OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria espacial
posição e métrica

10

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria espacial
posição e métrica

10

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

7ª edição | São Paulo – 2013

Atual Editora

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013.
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
SAC: 0800-0117875
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dolce, Osvaldo

Fundamentos de matemática elementar, 10 : geometria espacial, posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. — 7. ed. — São Paulo : Atual, 2013.
ISBN 978-85-357-1758-7 (aluno)
ISBN 978-85-357-1759-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas, exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Pompeo, José Nicolau. II. Título.

13-01118 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Fundamentos de matemática elementar – vol. 10

Gerente editorial: Lauri Cericato
Editor: José Luiz Carvalho da Cruz
Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar/Lívio A. D'Ottaviantonio
Auxiliares de serviços editoriais: Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçallo Ramos/Vanderlei Aparecido Orso
Digitação e cotejo de originais: Guilherme Reghin Gaspar/Elillyane Kaori Kamimura
Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes
Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Tatiana Malheiro/Fernanda G. Antunes
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan
Projeto gráfico: Carlos Magno
Capa: Homem de Melo & Tróia Design
Imagem da capa: John Still/Getty Images
Ilustrações: Conceitograf/Mario Yoshida/Setup
Diagramação: TPG
Assessoria de arte: Maria Paula Santo Siqueira
Encarregada de produção e arte: Grace Alves
Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves

731.359.007.002

Editora Saraiva

SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Impressão e acabamento: Yangraf Gráfica e Editora

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 10, Geometria espacial (posição e métrica), da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos aos professores Arnaldo Bento Rodrigues, Carlos N. C. de Oliveira, Luiz Belloni Jr., Roberto Périgo e Sonia Regina Cavallini a colaboração na redação de soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os autores.

Sumário

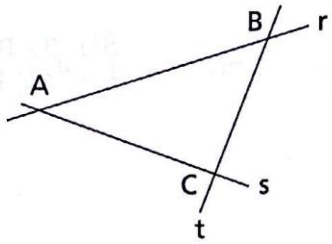
CAPÍTULO I — Introdução

1. Resolvido.

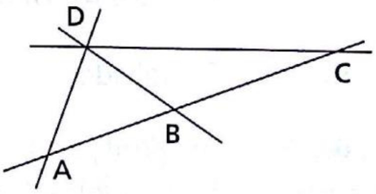
2. Infinitas.

Demonstração

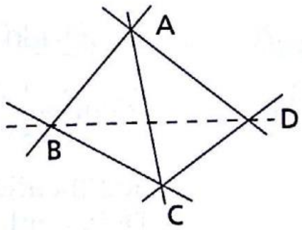
Consideremos dois pontos distintos do espaço A e B. Esses pontos determinam uma reta *r*. Consideremos um ponto C do espaço, fora de *r*. Os pontos A e C determinam uma reta *s* e os pontos B e C determinam uma reta *t*. Desse modo, podemos construir "tantas retas quantas quisermos", isto é, construir "infinitas" retas.



3. a) A, B e C são colineares.
Temos 3 retas, a saber:
$\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$, e a reta que passa por A, B e C.



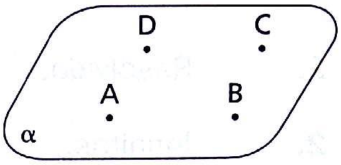
b) A, B, C e D não são coplanares.
Temos 6 retas, a saber:
$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.



4. Temos três possibilidades:
1ª) os pontos são colineares: $A \in r$, $B \in r$, $C \in r$, $D \in r$

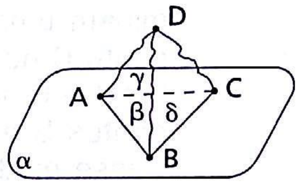
Neste caso os pontos *não* determinam plano, mas por eles passam infinitos planos.

2ª) os pontos são coplanares:
$\alpha = (A, B, C)$; $D \in \alpha$



Neste caso os pontos determinam *um só* plano, que é o plano α.

3ª) os pontos não são coplanares:
$\alpha = (A, B, C)$; $D \notin \alpha$



Neste caso os pontos determinam *quatro* planos:
$\alpha = (A, B, C)$, $\beta = (A, B, D)$, $\gamma = (A, C, D)$ e $\delta = (B, C, D)$.

5. Resolvido.

6. As pontas das pernas de uma mesa de 3 pernas determinam um único plano, que coincide com o plano do piso.
As pontas das pernas de uma mesa de 4 pernas podem determinar quatro planos distintos.

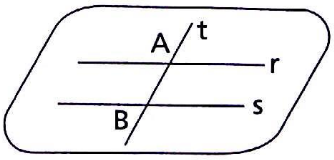
7. Resolvido.

8. Infinitos.

Justificativa
Dois pontos distintos determinam uma reta à qual eles pertencem e por essa reta passam infinitos planos.

9. Demonstração

r e *s* são paralelas distintas
t é concorrente com *r* e com *s*

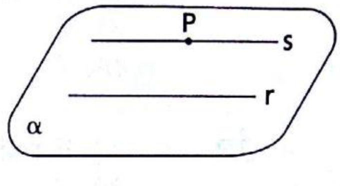


$r \cap t = \{A\}$ $\quad$ $s \cap t = \{B\}$
$(r \neq s, r \,//\, s) \Rightarrow \alpha = (r, s)$

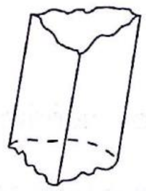
$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r, s), A \in r) \Rightarrow A \in \alpha \\ (\alpha = (r, s), B \in s) \Rightarrow B \in \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \Rightarrow t \subset \alpha$$

10. Resolvido.

11. Seja α o plano (r, P).
As retas distintas *r* e *s* são paralelas.
Seja α' o plano (r, s).
$(\alpha' = (r, s), P \in s) \Rightarrow \alpha' = (r, P) \Rightarrow \alpha' = \alpha$
Se $\alpha' = \alpha$ e $r \subset \alpha'$, então $s \subset \alpha$.



12. a) F, pois eles podem ser colineares.
b) F, pois o ponto pode pertencer à reta.
c) F, pois a concorrente está contida no plano das paralelas.
d) V
e) V



13. Resolvido.

14. Demonstração (pelo método indireto)
ABCD é um paralelogramo $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \exists\, \alpha \mid \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha, \overleftrightarrow{CD} \subset \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$ (o que é *absurdo*, pois ABCD é um quadrilátero reverso). Logo, ABCD não é paralelogramo.

15. Demonstração (pelo método indireto)
As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não são reversas $\Rightarrow \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são coplanares $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \alpha \mid \alpha = (\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}) \Rightarrow A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$. (E isso é absurdo, pois ABCD é um quadrilátero reverso.)
Logo, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são reversas.

16. Não são obrigatoriamente reversas.
Podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

17. Resolvido.

18. a) V b) V
c) F, pois elas podem ser reversas.
d) V (Elas têm ou não têm pontos comuns. Se têm, a classificação é V.)
e) V
f) F, pois elas podem ser coincidentes.
g) V
h) F, pois elas podem ser paralelas.
i) F, pois elas podem ser concorrentes.

j) F, pois elas podem ser reversas.
k) F, pois elas podem ser paralelas.
l) V
m) V

19. a) F, pois r e s podem ser paralelas.
b) V
c) F, pois r e s podem ser reversas.
d) V
e) V
f) F, pois r e s podem ser paralelas.
g) V
h) F, pois r e s podem ser reversas.

20. a) V
b) V
c) F, pois eles podem ser coincidentes.
d) V
e) F, pois a interseção deles é uma reta.
f) V
g) V
h) V

21. Resolvido.

22. Existe um ponto O tal que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{O\}$ e assim recaímos no exercício anterior.

23. Resolvido.

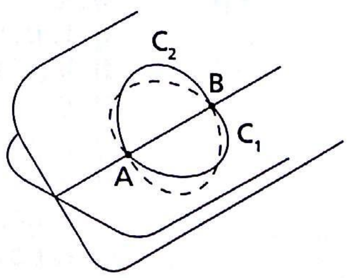
24. $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{RS}$

Justificativa

$$\left.\begin{array}{l} R \in r, r \subset \alpha \Rightarrow R \in \alpha \\ \beta = (s, R) \Rightarrow R \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow R \in \alpha \cap \beta \qquad \Rightarrow \alpha \cap \beta, = \overleftrightarrow{RS}$$

Analogamente, $S \in \alpha \cap \beta$

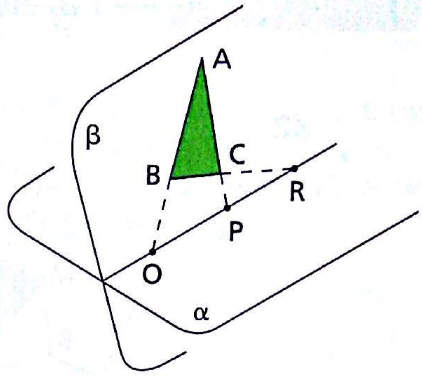
25. As circunferências distintas C_1 e C_2 têm um diâmetro comum $\overline{AB}$.
Então:
$C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$
(a interseção é um conjunto de 2 pontos).



26. $\overleftrightarrow{AB} \cap \alpha = \{O\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \alpha = \{P\}$ e $\overleftrightarrow{BC} \cap \alpha = \{R\}$.
Seja $\beta = (A, B, C)$ e $i = \alpha \cap \beta$.

$$\left.\begin{array}{l} O \in \overleftrightarrow{AB},\ \overleftrightarrow{AB} \subset \beta \Rightarrow O \in \beta \\ \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha = \{O\} \Rightarrow O \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow O \in i$$

Analogamente, temos $P \in i$ e $R \in i$.
Como O, P e R pertencem a *i* e *i* é única, segue que O, P e R são colineares.



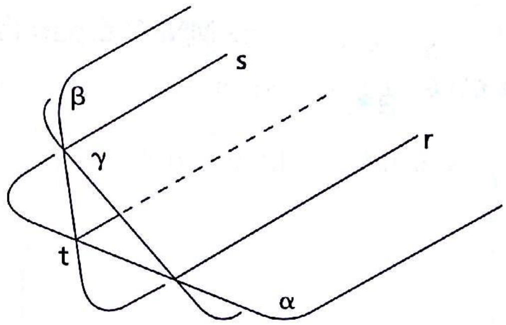
27. Resolvido.

28. Resolvido.

29. $\alpha \cap \beta = t$, $\alpha \supset r$, $\beta \supset s$, $r \,//\, s$ e $r \neq s$.

Demonstração

Basta notar que $r \neq s$ e $r \,//\, s$ determinam um plano γ que temos "três planos distintos (α, β e γ), dois a dois secantes ($\alpha \cap \beta = t$, $\alpha \cap \gamma = r$, $\beta \cap \gamma = s$), segundo três retas distintas, e duas delas são paralelas (*r* e *s*), então todas as três são paralelas ($t \,//\, r$ e $t \,//\, s$).



30. Sendo $\beta \cap \gamma = x$, temos três planos, dois a dois secantes:
$\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \gamma = x$. Surgem duas possibilidades:

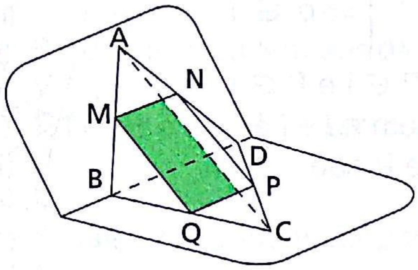
1ª) Se *a* e *b* são concorrentes.
Neste caso as três retas *a*, *b* e *x* incidem num ponto.

2ª) Se *a* e *b* são paralelas.
Neste caso a reta *x* é paralela à reta *a* e paralela à reta *b*.

31. São aplicações do teorema dos três planos secantes.
a) $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \cap c = \{P\}) \Rightarrow a \cap b \cap c = \{P\}$
b) $(a = \beta \cap \gamma, b = a \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \,//\, c) \Rightarrow (b \,//\, a \text{ e } b \,//\, c)$
c) $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta) \Rightarrow (\exists P \mid a \cap b \cap c = \{P\}$ ou $a \,//\, b, a \,//\, c$ e $b \,//\, c)$

CAPÍTULO II — Paralelismo

32.



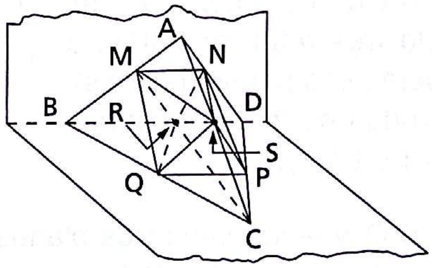
ABCD é um quadrilátero reverso.
M é o ponto médio de $\overline{AB}$.
N é o ponto médio de $\overline{AD}$.
P é o ponto médio de $\overline{CD}$.
Q é o ponto médio de $\overline{BC}$.
Vamos provar que MNPQ é um paralelogramo.

Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \triangle ABD\text{: } \overline{MN} \ /\!/ \ \overline{BD},\ \overline{MN} = \dfrac{\overline{BD}}{2} \\ \text{No } \triangle BCD\text{: } \overline{PQ} \ /\!/ \ \overline{BD},\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{BD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overline{MN} \ /\!/ \ \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} \equiv \overline{PQ}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ MNPQ é paralelogramo.

33.

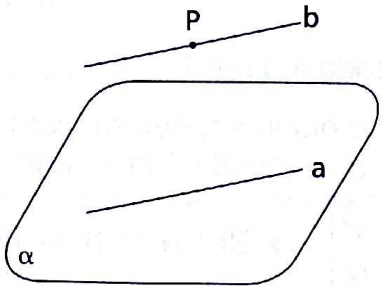


Demonstração

1º paralelogramo: MNPQ — provado no exercício anterior.
2º paralelogramo: MSPR — demonstração análoga à do 1º; basta considerar $\triangle ABC$ e $\triangle DBC$.
3º paralelogramo: NSQR — demonstração análoga à do 1º; basta considerar $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$.

34. MNPQ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{MP} \cap \overline{NQ} = \{X\}$ e X é ponto médio de $\overline{MP}$. (1)
MSPR é paralelogramo $\Rightarrow \overline{MP} \cap \overline{RS} = \{Y\}$ e Y é ponto médio de $\overline{MP}$. (2)
De (1) e (2) temos: X = Y.
Logo, $\overline{MP} \cap \overline{NQ} \cap \overline{RS} = \{X\}$.

35.



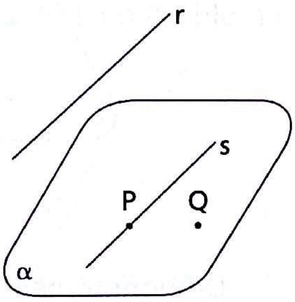
Construção

1) Consideremos uma reta *a* e um ponto P, tais que $a \subset \alpha$ e $P \notin \alpha$.
2) $a \subset \alpha$, $P \notin \alpha \Rightarrow P \notin a \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \mid b$, $P \in b$ e $b \mathbin{/\!/} a$.

Prova (de que $b \mathbin{/\!/} \alpha$)
$(b \not\subset \alpha, b \mathbin{/\!/} a, a \subset \alpha) \Rightarrow b \mathbin{/\!/} \alpha$

Observação: O problema tem infinitas soluções.

36.



Construção

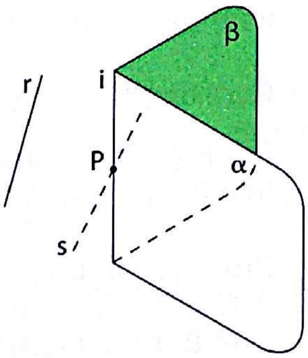
1) Consideremos um ponto P tal que $P \notin r$.
2) $P \notin r \Rightarrow \exists\, s \mid P \in s$ e $s \mathbin{/\!/} r$.
3) Tomemos um ponto Q fora de *s* e do plano (r, s).
4) Q e s determinam o plano α.

Prova (de que $\alpha \mathbin{/\!/} r$)
$(r \neq s, r \mathbin{/\!/} s, s \subset \alpha, r \not\subset \alpha) \Rightarrow \alpha \mathbin{/\!/} r$

Observação: O problema tem infinitas soluções.

37. Resolvido.

38. $r \mathbin{/\!/} \alpha, r \mathbin{/\!/} \beta, \alpha \cap \beta = i \Rightarrow r \mathbin{/\!/} i$



Demonstração

Por um ponto $P \in i$, vamos construir uma reta *s* paralela a *r* e vamos provar que $s = i$.
$(r \mathbin{/\!/} \alpha, P \in \alpha, s \mathbin{/\!/} r, P \in s) \Rightarrow s \subset \alpha$
$(r \mathbin{/\!/} \beta, P \in \beta, s \mathbin{/\!/} r, P \in s) \Rightarrow s \subset \beta$
$(s \subset \alpha, s \subset \beta) \Rightarrow s = \alpha \cap \beta \Rightarrow s = i$
Como $s \mathbin{/\!/} r$ e $s = i$, vem que $i \mathbin{/\!/} r$.

39. (a // b, a // α) $\Rightarrow$ (b // α ou b $\subset \alpha$)

Demonstração (pelo método indireto)

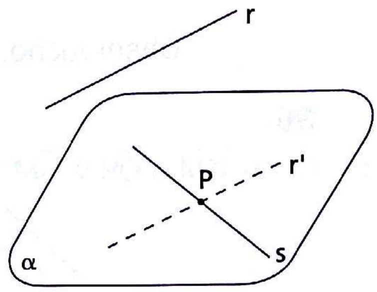
As retas *a* e *b*, paralelas e distintas, determinam um plano β.
Se *b* e α forem concorrentes e sendo P tal que b $\cap\, \alpha = \{P\}$, teremos:

$$\left.\begin{array}{ll} P \in b, b \subset \beta & \Rightarrow P \in \beta \\ b \cap \alpha = \{P\} & \Rightarrow P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i \mid \alpha \cap \beta = i \text{ e } P \in i$$

Então: b $\cap$ i = {P}.
Em β, teríamos a // b e b concorrente com *i*. Logo, *a* e *i* seriam concorrentes, o que é absurdo, pois i $\subset \alpha$ e a $\cap\, \alpha = \varnothing$, por hipótese.

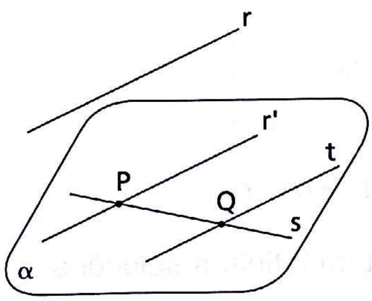
40. Construção

Consideremos um ponto P em *s*.
Por P conduzimos r' paralela a *r*.
r' e s, concorrentes, determinam um plano α.



Prova (de que α // *r*)
(r' $\neq$ r, r' // r, $\alpha \supset$ r') $\Rightarrow \alpha$ // r

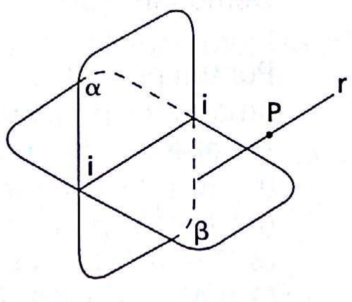
41.



Demonstração

Consideremos um ponto P qualquer, da reta s.
Por ele construímos a reta r' // r. r' e s concorrentes determinam um plano α, que é paralelo a *r* (exercício anterior).
Por outro ponto Q qualquer, de *s*, conduzimos uma reta *t* paralela a *r*.
A reta *t* está em α, conforme vimos no exercício 37.

42.



Construção

Por P construímos uma reta *r* paralela à interseção *i*.

Prova (de que r // α e r // β)
(r $\not\subset \alpha$, r // i, i $\subset \alpha$) $\Rightarrow$ r // α
(r $\not\subset \beta$, r // i, i $\subset \beta$) $\Rightarrow$ r // β

43. Resolvido.

44. 1º caso

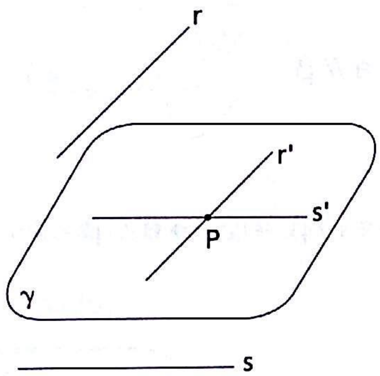
O ponto pertence a uma das retas.
Neste caso o problema não tem solução.

2º caso

O ponto e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta.
Neste caso o problema não tem solução.

3º caso

$\alpha = (r, P)$, α não é paralelo a *s*.
$\beta = (s, P)$, β não é paralelo a *r*.
Neste caso o problema tem solução.



Construção

Por P conduzimos $r' \parallel r$.
Por P conduzimos $s' \parallel s$.
As retas r' e s' concorrentes determinam um plano γ.

Prova (de que $\gamma \parallel r$ e $\gamma \parallel s$)
$(r \parallel r', r' \subset \gamma, r \not\subset \gamma) \Rightarrow r \parallel \gamma$
$(s' \parallel s, s' \subset \gamma, s \not\subset \gamma) \Rightarrow s \parallel \gamma$

45. Existem infinitos pontos P. São os pontos que com uma das retas determinam um plano paralelo à outra.

46. Demonstração (pelo método indireto)

Se existissem dois planos distintos, α e α', ambos paralelos a *r*, passando por *s*, teríamos:
$r \parallel \alpha, r \parallel \alpha', s = \alpha \cap \alpha' \Rightarrow r \parallel s$,
o que é absurdo, pois contraria a hipótese (*r* e *s* são reversas).

47. a) F, pois a reta pode estar contida no plano.
b) V
c) V

d) V
e) V
f) F, pois a reta paralela ao plano pode ser reversa à reta do plano.
g) F, pois as retas do plano podem ser paralelas à reta dada.
h) F, pois a reta e o plano não têm ponto comum.
i) F, pois a reta que é concorrente com o plano pode ser reversa a retas desse plano.
j) V
k) F, pois as retas distintas podem ser concorrentes ou reversas.
l) V
m) V
n) F, pois passam infinitos planos.

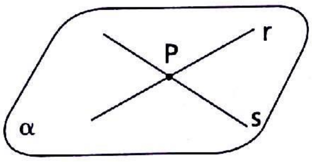
48. a) F, pois a reta pode encontrar uma e ser paralela à outra.
b) V
c) F, pois existem planos que passam por uma e são paralelos à outra.
d) F, pois o ponto pode determinar, com uma das retas, um plano paralelo à outra.

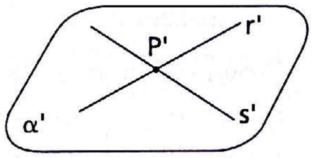
49. $\alpha \neq \beta, \alpha \parallel \beta, a \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \beta$

Demonstração

$(\alpha \cap \beta = \varnothing, a \subset \alpha) \Rightarrow a \cap \beta = \varnothing \Rightarrow a \parallel \beta$

50. Construção





Consideremos as retas *r* e *s* tais que:
$r \subset \alpha, s \subset \alpha, r \cap s = \{P\}$
Por P construímos $r' \parallel r$ e $s' \parallel s$.
As retas *r'* e *s'* concorrentes determinam um plano α'.
Prova (de que $\alpha' \parallel \alpha$)
$(r' \neq r, r' \parallel r, r \subset \alpha, r' \not\subset \alpha) \Rightarrow r' \parallel \alpha$
$(s' \neq s, s' \parallel s, s \subset \alpha, s' \not\subset \alpha) \Rightarrow s' \parallel \alpha$
$(r' \subset \alpha', s' \subset \alpha, r' \cap s' = \{P'\}, r' \parallel \alpha, s' \parallel \alpha) \Rightarrow \alpha' \parallel \alpha$

51. $(\alpha \neq \beta, \alpha \parallel \beta, a \cap \beta = \{O\}) \Rightarrow$ *a* e α são concorrentes.

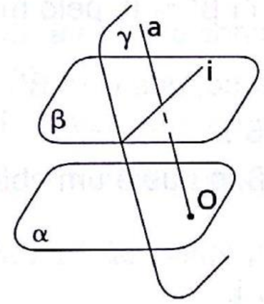
Demonstração
Vamos analisar as posições relativas de *a* e α e chegar à tese, por exclusão.

1º) Se $a \subset \alpha$, como $O \in a$, então $O \in \alpha$.
Se $O \in \alpha$, como $O \in \beta$, então $O \in \alpha \cap \beta$, o que é um absurdo, pois contraria a hipótese.
Logo, $a \not\subset \alpha$.

2º) Se $a \parallel \alpha$, existe uma reta $a' \parallel a$, $a' \subset \alpha$ e, então, $a' \parallel \beta$.
$(a' \parallel \beta, O \in \beta, O \in a, a \parallel a') \Rightarrow a \subset \beta$,
o que é absurdo, pois contraria a hipótese.
Logo, *a* não é paralela a α.

Por exclusão, *a* e α são concorrentes.

52. $(\alpha \neq \beta, \alpha \parallel \beta, \beta \cap \gamma = i) \Rightarrow \alpha$ e γ são secantes.



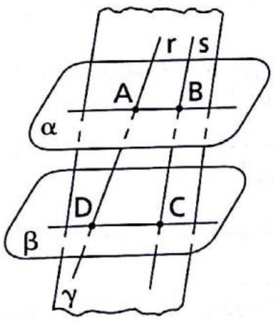
Demonstração

Basta considerar em γ uma reta *a* concorrente com *i*.
Como $\beta \neq \gamma$, concluímos que *a* é concorrente com β e, como α e β são paralelos, então *a* é concorrente com α num ponto O.
Então: $O \in a, a \subset \gamma \Rightarrow O \in \gamma$.

Conclusão: $(O \in \gamma, O \in \alpha, \alpha \neq \gamma) \Rightarrow O \in \alpha \cap \gamma \Rightarrow \alpha$ e γ são secantes.

53. Resolvido.

54.



Demonstração

Por hipótese, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
$\left(\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = \overleftrightarrow{AB}, \gamma \cap \beta = \overleftrightarrow{CD}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
Logo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

$\left(\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}\right) \Rightarrow ABCD$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

55. $(\alpha \parallel \beta, a \parallel \beta) \Rightarrow (a \parallel \alpha$ ou $a \subset \alpha)$

Demonstração (pelo método indireto)

Se existe P tal que $\{P\} = a \cap \alpha$, como $\alpha \parallel \beta$, então *a* e β são concorrentes, o que é absurdo, pois contraria a hipótese $(a \parallel \beta)$.

56. Resolvido.

57. $(\alpha \mathbin{//} \gamma, \beta \mathbin{//} \gamma) \Rightarrow \alpha \mathbin{//} \beta$

Demonstração (pelo método indireto)

Se α e β têm um ponto P comum, de duas uma:

1º) $\alpha = \beta$, e neste caso eles são paralelos ($\alpha \mathbin{//} \beta$), ou

2º) $\alpha \neq \beta$, e neste caso teríamos por um ponto (P) dois planos distintos (α e β) paralelos a um terceiro plano (γ), o que é absurdo, pois contraria a propriedade provada no exercício 56.

58. $(\alpha' \mathbin{//} \alpha, \beta' \mathbin{//} \beta, \alpha \cap \beta = i) \Rightarrow (\alpha' \cap \beta' = i' \text{ e } i' \mathbin{//} i)$

1ª parte: Vamos provar que $\alpha' \cap \beta' = i'$, pelo método indireto.

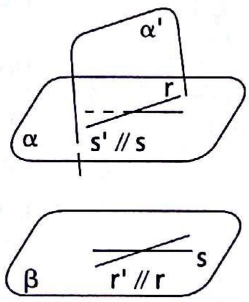
Negar a tese significa, nesse caso, que $\alpha' \mathbin{//} \beta'$.
Se $\alpha' \mathbin{//} \beta'$ e $\alpha' \mathbin{//} \alpha$, então $\alpha \mathbin{//} \beta'$.
Se $\alpha' \mathbin{//} \beta'$ e $\beta' \mathbin{//} \beta$, então $\alpha \mathbin{//} \beta$, o que é um absurdo, pois contraria a hipótese.

2ª parte: Vamos provar que $i' \mathbin{//} i$.

Se $\alpha' \mathbin{//} \alpha$ e $\alpha \cap \beta = i$, então $\alpha' \cap \beta = i''$, $i'' \mathbin{//} i$.
Se $\beta' \mathbin{//} \beta$ e $\alpha' \cap \beta' = i'$, então $\alpha' \cap \beta = i''$, $i'' \mathbin{//} i'$.

Conclusão: $(i'' \mathbin{//} i, i'' \mathbin{//} i') \Rightarrow i \mathbin{//} i'$.

59. Demonstração



Sejam *r* e *s* duas retas reversas e α o plano por *r*, sendo $\alpha \mathbin{//} s$ e β o plano por *s*, sendo $\beta \mathbin{//} r$.

Os planos α e β são paralelos, pois cada um contém duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro.

Se existisse um plano α', distinto de α, por *r* e paralelo a β, teríamos

$$\left.\begin{array}{l} (r \subset \alpha, r \subset \alpha', \alpha \neq \alpha') \Rightarrow \alpha' \cap \alpha = r \\ \alpha \mathbin{/\!/} \beta, s \subset \beta \Rightarrow s \mathbin{/\!/} \alpha \\ \alpha' \mathbin{/\!/} \beta, s \subset \beta \Rightarrow s \mathbin{/\!/} \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s \mathbin{/\!/} r$, o que é absurdo, pois *r* e *s* são reversas.
Logo, por *r* só passa α paralelo a β.
Analogamente, por s só passa β paralelo a α.

60. 1º) Se $a \subset \alpha$, o problema não tem solução.

2º) Se $a \mathbin{/\!/} \alpha$ e $\beta = (a, P)$ é paralelo a α, o problema tem infinitas soluções em β.

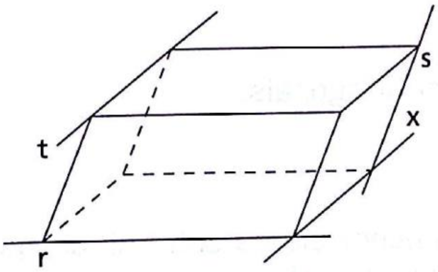
3º) Se $a \mathbin{/\!/} \alpha$ e $\beta = (a, P)$ não é paralelo a α, o problema não tem solução.

4º) Se *a* e α são concorrentes, acha-se a reta *i*, interseção de α com $\beta = (a, P)$.

Por P, traça-se a reta *x* paralela à *i*.

A reta *x* é a solução.

61. 1º caso: Não existe plano paralelo às três retas.



Neste caso, o problema admite uma única solução.
Basta conduzir por s um plano paralelo a *t* e por *r* um outro plano paralelo à reta *t*. A interseção dos dois planos é a reta *x* pedida.

2º caso: Existe plano paralelo às três retas.

Neste caso, o problema não tem solução.
Qualquer reta paralela à reta *t* concorrente com *r* está num plano paralelo à reta *s*, não podendo ser concorrente com s.

62. Seja $\alpha \cap \beta = t$. A partir daí recaímos no exercício anterior.

63. Basta tomar um ponto P numa das retas e a solução do problema é a reta *x* interseção dos planos determinados por P e pelas outras duas retas.
No 1º caso o ponto *P* não pode ser nenhum dos pontos A, B, C, D, E ou F da figura da teoria. São pontos de uma das retas que com uma delas determinam um plano paralelo à outra.
No 2º caso o problema sempre tem solução.

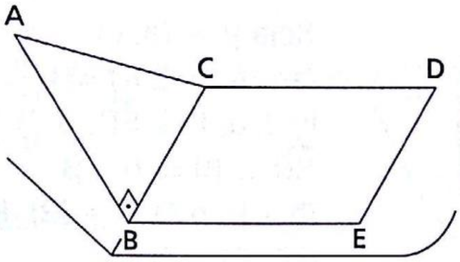
64. a) F, pois a reta de um deles pode ser paralela ao outro.
b) V
c) V
d) F, pois não têm nenhum ponto comum.
e) V
f) F, pois as retas estão em planos paralelos, não podendo assim ter ponto comum.
g) F, pois uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.
h) V
i) F, pois podem ser secantes.
j) F, pois podem ser secantes.
k) F, pois podem ser secantes.
l) F, pois podem ser secantes.
m) F, pois as retas distintas precisam ser concorrentes.
n) V
o) F, pois a reta pode ser paralela ao outro plano.

65. a) F, pois a reta pode ser paralela às outras duas.
b) V
c) V
d) F, pois a reta paralela a uma delas pode ser reversa às outras duas.

66. a) V
b) F, pois podem ser ortogonais.
c) V
d) V
e) V
f) F, podem ser perpendiculares entre si, oblíquas entre si, paralelas entre si, reversas entre si.
g) F, vide o item *f*.
h) V

CAPÍTULO III — Perpendicularidade

67.

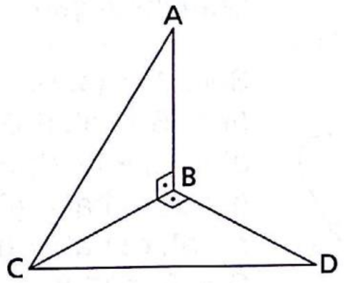


Demonstração

$(\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \parallel \overline{DE},$
$\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ reversas$) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{DE}$

68. Resolvido.

69.



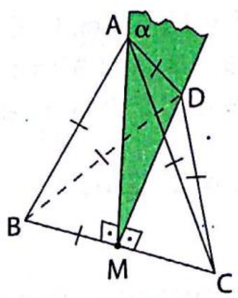
Demonstração

1) $(\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{AB} \perp \overline{CD}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp (B, C, D) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BD}$

2) $(\overline{BD} \perp \overline{AB}, \overline{BD} \perp \overline{BC}) \Rightarrow \overline{BD} \perp (A, B, C) \Rightarrow \overline{BD} \perp \overline{AC}$

70. Resolvido.

71. Basta determinar o plano que passa por uma aresta e pelo ponto médio da oposta e recair no exercício anterior.

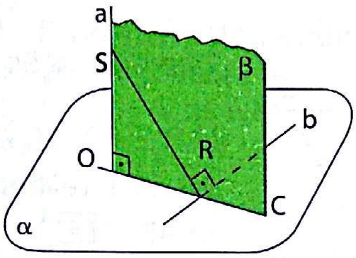


Demonstração

Seja M ponto médio de $\overline{BC}$ e seja $\alpha = (A, M, D)$.
$(\overline{BC} \perp \overline{AM}, \overline{BC} \perp \overline{DM}) \Rightarrow \overline{BC} \perp \alpha$
$(\overline{BC} \perp \alpha, \overline{AD} \subset \alpha) \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD}$

72. Resolvido.

73. $(a \perp \alpha,\ a \cap \alpha = \{O\},\ b \subset \alpha,\ O \notin b,\ c \subset \alpha,\ O \in c,\ b \cap c = \{R\},\ s \in a,$
$\overleftrightarrow{SR} \perp b) \Rightarrow b \perp c$

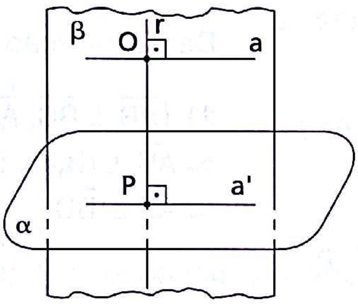


Demonstração

Seja $\beta = (a, c)$.
$(a \perp \alpha,\ b \subset \alpha) \Rightarrow a \perp b$
$(b \perp a,\ b \perp \overleftrightarrow{SR},\ a \cap \overleftrightarrow{SR} = \{S\},\ a \subset \beta,$
$\overleftrightarrow{SR} \subset \beta) \Rightarrow b \perp \beta$
$(b \perp \beta,\ b \cap \beta = \{R\},\ R \in c,$
$c \subset \beta) \Rightarrow b \perp c$

74. O ângulo é reto. Basta ver o teorema das três perpendiculares.

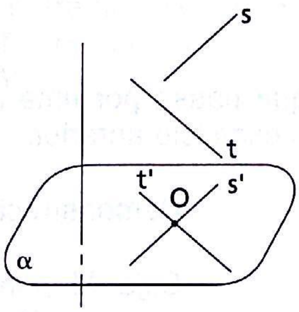
75. $(a \perp r,\ a \cap r = \{O\},\ r \perp \alpha,\ r \cap \alpha = \{P\},\ O \neq P) \Rightarrow a \,//\, \alpha$



Demonstração

Seja $\beta = (a, r)$.
$(\alpha \cap \beta = a',\ P \in a',\ r \perp a,\ r \cap \alpha = \{P\},$
$a' \subset \alpha,\ P \in a') \Rightarrow r \perp a'$
$(r \perp a,\ r \cap a = \{O\},$
$r \perp a',\ r \cap a' = \{P\},$
$O \neq P,\ a \subset \beta,\ a' \subset \beta) \Rightarrow a \,//\, a'$
$(a \,//\, a',\ a' \subset \alpha) \Rightarrow a \,//\, \alpha$

76. $(s \,//\, \alpha,\ t \,//\, \alpha,\ s \,//\, t,\ a \perp s,\ a \perp t) \Rightarrow a \perp \alpha$



Demonstração

Por um produto O do plano α conduzimos $s' \,//\, s$ e $t' \,//\, t$.
$(s \,//\, s',\ s \,//\, \alpha,\ O \in \alpha,\ O \in s') \Rightarrow s' \subset \alpha$
$(t \,//\, t',\ t \,//\, \alpha,\ O \in \alpha,\ O \in t') \Rightarrow t' \subset \alpha$
$(a \perp s,\ s \,//\, s') \Rightarrow a \perp s'$
$(a \perp t,\ t' \,//\, t) \Rightarrow a \perp t'$

Conclusão: $(a \perp s',\ a \perp t',\ s' \subset \alpha,\ t' \subset \alpha,\ s' \cap t' = \{O\}) \Rightarrow a \perp \alpha$.

77.
a) V
b) F, pois pode ser ortogonal a retas do plano.
c) V
d) F, pois as retas distintas devem ser concorrentes.
e) V

f) F, pois as retas distintas devem ser concorrentes.
g) V
h) F, pois a reta pode ser oblíqua ao plano.
i) V
j) V
k) V
l) F, pois a reta pode ser paralela ao plano.
m) V
n) V

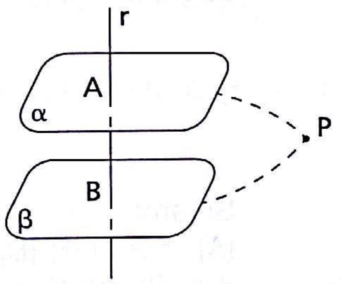
78. Resolvido.

79. Resolvido.

80. a) $(\alpha \perp r, \beta \perp r) \Rightarrow \alpha // \beta$

1º caso: $\alpha = \beta$ e então $\alpha // \beta$

2º caso: Para $\alpha \neq \beta$, utilizaremos o método indireto de demonstração.



Se $\alpha \neq \beta$ e têm um ponto P comum, vem:
Por P, dois planos distintos perpendiculares a uma reta *r*, o que é um *absurdo*, pois contraria o fato de que por um ponto P pode-se conduzir um único plano perpendicular a uma reta *r* (exercício anterior).

b) Resolvido.

c) $(a // b, \alpha \perp a) \Rightarrow \alpha \perp b$

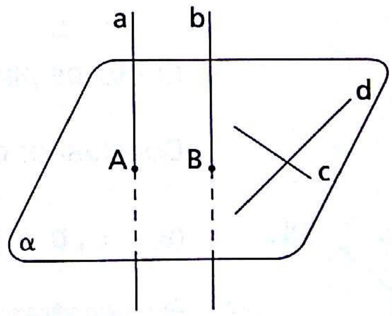
Demonstração

1º caso

Se a // b, sendo $a = b$, temos:
$(a = b, \alpha \perp a) \Rightarrow \alpha \perp b$.

2º caso

Se $a // b$ e $a \cap b = \varnothing$,
temos:
$a \cap \alpha = \{A\}$
$b \cap \alpha = \{B\}$



Consideremos em α duas retas *c* e *d* concorrentes. Temos, então:
$(a \perp \alpha, c \subset \alpha, d \subset \alpha) \Rightarrow (a \perp c, a \perp d)$
$(a \perp c, a \perp d, a // b) \Rightarrow (b \perp c, b \perp d)$

Conclusão:
$(b \perp c, b \perp d, c \subset \alpha, d \subset \alpha$, *c* e *d* concorrentes$) \Rightarrow$
$\Rightarrow b \perp (c, d) \Rightarrow b \perp \alpha$.

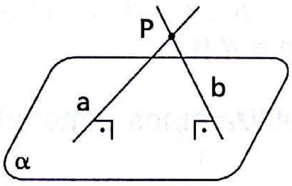
d) $(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \,//\, b$

Demonstração

1º caso: $a = b \Rightarrow a \,//\, b$

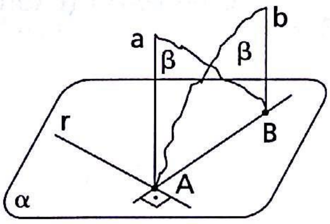
2º caso: Se $a \neq b$, precisamos provar que $a \cap b = \varnothing$ e que *a* e *b* são coplanares.

1ª parte



Se *a* e *b* têm um ponto comum, verifica-se um absurdo, pois contraria o fato de que por um ponto fora de um plano passa uma única reta perpendicular ao plano.
Logo, $a \cap b = \varnothing$. (1)

2ª parte



Sejam:
$\{A\} = a \cap \alpha$; $\{B\} = b \cap \alpha$;
$\beta = (a, B)$; $\beta' = (b, A)$.
Consideremos uma reta *r* em α, sendo *r* perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.
O plano β é perpendicular a *r* em A, pois $a \perp r$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp r$.
O plano β' também é perpendicular a *r* em A, pois *b* é ortogonal a *r* e $\overline{AB} \perp r$.
Então, os planos β e β' coincidem e as retas *a* e *b* são coplanares. (2)

Conclusão: de (1) e (2) vem que *a // b*.

