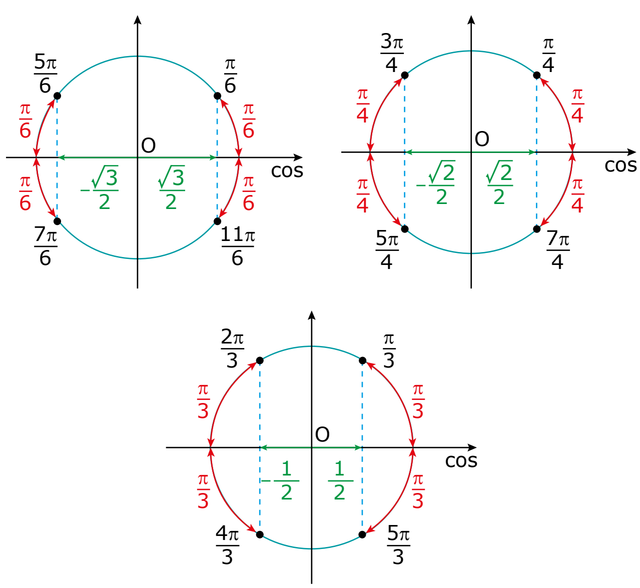
A função cosseno é periódica, e seu período é 2π.

Sinal

Vamos analisar o sinal de $\cos\alpha$ quando **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.



Valores notáveis



Cossenos de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos:

1º) $\cos 8\pi = \cos 6\pi = \cos 4\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{20\pi}{3}$ rad vale $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então, $\cos\frac{20\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

PERÍODO DE FUNÇÕES ENVOLVENDO SENO E COSSENO

Sabendo que as funções seno e cosseno são periódicas e que seu período é 2π, podemos calcular o período **p** das seguintes funções:

i) $f(x) = \text{sen}(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$

ii) $f(x) = \cos(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$

Demonstração:

i) Seja $f(x) = \text{sen}(mx + n),\ m \neq 0$.

Como o período da função sen x é igual a 2π, obtemos um período de f(x) quando o arco $(mx + n)$ variar, por exemplo, de 0 a 2π.

Assim:

$mx + n = 0 \Rightarrow x = -\frac{n}{m}$

$mx + n = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m}$

Como o período **p** é positivo, temos:

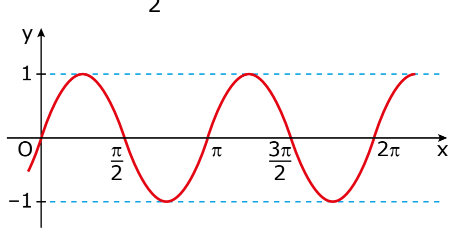
$$p = |\Delta x| = \left|\frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m} - \left(-\frac{n}{m}\right)\right| = \frac{2\pi}{|m|}$$

ii) A demonstração é análoga.

Exemplos:

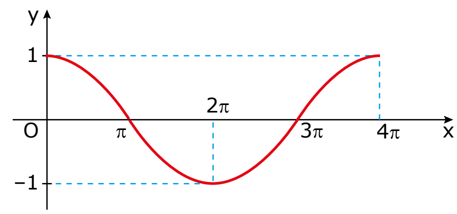
1º) $f(x) = \text{sen } 2x$

$m = 2 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow p = \pi$



2º) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 4\pi$



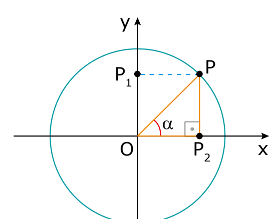
RELAÇÃO FUNDAMENTAL ENTRE SENO E COSSENO

Utilizando as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, já havíamos deduzido que:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Tal relação é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria e pode ser demonstrada facilmente no ciclo trigonométrico.

Tomemos um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (os demais casos são demonstrados de maneira análoga).



Assim, temos $P_2P = OP_1 = \text{sen}\,\alpha$, $OP_2 = \cos\alpha$ e $OP = 1$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(P_2P)^2 + (OP_2)^2 = (OP)^2 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Dar o domínio, o conjunto imagem e esboçar o gráfico de $y = 1 + \text{sen } x$.

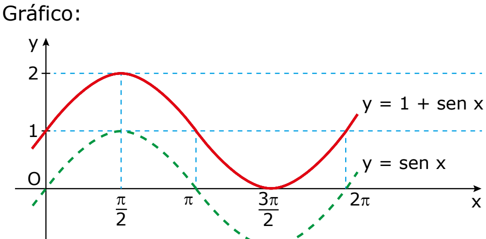
Resolução:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Conjunto imagem:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \text{sen } x \leq 2 \Rightarrow \text{Im} = [0, 2]$

Gráfico:



02. Determinar **m** de modo que se tenha $\cos x = \frac{m+3}{2}$.

Resolução:

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, temos:

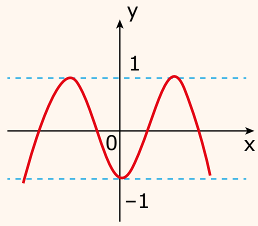
$-1 \leq \frac{m+3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m + 3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

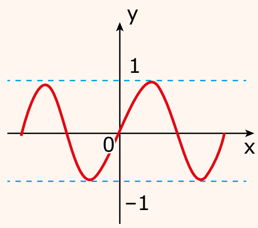
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unimontes-MG) Considere f: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ uma função definida por $f(x) = -\text{sen } x$. O esboço que melhor representa o gráfico de **f** é:

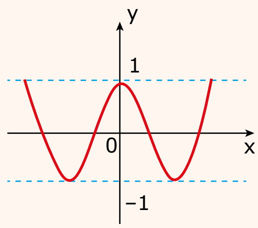
A)



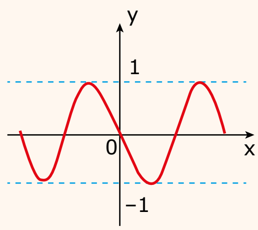
B)



C)



D)



02. (PUC Minas) Se $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então sen α é igual a:

A) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

B) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

E) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

03. CEGZ

(IFPE) A quantidade de algas **A**, em toneladas, em certa baía, varia periodicamente em função do tempo **t**, em anos e é representada pela função:

$$A(t) = 850 + 200.\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

Se **t** for medido a partir de 2015, ou seja, atribua a 2015 o valor t = 0. Determine em toneladas, qual será a quantidade de algas na baía no início de 2045.

A) 1 050

B) 850

C) 750

D) 950

E) 650

04. 3LZC

(FGV-SP) A previsão mensal da venda de sorvetes para 2012 em uma sorveteria é dada por $P = 6\,000 + 50x + 2\,000 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que **P** é o número de unidades vendidas no mês **x** ; x = 0 representa janeiro de 2012, x = 1 representa fevereiro de 2012, x = 2 representa março de 2012 e assim por diante.

Se essas previsões se verificarem, em julho haverá uma queda na quantidade vendida, em relação a março, de aproximadamente

A) 39,5%.

B) 38,5%.

C) 37,5%.

D) 36,5%.

E) 35,5%.

05. AHTH

(UFES) O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, são, respectivamente:

A) 2π e $[-1, 1]$

B) 2π e $[2, 8]$

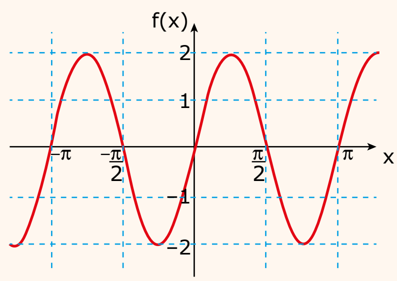
C) $2\pi^2$ e $[2, 8]$

D) 2π e $[-3, 3]$

E) $2\pi^2$ e $[-3, 3]$

06. OY5F

(UCS-RS) O gráfico a seguir representa uma função real de variável real.



Assinale a alternativa em que consta a função representada pelo gráfico.

A) $f(x) = -2\cos x$

B) $f(x) = 2\cos \frac{x}{2}$

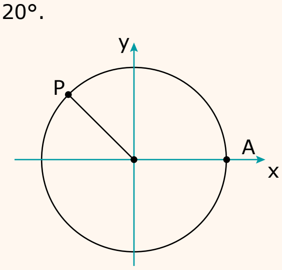
C) $f(x) = 2\text{sen } x$

D) $f(x) = 2\text{sen } 2x$

E) $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$

07. WUZK

(UERJ–2019) O círculo a seguir tem o centro na origem do plano cartesiano xy e raio igual a 1. Nele, AP determina um arco de 120°.



As coordenadas de **P** são:

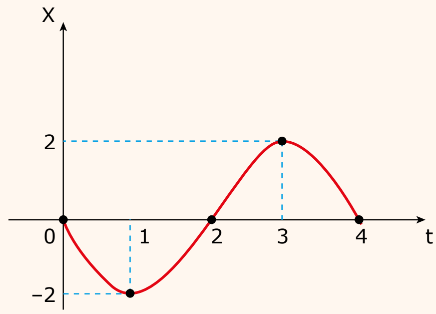
A) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

D) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

08. UMH3 (Unifor-CE) O gráfico a seguir mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4 s. A equação da posição em função do tempo é dada por X = A.cos (wt + α). A partir do gráfico, a soma das constantes **A**, **w**, α é de:



A) $2 + \frac{\pi}{2}$

B) $2 + \pi$

C) $2 + \frac{3\pi}{2}$

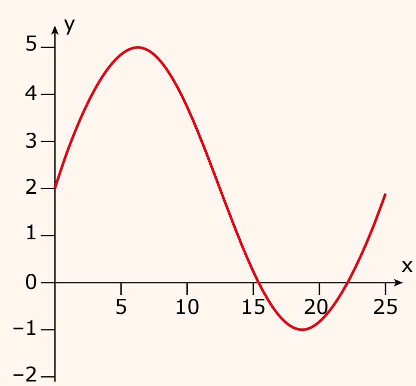
D) $4 + \pi$

E) $4 + \frac{\pi}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS) A figura a seguir representa um esboço do gráfico de uma função $y = A + B\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$, que é muito útil quando se estudam fenômenos periódicos, como, por exemplo, o movimento de uma mola vibrante. Então, o produto das constantes **A** e **B** é



A) 6.

B) 10.

C) 12.

D) 18.

E) 50.

02. (FGV-SP) Uma empresa utiliza a fórmula $P = 200 + 40\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$ para estimar a quantidade vendida mensalmente **P** de um produto, em que t = 1 representa o mês de janeiro de 2010, t = 2 representa o mês de fevereiro de 2010, t = 3 o mês de março de 2010 e assim por diante.

Em quais meses de 2010 estão estimadas as vendas mínima e máxima respectivamente?

A) Outubro e abril.

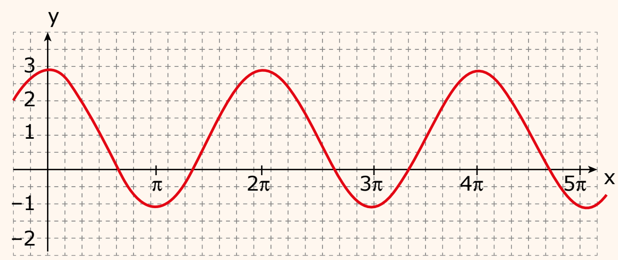
B) Setembro e março.

C) Agosto e fevereiro.

D) Julho e janeiro.

E) Junho e dezembro.

03. 9CBI (Insper-SP) A figura a seguir representa o gráfico da função f(x) = a.cos(x) + b.



O soma a + b e a diferença b – a são, respectivamente, iguais a

A) 3 e 1.

B) 1 e –3.

C) π e 1.

D) –1 e π.

E) 3 e –1.

04. S12C (FGV-SP) A previsão de vendas mensais de uma empresa para 2011, em toneladas de um produto, é dada por $f(x) = 100 + 0{,}5x + 3\text{sen}\,\frac{\pi x}{6}$, em que x = 1 corresponde a janeiro de 2011, x = 2 corresponde a fevereiro de 2011 e assim por diante.

A previsão de vendas (em toneladas) para o primeiro trimestre de 2011 é:

(Use a aproximação decimal $\sqrt{3}$ = 1,7.)

A) 308,55.

B) 309,05.

C) 309,55.

D) 310,05.

E) 310,55.

05. KOGD (UFPR) Num laboratório, sensores são colocados no topo de dois pistões para analisar o desempenho de um motor. A profundidade do primeiro pistão no bloco do motor pode ser descrita, de maneira aproximada, pela expressão $H_1 = 12.\cos\left(\frac{2\pi t}{60}\right)$, e a profundidade do segundo, pela expressão $H_2 = 12.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{60}\right)$, sendo **t** o tempo medido em milissegundos a partir do acionamento do motor. Quanto tempo levará para que os pistões estejam na mesma profundidade, pela primeira vez, após o acionamento do motor?

A) 5 milissegundos.

B) 7,5 milissegundos.

C) 10 milissegundos.

D) 22,5 milissegundos.

E) 45 milissegundos.

MATEMÁTICA

06. YKQD (IFPE) Na cidade de Recife, mesmo que muito discretamente, devido à pequena latitude em que nos encontramos, percebemos que, no verão, o dia se estende um pouco mais em relação à noite e, no inverno, esse fenômeno se inverte.

Já em outros lugares do nosso planeta, devido a grandes latitudes, essa variação se dá de forma muito mais acentuada. É o caso de Ancara, na Turquia, onde a duração de luz solar **L**, em horas, no dia **d** do ano, após 21 de março, é dada pela função:

$$L(d) = 12 + 2{,}8.\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(d - 80)\right]$$

Determine, em horas, respectivamente, a máxima e a mínima duração de luz solar durante um dia em Ancara.

A) 12,8 e 12.
B) 14,8 e 9,2.
C) 12,8 e 9,2.
D) 12 e 12.
E) 14,8 e 12.

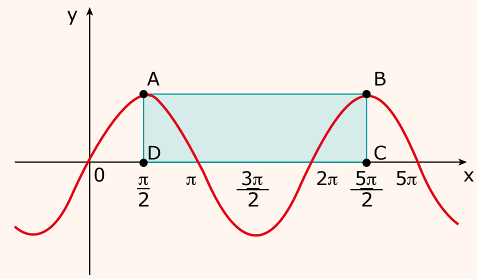
07. 91DZ (PUC-SP) Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que, no ano de 2015 + x, com x ∈ {0, 1, 2, ... , 9, 10}, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações de certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12.\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que

A) o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.
B) atingirá o valor mínimo somente em duas ocasiões.
C) poderá superar 300 milhões de dólares.
D) nunca será inferior a 250 milhões de dólares.

08. 6KI3 (Unifor-CE) As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplesmente, pela função seno. Suponhamos que, para determinado porto, a variação de altura (**h**) da lâmina-d'água em função das horas (**t**) do dia seja dada por: $h(t) = 10 + 4.\text{sen}\left(\frac{t\pi}{12}\right)$. Um navio, cujo casco mede 12 m (parte do navio que fica submersa), chega às 8 horas da manhã no porto. O tempo que pode permanecer, sem encalhar, é de

A) 2 horas.
B) 3 horas.
C) 4 horas.
D) 5 horas.
E) 6 horas.

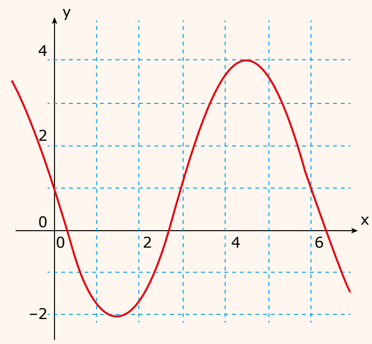
09. (UERJ–2019) O gráfico a seguir representa a função periódica definida por f(x) = 2sen(x), x ∈ ℝ. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, **A** e **B** são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função.



A área do retângulo ABCD é:

A) 6π
B) 5π
C) 4π
D) 3π

10. (EsPCEx-SP–2019) Na figura a seguir está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma y = m.sen(nx) + k, com n > 0.

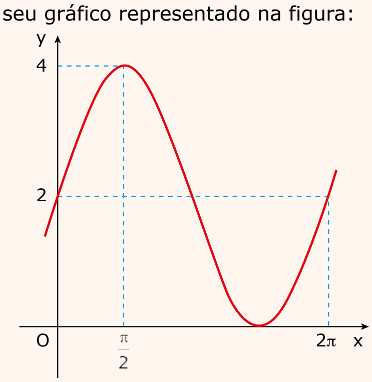


Desenho ilustrativo – fora de escala.

Os valores de **m**, **n** e **k**, são, respectivamente,

A) 3, $\frac{\pi}{3}$ e −1.
B) 6, $\frac{\pi}{6}$ e 1.
C) −3, $\frac{\pi}{6}$ e 1.
D) −3, $\frac{\pi}{3}$ e 1.
E) 3, $\frac{\pi}{3}$ e −1.

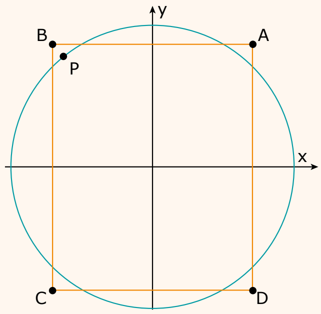
11. 0KX0 (Fatec-SP) Um determinado objeto de estudo é modelado segundo uma função trigonométrica **f**, de ℝ em ℝ, sendo parte do seu gráfico representado na figura:



Usando as informações dadas nesse gráfico, pode-se afirmar que

A) a função **f** é definida por f(x) = 2 + 3.sen x.
B) **f** é crescente para todo **x** tal que x ∈ [π; 2π].
C) o conjunto imagem da função **f** é [2; 4].
D) para $y = f\left(\frac{19\pi}{4}\right)$, tem-se 2 < y < 4.
E) o período de **f** é π.

