

OBJETIVO

ITA Matemática

7



Actinídeos
Outros metais
Não-Metais
Gases nobres

Sólidos

25 Mn Manganês 54.938045	26 Fe Ferro 55.845	27 Co Cobalto 58.933200	28 Ni Níquel 58.6934	29 Cu Cobre 63.546	30 Zn Zinco 65.38	31 Ga Gálio 69.723	32 Ge germânio 72.64	33 As Arsênio 74.9216	34 Se Selênio 78.96	35 Br Bromo 79.904	36 Kr Criptônio 83.80																																																		
37 Rb Rubídio 85.4678	38 Sr Estrôncio 87.62	39 Y Ítrio 88.90585	40 Zr Zircônio 91.224	41 Nb Níobio 92.90638	42 Mo Molibdênio 95.94	43 Tc Técnetio (98)	44 Ru Rútenio 101.07	45 Rh Ródio 102.90550	46 Pd Paládio 106.42	47 Ag Prata 107.8682	48 Cd Cádmio 112.411	49 In Índio 114.818	50 Sn Estanho 118.710	51 Sb Antimônio 121.757	52 Te Telúrio 127.60	53 I Iodo 126.90549	54 Xe Xenônio 131.29																																												
55 Ba Bário 137.327	56 La Lantânio 138.90547	57 Ce Célio 140.12	58 Pr Praseodímio 140.90766	59 Nd Néodímio 144.242	60 Pm Promécio (145)	61 Sm Samaritério 150.36	62 Eu Europário 151.964	63 Gd Gadolínio 157.25	64 Tb Terbório 158.92535	65 Dy Díscio 162.5001	66 Ho Hólio 164.93033	67 Er Érbio 167.259	68 Tm Tulmório 168.93032	69 Yb Ítrio 173.0547	70 Lu Lutécio 174.967	71 Hf Háfnio 178.49	72 Ta Tântalo 180.94788	73 W Wolfrâmio 183.84	74 Re Rênio 186.207	75 Os Ósmio 190.23	76 Ir Írídio 192.222	77 Pt Platina 195.084	78 Au Ouro 196.96657	79 Hg Mercúrio 200.59	80 Tl Telúrio 204.3833	81 Pb Chumbo 207.2	82 Bi Bismuto 208.9804	83 Po Pólio (209)	84 At Astato (210)	85 Fr Frâncio (223)	86 Ra Rádio (226)	87 Ac Actínio (227)	88 Th Tório 232.0377	89 Pa Protactínio 231.03688	90 U Urânio 238.02891	91 Np Neptúlio 237.04817	92 Pu Plutônio 239.05216	93 Am Americônio 243.06138	94 Cm Curvônio 247.07035	95 Bk Berkelônio 247.07035	96 Cf Califórnio 251.07656	97 Es Einsteinônio 252.08322	98 Fm Fermônio 257.10375	99 Md Mendelevônio 258.10375	100 No Nobelônio 259.10375	101 Lr Lawrêncio 262.10375	102 Rf Rutherfordônio 261.10375	103 Db Dubnônio 262.10375	104 Sg Seaborgônio 263.10375	105 Bh Bohrônio 264.10375	106 Hs Hassium 265.10375	107 Mt Meitnerônio 266.10375	108 Ds Darmstádio 267.10375	109 Rg Roentgenônio 268.10375	110 Cn Copernício 269.10375	111 Nh Nihônio 270.10375	112 Fl Fleróvio 271.10375	113 Mc Moscóvio 272.10375	114 Lv Livermório 273.10375	115 Ts Tenessônio 274.10375	116 Og Oganessônio 275.10375

UNITED STATES OF AMERICA

MÓDULO 25

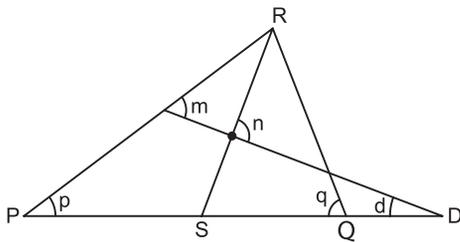
Geometria Plana I

1. (MAM-Mathematical Association of America) – Dados um triângulo PQR, onde \overline{RS} é bissetriz do ângulo interno \hat{R} do triângulo, \overline{PQ} é estendida até D e o ângulo n é reto, então