81. $(a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \,//\, \beta) \Rightarrow a \,//\, b$

Demonstração

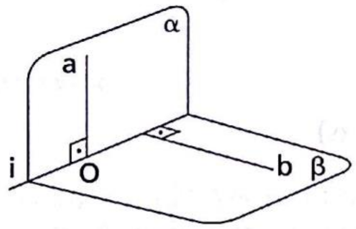
$(\alpha \,//\, \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$ (exercício 80, parte *b*)
$(a \perp \beta, b \perp \beta) \Rightarrow a \,//\, b$ (exercício 80, parte *d*)

82. $(a \perp \alpha, b \perp \beta, a \parallel b) \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

Demonstração

$(a \parallel b, a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$ (exercício 80, parte *c*)
$(b \perp \alpha, b \perp \beta) \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (exercício 80, parte *a*)

83. $(\alpha \supset a, a \perp \beta) \Rightarrow (\beta \supset b, b \perp \alpha)$

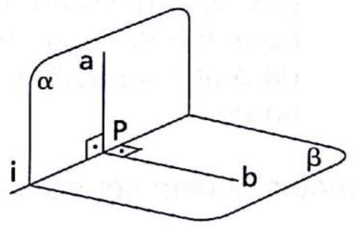


a) Construção
1) Da hipótese podemos afirmar que α e β são secantes. Seja *i* a interseção de α e β.
2) Em β, construímos uma reta *b* perpendicular à reta *i*.

b) Prova (de que $b \perp \alpha$)

$$\left.\begin{array}{ll} (a \perp \beta, b \subset \beta) \Rightarrow & b \perp a \\ \text{construção} & b \perp i \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp (a, i) \Rightarrow b \perp \alpha$$

84. $(a \subset \alpha, \alpha \perp b) \Rightarrow (b \subset \beta, \beta \perp a)$



a) Construção
Seja P o ponto de interseção de *b* com α.
Em α, consideremos a reta *i*, por P, perpendicular à reta *a*.
Seja $\beta = (b, i)$.

b) Prova (de que $\beta \perp a$).
$(b \perp \alpha, b \cap \alpha = \{P\}, a \subset \alpha, P \in a) \Rightarrow b \perp a$
$(a \perp b, a \perp i, b \cap i = \{P\}) \Rightarrow a \perp (b, i) \Rightarrow a \perp \beta$.

85. Resolvido.

86. $(\alpha \perp \beta, a \perp \beta) \Rightarrow (a \parallel \alpha \text{ ou } a \subset \alpha)$

Demonstração

De duas, uma: ou *a* e α têm um ponto comum ou não têm.
Se *a* e α não têm ponto comum, $a \parallel \alpha$.
Se *a* e α têm um ponto comum, pelo exercício anterior, $a \in \alpha$.
Logo, $a \parallel \alpha$ ou $a \subset \alpha$.

87. $(\alpha \parallel \beta, \gamma \perp \alpha) \Rightarrow \gamma \perp \beta$

Demonstração

$\gamma \perp \alpha \Leftrightarrow (\gamma \supset a, a \perp \alpha)$
$(\alpha \parallel \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$
$(\gamma \supset a, a \perp \beta) \Leftrightarrow \gamma \perp \beta$

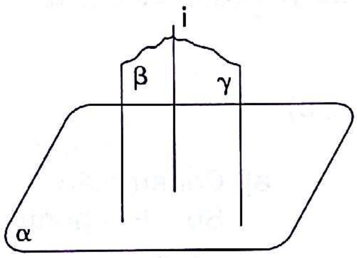
88. $(a \parallel \alpha, \beta \perp a) \Rightarrow \beta \perp \alpha$

Demonstração

$(a \parallel \alpha) \Rightarrow (\exists\, b, b \parallel a, b \subset \alpha)$
$(a \parallel b, \beta \perp a) \Rightarrow \beta \perp b$
$(\alpha \supset b, b \perp \beta) \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$

89. Resolvido.

90. $(\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, i = \beta \cap \gamma) \Rightarrow \alpha \perp i$



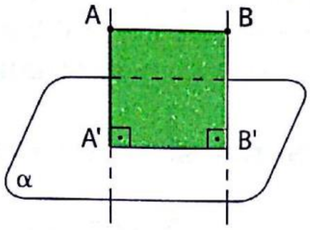
Demonstração (pelo método indireto)

Se a reta *i* não é perpendicular a α, por uma reta (i) não perpendicular a um plano (α), temos dois planos distintos (β e γ), ambos perpendiculares ao plano α, o que é um absurdo, pois contraria o que foi demonstrado no exercício anterior.

91. a) F, pois dois planos secantes podem ser oblíquos.
b) V
c) F, pois existem retas de um deles paralelas ao outro.
d) F, pois pela reta passam infinitos planos perpendiculares ao plano dado.
e) F, pois os planos podem ser paralelos entre si.
f) F, pois eles podem ser perpendiculares entre si.
g) V
h) V
i) F, pois ele pode ser paralelo à reta.
j) V
k) F, pois existem retas de um deles paralelas a retas de outro.

CAPÍTULO IV — Aplicações

92. $\left(\overline{AB} \mathbin{/\!/} \alpha,\ \overline{A'\,B'} = \text{proj}_{\alpha}\,\overline{AB}\right) \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{A'\,B'}$



Demonstração

AA'BB' é um retângulo e $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são lados opostos desse retângulo. Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'\,B'}$.

93. Resolvido.

94. a) V
b) F, pois pode ser um ponto.
c) F, pois pode ser um ponto.
d) V
e) V
f) V
g) F, pois um dos segmentos pode ser perpendicular ao plano.
h) F, pois os segmentos oblíquos ao plano podem não ser paralelos entre si.
i) F, pois pode ser um segmento.

95. a) F, pois podem ser reversas.
b) V
c) V
d) V
e) V
f) V
g) V

96. As posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas concorrentes podem ser:
a) duas retas concorrentes, se o plano delas não é perpendicular ao plano de projeção;
b) duas retas coincidentes, se nenhuma delas é perpendicular ao plano de projeção, mas o plano delas é perpendicular a esse plano;
c) uma reta e um ponto dessa reta, se uma delas é perpendicular ao plano de projeção.

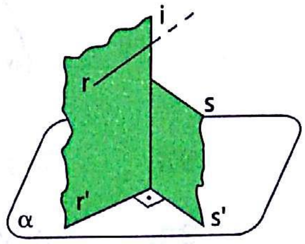
97. As posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas reversas podem ser:
a) duas retas concorrentes, se os planos projetantes são secantes;
b) duas retas paralelas, se os planos projetantes são paralelos;
c) uma reta e um ponto fora dela, se uma delas é perpendicular ao plano de projeção.

98. Resolvido.

99. $(r' = proj_{\alpha} r, s' = proj_{\alpha} s, r' \perp s', s \mathbin{/\!/} \alpha$ ou $s \subset \alpha$, r não é perpendicular a $\alpha) \Rightarrow r \perp\!\!\!\!- s$

Demonstração

$(s \mathbin{/\!/} \alpha$ ou $s \subset \alpha, s' = proj_{\alpha} s) \Rightarrow s' \mathbin{/\!/} s$
$(s' \mathbin{/\!/} s, r' \perp s') \Rightarrow s \perp\!\!\!\!- r'$



Sendo *i* a interseção dos planos projetantes de *r* e de s, temos: $(i \perp \alpha, i \perp s', s \mathbin{/\!/} s') \Rightarrow$
$\Rightarrow s \perp i$
$(s \perp\!\!\!\!- r', s \perp i) \Rightarrow s \perp (i, r') \Rightarrow s \perp\!\!\!\!- r$

100. $(r \perp\!\!\!\!- s, r' = proj_{\alpha} r, s' = proj_{\alpha} s, r' \perp s'$, r é oblíqua a $\alpha) \Rightarrow (s \mathbin{/\!/} \alpha$ ou $s \subset \alpha)$

Demonstração

É análoga aos dois exercícios anteriores. Basta provar que $s' \perp (r, r')$ e $s \perp (r, r')$.
Se $s' \perp (r, r')$ e $s \perp (r, r')$, então $s' \mathbin{/\!/} s$.
$s \mathbin{/\!/} s' \Rightarrow (s \mathbin{/\!/} \alpha$ ou $s \subset \alpha)$

101. a) F, pois a distância entre P e A é maior que a distância entre P e α.
b) F, pois contraria a definição de distância entre um ponto e um plano.
c) F, pois a distância é um segmento de reta cujos extremos são o ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.
d) V
e) F, pois contraria a definição de distância entre reta e plano paralelos.
f) F, pois contraria a definição de distância entre reta e plano paralelos.
g) V
h) F, pois contraria a definição de distância entre planos paralelos.
i) V
j) F, pois contraria a definição de distância entre duas retas reversas.
k) F, pois a distância entre duas retas reversas é um segmento de reta contido na perpendicular comum e cujos extremos pertencem, cada um deles, a uma das retas.

102. Resolvido.

103. Não, pois o segmento e o plano podem ser paralelos.

104. Resolvido.

105. Basta considerar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e a reta *r*' passando por M e paralela a *r*.

Os planos que passam por *r*' são as soluções do problema.
O problema apresenta infinitas soluções nos três casos possíveis, destacados a seguir:

1º caso: *r* e $\overleftrightarrow{AB}$ são concorrentes.

Infinitas soluções: qualquer plano α que contém *r*' é paralelo a *r* e equidistantes de A e B.

2º caso: *r* e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelos.

Infinitas soluções: qualquer plano α paralelo a *r* é equidistante de A e B.

3º caso: *r* e $\overleftrightarrow{AB}$ são reversos.

Infinitas soluções: qualquer plano α que contém *r*' é paralelo a *r* e equidistante de A e B.

106. Basta considerar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e o plano que passa por M é perpendicular a *r*.
Se $r \perp \overleftrightarrow{AB}$, o problema admite infinitas soluções. Caso contrário, a solução é única, quer *r* e $\overleftrightarrow{AB}$ sejam concorrentes, quer sejam paralelas ou reversas.

107. Analisando as posições relativas de $\overleftrightarrow{AB}$ e α, temos:

1º caso: $\overline{AB} \,//\, \alpha$ ou $\overline{AB} \subset \alpha$

Neste caso, qualquer plano paralelo a α é solução do problema. Temos, então, infinitas soluções.

2º caso: $\overleftrightarrow{AB}$ é concorrente com α.

Neste caso, o plano paralelo a α construído pelo ponto médio de $\overline{AB}$ é solução do problema. Temos, então, uma única solução.

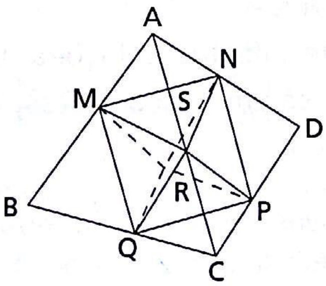
108. Basta considerar M, ponto médio de $\overline{AB}$, e por esse ponto conduzir uma reta *r*, perpendicular a α. Qualquer plano que passa por *r* é solução do problema. O problema tem infinitas soluções.

109. Sejam M, N, P os respectivos pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.
Existem quatro infinidades de planos que são soluções do problema.

1º) Os infinitos planos do feixe de planos paralelos ao plano determinado pelos pontos A, B, C.
2º) Os infinitos planos do feixe de planos que passam por $\overleftrightarrow{MN}$.
3º) Os infinitos planos do feixe de planos que passam por $\overleftrightarrow{MP}$.
4º) Os infinitos planos do feixe de planos que passam por $\overleftrightarrow{NP}$.

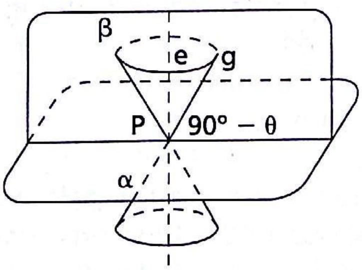
110. Sejam, M, N, O os respectivos pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.
Se $P \notin (A, B, C)$, o problema admite quatro soluções, a saber: (P, M, N); (P, M, O); (P, N, O) e o plano que passa por P e é paralelo a (A, B, C).
Se P pertence ao plano (A, B, C) e *P* não pertence a $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{MO}$ e $\overleftrightarrow{NO}$, o problema tem solução única: o próprio plano (A, B, C).
Se *P* pertence a $\overleftrightarrow{MN}$ ou a $\overleftrightarrow{MO}$ ou a $\overleftrightarrow{NO}$, o problema apresenta infinitas soluções: são os planos que, nessas condições, passam por $\overleftrightarrow{MN}$ ou por $\overleftrightarrow{MO}$ ou por $\overleftrightarrow{NO}$.

111. Sejam os pontos M, N, P, Q, R, S os respectivos pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. (Ver na figura um tetraedro ABCD e um octaedro MNPQRS.)



O problema admite sete soluções, a saber:
(M, N, S); (M, Q, R); (P, Q, S); (N, R, P)
(paralelos às faces do tetraedro ABCD)
plano (M, N, P, Q), plano (M, S, P, R), plano (N, S, Q, R)
(planos dos paralelogramos, paralelos a duas arestas opostas)

112.



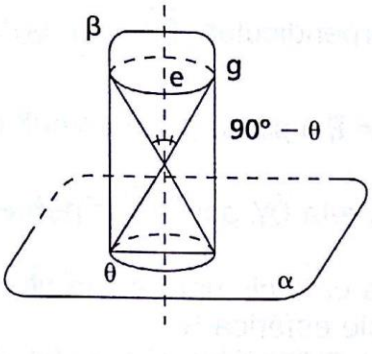
1) Por P conduzimos uma reta e perpendicular a α.

2) Por e conduzimos um plano β, β qualquer.

3) Em β, conduzimos uma reta *g* tal que $\widehat{eg} = 90° - \theta$.

A reta *g*, assim construída, passa por P e forma ângulo θ com o plano α. O problema admite infinitas soluções (só em β há duas): são as geratrizes de uma superfície cônica de revolução de vértice P, eixo e e ângulo de abertura igual a 90° − θ.

113. É análogo ao exercício anterior, item por item.

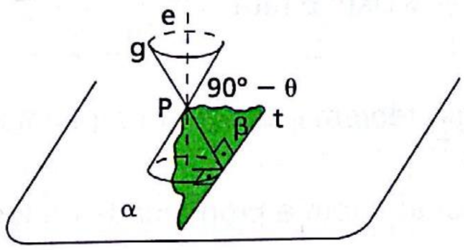


1) Por P conduzimos uma reta e perpendicular a α.
2) Por e conduzimos um plano β, β qualquer.
3) Em β conduzimos uma reta g, concorrente com e em P, tal que $\widehat{eg} = 90° - \theta$.

Conclusão:

A reta g, construída, passa por P e forma ângulo θ com o plano α.
O problema admite infinitas soluções (só em β há duas). São as geratrizes de uma superfície cônica de vértice P, eixo e e ângulo de abertura $90° - \theta$.

114.



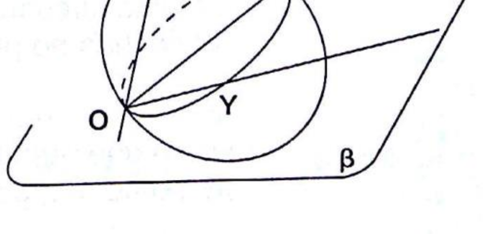
1) Construímos por P uma reta g que forma ângulo θ com α (exercício anterior).
2) Construímos uma reta t em α, t perpendicular a g.
3) O plano β pedido é o plano determinado por P e t.

Obs.: O plano β é tangente à superfície cônica de revolução de geratriz g, vértice P e ângulo de abertura $90° - \theta$.

115. Resolvido.

116. Resolvido.

117. S é a superfície esférica de diâmetro $\overline{OP}$.
1ª parte: Seja $X \in S$, $X \neq O$ e $X \neq P$.
O plano (X, O, P) intercepta S numa circunferência λ de diâmetro $\overline{OP}$ e $X \in \lambda$.
Daí vem que $\overleftrightarrow{OX}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PX}$.

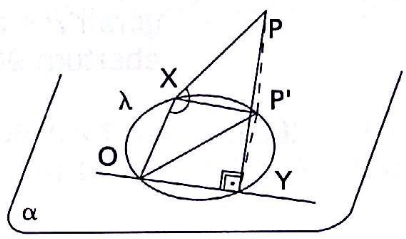


Consideremos um plano α, passando por $\overleftrightarrow{OX}$, sendo perpendicular ao plano (X, O, P).
O ponto X é pé de uma perpendicular $\left(\overleftrightarrow{PX}\right)$, conduzida por P, a um plano (α) que passa por O.

2ª parte: Seja Y, Y $\neq$ O e Y $\neq$ P, o pé da perpendicular $\overleftrightarrow{PY}$ a um plano β que passa por O.
A reta $\overleftrightarrow{PY}$ é perpendicular à reta $\overline{OY}$, pois $\overleftrightarrow{PY}$ é perpendicular a β em Y e $O \in \beta$.
Então, o ponto Y pertence a uma circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ e o ponto Y pertence à superfície esférica S.
Notemos que os pontos O e P também têm a propriedade do lugar geométrico.

Conclusão: S é o lugar geométrico pedido.

118. P' é a projeção ortogonal de P sobre α.
λ é a circunferência, contida em α, de diâmetro $\overline{OP}$.



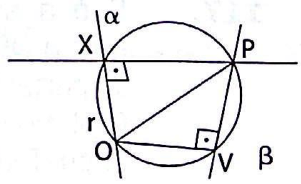
1ª parte: Seja $X \in \lambda$, $X \neq O$ e $X \neq P'$.
$(X \in \lambda, X \neq O, X \neq P') \Rightarrow$ OXP' é reta $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{P'X}$

Sendo $\overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{P'X}$, pelo teorema das três perpendiculares (exercício 72), vem que $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{OX}$.
Sendo $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{OX}$, o ponto X tem a propriedade do lugar.

2ª parte: Seja Y, $Y \in \alpha$, $Y \neq O$, $y \neq P'$ e tal que $\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{P'Y}$.
Pelo recíproco do teorema das três perpendiculares (exercício 73), vem que $\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{P'Y}$.
$\left(\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{P'Y}, Y \in \alpha\right) \Rightarrow \overline{OYP'}$ é reto $\Rightarrow Y \in \lambda$
Por fim notemos que os pontos O e P' também gozam da propriedade do lugar geométrico.

Conclusão: λ é o lugar geométrico procurado.

119. Considere o plano perpendicular a *r* conduzido pelo ponto P e seja O a interseção dele com a reta *r*.
λ é uma circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ contida no plano considerado.



Agora prove que todo ponto de λ tem a propriedade e que todo ponto que tem a propriedade do enunciado (é pé de perpendicular) pertence a λ, de modo análogo ao feito no exercício 117.

CAPÍTULO V — Diedros

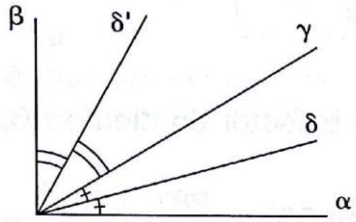
120. Resolvido.

121. Resolvido.

122. Resolvido.

123. Resolvido.

124. Na secção reta temos a situação da figura abaixo.

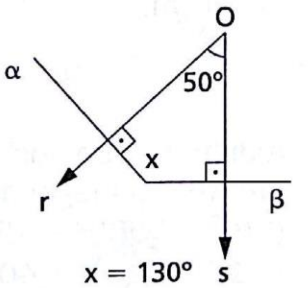


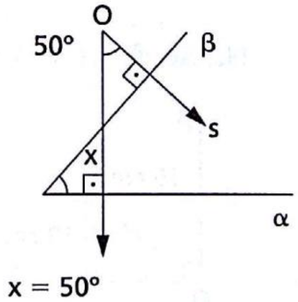
δ: bissetor de αγ
δ': bissetor de γβ

$(\alpha\gamma + \gamma\beta = 90°;\ \alpha\delta = \delta\gamma;\ \gamma\delta' = \delta'\beta) \Rightarrow \delta\delta' = \delta\gamma + \gamma\delta' =$

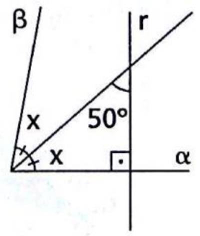
$= \dfrac{\alpha\gamma}{2} + \dfrac{\gamma\beta}{2} = \dfrac{\alpha\gamma + \gamma\beta}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$

125. O plano de $r\hat{O}s$ determina uma seção reta no diedro αβ. O ângulo $r\hat{O}s$ e a seção reta são ângulos de lados respectivamente perpendiculares e portanto são congruentes ou suplementares.
Como $r\hat{O}s = 50°$, vem que αβ mede 50° ou 130°.





126. O ângulo *x* mede 40°.
Então, o diedro αβ mede 80°.

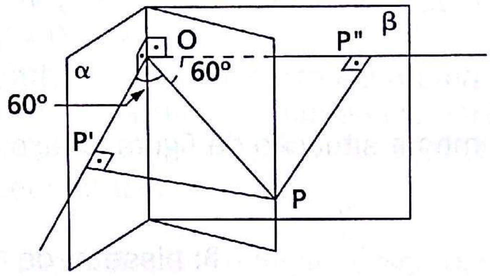


127. Basta traçar uma seção reta e obter ângulos que são opostos pelo vértice.

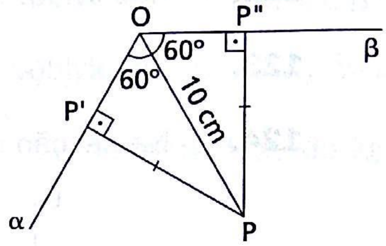
128. Recai em ângulos de lados respectivamente paralelos que são congruentes ou suplementares. Se um deles mede *a*, o outro mede *a* ou 180° − a.

129. Resolvido.

130. No espaço



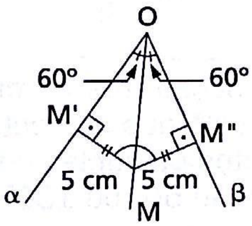
Na seção reta



Como P pertence ao bissetor do diedro αβ, $\overline{PP'} \equiv \overline{PP''}$ e $\triangle OPP' \equiv$ $\equiv \triangle OPP''$.

No $\triangle OPP'$, temos: $\text{sen } 60° = \dfrac{PP'}{10} \Rightarrow PP' = 5\sqrt{3}$.

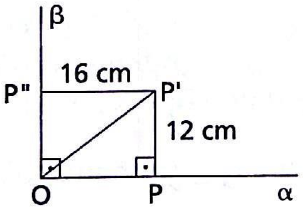
131. Na seção reta, temos:



Se $\overline{MM'} \equiv \overline{MM''} = 5$ cm, então *M* pertence ao bissetor do diedro αβ. No $\triangle OMM'$ temos:

$\cos 60° = \dfrac{MM'}{OM} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{OM} \Rightarrow \overline{OM} =$ $= 10$ cm.

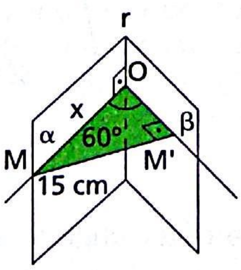
132. Na seção reta, temos:



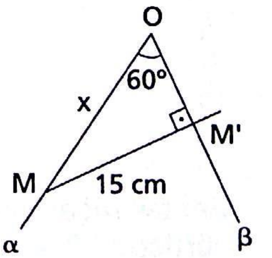
A distância do ponto P até a aresta do diedro αβ é a diagonal do retângulo PP'OP".

$(OP)^2 = (OP')^2 + (PP')^2 =$
$= 16^2 + 12^2 = 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow OP = 20$ cm

133. No espaço



Na seção reta

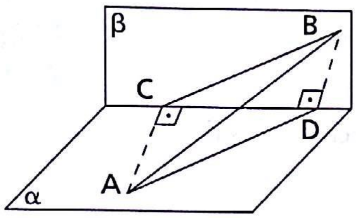


No $\triangle OM'M$ temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{MM'}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{OM} \Rightarrow OM = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow OM = 10\sqrt{3} \text{ cm.}$$

134. Resolvido.

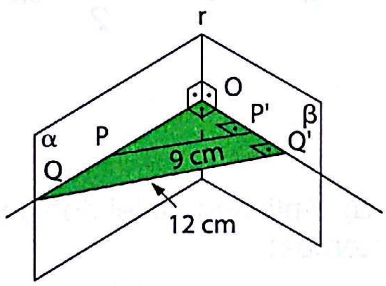
135.



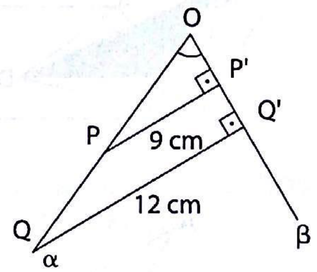
Na figura ao lado, temos: AB = 75 cm; AC = 50 cm; BD = 55 cm.
Como o diedro $\alpha\beta$ é reto, o $\triangle ABC$ é retângulo em C. Aplicando Pitágoras, temos:
$BC^2 = 75^2 - 50^2 \Rightarrow BC^2 = 3125$.

O triângulo BCD é retângulo em D. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:
$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 3\,125 - 3\,025 = 100 \Rightarrow CD = 10$ cm.

136. No espaço



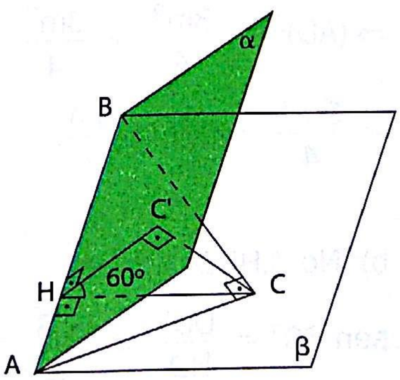
Na seção reta



Os triângulos OPP' e OQQ' são semelhantes e, portanto,

$$\frac{QQ'}{PP'} = \frac{OQ}{OP} \Rightarrow \frac{12}{9} = \frac{20}{OP} \Rightarrow OP = 15 \text{ cm.}$$

137. Na figura abaixo, temos:

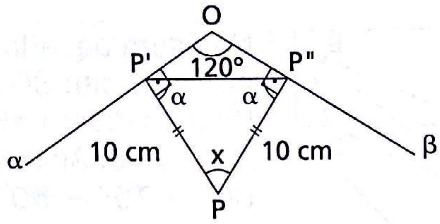


AC = 6 cm, BC = 8 cm e $\triangle ABC$ é retângulo em $\hat{C}$. Por Pitágoras calculamos $AB = 10$ cm.
O segmento $\overline{CH}$ é altura do $\triangle ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow (BC) \cdot (AC) = (AB) \cdot (CH) \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 \cdot 6 = 10 \cdot (CH) \Rightarrow CH = \dfrac{24}{5}$

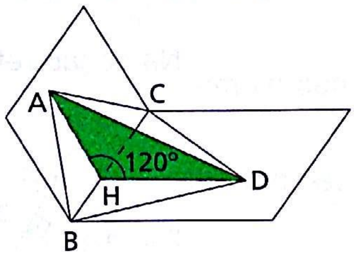
No $\triangle$ retângulo CHC', temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{CC'}{CH} \Rightarrow CC' = \frac{24}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{5} \text{ cm.}$$

138. Na seção reta, temos: PP' = PP" = 10 cm.
No quadrilátero PP'OP", temos:
$120° + 90° + x + 90° = 360° \Rightarrow x = 60°$.
No $\triangle$PP'P", temos:
$60° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle$PP'P" é equilátero $\Rightarrow$ P'P" = 10 cm.

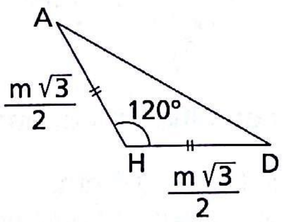


139.



$AB = AC = BC = CD = BD = m \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = HD = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$ cm



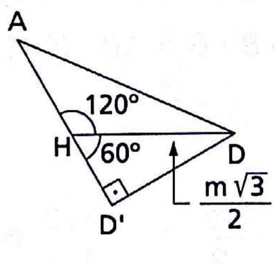
a) Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle$AHD, temos:

$$(AD)^2 = \left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2 -$$

$$-2\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AD)^2 = \frac{3m^2}{4} + \frac{3m^2}{4} + \frac{3m^2}{4} =$$

$$= \frac{9m^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{3m}{2}.$$



b) No $\triangle$HDD' temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{DD'}{HD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DD}{\frac{m\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DD' = \frac{3m}{4}$$

140. a) V b) V
c) F, pois pode ser paralelo à outra face.
d) F, pois a soma das medidas dos diedros vale 52°.
e) V

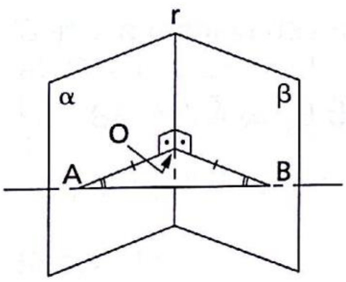
141. a) V b) V
c) F, pois podem ser adjacentes.
d) V e) F f) V
g) F, pois a secção pode não ser normal.
h) V i) V j) V

142. a) V b) V c) V d) V e) V f) V

143. Resolvido.

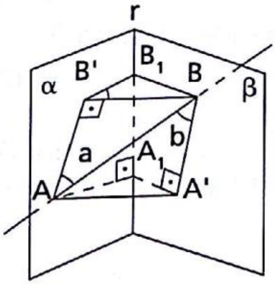
144. Resolvido.

145. 1º caso
$\overleftrightarrow{AB}$ ortogonal a *r* (aresta do diedro)



Neste caso, a conclusão é imediata, pois o $\triangle AOB$ é isósceles.

2º caso
$\overleftrightarrow{AB}$ não ortogonal a *r*



Sejam:
$B' = \text{proj}_\alpha B$
$A' = \text{proj}_\alpha A$
$\overline{BB_1} \perp r$, $\overline{AA_1} \perp r$
$\hat{a}$ = ângulo de $\overleftrightarrow{AB}$ com α
$\hat{b}$ = ângulo de $\overleftrightarrow{AB}$ com β

Condição necessária
$\hat{a} = \hat{b} \Rightarrow \overline{AA_1} \equiv \overline{BB_1}$

Demonstração

Os triângulos ABA' e BAB' são congruentes (hipotenusa comum, $\hat{a} \equiv \hat{b}$) e, portanto, $\overline{BB'} \equiv \overline{AA'}$. (1)

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AA'} \perp \beta \Rightarrow \overline{AA'} \perp r \\ \overline{AA_1} \perp r \end{array}\right\} \widehat{AA_1A'} \text{ é seção reta do di (r)}$$

Analogamente, $\widehat{BB_1B'}$ é seção reta do di (r).

Logo, $\widehat{AA_1A'} \equiv \widehat{BB_1B'}$. (2)

$\overline{AA'} \perp \beta \Rightarrow \overline{AA'} \perp \overline{A1A'} \Rightarrow \triangle AA'A_1$ é retângulo em A'. (3)
Analogamente, $\triangle BB'B_1$ é retângulo em B'. (4)
$((1), (2), (3) \text{ e } (4)) \Rightarrow \triangle AA'A_1 \equiv \triangle BB'B_1 \Rightarrow \overline{AA_1} \equiv \overline{BB_1}$

Condição suficiente
$\overline{AA_1} \equiv \overline{BB_1} \Rightarrow \hat{a} \equiv \hat{b}$

Demonstração

Sequência:
1) Hipótese $\Rightarrow \triangle AA'A_1 = \triangle BB'B_1 \Rightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$
2) $\triangle ABA' \equiv \triangle BAB' \Rightarrow \hat{a} \equiv \hat{b}$

146. Resolvido.

147. Resolvido.

CAPÍTULO VI — Triedros

148. Resolvido.

149. Resolvido.

150. Seja x a medida da terceira face.
a) $0° < x < 180°$ (1)
b) $x + 110° + 140° < 360° \Rightarrow x < 110°$ (2)
c) $|140° - 110°| < x < 140° + 110° \Rightarrow 30° < x < 250°$ (3)
$((1); (2); (3)) \Rightarrow 30° < x < 110°$

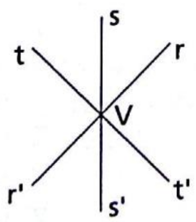
151. $f_1 = x$; $f_2 = 2x - 60°$; $f_3 = 30°$
a) $x < 2x - 60° + 30° \Rightarrow x - 2x < -30° \Rightarrow x > 30°$ (1)
b) $2x - 60° < x + 30° \Rightarrow x < 90°$ (2)
c) $30° < x + 2x - 60° \Rightarrow 90° < 3x \Rightarrow x > 30°$ (1)
d) $x + 2x - 60° + 30° < 360° \Rightarrow 3x < 390° \Rightarrow x < 130°$ (3)
$((1); (2); (3)) \Rightarrow 30° < x < 90°$

152. Seja x a medida das faces do triedro.
a) $0 < x < 180°$ (1)
b) $|x - x| < x < x + x \Rightarrow 0 < x < 2x$ (2)
c) $x + x + x < 360° \Rightarrow x < 120°$ (3)
$((1); (2); (3)) \Rightarrow 0 < x < 120°$

153. Resolvido.

154. a) F, pois uma das faces é maior que a soma das outras duas.
b) V
c) F, pois a soma das faces deve ser menor do que 360°.
d) V
e) F
f) F, pois as semirretas podem ser coplanares.
g) V

155. Consideremos cada reta dividida em duas semirretas por V e teremos determinados 8 triedros, a saber:



1) V(r, s, t)
2) V(r', s', t)
3) V(r, s', t)
4) V(r, s, t')
5) V(r', s',t')
6) V(r, s', t')
7) V(r', s, t')
8) V(r', s', t)

156. Resolvido.

157. a) Se $d_1 = 90°$, $d_2 = 90°$ e $d_3 = 90°$ no polar, temos $f_1 = 90°$, $f_2 = 90°$ e $f_3 = 90°$ e, portanto, existe o triedro.

b) Se $d_1 = d_2 = d_3 = 60°$, no polar temos $f_1 = f_2 = f_3 = 120°$ e o triedro não existe porque $120° + 120° + 120° = 360°$.

c) $d_1 = 200°$; $d_2 = 300°$; $d_3 = 100°$
Neste caso não existe o triedro porque $d_1 + d_2 + d_3 = 600°$ e $600° > 6$ retos.

d) $d_1 = 120°$; $d_2 = 200°$; $d_3 = 15°$
Neste caso não existe o triedro porque
$15° + 180° < 120° + 200°$.

e) $d_1 = 125°$; $d_2 = 165°$; $d_3 = 195°$
Neste caso não existe o triedro porque
$125° + 180° < 165° + 195°$.

f) $d_1 = 175°$; $d_2 = 99°$; $d_3 = 94°$
Neste caso não existe o triedro porque
$94° + 180° = 175° + 99°$.

g) $d_1 = 100°$; $d_2 = 57°$; $d_3 = 43°$
Neste caso existe o triedro.

h) $d_1 = 110°$; $d_2 = 100°$; $d_3 = 70°$
Neste caso existe o triedro.

158. Não, porque no polar teríamos:
$f_1 = 140°$, $f_2 = 130°$ e $f_3 = 120°$ e $140° + 130° + 120° > 360°$.

159. Sejam $90°$, x, y as medidas dos diedros do triedro.

a) $180° < 90° + x + y < 540° \Rightarrow 90° < x + y < 450°$ (1)

b) $90° + 180° > x + y \Rightarrow x + y < 270°$ (2)

(1) e (2) $\Rightarrow 90° < x + y < 270°$

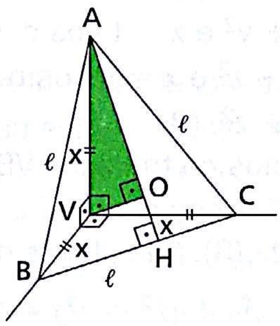
160. $d_1 = x$, $d_2 = 60°$, $d_3 = 110°$
No polar temos:
$f_1 = 180° - x$, $f_2 = 120°$, $f_3 = 70°$
$0° < x < 180°$. (1)

$(180° - x) + 120° + 70° < 360° \Rightarrow x > 10°$ (2)
$120° - 70° < 180° - x < 120° + 70° \Rightarrow$
$\Rightarrow -130° < x < 10° \Rightarrow 130° > x > -10°$ (3)
((1), (2) e (3)) $\Rightarrow 10° < x < 130°$

161. Resolvido.

162. Resolvido.

163. $\overline{AH}$: altura do $\triangle$ equilátero ABC $\Rightarrow AH = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$



Se o $\triangle$ABC é equilátero e o triedro é trirretângulo, então os triângulos
VAB, VBC e VAC são retângulos e congruentes.

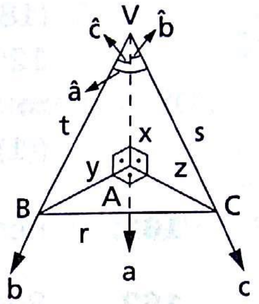
No $\triangle$VAB temos: $(AB)^2 = (AV)^2 + (VB)^2 \Rightarrow \ell^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

No $\triangle$ retângulo VAO, temos $(AV)^2 = (VO)^2 + (AO)^2$, em que VO é a distância procurada e $AO = \dfrac{2}{3}$ (AH).
Substituindo:

$$\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \overline{VO}^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{VO}^2 = \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{3} \Rightarrow \overline{VO} = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}.$$

164. a) V
b) F, pois no polar teríamos: $f_1 = 140°$; $f_2 = 110°$ e $f_3 = 110°$ e a soma das faces do triedro não seria menor do que 360°.
c) V
d) F, pois as faces do triedro podem não ter a mesma medida.
e) F, pois cada face do triedro é menor que a soma das outras duas.
f) F, pois as retas *r*, *s*, *t* podem ser coplanares.
g) V
h) V

165. Seja V(a, b, c) o triedro onde o diedro de aresta Va é reto.
Sejam *a*, *b*, *c* as medidas das faces bc, ac e ab respectivamente. Devemos provar que:
cos a = cos b · cos c.



Demonstração

Tomemos um ponto A em Va e tracemos a seção reta do diedro de aresta Va (que é reto) determinando B em Vb e C em Vc.
Nomenclatura:
AV = x, AB = y e AC = z
VB = t, VG = s e BC = r
$\triangle$VAB: $t^2 = x^2 + y^2$ e $x = t \cos c$ (1)
$\triangle$VAC: $s^2 = x^2 + z^2$ e $x = s \cos b$ (2)
$\triangle$BAC: $r^2 = y^2 + z^2$ (3)
A lei dos cossenos no triângulo VBC nos dá:
$r^2 = t^2 + s^2 - 2ts \cos a$
Substituindo *r* de (3), *t* de (1) e *s* de (2), vem:

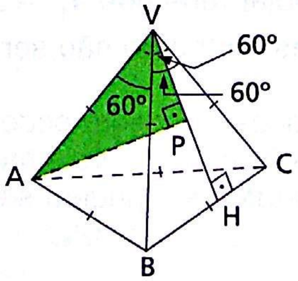
$$y^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) - 2 \cdot \frac{x}{\cos c} \cdot \frac{x}{\cos b} \cdot \cos a$$

Daí vem que cos b · cos c = cos a.

166. $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC} = 9$ cm
Os triângulos VAB, VBC, VAC e ABC são congruentes e equiláteros e seus lados medem 9 cm.
No triângulo retângulo VAP, temos:
$(VA)^2 = (AP)^2 + (VP)^2$ em que
VA = 9 cm e

$$VP = \frac{2}{3}VH = \frac{2}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

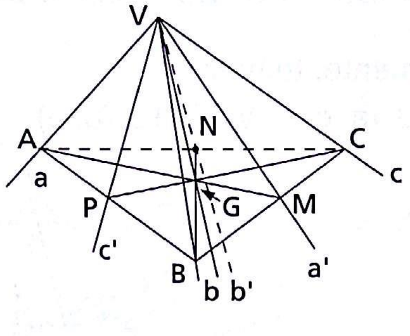
Substituindo, temos:
$81 = \overline{AP}^2 + 27 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{54} \Rightarrow \overline{AP} = 3\sqrt{6}$ cm.



167. Resolvido.

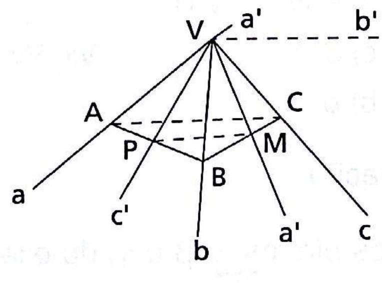
168. Resolvido.

169.



Seja V(a, b, c) o triedro e os planos (a, a'), (b, b') e (c, c'). Tomemos em *a*, *b* e *c*, respectivamente, os pontos A, B e C, tais que $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC}$. As bissetrizes a', b' e c' determinam os pontos médios M, N e P nos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo ABC. As medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ interceptam-se no ponto G, baricentro do $\triangle$ABC. Os planos (a, a'), (b, b') e (c, c') têm os pontos comuns V e G que são distintos, logo têm $\overleftrightarrow{VG}$ comum.

170.



Como no problema anterior, temos:
$A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ tais que $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC}$.
As bissetrizes a' e c' determinam os pontos médios M e P nos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ do $\triangle$ABC.
Se M é o ponto médio de $\overline{BC}$ e P é o ponto médio de $\overline{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.
Como $\triangle$VAC é isósceles $\Rightarrow b' \parallel \overleftrightarrow{AC}$
$\left(b' \parallel \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overleftrightarrow{MP} \parallel b' \Rightarrow \overleftrightarrow{MP}$ e b' determinam um único plano.
Conclusão: as bissetrizes a', b', c' estão no plano determinado por $\overleftrightarrow{MP}$ e b'.

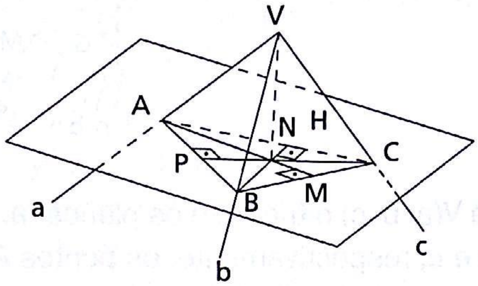
171. Consideremos o plano α perpendicular à aresta Va, por um ponto $A \in Va$, $A \neq V$. Este plano determina B em Vb e C em Vc. Sejam $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ as alturas do $\triangle ABC$ e H o ortocentro desse triângulo.