12. VPIL (Insper-SP) Na figura, em que está representada a circunferência trigonométrica, **P** é a extremidade de um arco trigonométrico da 1ª volta cuja medida, em radianos, é igual a α. Observe que **P** é um ponto do 2º quadrante localizado no interior do retângulo ABCD.



As coordenadas dos vértices do retângulo são dadas por:

$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Assim, é necessariamente verdadeira a desigualdade:

A) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$

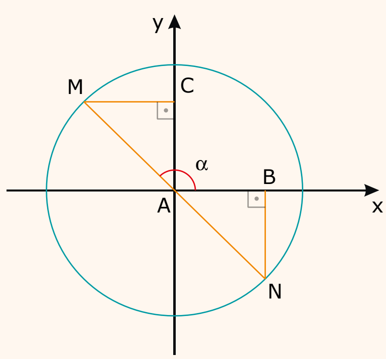
B) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$

C) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$

E) $\pi < \alpha < \frac{7\pi}{6}$

13. PEZI (CEFET-MG) A figura a seguir representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo α mede $\frac{5\pi}{6}$ radianos.



A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é:

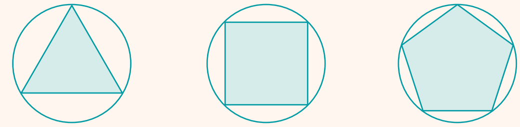
A) $26\sqrt{3}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. ØAJA (UFPR) Considere a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos em um círculo de raio 2 cm:



3 lados   4 lados   5 lados

Sabendo que a área **A** de um polígono regular de **n** lados dessa sequência pode ser calculada pela fórmula $A = 2n.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, considere as seguintes afirmativas:

1. As áreas do triângulo equilátero e do quadrado nessa sequência são, respectivamente, $3\sqrt{3}$ cm² e 8 cm².
2. O polígono regular de 12 lados, obtido nessa sequência, terá área de 12 cm².
3. À medida que **n** aumenta, o valor **A** se aproxima de 4π cm².

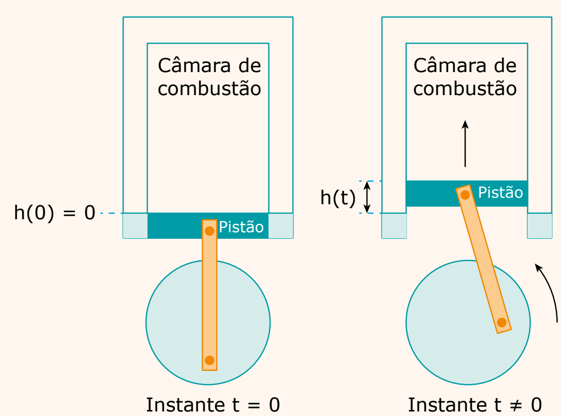
Assinale a alternativa correta.

A) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
B) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
C) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
D) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
E) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2019) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



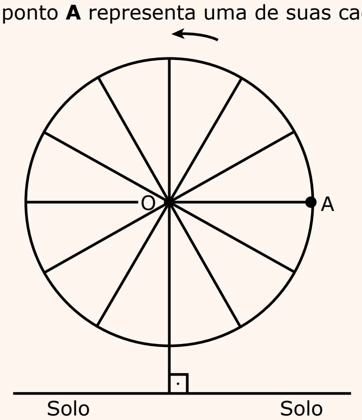
A função $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura **h**, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo **t**, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t = 0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

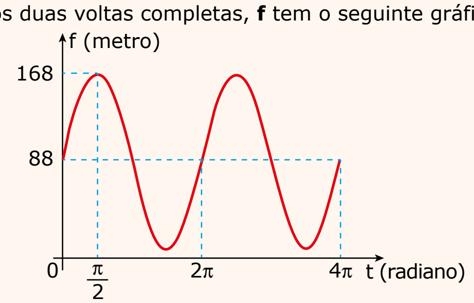
A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 8.

02. (Enem–2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto **A** representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto **O**. Sejam **t** o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e **f** a função que descreve a altura do ponto **A**, em relação ao solo, em função de **t**.

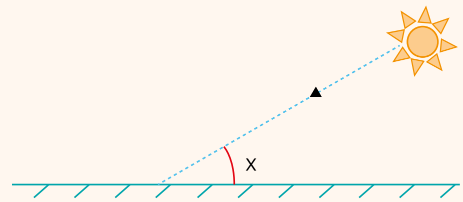
Após duas voltas completas, **f** tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

A) $f(t) = 80sen(t) + 88$
B) $f(t) = 80cos(t) + 88$
C) $f(t) = 88cos(t) + 168$
D) $f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)$
E) $f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)$

03. UAMZ (Enem–2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo **x** com a superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k.sen(x)$, sendo **k** uma constante, e supondo-se que **x** está entre 0° e 90°.



Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

A) 33%.
B) 50%.
C) 57%.
D) 70%.
E) 86%.

04. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço **P**, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5.\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde **x** representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 02 ago. 2012 (Adaptação).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

A) janeiro.
B) abril.
C) junho.
D) julho.
E) outubro.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. E	05. C	07. A
02. A	04. A	06. D	08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	05. B	09. C	13. B
02. E	06. B	10. D	14. E
03. E	07. B	11. D	
04. D	08. A	12. B	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	02. A	03. B	04. D

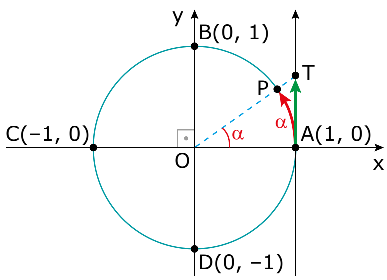
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Outras Funções Trigonométricas

FUNÇÃO TANGENTE

Pela origem **A** dos arcos, consideremos o eixo AT paralelo a Oy, passando por **A**.

Temos que α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o triângulo OAT é retângulo.



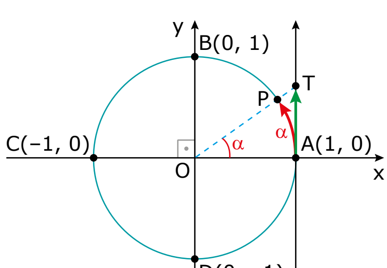
Portanto, utilizando a definição de tangente para ângulos agudos em um triângulo retângulo, podemos escrever $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{AT}{OA}$, em que OA = 1, e AT é a ordenada de **T**, ou seja:

$$\boxed{\text{tg}\ \alpha = \text{ordenada de } \mathbf{T}}$$

A função tangente é a função de $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ em $\mathbb{R}$, que para todo número α associa a ordenada do ponto **T**, interseção de $\overleftrightarrow{AT}$ com $\overleftrightarrow{OP}$ (em que **P** é a imagem de $\boldsymbol{\alpha}$ no ciclo trigonométrico).

$$\text{tg}: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\text{tg}\ \alpha = AT$



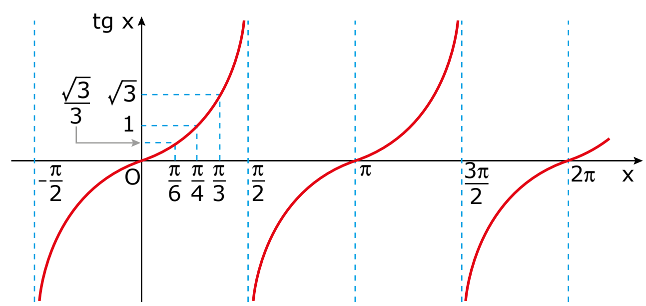
Dizemos, também, que AT é a tangente de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$.

$$\boxed{\text{tg}\ A\hat{O}P = \text{tg}\ \overset{\frown}{AP} = AT}$$

O eixo AT passa a ser denominado, então, eixo das tangentes.

Gráfico

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0



A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

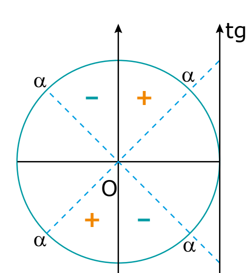
A função tangente é periódica, e seu período é π.

OBSERVAÇÃO

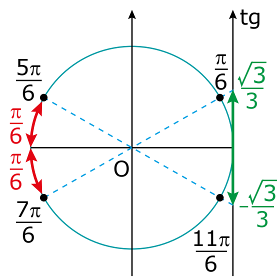
$$\boxed{f(x) = \text{tg}\ (mx + n) \Rightarrow p = \frac{\pi}{|m|},\ m \neq 0}$$

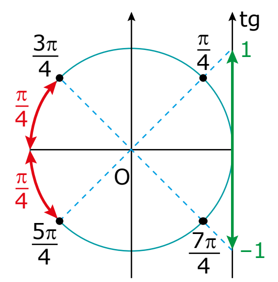
Sinal

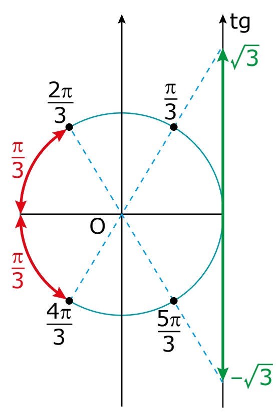
Vamos estudar o sinal de tg α quando **P** (imagem de $\boldsymbol{\alpha}$ no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.



Valores notáveis







TANGENTES DE ARCOS CÔNGRUOS

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\boxed{\text{tg }(\alpha + 2k\pi), = \text{tg }\alpha,\ \alpha \in D(\text{tg}),\ k \in \mathbb{Z}}$$

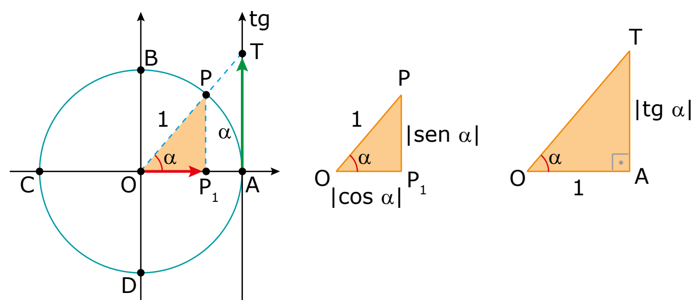
Exemplos:

1º) $\text{tg } 1\,080° = \text{tg } 720° = \text{tg } 360° = \text{tg } 0° = 0$

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{38\pi}{3}$ rad mede $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então: $\text{tg } \frac{38\pi}{3} = \text{tg } \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

RELAÇÃO ENTRE TANGENTE, SENO E COSSENO

Qualquer que seja $\alpha \in D(\text{tg})$, se $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, existem os triângulos retângulos OAT e OP_1P semelhantes. Logo:



$$\frac{AT}{P_1P} = \frac{OA}{OP_1} \Rightarrow \frac{|\text{tg } \alpha|}{|\text{sen } \alpha|} = \frac{1}{|\cos \alpha|} \Rightarrow |\text{tg } \alpha| = \frac{|\text{sen } \alpha|}{|\cos \alpha|}$$

A análise dos sinais de tg α, sen α e cos α e o estudo dos casos particulares nos permite concluir que:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Função cotangente

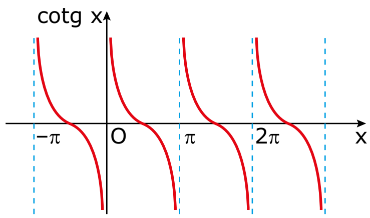
Definiremos a função cotangente utilizando as funções seno e cosseno da seguinte forma:

$$\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Como consequência imediata, temos:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha},\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$.

A função cotangente é periódica, e seu período é π.

OBSERVAÇÃO

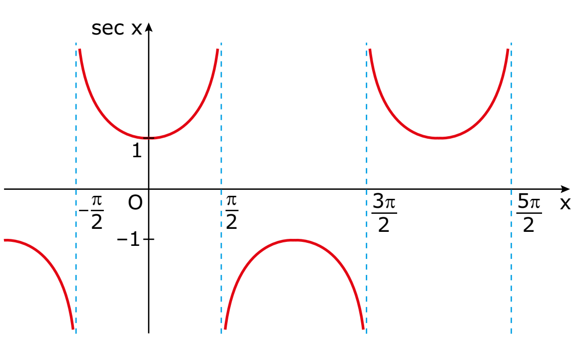
$$f(x) = \text{cotg }(mx + n) \Rightarrow p = \frac{\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

Função secante

Definiremos a função secante utilizando a função cosseno, da seguinte forma:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função secante é periódica, e seu período é 2π.

OBSERVAÇÃO

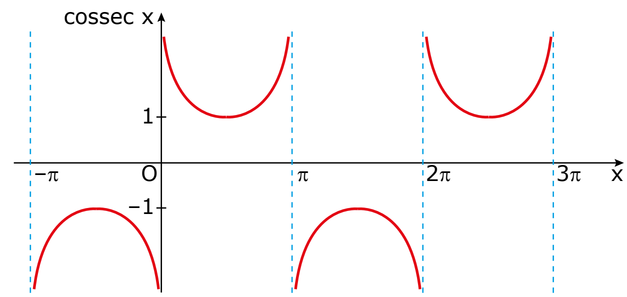
$$f(x) = \sec (mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

Função cossecante

Definiremos a função cossecante utilizando a função seno, da seguinte forma:

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função cossecante é periódica, e seu período é 2π.

OBSERVAÇÃO

$$f(x) = \text{cossec }(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

RELAÇÃO ENTRE SECANTE E TANGENTE E ENTRE COSSECANTE E COTANGENTE

Dividindo os membros de $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ por $\cos^2 \alpha$, sendo $\cos \alpha \neq 0$, temos:

$$\frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

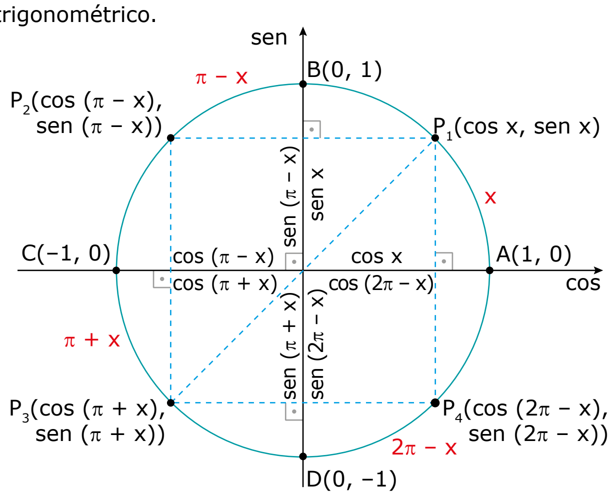
$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Analogamente, dividindo por $\text{sen}^2 \alpha$, sendo $\text{sen } \alpha \neq 0$, temos:

$$1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cossec}^2 \alpha,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Consideremos os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 simétricos no ciclo trigonométrico.



Se P_1 determina um arco de medida **x**, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então P_2, P_3 e P_4 determinam, respectivamente, arcos de medidas $\pi - x$, $\pi + x$ e $2\pi - x$.

Pelas definições de seno e de cosseno, temos:

$P_1(\cos x, \text{sen } x)$;

$P_2(\cos(\pi - x), \text{sen }(\pi - x))$;

$P_3(\cos(\pi + x), \text{sen }(\pi + x))$ e

$P_4(\cos(2\pi - x), \text{sen }(2\pi - x))$.

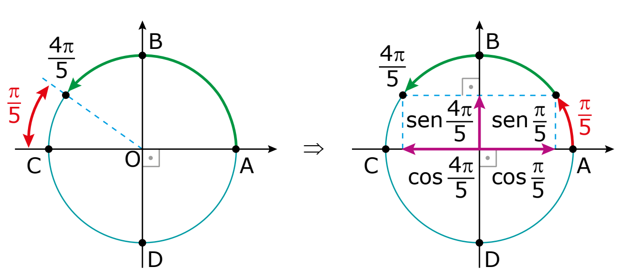
Aplicando as simetrias das coordenadas, obtemos:

Pontos	Abscissas	Ordenadas
P_1 e P_2	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\text{sen }(\pi - x) = \text{sen } x$
P_1 e P_3	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\text{sen }(\pi + x) = -\text{sen } x$
P_1 e P_4	$\cos(2\pi - x) = \cos x$	$\text{sen }(2\pi - x) = -\text{sen } x$

Tais relações são válidas para todo número real **x**.

