A Análise combinatória visa desenvolve ver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo esses elementos agrupamentos formados sobe certas condições.

A primeira vista pode parecer desnecessário a existência desses métodos. Isto de fato é verdade, se um número de elementos for pequeno. Entretanto, se um número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho se torna quase impossível sem o uso de métodos especiais.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Podemos formar m.n pares ordenados (a_i, a_j) em que $a_i \in A \; e \; b_j \in B$.

$$\text{m linhas} \left\{ \begin{array}{l} (a_1,b_1),(a_1,b_1),\dots,(a_1,b_n) \rightarrow n\,pares \\ (a_2,b_1),(a_2,b_1),\dots,(a_2,b_n) \rightarrow n\,pares \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \\ (a_m,b_1),(a_m,b_1),\dots,(a_m,b_n) \rightarrow n\,pares \end{array} \right.$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n+n+n+n+\dots+n}_{\text{m vezes}} = m.n$

O princípio fundamental da contagem nos diz que sempre devemos multiplicar os números de opções entre as escolhas que podemos fazer. Por exemplo, para montar um computador, temos 3 diferentes tipos de monitores, 4 tipos de teclados, 2 tipos de impressora e 3 tipos de "CPU". Para saber o numero de diferentes possibilidades de computadores que podem ser montados com essas peças, somente multiplicamos as opções:

3 x 4 x 2 x 3 = 72

Então, têm-se 72 possibilidades de configurações diferentes.

Consequência do princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem nos fornece um instrumento básico para análise combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes torna-se trabalhosa. Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

FATORIAL

A fim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, bem como outras que iremos estudar, vamos definir o símbolo fatorial.

Seja m um número inteiro não negativo ($\mathrm{m} \in \mathrm{N}$). Definimos fatorial de m (e indicamos por m!) por meio da relação:

$$m\,! = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.2.1 \text{ para } m \geq 2$$

$$1\,! = 1$$

$$0\,! = 1$$

Exemplos:

3! = 3.2.1 = 6

5! = 5.4.3.2.1 = 120

ARRANJOS SIMPLES

Suponha que tenhamos *n* objetos com os quais queremos preencher *p* lugares. O primeiro lugar pode ser preenchido de *n* maneiras diferentes. Tendo preenchido o primeiro lugar, restam $(n-1)$ objetos para preencher $(p-1)$ lugares e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. E assim sucessivamente, vamos preenchendo as posições de forma que a p – ésima posição teremos $\big(n-(p-1)\big)$ maneiras diferentes de preenchê-la. Pelo princípio fundamental da contagem, podemos dizer que as *p* posições podem ser preenchidas de $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\big(n-(p-1)\big)$ maneiras diferentes.

Denotando por A_n^p o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, ou seja, todas as escolhas ordenadas de p desses n elementos, temos $A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\big(n-(p-1)\big)$. Se multiplicarmos e dividirmos A_n^p por $(n-p)!$, segue que

$A_n^p = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(p-1))(n-p)!}{(n-p)!}$, ou de maneira mais simples:

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplos:

De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis obter?

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, onde\ n = 52\ e\ p = 3$

$$A_n^p = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = \frac{52.51.50.49!}{49!} = 52.51.50$$

Respostas: São possíveis 132600 maneiras.

ATENÇÃO: Vamos resolver agora esta mesma questão sem utilizar fórmulas, mas pelo princípio fundamental da contagem:

1ª retirada – 52 cartas

2ª retirada – 51 cartas

3ª retirada – 50 cartas

Pelo princípio fundamental da contagem é só multiplicarmos as possibilidades para cada caso: 52.51.50 = 132600.

O que convido você, caro estudante, a fazer é não memorizar fórmulas. Mas buscar resolver estas questões utilizando o PFC (princípio fundamental da contagem). Estamos juntos?

ARRANJOS COM REPETIÇÃO

Caso sejam permitidas repetições de elementos, podemos em L_1 escolher n elementos, na posição L_2 também n elementos, e assim sucessivamente até a posição L_p. Logo, o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p , denotado por :

$$\boxed{AR_n^p = n^p}$$

Exemplo:

Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 opções por questão?

$AR_n^p = n^p$, onde n = 5 e p= 10, logo $n^p = 5^{10}$

ATENÇÃO: Vamos resolver agora esta mesma questão sem utilizar fórmulas, mas pelo princípio fundamental da contagem:

1ª Questão – 5 opções
2ª Questão – 5 opções
3ª Questão – 5 opções
.
.
.
10ª Questão – 5 opções

PFC : 5 . 5. 5 ... 5 = 5^{10}

O que convido você, caro estudante, a fazer é não memorizar fórmulas. Mas buscar resolver estas questões utilizando o PFC (princípio fundamental da contagem). Estamos juntos?

PERMUTAÇÕES SIMPLES

Uma permutação simples de n objetos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos. Assim, uma permutação de n objetos é um arranjo de n objetos tomados n a n . Denotando o número de permutações de n objetos por

$$\boxed{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}$$

Exemplo:

Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionadas em 6 vagas?

Temos um arranjo de 6 carros tomados 6 a 6 , ou seja, uma permutação de 6 carros. Assim, o número de maneiras é P_6 = 6! = 720

ATENÇÃO: Vamos resolver agora esta mesma questão sem utilizar fórmulas, mas pelo princípio fundamental da contagem:

Observe:

Carros = $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ e \ c_6)$

Vagas = $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \ e \ V_6)$

Para v_1 temos 6 carros

Para v_2 temos 5 carros

Para v_3 temos 4 carros

Para v_4 temos 3 carros

Para v_5 temos 2 carros

Para v_6 temos 1 carro

PFC : 6.5.4.3.2.1= 6! = 720

Mais uma vez venho convidar-te a resolver as questões pelo PFC sem memorizar fórmulas.