$\{H\} = \overline{AM} \cap \overline{BN} \cap \overline{CP}$

$\overline{VA} \perp \alpha \Rightarrow (\overline{BC} \perp \overline{VA} \text{ e } \overline{BC} \perp \overline{AM}) \Rightarrow \overline{BC} \perp (V, A, M) \Rightarrow (V, A, M) \perp (b, c).$

Analogamente, temos:

$(V, B, N) \perp (a, c)$ e $(V, C, P) \perp (a, b)$.



Conclusão:

Os planos (V, A, M), (V, B, N) e (V, C, P) são, respectivamente, os planos α, β e γ do enunciado e têm a reta $\overleftrightarrow{VH}$ comum.

172. Hipóteses Tese

$$\left.\begin{array}{l} Vx \subset (b, c) \text{ e } Vx \perp Va \\ Vy \subset (a, c) \text{ e } Vy \perp Vb \\ Vz \subset (a, b) \text{ e } Vz \perp Vc \end{array}\right\} \Rightarrow Vx, Vy, Vz \text{ são coplanares}$$

Demonstração

Conduza os planos α, β e γ, do exercício anterior. Esses planos têm uma reta comum $\overleftrightarrow{VH}$.

$$\left.\begin{array}{l} Vx \perp \overleftrightarrow{VH} \text{ em } V \\ Vy \perp \overleftrightarrow{VH} \text{ em } V \\ Vz \perp \overleftrightarrow{VH} \text{ em } V \end{array}\right\} \Rightarrow Vx, Vy, Vz \text{ são coplanares}$$

173. Resolvido.

174. $x < 120° + 140° + 90° \Rightarrow x < 350°$ (1)

$x + 120° + 140° + 90° < 360° \Rightarrow x < 10°$ (2)

$((1) \text{ e } (2)) \Rightarrow 0° < x < 10°$

175. $x < 20° + 30° + 120° \Rightarrow x < 170°$ (1)
$x + 20° + 30° + 120° < 360° \Rightarrow x < 190°$ (2)
$120° < x + 20° + 30°$
$70° < x \Rightarrow x > 70°$ (3)
((1), (2) e (3)) $\Rightarrow 70° < x < 170°$

176. $x < 10° + 20° + 30° + 40° + 50° + 160° \Rightarrow x < 310°$ (1)
$x + 10° + 20° + 30° + 40° + 50° + 160° < 360° \Rightarrow x < 50°$ (2)
$160° < x + 10° + 20° + 30° + 40° + 50° \Rightarrow 10° < x \Rightarrow x > 10°$ (3)
((1), (2) e (3)) $\Rightarrow 10° < x < 50°$

177. a) Neste caso não existe o ângulo poliédrico porque
$150° > 40° + 60° + 30°$.
b) Neste caso não existe o ângulo poliédrico porque
$100° + 120° + 130° + 70° > 360°$.
c) Existe.
d) Existe.
e) Existe.

178. a) Com todas as faces iguais a 60° podemos formar ângulos poliédricos de 3 faces, 4 faces ou 5 faces.
b) Com todas as faces iguais a 90° podemos formar ângulos poliédricos de 3 faces ou 4 faces.
c) Com todas as faces iguais a 120°, não é possível formar ângulo poliédrico.

179. O número máximo de arestas de um ângulo poliédrico convexo cujas faces são todas iguais a 70° é cinco.
Sendo *n* inteiro, temos:

$$n \cdot 70 < 360 \Rightarrow n < \frac{360}{70} \Rightarrow n = 5$$

CAPÍTULO VII — Poliedros convexos

180. Resolvido.

181. Designemos por:

F_3: nº de faces triangulares $\Rightarrow F_3 = 3$

F_4: nº de faces quadrangulares $\Rightarrow F_4 = 1$

F_5: nº de faces pentagonais $\Rightarrow F_5 = 1$

F_6: nº de faces hexagonais $\Rightarrow F_6 = 2$

$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \Rightarrow F = 7$

$$A = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2} \Rightarrow A = \frac{30}{2} \Rightarrow A = 15$$

Da relação de Euler: $V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$

183. $A = V + 6$

$F = ?$

Da relação de Euler:

$V - A + F = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V - (V + 6) + F = 2 \Rightarrow F = 8$

185. F_3: nº de faces triangulares

F_4: nº de faces quadrangulares

$F_5 = 1$

$F_3 = F_4 \Rightarrow F = 2F_3 + 1$

$V = 11$

$$A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5 \cdot 1}{2} = \frac{7F_3 + 5}{2}$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow 11 - \frac{7F_3 + 5}{2} + 2F_3 + 1 = 2 \Rightarrow F_3 = 5$$

$F = 2F_3 + 1 \Rightarrow F = 2 \cdot 5 + 1 \Rightarrow F = 11$

186. F_3: nº de faces triangulares

F_4: nº de faces quadrangulares

$A = 20$ e $V = 10$

$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$

$F_3 + F_4 = 12$ e $\dfrac{3F_3 + 4F_4}{2} = 20$ nos dão: $F_4 = 4$ e $F_3 = 8$

187. Resolvido.

189. $V = 5 + 7 + 9 + 8 = 29$

$$A = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 6}{2} = \frac{15 + 28 + 45 + 48}{2} = 68$$

$(V - A + F = 2, V = 29, A = 68) \Rightarrow F = 41$

194. Dados: $F_3 = 2k$, $F_4 = 3k$ $A = 2V$

$F = F_3 + F_4 \Rightarrow F = 5k$

$2A = 3F_3 + 4F_4 \Rightarrow 2A = 6k + 12k \Rightarrow A = 9k$

$V - A + F = 2 \Rightarrow 9k - 2 \cdot 9k + 2 \cdot 5k = 4 \cdot k = 4$

$F = 5k \Rightarrow F = 5 \cdot 4 \Rightarrow F = 20$

195. $F_3 = F_5 + 2$ e $V = 7$

$$\left.\begin{array}{l} F = F_3 + F_4 + F_5 \Rightarrow F = F_4 + 2F_5 + 2 \\ 2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \Rightarrow A = 2F_4 + 4F_5 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2F - 1$$

$(V - A + F = 2, V = 7, A = 2F - 1) \Rightarrow F = 6 \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 2 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_4 + 2F_5 = 4$

Daí temos que $F_4 = 4 - 2F_5$ e, sendo F_5 um número inteiro positivo, o único valor para F_5 que resulta F_4 também inteiro e positivo é $F_5 = 1$. Logo, $F_5 = 1$ e $F_4 = 2$, e então: $F_3 = 3$.

196. Nomenclatura: V, A e F para o poliedro primitivo, e V', A' e F' para o novo poliedro.

$$\left.\begin{array}{l} F = F_3 + F_4 \\ A = 24 \Rightarrow V + F = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow V + F_3 + F_4 = 26 \ \ (1)$$

$A = 24 \Rightarrow 3F_3 + 4F_4 = 48$ (2)

$F' = F_4' = F_4 + 1$ e $V' = V - 1$

$2A' = 4F_4' \Rightarrow A' = 2F_4' \Rightarrow A' = 2F'$

Substituindo A' na relação de Euler no novo poliedro, vem:

$V' - A' + F' = 2 \Rightarrow V' - 2F' + F' = 2 \Rightarrow V' - F' = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (V - 1) - (F_4 + 1) = 2 \Rightarrow V - F_4 = 4$ (3)

Substituindo V de (3) em (1), temos: $F_3 + 2F_4 = 22$. (4)

Resolvendo o sistema (2) e (4), vem: $F_3 = 4$ e $F_4 = 9$.

Portanto, $F = F_3 + F_4 = 4 + 9 = 13$.

197. $F = a + b + c$

$$A = \frac{a \cdot \ell + bm + cn}{2}$$

Como A é um número inteiro e positivo, então $a\ell + bm + cn$ deve ser número par.

$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 2 + A - F$

$$V = 2 + \frac{a\ell + bm + cn}{2} - (a + b + c)$$

$$V = \frac{4 + a\ell + bm + cn - 2a - 2b - 2c}{2}$$

$$V = \frac{4 + a(\ell - 2) + b(m - 2) + c(n - 2)}{2}$$

198. Resolvido.

200. $A = 28$
$F = F_3 + F_7 \Rightarrow 2A = 3F_3 + 7F_7 \Rightarrow 3F_3 + 7F_7 = 56 \quad (1)$
$S = 64r \Rightarrow (V - 2) \cdot 4r = 64r \Rightarrow V = 18$
$(V - A + F = 2, A = 28, V = 18) \Rightarrow F = 12 \Rightarrow F_3 + F_7 = 12 \quad (2)$
De (1) e (2) vem: $F_3 = 7$ e $F_7 = 5$.

203. O poliedro é o dodecaedro regular: $A = 30$, $F = 12$, $V = 20$.
Ao retirar as três faces adjacentes a um vértice comum, retiramos 3 arestas e o vértice comum. Ficamos então com $F' = 11$, $A' = 27$ e $V' = 19$ e notamos que $V' - A' + F' = 1$ vale para a superfície aberta que restou.

204. Resolvido.

205. Resolvido.

206. Resolvido.

207. Designemos por:
V_3: o número de ângulos triedros
V_4: o número de ângulos tetraédricos
V_5: o número de ângulos pentaédricos
V_6: o número de ângulos hexaédricos
etc.
Temos de provar que
$V_3 + V_5 + V_7 + \ldots$ é par.
De fato:
$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + \ldots = 2A \Rightarrow$
$\Rightarrow V_3 + V_5 + V_7 + \ldots = 2A - 2(V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 3V_6 + 3V_7 + \ldots) =$
$= 2(A - V_3 - 2V_4 - 2V_5 - 3V_6 - 3V_7 - \ldots)$, o que prova a tese.

208. Usando a mesma nomenclatura dos problemas anteriores e sabendo que:
$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + \ldots$
$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + \ldots$

e que $V - A + F = 2$ (relação de Euler), temos:
$2V - 2A + 2F = 4 \Rightarrow 2F = 4 + 2A - 2V \Rightarrow$
$\Rightarrow 2F = 4 + (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + ...) -$
$- 2(V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + ...) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + ...$, o que prova a tese.

209. Resolvido.

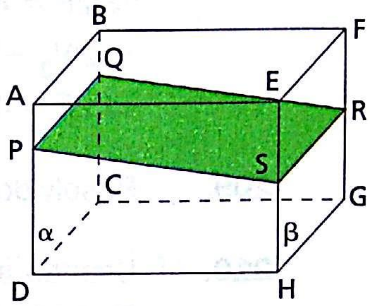
210. Usando a mesma nomenclatura dos problemas anteriores, precisamos provar que $F_3 + V_3 \geqslant 8$.
Sabemos que:
$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$
$F = F_3 + F_4 + F_5 + ...$
$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ...$
$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + ...$
e a relação de Euler $V - A + F = 2$
nos dá: $4V - 4A + 4F = 8 \Rightarrow 4V + 4F = 8 + 4A$
Substituindo 2A com faces e 2A com vértices, vem:
$4(V_3 + V_4 + V_5 + ...) + 4(F_3 + F_4 + F_5 + ...) =$
$= 8 + (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...) + (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ...) \Rightarrow$
$\Rightarrow F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + ...) + (V_5 + ...) \Rightarrow$
$\Rightarrow F_3 + V_3 \geqslant 8$

211. Utilizando a mesma nomenclatura dos problemas anteriores, vamos inicialmente provar que $3F \leqslant 2A$ e $3V \leqslant 2A$.
$F = F_3 + F_4 + F_5 + ...$
$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... \Rightarrow$
$\Rightarrow 2A = (3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + ...) + (F_4 + 2F_5 + ...) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2A = 3F + (F_4 + 2F_5 + ...) \Rightarrow 2A \geqslant 3F \Rightarrow 3F \leqslant 2A \quad (1)$
Analogamente, $3V \leqslant 2A$. (2)
Da relação de Euler $V - A + F = 2$, vem:
$A + 2 = V + F \Rightarrow 3A + 6 = 3V + 3F$.
Mas $3V \leqslant 2A \Rightarrow 3A + 6 \leqslant 2A + 3F \Rightarrow A + 6 \leqslant 3F$. (3)
De (1) e (3) $\Rightarrow A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A$.
Utilizando a desigualdade (1) e a relação de Euler, temos:
$A + 6 \leqslant 3V \leqslant 2A$

212. Sendo V o nº de átomos e A o nº de ligações entre eles, temos:
$2A = 12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 \Rightarrow A = 90$
$V \cdot A + F = 2 \Rightarrow V = 60$

CAPÍTULO VIII — Prisma

227. Na figura, α é o plano da face ABCD e β é o plano da face EFGH e seja π o plano que intercepta as quatro arestas paralelas determinando o quadrilátero PQRS. Temos:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{RS} \\ \text{Analogamente, } \overline{PR} \parallel \overline{QS}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{PQRS é paralelogramo}$$

241. $2(ab + ac + bc) = 62 \quad a + b + c = 10$

Substituindo os dados na expressão $(a + b + c)^2$, temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 = a^2 + b^2 + c^2 + 62 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 38 \Rightarrow d^2 = 38 \Rightarrow d = \sqrt{38}$ cm.

243. Sejam a_1, b_1 e c_1 as dimensões de um paralelepípedo e a_2, b_2 e c_2 as dimensões do outro. Temos:

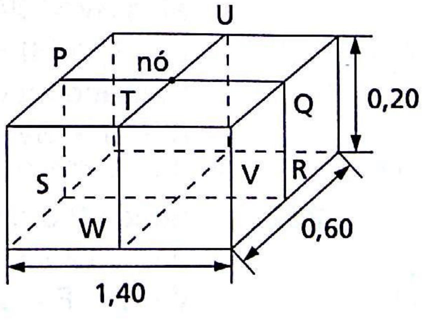
diagonais iguais $\Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ (1)

e também $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}(a_1 + b_1 + c_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + \\ + 2(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \\ (a_2 + b_2 + c_2)^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + \\ + 2(a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2)\end{array}\right\} \xrightarrow{(1)\text{ e }(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)\text{ e }(2)} 2(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) = 2(a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2)$$

248. Perímetro de PQRS $= 2 \times (1{,}40 + 0{,}20) = 3{,}20$ m. Perímetro de TUVW $= 2 \times (0{,}20 + 0{,}60) = 1{,}60$ m. Como é possível fazer o pacote usando apenas um nó, então serão gastos $3{,}20 + 1{,}60 + 0{,}20 = 5$ metros de corda.



250. Sejam *x*, *y* e *z* as dimensões. Temos:

$$\left(x = \frac{1}{r} \cdot k, y = \frac{1}{s} \cdot k, z = \frac{1}{t} \cdot k\right) \Rightarrow \left(x = \frac{st k}{rst}, y = \frac{rt k}{srt}, z = \frac{rs k}{rst},\right.$$

$$\left. K = \frac{k}{rst}\right) \Rightarrow (x = stK, y = rtK, z = rsK)\ (1)\ S = 2(xy + xz + yz)\ (2)$$

$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow S = 2K^2(rst^2 + rs^2t + r^2st) \Rightarrow K = \sqrt{\frac{S}{2rst(t + s + r)}}$$

Substituindo em (1), vem:

$$x = \sqrt{\frac{Sst}{2r(t + s + r)}}, y = \sqrt{\frac{Srt}{2s(r + s + t)}}, z = \sqrt{\frac{Srs}{2t(r + s + t)}}.$$

251. $ab = pk\ (1); ac = qk\ (2); bc = rk\ (3)$

$$2(ab + ac + bc) = 2\ell^2 \Rightarrow k(p + q + r) = \ell^2 \Rightarrow k = \frac{\ell^2}{p + q + r}$$

Fazendo $[(1) : (2)] \times (3)$, temos:

$$ab \cdot \frac{1}{ac} \cdot bc = pk \cdot \frac{1}{qk} \cdot rk \Rightarrow b = \ell\sqrt{\frac{pr}{q(p + q + r)}}.$$

Analogamente, $a = \ell\sqrt{\dfrac{pq}{r(p + q + r)}}$ e $c = \ell\sqrt{\dfrac{rq}{p(p + q + r)}}$.

281. $a + b + c = 45\ (1); a^2 + b^2 = 625\ (2); 2(ab + ac + bc) = 1300\ (3)$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2025 = 625 + c^2 + 1300 \Rightarrow c = 10$ cm

Substituindo em (1) e em (2), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 35 \\ a^2 + b^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a = 20 \text{ cm}, b = 15 \text{ cm}) \text{ ou} \\ (a = 15 \text{ cm}, b = 20 \text{ cm}) \end{matrix}$$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 20 \cdot 15 \cdot 10 \Rightarrow V = 3000\ \text{cm}^3$

Resposta: Dimensões: 20 cm, 15 cm, 10 cm; volume = 3000 cm^3.

282. Sendo *x*, *y* e *z* as dimensões, temos:

$x + y + z = 43a\ (1); x^2 + y^2 + z^2 = 625a^2\ (2); xy = 180a^2\ (3)$

Calculando as dimensões:

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \Rightarrow$

$\Rightarrow (43a)^2 = 625a^2 + 2[180a^2 + z(x + y)] \Rightarrow$

$\Rightarrow 1849a^2 = 625a^2 + 2[180a^2 + z(43 - z)] \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 - 43az + 432a^2 = 0 \Rightarrow (z = 27a \text{ ou } z = 16a\ (4))$

$z = 27a \text{ em } (1) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 16a \\ xy = 180 \cdot a^2 \end{cases} \Rightarrow$ não fornece solução

$z = 16a \text{ em } (1) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 27a \\ xy = 180 \cdot a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (x = 12a, y = 15a) \text{ ou} \\ (x = 15a, y = 12a) \end{matrix}$

Volume:
$V = xyz \Rightarrow V = 12a \cdot 15a \cdot 16a \Rightarrow V = 2\,880a^3$
Área total:
$A_t = 2(xy + xz + yz) \Rightarrow A_t = 2(180a^2 + 15a \cdot 16a + 12a \cdot 16a) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 1\,224a^2$

285. Seja *a* a aresta do cubo. Temos:
$12a = 72 \Rightarrow a = 6$ cm
Sendo *x*, *y* e *z* as arestas do ortoedro, em ordem crescente, temos:

$x = \frac{2}{3} \cdot a \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot 6 \Rightarrow x = 4$ cm

$z = \frac{4}{3} \cdot x \Rightarrow z = \frac{4}{3} \cdot 4 \Rightarrow z = \frac{16}{3}$ cm

$4x + 4y + 4z = 72 \Rightarrow 4 \cdot 4 + 4 \cdot y + 4 \cdot \frac{16}{3} = 72 \Rightarrow y = \frac{26}{3}$ cm

$$\frac{V_{ortoedro}}{V_{cubo}} = \frac{xyz}{a^3} \Rightarrow \frac{V_{ortoedro}}{V_{cubo}} = \frac{4 \cdot \frac{26}{3} \cdot \frac{16}{3}}{6^3} \Rightarrow \frac{V_{ortoedro}}{V_{cubo}} = \frac{208}{243}$$

290. Sejam *a* e *b* as dimensões do paralelepípedo. Temos:

$\begin{cases} \sqrt{2a^2 + b^2} = 9 \\ 2(a^2 + 2ab) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + b^2 = 81\ (1) \\ a^2 + 2ab = 72\ (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow (a - b)^2 = 9 \Rightarrow (a - b = +3 \text{ ou } a - b = -3)$
Com $a - b = 3$, temos:
$a - b = 3 \Rightarrow b = a - 3$.
Substituindo em (2): $a^2 + 2a(a - 3) = 72 \Rightarrow a^2 - 2a - 24 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a = -4 \text{ (não serve) ou } a = 6 \text{ cm}) \Rightarrow b = 3\text{cm} \Rightarrow V = 6 \cdot 6 \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 108 \text{ cm}^3$.
Com $a - b = -3$, vem:
$a - b = -3 \Rightarrow b = a + 3$.
Substituindo em (2) e procedendo de modo análogo, obtemos
$(a = 4 \text{ cm e } b = 7\text{cm}) \Rightarrow V = 4 \cdot 4 \cdot 7 \Rightarrow V = 112 \text{ cm}^3$.

291. Seja *a* a aresta do cubo. Temos:

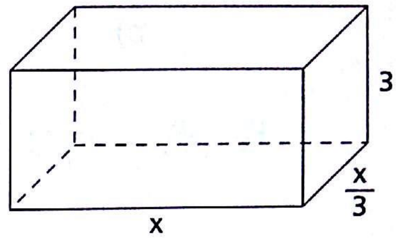
$6a^2 = 216 \Rightarrow a = 6$ cm

$2\left(x \cdot \frac{x}{3} + x \cdot 3 + \frac{x}{3} \cdot 3\right) = 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6\left(\sqrt{10} - 1\right)$ cm $=$

$\frac{V_{cubo}}{V_{ortoedro}} = \frac{a^3}{x \cdot \frac{x}{3} \cdot 3} \Rightarrow \frac{V_{cubo}}{V_{ortoedro}} = \frac{\cancel{6^3}}{\cancel{6^2}\left(\sqrt{10} - 1\right)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V_{cubo}}{V_{ortoedro}} = \frac{6}{11 - 2\sqrt{10}}.$



296. $a + a + \frac{2}{3}a = 16 \Rightarrow a = 6$ cm

$\ell^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \ell^2 = \frac{6^2}{4} + \frac{6^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = 3\sqrt{2}$ cm

$V_{cubo} = \ell^3 \Rightarrow V_{cubo} = \left(3\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cubo} = 54\sqrt{2}$ cm³

$V_{ortoedro} = a \cdot a \cdot \frac{2}{3}a \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{ortoedro} = \frac{2}{3} \cdot 6^3 = 144$ cm³

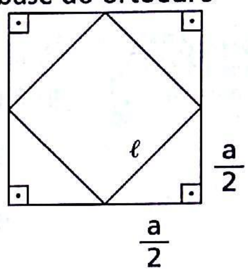
Volume (V) e área (S) do sólido:

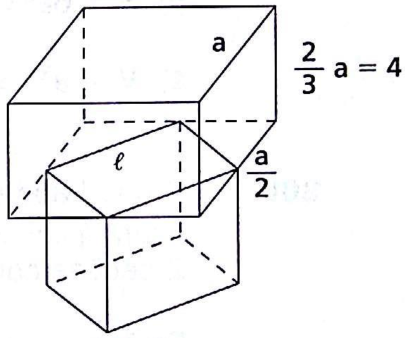
$V = V_{cubo} + V_{ortoedro} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{total} = 18\left(8 + 3\sqrt{2}\right)$ cm³

$S = 5 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 4(6 \cdot 4) + 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 240$ cm²

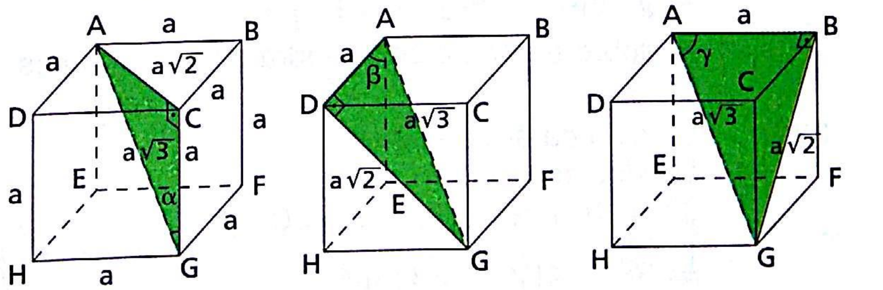
base do ortoedro





298. Considere o cubo de aresta *a*, das figuras.

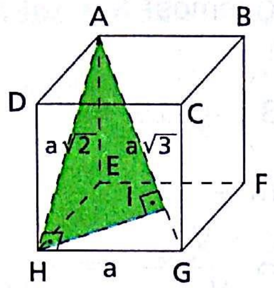
a)

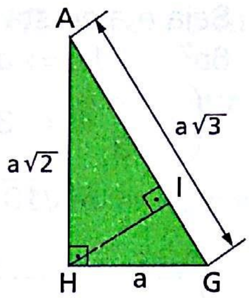


$\alpha = \text{arc sen}\ \frac{\sqrt{6}}{3}$ (1) $\beta = \text{arc sen}\ \frac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $\gamma = \text{arc sen}\ \frac{\sqrt{6}}{3}$ (3)

(1), (2) e (3) $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

b)

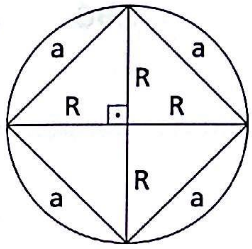




Relações métricas $\Rightarrow GH^2 = AG \cdot GI \Rightarrow a^2 = a\sqrt{3} \cdot GI \Rightarrow$

$\Rightarrow GI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow GI = \dfrac{AG}{3}$

299. $S_{círc.} = 7{,}29\pi \Rightarrow \pi R^2 = 7{,}29\pi \Rightarrow R = 2{,}7$ cm



a) Seja a a medida da aresta do cubo.

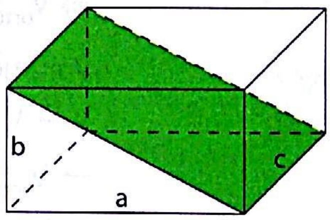
$a = R\sqrt{2} \Rightarrow a = 2{,}7\sqrt{2}$ cm

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 2{,}7\sqrt{2}\sqrt{3} \Rightarrow d = 2{,}7\sqrt{6}$ cm

b) $S = 6a^2 \Rightarrow S = 6 \cdot \left(2{,}7\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow S = 87{,}48$ cm^2

c) $V = a^3 \Rightarrow V = \left(2{,}7\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow V = 5{,}4\sqrt{2}$ cm^3

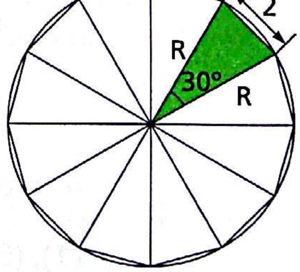
300. O quadrado da área da seção indicada na figura é $(a^2 + b^2) \cdot c^2$. Notemos que temos 2 seções com essas condições.



Então:
soma dos quadrados das áreas das 6 seções =
$= 2(a^2 + b^2) \cdot c^2 + 2(b^2 + c^2) \cdot a^2 + 2(a^2 + c^2) \cdot b^2 =$
$= 2[a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2] =$
$= 2[2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)] =$
= dobro da soma dos quadrados das 6 faces

337. Cálculo da área da base:
Lei dos cossenos:
$2^2 = R^2 + R^2 - 2RR \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 4\left(2 + \sqrt{3}\right)$ m^2



A área da base é igual a 12 vezes o valor da área do triângulo isósceles destacado na figura ao lado.

$$B = 12 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \text{sen } 30°}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 12 \cdot 4\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow B = 12\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ m}^2$$

Cálculo do volume:

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = 12\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot 10 \Rightarrow V = 120\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ m}^3$$

339. Cálculo da área da base:

$$\cos 30° = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

$$B = \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow B = 2\sqrt{3} \text{ m}^2$$

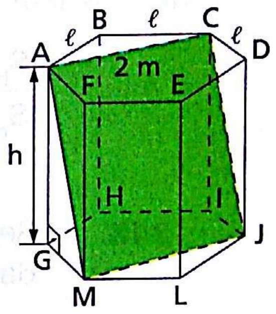


Figura 1

Cálculo da altura:

$$AG^2 = AM^2 - GM^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ m}$$

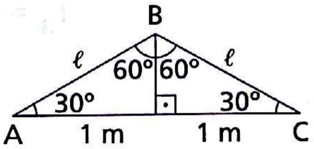


Figura 2

Volume:

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \left(2\sqrt{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow V = 4\sqrt{2} \text{ m}^2$$

340. Sejam *p* e *ℓ* o semiperímetro e a aresta da base, respectivamente. Temos:

$$A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow 12 = 2ph + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \ell^2\sqrt{3} \Rightarrow 12 = 2p + 3\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = 6\ell + 3\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\ell^2 + 2\ell - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{-2 \pm \sqrt{4\left(1 + 4\sqrt{3}\right)}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = \frac{\left(\sqrt{1 + 4\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{3}}{3}$$

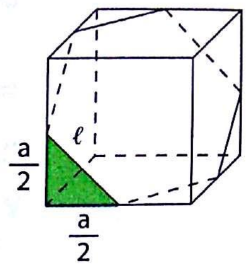
$$B = \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{1 + 4\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{3}}{3}\right]^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3 + 12\sqrt{3}}\right) \text{ dm}^2$$

$$V = B \cdot 1 \Rightarrow V = \left(\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3 + 12\sqrt{3}}\right) \text{ dm}^3$$

347. Seja *a* a aresta do cubo.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, obtemos

$\ell = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$



Sendo R o raio do círculo circunscrito ao hexágono, vem:

$R = \ell \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{S_{hex.}}{S_{círc.}} = \frac{\frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3}}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{S_{hex.}}{S_{círc.}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{S_{hex.}}{S_{círc.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

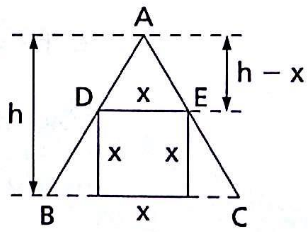
348. Seja ℓ o lado do hexágono em questão e *a* a aresta do cubo. Temos:
$6a^2 = 31{,}74 \Rightarrow a = 2{,}3$ cm

$$\ell = \frac{a}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \frac{2{,}3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2p = 6\cdot\ell \Rightarrow 2p = 6{,}9\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$\ell_3 = \frac{2p}{3} \Rightarrow \ell_3 = \frac{6{,}9\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \ell_3 = 2{,}3\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$h = \frac{\ell_3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{2{,}3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

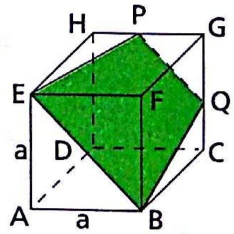
$$\Rightarrow h = \frac{2{,}3\sqrt{6}}{2}\text{ cm}$$



$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{H}{h-x} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2{,}3\sqrt{6}}{2}}{\frac{2{,}3\sqrt{6}}{2} - x} = \frac{2{,}3\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = \frac{23\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{10}\text{ cm}$$

349. a) Sendo o plano da face ABFE paralelo ao plano da face CGHD, um plano que intercepte os dois o faz segundo retas paralelas. Logo, $\overline{PQ} \mathbin{/\!/} \overline{BE}$. (1)
$\triangle PHE \equiv \triangle QCB \Rightarrow \overline{PE} \equiv \overline{QB}$ (2) ((1) e (2)) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ PEBC é trapézio isósceles.

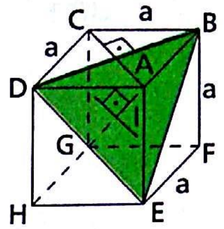


b) $BE^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow BE = a\sqrt{2}$

$$BQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow BQ = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow PE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$PQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

350. a) $\overline{BD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BE}$ (diagonais das faces) $\Rightarrow \triangle BDE$ é equilátero, de lado $a\sqrt{2}$, em que *a* é aresta do cubo.



b) Os pontos B, D e E estão a igual distância de A e G e pertencem, portanto, ao plano mediador de $\overline{AG}$.

Então a diagonal $\overline{AG}$ é perpendicular ao plano (B, D, E) num ponto I que é o ponto médio de $\overline{AG}$ e o baricentro do triângulo BDE.

c) $S_{BDE} = \dfrac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{BDE} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

368. Sejam $a - r$, a, $a + r$ as dimensões. Temos:

$$\begin{cases} 2[(a - r)a + (a - r)(a + r) + a(a + r)] = S \\ (a - r)^2 + a^2 + (a + r)^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2r^2 = 6a^2 - S \quad (1) \\ 2r^2 = d^2 - 3a^2 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2 - S = d^2 - 3a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{d^2 + S}}{3}$$

Substituindo em (1):

$$2r^2 = 6 \cdot \frac{d^2 + S}{9} - S \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}}$$

As dimensões devem ser:

$$\frac{\sqrt{d^2 + S}}{3} - \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}},\ \frac{\sqrt{d^2 + S}}{3},\ \frac{\sqrt{d^2 + S}}{3} + \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}}$$

com $2d^2 - S \geqslant 0 \Rightarrow d^2 \geqslant \dfrac{S}{2}$ (as dimensões devem ser reais)

e

$$\frac{\sqrt{d^2 + S}}{3} - \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}} > 0 \Rightarrow \frac{d^2 + S}{9} > \frac{2d^2 - S}{6} \Rightarrow 2d^2 + 2S >$$

$> 6d^2 - 3S \Rightarrow d^2 < \dfrac{5S}{4}$ (as dimensões devem ser positivas).

Note que, se $d^2 = \dfrac{S}{2}$, então o paralelepípedo retângulo será um cubo de aresta $a = \sqrt{\dfrac{d^2 + S}{3}}$.

369. Sejam:

S_1 = soma dos diedros formados pelas faces laterais do prisma triangular com uma base;

S_2 = soma dos diedros formados pelas faces laterais do prisma triangular com a outra base;

S_{DT} = soma dos diedros de um triedro. Temos:

$2r < S_{DT} < 6r$

Considerando a soma dos triedros de uma base, temos:

$6r < S_{DT_1} + S_{DT_2} + S_{DT_3} < 18r \Rightarrow 6r < 2S_1 + 2r < 18r \Rightarrow$

$\Rightarrow 4r + 2S_1 < 16r \Rightarrow 2r < S_1 < 8r \quad (1)$

Note que $S_1 + S_2 = 6r \Rightarrow S_1 = 6r - S_2$.

Substituindo em (1):

$2r < 6r - S_2 < 8r \Rightarrow -4r < -S_2 < 2r \Rightarrow S_2 < 4r \quad (2)$

De (1) e (2) e chamando S_1 e S_2 de S_D, vem:

$2r < S_D < 4r$

370. Usando a mesma notação e o mesmo raciocínio do exercício precedente, temos:

$n \cdot 2r < S_{DT_1} + S_{DT_2} + \ldots + S_{DT_n} < n \cdot 6r \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot 2r < 2S_1 + (n - 2) \cdot 2r < n \cdot 6r \Rightarrow nr < S_1 + nr - 2r < n \cdot 3r \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r < S_1 < (n + 1) \cdot 2r \quad (1)$

$S_1 + S_2 = n \cdot 2r \Rightarrow S_1 = n \cdot 2r - S_2$

Substituindo em (1):

$2r < n \cdot 2r - S_2 < (n + 1) \cdot 2r \Rightarrow 2r - n \cdot 2r < -S_2 < (n + 1) \cdot 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(1 - n) \cdot r < -S_2 \Rightarrow S_2 < (n - 1) \cdot 2r \quad (2)$

De (1) e (2) e chamando S_1 e S_2 de S_D:

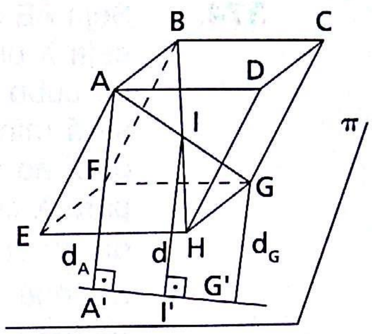
$2r < S_D < (n - 1) \cdot 2r$

371. Sejam V o volume e S a área da seção normal do prisma. Sendo ℓ: lado do polígono equilátero determinado pela seção normal; d_1, d_2, ..., d_n: distâncias do ponto no interior do prisma às faces; D_1, D_2: distâncias do ponto no interior do prisma às bases. Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\ell d_1}{2} + \dfrac{\ell d_2}{2} + \ldots + \dfrac{\ell d_n}{2} = S \\ D_1 \cdot S + D_2 \cdot S = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \dfrac{2S}{\ell} & (1) \\ D_1 + D_2 = \dfrac{V}{S} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow d_1 + d_2 + \ldots + d_n + D_1 + D_2 = \frac{2S}{\ell} + \frac{V}{S}$$

372. Seja o paralelepípedo ABCDEFGH; I o ponto de interseção de suas diagonais; π um plano que não intercepta o paralelogramo; d_A, d e d_G as distâncias dos pontos A, I e G ao plano π.



Como A, I e G são colineares, também o serão A', I' e G', suas projeções ortogonais sobre π. Então:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I é ponto médio de } \overline{AG} \\ \overline{II'} \;//\; \overline{AA'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A'I'} \equiv \overline{I'G'} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ d é base média do trapézio AGG'A'. Então: $d_A + d_G = 2d$.

Analogamente:

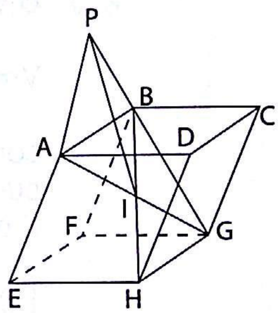
$d_B + d_H = 2d$; $d_C + d_E = 2d$; $d_D + d_F = 2d$

E dessas 4 igualdades vem:

$d_A + d_B + d_C + d_D + d_E + d_F + d_G = 8d$

373. d: a distância de P ao ponto I

Sejam: d_A, d_B, ..., d_H as distâncias de P aos vértices A, B, ..., H; D_1, D_2, D_3 e D_4 as diagonais AG, BH, CE e DF; I o ponto de interseção das diagonais.



Aplicando a relação de Stewart ao triângulo PAG, temos:

$$d_A^2 \cdot IG + d_G^2 \cdot AI - d^2 \cdot AG = AI \cdot IG \cdot AG \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_A^2 \cdot \frac{D_1}{2} + d_G^2 \cdot \frac{D_1}{2} - d^2 \cdot D_1 = \frac{D_1}{2} \cdot \frac{D_1}{2} \cdot D_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_A^2 + d_G^2 = 2d^2 + \frac{D_1^2}{2} \quad (1)$$

Analogamente, obtemos: $d_B^2 + d_H^2 = 2d^2 + \frac{D_2^2}{2}$ (2)

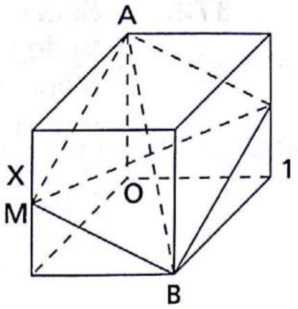
$$d_C^2 + d_E^2 = 2d^2 + \frac{D_3^2}{2} \quad (3)$$

$$d_D^2 + d_F^2 = 2d^2 + \frac{D_4^2}{2} \quad (4)$$

$$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow d_A^2 + d_B^2 + \ldots + d_H^2 = 8d^2 + \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2)$$

Em lugar da relação de Stewart, da Geometria Plana, poderíamos usar, também de lá, a expressão da mediana de um triângulo em função dos lados.

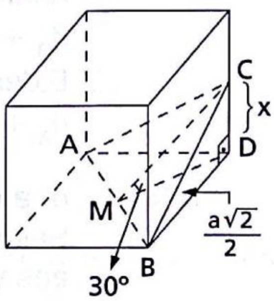
374. Seja AB a diagonal do cubo de centro O e seja X um ponto de uma aresta. A seção do cubo por um plano que passa por $\overline{AB}$ será mínima no caso em que a distância de X ao ponto O seja mínima. Isso ocorre para X coincidindo com o ponto médio M da aresta. A distância $\overline{OM}$ (cateto) é menor que qualquer outra distância $\overline{OX}$ (hipotenusa).



A área da seção mínima é duas vezes a área do △ABM.

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (OM) = a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

375. Seja $\overline{AB}$ uma diagonal de face do cubo e (A, B, C) o plano que forma 30° com a face. Esse plano determina no cubo um tetraedro trirretangular D(ABC) em que D é o triedro trirretângulo.
O volume V desse tetraedro é dado por:



$$V = \frac{1}{6}(DA) \cdot (DB) \cdot (DC) \quad (1)$$

conforme aparece no exercício 400. Como DA = DB = a, basta calcular DC = x para resolvermos o problema.
É o que segue:

$$\left(\triangle CDM,\ CD = x,\ \hat{M} = 30°,\ DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

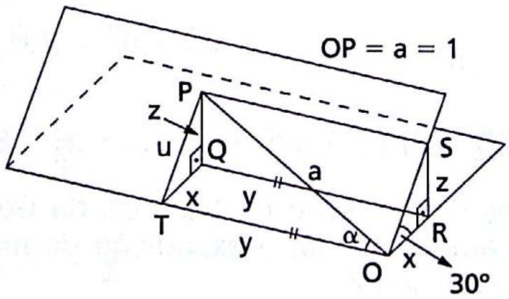
Substituindo em (1):

$$V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$$

O volume V' do outro sólido resultante é obtido por diferença:

$$V' = a^3 - V \Rightarrow V' = \frac{36 - \sqrt{6}}{36}a^3$$

376. a) Considerando os dados do problema e fazendo OR = x, OT = y, SR = z e OS = u, temos:



$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \frac{x \cdot z}{2} \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}xyz. \quad (1)$$

No $\triangle PTO$ temos: $y = \cos \alpha$ e $u = \operatorname{sen} \alpha$.

No $\triangle PQT$ vem: $x = u \cos 30° = \frac{u\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \alpha$

$$z = u \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo *x*, *y* e *z* em (1), vem:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{8} \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

b) V é máximo se a derivada de V em relação a α for nula.

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha) = 0 \Rightarrow$$

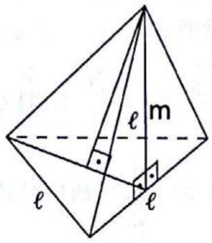
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 2$$

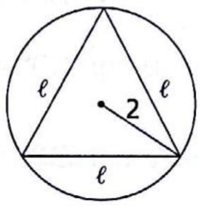
e, como $0° < \alpha < 90°$, temos: $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.