Exemplos:

1º) Reduzindo $\frac{4\pi}{5}$ ao 1º quadrante, temos:



$$\text{sen } \frac{4\pi}{5} = \text{sen } \frac{\pi}{5}; \quad \cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5};$$

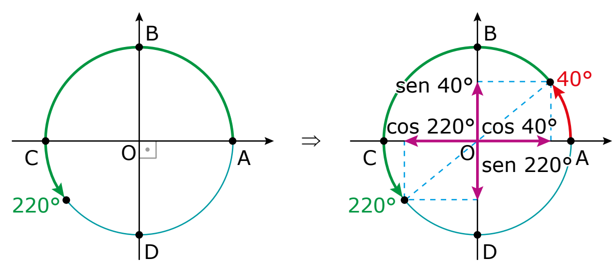
$$\text{tg } \frac{4\pi}{5} = \frac{\text{sen } \frac{4\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{5}}{-\cos \frac{\pi}{5}} \Rightarrow \text{tg } \frac{4\pi}{5} = -\text{tg } \frac{\pi}{5};$$

$$\text{cotg } \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{\text{tg } \frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{-\text{tg } \frac{\pi}{5}} \Rightarrow \text{cotg } \frac{4\pi}{5} = -\text{cotg } \frac{\pi}{5};$$

$$\sec \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{5}} \Rightarrow \sec \frac{4\pi}{5} = -\sec \frac{\pi}{5};$$

$$\text{cossec } \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{\text{sen } \frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{5}} \Rightarrow \text{cossec } \frac{4\pi}{5} = \text{cossec } \frac{\pi}{5};$$

2º) Reduzindo 220° ao 1º quadrante, temos:

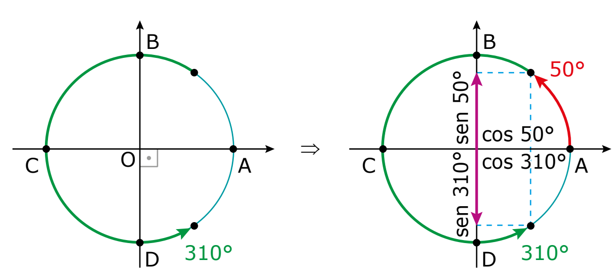


sen 220° = –sen 40°; cos 220° = –cos 40°;

tg 220° = tg 40°; cotg 220° = cotg 40°;

sec 220° = –sec 40°; cossec 220° = –cossec 40°;

3º) Reduzindo 310° ao 1º quadrante, temos:



sen 310° = –sen 50°; cos 310° = cos 50°;

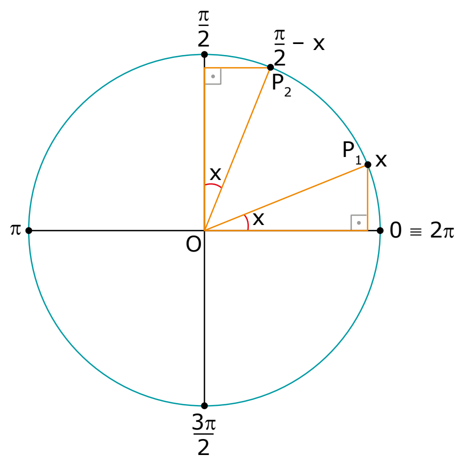
tg 310° = –tg 50°; cotg 310° = –cotg 50°;

sec 310° = sec 50°; cossec 310° = –cossec 50°;

RELAÇÕES ENTRE ARCOS COMPLEMENTARES

Considerando um arco de medida **x**, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sabemos que seu arco complementar tem medida $\frac{\pi}{2} - x$.

No ciclo trigonométrico, temos



Pelas definições de seno e cosseno, temos:

$P_1(\cos x, \text{sen } x)$ e $P_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

Da congruência dos dois triângulos retângulos anteriores, obtemos:

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x}$$

Tais relações são válidas para todo número real **x**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Provar que $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$ para todo **x** real, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução:

$$(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = \text{cossec}^2 (x).\text{sen}^2 (x)$$
$$= \frac{1}{\text{sen}^2 x}.\text{sen}^2 x = 1$$

02. Provar que $\text{tg } x + \text{cotg } x = \sec (x).\text{cossec} (x)$ para todo **x** real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Resolução:

$$\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x.\text{sen } x}$$
$$= \frac{1}{\cos x.\text{sen } x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\text{sen } x}$$
$$= \sec (x).\text{cossec} (x)$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. FCSJ (UEPB) Sendo $f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x$, o valor de $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ é:

A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) $-\sqrt{2}$
D) −1
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

02. KZQW (FGV-SP) Sabendo que o valor da secante de **x** é dado por $\sec x = \frac{5}{4}$, em que **x** pertence ao intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, podemos afirmar que os valores de cos x, sen x e tg x são, respectivamente,

A) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$ e $-\frac{3}{4}$.
B) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$.
C) $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ e $-\frac{4}{3}$.
D) $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{3}$.
E) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$.

03. B599 (Mackenzie-SP) Se $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, em que $0° < x < 90°$, então o valor da expressão $y = \frac{\cos x}{\text{tg } x + \sec x}$ é:

A) 0
B) 1
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

04. (UFOP-MG) Se tg x = a, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, é correto afirmar que sen (x) + cos (x) vale:

A) $\frac{-1 - a}{\sqrt{1 + a^2}}$
B) $\frac{1 + a}{\sqrt{1 + a^2}}$
C) $\frac{1 - a}{\sqrt{1 + a^2}}$
D) $\frac{-1 + a}{\sqrt{1 + a^2}}$

05. 4CZT (UFOP-MG) Dado que $\text{sen } 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, o valor de sec 18° é:

A) $\frac{8}{5 + \sqrt{5}}$
B) $\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
C) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}$
D) $\frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

MATEMÁTICA

06. (IFSC-SC) Se $\cos(x) = -\frac{12}{13}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $x \in$ 3º quadrante, então é correto afirmar que o valor de tg (x) é:

A) $-\frac{5}{13}$

B) $-\frac{5}{12}$

C) $\frac{5}{13}$

D) $\frac{5}{12}$

E) 0,334

07. I13E (UFSJ-MG) Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$ é definida, é correto afirmar que ela está sempre igual a

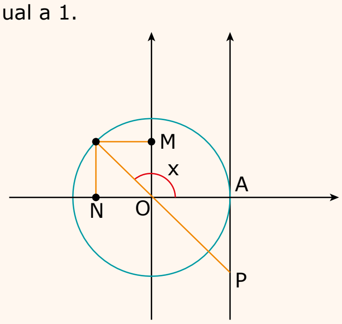
A) 1.

B) 2.

C) sen θ.

D) cos θ.

08. MRT7 (UFRN) Considere a figura a seguir, na qual a circunferência tem raio igual a 1.



Nesse caso, as medidas dos segmentos $\overline{ON}$, $\overline{OM}$ e $\overline{AP}$, correspondem, respectivamente, a

A) sen x, sec x e cotg x.

B) cos x, sen x e tg x.

C) cos x, sec x e cossec x.

D) tg x, cossec x e cos x.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. YVPR (CEFET-MG) Sabendo-se que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pode-se afirmar que tg α vale:

A) $\frac{4}{3}$

B) 1

C) $\frac{5}{6}$

D) $\frac{3}{4}$

02. ULSU (IFSul) Sabendo-se que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$ e que $\alpha \in$ 2º quadrante, o valor da expressão $y = \frac{\text{sen}(90° - \alpha).\tan\alpha}{\sec(180° + \alpha)}$ é:

A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

03. (UFTM-MG) Se $0 < x \le \pi$ e $3\cos(x) + \text{sen}(x) = 3$, pode-se afirmar que:

A) tg $x < -1$

B) $-1 \le$ tg $x < -\frac{1}{2}$

C) $-\frac{1}{2} \le$ tg $x < \frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2} \le$ tg $x < 1$

E) tg $x \ge 1$

04. (FGV) Se $\cos x + \sec(-x) = t$, então, $\cos^2 x + \sec^2 x$ é igual a:

A) 1

B) $t^2 + 2$

C) t^2

D) $t^2 - 2$

E) $t^2 + 1$

05. TC35 (UPE) Num triângulo retângulo, temos que tg x = 3. Se **x** é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de cos x?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

06. Z1PG (IFCE) Se $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então o valor de $\frac{\sec^2 x - \text{tg}^2 x}{1 - \text{cossec}\,x}$ é:

A) $-\frac{1}{2}$

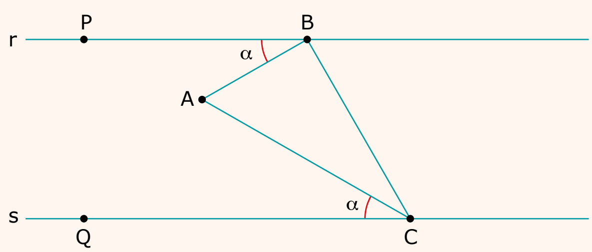
B) -1

C) $\frac{1}{2}$

D) 1

E) 0

07. 98MR (Ibmec-SP) Na figura, em que as retas **r** e **s** são paralelas, **A** é um ponto que dista 1 de **r** e 2 de **s**. Dada uma medida α, em graus, tal que $0 < \alpha < 90$, tomam-se os pontos **B** e **P** sobre **r** e **C** e **Q** sobre **s** tais que $m(A\hat{B}P) = m(A\hat{C}Q) = \alpha$.



Nessas condições, a área do triângulo ABC é igual a

A) tg α.

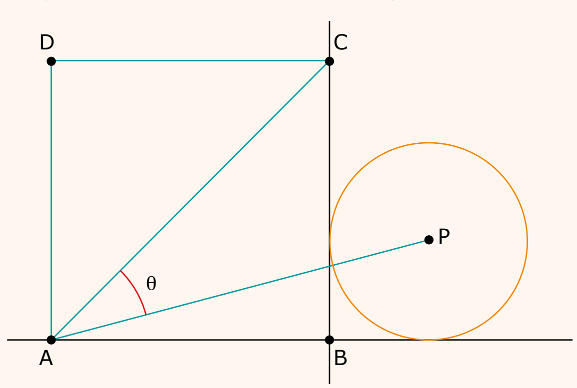
B) 2tg α.

C) (tg α)(cotg α).

D) cotg α.

E) 2cotg α.

08. FAH8 (UERJ–2018) No esquema a seguir, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro **P** e raio **r**, tangente às retas AB e BC. O lado do quadrado mede 3r.



A medida θ do ângulo $C\hat{A}P$ pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha) - \text{tg}(\beta)}{1 + \text{tg}(\alpha).\text{tg}(\beta)}$$

O valor da tangente de θ é igual a:

A) 0,65

B) 0,60

C) 0,55

D) 0,50

09. (Fatec-SP) Se **f** é uma função real definida por $f(x) = \frac{2\,.\,\text{tg}\,x}{1 + \text{tg}^2 x}$, então f(x) é igual a

A) cosec 2x.

B) sec 2x.

C) tg 2x.

D) cos 2x.

E) sen 2x.

10. H4GW (UNIFESP) Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por f(x) = sen x.

Considere as afirmações seguintes:

1. A função f(x) é uma função par, isto é, f(x) = f(–x), para todo **x** real.
2. A função f(x) é periódica de período 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo **x** real.
3. A função f(x) é sobrejetora.
4. $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

São verdadeiras as afirmações

A) 1 e 3, apenas.

B) 3 e 4, apenas.

C) 2 e 4, apenas.

D) 1, 2 e 3, apenas.

E) 1, 2, 3 e 4.

11. GNVJ (AFA -SP) Considere **A** o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x}$.

Sobre a função **f**, é correto afirmar que

A) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B) é periódica com período igual a π.

C) é decrescente se

$x \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D) é ímpar.

SEÇÃO ENEM

01. O lucro mensal de uma empresa, em reais, é dado por

$$L(t) = 10\,000 + \frac{1\,000}{\sec\left(\frac{\pi t}{6}\right)}$$

em que **t** representa os meses do ano. O lucro dessa empresa, em reais, no mês de fevereiro, é de:

A) 9 000

B) 9 500

C) 10 000

D) 10 500

E) 11 000

02. Carlos, administrador de empresas, está realizando um trabalho de pesquisa sobre duas empresas concorrentes **A** e **B**. Nesse trabalho, ele está usando várias informações sobre cada uma delas, como lucro mensal, quantidade de funcionários e de clientes.

O lucro ao longo de um ano de cada empresa, em milhares de reais, é fornecido pela seguinte função do tempo **t**, em meses, sendo t = 1 correspondente ao mês de janeiro:

$$L_A(t) = 200 + 50.\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$L_B(t) = 300 - 50.\text{cossec}\left(\frac{\pi t}{24}\right)$$

O orientador do trabalho de pesquisa de Carlos pediu para ele fazer uma análise mensal sobre os lucros de cada uma das empresas. Portanto, Carlos poderá afirmar que, no mês de abril,

A) a empresa **A** lucrou R$ 20 000,00 a mais que a empresa **B**.

B) a empresa **B** lucrou R$ 20 000,00 a mais que a empresa **A**.

C) a empresa **A** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **B**.

D) a empresa **B** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **A**.

E) as duas empresas tiveram lucros iguais.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. D
- 04. A
- 05. C
- 06. D
- 07. A
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. D
- 04. D
- 05. E
- 06. A
- 07. E
- 08. B
- 09. E
- 10. C
- 11. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Funções Soma e Fatoração

SENO E COSSENO DA SOMA DE ARCOS

Observe-se que:

$\text{sen}\,(30° + 60°) \neq \text{sen}\,30° + \text{sen}\,60°$, pois $1 \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, $\text{sen}\,(a + b) \neq \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$.

Fórmulas

Quaisquer que sejam os valores de **a** e **b**, valem as seguintes identidades:

I	$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a.\cos b + \text{sen}\,b.\cos a$
II	$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a.\cos b - \text{sen}\,b.\cos a$
III	$\cos\,(a + b) = \cos a.\cos b - \text{sen}\,a.\text{sen}\,b$
IV	$\cos\,(a - b) = \cos a.\cos b + \text{sen}\,a.\text{sen}\,b$

Exemplo:

Calcular sen 75°.

Como 75° = 45° + 30°, tem-se:

$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45° + 30°) \Rightarrow$

$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,45°.\cos 30° + \text{sen}\,30°.\cos 45° \Rightarrow$

$$\text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

SENO E COSSENO DO ARCO DUPLO

Para todo **x**, tem-se:

$$\boxed{\text{sen}\,2x = 2.\text{sen}\,x.\cos x}$$

De fato:

$\text{sen}\,2x = \text{sen}\,(x + x) = \text{sen}\,x.\cos x + \text{sen}\,x.\cos x \Rightarrow$

$\text{sen}\,2x = 2.\text{sen}\,x.\cos x$

Exemplos:

1º) $\text{sen}\,4x = 2.\text{sen}\,2x.\cos 2x$

2º) $\text{sen}\,20° = 2.\text{sen}\,10°.\cos 10°$

3º) $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = 2.\text{sen}\,\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}$

4º) $\text{sen}\,x = 2.\text{sen}\,\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$

Da mesma forma, para todo **x**, tem-se:

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x}$$

De fato:

$\cos 2x = \cos\,(x + x) = \cos x.\cos x - \text{sen}\,x.\text{sen}\,x \Rightarrow$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$

Exemplos:

1º) $\cos 4x = \cos^2 2x - \text{sen}^2\,2x$

2º) $\cos 20° = \cos^2 10° - \text{sen}^2\,10°$

3º) $\cos\frac{\pi}{4} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \text{sen}^2\,\frac{\pi}{8}$

4º) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\,\frac{x}{2}$

Observamos que, ao utilizar a relação fundamental $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$, podemos obter duas outras fórmulas para cos 2x, que são:

$$\boxed{\cos 2x = 2.\cos^2 x - 1}$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2.\text{sen}^2\,x}$$

TANGENTE DA SOMA DE ARCOS

Observe-se que $\text{tg}\,(30° + 120°) \neq \text{tg}\,30° + \text{tg}\,120°$, pois:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \neq \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}$$

Assim, $\text{tg}\,(a + b) \neq \text{tg}\,a + \text{tg}\,b$.

Fórmulas

i) Sendo **a**, **b** e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a.\text{tg}\,b}}$$

Demonstração:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,(a + b)}{\cos\,(a + b)} = \frac{\text{sen}\,a.\cos b + \text{sen}\,b.\cos a}{\cos a.\cos b - \text{sen}\,a.\text{sen}\,b}$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por cos a.cos b, tem-se:

$$\text{tg }(a+b) = \dfrac{\dfrac{\text{sen } a.\cos b}{\cos a.\cos b} + \dfrac{\text{sen } b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b} - \dfrac{\text{sen } a.\text{sen } b}{\cos a.\cos b}} \Rightarrow$$

$$\text{tg }(a+b) = \dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a.\text{tg } b}$$

ii) Sendo **a**, **b** e $a - b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg }(a-b) = \dfrac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a.\text{tg } b}}$$

A demonstração é análoga à anterior.

TANGENTE DO ARCO DUPLO

Sendo **x** e $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg } 2x = \dfrac{2.\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2\, x}}$$

Demonstração:

$$\text{tg } 2x = \text{tg }(x+x) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x.\text{tg } x} = \dfrac{2.\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2\, x}$$

Exemplos:

1º) $\text{tg } 4x = \dfrac{2.\text{tg } 2x}{1 - \text{tg}^2\, 2x}$

2º) $\text{tg } 20° = \dfrac{2.\text{tg } 10°}{1 - \text{tg}^2\, 10°}$

3º) $\text{tg } \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2.\text{tg } \dfrac{\pi}{8}}{1 - \text{tg}^2\, \dfrac{\pi}{8}}$

4º) $\text{tg } x = \dfrac{2.\text{tg } \dfrac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2\, \dfrac{x}{2}}$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE SENOS E COSSENOS

A fatoração de uma expressão é um recurso muito importante para a simplificação de frações, bem como para a resolução de equações e de inequações.

Dedução de fórmulas

Sejam as fórmulas:

- sen (a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a;
- sen (a − b) = sen a.cos b − sen b.cos a;
- cos (a + b) = cos a.cos b − sen a.sen b;
- cos (a − b) = cos a.cos b + sen a.sen b.