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Para demonstrar a maneira que chegamos a fórmula de permutação com repetição precisaríamos de conceitos mais abrangentes que não é cobrado em nosso concurso, logo para otimizar o tempo iremos expor a maneira como devemos proceder em problemas que envolva tal assunto.

Se em um dado conjunto de *n* elementos um elemento é repetido *p* vezes, outro elemento é repetido *q* vezes e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos obter é dada por:

$$A_n^{(p,q,\dots)} = \frac{n\,!}{p\,!\,q!\,\dots}$$

Exemplo:

Se um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, tendo perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6 jogos, de quantos modos isto pode ter ocorrido?

Temos 13 elementos para ser permutados mas com repetição$(5 \text{ derrotas}, 2 \text{ empates e } 6 \text{ vitórias})$. Assim, isso pode ocorrer de $A_{13}^{(5,2,6)} = \frac{13\,!}{5\,!2!6!} = 36036 \text{ modos diferentes.}$

PERMUTAÇÕES CIRCULAR

Considere o conjunto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Desejamos permutar esses n elementos em torno de um círculo. As permutações circulares

$$(a_1, a_2, \dots a_n), (a_2, a_3, \dots a_n, a_1), (a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

São todos iguais por que uma pode ser obtida da outra a partir de uma rotação. Então, para cada permutação circular de n elementos, existem n permutações simples desses n elementos. Se denotarmos por PC_n o número de permutações circulares com n elementos, segue que $P_n = n.PC_n$, e portanto:

$$\boxed{PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

Exemplo:

De quantas maneiras 8 crianças podem dar as mãos para brincar de roda?

$PC_8 = (8-1)! = 7! = 5040 \text{ maneiras}$

COMBINAÇÃO SIMPLES

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados p a p aos **subconjuntos** formados por **p**

elementos distintos escolhidos **entre os n elementos dados.**

É importante observar que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Representando por $C_{n,p}$ o número total de

combinações de n elementos tomados p a p ,

temos a seguinte fórmula:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}, com\ n\ \geq p}$$

"Combinação simples de n elementos tomados p a p $(n \geq 2)$ são subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados".

Vamos relembrar alguns conceitos de arranjos.
Vamos passear um pouco por arranjos, e depois vamos seguir no mesmo exemplo trabalhando com combinação.
$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 5.4 = 20$$

Observe que trabalhamos com 2 elementos tomados p a p, do conjunto com o total de n=5 elementos. Ou seja, fizemos arranjos de 2 a 2 com os 5 números do conjunto A.

Mas, e se quisermos saber, quantos subconjuntos de 2 elementos, podem ser formados por estes arranjos. Como proceder? Agora a conversa muda um pouco! Vamos ver como fica.
Os subconjuntos de 2 elementos que podemos formar são:
{1,2}, {1,3}, {1,4} ,{1,5} ,{2,3} ,{2,4} ,{2,5} ,{3,4}, {3,5}, {4,5}

Desta forma temos:

$\frac{A_{5,2}}{2!} = \frac{\frac{5!}{(5-2)!}}{2!} = \frac{20}{2} = 10,$ porque {1,2}={2,1}; {1,3} = {3,1} , etc.

Note que usamos {} para denotar combinações, pois são subconjuntos, e a ordem dos elementos num subconjunto não se altera.
E com 3 elementos como fica? O número de arranjos será:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Temos:
$$\frac{A_{5,3}}{3!} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

Exercícios:

1)Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 opções por questão?

2)Se um conjuntos possui n elementos, quantos são os seus subconjuntos?

3)De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras?

4)De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, considerando-se que, em cada banco, deva haver um homem e uma mulher?

5)De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8x8? E se os reis fossem iguais?

6)De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8x8, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

7)De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito, considerando-se que a primeira carta deva ser de copas e a segunda não deva ser um rei?

8)O conjunto A possui 4 elementos, e o conjunto B,7. Quantas funções f: A → B existem? Quantas delas são injetivas?

9)Dispomos de 5 cores diferentes. De Quantos modos podemos colorir os quatros quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não puderem receber a mesma cor?

10)De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

11) As placas dos veículos são formadas por três letras(de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas diferentes podem ser formadas?

12)Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

13) Em uma unidade do Corpo de Bombeiros, há de serviço 2 oficiais, 3 sargentos e 7 soldados. Quantos grupos de 4 soldados comandados por um oficial ou por um sargento, podem ser formados?

a)4200 b)840 c)320 d)250 e)175

14)Uma obra necessita de vigilantes para o turno da noite durante exatamente 36 noites. Se para cada noite são necessários 2 vigilantes, quantos devem ser contratados de modo que o mesmo par de vigilantes não se repita?

a)16 b)8 c)18 d)14 e)9

15) Quantos são os anagramas da palavra “ CAPÍTULO”:

a) Possíveis?

b) Que começam e terminam por vogal?

c) Que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

d) Que têm as letras c, a, p juntas nessa ordem?

e) Que têm as letras c, a p juntas em qualquer ordem?

f) Que têm a letra p em primeiro lugar e a letra a em segundo?

g) Que têm a letra p em primeiro lugar ou a letra a em segundo?

h) Nos quais a letra a é uma das letras à esquerda de p e a letra c é uma das letras à direita de p?

16) De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera E Paulo, não fiquem juntas?

17) De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?

18) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1,2,4,6,7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:

a)Que lugar ocupa o número 62 417.
b)Que número que ocupa o 66º lugar.
c)Qual o 166º algarismo escrito.

19)Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?

20) Assinale a alternativa cuja palavra possui 60 anagramas.

A) AMEIXA B) BRANCO C) BANANA

D) PARQUE E) PATETA