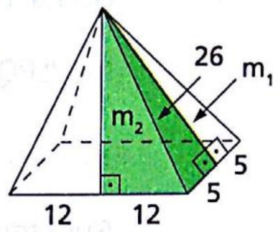
CAPÍTULO IX — Pirâmide

398. Dados: m = 7, R = 2.

$\ell = R\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}$ cm







$A_\ell = 3 \cdot \dfrac{\ell \cdot m}{2} \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 7}{2} \Rightarrow A_\ell = 21\sqrt{3}$ cm^2

$B = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \dfrac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = 3\sqrt{3}$ cm^2

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 21\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 24\sqrt{3}$ cm^2

403. $d^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow d = 26$ cm

$B = 10 \cdot 24 \Rightarrow B = 240$ cm^2

$26^2 = m_1^2 + 5^2 \Rightarrow m_1 = \sqrt{651}$ cm

$26^2 = m_2^2 + 12^2 \Rightarrow m_2 = 2\sqrt{133}$ cm

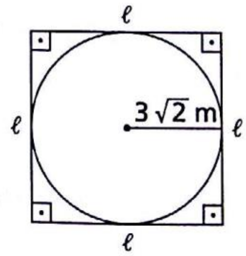
$A_t = 2\left(\dfrac{24 \cdot m_2}{2}\right) + 2\left(\dfrac{10 \cdot m_1}{2}\right) + B \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 24 \cdot 2\sqrt{133} + 10 \cdot \sqrt{651} + 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 2(5\sqrt{651} + 24\sqrt{133} = 120)$ cm^2

409. $\ell = 2R \Rightarrow \ell = 2 \cdot 3\sqrt{2}$ m $\Rightarrow \ell = 6\sqrt{2}$ m

base

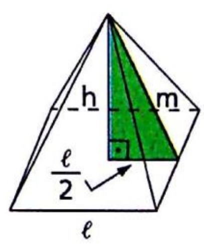


$B = \ell^2 \Rightarrow B = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow B = 72$ m^2

Seja *m* a medida do apótema da pirâmide. Daí:

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 4\left(\dfrac{\ell \cdot m}{2}\right) + \ell^2 \Rightarrow$

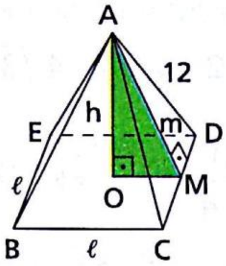
$\Rightarrow 192 = 2 \cdot 6\sqrt{2}\,m + 72 \Rightarrow m = 5\sqrt{2}$ m

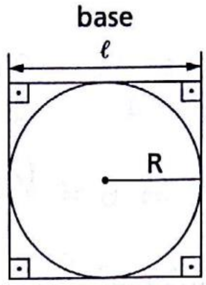


$m^2 = h^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow (5\sqrt{2})^2 = h^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 4\sqrt{2}$ m

430.





$\ell = 2R \Rightarrow \ell = 2 \cdot 6 \Rightarrow \ell = 12$ cm

$\triangle AMD$: $12^2 = m^2 + 6^2 \Rightarrow m = 6\sqrt{3}$ cm

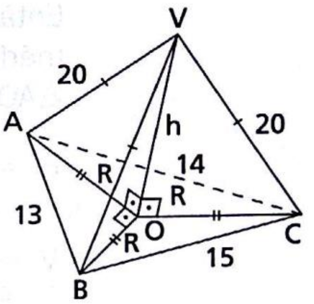
$\triangle AOM$: $m^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow \left(6\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$ cm

$B = \ell^2 \Rightarrow B = 12^2 \Rightarrow B = 144$ cm²

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6\sqrt{2} \Rightarrow V = 288\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

436. Cálculo da área da base:

$a = 13$ m; $b = 14$ m; $c = 15$ m



$$p = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow p = \frac{13 + 14 + 15}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p = 21$ m

$$B = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \Rightarrow B = 84 \text{ m}^2$$

Se as arestas laterais são congruentes, então a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o circuncentro O (centro da circunferência circunscrita) do triângulo ABC. Então:

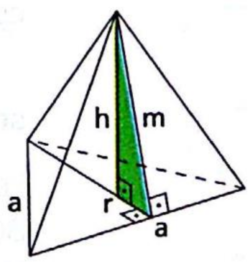
$$B = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 84 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4R} \Rightarrow R = \frac{65}{8} \text{ m}$$

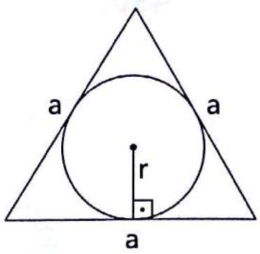
$$\triangle VOA: h^2 = 20^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{15\sqrt{95}}{8} \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{15\sqrt{95}}{8} \Rightarrow V = \frac{105\sqrt{95}}{2} \text{ m}^3$$

441. Sejam:

a: aresta da base;
r: raio da circunferência inscrita na base;
h: altura da pirâmide;
m: apótema da pirâmide;
p: semiperímetro da base.





Temos:

$B = p \cdot r \Rightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a}{2} \cdot 2 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$ cm

$B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

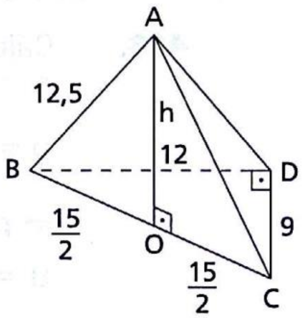
$\Rightarrow B = 12\sqrt{3}$ cm²

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = 3 \cdot \dfrac{a \cdot m}{2} \\ A_\ell = A_t - B \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3am}{2} = A_t - B \Rightarrow \frac{3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot m}{2} =$$

$= 36\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \Rightarrow m = 4$ cm

$m^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$ cm

451. A base é um triângulo retângulo.
Então, o circuncentro da base é o ponto médio da hipotenusa desse triângulo.



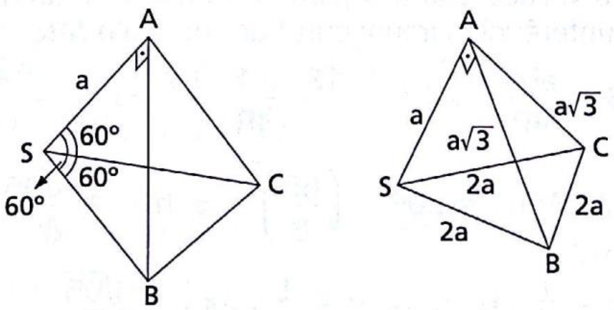
$\triangle AOB$: $h^2 = (12,5)^2 - (7,5)^2 \Rightarrow h = 10$ cm

$B = \dfrac{9 \cdot 12}{2} \Rightarrow B = 54$ cm²

$V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 54 \cdot 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 180$ cm³

462.



a) Cálculo das arestas:

$\cos 60° = \dfrac{SA}{SB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{SB} \Rightarrow SB = 2a$

$\text{sen } 60° = \dfrac{AB}{SB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AB}{2a} \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

Lei dos cossenos no $\triangle SBC$:

$BC^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot (2a)(2a)\cos 60° \Rightarrow BC = 2a$

Note que $SC = SB$ e $AC = AB$. Portanto, $SC = 2a$ e $AC = a\sqrt{3}$.

b) Cálculo da área total:

Face SAB $= \dfrac{a \cdot 2a \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Face SBC $= \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

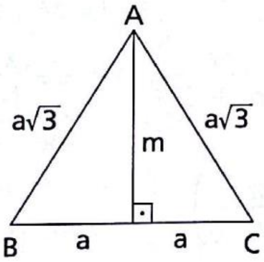
Face ABC $= \dfrac{2a \cdot m}{2} = \dfrac{2a \cdot a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}$

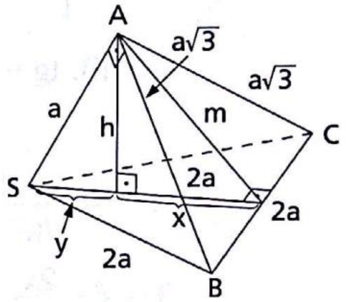
Face SAC = SAB $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$A_t = SAB + SAC + SBC + ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} + a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = \left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)a^2$





$m^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2 \Rightarrow m = a\sqrt{2}$

c) Cálculo do volume:

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = m^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow m^2 - x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow$$

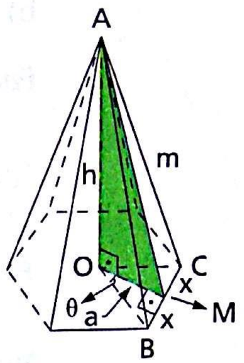
$$\Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 - x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow (x + y)(x - y) = a^2 \Rightarrow \frac{2a\sqrt{3}}{2}(x - y) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ x + y = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$h^2 = m^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \Rightarrow h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

464. Sejam:



ℓ: número de lados da base da pirâmide;
a: apótema desse polígono;
2x: medida da aresta da base;
m: apótema da pirâmide;
θ: metade do ângulo central que subtende a aresta da base.

Temos:

$(\ell - 2) \cdot \pi = n\pi \Rightarrow \ell = n + 2$

$$\frac{A_\ell}{B} = k \Rightarrow \frac{\ell \cdot \frac{2x \cdot m}{2}}{\ell \cdot \frac{2x \cdot a}{2}} = k \Rightarrow m = k \cdot a$$

$$\triangle AOM: m^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow (ka)^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow a = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{\ell} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{n + 2}$$

$$\triangle OMB: \text{tg } \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right) = \frac{x}{\frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}} \Rightarrow$$

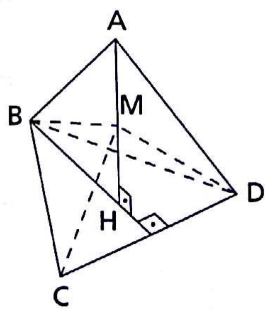
$$\Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)$$

$$B = \ell \cdot \frac{2x \cdot a}{2} \Rightarrow B = (n + 2) \cdot \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right) \cdot \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(n + 2)}{(k^2 - 1)} \cdot h^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)\right] \cdot h =$$

$$= \frac{(n + 2)h^3}{3(k^2 - 1)} \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)$$

467. Seja *a* a medida da aresta do tetraedro regular da figura ao lado. Temos:



$$AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

BH é baricentro do $\triangle BCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow BH = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle MHB: (MB)^2 = (MH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (MB)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Analogamente: $MC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $MC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

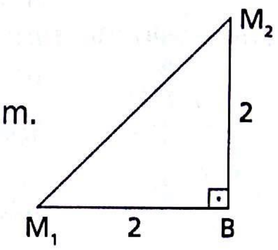
No $\triangle BMC$ temos:

$$(MB)^2 + (MC)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 = (BC)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (MB)^2 + (MC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow \triangle BMC$ é retângulo em M. Analogamente para $\triangle BMD$ e $\triangle CMD$.

Logo, o triedro de vértice M e arestas $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{MD}$ é um triedro trirretângulo.

472. a) Na figura ao lado temos uma parte da base:



$(M_1M_2)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow M_1M_2 = 2\sqrt{2}$ m

b) $M_1M_2M_3M_4$ é quadrado de lado $M_1M_2 = 2\sqrt{2}$ m.

Área de $M_1M_2M_3M_4 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ m^2

c) $AC = 4\sqrt{2} \Rightarrow HC = 2\sqrt{2}$ m

$(VH)^2 = (VC)^2 - (HC)^2$

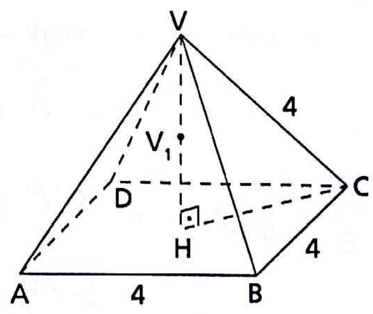
$(VH)^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow VH = 2\sqrt{2}$ m $\Rightarrow V_1H = \sqrt{2}$ m

Seja V o volume da pirâmide $V(M_1M_2M_3M_4)$.

$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ em que $B = 8$ e $h = \sqrt{2}$

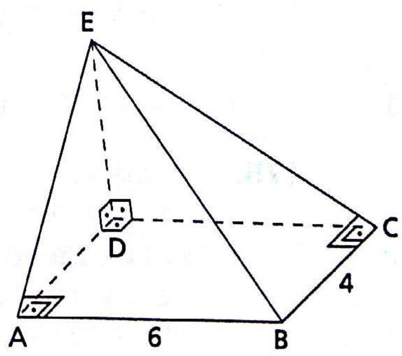
e então: $V = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ m^3.



473. a) Sendo $\overleftrightarrow{DE}$ perpendicular ao plano ABCD, pela definição, vem que $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{DA}$ e a $\overleftrightarrow{DC}$.

Logo, os triângulos ADE e CDE são triângulos retângulos em D.

Sendo $\overleftrightarrow{ED}$ perpendicular ao plano ABCD e $\overleftrightarrow{BC}$ perpendicular à reta $\overleftrightarrow{DC}$, pelo teorema das três perpendiculares, vem que $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{EC}$.



Logo, o triângulo BCE é retângulo em C.

Analogamente, o triângulo BAE é retângulo em A.

b) Cálculo da área total:
Sejam:
S_1 = área $\triangle ADE$, S_2 = área $\triangle CDE$, S_3 = área $\triangle BCE$, S_4 = área $\triangle BAE$ e B = área do retângulo ABCD.
Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:
$CE = 10$ m e $AE = 4\sqrt{5}$ m
E então: $S_1 = 16$, $S_2 = 24$, $S_3 = 20$, $S_4 = 12\sqrt{5}$ e $B = 24$.
Logo: $A_\ell = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 60 + 12\sqrt{5} = 12(5 + \sqrt{5})$
$A_t = A_\ell + B = 60 + 12\sqrt{5} + 24 = 12(7 + \sqrt{5})$ m^2

474. Sejam:
h: altura da pirâmide quadrangular regular;
m: apótema dessa pirâmide;
a: aresta da base dessa pirâmide.

Temos: $S + a^2 = A \Rightarrow S - A = a^2$ (1); $A = 2a \cdot m \Rightarrow \dfrac{A}{2a} = m$ (2)

$$h^2 = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2m^2 - a^2}}{2} \quad (3)$$

$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3} \overset{(1)}{\Rightarrow} V = \frac{(S - A) \cdot h}{3} \overset{(3)}{\Rightarrow} V = \frac{(S - A)\sqrt{2m^2 - a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2(2m^2 - a^2) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[2 \cdot \frac{A^2}{4a^2} - (S - A)\right] \Rightarrow$$

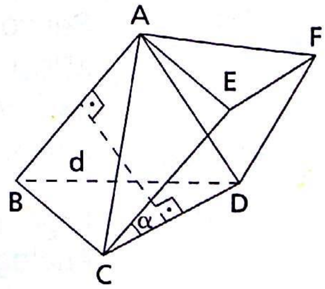
$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[\frac{A^2}{2a^2} - (S - A)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[\frac{A^2}{2(S - A)} - (S - A)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[\frac{A^2 - 2(S^2 - 2AS + A^2)}{2(S - A)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)\frac{[-2S^2 + 4AS]}{2} \Rightarrow 36V^2 = S(S - A)(2A - S)$$

475. Sejam:
$S_{BCD} = B$;
h: altura de ABCD relativa à base B;
d: menor distância entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Com a mesma base BCD da pirâmide construímos o prisma AEFBCD.
O volume desse prisma é a soma dos volumes de duas pirâmides, a saber: A(BCD) e A(CEFD).



Sendo S a área do paralelogramo CEFD, temos:
Volume AEFBCD = Volume A(BCD) + Volume A(CEFD) $\Rightarrow$

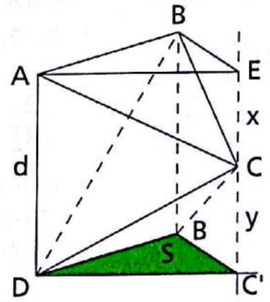
$$\Rightarrow Bh = \frac{Bh}{3} + \frac{S \cdot d}{3} \Rightarrow \frac{Bh}{3} = \frac{d \cdot S}{6} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{d \cdot S}{6}$$

Nota:
Sendo α o ângulo entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (que é o ângulo entre $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$), temos que S = (EC)(CD) sen α e então:

$$V_{ABCD} = \frac{d \cdot EC \cdot CD \cdot \text{sen}\,\alpha}{6} = \frac{1}{6} d \cdot (AB) \cdot (CD) \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Portanto, o volume de um tetraedro é igual à sexta parte do produto de duas arestas opostas pela distância entre elas e pelo seno do ângulo por elas formado.

476. S é a área da projeção B'C'D' do tetraedro ABCD sobre um plano que passa por D e é perpendicular a $\overline{AD}$.
B' e C' são as respectivas projeções de B e C.
Consideremos o prisma DB'C'ABE e seja *d* a medida de $\overline{AD}$. Notemos que $V_{ABCD} = V_{BB'DC'}$ pois ABB'D é paralelogramo e os triângulos ABD e B'BD são equivalentes.
Seja CE = x e CC' = y.

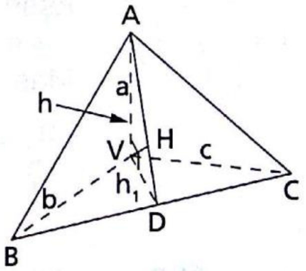


Temos:
Volume de C(B'C'D) + Volume de C(BEA) + Volume de C(ABD) + + Volume de C(B'BD) = Volume do prisma DB'C'ABE $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot S \cdot y + \frac{1}{3} \cdot S \cdot x + V_{ABED} + V_{ABCD} = S \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} S(x + y) + 2V_{ABCD} = Sd \Rightarrow \frac{1}{3} Sd + 2V_{ABCD} = Sd \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{Sd}{3}$$

478. Seja V(ABC) o tetraedro em que V é triedro trirretângulo e $\overline{VH}$ sua altura. Consideremos ainda a altura $\overline{VD}$ do triângulo retângulo BVC e observemos o triângulo AVD retângulo em V.
$VD = h_1$ e VH = h
No triângulo retângulo BVC temos:



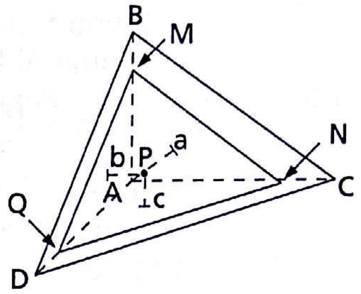
$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

(procure provar esta relação com base nas relações métricas no triângulo retângulo).

No triângulo retângulo AVD temos: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h_1^2}$.

Substituindo $\frac{1}{h_1^2}$ nesta última relação, vem: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

479. a) Sendo P um ponto do interior do tetraedro ABCD e pertencente ao plano (M, N, Q):



$V_{P(AMN)} + V_{P(AMQ)} + V_{P(ANQ)} =$

$= V_{AMNQ}$ (1)

ou seja:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AN)}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AQ)}{2} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AQ)}{2} \cdot c =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AQ)}{2} \cdot (AM) \quad (2)$$

Daí vem:

$(AM)(AN) \cdot a + (AM)(AQ) \cdot b + (AN)(AQ) \cdot c = (AM) \cdot (AN) \cdot (AQ)$

que, dividindo por $(AM) \cdot (AN) \cdot (AQ)$, nos dá:

$$\frac{a}{AQ} + \frac{b}{AN} + \frac{c}{AM} = 1 \quad (3)$$

Reciprocamente, se AM, AN e AQ satisfazem a relação (3), então P pertence ao plano (M, N, P).

Notemos que de (3) obtemos (2) e depois (1).

Sendo P interior ao triedro, temos:

$V_{P(AMN)} + V_{P(AMQ)} + V_{P(ANQ)} + V_{P(MNQ)} = V_{AMNQ}$ (4)

De (4) e (1) vem que $V_{P(MNQ)} = 0$, ou seja, P está no plano de M, N e Q.

b) Temos:

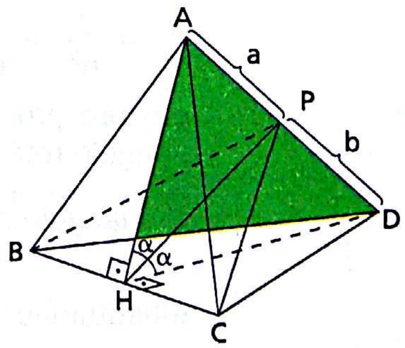
$$V_{AMNQ} = \frac{1}{6} \cdot (AM)(AN)(AQ) = \frac{abc}{6} \cdot \frac{(AM)}{c} \cdot \frac{(AN)}{b} \cdot \frac{(AQ)}{a}$$

Esse volume é mínimo quando o produto $\frac{c}{AM} \cdot \frac{b}{AN} \cdot \frac{a}{AQ}$ é máximo.

Mas esse produto é máximo quando os fatores são iguais, isto é:

$$\frac{a}{AQ} = \frac{b}{AN} = \frac{c}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow (AQ = 3a, AN = 3b, AM = 3c)$$

480. Seja P a interseção do plano bissetor do diedro formado pelas faces ABC e BCD com a aresta AD. Considere o triângulo AHD. Aplicando o teorema da bissetriz interna nesse triângulo, temos:



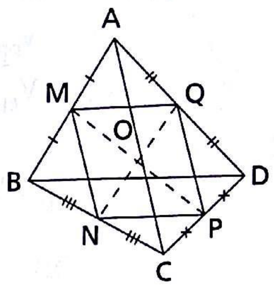
$$\frac{AH}{DH} = \frac{a}{b}$$

Então:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{BC \cdot AH}{2}}{\frac{BC \cdot DH}{2}} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{a}{b}$$

481. Primeiramente devemos provar que os segmentos que unem os pontos médios de arestas opostas de um tetraedro concorrem num mesmo ponto. Sejam MP, NQ e RS esses segmentos.
Temos:

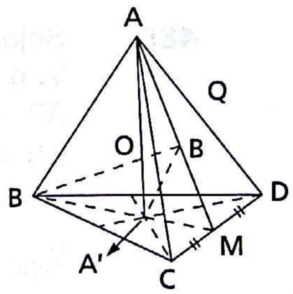
$$\left.\begin{array}{l} \overline{MQ} \parallel \overline{BD} \\ \overline{NP} \parallel \overline{BD} \\ MQ = NP = \dfrac{BD}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ MNPQ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{MP} \cap \overline{NQ} = \{O\}$. Analogamente, $\overline{RS} \cap \overline{MP} = \{O\}$. Então, $\overline{MP} \cap \overline{NQ} \cap \overline{RS} = \{O\}$.
A reta AO situada no plano (A, B, M) encontra a mediana $\overline{BM}$ do $\triangle$BCD e, consequentemente, o baricentro A' desse triângulo.

Deve-se provar que $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$.

Unindo os pontos B e O e procedendo de modo análogo ao que fizemos para a face BCD, temos que BO intercepta o $\triangle$ACD em B', baricentro do $\triangle$ACD.

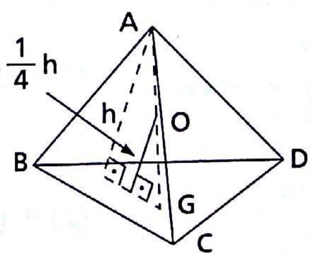


Dai: $\frac{MA'}{MA} = \frac{1}{3} = \frac{MB'}{MB} \Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OA'B' \sim \triangle OAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$

482. Sejam o tetraedro ABCD e um ponto O de seu interior tal que os tetraedros OABC, OABD, OACD e OBCD sejam equivalentes. O volume de cada um dos 4 tetraedros é então $\frac{1}{4}$ do volume de ABCD.

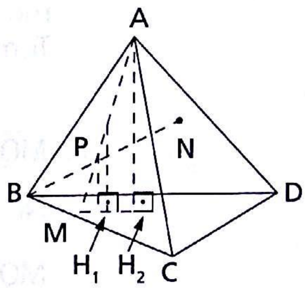


Então a distância do ponto O a uma face é $\frac{1}{4}$ da altura de ABCD em relação a essa face.

Usando o resultado do problema anterior, podemos concluir que O é o ponto pertencente aos 4 segmentos com uma extremidade num vértice e a outra no baricentro da face oposta e, ainda, que o ponto O divide cada um desses segmentos na razão de 3 para 1 a partir do vértice.

Na figura: $\frac{OA}{OG} = \frac{3}{1}$, $OA = \frac{3}{4}(AG)$, $OG = \frac{1}{4}(AG)$.

483. Considerando a figura ao lado, temos:



$$\frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{BCD} \cdot PH_1}{S_{BCD} \cdot AH_2} = \frac{PH_1}{AH_2}$$

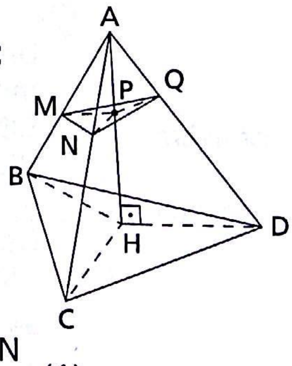
$$\triangle PMH_1 \sim \triangle AMH_2 \Rightarrow \frac{PH_1}{AH_2} = \frac{PM}{AM} \quad (1)$$

Analogamente, $\frac{V_{PACD}}{V_{ABCD}} = \frac{PN}{BN}$ (2), $\frac{V_{PABD}}{V_{ABCD}} = \frac{PR}{CR}$ (3), $\frac{V_{PABC}}{V_{ABCD}} = \frac{PQ}{DQ}$. (4)

$$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow \frac{PM}{AM} + \frac{PN}{BN} + \frac{PR}{CR} + \frac{PQ}{DQ} = 1$$

484. Resolvido.

485. Sejam:
V: o volume da pirâmide triangular regular ABCD;
$AP = h_1$, $AH = h_2$;
$AB = AC = AD = a$.
Note que



$$V_{ABCH} + V_{ACDH} = V_{ABDH} = \frac{V}{3}$$

Temos:

$$\frac{V_{APMN}}{V_{AHBC}} = \frac{AP \cdot AM \cdot AN}{AH \cdot AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{V_{APMN}}{\frac{V}{3}} = \frac{h_1 \cdot AM \cdot AN}{h_2 \cdot a^2}. \quad (1)$$

Analogamente, $\frac{V_{APNQ}}{\frac{V}{3}} = \frac{h_1 \cdot AN \cdot AQ}{h_2 \cdot a^2}$ (2) e $\frac{V_{APMQ}}{\frac{V}{3}} = \frac{h_1 \cdot AM \cdot AQ}{h_2 \cdot a^2}$. (3)

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 3 \cdot \frac{V_{AMNQ}}{V} = \frac{h_1}{h_2 \cdot a^2}(AM \cdot AN + AN \cdot AQ + AM \cdot AQ)$$

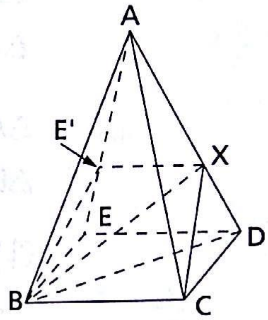
Usando o resultado do exercício anterior (484), temos:

$$3 \cdot \frac{AM \cdot AN \cdot AQ}{a^3} = \frac{h_1}{h_2 \cdot a^2}(AM \cdot AN + AN \cdot AQ + AM \cdot AQ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3h_2}{ah_1}(AM \cdot AN \cdot AQ) = AM \cdot AN + AN \cdot AQ + AM \cdot AQ\,(\div\, AM \cdot AN \cdot AQ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3h_2}{ah_1} = \frac{1}{AQ} + \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

486. Seja a pirâmide ABCDE cuja base BCDE é um paralelogramo. Façamos uma seção por um plano que contém AB. Obtemos o trapézio BCXE' e traçamos as diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{BX}$.



Temos:

$$\frac{V_{ABCX}}{V_{ABCD}} = \frac{AX}{AD}\ (1) \text{ e } \frac{V_{ABXE'}}{V_{ABDE}} = \frac{AX \cdot AE'}{AD \cdot AE} = \frac{(AX)^2}{(AD)^2} \cdot (2)$$

Fazendo (1) + (2), obtemos: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_{ABCX}}{V_{ABCD}} + \dfrac{V_{ABXE'}}{V_{ABDE}} = \dfrac{AX}{AD} + \dfrac{(AX)^2}{(AD)^2} \\ V_{ABCD} = V_{ABDE} \text{ (mesma base e altura)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABXE'}}{V_{ABCD}} = \frac{AX}{AD} + \frac{(AX)^2}{(AD)^2} \Rightarrow \frac{AX}{AD} + \frac{(AX)^2}{(AD)^2} = 1$$

Fazendo $\frac{AX}{AD} = t$, obtemos:

$$t + t^2 = 1 \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Logo, $X \in \overline{AD}$ e é tal que $\frac{AX}{AD} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

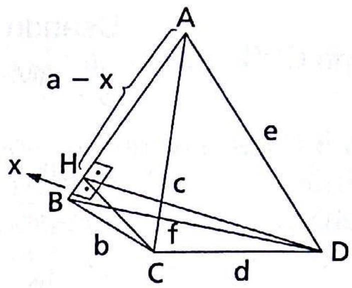
487. a) Seja o tetraedro ABCD de arestas opostas ortogonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Sejam *x*, *y* e *z* as distâncias entre as arestas opostas. Pelo exercício 475, o volume de um tetraedro é igual à sexta parte do produto de duas arestas opostas pela distância entre elas e pelo seno do ângulo formado. Assim:

$$V = \frac{1}{6} \cdot (AB) \cdot (CD) \cdot x = \frac{1}{6} \cdot (AC) \cdot (BD) \cdot y = \frac{1}{6} \cdot (AD) \cdot (BC) \cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(AB) \cdot (CD)}{\frac{1}{x}} = \frac{(AC) \cdot (BD)}{\frac{1}{y}} = \frac{(AD) \cdot (BC)}{\frac{1}{z}}$$

b) 1) Sejam *a* e *d*, *b* e *e*, *c* e *f* os pares de arestas opostas.

A altura da face ABC em relação a $\overline{AB}$ e a altura da face ABD em relação a $\overline{AB}$ passam pelo mesmo ponto H $\in \overline{AB}$.



Então:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH\text{: } (HC)^2 = b^2 - x^2 \\ \triangle ACH\text{: } (HC)^2 = c^2 - (a - x)^2\end{array}\right\} \Rightarrow b^2 - c^2 = x^2 - (a - x)^2 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ADH\text{: } (HD)^2 = e^2 - (a - x)^2 \\ \triangle BDH\text{: } (HD)^2 = f^2 - x^2\end{array}\right\} \Rightarrow f^2 - e^2 = x^2 - (a - x)^2 \quad (2)$$

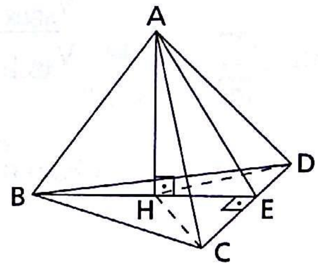
(1) e (2) $\Rightarrow b^2 - c^2 = f^2 - e^2 \Rightarrow b^2 + e^2 = c^2 + f^2$

Analogamente, $a^2 + d^2 = b^2 + e^2$.

2) Seja ABE a seção pelo plano que passa por $\overline{AB}$ e é perpendicular a $\overline{CD}$.

A altura AH do $\triangle ABE$ é altura do tetraedro e H é o ortocentro do $\triangle BCD$.

H pertence ao interior do $\triangle BCD \Rightarrow$



$\Rightarrow (AB)^2 = (BE)^2 + (AE)^2 - 2(BE)(HE) \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 \cdot (CD)^2 = (BE)^2 \cdot (CD)^2 - 2(BE)(CD) \cdot (HE)(CD) \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 \cdot (CD)^2 = 4[(S_{BCD})^2 + (S_{ACD})^2 - 2(S_{BCD})(S_{HCD})]$ (1)

Analogamente:

$(AC)^2 \cdot (BD)^2 = 4[(S_{BCD})^2 + (S_{ABD})^2 - 2(S_{BCD})(S_{HBD})]$ (2)

$(AD)^2 \cdot (BC)^2 = 4[(S_{BCD})^2 + (S_{ABC})^2 - 2(S_{BCD})(S_{HBC})]$ (3)

Notando que $S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{BCD}$ e somando (1), (2) e (3), vem:

$(AB)^2 \cdot (CD)^2 + (AC)^2 \cdot (BD)^2 + (AD)^2 \cdot (BC)^2 =$

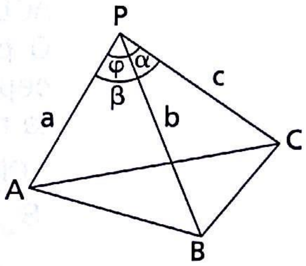
$= 4[(S_{ABC})^2 + (S_{ABD})^2 + (S_{ACD})^2 + (S_{BCD})^2]$

c) O ângulo $A\hat{E}B$ é seção reta do diedro de origem $\overline{CD}$; $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ são projeções de $\overline{AB}$ sobre ACD e BCD; $A\hat{B}E$ e $B\hat{A}E$ são os ângulos do diedro de origem $\overline{AB}$ e das faces BCD e ACD. Sendo estes três ângulos do $\triangle ABE$, eles têm a soma igual a dois retos. Considerando as demais arestas diferentes de $\overline{AB}$, temos que a soma dos seis diedros e dos doze ângulos, formados por cada aresta com as duas faces por ela cortadas, é igual a doze ângulos retos.

489. Sejam:
V: volume do prisma;
P: soma dos volumes das pirâmides que têm por vértice O e por bases, as faces laterais do prisma;
V_1: volume da pirâmide que tem, por vértice, O e, por base, a base do prisma que não contém O.
Temos:

$$V = P + V_1 \Rightarrow V = P + \frac{V}{3} \Rightarrow P = \frac{2}{3} \cdot V$$

490. $$\frac{ab \operatorname{sen} \varphi}{2} + \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2} = 3d^2 \Rightarrow$$



$\Rightarrow ab \operatorname{sen} \varphi + bc \operatorname{sen} \alpha + ac \operatorname{sen} \beta = 6d^2$
Seja V o volume do tetraedro cujo vértice coincide com P e cujas arestas unitárias estão contidas em $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$, respectivamente. Então:

$$\frac{V_{PABC}}{V} = abc \Rightarrow V_{PABC} = V \cdot a \cdot b \cdot c$$

V_{PABC} é máximo $\Rightarrow a \cdot b \cdot c$ é máximo $\Rightarrow a^2b^2c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi$ é máximo $\Rightarrow (ab \operatorname{sen} \varphi)(bc \operatorname{sen} \alpha)(ac \operatorname{sen} \beta)$ é máximo.

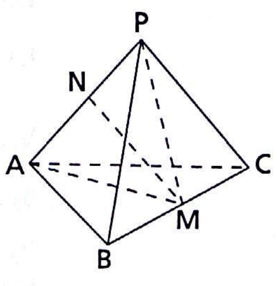
$$\left.\begin{array}{l} ab \operatorname{sen} \varphi > 0,\ bc \operatorname{sen} \alpha > 0,\ ac \operatorname{sen} \beta > 0 \\ ab \operatorname{sen} \varphi + bc \operatorname{sen} \alpha + ac \operatorname{sen} \beta = \text{constante} \\ (ab \operatorname{sen} \varphi)(bc \operatorname{sen} \alpha)(ac \operatorname{sen} \beta) \text{ é máximo} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab \operatorname{sen} \varphi = bc \operatorname{sen} \alpha = ac \operatorname{sen} \beta = 2d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a = d\sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi}},\ b = d\sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}},\ c = d\sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}} \right)$$

491. a) Seja o tetraedro PABC que tem $\overline{PA}$ e $\overline{BC}$, $\overline{PB}$ e $\overline{AC}$, $\overline{PC}$ e $\overline{AB}$ como arestas opostas e sejam $\overline{AM}$, $\overline{MP}$ e $\overline{MN}$ os segmentos que unem os pontos médios de tais arestas.
Aplicando a relação de Stewart aos triângulos ABC, PBC e PAM, temos:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AM)^2 + \frac{(BC)^2}{2} \quad (1)$$



$$(PB)^2 + (PC)^2 = 2(PM)^2 + \frac{(BC)^2}{2} \quad (2)$$

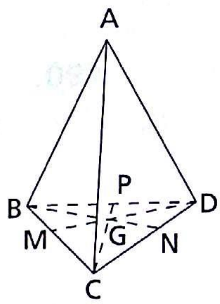
$$(AM)^2 + (PM)^2 = 2(MN)^2 + \frac{(AP)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(AM)^2 + 2(PM)^2 = 4(MN)^2 + (AP)^2 \quad (3)$$

Fazendo (1) + (2) e entrando com (3), temos:
$(AB)^2 + (PC)^2 + (AC)^2 + (PB)^2 = (BC)^2 + (AP)^2 + 4(MN)^2$

b) De acordo com o item *a*, podemos escrever:
$(AB)^2 + (PC)^2 + (AC)^2 + (PB)^2 = (BC)^2 + (AP)^2 + 4(MN)^2$ (1)
$(AC)^2 + (PB)^2 + (BC)^2 + (AP)^2 = (AB)^2 + (PC)^2 + 4(RS)^2$ (2)
$(BC)^2 + (AP)^2 + (AB)^2 + (PC)^2 = (AC)^2 + (PB)^2 + 4(TU)^2$ (3)
$((1) + (2) + (3)) \Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2 + (AP)^2 + (BP)^2 + (CP)^2 =$
$= 4[(MN)^2 + (RS)^2 + (TU)^2]$

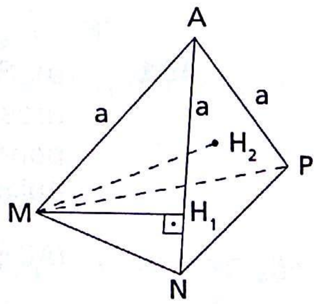
492. Seja um tetraedro ABCD, no qual as faces ABC, ACD e ADB são equivalentes.
O plano bissetor do diedro de origem $\overline{AB}$ intercepta $\overline{CD}$ em N. Daí, aplicando a propriedade vista no exercício 480, temos:



$$\frac{CN}{S_{ABC}} = \frac{DN}{S_{ABD}} \Rightarrow CN = DN \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ BN é mediana do $\triangle BCD$.
Procedendo de modo análogo, concluímos que, se G é baricentro do $\triangle BCD$, então os planos bissetores de origem $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ se interceptam segundo $\overline{AG}$. Como toda reta do plano bissetor de um diedro se inclina igualmente sobre as faces, temos que $\overline{AG}$ se inclina igualmente sobre ABC, ACD e ADB.
Reciprocamente, sendo G o baricentro do $\triangle BCD$, suponhamos $\overline{AG}$ igualmente inclinada sobre ABC, ACD e ADB. Assim, $\overline{AG}$ é interseção dos planos bissetores dos diedros de origem $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$; os planos que passam por essas arestas e pelo ponto G dividem a aresta oposta em segmentos congruentes. Portanto, pelo visto no exercício 480, as faces ABC, ACD e ADB são equivalentes.

493. a) Seja $\overline{MH_1} \perp \overline{AN}$.



$S_{AMN} \dfrac{a \cdot MN_1}{2}$, em que $MH_1 \leq a$

S_{AMN} é máxima se $MH_1 = AN$,
ou seja, $\overline{MH_1} \perp \overline{AN}$.
Logo, o triedro deve ser trirretangular.

b) Seja MH^2 perpendicular à face ANP.

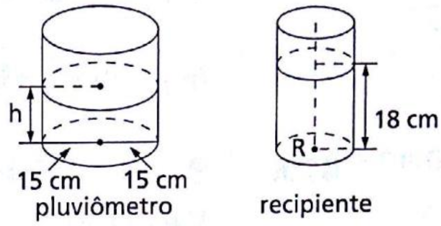
$$V_{AMNP} = \frac{S_{AMN} \cdot MH_2}{3} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot MH_1 \cdot MH_2$$

Temos: $MH_1 \leq a$, $MH_2 \leq a$.
V_{AMNP} é máximo se $MH_1 = a$ e $MH_2 = a \xRightarrow{\text{item } a}$ o triedro deve ser trirretangular.

CAPÍTULO X — Cilindro

516. Sejam:

r, *h*, V_p: raio, altura e volume do pluviômetro; R, H, V: raio, altura e volume do recipiente.



Temos:

$2\pi R = 20\pi$ cm $\Rightarrow R = 10$ cm.

$V = \pi R^2 H \Rightarrow V = \pi \cdot 10^2 \cdot 18 \Rightarrow V = 1800\pi$ cm^3

$V_p = V \Rightarrow \pi \cdot r^2 \cdot h = 1800\pi \Rightarrow 15^2 \cdot h = 1800 \Rightarrow h = 8$ cm

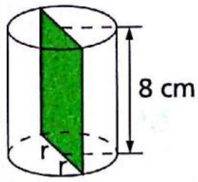
552. $A_t = 2\pi r(r + g)$

Seja R o raio do novo cilindro. Devemos ter:

$2\pi Rg = 2\pi r(r + g) \Rightarrow R = r + \dfrac{r^2}{g}$.

Logo, o aumento deve ser de $\dfrac{r^2}{g}$.