A partir delas, é possível concluir que:

i) sen (a + b) + sen (a − b) = 2.sen a.cos b

ii) sen (a + b) − sen (a − b) = 2.sen b.cos a

iii) cos (a + b) + cos (a − b) = 2.cos a.cos b

iv) cos (a + b) − cos (a − b) = −2.sen a.sen b

Essas fórmulas transformam somas e diferenças em produtos. Para facilitar o seu uso, convém escolher novas variáveis **p** e **q**, tal que a + b = p e a − b = q.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{p+q}{2} \text{ e } b = \dfrac{p-q}{2}$$

Assim, as fórmulas ficam:

I	$\text{sen } p + \text{sen } q = 2.\text{sen } \dfrac{p+q}{2}.\cos \dfrac{p-q}{2}$
II	$\text{sen } p - \text{sen } q = 2.\text{sen } \dfrac{p-q}{2}.\cos \dfrac{p+q}{2}$
III	$\cos p + \cos q = 2.\cos \dfrac{p+q}{2}.\cos \dfrac{p-q}{2}$
IV	$\cos p - \cos q = -2.\text{sen } \dfrac{p+q}{2}.\text{sen } \dfrac{p-q}{2}$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE TANGENTES

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \dfrac{\text{sen } p}{\cos p} + \dfrac{\text{sen } q}{\cos q} = \dfrac{\text{sen } p.\cos q + \text{sen } q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \dfrac{\text{sen }(p+q)}{\cos p.\cos q}$$

Assim, sendo **p** e **q** $\neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg } p + \text{tg } q = \dfrac{\text{sen }(p+q)}{\cos p.\cos q}}$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$\boxed{\text{tg } p - \text{tg } q = \dfrac{\text{sen }(p-q)}{\cos p.\cos q}}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 2HMZ (Unifor-CE) O período da função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ é:

A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi}{2}$

E) $2\frac{\pi}{4}$

02. (UFAM) Dado $\text{tg}\,\frac{x}{2} = 2$, tg x é igual a:

A) $-\frac{3}{5}$

B) $\frac{4}{5}$

C) $-\frac{4}{3}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $-\frac{5}{3}$

03. (UFC-CE) Se $\text{sen}\,x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, então o valor de sen 2x é:

A) $-\frac{2}{3}$

B) $-\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$

04. ADG4 (UFJF-MG) Considere as seguintes afirmativas:

I. $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$

II. $\text{sen}^2\,a + \cos^2 a = 1$

III. $\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a.\cos a$

IV. $\text{sen}\,a.b = \text{sen}\,a.\cos b$

Pode-se concluir que

A) todas as afirmativas são corretas.

B) apenas a afirmativa II é correta.

C) apenas a afirmativa III é correta.

D) as afirmativas II e III são corretas.

E) as afirmativas I e IV são corretas.

05. 1KZH (EEAR) O valor de cos 735° é:

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}$

06. 400U (UFAM) Dada a expressão:

$$\frac{\text{sen}34°.\cos 26° + \text{sen}26°.\cos 34°}{\cos 57°.\cos 27° + \text{sen}57°.\text{sen}27°}$$

o seu valor é:

A) $\sqrt{3}$

B) 1

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

07. DZPT (EEAR–2019) Simplificando a expressão $\text{sen}\,(2\pi - x) + \text{sen}\,(3\pi + x)$, obtém-se:

A) sen x

B) –sen x

C) 2sen x

D) –2sen x

08. I5DF (IFCE) Se $\text{sen}\,x = -\frac{2}{3}$, cos 2x.sen(–x) é:

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{2}{27}$

C) $-\frac{2}{9}$

D) $-\frac{2}{27}$

E) $-\frac{9}{27}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. A3B9 (UEG-GO) Considerando-se que $\text{sen}\,5° = \frac{2}{25}$, tem-se que cos 50° é:

A) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621} + 2\right)$

B) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621} - 2\right)$

C) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(1 - \sqrt{621}\right)$

D) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621} - 1\right)$

02. (PUC Rio) Sabendo que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\text{sen}\,x = -\frac{1}{3}$, é correto afirmar que sen 2x é:

A) $-\frac{2}{3}$

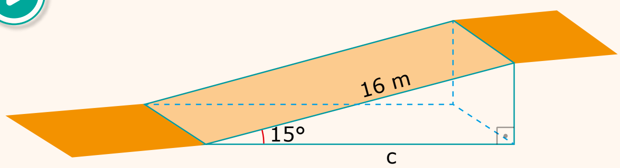
B) $-\frac{1}{6}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

D) $\frac{1}{27}$

E) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

03. 4412 (UFSM-RS) Para melhorar as condições de acessibilidade a uma clínica médica, foi construída uma rampa conforme indicado na figura.



O comprimento horizontal **c** da rampa, em metros, pode ser expresso por:

A) $4(2-\sqrt{3})$

B) $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$

C) $8\sqrt{3}$

D) $4(2+\sqrt{3})$

E) $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$

04. (UFPB) É dada a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos 4x.\cos 2x + \text{sen } 4x.\text{sen } 2x$. Então, o seu período, em radianos, é:

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2π D) π E) $\frac{\pi}{3}$

05. UJ6D (UFJF-MG) Seja $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ uma medida de ângulo em radianos tal que

$\cos x + \text{sen } x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\cos x - \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

O valor de tg 2x é:

A) $4-\sqrt{15}$

B) $\frac{\sqrt{15}}{15}$

C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

D) $\sqrt{15}$

E) $4\sqrt{15}$

06. (UFU-MG) O valor de $\left[\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\frac{\pi}{12}\right]^2$ é:

A) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

07. ØHDW (UFPR–2020) Sejam x, $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tais que $\cos(x) = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}(y) = \frac{5}{13}$. Podemos concluir que tg (x + y) é igual a

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{7}{6}$.

C) $\frac{8}{9}$.

D) $\frac{25}{52}$.

E) $\frac{56}{33}$.

08. ZNTJ (Mackenzie-SP) Se tg $\alpha = 2$, então cos 2α é igual a:

A) $-\frac{3}{5}$

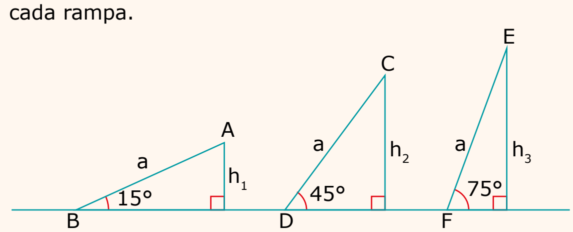
B) $-\frac{2}{5}$

C) $-\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{5}$

09. LS07 (UERJ) Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento **a**, mas com inclinações diferentes. As figuras a seguir representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa.



Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida **A**, **C** e **E** são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3, conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a:

A) $h_3\sqrt{3}$ B) $h_3\sqrt{2}$ C) $2h_3$ D) h_3

10. I4EW (Mackenzie-SP) Se sen $x = \frac{4}{5}$ e tg x < 0, então tg 2x vale:

A) $\frac{24}{7}$

B) $-\frac{24}{7}$

C) $-\frac{9}{3}$

D) $\frac{9}{3}$

E) $-\frac{4}{3}$

11. (CEFET-MG) A função

$f(x) = \sec x \,.\, \text{sen } 2x \,.\, \text{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\cos(\pi - x).\text{tg}^2\, x$ deve ser reescrita como produto de uma constante pelas funções seno e cosseno, calculadas no mesmo valor **x**, como $f(x) = k.\text{sen}^m\, x \,.\, \cos^n x$.

O valor de **m** é:

A) –2

B) –1

C) 1

D) 2

E) 3

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. A	05. C	07. D
02. C	04. D	06. B	08. B

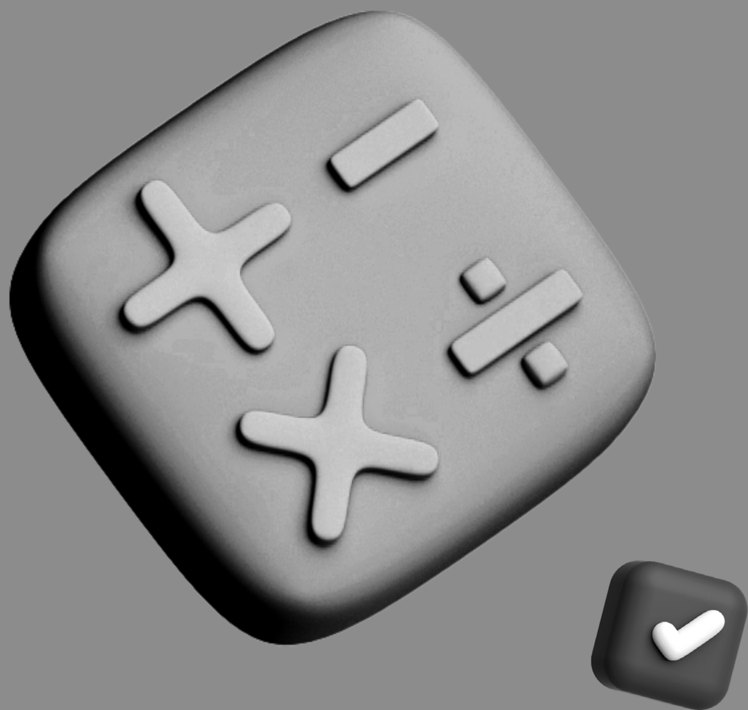
Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	04. D	07. E	10. A
02. E	05. B	08. A	11. E
03. E	06. D	09. D	

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %

Bernoulli
Sistema de Ensino



MATEMÁTICA

SUMÁRIO

FRENTE A

3	Módulo 08:	Função Afim
6	Módulo 09:	Função Quadrática
8	Módulo 10:	Função Composta e Função Inversa
10	Módulo 11:	Inequações

FRENTE B

13	Módulo 08:	Circunferência
16	Módulo 09:	Triângulo Retângulo
18	Módulo 10:	Lei dos Senos e Lei dos Cossenos
20	Módulo 11:	Áreas de Polígonos

FRENTE C

23	Módulo 08:	Arcos e Ciclo Trigonométrico
24	Módulo 09:	Funções Seno e Cosseno
25	Módulo 10:	Outras Funções Trigonométricas
26	Módulo 11:	Funções Soma e Fatoração

MATEMÁTICA

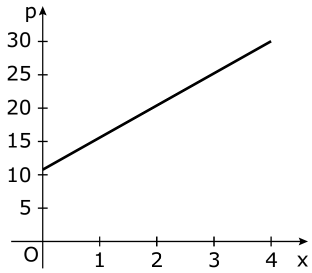
FRENTE A

Caderno Extra

MÓDULO 08

FUNÇÃO AFIM

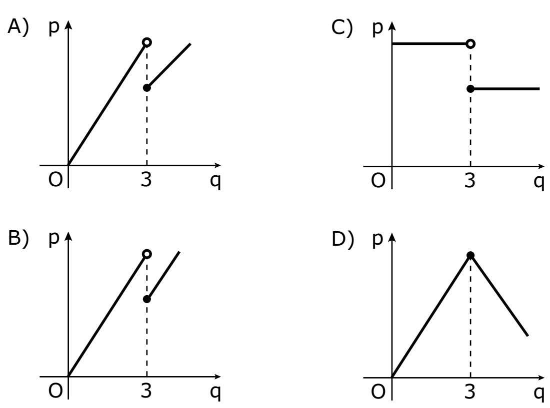
01. (UFPE) O gráfico a seguir ilustra o peso **p**, em gramas, de uma carta, incluindo o peso do envelope, em termos do número **x** de folhas utilizadas. O gráfico é parte de uma reta e passa pelo ponto com abscissa 0 e ordenada 10,2 e pelo ponto com abscissa 4 e ordenada 29,4.



Qual o peso de uma folha?

A) 4,2 g
B) 4,4 g
C) 4,6 g
D) 4,8 g
E) 5,0 g

02. (UFJF-MG) Um açougue está fazendo a seguinte promoção na venda de alcatra: 25% de desconto sobre o preço total da compra de três quilos ou mais. O esboço do gráfico que melhor representa o total pago **p** em função da quantidade comprada **q** é:



03. (UEG-GO) Em uma fábrica, o custo de produção de 500 unidades de camisetas é de R$ 2 700,00, enquanto o custo para produzir 1 000 unidades é de R$ 3 800,00. Sabendo-se que o custo das camisetas é dado em função do número produzido por meio da expressão $C(x) = qx + b$, em que **x** é a quantidade produzida, e **b** é o custo fixo, determine:

A) Os valores de **b** e de **q**.

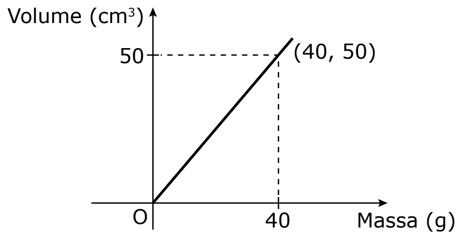
B) O custo de produção de 800 camisetas.

04. (UFG-GO) Duas empresas financeiras, E_1 e E_2, operam emprestando um capital **C**, a ser pago numa única parcela após um mês. A empresa E_1 cobra uma taxa fixa de R$ 60,00 mais 4% de juros sobre o capital emprestado, enquanto a empresa E_2 cobra uma taxa fixa de R$ 150,00 mais juros de 3% sobre o capital emprestado. Dessa forma,

A) determine as expressões que representam o valor a ser pago em função do capital emprestado, nas duas empresas, e esboce os respectivos gráficos.

B) calcule o valor de **C**, de modo que o valor a ser pago seja o mesmo, nas duas empresas.

05. (Unesp) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.



Com base nos dados do gráfico, determine:

A) A lei da função apresentada no gráfico.

B) A massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool.

06. (PUC-Campinas-SP) Para produzir um número **n** de peças (**n** inteiro positivo), uma empresa deve investir R$ 200 000,00 em máquinas e, além disso, gastar R$ 0,50 na produção de cada peça. Nessas condições, o custo **C**, em reais, da produção de **n** peças é uma função de **n** dada por:

A) C(n) = 200 000 + 0,50

B) C(n) = 200 000n

C) C(n) = $\frac{n}{2}$ + 200 000

D) C(n) = 200 000 – 0,50n

E) C(n) = $\frac{200\ 000 + n}{2}$

07. (PUC Minas) Em certa cidade, durante os dez primeiros dias do mês de julho de 2003, a temperatura, em graus Celsius, foi decrescendo de forma linear de acordo com a função T(t) = −2t + 18, em que **t** é o tempo medido em dias. Nessas condições, pode-se afirmar que, no dia 8 de julho de 2003, a temperatura nessa cidade foi

A) 0 °C.

B) 2 °C.

C) 3 °C.

D) 4 °C.

08. (PUC Minas) A receita **R**, em reais, obtida por uma empresa com a venda de **q** unidades de certo produto, é dada por R(q) = 115q, e o custo **C**, em reais, para produzir **q** dessas unidades, satisfaz a equação C(q) = 90q + 760. Para que haja lucro, é necessário que a receita **R** seja maior que o custo **C**. Então, para que essa empresa tenha lucro, o número mínimo de unidades desse produto que ela deverá vender é igual a

A) 28.

B) 29.

C) 30.

D) 31.

09. (PUC Minas) Um motorista de táxi, que cobra R$ 3,70 a bandeirada e R$ 1,20 por quilômetro rodado, faz duas corridas. Na primeira delas, percorre uma distância três vezes maior do que na segunda. Nessas condições, é correto afirmar que o custo da primeira corrida é

A) igual ao triplo do custo da segunda.

B) menor do que o triplo do custo da segunda.

C) maior do que o triplo do custo da segunda.

D) igual ao custo da segunda.

10. (PUC-SP) Uma empresa concessionária de telefonia móvel oferece as seguintes opções de contratos:

X: R$ 60,00 pela assinatura mensal e mais R$ 0,30 por minuto de conversação;

Y: R$ 40,00 pela assinatura mensal e mais R$ 0,80 por minuto de conversação.

Nessas condições, a partir de quantos minutos de conversação, em um mês, a opção pelo contrato **X** se torna mais vantajosa do que a opção por **Y**?

A) 20

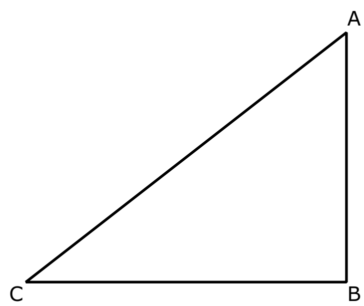
B) 25

C) 40

D) 45

E) 60

11. (PUC Minas) Uma pessoa encontra-se no aeroporto (ponto **A**) e pretende ir para sua casa (ponto **C**), distante 20 km do aeroporto, utilizando um táxi cujo valor da corrida, em reais, é calculado pela expressão V(x) = 12 + 1,5x, em que **x** é o número de quilômetros percorridos.



Dado: $\sqrt{3}$ = 1,7.

Se $\hat{B}$ = 90°, $\hat{C}$ = 30°, e o táxi fizer o percurso AB + BC, conforme indicado na figura, essa pessoa deverá pagar pela corrida

A) R$ 40,50.

B) R$ 48,00.

C) R$ 52,50.

D) R$ 56,00.

12. (UEL-PR) O gerente de uma agência de turismo promove passeios de bote para descer cachoeiras. Ele percebeu que quando o preço pedido para esse passeio era R$ 25,00, o número médio de passageiros por semana era de 500. Quando o preço era reduzido para R$ 20,00, o número médio de fregueses por semana sofria um acréscimo de 100 passageiros. Considerando que essa demanda seja linear, se o preço for reduzido para R$ 18,00, o número médio de passageiros esperado por semana será

A) 360.

B) 540.

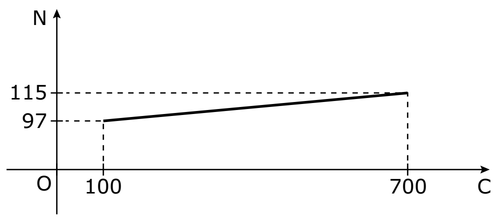
C) 640.

D) 700.

E) 1 360.

13. (UFF-RJ) Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o SO_2 (dióxido de enxofre). Uma pesquisa realizada na Noruega e publicada na revista *Science*, em 1972, concluiu que o número **N** de mortes por semana, causadas pela inalação de SO_2, estava relacionado com a concentração média **C**, em mg/m^3, do SO_2, conforme o gráfico a seguir:

Nota: Os pontos (C, N) dessa relação estão sobre o segmento de reta da figura.