a) $m = \frac{1}{2} (p - q)$ b) $m = \frac{1}{2} (p + q)$

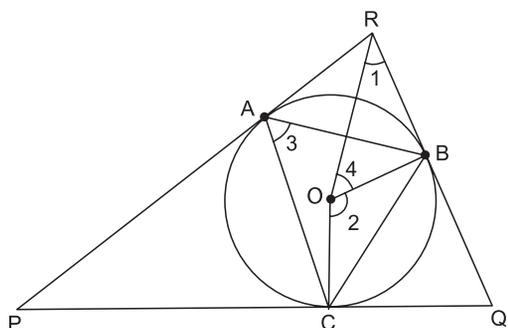
c) $d = \frac{1}{2} (q + p)$ d) $d = \frac{1}{2} m$

e) nenhuma das anteriores



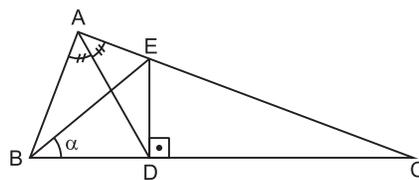
2. Mostre que o ângulo inscrito em uma circunferência é a metade do ângulo central correspondente.

3. (ITA) – Considere o triângulo PQR abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangências são A, B e C. Sabe-se que os ângulos \hat{P} , \hat{Q} e \hat{R} estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20° . Os ângulos 1, 2, 3 e 4, conforme mostrado na figura abaixo, medem, nesta ordem:



- a) $40^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 50^\circ$ b) $40^\circ, 100^\circ, 50^\circ, 40^\circ$
 c) $60^\circ, 140^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ d) $60^\circ, 120^\circ, 40^\circ, 50^\circ$
 e) n.d.a.

4. Da figura, sabe-se que D é o pé da bissetriz do ângulo reto \hat{A} do triângulo retângulo ABC. Se \overline{DE} é perpendicular a \overline{BC} , o ângulo α :



- a) é igual a \hat{c} b) é igual a $\frac{90^\circ + \hat{c}}{2}$
 c) é igual a 45° d) é maior que 45°
 e) n.r.a.

5. (OBM) – No triângulo ABC, o ângulo \hat{A} mede 60° e o ângulo B mede 50° . Sejam M o ponto médio do lado AB e P o ponto sobre o lado BC tal que $AC + CP = BP$. Qual a medida do ângulo MPC?

- a) 120° b) 125° c) 130°
d) 135° e) 145°

MÓDULO 26

Geometria Plana I

1. Se as medidas dos lados de um triângulo são dadas por $(2x - 8)$, $(8x - 10)$ e $(x^2 + 3)$, com $x \in \mathbb{Z}$, o perímetro é

- a) 14 .
b) um número par.
c) um quadrado perfeito.
d) múltiplo de 5.
e) o dobro do maior lado.

2. (ITA) – De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

- a) 63 b) 65 c) 66 d) 70 e) 77

3. (ITA) – Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780° . O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

- a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e) 106

8. (ITA) – Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

- I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.
- II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.
- III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

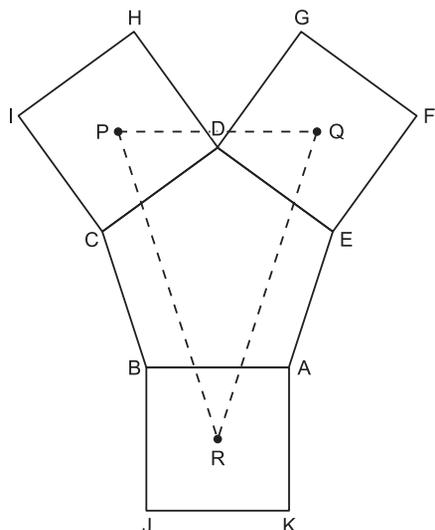
- a) Todas as afirmações são verdadeiras.
- b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
- c) Apenas (I) é verdadeira.
- d) Apenas (III) é verdadeira.
- e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

1. (ITA) – Num triângulo ABC, $BC = 4$ cm, o ângulo C mede 30° e a projeção do lado AB sobre BC mede 2,5 cm.

O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:

- a) 1 cm
- b) $\sqrt{2}$ cm
- c) 0,9 cm
- d) $\sqrt{3}$ cm
- e) 2 cm

4. Na figura



$ABCDE$ é um pentágono regular. P , Q e R são os centros dos quadrados $DEFG$, $CDHI$ e $ABJK$. A medida do ângulo \widehat{PRQ} :

- a) 18° b) 24° c) 30° d) 36° e) 42°

3. (ITA) – Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, \widehat{BAC} , mede 40° . Sobre o lado \overline{AB} , tome o ponto E tal que $\widehat{ACE} = 15^\circ$. Sobre o lado \overline{AC} , tome o ponto D tal que $\widehat{DBC} = 35^\circ$. Então, o ângulo \widehat{EDB} vale