556. $h = 8$ cm



$B = 20\pi \Rightarrow \pi r^2 = 20\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$ cm

$A_t = \dfrac{B}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{1}{2} A_\ell + A_{\text{seção}} \Rightarrow$

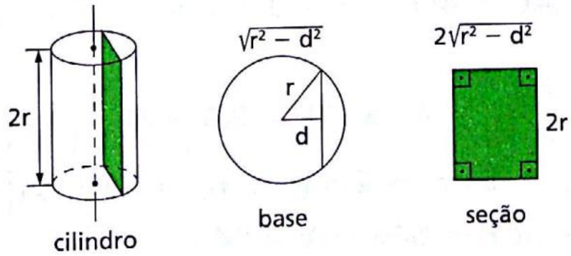
$\Rightarrow A_t = \dfrac{\pi r^2}{2} + \dfrac{\pi r^2}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi rh + 2r \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = \dfrac{\pi \cdot 20}{2} + \dfrac{\pi \cdot 20}{2} + \pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = \left[32\sqrt{5} + \left(5 + 4\sqrt{5}\right) 4\pi\right]$ cm^2

576. $A_{\text{seção}} = B \Rightarrow 2r\left(2\sqrt{r^2 - d^2}\right) = \pi r^2 \Rightarrow 4\sqrt{r^2 - d^2} = \pi r \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 - d^2 = \dfrac{\pi^2 r^2}{16} \Rightarrow d = \dfrac{r\sqrt{16 - \pi^2}}{4}$



578. $A_t = 2\pi a^2 \Rightarrow 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi a^2 \Rightarrow r^2 + rh = a^2$ (1)

V é máximo $\Leftrightarrow r^2h$ é máximo $\Leftrightarrow$ o quadrado de r^2h é máximo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (r^2h)^2 = (r^2) \cdot (rh)^2$ é máximo.

Em vista de (1), $r^2 + rh$ é constante.

Usando o fato de que: sendo $x + y$ constante, então $x^p \cdot y^q$ é máximo se, e somente se, $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$, temos:

$$(r^2) \cdot (rh)^2 \text{ é máximo} \Rightarrow \frac{r^2}{1} = \frac{rh}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow \left(r = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)$$

579. $B + A_\ell = 2\pi a^2 \Rightarrow \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi a^2 \Rightarrow r^2 + 2rh = 2a^2$ (1)

V é máximo $\Leftrightarrow r^2h$ é máximo $\Leftrightarrow 2r^2h$ é máximo $\Leftrightarrow (2r^2h)^2$ é máximo $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (r^2) \cdot (2rh)^2$ é máximo

(1) $\Rightarrow r^2 + 2rh$ é constante, daí, usando a propriedade citada no exercício anterior, vem:

$$(r^2)(2rh)^2 \text{ é máximo} \Leftrightarrow \frac{r^2}{1} = \frac{2rh^2}{2} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow \left(r = h = \frac{a\sqrt{6}}{3}\right).$$

580. $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 \cdot h = k$, k constante (1)

A soma $r^2 + rh$ é mínima quando $\frac{r^2}{1} = \frac{rh}{2} \Rightarrow h = 2r$ (2)

$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow \left(r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\ h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$$

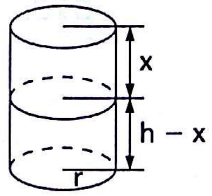
581.
$$\begin{cases} A_t = 2\pi S \\ A_\ell = 2\pi A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi S \\ 2\pi rh = 2\pi A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 + rh = S \\ rh = A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(r^2 = S - A,\ h = \frac{A}{\sqrt{S - A}}\right)$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi(S - A) \cdot \frac{A}{\sqrt{S - A}} \Rightarrow V = \pi A\sqrt{S - A}$$

582. $B = \sqrt{A_{\ell_1} \cdot A_{\ell_2}} \Rightarrow \pi r^2 = \sqrt{2\pi rx \cdot 2\pi r(h - x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 4hx + r^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - r^2}}{2}$, $h \geqslant r$



584.
$$\left.\begin{array}{l} \frac{2RH}{R + H} = 4 \Rightarrow RH = 2(R + H) \quad (1) \\ A_t = 54\pi \Rightarrow 2\pi R(R + H) = 54\pi \quad (2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi R\left(\frac{RH}{2}\right) = 54\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi R^2H = 54\pi \Rightarrow V = 54\pi$

$\pi R^2H = 54\pi \Rightarrow R^2H = 54 \Rightarrow H = \frac{54}{R^2}$ (3)

(3) em (1) $\Rightarrow R^3 - 27R + 54 = 0 \Rightarrow (R - 3)^2(R + 6) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (R = 3, H = 6)$

$B = \pi R^2 \Rightarrow B = 9\pi$; $A_\ell = 2\pi RH \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 36\pi$

585. a) A lata de maior superfície gasta mais material para ser montada. Assim, sejam S_A e S_B as superfícies das latas A e B, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} S_A = 2\pi(2R)h + 2\pi(2R)^2 = 4\pi Rh + 8\pi R^2 \\ S_B = 2\pi R(2h) + 2\pi R^2 = 4\pi Rh + 2\pi R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_A > S_B,$$

gasta mais material a embalagem A.

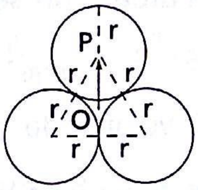
b) Sejam V_A e V_B os volumes das embalagens A e B, respectivamente. Assim,

$$\left.\begin{array}{l} V_A = \pi \cdot (2R)^2 \cdot h = 4\pi R^2 h \\ V_B = \pi R^2 \cdot (2h) = 2\pi R^2 h \end{array}\right\} \Rightarrow V_A = 2V_B$$

O preço do produto na embalagem A é R$ 780,00 menor do que o dobro do preço na embalagem B; portanto, a embalagem A é mais econômica para o consumidor.

586. OP é $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero de lado 2r. Então:

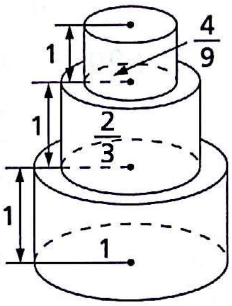
$$OP = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2r)\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$



Sendo R = OP + r, vem:

$$R = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r = r\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right).$$

587. Os volumes dos cilindros são, a partir do maior:



$$\pi(1)^2 \cdot 1;\ \pi\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1;\ \pi\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1;\ \ldots$$

A soma dos volumes é:

$$S = \pi + \frac{4}{9}\pi + \frac{16}{81}\pi + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \ldots\right)$$

A série entre parênteses converge para $\frac{1}{1-\frac{4}{9}}$, que é o limite da soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{4}{9}, \frac{16}{81}, \ldots\right)$.

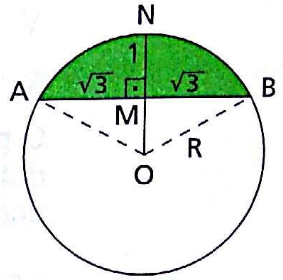
Logo:

$$S = \pi\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) \Rightarrow S = \frac{9\pi}{5}.$$

Resposta: o volume do sólido é $\frac{9\pi}{5}$.

588. O volume de um cilindro de raio R e altura H é $V = \pi R^2 H$.
Do gráfico:
a) Para $x = 2$, temos $V = 18\pi$.
$\pi R^2 \cdot 2 = 18\pi \Rightarrow R = 3$
b) Para $x = 6$, temos $V = 44\pi$.
$\pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot r^2 \cdot (6 - 4) = 44\pi \Rightarrow r = 2$
Resposta: R = 3 cm e r = 2 cm.

589. Cálculo do raio da base do cilindro:
Triângulo retângulo OMB:

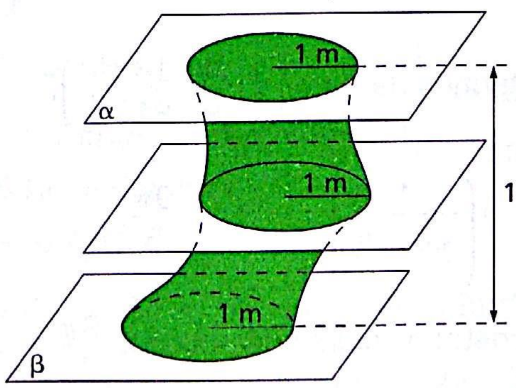


$R^2 = (R - 1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow R = 2.$
Cálculo da área S do segmento circular de arco ANB:
triângulo OMB: $\text{sen } B\hat{O}M = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow B\hat{O}M = 60° \Rightarrow A\hat{O}B = 120°.$
A área S do segmento circular é:
$$S = S_{\text{setor (AOB)}} - S_{\text{triângulo (AOB)}} = \frac{\pi 2^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 120° = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$
O volume do sólido da figura é:
$$V = S \cdot h \Rightarrow V = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \cdot 10 \Rightarrow V = \frac{10}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \text{ cm}^3$$

590. a) Não. b) π m³

a) De acordo com o enunciado, podemos afirmar que o sólido S assim descrito apresenta como seções paralelas aos planos α e β círculos congruentes de raios 1 m. De acordo com o princípio de Cavalieri, tal sólido é equivalente a um cilindro, cuja base é um círculo de raio 1 m e a altura é de 1 m. O sólido da figura abaixo satisfaz o enunciado e não é um cilindro.

b) De acordo com o exposto no item *a*, o volume V, em metros cúbicos, desse sólido é dado por $V_s = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \Rightarrow V = \pi$



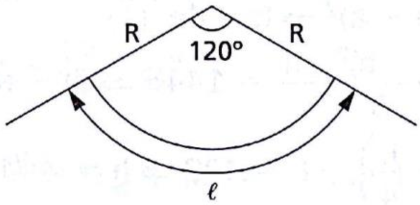
CAPÍTULO XI — Cone

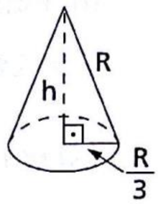
629. $A_\ell = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2 \Rightarrow A_\ell = \dfrac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow A_\ell = \dfrac{\pi R^2}{3}$

$A_\ell = \dfrac{\ell \cdot R}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi R^2}{3} = \dfrac{\ell \cdot R}{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{2}{3}\pi R$

Seja *r* o raio da base do cone. Temos:

$2\pi r = \ell \Rightarrow 2\pi r = \dfrac{2}{3}\pi R \Rightarrow r = \dfrac{R}{3}$





$B = \pi r^2 \Rightarrow B = \pi \cdot \dfrac{R^2}{9}$

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = \dfrac{\pi R^2}{3} + \dfrac{\pi R^2}{9} \Rightarrow A_t = \dfrac{4}{9}\pi R^2$

$h^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{9} \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\pi R^2}{9} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R \Rightarrow V = \dfrac{2\sqrt{2}}{81}\pi R^3$

636. $\dfrac{A_\ell}{B} = \dfrac{7}{5}$; $h = 4\sqrt{6}$ cm

$\dfrac{A_\ell}{B} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow \dfrac{\pi rg}{\pi r^2} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow \dfrac{g}{r} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow g = \dfrac{7}{5}r \quad (1)$

$h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow (4\sqrt{6})^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = 96 \quad (2)$

$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow \left(\dfrac{7}{5}r\right)^2 - r^2 = 96 \Rightarrow r = 10 \text{ cm}$

$g = \dfrac{7}{5}r \Rightarrow g = \dfrac{7}{5} \cdot 10 \Rightarrow g = 14 \text{ cm}$

640. $A_\ell = A$; $g = \dfrac{4}{5} \cdot 2r \Rightarrow g = \dfrac{8r}{5}$

$\pi rg = A \Rightarrow \pi r \dfrac{8}{5} r = A \Rightarrow r^2 = \dfrac{5A}{8\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{5A}{8\pi}}$

$B = \pi r^2 \Rightarrow B = \dfrac{5}{8}A$

$g = \dfrac{8}{5}r \Rightarrow g = \dfrac{8}{5}\sqrt{\dfrac{5A}{8\pi}}$

$$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + \frac{5A}{8\pi} = \frac{64}{25} \cdot \frac{5A}{8\pi} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{39A}{40\pi}}$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5A}{8} \cdot \sqrt{\frac{39A}{40\pi}} \Rightarrow V = \frac{5A}{48} \cdot \frac{\sqrt{39A} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10\pi} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{5A}{48} \cdot \frac{\sqrt{195A}}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \Rightarrow V = \frac{A}{48}\sqrt{\frac{195A}{2\pi}}$$

643. Sejam h − a, *h* e h + a o raio da base, a altura e a geratriz do cone.
Temos:

$(h + a)^2 = h^2 + (h - a)^2 \Rightarrow h = 4a \quad (1)$

$$V = 144\pi \Rightarrow \frac{\pi(h - a)^2 \cdot h}{3} = 144\pi \Rightarrow (h - a)^2 = 432 \quad (2)$$

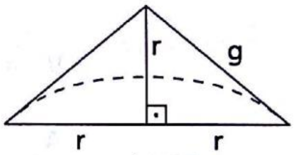
$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow \left(h - \frac{h}{4}\right)^2 \cdot h = 432 \Rightarrow h = 4\sqrt[3]{12}$$

Substituindo em (1): $4\sqrt[3]{12} = 4a \Rightarrow a = \sqrt[3]{12}$

$r = h - a \Rightarrow r = 4\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{12} \Rightarrow r = 3\sqrt[3]{12}$

$g = h + a \Rightarrow g = 4\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{12} \Rightarrow g = 5\sqrt[3]{12}$

645. $g^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow g = r\sqrt{2}$



$$V = 576\pi \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = 576\pi \Rightarrow$$

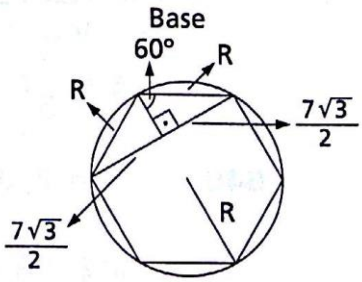
$\Rightarrow r = 12\sqrt[3]{2}$ cm

$$A_\ell = \frac{2r \cdot r}{2} + \frac{\pi r g}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = \left(12\sqrt[3]{2}\right)^2 + \frac{\pi \cdot 12\sqrt[3]{2} \cdot 12\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = 72\sqrt[3]{4}\left(2 + \pi\sqrt{2}\right) \text{ cm}^2$$

646. $$\text{sen } 60° = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2R} \Rightarrow$$



$\Rightarrow R = 7$ cm

$h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 25^2 - 7^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 24$ cm

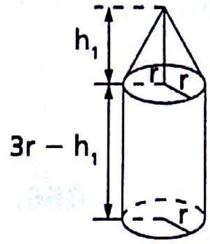
$B = \pi R^2 \Rightarrow B = \pi \cdot 7^2 \Rightarrow B = 49\pi \text{ cm}^2$

$A_\ell = \pi R g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 7 \cdot 25 = A_\ell = 175\pi \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 175\pi + 49\pi \Rightarrow A_t = 224\pi \text{ cm}^2$

$$V = \frac{1}{3}Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 49\pi \cdot 24 \Rightarrow V = 392\pi \text{ cm}^3$$

650. Considerando as medidas indicadas na figura, temos:



$2\pi r(3r - h_1) + \pi r\sqrt{h_1^2 + r^2} = 5\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{h_1^2 + r^2} = 2h_1 - r \Rightarrow$

$\Rightarrow 3h_1^2 - 4h_1 r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(h_1 = 0 \text{ (não convém) ou } h_1 = \frac{4}{3}r\right)$

$V = \pi r^2(3r - h_1) + \frac{\pi r^2 h_1}{3} \Rightarrow V = \pi r^2\left(3r - \frac{4}{3}r\right) + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{19}{9} \cdot \pi r^3$

652. $A_t = \pi \Rightarrow \pi rg + \pi r^2 = \pi \Rightarrow rg + r^2 = 1 \quad (1)$

$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \quad (2)$

$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow \sqrt{g^2 - h^2} \cdot g + g^2 - h^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2g^2 + h^2g^2 - (2h^2 + h^4 + 1) = 0 \Rightarrow g = \frac{1 + h^2}{\sqrt{2 + h^2}}$

$r = \sqrt{g^2 - h^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{(1 + h^2)^2}{(\sqrt{2 + h^2})^2} - h^2} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2 + h^2}}$

654. $A_t = S \Rightarrow \pi r^2 + \pi rg = S \Rightarrow r^2 + rg = \frac{S}{\pi} \quad (1)$

$g = \sqrt{h^2 - r^2} \quad (2)$

$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow r^2 + r\sqrt{h^2 + r^2} = \frac{S}{\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{S^2}{\pi(\pi h^2 + 2S)}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\,\frac{\pi \cdot S^2 \cdot h}{\pi(\pi h^2 + 2S)} \Rightarrow V = \frac{hS^2}{3(\pi h^2 + 2S)}$

655. $A_\ell = A$

$A_t = S$

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t - A_\ell = B \Rightarrow S - A = B \Rightarrow S - A = \pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \frac{S - A}{\pi}$

$\pi rg = A \Rightarrow g = \frac{A}{\pi r} \Rightarrow g = \frac{A}{\pi\sqrt{\frac{S - A}{\pi}}}$

$h = \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{A^2}{\pi\left(\frac{S - A}{\pi}\right)} - \frac{(S - A)}{\pi}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{A^2 - (S - A)^2}{\pi(S - A)}}$

Substituindo $r^2 + h$ na expressão do volume:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}(S - A)\sqrt{\frac{A^2 - (S - A)^2}{\pi(S - A)}}.$$

656. $A_t = S \Rightarrow \pi r^2 = \pi rg = S \Rightarrow r^2 + rg = \frac{S}{\pi}$ (1)

$g = \sqrt{h^2 + r^2}$ (2)

(2) em (1) $\Rightarrow r^2 + r\sqrt{h^2 + r^2} = \frac{S}{\pi} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{S^2 - 2\pi Sr}}{\pi r}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{S^2 - 2\pi Sr}}{\pi r} \Rightarrow V = \frac{r}{3} \cdot \sqrt{S^2 - 2\pi Sr^2}$$

659. Sejam $h - a$, h e $h + a$ o raio da base, a altura e a geratriz do cone. Temos:

$(h + a)^2 = (h - a)^2 + h^2 \cdot a = \frac{h}{4}$

$$V = 37{,}68 \Rightarrow \frac{\pi r^2 h}{3} = 37{,}68 \Rightarrow \frac{\pi \cdot (h - a)^2}{3} = 37{,}68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(h - \frac{h}{4}\right)^2 \cdot h = 37{,}68 \Rightarrow h = 4 \text{ cm} \Rightarrow a = 1 \text{ cm}$$

Então: $r = h - a \Rightarrow r = 4 - 1 \Rightarrow r = 3$ cm

$g = h + a \Rightarrow g = 4 + 1 \Rightarrow g = 5$ cm

660. $V_1 = \frac{\pi r^2 h}{3}$, $V_2 = \frac{\pi(r - x)^2(h + x)}{3}$, $r > 0, h > 0$

$V_2 = V_1 \Rightarrow (r - x)^2(h + x) = r^2h \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{r^2h} + r^2x - 2rhx - 2rx^2 + hx^2 + x^3 = \cancel{r^2h} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 + (h - 2r)x^2 + (r^2 - 2rh)x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x[x^2 + (h - 2r)x + (r^2 - 2rh)] = 0 \Rightarrow x = 0$ (solução trivial)

ou $x^2 + (h - 2r)x + (r^2 - 2rh) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{2r - h + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ ou } x = \frac{2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}\right)$$

Note que a solução $\frac{2r - h + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}$ é sempre possível, pois:

$$\sqrt{h^2 + 4rh} > h \Rightarrow \sqrt{h^2 + 4rh} - h > 0 \Rightarrow 2r + \sqrt{h^2 + 4r} - h > 0$$

A solução $\frac{2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}$ só será possível se tivermos:

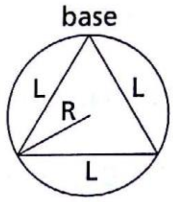
$2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh} > 0 \Leftrightarrow 2r - h > \sqrt{h^2 + 4rh} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4r^2 - 4rh + h^2 > h^2 + 4rh \Leftrightarrow r > 2h$

Resposta:

$$\frac{2r - h + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ ou } \left(\frac{2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ com } r > 2h\right).$$

666. a) A base do tetraedro regular é inscrita na base do cone de raio R.
Sendo L a aresta do tetraedro e H sua altura, temos:



$L = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$

$H = \dfrac{L\sqrt{6}}{3} = H_{cone}$

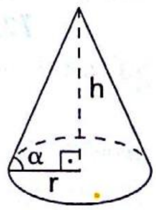
$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot H \Rightarrow V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{L\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{L\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V_{cone} = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{27} \cdot L^3$

b) $R = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$; $H = \dfrac{L\sqrt{6}}{3}$; A = área lateral do cone

$A = 2\pi RH \Rightarrow A = 2\pi\dfrac{L\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{L\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}L^2$

667. $\left.\begin{array}{l} r = g\cos\alpha \\ h = g \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{h}{r} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = r\operatorname{tg}\alpha \quad (1)$

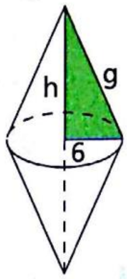
$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow r^2 h = \dfrac{3V}{\pi} \quad (2)$



$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow r^2 \cdot r \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3V}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi \operatorname{tg}\alpha}}$

$h = r\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi \operatorname{tg}\alpha}} \cdot \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{3V \operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$

CAPÍTULO XII — Esfera



698. $A_{sólido} = A_{esf.} \Rightarrow 2\pi rg = 4\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi \cdot 6 \cdot g = 4\pi \cdot 6^2 \Rightarrow g = 12$ cm

$h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 6\sqrt{3}$ cm

$$\frac{V_{sólido}}{V_{esf.}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \frac{V_{sólido}}{V_{esf.}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3} \Rightarrow \frac{V_{sólido}}{V_{esf.}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

706. $1\text{ m} = \dfrac{\frac{2\pi R}{4}}{10^7} \Rightarrow R = \dfrac{2 \cdot 10^7}{\pi}$ m

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi\left(\frac{2 \cdot 10^7}{\pi}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{16 \cdot 10^{14}}{\pi} \Rightarrow A = \frac{16 \cdot 10^8}{\pi}\text{ km}^2$$

717. Sejam *a* e *r* a aresta do cubo e o raio da esfera.
Temos:

$V_{cubo} = V_{esf.} \Rightarrow a^3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow a = r\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}\pi}$

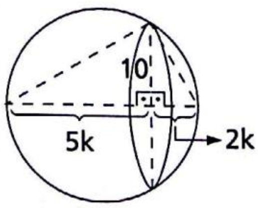
$$\frac{A_{cubo}}{A_{esf.}} = \frac{6a^2}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{A_{cubo}}{A_{esf.}} = \frac{6 \cdot \left(r\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}\right)^2}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{V_{cubo}}{A_{esf.}} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}$$

719. Relações métricas: $2k \cdot 5k = 10^2 \Rightarrow k = \sqrt{10}$

$2R = 7k \Rightarrow R = \dfrac{7\sqrt{10}}{2}$

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{7\sqrt{10}}{2}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{1715\sqrt{10}\pi}{3}$ cm³

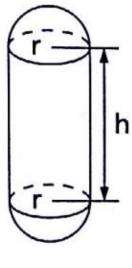


724. $2r = \dfrac{3}{5}h \Rightarrow h = \dfrac{10}{3}r \quad (1)$

$A_t = 4\pi R^2 \Rightarrow 2\pi rh + 4\pi r^2 = 4\pi R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow rh + 2r^2 = 2R^2 \quad (2)$

(1) em (2) $\Rightarrow r \cdot \dfrac{10}{3}r + 2r^2 = R^2 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{r^3}{R^3} = \frac{3\sqrt{6}}{32} \quad (3)$$

$$\frac{V_{cald.}}{V_{esf.}} = \frac{\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \frac{V_{cald.}}{V_{esf.}} = \frac{14r^3}{4R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_{cald.}}{V_{esf.}} = \frac{14}{4} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{32} \Rightarrow \frac{V_{cald.}}{V_{esf.}} = \frac{21\sqrt{6}}{64}$$

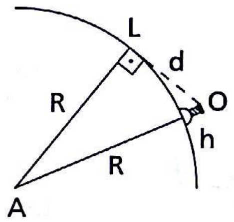
742. a) O triângulo ALO é retângulo em L. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$R^2 + d^2 = (R + h)^2 \Rightarrow \cancel{R^2} + d^2 = \cancel{R^2} + 2Rh + h^2 \Rightarrow d^2 = h(2R + h)$

Usando a aproximação indicada no problema, obtemos

$d^2 = h(2R)$ ou ainda $d = \sqrt{2Rh}$.

b) Substituindo na fórmula $R = 6\,300$ km e $h = 35$ m $= 35 \cdot 10^{-3}$ km, encontramos:



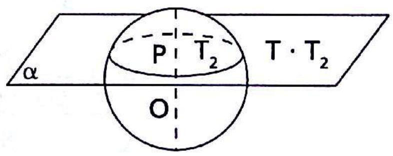
$d = \sqrt{2 \cdot 6\,300 \cdot 35 \cdot 10^{-3}}$

$d = \sqrt{63 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}$

$d = \sqrt{441} = 21$ km

Resposta: 21 km.

744. a) P é um ponto do diâmetro de uma esfera, distinto do centro.



α é um plano que passa por P e é perpendicular ao diâmetro.

Sendo T um ponto da superfície esférica e de α, então TP é constante, pois $TP = \sqrt{(OT)^2 - (OP)^2}$ e OP e OT são constantes.

Logo, se $T \in \alpha$ e PT é constante, então T pertence a uma circunferência contida em α e de centro P. (1)

Se $T_1 \in \alpha$ e $PT_1 > PT$, temos que $OT_1 > OT$ e T_1 não pertence à esfera.

Se $T_2 \in \alpha$ e $PT_2 < PT$, temos que $OT_2 < OT$ e T_2 pertence à esfera. (2)

De (1) e (2) vem que a interseção da esfera pelo plano é um círculo.

b) Área do círculo máximo $= \pi r^2$

Área do círculo seção $= \frac{1}{2}\pi r^2$

Então: $\pi(PT)^2 = \pi\frac{r^2}{2} \Rightarrow (PT)^2 = \frac{r^2}{2}$.

A distância OP pedida é:

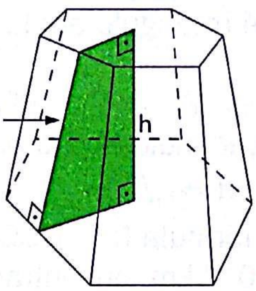
$(OP)^2 = (OP)^2 - (PT)^2 \Rightarrow (OP)^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} \Rightarrow OP = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

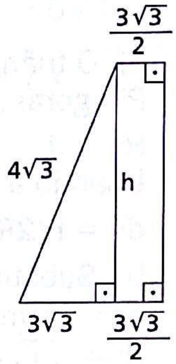
CAPÍTULO XIII — Sólidos semelhantes — Troncos

771. $A_t = 279\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot A_{face} + B + b = 279\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{9+3}{2}\right) \cdot m' + \frac{3}{2} \cdot \frac{9^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = 279\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m' = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$





$$h^2 + (3\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow h = \sqrt{21} \text{ cm}$$

$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{21}}{3}\left[\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2}} + \frac{27\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{351\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$$

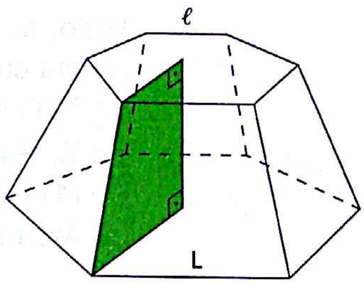
777. $B = 54\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2}L^2\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 6$ m

$b = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = 2$ m

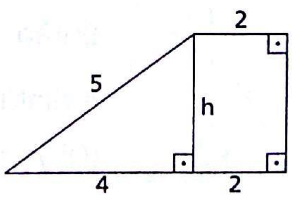
$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = 3$ m

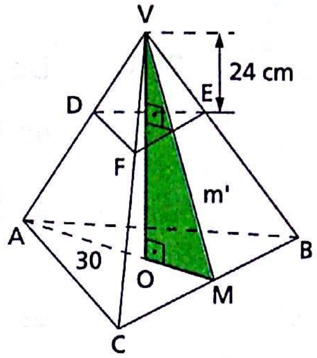


$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{3}{3}\left[54\sqrt{3} + \sqrt{54\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} + 6\sqrt{3}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 78\sqrt{3} \text{ m}^3$$





778. Note que OA = 30 cm e seja AB = AC = BC = L.

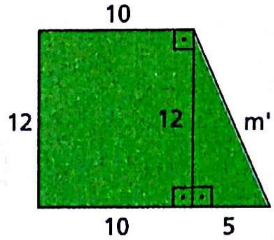
$\frac{L\sqrt{3}}{2} = 45 \Rightarrow L = 30\sqrt{3}$ cm.

ΔVOM: $VO^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 + 15^2 = 39^2 \Rightarrow H = 36$ cm

Seja DE = DF = EF = ℓ. Por semelhança:

$\frac{\ell}{L} = \frac{24}{H} \Rightarrow \frac{\ell}{30\sqrt{3}} = \frac{24}{36} \Rightarrow \ell = 20\sqrt{3}$ cm.



$\frac{a}{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 10$ cm

$(m')^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow m' = 13$ cm

$$B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{(30\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = 675\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{(20\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = 300\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V_{tronco} = \frac{BH}{3} - \frac{bh}{3} \Rightarrow V_{tronco} = \frac{675\sqrt{3} \cdot 36}{3} - \frac{300\sqrt{3} \cdot 24}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = 5700\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

$$A_t = B + b + 3 \cdot \left(\frac{\ell + L}{2}\right) \cdot m' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 675\sqrt{3} + 300\sqrt{3} + 3 \cdot \left(\frac{30\sqrt{3} + 20\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 1950\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

780. Sejam H_1 a altura da pirâmide que se obtém com o corte, H_2 a altura da pirâmide original e V o volume do tronco assim obtido. Temos:

$$V = \frac{h}{3}[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow \frac{BH_2}{3} - \frac{B'H_1}{3} = \frac{h}{3}[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BH_2 - B'(H_2 - h) = h[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow$$

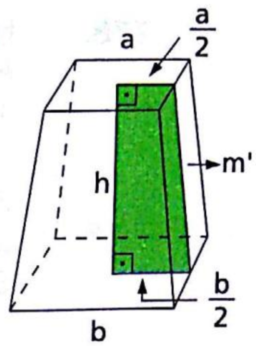
$$\Rightarrow (B - B')H_2 + B'h = h[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{h[B + \sqrt{BB'}]}{B - B'} \Rightarrow H_2 = \frac{h[B + \sqrt{BB'}][B - \sqrt{BB'}]}{(B - B')(B - \sqrt{BB'})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{h[B(\cancel{B - B'})]}{(\cancel{B - B'})(B - \sqrt{BB'})} \Rightarrow H_2 = \frac{hB}{\sqrt{B}(\sqrt{B} - \sqrt{B'})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

781. De acordo com as medidas indicadas:



$$(m')^2 = h^2 + \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$A_\ell = a^2 + b^2 \Rightarrow 4\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot m' = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

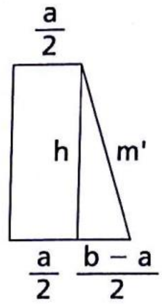
$$\Rightarrow 2(a+b)\sqrt{\frac{4h^2 + (b-a)^2}{4}} = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)\sqrt{4h^2 + (b-a)^2} = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h^2 = \left[\frac{a^2 + b^2}{a+b}\right]^2 - (b-a)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + b - a\right)\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} - b + a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h^2 = \frac{2b^2 \cdot 2a^2}{(a+b)(a+b)} \Rightarrow h = \frac{ab}{a+b}$$



782. Seja E o erro cometido. Temos:

$$E = \left|\frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b) - \left(\frac{B+b}{2}\right)h\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \left|\frac{Bh}{3} - \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{3} - \frac{bh}{2} + \frac{\sqrt{Bb} \cdot h}{3}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \left|-\frac{Bh}{6} - \frac{bh}{6} + \frac{\sqrt{Bb}}{3}h\right| \Rightarrow E = h\left|\frac{\sqrt{Bb}}{3} - \frac{B}{6} - \frac{b}{6}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{h}{6}|B - 2\sqrt{Bb} + b| \Rightarrow E = \frac{h}{6}(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2$$

784. $\frac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] = 40 \Rightarrow \frac{3}{3}[20 + \sqrt{20b} + b] = 40 \Rightarrow$

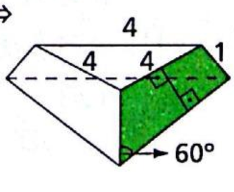
$\Rightarrow b + 2\sqrt{5}\sqrt{b} - 20 = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow b = 30 - 10\sqrt{5}$

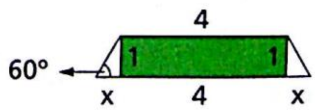
Sendo ℓ e L os lados da base menor e da base maior do tronco, respectivamente, temos:

$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{b}{B} \Rightarrow \left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{30 - 10\sqrt{5}}{20} \Rightarrow \frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

785. $\text{tg } 60° = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow$

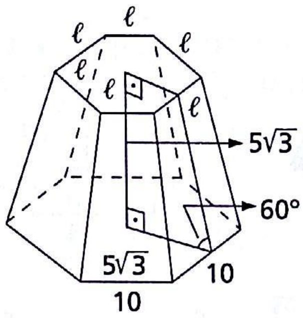
$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dm

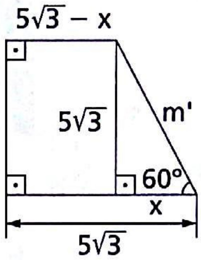




$$A_{face} = \frac{(2x + 4) \cdot 1}{2} = A_{face} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 4}{2} \Rightarrow A_{face} = \frac{\sqrt{3} + 6}{3}\ dm^2$$

$$A_\ell = 3 \cdot A_{face} \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot \frac{\sqrt{3} + 6}{3} \Rightarrow A_\ell = \left(\sqrt{3} + 6\right)\ dm^2$$





786. $\text{sen } 60° = \frac{5\sqrt{3}}{m'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{m'} \Rightarrow m' = 10\ cm$

$$tg\ 60° = \frac{5\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 5\ cm$$

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{x} = 5\sqrt{3} - 5 \Rightarrow \ell = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\ cm$$

$$A_{face} = (L + \ell) \cdot \frac{m'}{2} \Rightarrow A_{face} = \left(10 + \frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{10}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{face} = \frac{300 - 50\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

$$A_\ell = 6 \cdot A_{face} \Rightarrow A_\ell = \cancel{6} \cdot \frac{300 - 50\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow A_\ell = \left(600 - 100\sqrt{3}\right) cm^2$$

$$B = \frac{3}{2} \cdot L^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot 10^2\sqrt{3} \Rightarrow B = 150\sqrt{3}$$

$$b = \frac{3}{2} \cdot \ell^2\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \left(200\sqrt{3} - 300\right)\ cm^2$$

$$A_t = A_\ell + B + b \Rightarrow A_t = 600 - 100\sqrt{3} + 150\sqrt{3} + 200\sqrt{3} - 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = \left(300 + 250\sqrt{3}\right)\ cm^2 \Rightarrow A_t = 50\left(6 + 5\sqrt{3}\right)\ cm^2$$

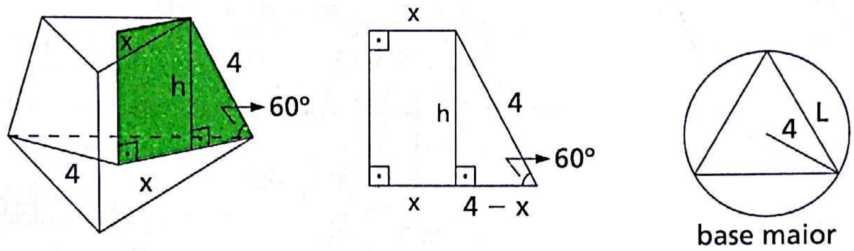
787. $B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{7^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{49\sqrt{3}}{4}\ dm^2$

$$b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{25\sqrt{3}}{4}\ dm^2$$

$$\frac{h}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right) = V \Rightarrow h\left(B + \sqrt{Bb} + b\right) = 3V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{49\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{49\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4}} + \frac{25\sqrt{3}}{4}\right) = 3\,109 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}\ \text{dm}$$

792.



$$\text{sen } 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\ \text{m;}$$

$$\cos 60° = \frac{4 - x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4 - x}{4} \Rightarrow x = 2\ \text{m}$$

$$L = R\sqrt{3} \Rightarrow L = 4\sqrt{3}\ \text{m; } B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 12\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

$$\ell = x\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}\ \text{m; } b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 3\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

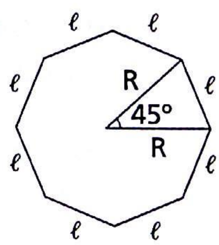
$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(12\sqrt{3} + \sqrt{12\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}\right) \Rightarrow V = 42\ \text{m}^3$$

793. Cálculo da área do octógono regular em função do lado:
Lei dos cossenos:

$$\ell^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 45° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cdot \ell^2$$



$$A_{\text{octó.}} = 8 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \text{sen } 45°}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{octó.}} = 2R^2\sqrt{2} \Rightarrow A_{\text{octó.}} = 2\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)\ell^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{octó.}} = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)\ell^2$$

$$B = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)L^2 \Rightarrow B = 2\left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot 4^2 \Rightarrow B = 32\left(\sqrt{2} + 1\right)\ \text{cm}^2$$

$$b = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)\ell^2 \Rightarrow b = 2\left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot 2^2 \Rightarrow b = 8\left(\sqrt{2} + 1\right)\text{cm}^2$$

$$V_T = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{12}{3}\left[32(\sqrt{2}+1) + \sqrt{32(\sqrt{2}+1)\cdot 8(\sqrt{2}+1)} + 8(\sqrt{2}+1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_T = 4\left[40(\sqrt{2}+1) + 16(\sqrt{2}+1)\right] \Rightarrow V_T = 224(\sqrt{2}+1)\,\text{cm}^3$$

Seja H a altura da pirâmide total e *h* a altura da pirâmide obtida quando o tronco é eliminado. Temos:

$$\frac{H}{h} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{H}{H-12} = 2 \Rightarrow H = 24\text{ cm}$$

$$V_p = \frac{1}{3}\cdot B\cdot H \Rightarrow V_p = \frac{1}{3}\cdot 32(\sqrt{2}+1)\cdot 24 \Rightarrow V_p = 256(\sqrt{2}+1)\text{ cm}^3$$

794. a) $B = \dfrac{3\cdot 4}{2} \Rightarrow B = 6\text{ cm}^2$

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{h}{\frac{h}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{b} = 4 \Rightarrow \frac{6}{b} = 4 \Rightarrow b = \frac{3}{2}\text{ m}^2$$

b) Seja OH a altura relativa à hipotenusa do triângulo OAB.

Temos $(OA)\cdot(OB) = (AB)\cdot(OH) \Rightarrow 3\cdot 4 = 5\cdot(OH) \Rightarrow (OH) = \dfrac{12}{5}$ m.

Teorema das três perpendiculares $\Rightarrow \overline{CH} \perp \overline{AB}$

$$S_{ABC} = 12 \Rightarrow \frac{(AB)\cdot(CH)}{2} = 12 \Rightarrow \frac{5\cdot CH}{2} = 12 \Rightarrow CH = \frac{24}{5}\text{ m}$$

$$\triangle OCH: (OH)^2 + (OC)^2 = (CH)^2 \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 + (OC)^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC = \frac{12\sqrt{3}}{5}\text{ m}$$

$$V = \frac{\frac{OC}{2}}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right) \Rightarrow V = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{3}\left(6 + \sqrt{6\cdot\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

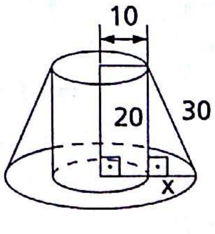
$$\Rightarrow V = \frac{21\sqrt{3}}{5}\text{ m}^3$$

810. $x^2 + 20^2 = 30^2 \Rightarrow x = 10\sqrt{5}$ cm

$V_{cil.} = \pi\cdot r^2\cdot h \Rightarrow V_{cil.} = \pi\cdot 10^2\cdot 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cil.} = 2000\pi\text{ cm}^3$

$V_{TC} = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \Rightarrow$



$$\Rightarrow V_{TC} = \frac{\pi \cdot 20}{3}\left[(10 + 10\sqrt{5})^2 + (10 + 10\sqrt{5}) \cdot 10 + 10^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{TC} = \frac{20\pi}{3}[800 + 300\sqrt{5}]$$

$$\frac{V_{cil.}}{V_{TC}} = \frac{2000\pi \cdot 3}{(800 + 300\sqrt{5}) \cdot 20\pi} \Rightarrow \frac{V_{cil.}}{V_{TC}} = \frac{3}{8 + 3\sqrt{5}}$$

820.

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi \cdot h}{3}(14^2 + 14 \cdot 8 + 8^2) = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot 372 \\ V_2 &= \frac{\pi \cdot h}{3}(8^2 + 8r + r^2) \\ V_1 &= 3V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

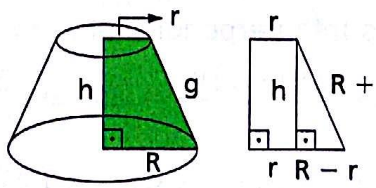
$$\Rightarrow 3(r^2 + 8r + 64) = 372 \Rightarrow r^2 + 8r - 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 2\sqrt{19} - 4 \Rightarrow r^2 = 4(23 - 4\sqrt{19})$$

$$\frac{A_{b_2}}{A_{b_1}} = \frac{4(23 - 4\sqrt{19})\pi}{196\pi} \Rightarrow \frac{A_{b_2}}{A_{b_1}} = \frac{23 - 4\sqrt{19}}{49}$$

821.