Com base nos dados apresentados, a relação entre **N** e **C** ($100 \leq C \leq 700$) pode ser dada por:

A) N = 100 – 700C

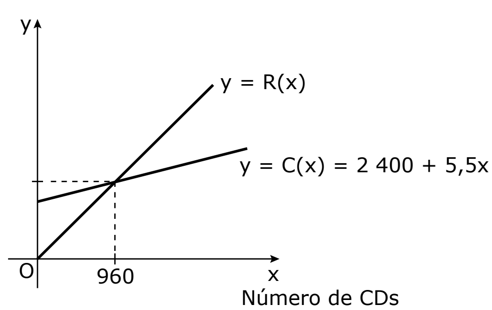
B) N = 94 + 0,03C

C) N = 97 + 0,03C

D) N = 115 – 94C

E) N = 97 + 600C

14. (Mackenzie-SP) A figura mostra os gráficos das funções custo total C(x) e receita total R(x) de uma empresa produtora de CDs. Se, produzindo e comercializando 960 CDs, o custo e a receita são iguais, o lucro pela venda de 2 000 CDs é



A) 1 400.

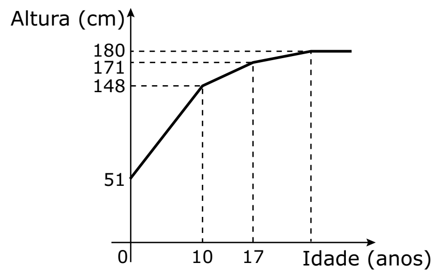
B) 2 500.

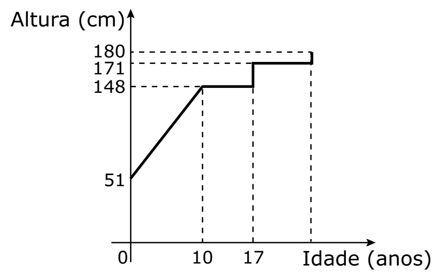
C) 3 000.

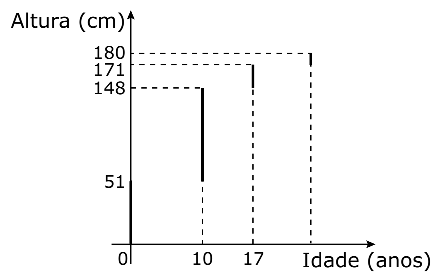
D) 2 600.

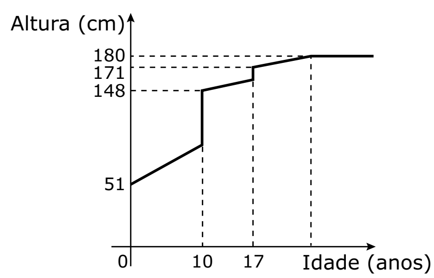
E) 1 580.

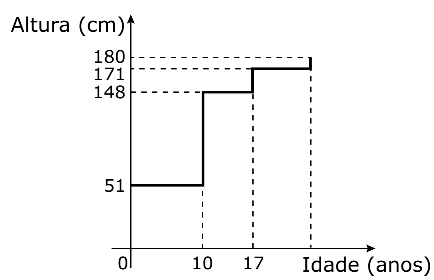
15. (Enem) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas. Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

A)


B)


C)


D)


E)


MATEMÁTICA

GABARITO

01. D

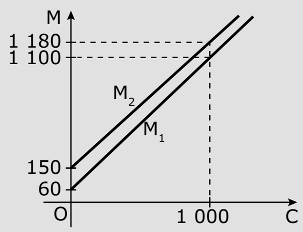
02. A

03. A) $q = \frac{11}{5}$ e $b = 1\,600$

B) C(800) = R$ 3 360,00

04. A) $M_1 = 1{,}04C + 60$

$M_2 = 1{,}03C + 150$



B) R$ 9 000,00

05. A) $v = \frac{5}{4}m$, com $m \geq 0$

B) 24 g

06. C

07. B

08. D

09. B

10. C

11. C

12. C

13. B

14. D

15. A

MÓDULO 09

FUNÇÃO QUADRÁTICA

01. (UFMG) Seja **M** o conjunto dos números naturais **n** tais que $2n^2 - 75n + 700 \leq 0$. Assim, é correto afirmar que

A) apenas um dos elementos de **M** é múltiplo de 4.

B) apenas dois dos elementos de **M** são primos.

C) a soma de todos os elementos de **M** é igual a 79.

D) **M** contém exatamente seis elementos.

02. (UFMG) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função real com duas raízes reais e distintas. Sabendo-se que $f(1) > 0$, é correto afirmar que

A) se $a > 0$, então as raízes são maiores que 1.

B) se $a > 0$, então $x = 1$ está entre as raízes de $f(x)$.

C) se $a < 0$, então $x = 1$ está entre as raízes de $f(x)$.

D) se $a > 0$, então as raízes são menores que 1.

03. (PUC Minas) Certo posto vende diariamente uma média de 10 000 litros de gasolina ao preço de R$ 2,60 por litro. Um estudo demonstrou que uma redução de 1 centavo no preço do litro corresponde a um aumento de 50 litros nas vendas diárias. Com base nesse estudo, o preço por litro de gasolina que garante a maior receita é

A) R$ 2,20.

B) R$ 2,30.

C) R$ 2,40.

D) R$ 2,50.

04. (FGV-SP) Quantos números inteiros satisfazem a inequação $x^2 - 10x < -16$?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

05. (UFSM-RS) Durante um passeio noturno de barco, diversão preferida de um grupo de jovens, surgiu uma situação de perigo, em que houve necessidade de disparar um sinalizador para avisar o restante do grupo que ficara no acampamento. A função que descreve o movimento do sinal luminoso é dada por $h(t) = 30t - 3t^2$, em que **h** é a altura do sinal em metros e **t**, o tempo decorrido em segundos, desde o disparo até o momento em que o sinalizador cai na água. Assim, a altura máxima atingida pelo sinalizador e o tempo decorrido até cair na água são, respectivamente

A) 75 m e 10 s.

B) 75 m e 5 s.

C) 74 m e 10 s.

D) 74 m e 5 s.

E) 70 m e 5 s.

06. (UEL-PR) Seja **f** uma função real definida por $f(x) = ax^2 - x - 2$, em que $a > 0$. Se $f(1) < 0$, é correto afirmar que a função **f**

A) possui uma raiz positiva e uma negativa.

B) possui duas raízes positivas.

C) possui duas raízes negativas.

D) não possui raiz real.

E) possui uma única raiz real.

07. (PUC Minas) Uma empresa de turismo fretou um avião com 200 lugares para uma semana de férias, devendo cada participante pagar R$ 500,00 pelo transporte aéreo, acrescidos de R$ 10,00 para cada lugar do avião que ficasse vago. Nessas condições, o número de passagens vendidas que torna máxima a quantia arrecadada por essa empresa é igual a

A) 100.

B) 125.

C) 150.

D) 180.

08. (UECE) A função quadrática **f** assume seu mínimo quando $x = 2$ e é tal que seu gráfico contém os pontos $(-1, 0)$ e $(0, -5)$. O valor de $f(4)$ é

A) -4.

B) -5.

C) 5.

D) 4.

09. (PUC-Campinas-SP) Seja um círculo cujo raio mede **x** (em certa unidade apropriada). Considerando-se $\pi = 3{,}14$, pode-se expressar seu comprimento **C** e sua área **A** por, respectivamente, $C = 6{,}28x$ e $A = 3{,}14x^2$. Comparando-se essas duas expressões, conclui-se que

A) $C > A$, para qualquer $x > 0$.

B) $C < A$, para qualquer $x > 0$.

C) $C < A$, para $0 < x < 2$.

D) $C > A$, para $0 < x < 2$.

E) $C = A$, para $x = 1$.

10. (Cesgranrio) A menor solução inteira de $x^2 - 2x - 35 < 0$ é

A) -5.

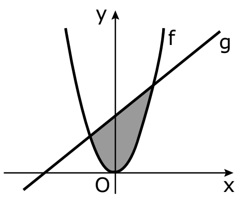
B) -4.

C) -3.

D) -2.

E) -1.

11. (FGV-SP) Na parte sombreada da figura, as extremidades dos segmentos de reta paralelos ao eixo y são pontos das representações gráficas das funções definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 6$, conforme indicado.



A medida do comprimento do maior desses segmentos localizado na região indicada na figura é

A) 6.

B) 6,25.

C) 6,5.

D) 6,75.

E) 7.

12. (UFMG) Seja a função **f**, tal que $f(0) = 4$ e $f(a) = 1$, definida pelas duas expressões:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{se } x \geq \dfrac{a}{2} \\ x + 5, & \text{se } x < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Em relação à função **f**,

1. A) Indique a expressão utilizada no cálculo de $f(0)$ e justifique sua resposta.

   B) Calcule o valor de **b**.

2. Determine o sinal de **a** e seu valor.

3. Determine os valores de **x** tais que $f(x) = 9$.

13. (UFMG) A seção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, são reservados 1,5 m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos. As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.

14. (UFLA-MG) Uma loja vende diariamente 40 unidades de um produto a R$ 50,00 cada uma. Quando esse produto entra em promoção, observa-se que, para cada R$ 1,00 de desconto no preço do produto, as vendas aumentam 10 unidades.

A) Calcule o valor do desconto que faz com que o faturamento seja máximo.

B) Calcule o faturamento máximo que a loja pode obter com essa promoção.

MATEMÁTICA

15. (Enem) Suponha que para um trem trafegar de uma cidade à outra seja necessária a construção de um túnel com altura e largura iguais a 10 m. Por questões relacionadas ao tipo de solo a ser escavado, o túnel deverá ser tal que qualquer seção transversal seja o arco de uma determinada parábola, como apresentado na figura 1. Deseja-se saber qual a equação da parábola que contém esse arco.

Considere um plano cartesiano com centro no ponto médio da base da abertura do túnel, conforme figura 2.

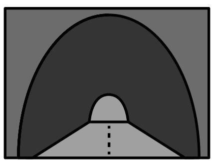


Figura 1
(túnel)

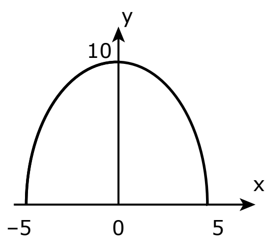


Figura 2

A equação que descreve a parábola é:

A) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

B) $y = \frac{2}{5}x^2 + 10$

C) $y = -x^2 + 10$

D) $y = x^2 - 25$

E) $y = -x^2 + 25$

GABARITO

01. A
02. C
03. B
04. C
05. A
06. A
07. B
08. B
09. D
10. B
11. B

12. 1. A) Suponha que tenha sido utilizada a expressão $f(x) = x + 5$. Assim, teríamos $f(0) = 5$, o que contradiz a hipótese do problema. Portanto, a expressão utilizada foi $f(x) = x^2 - ax + b$.

B) A expressão utilizada para o cálculo de $f(0)$ foi $f(x) = x^2 - ax + b$, conforme o item A. Assim, $f(0) = b$. Portanto, $b = 4$.

2. O sinal de **a** é negativo, e o seu valor é –4.

3. 1

13. 2,76 m

14. A) O desconto de 23 reais produz faturamento máximo.

B) 7 290 reais

15. A

MÓDULO 10

FUNÇÃO COMPOSTA E FUNÇÃO INVERSA

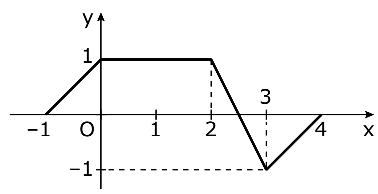
01. (UFV-MG) Se **f** e **g** são funções reais tais que $f(x) = 2x - 2$ e $f(g(x)) = x + 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $g(f(2))$ é igual a

A) 4.
B) 1.
C) 0.
D) 2.
E) 3.

02. (UFC-CE) Para cada número real $x \neq 1$, define-se $f(x)$ por $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Então, $f(f(x))$ é sempre igual a:

A) x
B) $-x$
C) $f(x)$
D) $f(x)^2$
E) $f(x^2)$

03. (UEPG-PR) O gráfico representa a função $f(x)$, definida no intervalo $[-1, 4]$. Considerando que $g(x) = f(x - 2)$, assinale o que for correto.



01. $g(1) + g(4) = 1$
02. $g(5) = -1$
04. $f(g(2)) = 1$
08. $g(f(0)) = 0$

Soma (   )

04. (FEI-SP) Em relação à função polinomial $f(x) = 2x^3 - 3x$, é válido afirmar-se que:

A) $f(-x) = f(x)$
B) $f(-x) = -f(x)$
C) $f(x^2) = (f(x))^2$
D) $f(ax) = af(x)$
E) $f(ax) = a^2f(x)$

05. (Unimontes-MG) A inversa da função bijetora, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, é:

A) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{se } x \geq -1 \\ x+1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

B) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{se } x \geq 0 \\ x+1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

C) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{se } x \geq -1 \\ x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

D) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{se } x \geq 0 \\ x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

06. (Unifor-CE) Sejam **f** e **g** funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = -2x + 3$ e $g(f(x)) = 4x$. Nessas condições, a função inversa de **g** é dada por:

A) $g^{-1}(x) = \dfrac{6+x}{2}$

B) $g^{-1}(x) = \dfrac{6-x}{2}$

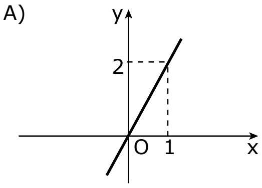
C) $g^{-1}(x) = \dfrac{6+x}{4}$

D) $g^{-1}(x) = \dfrac{2}{6-2x}$

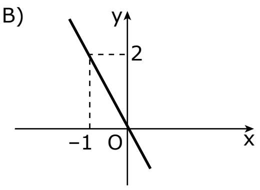
E) $g^{-1}(x) = \dfrac{2}{6+2x}$

07. (PUC-Campinas-SP) Seja **f** a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x$. Um esboço gráfico da função f^{-1}, inversa de **f**, é:

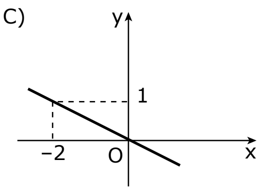
A)



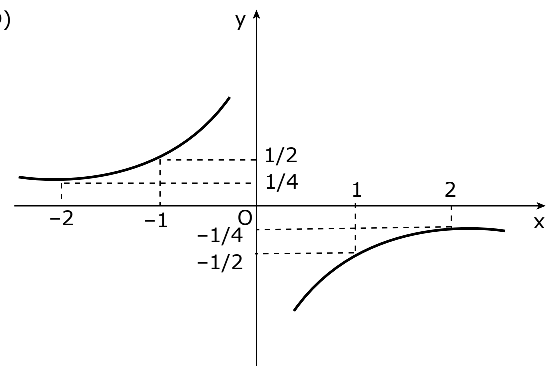
B)



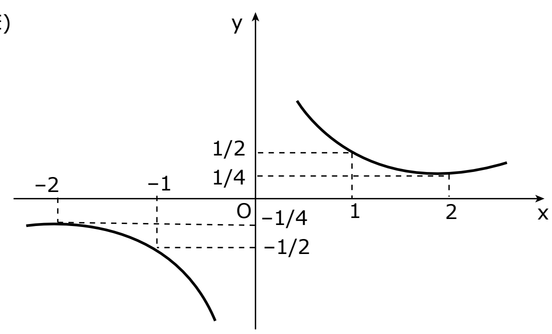
C)



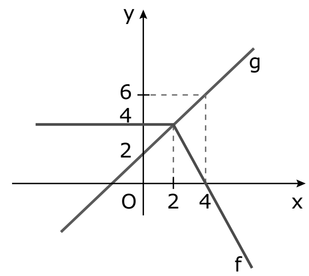
D)



E)



08. (UFU-MG) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão esboçados a seguir:



Definindo $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$, é correto afirmar que

A) $(f \circ h)(4) = g^{-1}(4)$.

B) a função **h** nunca se anula.

C) $(f \circ h)(0) = (g \circ h)(0)$.

D) **h** é crescente no intervalo $]-\infty, 2]$.

09. (Mackenzie-SP) Se **f** e **g** são funções reais definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 5x + 2}$, então o domínio da função composta $f \circ g$ é o conjunto:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{1}{2} \vee x \ge 2\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < \frac{1}{2} \vee x > 2\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 2\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \vee x > 2\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le \frac{1}{2} \vee x \ge 2\}$

10. (UFV-MG) Seja = {A, B, C, ..., Y, Z}, conjunto das letras do alfabeto brasileiro (incluindo **K**, **W**, **Y**). Considere Ω_1 um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \Omega_1$ a função definida por $f(A) = 3$, $f(B) = 27$, $f(C) = 243$, $f(D) = 2\ 187$ e assim por diante. Suponha, ainda, que **f** é bijetora e que f^{-1} é sua inversa. Calculando

$$f^{-1}(3)\ f^{-1}(3^{23})\ f^{-1}(3^{9})\ f^{-1}(3^{25})$$

e mantendo essa ordem, obtém-se a palavra

A) A N E L

B) A L G O

C) A L E M

D) A M E I

E) A N I L

11. (UFMS-RS) Sejam as seguintes funções reais: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = x^2$; e **m** e **n** as funções compostas definidas por: $m(x) = f \circ g \circ h(x)$ e $n(x) = f \circ h \circ g(x)$. Sabendo-se que o gráfico da função m(x) intercepta o eixo das abscissas em x = 1, o eixo das ordenadas em y = 1 e que o ponto (1, 4) pertence ao gráfico da função n(x), o valor numérico da expressão (a − b − c) é igual a

A) 0.

B) 1.