- a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

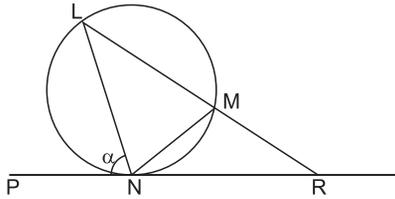
4. (ITA) – Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n . O valor de n para o qual valem as desigualdades $b_n \leq a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$ pertence ao intervalo

- a) $3 < n < 7$ b) $6 < n < 9$ c) $8 < n < 11$
d) $10 < n < 13$ e) $12 < n < 15$

MÓDULO 28

Geometria Plana I

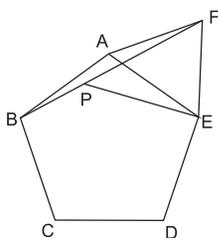
1. (OBM-RETIFICADO) – Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta LM corta a reta PQ em R. Se $LM = LN$ e a medida do ângulo PNL é α , $\alpha > 60^\circ$, quanto mede o ângulo LRP?



- a) $3\alpha - 180^\circ$ b) $180^\circ - 2\alpha$ c) $180^\circ - \alpha$
d) $90^\circ - \alpha/2$ e) α

2. Sobre os lados do triângulo ABC são construídos os triângulos equiláteros ABP, BCQ e CAR, não sobrepostos ao triângulo ABC. Demonstre que as retas \vec{AQ} , \vec{BR} e \vec{CP} se interceptam em um mesmo ponto O.

3. (OBM) – Na figura, $ABCDE$ é um pentágono regular e AEF é um triângulo equilátero. Seja P um ponto sobre o segmento BF , no interior de $ABCDE$, e tal que o ângulo $\widehat{P\hat{E}A}$ mede 12° , como mostra a figura abaixo. Calcule a medida, em graus, do ângulo $\widehat{P\hat{A}C}$.

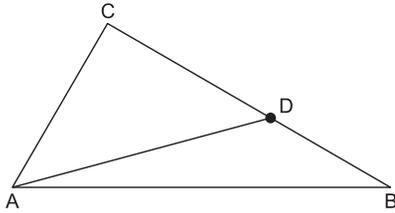


exercícios-tarefa

■ MÓDULO 25

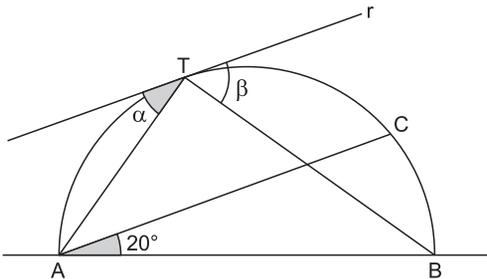
1. No triângulo ABC, $AC = CD$ e $\hat{CAB} - \hat{ABC} = 30^\circ$. Então, o ângulo \hat{BAD} mede:

- a) 30°
- b) 20°
- c) $22,5^\circ$
- d) 10°
- e) 15°



2. Na figura, AB é o diâmetro do semi-círculo que forma 20° com a corda \overline{AC} . Se r é tangente ao círculo e $r \parallel \overline{AC}$, os ângulos α e β medem, respectivamente:

- a) 20° e 70°
- b) 25° e 65°
- c) 30° e 60°
- d) 35° e 55°
- e) 10° e 70°



3. (ITA) – Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo, considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo \hat{BAC} é igual a:

- a) 23°
- b) 32°
- c) 36°
- d) 40°
- e) 45°

■ MÓDULO 26

1. (OBM) – DEFG é um quadrado no exterior do pentágono regular ABCDE. Quanto mede o ângulo \hat{EAF} ?

- a) 9°
- b) 12°
- c) 15°
- d) 18°
- e) 21°

2. (COLÉGIO NAVAL) – Dois lados de um triângulo são iguais a 4cm e 6cm. O terceiro lado é um número inteiro expresso por $x^2 + 1$, com $x \in \mathbb{Z}$. O seu perímetro é:

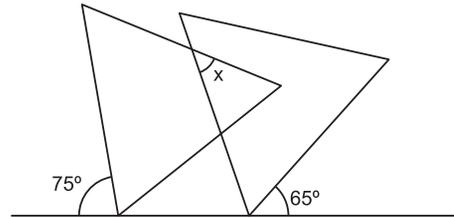
- a) 13 cm
- b) 14 cm
- c) 15 cm
- d) 16 cm
- e) 20 cm

3. (ITA) – O número de diagonais de um polígono regular de $2n$ lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a esse polígono, é dado por:

- a) $2n(n - 2)$
- b) $2n(n - 1)$
- c) $2n(n - 3)$
- d) $\frac{n(n - 5)}{2}$
- e) n.d.a.