$g = R + r$



a) $h^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \Rightarrow h^2 = 2R \cdot 2r \Rightarrow \frac{h}{2} = \sqrt{Rr}$

b) $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \Rightarrow V = \frac{2\pi h}{6}(R^2 + Rr + r^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}(2R^2 + 2Rr + 2r^2) \Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}(2R^2 + Rr + Rr + 2r^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}[R(2R + r) + r(2r + R)] \Rightarrow$$

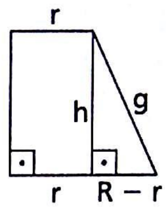
$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}[R(R + R + r) + r(r + r + R)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}[R(R + g) + r(r + g) \Rightarrow V = \frac{h \cdot \pi}{6}[R(R + g) + r(r + g)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{h}{6} \cdot A_t$$

822. $V = \dfrac{a^2h\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2] = \dfrac{a^2h\pi}{3} \Rightarrow R^2 + Rr + r^2 = a^2$ (1)

$h^2 + (R - r)^2 = g^2 \Rightarrow (R - r)^2 = g^2 - h^2$ (2)



$R - r = \sqrt{g^2 - h^2}$ (3)

$(1) - (2) \Rightarrow 3Rr = a^2 - g^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rr = \dfrac{a^2 - g^2 + h^2}{3}$ (4)

Somando Rr a ambos os membros de (1), vem:

$R^2 + Rr + r^2 + Rr = a^2 + Rr \Rightarrow (R + r)^2 = a^2 + \dfrac{a^2 - g^2 + h^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow R + r = \sqrt{\dfrac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}}$ (5)

$$(3) \text{ e } (5) \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}} + \sqrt{g^2 - h^2}\right) \\ r = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}} - \sqrt{g^2 - h^2}\right) \end{cases}$$

Condição para existência da solução:

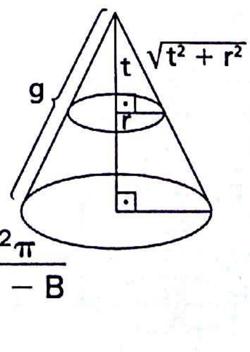
$$\left.\begin{array}{r} 4a^2 + h^2 - g^2 > 0 \\ g^2 - h^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h^2 > g^2 - 4a^2 \\ g^2 > h^2 \end{array}\right\} \Rightarrow g^2 - 4a^2 < h^2 < g^2$$

833. Sejam: V o volume da pirâmide;
V_T o volume do tronco da pirâmide;
V_P o volume da pirâmide menor;
V o volume procurado.

$V_P + V_T = V \Rightarrow \dfrac{1}{8}V_T + V_T = V \Rightarrow V_T = \dfrac{8}{9}V$

$\dfrac{V_P}{V_T} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_P}{\frac{8}{9}V} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_P}{V} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \left(\dfrac{d}{h}\right)^3 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow d = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}h$

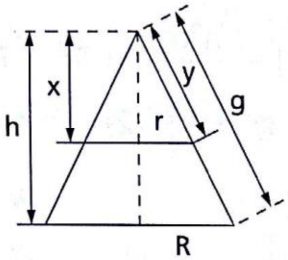
834. Sejam B e *b* as áreas das bases do tronco de cone. Temos:



$b = \pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{b}{\pi}$

$\dfrac{B}{b} = \left(\dfrac{g}{\sqrt{t^2 + \frac{b}{\pi}}}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{B}{b} = \dfrac{g^2}{t^2 + \frac{b}{\pi}} \Rightarrow b = \dfrac{Bt^2\pi}{\pi g^2 - B}$

836.



$$\frac{x}{h} = \frac{y}{g} = \frac{r}{R} = k$$

$$h = \sqrt{g^2 - R^2}$$

$A_{\ell_1} = A_{t_2} \Rightarrow \pi Rg = \pi ry + \pi r^2 \Rightarrow Rg = kg \cdot k \cdot R + k^2R^2 \Rightarrow$

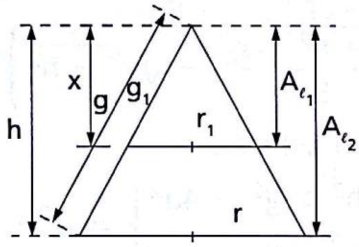
$\Rightarrow Rg = k^2R(g + R) \Rightarrow k^2 = \dfrac{g}{g + R} \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{g}{g + R}}$

Mas $x = k \cdot h$.

Assim: $x = \sqrt{\dfrac{g}{g + R}} \cdot \sqrt{g^2 - R^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{g(g + R)(g - R)}{g + R}} \Rightarrow x = \sqrt{g(g - R)}$

838.



$$\frac{x}{h} = \frac{g_1}{g} = \frac{r_1}{r} = k$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$A_b^2 \cdot A_{\ell_1} \cdot \left(A_{\ell_2} - A_{\ell_1}\right) \Rightarrow (\pi r^2k^2)^2 = \pi rk \cdot gk(\pi rg - \pi rkgk) \Rightarrow$

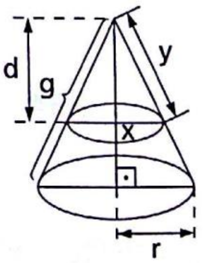
$\Rightarrow \pi^2r^4k^4 = \pi^2r^2g^2k^2\left(1 - k^2\right) \Rightarrow r^2k^2 = g^2\left(1 - k^2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2\left(g^2 + r^2\right) = g^2 \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{g^2}{g^2 + r^2}}$

Mas $x = k \cdot h$.

Assim: $x = \sqrt{\dfrac{g^2}{g^2 + r^2}} \cdot \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow x = g\sqrt{\dfrac{g^2 - r^2}{g^2 + r^2}}$.

839. $\dfrac{y}{g} = \dfrac{x}{r} \Rightarrow y = \dfrac{xg}{r}$



$\pi x^2 = \pi rg - \pi xy \Rightarrow x^2 = rg - xy \Rightarrow$

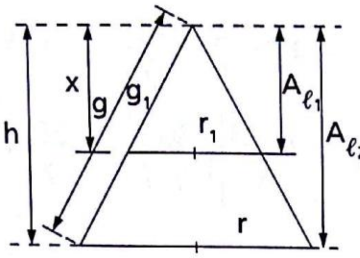
$\Rightarrow x^2 = rg - \dfrac{x^2g}{r} \Rightarrow x^2 = \dfrac{r^2g}{r + g}$

$y^2 = \dfrac{x^2g^2}{r^2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{r^2g}{r + g} \cdot \dfrac{g^2}{r^2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{g^3}{r + g}$

Substituindo x^2 e y^2 em $d^2 = y^2 - x^2$, vem:

$d^2 - g(g - r) \Rightarrow d = \sqrt{g^2 - rg}$.

840.



$$\frac{x}{h} = \frac{g_1}{g} = \frac{r_1}{r} = k$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$A_{\ell_1} + \cancel{A_{b_1}} = A_{\ell_2} - A_{\ell_1} + \cancel{A_{b_1}} + A_{b_2} \Rightarrow 2A_{\ell_1} = A_{\ell_2} + A_{b_2} \Rightarrow$$

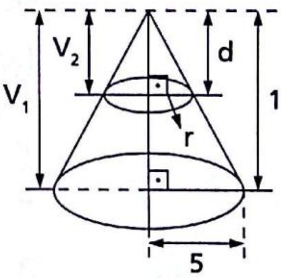
$$\Rightarrow 2k^2\pi rg = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow 2k^2 g = g + r \Rightarrow k = \sqrt{\frac{g+r}{2g}}$$

Mas $x = k \cdot h$.

Assim: $x = \sqrt{\dfrac{g+r}{2g}} \cdot \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{(g+r)^2(g-r)}{2g}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = (g+r)\sqrt{\frac{g-r}{2g}}$$

841.



$$\left(\frac{d}{1}\right)^3 = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow d^3 = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot d}{\frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 1} \Rightarrow r = 5d$$

$$\sqrt{V_1 \cdot V_2} = V_{tronco} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot d} = \frac{\pi(1-d)}{3}(5^2 + 5r + r^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^2 \cdot \sqrt{d^3} = (1-d)(5^2 + 5 \cdot 5d + 5^2d^2) \Rightarrow d^3 + \sqrt{d^3} = 1$$

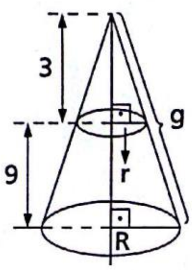
Fazendo $a = d^3$, temos:

$$a + \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

Note que $d = \sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ não convém como resposta, pois, neste caso, $d > 1$.

Resposta: $d = \sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ cm.

842.



$$A_t = 320\pi \text{ m}^2 \Rightarrow \pi Rg + \pi R^2 = 320\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{320 - R^2}{R} \quad (1)$$

$$g^2 = R^2 + 12^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow \left(\frac{320 - R^2}{R}\right)^2 = R^2 + 12^2 \Rightarrow R = \frac{80}{7} \text{ m}$$

Por semelhança: $\frac{r}{R} = \frac{3}{12} \Rightarrow r = \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{7} \Rightarrow r = \frac{20}{7}$ m

$$V_T = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \Rightarrow V_T = \frac{\pi \cdot 9}{3}\left[\left(\frac{80}{7}\right)^2 + \frac{80}{7} \cdot \frac{20}{7} + \left(\frac{20}{7}\right)^2\right] \Rightarrow$$

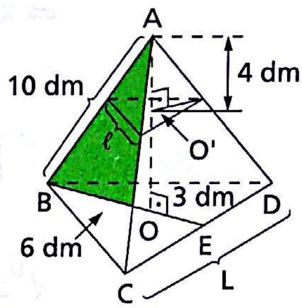
$$\Rightarrow V_T = \frac{3\,600\pi}{7}\ m^3$$

$$g^2 = R^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = \left(\frac{80}{7}\right)^2 + 144 \Rightarrow g = \frac{116}{7}\ m$$

Cálculo da área lateral do tronco:

$$A_\ell = \pi(R + r)g \Rightarrow A_\ell = \pi\left(\frac{80}{7} + \frac{20}{7}\right) \cdot \frac{116}{7} \Rightarrow A_\ell = \frac{11\,600}{49}\pi\ m^2$$

846. O é baricentro do $\triangle BCD$: BO = 6 dm.
Pitágoras no $\triangle AOB$: AO = 8 dm.



$$\frac{L\sqrt{3}}{2} = BE \Rightarrow \frac{L\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow L = 6\sqrt{3}\ dm$$

$$\frac{\ell}{L} = \frac{AO'}{AO} \Rightarrow \frac{\ell}{6\sqrt{3}} = \frac{4}{8} \Rightarrow 3\sqrt{3}\ dm$$

$$B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

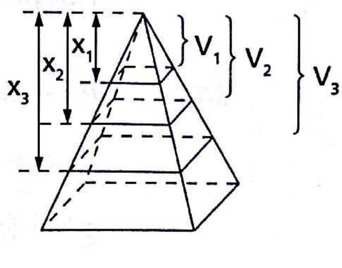
$$\Rightarrow B = 27\sqrt{3}\ dm^2$$

$$b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{27\sqrt{3}}{4}\ dm^2$$

$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\left(27\sqrt{3} + \sqrt{27\sqrt{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4}} + \frac{27\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow V = 63\sqrt{3}\ dm^3$$

851. Suponhamos, sem perda de generalidade, uma pirâmide quadrangular regular, como mostra a figura. Por semelhança, temos:



$$\left(\frac{x_1}{h}\right)^3 = \frac{V_1}{V} \Rightarrow \left(\frac{x_1}{h}\right)^3 = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

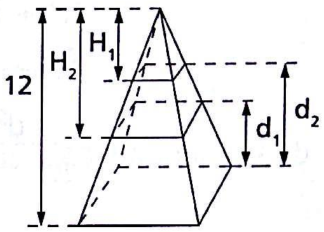
$$\Rightarrow x_1 = h\sqrt[3]{\frac{1}{h}}$$

$$\left(\frac{x_2}{h}\right)^3 = \frac{V_2}{V} \Rightarrow \left(\frac{x_2}{h}\right)^3 = \frac{2}{n} \Rightarrow x_2 = h\sqrt[3]{\frac{2}{n}}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{x_i}{h}\right)^3 = \frac{V_i}{V} \Rightarrow \left(\frac{x_i}{n}\right)^3 = \frac{i}{n} \Rightarrow x_i = h\sqrt[3]{\frac{i}{n}}$$

855. Sejam d_1 e d_2 as distâncias procuradas. Temos:



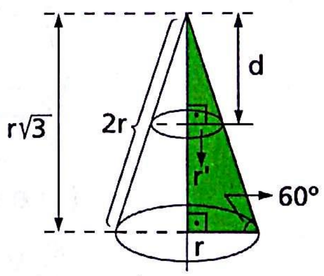
$$\frac{H_2}{12} = \frac{\sqrt[3]{27+98}}{\sqrt[3]{27+98+91}} \Leftrightarrow H_2 = 10 \text{ cm}$$

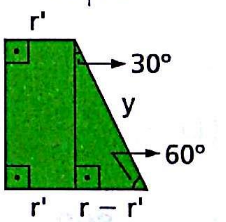
$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{27+98}} \Rightarrow \frac{H_1}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow H_1 = 6 \text{ cm}$$

$d_1 = 12 - H_2 \Rightarrow d_1 = 12 - 10 \Rightarrow d_1 = 2$ cm

$d_2 = 12 - H_1 \Rightarrow d_2 = 12 - 6 \Rightarrow d_2 = 6$ cm

856. Por trigonometria obtemos as medidas indicadas na figura.





Por semelhança, temos:

$$\frac{d}{r\sqrt{3}} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$y = 2 \cdot (r - r') \Rightarrow y = 2\left(r - \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$$

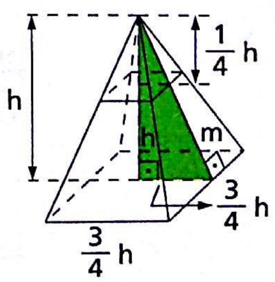
$$A_{T_{cone}} = \pi \cdot r \cdot 2r + \pi r^2 \Rightarrow A_{T_{cone}} = 3\pi r^2$$

$$A_{T_{tronco}} = \frac{7}{8} A_{T_{cone}}$$

$$\pi(r + r') \cdot y + \pi r^2 + \pi r'^2 = \frac{7}{8} \cdot 3\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(r + \frac{d}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2\left(r - \frac{d}{\sqrt{3}}\right) + r^2 + \frac{d^2}{3} = \frac{21}{8}r^2 \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{2}}{4}r$$

857. $m^2 = h^2 + \left(\frac{3}{4}h\right)^2 \Rightarrow m = \frac{5}{4}h$



$$A_\ell = 240 \text{ m}^2 \Rightarrow 4 \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot h \cdot m}{2} = 240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3h \cdot \frac{5}{4}h = 240 \Rightarrow h = 8 \text{ m}$$

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{\frac{1}{4}h}{h}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{1}{16} \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}h\right)^2 \Rightarrow b = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{4} \cdot 8^2 \Rightarrow b = 9\ m^2$$

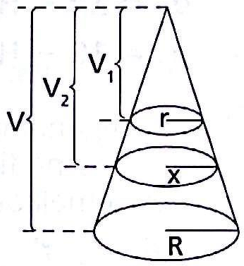
858. Seja *d* a distância procurada e *h* a altura do cone.
Temos:

$h^2 + R^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - R^2$

$A_{seção} = A_\ell \Rightarrow \pi r^2 = \pi Rg \Rightarrow r^2 = Rg$

$$\frac{d^2}{g^2 - R^2} = \frac{\cancel{\pi}r^2}{\cancel{\pi}R^2} \Rightarrow \frac{d^2}{g^2 - R^2} = \frac{Rg}{R^2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{Rg(g^2 - R^2)}}{R}$$

861.



$$\frac{V_1}{V} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow V_1 = \frac{r^3}{R^3}V \quad (1)$$

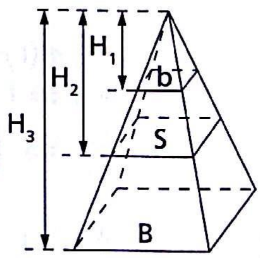
$$\frac{V_2}{V} = \frac{x^3}{R^3} \Rightarrow V_2 = \frac{x^3}{R^3}V \quad (2)$$

$$\frac{V_2 - V_1}{V - V_2} = \frac{a}{b} \quad (3)$$

(1) e (2) em (3):

$$\frac{\frac{x^3}{R^3}V - \frac{r^3}{R^3}V}{V - \frac{x^3}{R^3}V} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x^3 - r^3}{R^3 - x^3} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{aR^3 + br^3}{a + b}}$$

862.



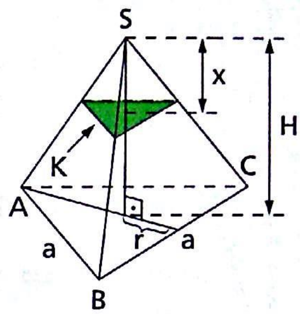
$$\left(\frac{H_1}{H}\right)^2 = \frac{b}{B} \Rightarrow H_1 = \frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \quad (1)$$

$$\left(\frac{H_2}{H}\right)^2 = \frac{S}{p} \Rightarrow H_2 = \frac{H\sqrt{S}}{\sqrt{B}} \quad (2)$$

$$\frac{SH_2 - bH_1}{BH - SH_2} = \frac{p}{q} \xrightarrow{(1),\,(2)} \frac{\frac{SH\sqrt{S}}{\sqrt{B}} - \frac{bH\sqrt{b}}{\sqrt{B}}}{BH - \frac{SH\sqrt{S}}{\sqrt{B}}} = \frac{p}{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{B^3} - \sqrt{S^3}} = \frac{p}{q} \Rightarrow S = \sqrt[3]{\left(\frac{pB\sqrt{B} + qb\sqrt{b}}{p + q}\right)^2}$$

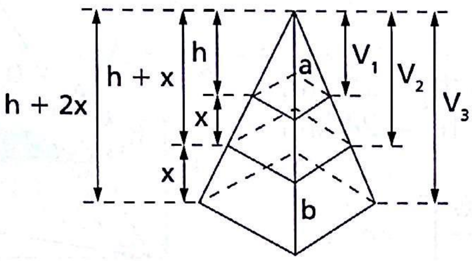
863. $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$



$k = \pi r^2 \Rightarrow k = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{\pi a^2}{12}$

$\left(\frac{x}{H}\right)^2 = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow x = H\sqrt{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

865.



Dados: áreas das bases: *a* e *b*.
Pedido:

$y = \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_2}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} = \frac{(h+x)^3}{h^3} &\Rightarrow \frac{V_2 - V_1}{V_2} = \frac{(h+x)^3 - h^3}{(h+x)^3} \\ \frac{V_3}{V_2} = \frac{(h+2x)^3}{(h+x)^3} &\Rightarrow \frac{V_3 - V_2}{V_2} = \frac{(h+2x)^3 - (h+x)^3}{(h+x)^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{(h+x)^3 - h^3}{(h+2x)^3 - (h+x)^3}$$

Fatorando as diferenças de cubos, vem:

$$y = \frac{x[(h+x)^2 + (h+x)h + h^2]}{x[(h+2x)^2 + (h+2x)(h+x) + (h+x)^2]} = \frac{3h^2 + 3hx + x^2}{3h^2 + 9hx + 7x^2} \quad (1)$$

Usando a semelhança, temos:

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{h+2x}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{h+2x}{h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{2x}{h} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

Preparando a expressão (1) e substituindo $\frac{x}{h}$, temos:

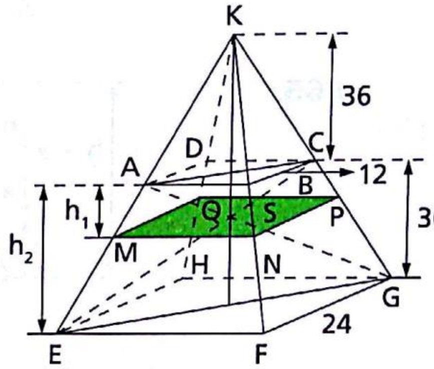
$$y = \frac{3 + 3 \cdot \frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2}}{3 + 9\frac{x}{h} + 7\frac{x^2}{h^2}} = \frac{3 + 3 \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4a}}{3 + 9\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + 7\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4a}} =$$

$$= \frac{12a + 6\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{12a + 18\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + 7(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2} =$$

$$= \frac{12a + 6\sqrt{ab} - 6a + b - 2\sqrt{ab} + a}{12a + 18\sqrt{ab} - 18a + 7b - 14\sqrt{ab} + 7a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{7a + 4\sqrt{ab} + b}{a + 4\sqrt{ab} + 7b}$$

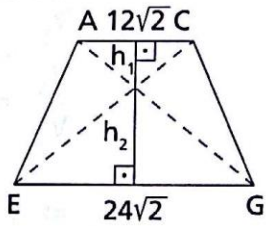
866. De acordo com as medidas indicadas nas figuras, temos:



$$\left.\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{12\sqrt{2}}{24\sqrt{2}} \\ h_1 + h_2 &= 36 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (h_1 = 12\text{ cm}, h_2 = 24\text{ cm})$$

$$\frac{S}{S_{ABCD}} = \left(\frac{h_1 + 36}{36}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{12^2} = \left(\frac{12 + 36}{36}\right)^2 \Rightarrow S = 256\text{ cm}^2$$



Sejam $V_{KABCD} = V_1$; $V_{KMNPQ} = V_2$; $V_{KEFGH} = V$. Temos:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 36 \Rightarrow V_1 = 1\,728\text{ cm}^3$$

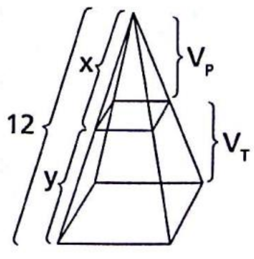
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 256 \cdot 48 \Rightarrow V_2 = 4\,096\text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 72 \Rightarrow V = 13\,824\text{ cm}^3$$

$$V_{T_1} = V_2 - V_1 \Rightarrow V_{T_1} = 4\,096 - 1\,728 \Rightarrow V_{T_1} = 2\,368\text{ cm}^3$$

$$V_{T_2} = V - V_2 \Rightarrow V_{T_2} = 13\,824 - 4\,096 \Rightarrow V_{T_2} = 9\,728\text{ cm}^3$$

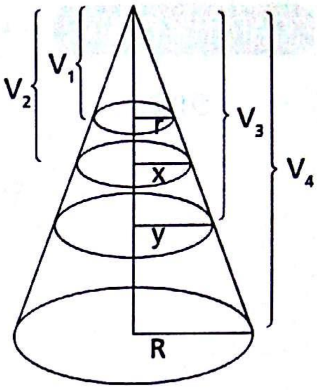
867. $\frac{V_P}{V_T} = \frac{3}{5} \Rightarrow V_T = \frac{5}{3}V_P$



$$V = V_P + V_T \Rightarrow V = V_P + \frac{5}{3}V_P \Rightarrow \frac{V_P}{V} = \frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_P}{V} &= \frac{3}{8} \\ \frac{V_P}{V} &= \left(\frac{x}{12}\right)^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x^3}{12^3} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = 6\sqrt[3]{3}\text{ cm}$$

$$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x \Rightarrow y = 12 - 6\sqrt[3]{3} \Rightarrow y = 6(2 - \sqrt[3]{3})\text{ cm}$$



868. $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{r}{x}\right)^3 \Rightarrow V_1 = \dfrac{r^3}{x^3} \cdot V_2$

Analogamente:

$V_3 = \dfrac{y^3}{x^3} \cdot V_2; V_4 = \dfrac{R^3}{y^3} \cdot V_3$

$V_2 - V_1 = V_3 - V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2V_2 = V_1 + V_3 \Rightarrow$

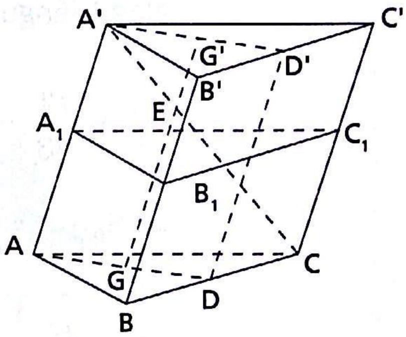
$\Rightarrow 2V_2 = \dfrac{r^3}{x^3} \cdot V_2 + \dfrac{y^3}{x^3} \cdot V_2 \Rightarrow 2x^3 - y^3 = r^3 \quad (1)$

$V_3 - V_2 = V_4 - V_3 \Rightarrow 2V_3 = V_2 + V_4 \Rightarrow 2V_3 = \dfrac{x^3}{y^3} \cdot V_3 + \dfrac{R^3}{y^3} \cdot V_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^3 - x^3 = R^3 \quad (2)$

$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \left(x = \sqrt[3]{\dfrac{2r^3 + R^3}{3}},\ y = \sqrt[3]{\dfrac{r^3 + 2R^3}{3}}\right) \therefore \dfrac{\pi x^2}{\pi y^2} = \sqrt[3]{\dfrac{2r^3 + R^3}{r^3 + 2R^3}}$

876. Seja o tronco de prisma indicado na figura.



Temos:

$$V = S_{A_1B_1C_1} \cdot \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

Devemos demonstrar que

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{3} = GG'$$

em que G e G' são os baricentros das duas bases. Traçamos as medianas AD, A'D'; depois DD'; GG' e a diagonal A'D do trapézio AA'D'D; sendo E a interseção de A'D e GG', temos, observando que GG' é paralela às bases desse trapézio:

$$\frac{EG}{AA'} = \frac{DG}{DA} = \frac{1}{3} \Rightarrow EG = \frac{AA'}{3}$$

$$\frac{EG'}{DD'} = \frac{A'G'}{A'D'} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG' = \frac{2DD'}{3}$$

Trapézio BCC'B': $DD' = \dfrac{BB' + CC'}{2} \Rightarrow 2DD' = BB' + CC'$

Assim: $EG' = \dfrac{BB' + CC'}{3}$.

$$GG' = EG + EG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

CAPÍTULO XIV — Inscrição e circunscrição de sólidos

902.

Figura 1

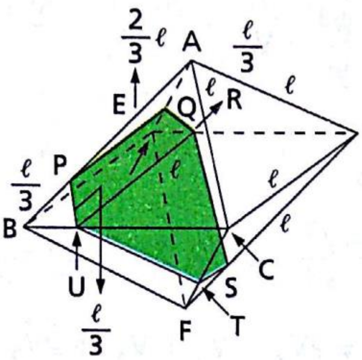


Figura 2

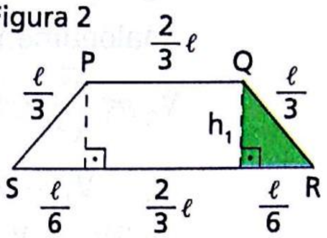
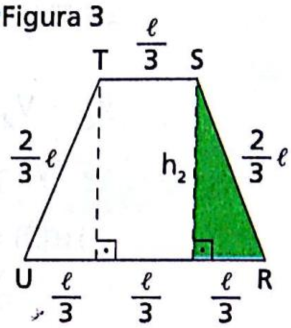


Figura 3



Seja ℓ a medida da aresta do octaedro. Devido ao paralelismo e à semelhança entre os triângulos formados nas faces do octaedro, temos as medidas indicadas nas figuras 1, 2 e 3.

Nos triângulos hachurados das figuras 2 e 3:

$$h_1^2 + \frac{\ell^2}{36} = \frac{\ell^2}{9} \Rightarrow h_1 = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_{PQRS} = \left[\frac{\left(\ell + \frac{2}{3}\ell\right)\frac{\ell\sqrt{3}}{6}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{PQRS} = \frac{5\ell^2\sqrt{3}}{36}$$

$$h_2^2 + \frac{\ell^2}{9} = \frac{4\ell^2}{9} \Rightarrow h_2 = \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{RSTU} = \left[\frac{\left(\frac{\ell}{3} + \ell\right)\frac{\ell\sqrt{3}}{3}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{RSTU} = \frac{2\ell^2\sqrt{3}}{9}$$

Se R é o raio da esfera circunscrita, temos:

$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ell = 6$$

$$S_{seção} = S_{PQRS} = S_{RSTU} = S_{seção} = \frac{5 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{36} + \frac{2 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{seção} = 13\sqrt{3}\ m^2$$

911. Sejam A a aresta do tetraedro circunscrito e *a* a aresta do tetraedro inscrito na esfera de raio *r*. Temos:

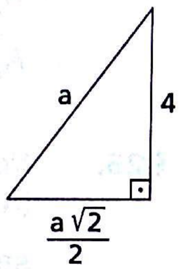
$$r = \frac{A\sqrt{6}}{12} \Rightarrow A = 2\sqrt{6}r$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{6}}r \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A^3}{a^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(2\sqrt{6}r)^3}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}r\right)^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 27$$

914. *a*: aresta do octaedro
x: aresta do cubo

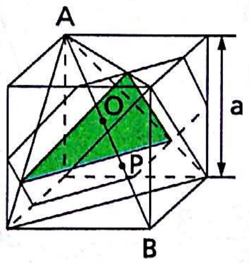
$$a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

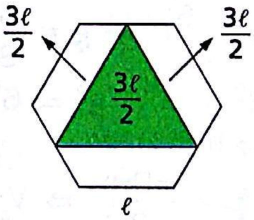


$$x = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}\text{ cm}$$

$$A_t = 6x^2 \Rightarrow A_t = 6\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2 \Rightarrow A_t = \frac{128}{3}\text{ cm}^2$$

919.





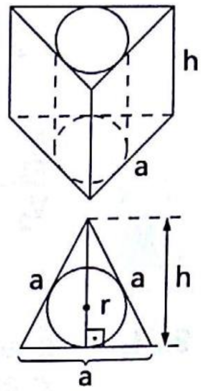
De acordo com as figuras acima, temos:

$$OP = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OP = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

AP = 2 PB

$$\left.\begin{array}{l} AP = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \\ AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AO}{OP} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow \frac{AO}{OP} = 3$$

$$\frac{A_{S_{tetra.}}}{A_{S_{cubo}}} = \frac{\dfrac{\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2\sqrt{3}}{4}}{6\cdot\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \frac{A_{S_{tetra.}}}{A_{S_{cubo}}} = \frac{3}{8}$$



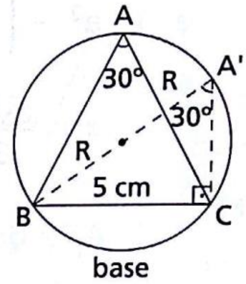
922. $r = \frac{1}{3}h \Rightarrow r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$A_{\ell_{prisma}} = 3ah$

$A_{\ell_{cilindro}} = 2\pi rh \Rightarrow A_{\ell_{cilindro}} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\ell_{prisma}} = \frac{\pi a\sqrt{3}\ h}{3}$

$\frac{A_{\ell_{prisma}}}{A_{\ell_{cilindro}}} = \frac{3ah}{\frac{\pi a\sqrt{3}\ h}{3}} \Rightarrow \frac{A_{\ell_{prisma}}}{A_{\ell_{cilindro}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

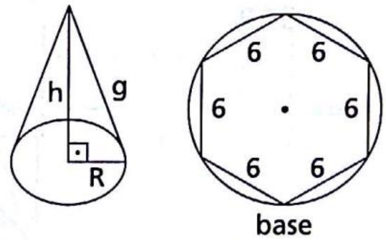


925. Note o triângulo retângulo A'BC (A'B é diâmetro).

$\text{sen } 30° = \frac{5}{2R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{2R} \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$

$V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot (5)^2 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 300\pi \text{ cm}^3$



933. $4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$

$g = \frac{5}{3}R \Rightarrow g = \frac{5}{3} \cdot 6 \Rightarrow g = 10 \text{ cm}$

$R^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 6^2 + h^2 = 10^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 8 \text{ cm}$

$$\left.\begin{array}{l} V_c = \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow V_c = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} \Rightarrow V_c = 96\pi \text{ cm}^3 \\ V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \Rightarrow V_{esf.} = 288\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{V_c}{V_{esf.}} = \frac{1}{3}$

$B = \frac{3}{2} \cdot R^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot 6^2\sqrt{3} \Rightarrow B = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$

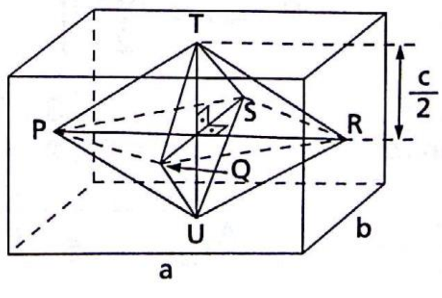
$V = \frac{Bh}{3} \Rightarrow V = \frac{54\sqrt{3} \cdot 8}{3} \Rightarrow V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3$

935. Note que PQRS é um losango.

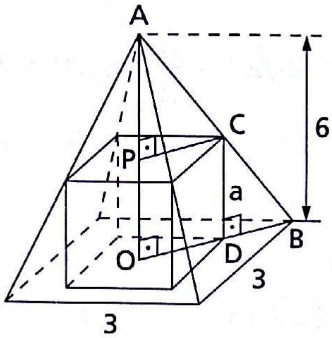
$V_{octaedro} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{PQRS} \cdot \frac{c}{2} \Rightarrow$

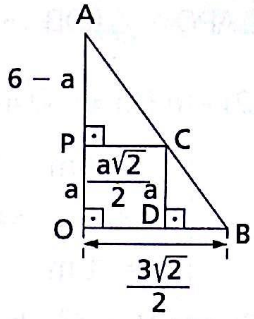
$\Rightarrow V_{octaedro} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{octaedro} = \frac{abc}{6}$



937.

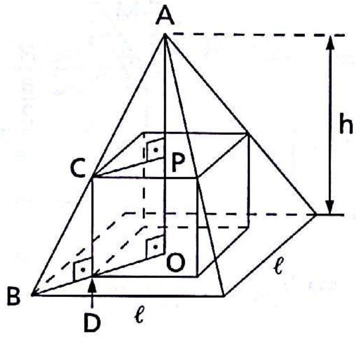


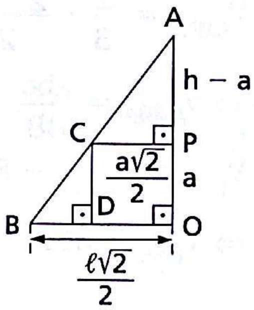


$$\triangle APC \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{6-a}{6} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = 2 \text{ m}$$

$$V = a^3 \Rightarrow V = 2^3 \Rightarrow V = 8 \text{ m}^3$$

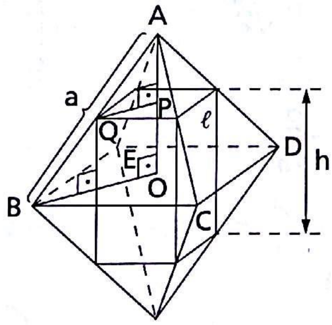
938.

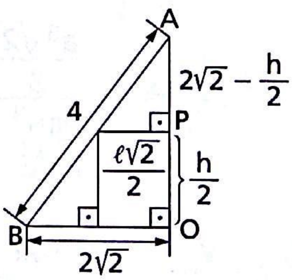




$$\triangle APC \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{h-a}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \ell = \frac{ha}{h-a}$$

939.





$$A_{octa.} = 32\sqrt{3} \text{ m}^2 \Rightarrow \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3} \Rightarrow a = 4 \text{ m}$$

$$BO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BO = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BO = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$A_{\ell_{prisma}} = 12\sqrt{2} \text{ m}^2 \Rightarrow 4\ell h = 12\sqrt{2} \Rightarrow \ell h = 3\sqrt{2} \quad (1)$$

$\triangle APQ \sim \triangle AOB \Rightarrow \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - \dfrac{h}{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{2} - \ell\sqrt{2}$ (2)

(2) em (1) $\Rightarrow \ell\left(4\sqrt{2} - \ell\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell^2 - 4\ell + 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell = 3\text{ m} \\ \text{ou} \\ \ell = 1\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt{2}\text{ m} \\ \text{ou} \\ h = 3\sqrt{2}\text{ m} \end{cases}$$

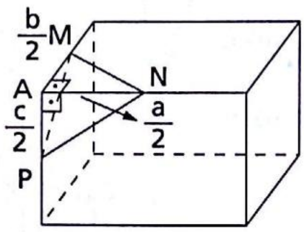
Sendo $V = \ell^2 \cdot h$, temos:

$V = 3^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V = 9\sqrt{2}\text{ m}^3$

ou

$V = 1^2 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow V = 3\sqrt{2}\text{ m}^3$

940. $V_{AMNP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} \cdot \dfrac{c}{2} \Rightarrow$



$\Rightarrow V_{AMNP} = \dfrac{abc}{48}$

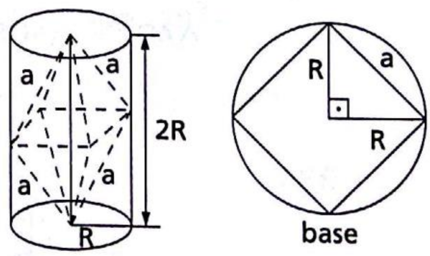
$V_{poli.} = V_{paral.} - 8V_{AMNP} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{poli.} = abc - 8 \cdot \dfrac{abc}{48} \Rightarrow V_{poli.} = \dfrac{5}{6}abc$

942. $a = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$V_{cil.} = \pi R^2 \cdot 2R \Rightarrow V_{cil.} = 2\pi R^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cil.} = 2\pi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 \Rightarrow V_{cil.} = \dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$



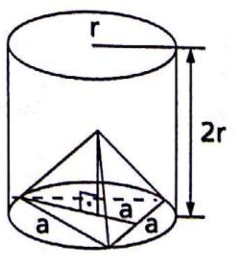
$\dfrac{V_{octa.}}{V_{cil.}} = \dfrac{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}{\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \dfrac{V_{octa.}}{V_{cil.}} = \dfrac{2}{3\pi}$

943. $V_{cil.} = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V_{cil.} = 2\pi r^3$

$a = r\sqrt{3}$

$V_{tetra.} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{tetra.} = \dfrac{\left(r\sqrt{3}\right)^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow$

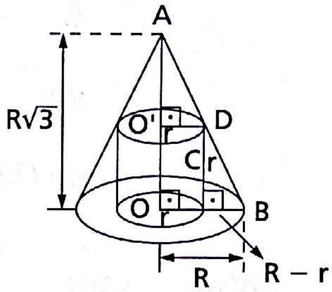
$\Rightarrow V_{tetra.} = \dfrac{r^3\sqrt{6}}{4}$



$$V_{cil.} - V_{tetra.} = 2\pi r^3 - \frac{r^3\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V_{cil.} - V_{tetra.} = \frac{(8\pi - \sqrt{6})}{4} r^3$$

$$\pi r^2 h = \frac{8\pi - \sqrt{6}}{4} r^3 \Rightarrow h = \frac{8\pi - \sqrt{6}}{4\pi} r$$

945. $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R\sqrt{3} \Rightarrow$



$$\Rightarrow V_{cone} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} R^3$$

$$V_{cil.} = \pi r^2 \cdot r \Rightarrow V_{cil.} = \pi r^3 \ (1)$$

$$\Delta ABO \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{R - r}{r} \Rightarrow$$

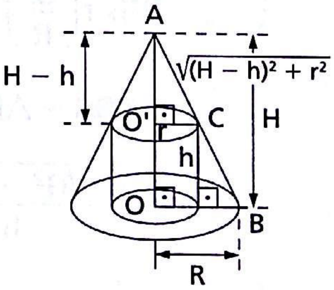
$$\Rightarrow r = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} R \ (2)$$

$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow V_{cil.} = \pi\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 \Rightarrow V_{cil.} = \frac{(27 - 15\sqrt{3})}{4}\pi$$

$$\frac{V_{cone}}{V_{cil.}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \cdot R^3 \cdot \frac{4}{(27 - 15\sqrt{3})\pi} \Rightarrow \frac{V_{cone}}{V_{cil.}} = \frac{2(3\sqrt{3} + 5)}{9}$$

946. $A_{\ell_{cp}}$: área lateral do cone parcial

$A_{\ell_{cil.}}$: área lateral do cilindro



$$A_{\ell_{cil.}} = A_{\ell_{cp}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi rh = \pi r\sqrt{(H - h)^2 + r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2h = \sqrt{(H - h)^2 + r^2} \Rightarrow$$

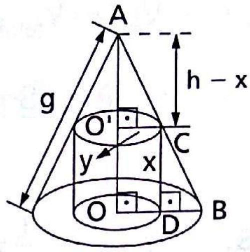
$$\Rightarrow 4h^2 = (H - h)^2 + r^2 \ (1)$$

$$\Delta ABO \sim \Delta ACO' \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H}{H - h} \Rightarrow r = \frac{R(H - h)}{H} \ (2)$$

$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow 4h^2 = (H - h)^2 + \left[\frac{R(H - h)}{H}\right]^2 \Rightarrow h = \frac{H\sqrt{H^2 + R^2}}{2H + \sqrt{H^2 + R^2}} \ (3)$$

$$(3) \text{ em } (2) \Rightarrow r = \frac{R\left(H - \frac{H\sqrt{H^2 + R^2}}{2H + \sqrt{H^2 + R^2}}\right)}{H} \Rightarrow r = \frac{2RH}{2H + \sqrt{H^2 + R^2}}$$

947. $A_{\ell_{\substack{\text{cone}\\\text{menor}}}} = A_{\ell_{\text{cil.}}} \Rightarrow$



$\Rightarrow \pi y\sqrt{(h-x)^2+y^2} = 2\pi yx \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(h-x)^2+y^2} = 2x \quad (1)$

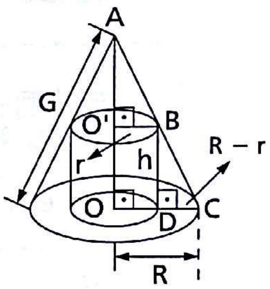
$\Delta AOB \sim \Delta AO'C \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{h}{g} = \dfrac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2+y^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(h-x)^2+y^2} = \dfrac{g(h-x)}{h} \quad (2)$

(2) em (1) $\Rightarrow \dfrac{g(h-x)}{h} = 2x \Rightarrow x = \dfrac{gh}{2h+g}$

948. $\Delta AOC \sim \Delta AO'B \Rightarrow$



$\Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{G}{G-\sqrt{h^2+(R-r)^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow G - \sqrt{h^2+(R-r)^2} = \dfrac{Gr}{R} \quad (1)$

$A_{\ell_{\substack{\text{cone}\\\text{menor}}}} = A_{\ell_{\text{coroa}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi r\left[G - \sqrt{h^2+(R-r)^2}\right] = \pi(R^2-r^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow r\left(G - \sqrt{h^2+(R-r)^2}\right) = R^2 - r^2 \Rightarrow$

$\xRightarrow{(1)} r\left(\dfrac{Gr}{R}\right) = R^2 - r^2 \Rightarrow r = R\sqrt{\dfrac{R}{G+R}} \quad (2)$

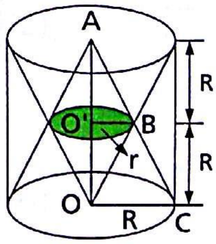
$\Delta AOC \sim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{\sqrt{G^2-R^2}}{h} = \dfrac{R}{R-r} \Rightarrow$

$\xRightarrow{(2)} \dfrac{\sqrt{G^2-R^2}}{h} = \dfrac{R}{R-R\sqrt{\dfrac{R}{G+R}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{G-R}\left(\sqrt{G+R}-\sqrt{R}\right)$

949. $\Delta AO'B \sim \Delta AOC \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow r = \dfrac{R}{2}$



$V_{\text{tronco}} = \dfrac{\pi h}{3}\left[R^2 + R \cdot r + r^2\right]$

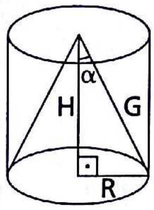
$V_{\text{tronco}} = \dfrac{\pi \cdot R}{3}\left[R^2 + R \cdot \dfrac{R}{2} + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{7\pi R^3}{12}$$

$$V = V_{cilin.} - 2V_{tronco}$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{7\pi R^3}{12} \Rightarrow V = \frac{5}{6}\pi R^3$$

951. $\frac{A_{t_{cil.}}}{A_{t_{cone}}} = \frac{7}{4} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{2\pi R(R+H)}{\pi R(R+G)} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{R+H}{R+G} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

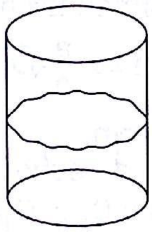
$$\Rightarrow \frac{G \text{ sen } \alpha + G \cos \alpha}{G \text{ sen } \alpha + G} = \frac{7}{8} \Rightarrow \text{sen } \alpha + 8 \cos \alpha = 7 \Rightarrow$$

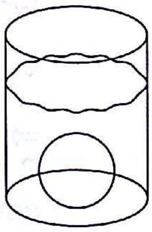
$$\Rightarrow \text{sen } \alpha + 8\left(\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}\right) = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65 \text{ sen}^2 \alpha - 14 \text{ sen } \alpha - 15 = 0 \Rightarrow \left(\text{sen } \alpha = -\frac{5}{13} \text{ ou sen } \alpha = \frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \alpha = \text{arc sen } \frac{3}{5}$$

965. $V_{cil.} = \pi r^2 h$





$V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Antes: $\pi r^2 h$

Depois: $\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\pi r^2(h + h') = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow h' = \frac{4R^3}{3r^2}$$

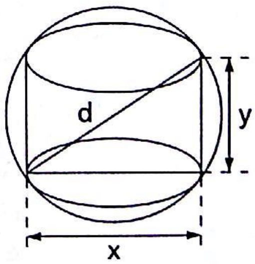
967. $2\pi \frac{x}{2} \cdot y = \pi a^2 \Rightarrow x \cdot y = a^2$

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 2a^2 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow x + y = \sqrt{d^2 + 2a^2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2xy = -2a^2 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow x - y = \sqrt{d^2 - 2a^2} \quad (2)$$

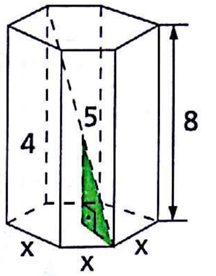
$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \left(x = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2};\right.$$

$$\left. y = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}\right)$$



Condição: $d^2 - 2a^2 \geqslant 0 \Rightarrow d \geqslant a\sqrt{2}$

970. Na figura:



$x^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow x = 3$

$B = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot 3^2\sqrt{3} \Rightarrow$

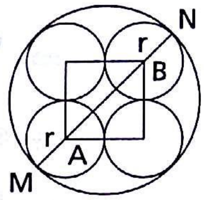
$\Rightarrow B = \frac{27\sqrt{3}}{2}\ m^2$

$A_{face} = 3 \cdot 8 \Rightarrow A_{face} = 24\ m^2$

$A_t = 6 \cdot A_{face} + 2B \Rightarrow A_t = 6 \cdot 24 + 2 \cdot 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 9(16 + 3\sqrt{3})\ m^2$

971. Consideremos a projeção da esfera com suas esferas inscritas no plano que contém uma das faces do cubo, conforme a figura indica. Temos:

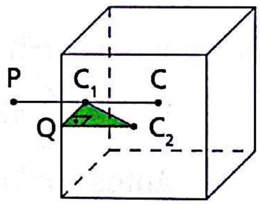


$AB = 2r\sqrt{2}$

$MN = 2r + AB \Rightarrow MN = 2r + 2r\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = 2r(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow r = R(\sqrt{2} - 1)$

972. Sejam C_1 e C_2 o centro de duas esferas, conforme indicado na figura.

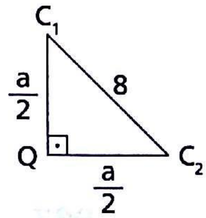


$C_1C_2 = 8\text{ cm} \Rightarrow \frac{a}{2}\sqrt{2} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 8\sqrt{2}\text{ cm}$

C é o centro do cubo; P pertence à esfera de raio $C_1 \therefore C_1P = 4$.