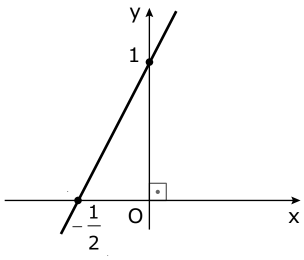
C) 2.

D) 3.

E) 4.

MATEMÁTICA

12. (UNIFESP) Considere as funções dadas por $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $g(x) = ax + b$, sendo o gráfico de **g** fornecido na figura.



O valor de f $(g^{-1}(2))$ é:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) 1

GABARITO

01. E	07. C
02. A	08. C
03. Soma = 15	09. B
04. B	10. C
05. A	11. B
06. B	12. C

MÓDULO 11

INEQUAÇÕES

01. (UEPG-PR) O conjunto solução da inequação $\frac{3x-2}{x-3} \leq 1$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. Assim, é correto afirmar:

01. $ab < 0$

02. $a - b > 0$

04. $a + b$ é um número natural.

08. ba é um número racional.

Soma ( )

02. (UNIPAR-PR) Dada a inequação $8 - 3.(2c - 1) < 0$, o menor número inteiro **c** que satisfaz as condições determinadas é:

A) 2

B) 1

C) −2

D) −1

E) 0

03. (UFPI) No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $\frac{x-1}{x+1} < 1$ é:

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

04. (UFG-GO) Considere a tabela a seguir:

Índice de massa corporal	Classificação
Abaixo de 20	Abaixo do peso
Entre 20 e 25	Saudável
Entre 25 e 30	Sobrepeso
Entre 30 e 40	Obesidade

O índice de massa corporal é obtido dividindo-se o peso em kg pelo quadrado da altura medida em metros. Determine, para uma pessoa de 1,70 m de altura, o intervalo de variação do peso para que ela seja considerada saudável.

05. (ESPM-SP) Ao resolver a inequação $\frac{(x+1)(x-3)}{x} > x - 1$, um aluno efetuou as seguintes passagens:

$\frac{(x+1)(x-3)}{x} > x - 1$ (1)

$(x + 1)(x - 3) > x^2 - x$ (2)

$x^2 - 2x - 3 > x^2 - x$ (3)

$-2x - 3 > -x$ (4)

$2x + 3 < x$ (5)

$x < -3$ (6)

Podemos afirmar que esse aluno

A) cometeu um erro apenas, na passagem de 4 para 5.

B) cometeu erros nas passagens de 3 para 4 e de 4 para 5.

C) cometeu erros nas passagens de 1 para 2 e de 4 para 5.

D) cometeu um erro apenas, na passagem de 1 para 2.

E) não cometeu erro algum.

06. (Unimontes-MG) O conjunto solução da inequação $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x$ é:

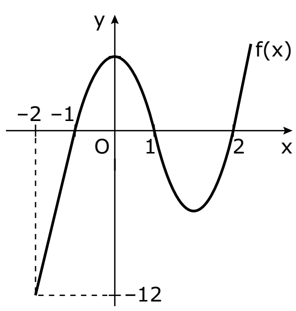
A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -2 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$

B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2\}$

D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ ou } x \leq \frac{1}{2}\right\}$

07. (FGV-SP) Considere a função $y = f(x)$, tal que $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e cujo gráfico está representado na figura a seguir. Determine o conjunto solução da inequação $0 \leq x^3 - 2x^2 - x + 14 \leq 12$.



08. (Mackenzie-SP) Em $\mathbb{R}$, a solução do sistema $\begin{cases} x - 1 \leq 3x - 3 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$ é:

A) $[2, +\infty[$

B) $]-\infty, -2]$

C) $[1, 2]$

D) $[-2, 0]$

E) $[0, 1]$

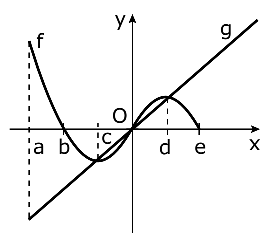
09. (Unicamp-SP) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela a seguir:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

A) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?

B) A partir de quantos minutos de uso mensal, o plano **A** é mais vantajoso que os outros dois?

10. A função a seguir fornece os gráficos de uma função **f** definida no intervalo [a, e] e da função $g(x) = \frac{x}{2}$.



O conjunto de todos os números reais que satisfazem a inequação $f(x) \leq \frac{x}{2}$ é:

A) $[a, b] \cup [0, e]$

B) $[a, c] \cup [0, d]$

C) $[a, 0] \cup [d, e]$

D) $[c, 0] \cup [d, e]$

E) $[a, b] \cup [0, d]$

11. (FGV-SP) Resolvendo a desigualdade $1 - 3x > \sqrt{2 + x^2 - 3x}$, obtemos:

A) $x < \frac{3 - \sqrt{41}}{16}$

B) $x \leq \frac{1}{3}$

C) $x < 1$ ou $x > 2$

D) $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{41}}{16}$

E) $x < \frac{3 - \sqrt{41}}{16}$ ou $x > \frac{3 + \sqrt{41}}{16}$

12. Sabe-se que $\dfrac{kx + k}{\sqrt{x^2 + 2x + k}}$ é um elemento de $\mathbb{R}$, qualquer que seja o número real **x**. O menor inteiro que **k** pode assumir é

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 3.

E) 4.

13. (UFSJ-MG) O índice de massa corporal (IMC) é uma medida internacional usada para calcular o grau de obesidade de uma pessoa adulta. Ele foi desenvolvido por Lambert Quételet no final do século XIX e é um preditor internacional de obesidade adotado pela Organização Mundial da Saúde (OMS) e por outras organizações afins. A fórmula para descobrir o IMC de alguém é:

$$IMC = \frac{peso}{(altura)^2}$$

Em que o peso é medido em quilogramas (kg), e a altura, em metros (m). O valor do IMC é comparado com a tabela a seguir, que indica o grau de obesidade do indivíduo.

Magro	IMC < 20
Peso normal	20 ≤ IMC < 25
Excesso de peso	25 ≤ IMC < 30
Obeso	30 ≤ IMC < 40
Obesidade mórbida	IMC ≥ 40

Admitindo-se que um indivíduo adulto pesa 81 kg e que, de acordo com os dados anteriores, ele é magro ou tem o peso normal, necessariamente sua altura deverá

A) estar entre 1,80 m e 1,85 m.

B) estar entre 1,71 m e 1,80 m.

C) ser maior do que 1,80 m.

D) ser maior do que 1,85 m.

14. (UFMG) O conjunto solução da inequação $\dfrac{1}{x(1-x)} > \dfrac{1}{x}$ é:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

15. (UFJF-MG) Para promover um baile, um clube fez o seguinte levantamento de gastos:

Banda	R$ 3 000,00
Decoração	R$ 2 400,00
Iluminação	R$ 400,00

Além dos gastos anteriores, o *buffet* cobrará R$ 35,00 por pessoa. O preço do convite individual é R$ 70,00. O número mínimo de convites que o clube deve vender para que o baile não dê prejuízo é

A) 165.

B) 166.

C) 168.

D) 170.

E) 175.

GABARITO

01. Soma = 09

02. A

03. D

04. $57{,}8 \leq p \leq 72{,}25$ kg

05. D

06. C

07. $S = \{-2 \leq x \leq -1\} \cup \{1 \leq x \leq 2\}$

08. A

09. A) Plano C

    B) 51 minutos

10. D

11. A

12. B

13. C

14. C

15. B

MATEMÁTICA

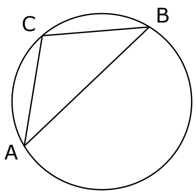
FRENTE **B**

Caderno Extra

MÓDULO 08

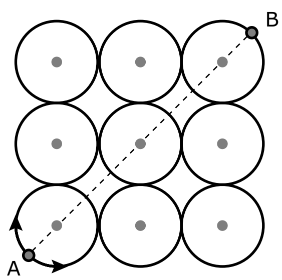
CIRCUNFERÊNCIA

01. (UFMG) Observe esta figura:



Nessa figura, o triângulo ABC está inscrito em um círculo. Os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem, cada um deles, $4\sqrt{14}$, e o lado $\overline{AB}$ mede $8\sqrt{10}$. Considerando esses dados, **determine** a medida do raio desse círculo.

02. (UFLA-MG) Caminhando sobre as circunferências de raio 1 cm, a **menor** distância entre os pontos **A** e **B** é



A) 2π cm.

B) 3π cm.

C) 4π cm.

D) $\frac{5}{2}\pi$ cm.

03. (UFPE) Assinale a alternativa que completa **corretamente** a sentença: No círculo, a razão do comprimento da sua circunferência para o seu diâmetro

A) dobra, caso o círculo tenha seu raio reduzido à metade.

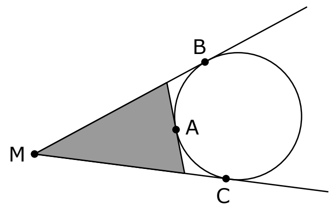
B) vale exatamente $\frac{22}{7}$.

C) vale exatamente 3.

D) vale exatamente $\frac{355}{113}$.

E) não é igual ao quociente de dois inteiros.

04. (Mackenzie-SP) Na figura, se MB = 18 cm e **A**, **B** e **C** são pontos de tangência, o perímetro do triângulo assinalado é igual a



A) 30 cm.

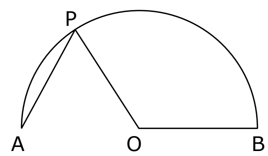
B) 32 cm.

C) 34 cm.

D) 36 cm.

E) 38 cm.

05. (UFRGS-RS) Na figura, $\overset{\frown}{AB}$ é um arco da circunferência de centro **O**, com raio igual à medida da corda $\overline{AP}$. **A**, **O** e **B** são colineares. A razão entre o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ e o comprimento da poligonal APOB é **x**. Então:



A) $1 < x \leq \frac{3}{2}$

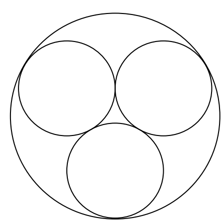
B) $\frac{1}{2} \leq x < 1$

C) $x \leq \frac{1}{2}$

D) $x \geq \frac{3}{2}$

E) $x = 1$

06. (FEI-SP) Três circunferências de raio **r** estão dispostas no interior de outra circunferência de raio **R**, conforme a figura a seguir. Qual o valor da razão $K = \frac{R}{r}$?



A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

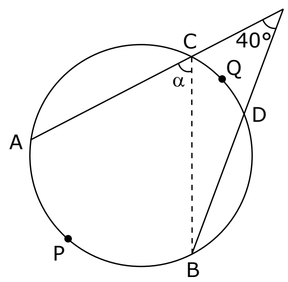
B) $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$

C) $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

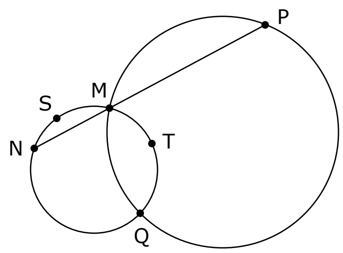
E) $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

07. (Mackenzie-SP) Se a soma das medidas dos arcos $\widehat{APB}$ e $\widehat{CQD}$ é 160°, então o ângulo α mede



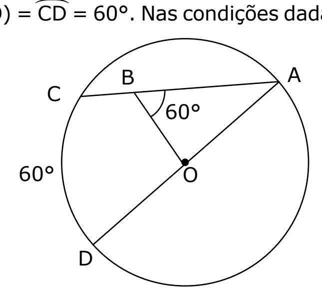
A) 60°.
B) 65°.
C) 70°.
D) 75°.
E) 80°.

08. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, os arcos $\widehat{QMP}$ e $\widehat{MTQ}$ medem, respectivamente, 170° e 130°. Então, o arco $\widehat{MSN}$ mede



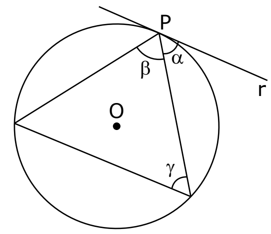
A) 60°.
B) 70°.
C) 80°.
D) 100°.
E) 110°.

09. (FGV-SP) Em um círculo de centro **O**, $\overline{AD}$ é um diâmetro, **B** pertence a $\overline{AC}$, que é uma corda do círculo, BO = 5 e m($A\hat{B}O$) = $\widehat{CD}$ = 60°. Nas condições dadas, $\overline{BC}$ é igual a:



A) $\dfrac{10 - \sqrt{3}}{2}$
B) 3
C) $3 + \sqrt{3}$
D) 5
E) $\dfrac{12 - \sqrt{3}}{2}$

10. (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir, a reta **r** é tangente à circunferência em **P**. Portanto, entre os ângulos α, β, γ, subsiste a relação:

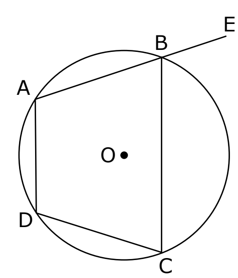


A) $\alpha - \gamma = 180° + \beta$
B) $\alpha + \beta = 180° + \gamma$
C) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
D) $\alpha + \gamma = 360° - \beta$
E) N. d. a.

11. (Cesgranrio) Sejam **P**, **Q** e **R** pontos de uma circunferência de centro **O**, tais que **P** e **Q** estão do mesmo lado do diâmetro que passa por **R**. Sabendo-se que $O\hat{R}P$ = 20° e $R\hat{O}Q$ = 80°, tem-se que o ângulo $P\hat{Q}O$

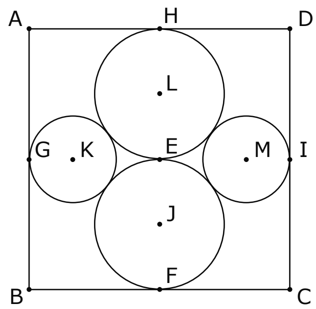
A) mede 20°.
B) mede 40°.
C) depende das posições de **P** e **Q**.
D) mede 50°.
E) mede 60°.

12. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, tem-se $B\hat{A}D$ = 108° e $A\hat{D}C$ = 112°. A medida de $E\hat{B}C$ é



A) 68°.
B) 72°.
C) 108°.
D) 112°.
E) N.d.a.

13. (CEFET-MG) figura seguinte mostra um quadrado ABCD de 4 cm de lado, e em seu interior estão quatro circunferências de centros J, K, L e M, tangentes entre si e aos lados do quadrado, sendo que as de centros J e L são tangentes no ponto E, centro de ABCD.



A soma dos lados do losango JKLM, em cm, vale

A) $\frac{5}{3}$.

B) $\frac{16}{3}$.

C) $\frac{20}{3}$.

D) 8.

E) 10.

14. (Mackenzie-SP) São dadas duas circunferências secantes, de centros O_1 e O_2, cujos raios medem, respectivamente, 9 e 17. Sendo **x** a distância entre os centros O_1 e O_2, pode-se concluir que:

A) $x = 8$

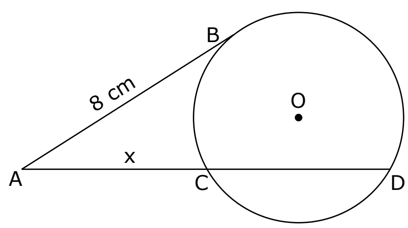
B) $x = 13$

C) $9 < x < 17$

D) $13 < x < 13$

E) $8 < x < 26$

15. (FEI-SP) Na figura a seguir, $\overline{AB}$ é tangente à circunferência no ponto **B** e mede 8 cm. Se $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma medida **x**, o valor de **x**, em cm, é:



A) 4

B) $4\sqrt{3}$

C) 8

D) $3\sqrt{2}$

E) $4\sqrt{2}$

16. (Unimontes-MG) O comprimento do arco de 270° de uma circunferência é 2 000 m. O raio dessa circunferência mede, aproximadamente,

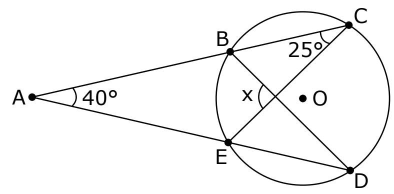
A) 1 333 m.

B) 382 m.

C) 1 334 m.

D) 425 m.

17. (Unifor-CE) Considere a figura a seguir:



A medida **x** do ângulo assinalado é

A) 90°.

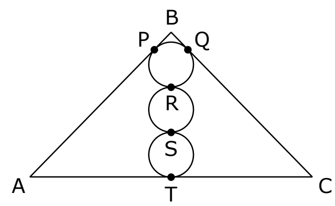
B) 85°.

C) 80°.

D) 75°.

E) 70°.

18. (UFF-RJ) A figura representa três círculos idênticos no interior do triângulo retângulo isósceles ABC.



Tem-se que:

I. a soma das áreas dos três círculos é 6π cm².

II. **P**, **Q**, **R**, **S** e **T** são pontos de tangência.

III. $\overline{BT}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

Determine a medida do segmento $\overline{BC}$.

19. (UECE) Em uma circunferência cuja medida do raio é 3 m inscreve-se um retângulo XYZW. Os pontos médios dos lados deste retângulo são vértices de um losango cuja medida do perímetro é

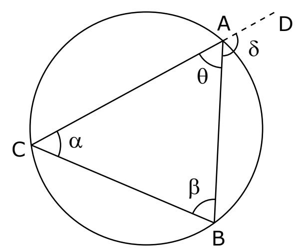
A) 14 m.

B) 12 m.

C) $6\sqrt{3}$ m.

D) $8\sqrt{3}$ m.

20. (UFPE) Considere a seguinte figura.



Assinale a alternativa correta.

A) A medida do ângulo δ é igual à metade da soma das medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$.

B) A medida do ângulo δ é igual ao dobro da medida do arco $\overset{\frown}{CB}$.

C) A medida do ângulo δ é igual à soma das medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$.

D) A medida do ângulo δ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{CB}$.