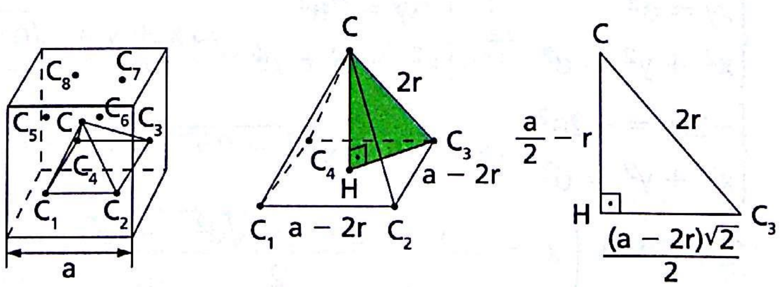
CP é a distância procurada. Daí:



$CP = \frac{a}{2} + 4 \Rightarrow CP = \frac{8\sqrt{2}}{2} + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow CP = 4(\sqrt{2} + 1)\text{ cm.}$

973.



Sejam: C, C_1, C_2 ... C_8 os centros das esferas.

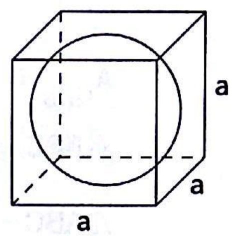
ΔCHC_3:

$\frac{a^2}{4} - ar + r^2 + \frac{2(a^2 - 4ar + 4r^2)}{4} = 4r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3a^2 - 12ra - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{3}\,r$$

Note que $a = \dfrac{6 - 4\sqrt{3}}{3}\,r < r$, e então: $a = \dfrac{2}{3}(2\sqrt{3} + 3)r$.

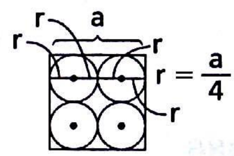
974. $V_1 = V_{cubo} - V_{esf.} \Rightarrow$



$$\Rightarrow V_1 = a^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{6 - \pi}{6}\,a^3 \quad (1)$$

$V^2 = V_{cubo} - 8V_{esf.} \Rightarrow$



$$\Rightarrow V_2 = a^3 - 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\left(\frac{a}{4}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{6 - \pi}{6}\,a^3 \quad (2)$$

(1) e (2) $\Rightarrow V_1 = V_2$

975. $2R = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

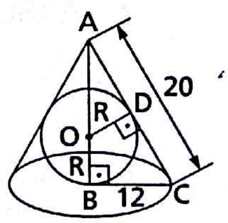
$$R' = \frac{a}{2} \Rightarrow R' = \frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{3} \Rightarrow R' = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$2R' = a'\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2R\sqrt{3}}{3} = a'\sqrt{3} \Rightarrow a' = \frac{2}{3}R$$

$$A_{C'} = 6(a')^2 \Rightarrow A_{C'} = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \Rightarrow A_{C'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overbrace{4R^2 \cdot \pi}^{S}}{\pi} \Rightarrow A_{C'} = \frac{2S}{3\pi}$$

982. $\triangle ABC \sim \triangle ADO \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AO} = \frac{BC}{DO} \Rightarrow$$



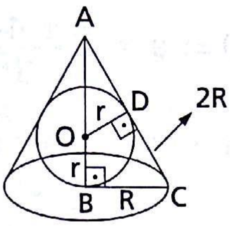
$$\Rightarrow \frac{16}{AD} = \frac{20}{16 - R} = \frac{12}{R} \Rightarrow$$

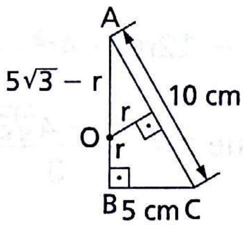
$$\Rightarrow 20R = 192 - 12R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32R = 192 \Rightarrow R = \frac{96}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 6 \text{ cm} \Rightarrow 2R = 12 \text{ cm}$$

984.





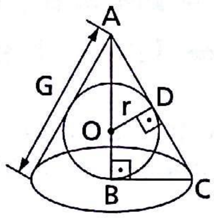
$$A_{\ell_{cone}} = 50\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow \pi R \cdot 2R = 50\pi \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

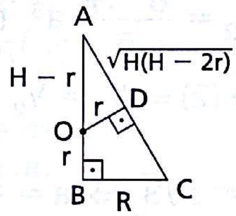
$$\triangle ABC \Rightarrow AB^2 = 100 - 25 \Rightarrow AB = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADO \Rightarrow \frac{5\sqrt{3} - r}{10} = \frac{r}{5} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$A_{esf.} = 4\pi r^2 \Rightarrow A_{esf.} = 4\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A_{esf.} = \frac{100\pi}{3} \text{ cm}^2$$

986.





a) $\triangle ABC \Rightarrow G^2 = H^2 + R^2 \Rightarrow H = \sqrt{G^2 - R^2}$

$$\triangle AOD \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H - r}{G} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{G^2 - R^2} - r}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{R\sqrt{G^2 - R^2}}{G + R}$$

b) $\triangle ABC \Rightarrow G^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow R = \sqrt{G^2 - H^2}$

$$\triangle AOD \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{G^2 - H^2}} = \frac{H - r}{G} \Rightarrow r = \frac{H\sqrt{G^2 - H^2}}{G + \sqrt{G^2 - H^2}}$$

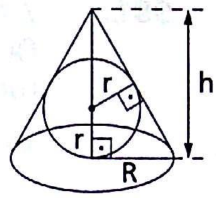
c) $\triangle ABC \Rightarrow G^2 = H^2 + R^2 \Rightarrow G = \sqrt{H^2 + R^2}$

$$\triangle AOD \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H - r}{\sqrt{H^2 + R^2}} \Rightarrow r = \frac{RH}{\sqrt{H^2 + R^2} + R}$$

d) $\triangle ABC \sim \triangle ADO \Rightarrow \dfrac{G}{H} = \dfrac{H - r}{\sqrt{H(H - 2r)}} \Rightarrow G = \dfrac{H(H - r)}{\sqrt{H(H - 2r)}}$

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{\sqrt{H(H - 2r)}} \Rightarrow R = \frac{Hr}{\sqrt{H(H - 2r)}}$$

987. Pelo exercício anterior, temos:



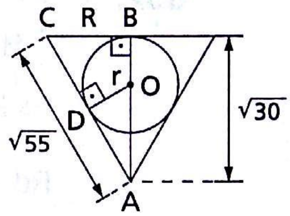
$$R = \frac{r \cdot h}{\sqrt{h(h-2r)}};\ G = \frac{h(h-r)}{\sqrt{h(h-2r)}}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2h^2}{h \cdot (h-2r)} \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$$

$$A_\ell = \pi RG \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot \frac{rh}{\sqrt{h(h-2r)}} \cdot \frac{h(h-r)}{\sqrt{h(h-2r)}} \Rightarrow A_\ell = \frac{\pi rh(h-r)}{h-2r}$$

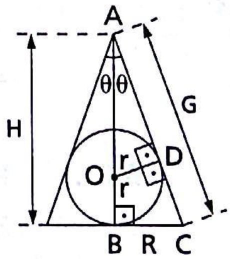
989. ΔABC: $(\sqrt{55})^2 = (\sqrt{30})^2 + R^2 \Rightarrow R = 5$ cm



$\Delta AOD \sim \Delta ACB$

$$\frac{r}{3} = \frac{5}{\sqrt{30}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{30}}{2}\text{ cm}$$

990. $$\frac{A_{\ell_{esf.}}}{A_{t_{cone}}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4\pi r^2}{\pi R(R+G)} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9r^2 = R^2 + RG \quad (1)$$



$$\Delta AOD \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{r}{H-r} \Rightarrow r = \frac{H \text{ sen } \theta}{1 + \text{sen } \theta} \quad (2)$$

$$\Delta ABC \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{R}{H} \Rightarrow R = H \text{ tg } \theta \quad (3)$$

$$\Delta ABC \Rightarrow \cos \theta = \frac{H}{G} \Rightarrow G = \frac{H}{\cos \theta} \quad (4)$$

(2), (3) e (4) em (1)

$$\frac{9(H \text{ sen } \theta)^2}{(1 + \text{sen } \theta)^2} = H^2 \text{ tg}^2\, \theta + H \text{ tg } \theta \cdot \frac{H}{\cos \theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \text{ sen } \theta \cdot \cos^2 \theta = (1 + \text{sen } \theta)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \text{ sen } \theta \left(1 - \text{sen}^2\, \theta\right) = (1 + \text{sen } \theta)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \text{ sen } \theta\, (1 - \text{sen } \theta) = (1 + \text{sen } \theta)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \text{ sen}^2\, \theta - 7 \text{ sen } \theta + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \text{sen } \theta = \dfrac{1}{5} \Rightarrow 2\theta = 2 \cdot \text{arc sen } \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Resposta: $\dfrac{\pi}{3}$ ou $2 \cdot \text{arc sen } \dfrac{1}{5}$.

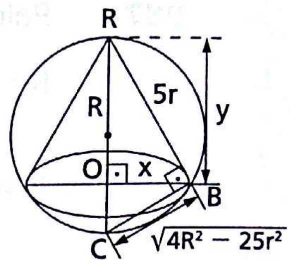
991. $\triangle ABO$: $y^2 + x^2 = 25r^2$ (1)

Relações métricas no $\triangle ABC$

(produto dos catetos = hipotenusa × altura) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 5r \cdot \sqrt{4R^2 - 25r^2} = 2R \cdot x \Rightarrow$

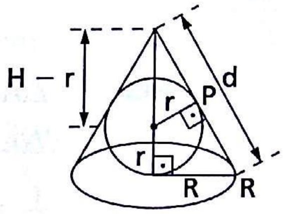
$\Rightarrow x = \dfrac{5r \cdot \sqrt{4R^2 - 25r^2}}{2R}$ (2)



(2) em (1):

$$y^2 = 25r^2 - \frac{25r^2(4R^2 - 25r^2)}{4R^2} \Rightarrow y = \frac{25r^2}{2R}$$

992. $\begin{cases} \dfrac{R}{r} = \dfrac{H}{d} \\ (H - r)^2 = d^2 + r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Rd = rH \\ H^2 - 2Hr = d^2 \end{cases}$



$\Rightarrow H^2 - 2Hr - d^2 = 0 \Rightarrow H = r + \sqrt{d^2 + r^2}$

$Rd = rH \Rightarrow R = \dfrac{rH}{d} \Rightarrow R = \dfrac{r \cdot \left(r + \sqrt{d^2 + r^2}\right)}{d}$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot \left[\dfrac{r^2\left(r + \sqrt{d^2 + r^2}\right)^2}{d^2}\right] \cdot \left[1 + \sqrt{d^2 + r^2}\right]}{3} \Rightarrow$$

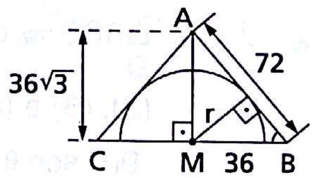
$$\Rightarrow V = \frac{\pi r^2\left(r + \sqrt{d^2 + r^2}\right)^3}{3d^2}$$

993. Relações métricas no $\triangle ABM$:

$36 \cdot 36\sqrt{3} = 72 \cdot r \Rightarrow r = 18\sqrt{3}$ cm

$A = 2\pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow A = 3\pi r^2 \Rightarrow$

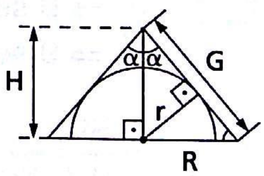
$\Rightarrow A = 3\pi\left(18\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow A = 2916\pi$



994. $r = H \cdot \operatorname{sen} \alpha$ (1)

$R = H \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (2)

$H = G \cdot \cos \alpha \Rightarrow G = \dfrac{H}{\cos \alpha}$ (3)



$$\frac{S_{cone}}{S_{esf.}} = \frac{18}{5} \Rightarrow \frac{\pi R^2 + \pi RG}{2\pi r^2} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2 + RG}{2r^2} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

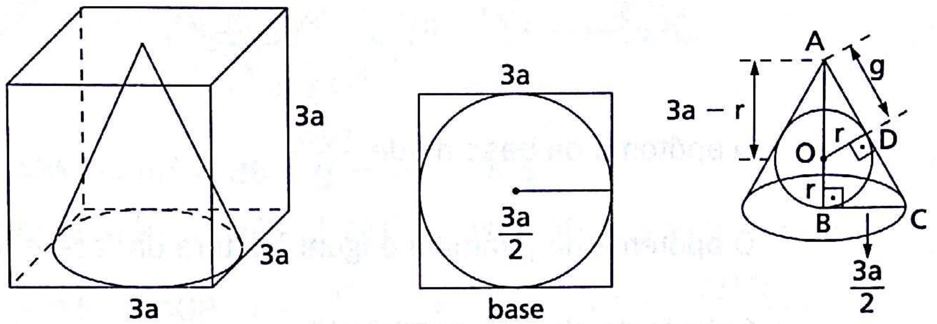
$$\xrightarrow{(1),\,(2)\text{ e }(3)} \frac{H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + H \operatorname{tg} \alpha \cdot H \cos \alpha}{2H^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 \operatorname{sen}^2 \alpha - 36 \operatorname{sen} \alpha + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{6} \text{ ou sen}\,\alpha = \frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore \left(2\alpha = 2 \text{ arc sen } \frac{5}{6} \text{ ou } 2\alpha = 2 \text{ arc sen } \frac{1}{6}\right)$$

995.



$$\triangle ABC \Rightarrow g^2 = (3a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \Rightarrow g = \frac{3\sqrt{5}}{2}\,a \quad (1)$$

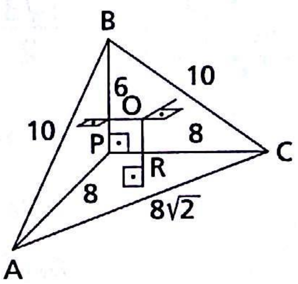
$$\triangle ABC \sim \triangle ADO \Rightarrow \frac{3a - r}{g} = \frac{r}{\frac{3a}{2}} \xRightarrow{(1)} \frac{3a - r}{\frac{3\sqrt{5}}{2}\,a} = \frac{r}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{3a\left(\sqrt{5} - 1\right)}{4}$$

$$V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3a\left(\sqrt{5} - 1\right)}{4}\right]^3 \Rightarrow V_{esf.} = \frac{9\pi a^3\left(\sqrt{5} - 2\right)}{2}$$

998. $\triangle ABP \Rightarrow PA^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow PA = 8$ cm

$\triangle BCP \Rightarrow PC^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow PC = 8$ cm



$$S_{ABP} = S_{BCP} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow S_{ABP} = S_{BCP} = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{ACP} = \frac{8 \cdot 8}{2} \Rightarrow S_{ACP} = 32 \text{ cm}^2$$

Cálculo da área do $\triangle ABC$:

$$p = \frac{10 + 10 + 8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p = \left(10 + 4\sqrt{2}\right) \text{ cm}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{\left(10 + 4\sqrt{2}\right)\left(10 + 4\sqrt{2} - 10\right)^2\left(10 + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\right)} \Rightarrow$$

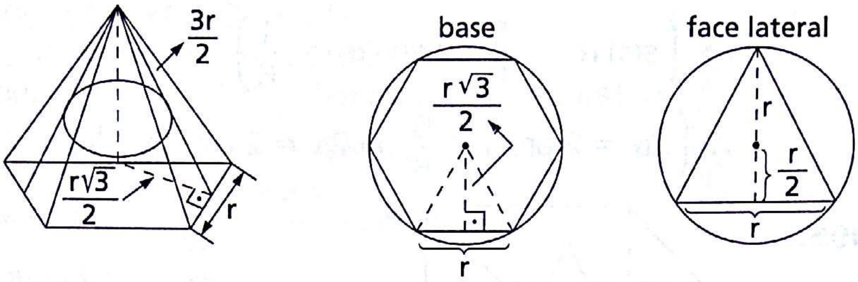
$$\Rightarrow S_{ABC} = 8\sqrt{34} \text{ cm}^2$$

$$V_{OPAB} + V_{OPAC} + V_{OPBC} + V_{OABC} = V_{PABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} S_{ABP} \cdot R + \frac{1}{3} S_{ACP} \cdot R + \frac{1}{3} S_{BCP} \cdot R + \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot R = \frac{1}{3} S_{ACP} \cdot PB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{3} \cdot \left(24 + 32 + 24 + 8\sqrt{34}\right) = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 6 \Rightarrow R = \frac{4\left(10 - \sqrt{34}\right)}{11} \text{ cm}$$

999.



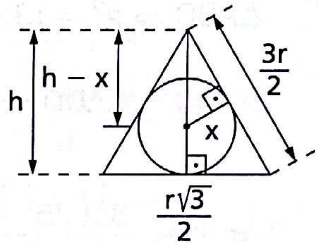
O apótema da base mede $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

O apótema da pirâmide é igual à altura da face e mede $\dfrac{3r}{2}$.

Cálculo da altura *h* da pirâmide:

$$h^2 = \left(\frac{3r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{6r^2}{4} \Rightarrow h = \frac{r\sqrt{6}}{2}.$$



Cálculo do raio *x* da esfera:
Da semelhança vem:

$$\frac{x}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{h - x}{\frac{3r}{2}} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{h}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow x = \frac{h\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}.$$

Ou seja: $x = \dfrac{r\sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}$.

Cálculo dos volumes:

a) Da esfera:

$$V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{r\sqrt{6}\ \left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}\right]^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(3\sqrt{3} - 5\right)\pi r^3$$

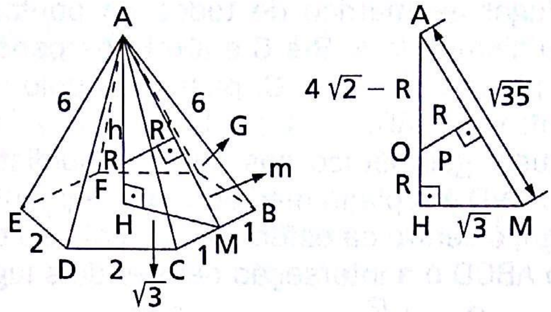
b) Da pirâmide:

$$V_{pir.} = \frac{1}{3}\left(6 \cdot \frac{1}{3} \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{r\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\, r^3$$

Então:

$$\frac{V_{pir.}}{V_{esf.}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\, r^3 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}\left(3\sqrt{3} - 5\right)\pi r^3} = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{2\pi}.$$

1000.



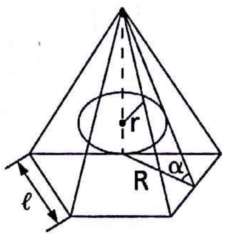
$\Delta ABM \Rightarrow m^2 = 36 - 1 \Rightarrow m = \sqrt{35}$

$\Delta AHM \Rightarrow h^2 = m^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 35 - 3 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$

$$\Delta AHM \sim \Delta AOP \Rightarrow \frac{R}{4\sqrt{2} - R} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{210} + 3\sqrt{2}}{8}$$

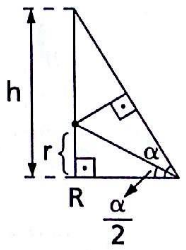
1001. r = raio da esfera

R = raio da circunferência inscrita na base



$$\frac{r}{R} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{h}{R} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = R\operatorname{tg}\alpha$$



$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = R \Rightarrow \ell = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Calculando os volumes:

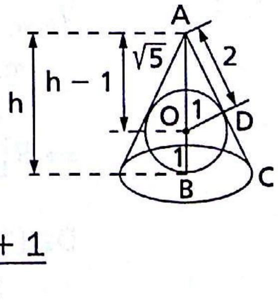
$$V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$$

$$V_{pir.} = \frac{1}{3}\left(6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot R\right) \cdot R \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} R^3 \operatorname{tg}\alpha$$

Então:

$$\frac{V_{esf.}}{V_{pir.}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}\, R^3 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\sqrt{3}\pi\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{3\operatorname{tg}\alpha}$$

1008. $2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{5} + 1$



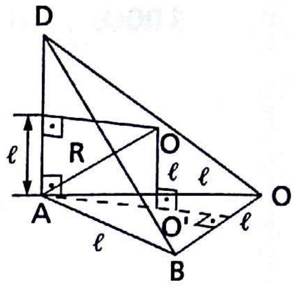
$\Delta AOD \Rightarrow AO = h - 1 \Rightarrow AO = \sqrt{5}$

$\Delta AOD \Rightarrow AD^2 = AO^2 - OD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2 \Rightarrow AD = 2$

$$\Delta AOD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{R}{1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

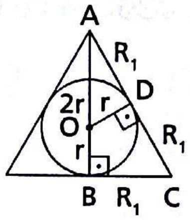
1009. O lugar geométrico de todos os pontos que equidistam de A, B e C é a reta perpendicular ao plano por A, B e C, passando pelo circuncentro do $\triangle ABC$.
O lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e D é o plano mediador do segmento AD. Logo, o centro da esfera circunscrita ao tetraedro ABCD é a interseção desses dois lugares.

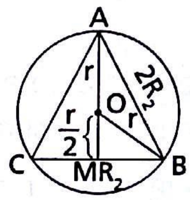


$$AO' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO' = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle AOO' \Rightarrow AO^2 = AO'^2 + OO'^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \ell^2 \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell$$

1014.





$$\triangle AOD \Rightarrow R_1^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow R_1 = r\sqrt{3}$$

$$A_{t_{\substack{cone\\circunsc.}}} = \pi R_1(R_1 + 2R_1) \Rightarrow A_{t_{\substack{cone\\circ.}}} = \pi r\sqrt{3}\left(r\sqrt{3} + 2r\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{t_{\substack{cone\\circ.}}} = 9\pi r^2 \quad (1)$$

$$\triangle OBM \Rightarrow R_2^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow R_2 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{t_{\substack{cone\\insc.}}} = \pi R_2\left(R_2 + 2R_2\right) \Rightarrow A_{t_{\substack{cone\\insc.}}} = \pi\frac{r\sqrt{3}}{2}\left(3 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{t_{\substack{cone\\insc.}}} = \frac{9\pi r^2}{4} \quad (2)$$

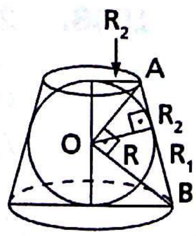
$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow A_{t_{\substack{cone\\insc.}}} = \frac{1}{4} A_{t_{\substack{cone\\circ.}}}$$

1018. Rel. métricas $\triangle AOB \Rightarrow R_1R_2 = R_2$ (1)

$V_{tronco} = 3 \cdot V_{esf.} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\pi 2R}{3}\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right) = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2 = 6R^2 \quad (2)$$



$$\text{De (1) e (2)} \Rightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = R\sqrt{7} \\ R_1 - R_2 = R\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(R_1 = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} R;\ R_2 = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} R\right)$$

$$A_{tronco} = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi(R_1 + R_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{tronco} = \pi\left[\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{tronco} = 12\pi R^2$$

1025. $V_{cone} = V_{cil.} \Rightarrow h_{cone} = 3h_{cil.}$ (1)

$\triangle OAM$:

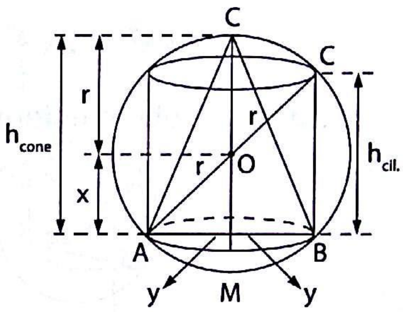
$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - y^2$ (2)

$\triangle ABC$: $h_{cil.}^2 = (2r)^2 - (2y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_{cil.} = \sqrt{4r^2 - 4y^2}$ (3)

(2) e (3) em (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow r + x = 3\sqrt{4r^2 - 4y^2} \Rightarrow x = \frac{r}{5}$

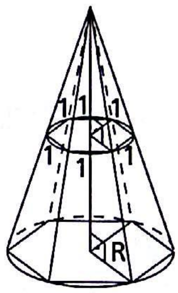


1027. Por semelhança:

$\frac{1}{R} = \frac{3}{8} \Rightarrow R = \frac{8}{3}$ dm.

$b = \frac{3}{2} r^2\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \cdot 1^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ dm^2



$\Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot R^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ dm^2

$$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b) \Rightarrow V = \frac{5}{3}\left(\frac{32\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow V = \frac{485\sqrt{3}}{18}$ dm^3

1028. $\triangle AO'D \sim \triangle AMC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{4-x}{6} \Rightarrow a^2 = \frac{16 - 8x + x^2}{3} \quad (1)$$

$\triangle OO'P \Rightarrow x^2 + b^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 16 - x^2 \quad (2)$

$A_{coroa} = A_{\substack{base\\cone}} \Rightarrow$

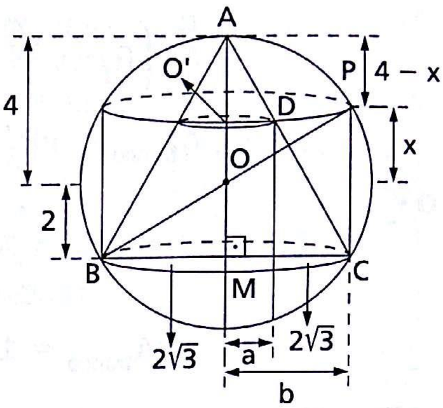
$\Rightarrow \pi(b^2 - a^2) = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = 12 \quad (3)$

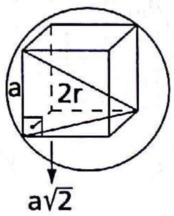
(1) e (2) em (3) $\Rightarrow$

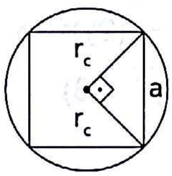
$$\Rightarrow 16 - x^2 - \frac{16 - 8x + x^2}{3} = 12 \Rightarrow$$

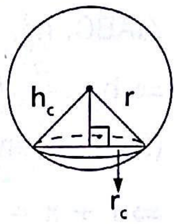
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1\ \text{m}$



1029. cubo e esfera base do cubo e do cone







$$a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = (2r)^2 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r \quad (1)$$

$$a = r_c\sqrt{2} \xRightarrow{(1)} \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r = r_c\sqrt{2} \Rightarrow r_c = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\, r \quad (2)$$

$$h_c^2 = r^2 - r_c^2 \Rightarrow h_c^2 = r^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\, r\right)^2 \Rightarrow h_c = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$V_c = \frac{\pi r_c^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V_c = \frac{\pi \cdot \frac{2}{3}\, r^2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{3}}{3} \Rightarrow V_c = \frac{2\pi r^3\sqrt{3}}{27}$$

1030. $\triangle ADO' \sim \triangle AEO \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{h-2}{h-5} \Rightarrow h = 8$$

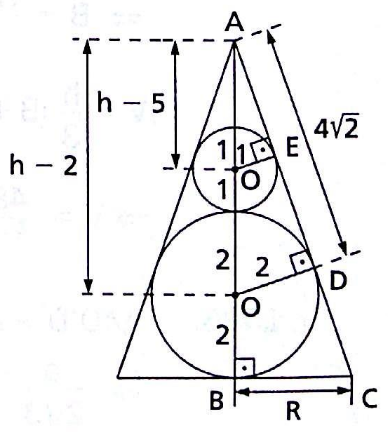
$\triangle ADO' \Rightarrow AD^2 = (AO')^2 - (DO')^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = 6^2 - 2^2 \Rightarrow AD = 4\sqrt{2}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADO' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{R}{2} = \frac{8}{4\sqrt{2}} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

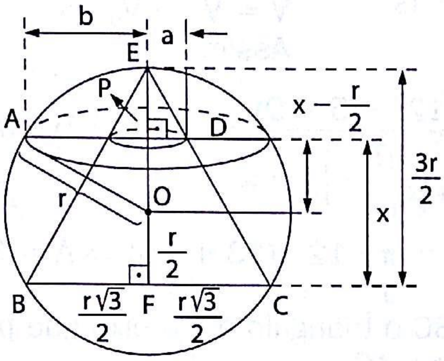
$V = V_{cone} - V_{esf.\,1} - V_{esf.\,2} \Rightarrow$



$$\Rightarrow V = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{4}{3}\pi R_1^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 8}{3} - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2)^3 \Rightarrow V = \frac{28\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

1033.



área da coroa = área da base do cone $\Rightarrow \pi(b^2 - a^2) = \pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2 - a^2 = \frac{3r^2}{4} \quad (1)$$

$$\triangle POA \Rightarrow b^2 = r^2 - \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{3r^2 - 4x^2 + 4xr}{4} \quad (2)$$

$$\triangle EPD \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{a}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3r}{2} - x}{\frac{3r}{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{27r^2 + 12x^2 - 36rx}{36} \quad (3)$$

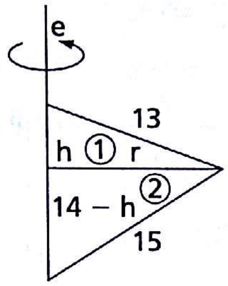
(2) e (3) em (1):

$$\frac{3r^2 - 4x^2 + 4xr}{4} - \frac{27r^2 + 12x^2 - 36rx}{36} = \frac{3}{4}r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 24rx + 9r^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}r$$

CAPÍTULO XV — Superfícies e sólidos de revolução

1038.



$$\left.\begin{array}{l} r^2 = 13^2 = h^2 \\ r^2 = 15^2 - (14 - h)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 29 + 28h - h^2 = 169 - h^2 \Rightarrow h = 5$ cm

Então, $r = 12$ cm.

$V = V_1 + V_2$

Assim,

$$V = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot (5 + 9)}{3} \Rightarrow V = 672\pi \text{ cm}^3.$$

$A = A_{\ell_1} + A_{\ell_2}$

Assim, $A = \pi \cdot 12 \cdot (13 + 15) \Rightarrow A = 336\pi \text{ cm}^2$.

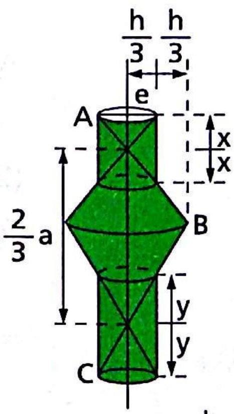
1039. Sejam ABC o triângulo e e o eixo que passa pelo baricentro de ABC e paralelo a AC.

$$x + y = \frac{1}{3}\,a$$

$$2x + 2y = \frac{2}{3}\,a$$

$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2x - \frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2x + \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\, 2y - \frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2y$$

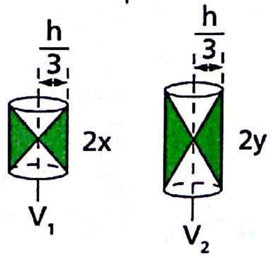


$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \left[(2x + 2y) - \frac{1}{3}\,(2x + 2y)\right]$$

$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\,a - \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3}\right)$$

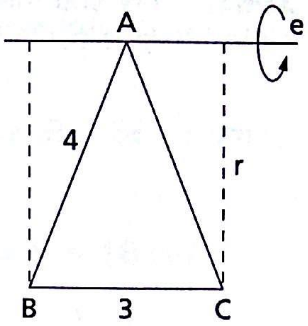
$$V_1 + V_2 = \frac{4}{81}\pi h^2 a$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 \cdot \frac{2a}{3} \Rightarrow V_3 = \frac{8}{81}\pi h^2 a$$



$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V = \frac{4}{27}\,h^2 a\pi$$

1041. $r^2 = 4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{55}}{2}$ cm



$V = V_{cilindro} - V_{cone}$

Cilindro: altura = 3 cm;

raio da base = $r = \frac{\sqrt{55}}{2}$ cm

Cone: altura = $\frac{3}{2}$ cm;

raio da base = $r = \frac{\sqrt{55}}{2}$ cm

Então: $V = \pi\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)^2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V = \frac{55\pi}{2}$ cm³.

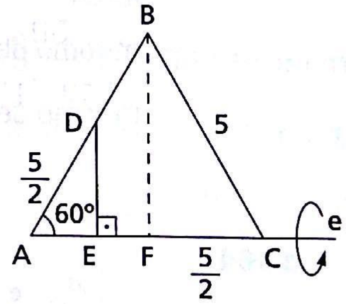
1052. No $\triangle ADE$: $\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{AE}{\frac{5}{2}} \Rightarrow AE = EF = \dfrac{5}{4} \text{ cm} \\ \sin 60° = \dfrac{DE}{\frac{5}{2}} \Rightarrow DE = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \text{ cm} \end{cases}$

$V = V_{tronco} + V_{cone}$

tronco do cone: $h = EF = \frac{5}{4}$ cm;

$r = DE = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ cm;

$R = BF = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm



cone: altura = $\frac{5}{2}$ cm;

raio = $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

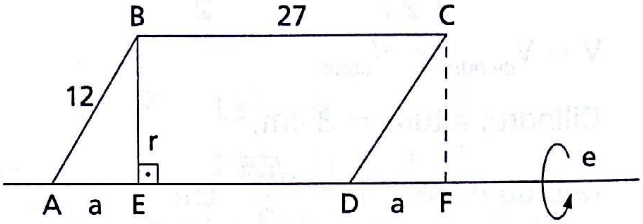
Então:

$$V = \frac{\pi \cdot \frac{5}{4}}{3}\left[\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2\right] + \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{525}{16} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{375}{8} = \frac{875\pi}{64} + \frac{125\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1\,875\pi}{64} \text{ cm}^3$$

1061. Os volumes dos sólidos gerados pelos triângulos ABE e DCF são iguais.



No $\triangle ABE$: $\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{a}{12} \Rightarrow a = 6 \text{ cm} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{r}{12} \Rightarrow r = 6\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}$

$V = V_{cilindro}$

cilindro: $r = 6\sqrt{3}$ cm; $h = AD - a + a = 27$ cm

Então:

$V = \pi(6\sqrt{3})^2 \cdot 27 \Rightarrow V = 2916\pi \text{ cm}^3$.

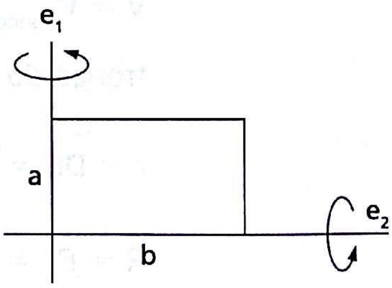
$A = A_{\ell_{cilindro}} + 2A_{\ell_{cone}}$

cone: $r = 6\sqrt{3}$ cm; $g = 12$ cm

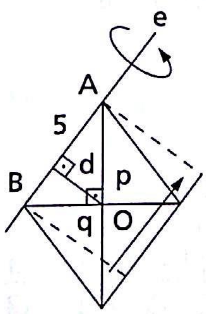
$A = 2\pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 27 + 2 \cdot \pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow A = 468\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2$

1062. $A_{\ell_{cilindro}} = 2\pi rh$

$\left.\begin{array}{l} \text{em torno de } e_1\text{: } A_{\ell_1} = 2\pi ba \\ \text{em torno de } e_2\text{: } A_{\ell_2} = 2\pi ab \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\ell_1} = A_{\ell_2}$



1064.



$\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow p = 2q$

No triângulo retângulo ABO, temos:

$5^2 = 4q^2 + q^2 \Rightarrow q = \sqrt{5}$ cm e $p = 2\sqrt{5}$ cm

e

$5 \cdot d = p \cdot q \Rightarrow d = 2$ cm.

$S = \dfrac{2p \cdot 2q}{2} \Rightarrow S = 20 \text{ cm}^2$

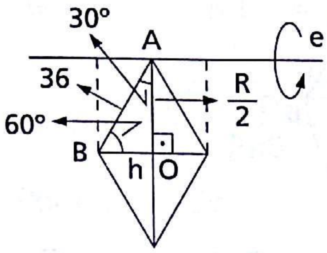
Pela fórmula de Pappus-Guldin: $V = 2\pi Sd$, vem:

$V = 2\pi \cdot 20 \cdot 2 \Rightarrow V = 80\pi \text{ cm}^3$.

De outro modo:

$V = V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(2d)^2 \cdot 5 \Rightarrow V = 80\pi \text{ cm}^3$.

1065.



No triângulo retângulo ABO, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{R}{2}}{36} \Rightarrow R = 36\sqrt{3} \text{ cm}$$

e

$$\cos 60° = \frac{h}{36} \Rightarrow h = 18 \text{ cm.}$$

$$V = 2(V_{\text{tronco de cone}} - V_{\text{cone}})$$

tronco de cone: $R = 36\sqrt{3}$ cm; $r = \frac{R}{2} = 18\sqrt{3}$ cm; $h = 18$ cm; $g = 36$ cm.

cone: $r = 18\sqrt{3}$ cm; $h = 18$ cm; $g = 36$ cm.

Então:

$$V = 2\left\{\frac{\pi \cdot 18}{3}\left[(36\sqrt{3})^2 + 36\sqrt{3} \cdot 18\sqrt{3} + (18\sqrt{3})^2\right] - \frac{\pi}{3}(18\sqrt{3})^2 \cdot 18\right\} =$$

$$= 2 \cdot 6\pi(3\,888 + 1\,944) \Rightarrow V = 69\,984\pi \text{ cm}^3$$

$$A = 2(A_{lat_{tronco}} + A_{lat_{cone}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \left[\pi(36\sqrt{3} + 18\sqrt{3}) \cdot 36 + \pi \cdot 18\sqrt{3} \cdot 36\right] =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 36 \cdot 72\sqrt{3} \Rightarrow A = 5\,184\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2$$

De outro modo:

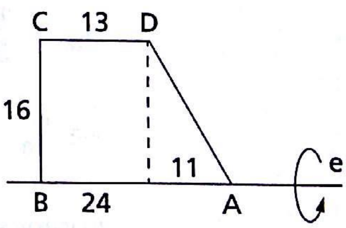
$$V = 2\pi S d \Rightarrow V = 2\pi \cdot \frac{36\sqrt{3} \cdot 36}{2} \cdot 18\sqrt{3} \Rightarrow V = 69\,984\pi \text{ cm}^3$$

$$A = 2\pi \ell d \Rightarrow A = 2\pi \cdot (4 \cdot 36) \cdot 18\sqrt{3} \Rightarrow A = 5\,184\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2$$

1066. $V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \pi \cdot 16^2 \cdot 13 + \frac{\pi}{3} 16^2 \cdot 11 \Rightarrow$$

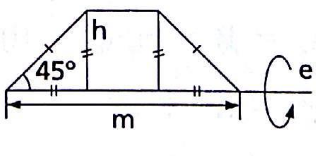
$$\Rightarrow V = \frac{12\,800\pi}{3} \text{ cm}^3$$



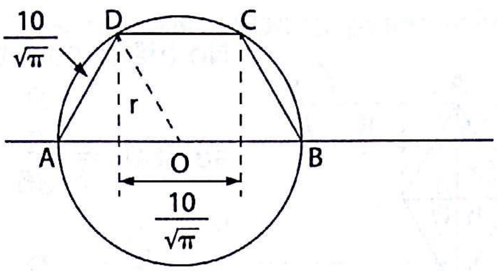
1068. $V = V_{\text{cilindro}} + 2V_{\text{cone}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \pi h^2(m - 2h) + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot h =$$

$$= \pi h^2\left(m - 2h + \frac{2}{3}h\right) \Rightarrow V = \frac{(3m - 4h)\pi h^2}{3}$$



1070.



No $\triangle$ equilátero ADO: $r = \frac{10}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ m.

$A = 2A_{lat_{cone}} + A_{lat_{cilindro}}$

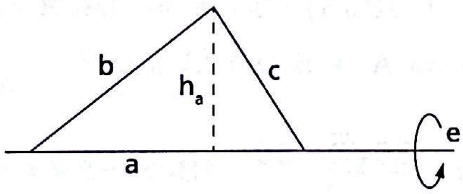
cone: $r = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ m; $g = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ m

cilindro: $r = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ m; $h = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ m

Então:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{10}{\sqrt{\pi}} + 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{10}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow A = 200\sqrt{3} \text{ m}^2$$

1071.



A área do triângulo é:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ e } h_a = \frac{2S}{a}$$

Giro em torno de *a*:

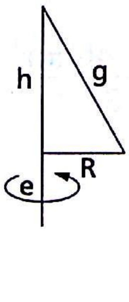
$$V_a = \frac{\pi}{3} \cdot h_a^2 \cdot a = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} \cdot h_a = \frac{2\pi}{3} \cdot S \cdot \frac{2S}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{4\pi S^2}{3a} \text{ e } aV_a = \frac{4\pi S^2}{3}$$

Analogamente, $bV_b = \frac{4\pi S^2}{3}$ e $cV_c = \frac{4\pi S^2}{3}$.

Assim: $aV_a = bV_b = cV_c$.

1072.



$$\left.\begin{array}{l} A_{\triangle} = R \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow h = \frac{2A}{R} \\ A_t = B = \pi R(g + R) \Rightarrow g = \frac{B}{\pi R} - R \\ g^2 = h^2 + R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B}{\pi R} - R\right)^2 = \left(\frac{2A}{R}\right)^2 + R^2 \Rightarrow \frac{B^2}{\pi^2 R^2} - \frac{2B}{\pi} = \frac{4A^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{B^2 - 4\pi^2 A^2}{2\pi B}}$$

Por outro lado,

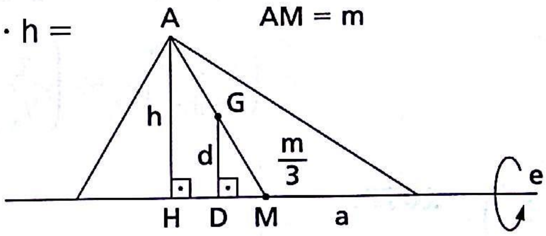
$$g^2 = \left(\frac{2A}{R}\right)^2 + R^2 = \frac{4A^2}{\frac{B^2 - 4\pi^2A^2}{2\pi B}} + \frac{B^2 - 4\pi^2 A^2}{2\pi B} =$$

$$= \frac{8\pi A^2 B}{B^2 - 4\pi^2 A^2} + \frac{B^2 - 4\pi^2 A^2}{2\pi B} \Rightarrow g = \frac{B^2 + 4\pi^2 A^2}{\sqrt{2\pi B(B^2 - 4\pi^2 A^2)}}$$

1073. Notando a semelhança entre os triângulos AHM e GDM: $d = \frac{h}{3}$.

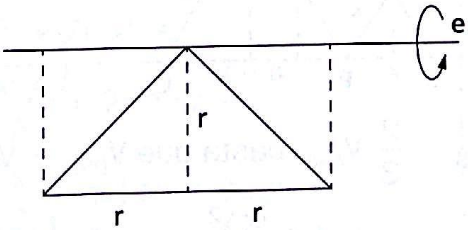
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{ah}{2} \cdot h =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{h}{3} S \Rightarrow V = S \cdot 2\pi d$$



1074. $V_S = V_{cilindro} - 2V_{cone}$

$$V_S = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = V_{esfera}$$



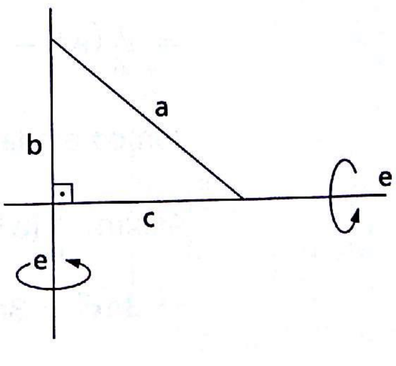
1075. $A_b = \pi \cdot ac$

Multiplicando membro a membro por *b*: $b \cdot A_b = \pi abc$.

$A_c = \pi \cdot ab$

Multiplicando membro a membro por c: $c \cdot A_c = \pi abc$.

Assim: $bA_b = cA_c$ e $\frac{b}{c} = \frac{A_c}{A_b}$.



1076. $V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$ e $V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{V_b}{V_c} = \frac{c}{b} \Rightarrow bV_b = cV_c$$

1077. $V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$; $V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c$; $V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 a$

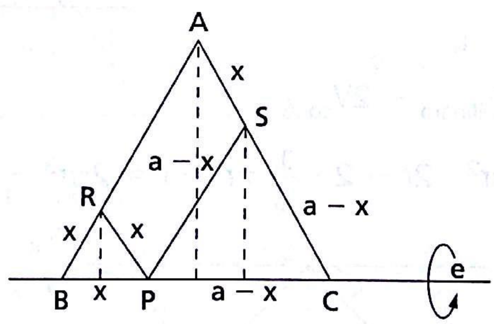
Partindo do 2º membro e fazendo as substituições, chegamos ao 1º membro.

$$\frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}\pi^2 c^4 b^2} + \frac{1}{\frac{1}{9}\pi^2 b^4 c^2} =$$

$$= \frac{9b^2 + 9c^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \left(\frac{3a}{\pi b^2 c^2}\right)^2 = \left(\frac{3a}{\pi a^2 h^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{\pi a h^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_a}\right)^2 = \frac{1}{V_a^2} \text{ (1º membro)}$$

1078.



Para que $V_{PRAS} = \frac{2}{3} V_{ABC}$, basta que $V_{BPR} + V_{CPS} = \frac{1}{3} V_{ABC}$.

Mas $V_{BPR} + V_{CPS} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot x + \frac{1}{3}\pi\left[\frac{(a - x)\sqrt{3}}{2}\right]^2 \cdot (a - x) =$

$= \frac{\pi}{4}(a^3 - 3a^2x + 3ax^2)$.

Temos ainda $V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi}{4}a^3$.

Assim: $\frac{\pi}{4}(a^3 - 3a^2x + 3ax^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot a^3 \Rightarrow$

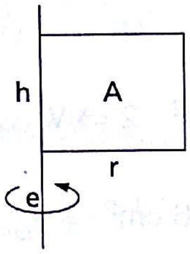
$\Rightarrow 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = \frac{a^3}{3}$

Resolvendo a equação do 2º grau em *x*, temos:

$x = \frac{2a}{3}$ ou $x = \frac{a}{3}$.

Então: $x = PB = \frac{a}{3}$ ou $x = PB = \frac{2a}{3}$.

1082.



$$\left.\begin{array}{l} A = r \cdot h \\ B = \pi r^2 h \end{array}\right\} \Rightarrow B = \pi A r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{B}{\pi A}$$

1083. Giro em torno de *y*: $V = \pi x y^2$ (1)

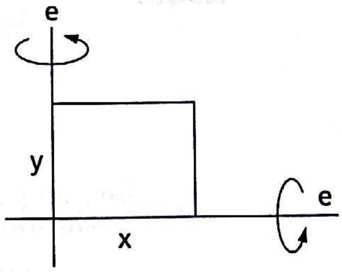
Giro em torno de *x*: $V' = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{V'}{\pi x^2}$ (2)

Substituindo em (1):

$$V = \pi x \frac{V'^2}{\pi^2 x^4} \Rightarrow V = \frac{V'^2}{\pi x^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V'^2}{\pi V}}$$

Substituindo em (2):

$$y = \frac{V'}{\pi \sqrt[3]{\frac{V'^4}{\pi^2 V^2}}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi V'}}$$

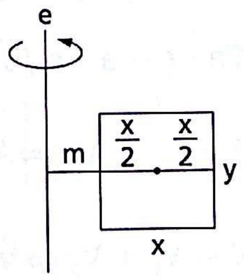


1084. $V = \pi(x + m)^2 \cdot y - \pi m^2 y =$

$= \pi y(x^2 + 2mx) =$

$= 2\pi \frac{x^2 y}{2} + 2\pi m x y =$

$= 2\pi\left(\frac{x}{2} + m\right)xy = 2\pi d S$



1086. Volume: $V = 2\pi abd$ (ver exercício 1084)

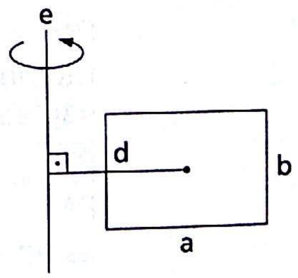
Área: $A = A_{lat_{int.}} + A_{lat_{ext.}} + 2A_{coroa} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2\pi b\left(a + \frac{a}{2}\right) + 2\pi b\left(d - \frac{a}{2}\right) +$

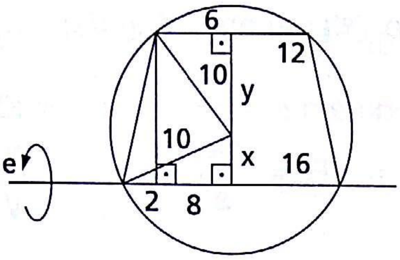
$+ 2\pi\left[\left(d + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(d - \frac{a}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2\pi(bd + bd + ad + ad) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 4\pi d(a + b)$



1088.



$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow x = 6 \text{ cm} \\ y^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow y = 8 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = x + y \Rightarrow r = 14 \text{ cm}$$

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} + 2V_{\text{cone}}$$

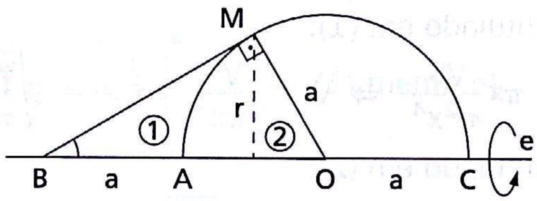
$$V_{\text{sólido}} = \pi \cdot 14^2 \cdot 12 + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 14^2 \cdot 2 \Rightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{7\,840\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{trap.}} = \frac{16 + 12}{2} \cdot 14 \Rightarrow A_{\text{trap.}} = 196 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\text{quad.}} = 196 \text{ cm}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_{\text{quad.}} = 14 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 14^2 \cdot 14 \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = 2\,744\pi \text{ cm}^3$$

1089.



No triângulo retângulo BMO:

$$\text{sen } M\hat{B}C = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow M\hat{B}C = 30°$$

$$\overline{BM}^2 = (2a)^2 - a^2 \Rightarrow \overline{BM} = a\sqrt{3}$$

$$2a \cdot r = a \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$A = A_{lat_1} + A_{lat_2} \Rightarrow A = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{3} + a) \Rightarrow A = \frac{(3 + \sqrt{3}) \cdot \pi \cdot a^2}{2}$$

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2a \Rightarrow V = \frac{\pi a^3}{2}$$

1091. No triângulo retângulo PAO:

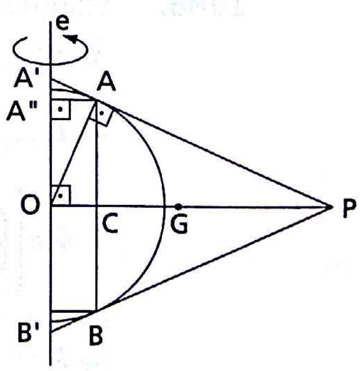
$\overline{PA}^2 = 50^2 - 20^2 \Rightarrow \overline{PA} = 10\sqrt{21}$ cm.

Os triângulos PCA, PAO, POA' e AA"A' são semelhantes. Assim:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PO}} \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{10\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{21}}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{PC} = 42 \text{ cm e } \overline{OC} = 50 - 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{OC} = AA" = 8 \text{ cm}$$



$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \frac{10\sqrt{21}}{50} = \frac{20}{\overline{OA'}} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{100}{\sqrt{21}}\ \text{cm}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PO}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{20} = \frac{10\sqrt{21}}{50} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{OA''} = 4\sqrt{21}\ \text{cm}$$

$$\frac{\overline{AA''}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{A'A''}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \frac{8}{50} = \frac{\overline{A'A''}}{\frac{100}{\sqrt{21}}} \Rightarrow \overline{A'A''} = \frac{16}{\sqrt{21}}\ \text{cm}$$

$$V = 2\left(V_{cone_{PA'O}} - V_{cilindro_{OCAA''}} = V_{cone_{AA'A''}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} \cdot 50^2 \cdot \frac{100}{\sqrt{21}} - \pi \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{21} - \frac{\pi}{3} \cdot 8^2 \cdot \frac{16}{\sqrt{21}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 232\,848}{3\sqrt{21}} \Rightarrow V = 7\,392\sqrt{21}\ \pi\ \text{cm}^3$$

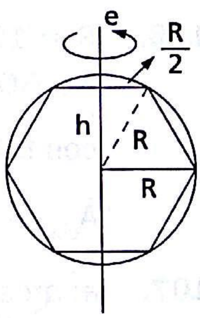
De outro modo, usando a fórmula de Pappus-Guldin: $V = 2\pi Sd$, em que:

$$S = \frac{2\overline{AC} \cdot \overline{PC}}{2} = 4\sqrt{21} \cdot 42 = 168\sqrt{21}\ \text{cm}^2$$

$$\text{e } d = \overline{OG} = \overline{OC} + \frac{\overline{PC}}{3} = 8 + 14 = 22\ \text{cm}$$

Vem: $V = 2\pi \cdot 168\sqrt{21} \cdot 22 \Rightarrow V = 7392\sqrt{21}\pi\ \text{cm}^3$

1092. $h^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$



$$V_{sólido} + 2V_{tronco} =$$

$$= 2\frac{\pi \cdot R\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\left[R^2 + R \cdot \frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{7R^2}{4} \Rightarrow V_{sólido} = \frac{7\pi\sqrt{3}}{12} R^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Então: } \frac{V_{esfera}}{V_{sólido}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{7}{12}\pi\sqrt{3}\ R^3} \Rightarrow \frac{V_{esfera}}{V_{sólido}} = \frac{16\sqrt{3}}{21}$$

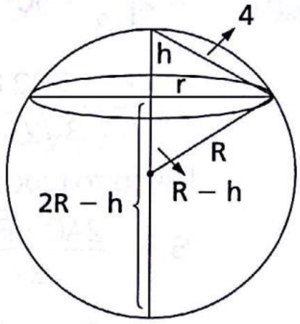
CAPÍTULO XVI — Superfícies e sólidos esféricos

1103. $\left.\begin{array}{l} d = 3\text{ cm} \\ \dfrac{A_{c_1}}{A_{c_2}} = \dfrac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{2\pi R(R-3)}{2\pi R(R+3)} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3R + 9 = 5R - 15 \Rightarrow R = 12\text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 12^3 \Rightarrow V_{esfera} = 2304\pi\text{ cm}^3$

1105. $\dfrac{A_{c_1}}{A_{c_2}} = \dfrac{2}{5}$



$\left.\begin{array}{l} r^2 + h^2 = 4^2 \\ r^2 + (R-h)^2 = R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + R^2 - 2Rh + h^2 = R^2 \Rightarrow$

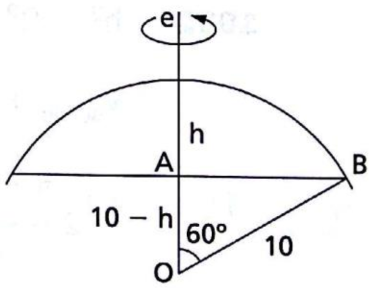
$\Rightarrow Rh = 8$

$\dfrac{\cancel{2}\cancel{\pi}Rh}{\cancel{2}\cancel{\pi}R(2R-h)} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{8}{2R^2 - 8} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow R^2 = 14$

$A_{sup.\ esf.} = 4\pi R^2 \Rightarrow A_{sup.\ esf.} = 56\pi\text{ cm}^2$

1106. $R = 10\text{ cm}$

No $\triangle OAB$:



$\cos 60° = \dfrac{10 - h}{10} \Rightarrow h = 5\text{ cm}$

$A_{cal.} = 2\pi \cdot 10 \cdot 5 \Rightarrow A_{cal.} = 100\pi\text{ cm}^2$

1107. *a*: aresta do cubo inscrito na esfera

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

$h_1 = R - \dfrac{a}{2} = R - \dfrac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h_1 = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3} R$

$h_2 = R + \dfrac{a}{2} \Rightarrow h_2 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3} R$

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2\pi R \cdot R\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}{2\pi R \cdot R\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} : \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = 2 - \sqrt{3}$

1108. $A_2 - A_1 = A_{circ.} \Rightarrow 2\pi R(2R - h) - 2\pi Rh = \pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4R^2 - 2Rh - 2Rh = r^2 \Rightarrow r^2 = 4R(R - h) = 4R^2 - 4Rh$

Mas $r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$.

Igualando: $4R^2 - 4Rh = 2Rh - h^2 \Rightarrow h_2 - 6Rh + 4R^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = R(3 + \sqrt{5}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ h = R(3 - \sqrt{5}) \end{cases}$$

Vem: $R - h = R - R(3 - \sqrt{5}) = R(1 - 3 + \sqrt{5})$.

Assim, $R - h = (\sqrt{5} - 2)R$.

1109. $A_2^2 = A_1 \cdot A_{sup.\ esf.} \Rightarrow [\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r}(2r - h)]^2 = (2\cancel{\pi}rh) \cdot (\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{r^2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (2r - h)^2 = 2rh \Rightarrow h^2 - 6rh + 4r^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = r(3 + \sqrt{5}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ h = r(3 - \sqrt{5}) \end{cases}$$

Vem: $r - h = r - r(3 - \sqrt{5}) = r(1 - 3 + \sqrt{5})$.

Assim, $r - h = (\sqrt{5} - 2)r$.

1110. $R = 12$ cm

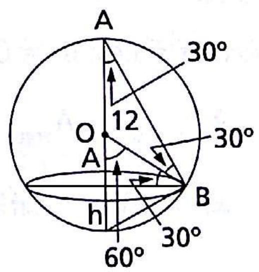
No $\triangle OAB$:

$\text{sen } 30° = \dfrac{12 - h}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 6$ cm

$A = 2\pi \cdot 12 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 144\pi$ cm^2



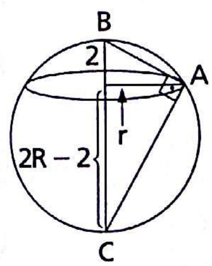
1111. $\left.\begin{array}{l} h_{calota} = 2 \text{ m} \\ A_{calota} = 3A_{\ell_{cone}} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi \cdot R \cdot 2 = 3\pi rR \Rightarrow r = \dfrac{4}{3}$ m

No triângulo retângulo ABC:

$r^2 = 2 \cdot (2R - 2) \Rightarrow r^2 = 4(R - 1) \Rightarrow$

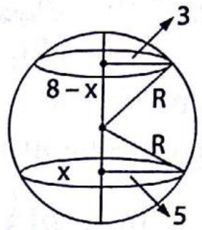
$\Rightarrow 4(R - 1) = \dfrac{16}{9} \Rightarrow R - 1 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow R = \dfrac{13}{9}$ m



1113. $h = 8$ cm

$r_1 = 3$ cm

$r_2 = 5$ cm



$$\left.\begin{array}{l} R^2 = (8 - x)^2 + 3^2 \\ \text{e} \\ R^2 = x^2 + 5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (8 - x)^2 + 9 = x^2 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 - 16x + \cancel{x^2} + 9 = \cancel{x^2} + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 25 + 9 \Rightarrow R = \sqrt{34}$ cm

$A_{zona} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot \sqrt{34} \cdot 8 \Rightarrow A_{zona} = 16\sqrt{34}\,\pi \text{ cm}^2$

1114. $$\left.\begin{array}{l} h = 5 \text{ cm}; \alpha = 45° = \dfrac{360°}{8} \\ A_{zona} = A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\pi R \cdot 5 = \dfrac{1}{8} 4\pi R^2 \Rightarrow R = 20 \text{ cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 20^3 \Rightarrow V = \dfrac{32000\pi}{3} \text{ cm}^3 \\ \text{e} \\ A = 4\pi \cdot 20^2 \Rightarrow A = 1600\pi \text{ cm}^2 \end{array}\right.$$

1115. $$\left.\begin{array}{l} h = 5 \text{ cm}; \alpha = 60° = \dfrac{360°}{6} \\ A_{sup.\ esf.} - A_{zona} = A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} - 2\cancel{\pi}\cancel{R} \cdot 5 = \dfrac{1}{6} \cdot 4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} \Rightarrow 4R - 10 = \dfrac{2}{3}R \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$

1116. $$\left.\begin{array}{l} \alpha = 60° = \dfrac{360°}{6} \\ h = 8 \text{ cm} \\ A_{fuso} + A_{zona} = \dfrac{3}{2} A_{sup.\ esf.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

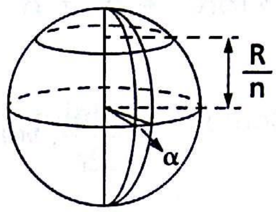
$\dfrac{4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}}{6} + 2\cancel{\pi}\cancel{R} \cdot 8 = \dfrac{3}{2} \cdot 4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} \Rightarrow \dfrac{2R}{3} + 16 = 6R \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$

1117. $A_{zona} = A_{fuso} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi R\dfrac{R}{n} = \dfrac{\alpha}{2\pi} 4\pi R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{n}$ rad.



1118. $\left.\begin{array}{l} h = 2d \\ A_{zona} = 2 \cdot A_{círculo} \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{2}\cancel{\pi}r \cdot 2d = \cancel{2}\cancel{\pi}R^2 \Rightarrow R^2 = 2rd$

Mas $R^2 = r^2 - d^2$.

Igualando, vem: $r^2 - d^2 = 2rd \Rightarrow d^2 + 2rd - r^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = r(-1 - \sqrt{2}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = r(-1 + \sqrt{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow 2d = (\sqrt{2} - 1) \cdot 2r$

1119. $\left.\begin{array}{l} R = 10 \text{ cm} \\ A_{zona} = A_{\ell_{cone}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi \cdot 10 \cdot (10 - d) = \pi \cdot r \cdot 10 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow r = 20 - 2d \Rightarrow r^2 = 400 - 80d + d^2 \\ \text{Mas } r^2 = 100 - d^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 - 80d + d^2 = 100 - d^2 \Rightarrow 2d^2 - 80d + 300 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 - 40d + 150 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 5(4 + \sqrt{10}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = 5(4 - \sqrt{10}) \end{array}\right.$

Assim, $d = 5(4 - \sqrt{10})$ cm.

1120. $A_{\ell_{cone}} = \dfrac{1}{5} \cdot A_{zona} \Rightarrow \cancel{\pi} \cdot R \cdot g = \dfrac{1}{5} 2\cancel{\pi}rh \Rightarrow 5Rg = 2rh$ (1)

$(h - r)^2 + R^2 = r^2 \Rightarrow h^2 - 2rh + r^2 + R^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 - 2rh + R^2 = 0$ (2)

$g^2 = h^2 + R^2$ (3)

(1), (2) e (3) $\Rightarrow g^2 = 2rh \Rightarrow g^2 = 5Rg \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g = 0 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ g = 5R \end{array}\right\} \Rightarrow$

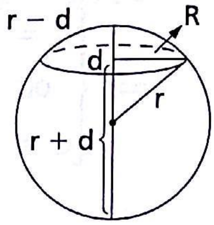
$\Rightarrow (5R)^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h = 2R\sqrt{6}$

Como $h = \dfrac{5Rg}{2r}$, vem $2R\sqrt{6} = \dfrac{5R \cdot 5R}{2r} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 0 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ R = \dfrac{4\sqrt{6}r}{25} \end{cases}$

Assim, $h = 2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6}\dfrac{r}{25} = \dfrac{48r}{25}$.

Logo, $h - r = \dfrac{48}{25}r - r \Rightarrow h - r = \dfrac{23r}{25}$.

1121. $A_{zona} - A_{sup.\ esf.} \Rightarrow$



$\Rightarrow 2\pi r(r \pm d) = 4\pi(3d)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r(r \pm d) = 18d^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 18d^2 \pm rd - r^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{36}r \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{36}r \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{1 + \sqrt{73}}{36}r \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{1 - \sqrt{73}}{36}r \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, $d = \dfrac{1 + \sqrt{73}}{36}r$ ou $d = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{36}r$.

1122. $A_{zona} = A_{circ.\ máx.} + A_{seção} \Rightarrow 2\pi rd = \pi r^2 + \pi R^2 \Rightarrow 2rd = r^2 + R^2$
Mas $R^2 = r^2 - d^2$.
Assim, $2rd = r^2 + r^2 - d^2 \Rightarrow d^2 + 2r \cdot d - 2r^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = r(-1 - \sqrt{3}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = r(-1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

Logo, $d = (\sqrt{3} - 1)r$.

1123. $A_{\ell_{cone}} = A_{calota} \Rightarrow$

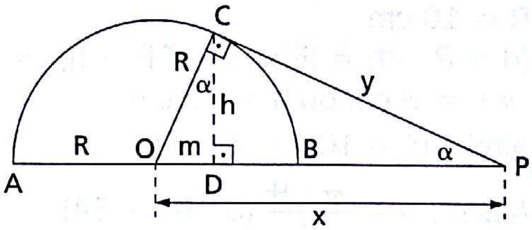
$\Rightarrow \pi \cdot h \cdot y = 2\pi R(R + m) \Rightarrow$

$\Rightarrow hy = 2R(R + m)$

Mas $h^2 = R^2 - m^2 \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - m^2}$

e $y^2 = x^2 - R^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - R^2}$.

Por outro lado, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{R}{x} = \dfrac{m}{R} \Rightarrow m = \dfrac{R^2}{x} \Rightarrow m^2 = \dfrac{R^4}{x^2}$.



Assim, $\sqrt{R^2 - \dfrac{R^4}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 - R^2} = 2R\left(R + \dfrac{R^2}{x}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{R}{x}\sqrt{x^2 - R^2} \cdot \sqrt{x^2 - R^2} = \dfrac{2R^2}{x}(x + R) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - R^2 = 2R(x + R) \Rightarrow x^2 - 2Rx - 3R^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -R \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ x = 3R \end{cases}$$

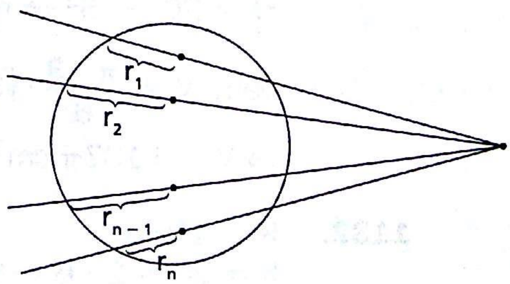
Logo, $x = \overline{OP} = 3R$.

1124. $S = 4\pi R^2 + 2\pi(r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2)$.

Dividindo ambos os membros da igualdade por $2\pi R^2$, temos:

$\dfrac{S}{2\pi R^2} = 2 + \dfrac{r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2}{R^2} \Rightarrow \dfrac{S}{2\pi R^2} - 2 =$

$= \dfrac{r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2}{R^2}$



Mas $r_1^2 \leq R^2, r_2^2 \leq R^2, ..., r_n^2 \leq R^2$.

Assim, $r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2 \leq NR^2$

e $\dfrac{r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2}{R^2} \leq N$.

Temos, portanto: $\dfrac{S}{2\pi R^2} - 2 \leq N$.

Obs.: Caso a reta comum do feixe seja secante à esfera, teremos $N = 1$, e a desigualdade se verifica.

1127. $\left.\begin{array}{l} A_{calota} = 100\pi \text{ cm}^2 \\ R = \dfrac{20}{2} = 10 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi \cdot 10h = 100\pi \Rightarrow h = 5 \text{ cm}$

Mas $r^2 = 10^2 - (10 - 5)^2 \Rightarrow r^2 = 75$.

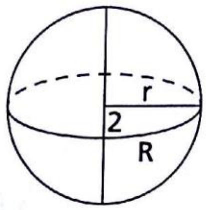
Logo, $V = \dfrac{\pi \cdot 5}{6}(3 \cdot 75 + 25) \Rightarrow V = \dfrac{625\pi}{3} \text{ cm}^3$

1128. $R = 10$ cm

$(d = R - h = 2 \text{ ou } d = 2R - h) \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 8 \text{ cm ou } h = 12 \text{ cm}$

Ainda, $r^2 = 100 - 4 = 96$.



Assim, $V = \dfrac{\pi \cdot 8}{6}(3 \cdot 96 + 64)$

ou

$V = \dfrac{\pi \cdot 12}{6}(3 \cdot 96 + 144)$.

Logo, $V = \dfrac{1\,408\pi}{3} \text{ cm}^3$ ou $V = 864\pi \text{ cm}^3$

1129. $h = 4$ cm

$r_1 = r_2 = \dfrac{8}{2} = 4 \text{ cm}$

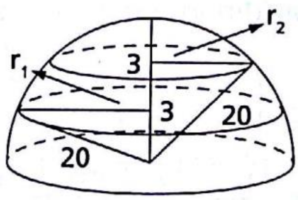
$V = \dfrac{\pi \cdot 4}{6} \cdot [3(4^2 + 4^2) + 4^2] = \dfrac{2\pi}{3} \cdot (96 + 16) \Rightarrow V = \dfrac{224\pi}{3} \text{ cm}^3$

1131. $R = 20$ cm

$h = 6 - 3 = 3$ cm

$r_1^2 = 20^2 - 3^2 \Rightarrow r_1^2 = 391$

$r_2^2 = 20^2 - 6^2 \Rightarrow r_2^2 = 364$



Vem: $V = \dfrac{\pi \cdot 3}{6} \cdot [3 \cdot (391 + 364) + 3^2] = \dfrac{\pi}{2} \cdot 2274 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 1137\pi \text{ cm}^3$

1132. $R = 15$ cm

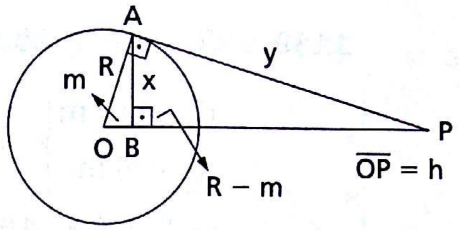
$h = 2d = 2 \cdot 6 = 12$ cm

$r^2 = 15^2 - 6^2 \Rightarrow r^2 = 189$

Vem: $V = \dfrac{\pi \cdot 12}{6} \cdot [3(189 + 189) + 12^2] = 2\pi \cdot 1278 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 2556\pi \text{ cm}^3$

1134. $V_{sólido} = V_{cone} - V_{segmento}$



$\triangle POA \sim \triangle PAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{h}{y} = \frac{y}{h-m} = \frac{R}{x}$$

$$\text{Cone}\begin{cases}\text{altura: } h - m = \dfrac{y^2}{h} = \dfrac{h^2 - R^2}{h}\\[2ex] \text{raio da base: } x = \dfrac{Ry}{h} = \dfrac{R}{h}\cdot\sqrt{h^2 - R^2}\end{cases}$$

$$V_{cone} = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{R}{h}\sqrt{h^2 - R^2}\right)^2\cdot\frac{h^2 - R^2}{h} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{h^2}\cdot\left(h^2 - R^2\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{h^2 - R^2}{h} \Rightarrow V_{cone} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{h^3}\cdot\left(h^2 - R^2\right)^2 = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{h^3}\cdot(h-R)^2(h+R)^2$$

$$\begin{matrix}\text{segmento}\\ \text{esférico}\end{matrix}\begin{cases}\text{altura: } R - m = h - m + R - h =\\[1ex] \qquad = \dfrac{h^2 - R^2}{h} + R - h = \dfrac{Rh - R^2}{h}\\[2ex] \text{raio: } x = \dfrac{R}{h}\cdot\sqrt{h^2 - R^2}\end{cases}$$

$$V_{segmento} = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{Rh - R^2}{h}\cdot\left[3\cdot\left(\frac{R}{h}\cdot\sqrt{h^2 - R^2}\right)^2 + \left(\frac{Rh - R^2}{h}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{Rh - R^2}{h}\cdot\left[\frac{3R^2}{h^2}\cdot\left(h^2 - R^2\right) + \frac{R^2(h-R)^2}{h^2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{R(h-R)}{h^3}\left\{(h-R)\left[3R^2(h+R) + R^2(h-R)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{R(h-R)^2}{h^3}\left(2R^3 + 4R^2h\right) = \frac{2\pi}{6}\cdot\frac{R^3(h-R)^2}{h^3}\cdot(R+2h) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{h^3}\cdot(h-R)^2\cdot(R+2h)$$

Então, $V_{sólido} = \dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{R^2}{h^3}(h-R)^2\left[(h+R)^2 - R(R+2h)\right] =$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{h^3}\cdot(h-R)^2\cdot h^2 \Rightarrow V_{sólido} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{h}\cdot(h-R)^2.$$

1135. $\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{30}{2} = 15 \text{ cm} \\ \left.\begin{array}{l} d_1 = 12 \text{ m} \\ d_2 = 8 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow h = 12 - 8 \Rightarrow h = 4 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2\pi \cdot 15 \cdot 4 \Rightarrow A = 120\pi \text{ m}^2$

$r_1^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$

$r_2^2 = 15^2 - 8^2 = 225 - 64 = 161$

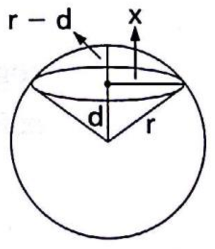
$V = \dfrac{\pi \cdot 4}{6}\left[3 \cdot (161 + 81) + 16\right] \Rightarrow V = \dfrac{1\,484\pi}{3} \text{ m}^3$

1136. $V_{cone} = V_{segmento} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot (r^2 - d^2) \cdot d = \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{6}} (r - d)\left[3(r^2 - d^2) + (r - d)^2\right], r \neq d \Rightarrow$

$\Rightarrow (r + d) \cdot d = \dfrac{1}{2}(r - d)\left[3(r + d) + r - d\right] \Rightarrow d^2 + rd - r^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} r \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} r \end{cases}$



$x^2 = r^2 - d^2$

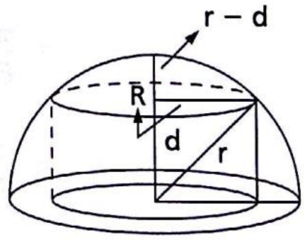
Assim, $d = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} r$.

1137. $V_{segmento} = V_{cilindro} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{6} \cdot (r - d)\left[3R^2 + (r - d)^2\right] = \pi R^2 d \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(r - d)^2}{6} \cdot [3(r + d) + (r - d)] = (r^2 - d^2)d \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{r - d}{6}(4r + 2d) = rd + d^2 \Rightarrow$



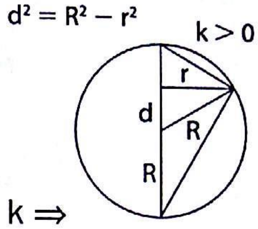
$R^2 = r^2 - d^2$

$\Rightarrow 2d^2 + 2rd - r^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{-\sqrt{3} - 1}{2} r \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} r \end{cases}$

Assim, $d = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} r$.

1138. Há duas hipóteses a considerar:

$h_{cone} = h_{segmento} = R \pm d = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$.



Temos:

$$\frac{\frac{\pi}{3} \cdot r^2\left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right)}{\frac{\pi}{6} \cdot \left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right) \cdot \left[3r^2 + \left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right)\right]} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{r^2 + R^2 \pm R\sqrt{R^2 - r^2}} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm kR\sqrt{R^2 - r^2} = r^2 - kr^2 - kR^2.$$

Elevando ao quadrado:

$r^4 \cdot (1 - k)^2 + kR^2(3k - 2)r^2 = 0$.

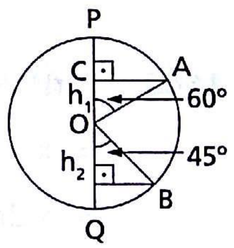
Dividindo por r^2:

$$r^2(1 - k)^2 + kR^2(3k - 2) = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{k(2 - 3k)}{(1 - k)^2}.$$

A área da base será: $A = \pi r^2$.

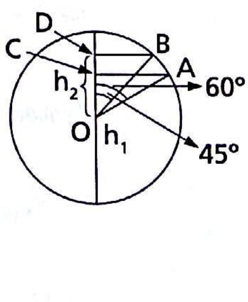
Assim, $A = \frac{k(2 - 3k)}{(1 - k)^2} \cdot \pi R^2$, com $k < \frac{2}{3}$.

1143. $R = 10$ cm



No $\triangle AOC$: $\cos 60° = \frac{h_1}{10} \Rightarrow h_1 = 5$ cm.

No $\triangle BOD$: $\cos 45° = \frac{h_2}{10} \Rightarrow h_2 = 5\sqrt{2}$ cm.

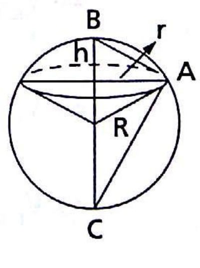


$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot \left(5\sqrt{2} \pm 5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{2}{3}\pi \cdot 100 \cdot 5\left(\sqrt{2} \pm 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1000}{3} \cdot \left(\sqrt{2} \pm 1\right)\pi \text{ cm}^3$$

1146. $V_{setor} = \frac{1}{n} V_{esfera} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{2R}{n}$$

No triângulo retângulo ABC:

$$r^2 = h \cdot (2R - h) \Rightarrow r^2 = \frac{2R}{n}\left(2R - \frac{2R}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 4R^2 \cdot \frac{n-1}{n^2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{n-1}}{n} \cdot 2R,\ n > 1.$$

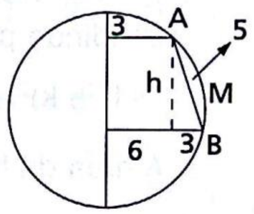
1147. $V_{anel} = V$

corda: ℓ

h: projeção da corda sobre o eixo

$$V = \pi \cdot \frac{h}{6}\,\ell^2 \Rightarrow h = \frac{6V}{\pi\ell^2}$$

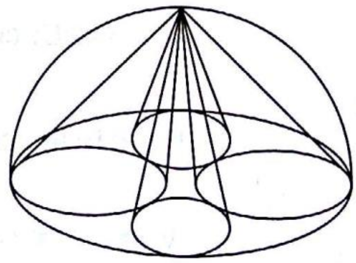
1148. $\left.\begin{aligned} \ell &= 5 \text{ cm} \\ h^2 &= 5^2 - 3^2 \Rightarrow h = 4 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$



$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 4}{6} \cdot 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{50\pi}{3} \text{ cm}^3$$

1149. $(2r)^2 + (2r)^2 = (2r + 2x)^2 \Rightarrow$



$$\Rightarrow x = r\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

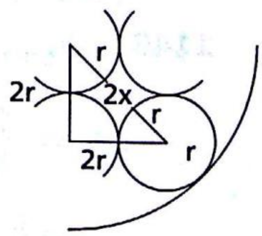
$$R = 2r + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}}$$

$$V_{sólido} = V_H - 4V_{cone} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\pi R^3 - 4 \cdot \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{1+\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{2}{3 + 2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\left(4\sqrt{2} - 5\right)\pi R^3$$

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

ISBN 978-85-357-1759-4

9 788535 717594

Atual Editora