E) A medida do ângulo δ e a medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ são iguais.

MATEMÁTICA

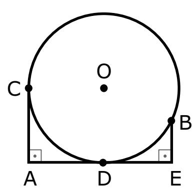
GABARITO

01. 14
02. B
03. E
04. D
05. A
06. D
07. A
08. A
09. D
10. C
11. E
12. D
13. C
14. E
15. E
16. D
17. A
18. $(10 + 2\sqrt{2})$ cm
19. B
20. A

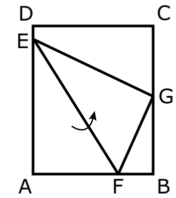
MÓDULO 09

TRIÂNGULO RETÂNGULO

01. Na figura, determine o raio da circunferência, sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tangenciam a circunferência nos pontos **C** e **D**, respectivamente, e que BE = 12 cm e AE = 54 cm.



02. (FUVEST-SP) Uma folha de papel ABCD de formato retangular é dobrada em torno do segmento $\overline{EF}$, de maneira que o ponto **A** ocupe a posição **G**, como mostra a figura. Se AE = 3 e BG = 1, então a medida do segmento $\overline{AF}$ é igual a:



A) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

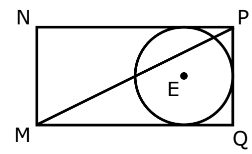
B) $\dfrac{7\sqrt{5}}{8}$

C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

D) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

E) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

03. (UECE) Na figura, MNPQ é um retângulo, e o ponto **E** é o centro da circunferência tangente aos lados $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{MQ}$. Se MN = 4 cm e NP = 8 cm, então a distância do ponto **E** à diagonal $\overline{MP}$, em cm, é:



A) $\dfrac{\sqrt{12}}{5}$

B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

C) $\dfrac{\sqrt{18}}{5}$

D) $\dfrac{\sqrt{20}}{5}$

04. (UFES) Inscreve-se um triângulo numa semicircunferência, cujo diâmetro coincide com um dos lados do triângulo. Os outros lados do triângulo medem 5 cm e 12 cm. O raio da semicircunferência mede:

A) $\dfrac{13}{2}$ cm

B) 13 cm

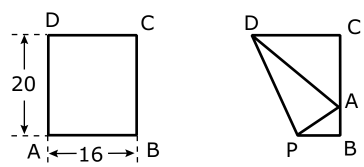
C) $\dfrac{15}{2}$ cm

D) 5 cm

E) Faltam dados para determinar tal raio.

05. (Mackenzie-SP) A folha de papel retangular na figura I é dobrada, como mostra a figura II. Então, o segmento $\overline{DP}$ mede:

Figura I   Figura II



A) $12\sqrt{5}$

B) $10\sqrt{5}$

C) 8

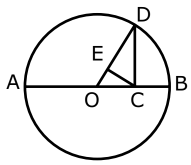
D) 21

E) 25

06. (FUVEST-SP) Na figura adiante, AC = a e BC = b, **O** é o centro da circunferência, $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ é perpendicular a $\overline{OD}$.

A) Calculando $\frac{1}{\overline{ED}}$ em função de **a** e **b**, prove que $\overline{ED}$ é média harmônica de **a** e **b**.

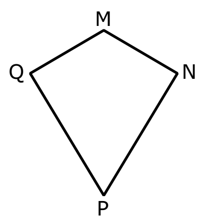
B) Comprove, na figura, que $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > ED$.



07. (ITA-SP) O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é 2p. Nesse triângulo, a altura relativa à hipotenusa é:

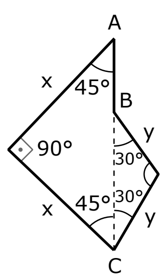
A) $p\sqrt{2}$
B) $(p + 1)(\sqrt{3} - 1)$
C) $p(\sqrt{2} - 1)$
D) $4p(\sqrt{2} + 1)$
E) $8p(\sqrt{2} + 4)$

08. (Cesgranrio) O quadrilátero convexo MNPQ é inscritível num círculo de diâmetro $\overline{MP}$. Os lados $\overline{MN}$ e $\overline{MQ}$ têm o mesmo comprimento ℓ, e o ângulo $Q\hat{M}N$ é de 120°. O comprimento do lado $\overline{NP}$ é:



A) $\ell\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
B) $\ell(\sqrt{3} - 1)$
C) $\ell(1 + \sqrt{3})$
D) $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\ell\sqrt{3}$

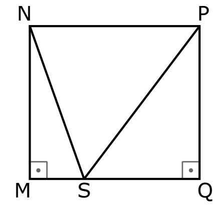
09. (FGV-SP) O perímetro da figura a seguir é:



$AB = \sqrt{2}$
$BC = \sqrt{3}$

A) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
B) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$
C) $4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$
D) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{6}$
E) 5

10. (UECE) Na figura a seguir, MNPQ é um retângulo, e **S** é um ponto da base $\overline{MQ}$ tal que SP = NP. Se MS = 2 cm, NP = $(12 - k_1)$ cm, SQ = k_1 cm e MN = k_2 cm, então $k_1^2 + k_2^2$ é igual a



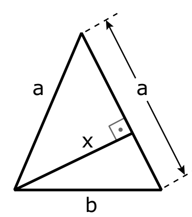
A) 34 cm².
B) 45 cm².
C) 49 cm².
D) 60 cm².

11. (PUC Rio) Ao meio-dia, a formiga **A** está 3 km a oeste da formiga **B**. A formiga **A** está se movendo para o oeste a 3 km/h, e a formiga **B** está se movendo para o norte com a mesma velocidade. Qual é a distância entre as duas formigas às 14h?

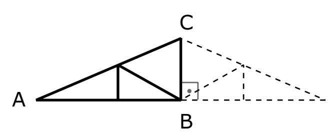
A) $\sqrt{17}$ km
B) 17 km
C) $\sqrt{51}$ km
D) $\sqrt{117}$ km
E) 117 km

12. (AFA-SP) O valor de x^2, na figura a seguir, é:

A) $b^2 - \frac{a^2}{4}$
B) $\frac{a^4}{b^2} - \frac{a^2}{4}$
C) $\frac{b^2}{4} - \frac{b^4}{a^2}$
D) $b^2 - \frac{b^4}{4a^2}$



13. (Mackenzie-SP) A figura a seguir representa uma estrutura de construção chamada tesoura de telhado. Sua inclinação é tal que, a cada metro deslocado na horizontal, há um deslocamento de 40 cm na vertical. Se o comprimento da viga $\overline{AB}$ é 5 m, das alternativas a seguir, a que melhor se aproxima do valor do comprimento da viga $\overline{AC}$, em metros, é

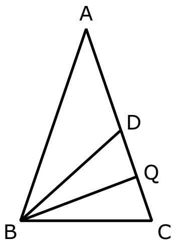


A) 5,4.
B) 6,7.
C) 4,8.
D) 5,9.
E) 6,5.

14. (ITA-SP) Considere um triângulo isósceles inscrito em uma circunferência. Se a base e a altura desse triângulo medem 8 cm, então o raio dessa circunferência mede

A) 3 cm. B) 4 cm. C) 5 cm. D) 6 cm. E) $\sqrt{3}$ cm.

15. (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, tem-se AB = AC = 6, BC = BD = 4 e $C\hat{B}Q = Q\hat{B}D$. A tangente do ângulo $C\hat{B}Q$ é:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

16. (UFC-CE) Sejam α, β e θ os ângulos internos de um triângulo. Se as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente, e a bissetriz do ângulo β mede duas unidades de comprimento (u.c.), a medida do perímetro desse triângulo é

A) $3\left(\sqrt{3}+2\right)$ u.c.
B) $\left(\sqrt{3}+1\right)$ u.c.
C) $3\sqrt{3}$ u.c.
D) $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ u.c.
E) $\left(3\sqrt{3}-1\right)$ u.c.

GABARITO

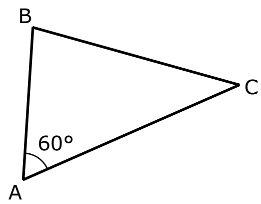
01. 30 cm
02. D
03. D
04. A
05. B
06. A) $\frac{1}{ED} = \frac{a+b}{2ab} \Rightarrow ED = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow ED = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

B) $\frac{a+b}{2}$ = raio = OB > $\sqrt{ab}$ = CD, como OB > CD > ED, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > ED$.
07. A
08. E
09. C
10. C
11. D
12. D
13. A
14. C
15. A
16. D

MÓDULO 10

LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

01. (UNIRIO-RJ) Deseja-se medir a distância entre duas cidades **B** e **C** sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, em que **A** é uma cidade conhecida, como mostra a figura a seguir. Logo, a distância entre **B** e **C**, em km, é

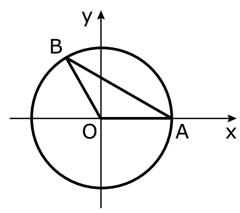


A) menor que 90.
B) maior que 90 e menor que 100.
C) maior que 100 e menor que 110.
D) maior que 110 e menor que 120.
E) maior que 120.

02. (ITA-SP) Num triângulo ABC, retângulo em **A**, temos B = 60°. As bissetrizes desses ângulos se encontram num ponto **D**. Se o segmento de reta $\overline{BD}$ mede 1 cm, então a hipotenusa mede, em centímetros:

A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
B) $1+\sqrt{3}$
C) $2+\sqrt{3}$
D) $1+2\sqrt{2}$
E) N.d.a.

03. (Unifor-CE) Na figura a seguir, tem-se o triângulo OAB, inscrito em um ciclo trigonométrico.



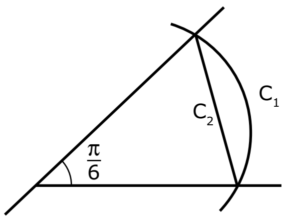
Se o ponto **B** é a extremidade do arco de medida $-\frac{4\pi}{3}$ rad, o perímetro do triângulo OAB, em unidades de comprimento, é:

A) $2+\sqrt{3}$
B) $3+\sqrt{3}$
C) $1+2\sqrt{3}$
D) $2+2\sqrt{3}$
E) $4+2\sqrt{3}$

04. (Unifor-CE) Se um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 120°, e o lado oposto a esse ângulo mede 4 cm, o perímetro desse triângulo, em centímetros, é:

A) $\frac{4+6\sqrt{3}}{3}$
B) $\frac{12+8\sqrt{3}}{3}$
C) $\frac{16+4\sqrt{3}}{3}$
D) $4 + 6\sqrt{3}$
E) $12 + 8\sqrt{3}$

05. (FUVEST-SP) Numa circunferência, C_1 é o comprimento do arco de radianos, e C_2 é o comprimento da secante determinada por este arco, como ilustrado na figura a seguir. Então, a razão $\frac{C_1}{C_2}$ é igual a $\frac{\pi}{6}$ multiplicado por:

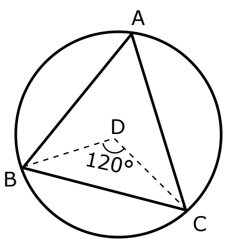


A) 2
B) $\sqrt{1+2\sqrt{3}}$
C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
D) $\sqrt{2+2\sqrt{3}}$
E) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$

06. (ITA-SP) Num losango ABCD, a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se a sua diagonal menor mede **d** cm, então sua aresta medirá:

A) $\frac{d}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
B) $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
C) $\frac{d}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
D) $\frac{d}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$
E) $\frac{d}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

07. (Unifor-CE) Na figura a seguir, tem-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro **D**.



Se AB = 6 cm e AC = 9 cm, o perímetro do triângulo ABC, em centímetros, é aproximadamente igual a

A) 18,4.
B) 19,8.
C) 20,6.
D) 21,4.
E) 22,9.

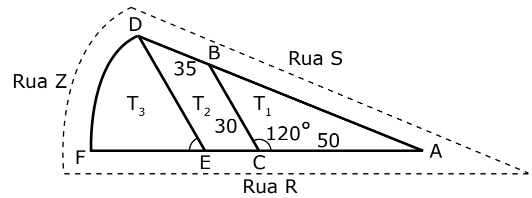
08. (UFJF-MG) Um engenheiro deseja calcular a distância entre o ponto **A**, na margem de um rio, e o ponto **B** não acessível, do outro lado do rio. Para isso, mediu a distância de **A** até outro ponto acessível **C** e mediu os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$. As medidas encontradas pelo engenheiro foram AC = 100 m, $B\hat{A}C$ = 105° e $A\hat{C}B$ = 45°. A distância entre **A** e **B**, em metros, é:

A) $50\sqrt{3}$
B) $100\sqrt{3}$
C) 50
D) $100\sqrt{2}$
E) $50\sqrt{2}$

09. (UNIFESP) Em um triângulo com lados de comprimentos **a**, **b**, **c**, tem-se (a + b + c)(a + b − c) = 3ab. A medida do ângulo oposto ao lado de comprimento **c** é

A) 30°.
B) 45°.
C) 60°.
D) 90°.
E) 120°.

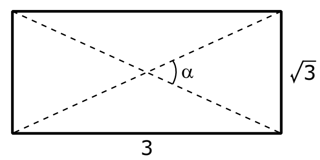
10. (Unesp) Dois terrenos, T_1 e T_2, têm frentes para a Rua R e fundos para a Rua S, como mostra a figura. O lado $\overline{BC}$ do terreno T_1 mede 30 m e é paralelo ao lado $\overline{DE}$ do terreno T_2. A frente $\overline{AC}$ do terreno T_1 mede 50 m, e o fundo $\overline{BD}$ do terreno T_2 mede 35 m. Ao lado do terreno T_2, há um outro terreno, T_3, com frente para a Rua Z, na forma de um setor circular de centro **E** e raio $\overline{ED}$.



Determine:

A) As medidas do fundo $\overline{AB}$ do terreno T_1 e da frente $\overline{CE}$ do terreno T_2.
B) A medida do lado $\overline{DE}$ do terreno T_2 e o perímetro do terreno T_3.

11. (Mackenzie-SP) No retângulo da figura, cos α vale:



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{1}{4}$

GABARITO

01. C	04. B	07. E
02. B	05. C	08. D
03. A	06. B	09. C

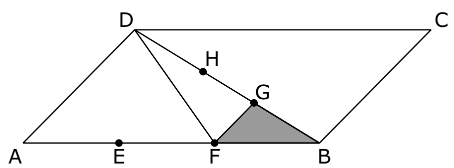
MATEMÁTICA

10. A) $\overline{AB} = 70$ m; $\overline{CE} = 25$ m.
    B) $\overline{DE} = 45$ m e $2p = 15(6 + \pi)$ m
11. B

MÓDULO 11

ÁREAS DE POLÍGONOS

01. (UERJ) O paralelogramo ABCD teve o lado (AB) e a sua diagonal (BD) divididos, cada um, em três partes iguais, respectivamente, pelos pontos {E, F} e {G, H}. A área do triângulo FBG é uma fração da área do paralelogramo (ABCD).



A sequência de operações que representa essa fração está indicada na seguinte alternativa:

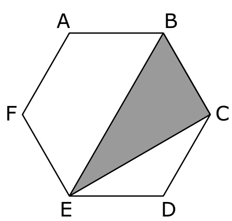
A) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$

D) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

02. (Mackenzie-SP) Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 cm. A área do triângulo BCE, em cm², é:



A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $\sqrt{3}$

03. (PUC Minas) Um retângulo de base **x** está inscrito numa circunferência de raio 2. A medida da área desse retângulo, em função de **x**, é:

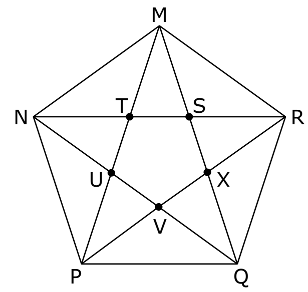
A) $x\sqrt{4-x^2}$

B) $2\sqrt{x^2-x}$

C) $x\sqrt{16-x^2}$

D) $\sqrt{2x}$

04. (UFF-RJ) A escola pitagórica desenvolvia estudos em Matemática, Filosofia e Astronomia. O símbolo dessa escola era a estrela de cinco pontas, que pode ser construída ligando-se os vértices de um pentágono regular, conforme a figura.



Sejam S_1 e S_2 as áreas dos pentágonos regulares MNPQR e STUVX, respectivamente. Sabendo que $\frac{\overline{MU}}{\overline{MT}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, assinale a opção que contém a razão $\frac{S_1}{S_2}$.

A) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2$

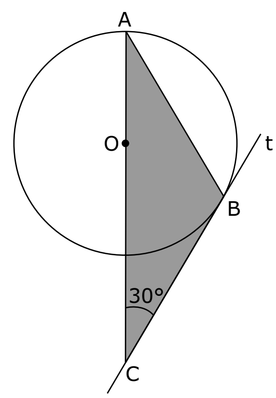
B) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$

C) $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\sqrt{5}-1}$

D) $\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{1+\sqrt{5}}$

E) $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^4}{4}$

05. (Mackenzie-SP) Na figura, a reta **t** é tangente à circunferência de centro **O** e raio $\sqrt{2}$. A área do triângulo ABC é igual a:



A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

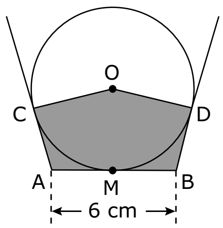
D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

06. (UFU-MG) Dado o triângulo ABC, retângulo em **A**, em que BC = 13 m e AC = 12 m, considere **M** o ponto do segmento BC tal que AM = CM e **N** o ponto do segmento AC tal que MN é perpendicular a AC. Determine a área do trapézio ABMN.

A) 15,5 m^2
B) 17,5 m^2
C) 18,5 m^2
D) 20,5 m^2
E) 22,5 m^2

07. (Mackenzie-SP) Na figura, a circunferência de centro **O** tem raio 4 cm, os pontos **C**, **M** e **D** são de tangência e **M** é o ponto médio de AB. A área assinalada, em cm^2, vale



A) 12.
B) 18.
C) 36.
D) 16.
E) 24.

08. (ITA-SP) Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3 m são tangentes externamente num ponto **C**. Uma reta tangencia essas duas circunferências nos pontos distintos **A** e **B**. A área, em m^2, do triângulo ABC é:

A) $27\sqrt{3}$

B) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

C) $9\sqrt{3}$

D) $27\sqrt{2}$

E) $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$

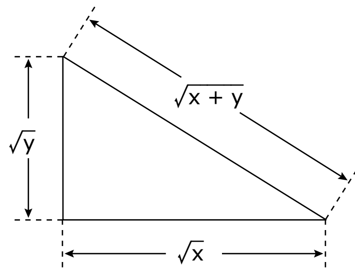
09. (UFMG) Seja **P** o ponto de interseção das diagonais do trapézio de altura **h** e de bases AB = a e CD = b, com a > b. Expresse a diferença entre as áreas dos triângulos ABP e CDP, nessa ordem, em função de **a**, **b** e **h**.

10. (Unicamp-SP) As diagonais **D** e **d** de um quadrilátero convexo, não necessariamente regular, formam um ângulo agudo α.

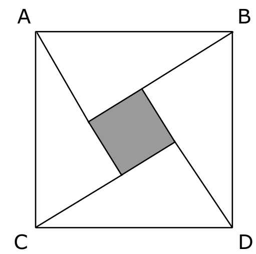
A) Mostre que a área desse quadrilátero é $\dfrac{D.d}{2}$ sen α.

B) Calcule a área de um quadrilátero convexo para o qual D = 8 cm, d = 6 cm e α = 30°.

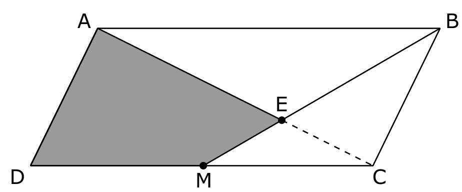
11. (UFLA-MG) Para se obter o quadrado ABCD, foram utilizados 4 triângulos, com as seguintes dimensões:



Calcule, em função de **x** e **y**, a área do quadrilátero hachurado.



12. (UFJF-MG) Considere o paralelogramo ABCD, a seguir, de área 24 cm^2. Sejam **M** o ponto médio do segmento CD, **E** o ponto de interseção entre os segmentos AC e BM e AB = 8 cm.



A) Calcule a altura do paralelogramo com relação à base CD.

B) Encontre a área da figura plana hachurada em cinza.

13. (Unicamp-SP) Em um triângulo com vértices **A**, **B** e **C**, inscrevemos um círculo de raio **r**. Sabe-se que o ângulo $\hat{A}$ tem 90° e que o círculo inscrito tangencia o lado BC no ponto **P**, dividindo esse lado em dois trechos com comprimentos PB = 10 e PC = 3.

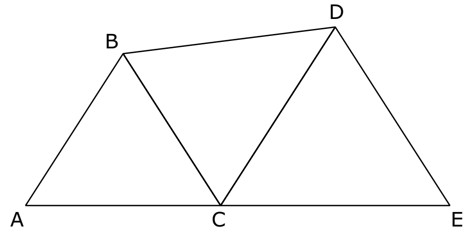
A) Determine **r**.

B) Determine AB e AC.

C) Determine a área da região que é, ao mesmo tempo, interna ao triângulo e externa ao círculo.

BOOK.indb 21 19/01/2022 15:17:52

14. (FGV-SP) Na figura plana a seguir, os triângulos ABC e CDE são equiláteros. Os lados medem 4 cm e 6 cm, respectivamente. Calcule a área do quadrilátero ABDE.

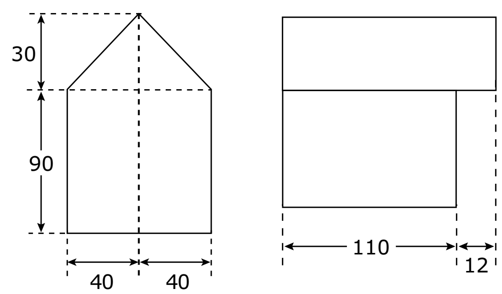


15. (FUVEST-SP) No triângulo ABC, tem-se que AB > AC, AC = 4 e cos $\hat{C} = \frac{3}{8}$. Sabendo-se que o ponto **R** pertence ao segmento BC e é tal que AR = AC e $\frac{BR}{BC} = \frac{4}{7}$, calcule:

A) A altura do triângulo ABC relativa ao lado BC.

B) A área do triângulo ABR.

16. (UFMG) Observe estas figuras.



Nessas figuras, estão representadas as vistas frontal e lateral de uma casa de madeira para um cachorrinho, com todas as medidas indicadas em centímetros. Observe que o telhado avança 12 cm na parte da frente da casa. Considerando-se os dados dessas figuras, a área total do telhado dessa casa é de

A) 0,72 m^2.
B) 0,96 m^2.
C) 1,22 m^2.
D) 1,44 m^2.

GABARITO

01. A
02. B
03. C
04. A
05. D
06. E
07. E
08. B
09. $\frac{(a-b)h}{2}$
10. A) Demonstração
    B) 12 cm^2
11. $x + y - 2\sqrt{xy}$
12. A) h = 3 cm
    B) $S_{AEMD} = 10\ cm^2$
13. A) r = 2
    B) AB = 12 e AC = 5
    C) $30 - 4\pi$
14. $19\sqrt{3}\ cm^2$
15. A) $AH = \frac{\sqrt{55}}{2}$
    B) $S_{ABR} = \sqrt{55}$
16. C

MATEMÁTICA

FRENTE C

Caderno Extra

MÓDULO 08

ARCOS E CICLO TRIGONOMÉTRICO

01. (UFRN) O relógio a seguir está marcando 2h30min. Passadas duas horas e quinze minutos, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio será

A) 127,5°.
B) 105°.
C) 112,5°.
D) 120°.

02. (Unifor-CE) Reduzindo-se ao segundo quadrante um arco de medida 7 344°, obtém-se um arco cuja medida, em radianos, é:

A) $\frac{\pi}{3}$
B) $\frac{\pi}{2}$
C) $\frac{2\pi}{3}$
D) $\frac{4\pi}{5}$
E) $\frac{9\pi}{10}$

03. (UEPB) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 16h44min é igual a

A) 92°.
B) 142°.
C) 112°.
D) 102°.
E) 122°.

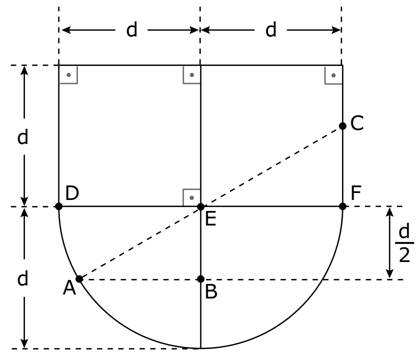
04. (UECE) Uma circunferência cuja medida do raio é 8 m é dividida em sete arcos de comprimentos iguais. Usando-se o valor 0,4338 para uma aproximação de $\text{sen}\,\frac{\pi}{7}$, a medida, em metros, da distância entre as extremidades de um destes arcos é um número situado entre

A) 6,93 e 6,94.
B) 6,94 e 6,95.
C) 6,95 e 6,96.
D) 6,96 e 6,97.

05. (PUC Minas) Uma carta marítima circular é graduada com 32 arcos iguais. A medida de cada arco é

A) 8° 13′.
B) 9° 14′.
C) 11° 15′.
D) 12° 20′.

06. (FGV-SP) Na figura, estão representados dois quadrados de lado **d** e dois setores circulares de 90° e raio **d**.



Sabendo que os pontos **A**, **E** e **C** estão alinhados, a soma dos comprimentos do segmento $\overline{CF}$ e do arco de circunferência $\overset{\frown}{AD}$, em função de **d**, é igual a:

A) $\frac{d(2\sqrt{3}+\pi)}{6}$

B) $\frac{d(3+\pi)}{6}$

C) $\frac{d(4\sqrt{3}+\pi)}{12}$

D) $\frac{d(12+\pi)}{24}$

E) $\frac{d(2\sqrt{3}+\pi)}{12}$

GABARITO

01. A
02. D
03. E
04. B
05. C
06. A

MÓDULO 09

FUNÇÕES SENO E COSSENO

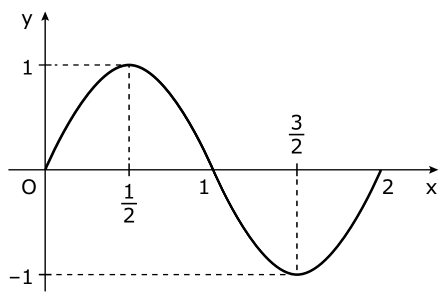
01. (UEFS-BA) Sejam a = sen 1 290°, b = cos (–170°) e c = cos (–20°). É correto afirmar que:

A) a < b < c C) b < c < a E) c < a < b
B) a < c < b D) b < a < c

02. (UFJF-MG) Escrevendo os números reais $x = \text{sen}\ \frac{\pi}{5}$, $y = \text{sen}\ \frac{\pi}{7}$, $z = \cos\ \frac{\pi}{5}$ e $w = \cos\ \frac{\pi}{7}$, em ordem crescente, obtém-se

A) x, y, w, z. C) y, x, w, z. E) z, w, y, x.
B) y, x, z, w. D) w, z, x, y.

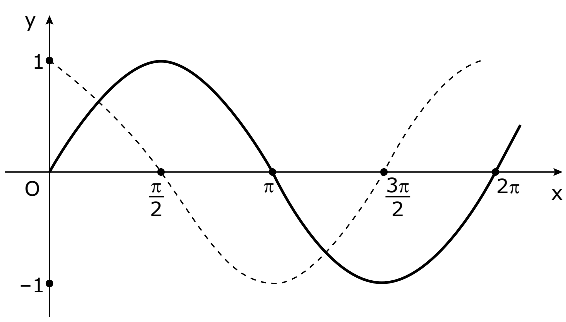
03. (UFOP-MG) Considere a função f(x) = sen (ωx), representada no gráfico.



Podemos afirmar que o valor da soma $f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ é:

A) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{11\omega}{12}$

04. (Unimontes-MG) Os esboços dos gráficos das funções y = sen x e y = cos x são dados a seguir:



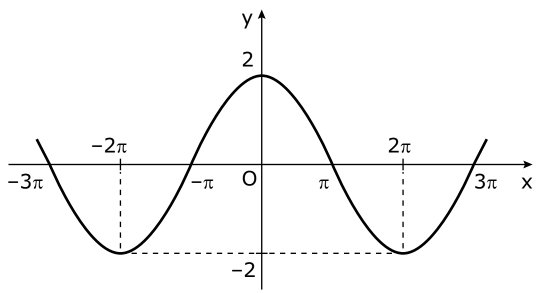
A função cujo esboço de gráfico se sobrepõe ao esboço do gráfico da função y = sen x é:

A) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ C) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
B) y = –sen x D) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

05. (Cesgranrio) Se k = 1, 2, 3, ..., o número de valores distintos de $\cos \frac{k\pi}{7}$ é

A) 2. D) 16.
B) 6. E) infinito.
C) 8.

06. (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir, tem-se parte do gráfico da função **f**, de ℝ em ℝ, dada por f(x) = k.cos (tx).



Nessas condições, calculando-se k – t, obtém-se

A) $-\frac{3}{2}$. D) $\frac{3}{2}$.
B) –1. E) $\frac{5}{2}$.
C) 0.

07. (FGV-SP) Considere a função $f(x) = 2 - \frac{3\ .\ \cos^4 x}{4}$.
Os valores máximo e mínimo de f(x) são, respectivamente:

A) 1 e –1.
B) 1 e 0.
C) 2 e $-\frac{3}{4}$.
D) 2 e 0.
E) 2 e $\frac{5}{4}$.

08. (UFES) O período da função $f(x) = 4.\cos\left(\frac{x}{4} + 3\right)$ é

A) 8π.

B) 7π.

C) 6π.

D) 3π.

E) 2π.

09. (UFJF-MG) O maior e o menor valor da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{4 - 2.\operatorname{sen} x}$, são, respectivamente:

A) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$.

B) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.

C) 1 e –1.

D) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

10. (UFTM-MG) A função f(x) é expressa por $f(x) = 8 - 4.\cos x$. O valor máximo que essa função assume é

A) 2.

B) 4.

C) 8.

D) 12.

E) 16.

11. (EsPCEx-SP) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo **t** é medido em meses. É correto afirmar que

A) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

B) a população atinge seu máximo em t = 6.

C) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

D) a população média anual é de 6 000 animais.

E) a população atinge seu mínimo em t = 4 com 6 000 animais.

GABARITO

01. D	05. C	09. A
02. B	06. D	10. D
03. A	07. E	11. A
04. D	08. A	

MÓDULO 10

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

01. (FUVEST-SP) A tangente do ângulo 2x é dada em função da tangente de **x** pela seguinte fórmula:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2.\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Calcule um valor aproximado da tangente do ângulo 22° 30'.

A) 0,22

B) 0,41

C) 0,50

D) 0,72

E) 1,00

02. (UFJF-MG) Se $A = \left\{\operatorname{tg}\frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $B = \{\operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}\}$, então $A \cap B$

A) é igual a $\varnothing$.

B) tem 1 elemento.

C) tem 3 elementos.

D) tem 5 elementos.

E) tem infinitos elementos.

03. (Mackenzie-SP) Em $0 \leq x \leq 2\pi$, a expressão

$y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal que:

A) $y > 0$

B) $y < 0$, se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

C) $y > 0$, se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

D) $y < 0$

E) N.d.a

04. (ITA-SP) Se $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e (a, b), o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, seja $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x}$. Se $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a:

A) $\frac{a+b}{2}$

B) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

C) $\frac{a^2-b^2}{ab}$

D) $\frac{a^2+b^2}{ab}$

E) N.d.a.

MATEMÁTICA

05. (Cesgranrio) Sendo $A = \dfrac{7.\cos(5\pi - x) - 3.\cos(3\pi + x)}{8.\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$,

com $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então:

A) $A = -1$
B) $2A = 1$
C) $2A + 1 = 0$
D) $4A + 5 = 0$
E) $5A - 4 = 0$

06. (UEL-PR) Se a medida **x** de um arco é tal que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, então:

A) sen $(x + \pi) > 0$
B) cos $(x + \pi) < 0$
C) tg $(x + \pi) > 0$
D) cos $(x + 2\pi) > 0$
E) sen $(x + 2\pi) > 0$

GABARITO

01. B	03. C	05. C
02. C	04. D	06. E

MÓDULO 11

FUNÇÕES SOMA E FATORAÇÃO

01. (UFPel-RS) Sendo $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$, determine o valor de $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2$.

02. (UFC-CE) Se $x + y = \dfrac{\pi}{4}$, então o produto $(1 + \text{tg}\,x).(1 + \text{tg}\,y)$ é igual a

A) 10.
B) 8.
C) 6.
D) 4.
E) 2.

03. (UFPel-RS) A expressão $\dfrac{\text{sen}\,x + \text{sen}\,y}{\text{sen}\,x - \text{sen}\,y}$ é equivalente a:

A) $\text{tg}\,\dfrac{x+y}{2}.\text{tg}\,\dfrac{x-y}{2}$
B) $\text{tg}\,(2x + 2y).\text{tg}\,(2x - 2y)$
C) 1
D) $\dfrac{\text{tg}\,\dfrac{x+y}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{x-y}{2}}$
E) 0

04. (UFOP-MG) Se sen $(\alpha + \beta)$ + sen $(\alpha - \beta) = m$ e $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = n$, em que $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$, então pode-se afirmar que $\dfrac{m}{n}$ equivale a:

A) $-\text{tg}\,\beta$
B) $\dfrac{\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha}$
C) $-\text{cotg}\,\beta$
D) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\beta}$

05. (Vunesp) O seno do ângulo da base de um triângulo isósceles é igual a $\dfrac{1}{4}$. Então, a tangente do ângulo do vértice desse triângulo é igual a:

A) $-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
B) $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$
C) $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$
D) $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$
E) $-\dfrac{\sqrt{15}}{7}$

06. (PUC Rio) Se sen $\theta = -1$, então o valor de sen 3θ é

A) $-\dfrac{1}{3}$.
B) 0.
C) 1.
D) –1.
E) –3.

07. (UNIFESP) A expressão

$$\text{sen}\,(x - y).\cos y + \cos(x - y).\text{sen}\,y$$

é equivalente a:

A) sen $(2x + y)$
B) cos $(2x)$
C) sen x
D) sen $(2x)$
E) cos $(2x + 2y)$

08. (UFSM-RS) Considerando $x \neq y$, a expressão sen $(x + y)$.sen $(x - y)$ é equivalente a:

A) sen $(x^2 - y^2)$
B) sen x^2 + sen y^2
C) sen x.sen y + cos x.cos y
D) $\text{sen}^2\,x.\cos^2\,y$
E) $\cos^2 y - \cos^2 x$

09. (UFES) Se x = 105°, então sen x é:

A) $\dfrac{6\sqrt{2} - 2}{8}$
B) $\dfrac{6\sqrt{3} - 7}{4}$
C) $\dfrac{7\sqrt{3} - 5}{8}$
D) $\dfrac{(3 + \sqrt{2})\sqrt{3}}{8}$
E) $\dfrac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$

GABARITO

01. $2 + \sqrt{2}$	04. C	07. C
02. E	05. E	08. E
03. D	06. C	09. E