■ MÓDULO 27

1. (OBM) – Na figura, os dois triângulos são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



- a) 30°
- b) 40°
- c) 50°
- d) 60°
- e) 70°

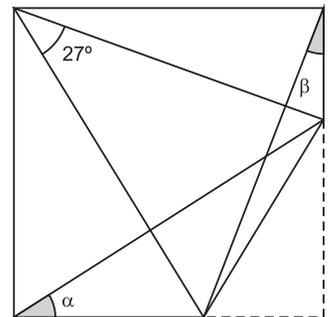
2. (BIELORÚSSIA) – No losango ABCD, $\angle A = 60^\circ$. Os pontos F, H e G estão sobre os segmentos \overline{AD} , \overline{CD} e \overline{AC} de modo que DFGH é um paralelogramo. Prove que FBH é um triângulo equilátero.

■ MÓDULO 28

1. (ITA) – Considere uma circunferência de centro em O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo BCA meça 30° . Seja D o ponto de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual

- a) a metade da medida de AB.
- b) a um terço da medida de AB.
- c) a metade da medida de DC.
- d) a dois terços da medida de AB.
- e) a metade da medida de AE.

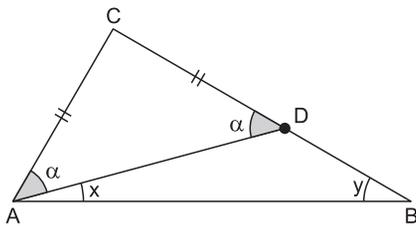
2. (OBM) – O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura ao lado?



resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 25

1)



Conforme a figura, $x + y = \alpha$

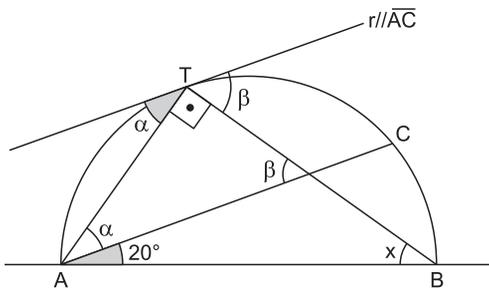
Do enunciado $\widehat{CAB} - \widehat{ABC} = (\alpha + x) - y = 30^\circ$

Desta forma,

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = 30^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow x = 15^\circ$$

Resposta: E

2)



Conforme a figura,

$$\beta = x + 20^\circ$$

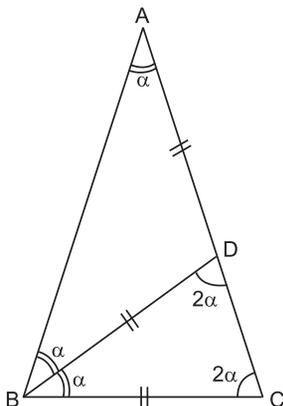
$\alpha = x$, pois correspondem ao mesmo arco \widehat{AT} .

Assim,

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 20^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 35^\circ \\ \beta = 55^\circ \end{cases}$$

Resposta: D

3)



1) Seja α a medida do ângulo \widehat{BAC} . Como o triângulo ADB é isósceles de base \overline{AB} , temos:

$$\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \alpha$$

2) $\widehat{BDC} = 2\alpha$, pois é ângulo externo do triângulo ABD.

3) $\triangle CBD$ é isósceles de base $\overline{CD} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 2\alpha$

4) $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 2\alpha$

Assim, no triângulo CBD, temos:

$$2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ$$

Resposta: C

■ MÓDULO 26

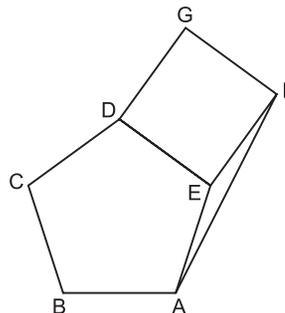
1) Lembrando que o ângulo interno de um pentágono

regular é igual a $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$, temos que

$$\widehat{AEF} = 360 - 108^\circ - 90^\circ = 162^\circ$$

Como o triângulo AEF é isósceles com $AE = EF$, temos

$$\widehat{EAF} = \frac{180^\circ - 162^\circ}{2} = 9^\circ$$



Resposta: A

2)

$$\text{I) } x^2 + 1 < 4 + 6 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

$$\text{II) } 4 < x^2 + 1 + 6 \Leftrightarrow x^2 > -3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{III) } 6 < x^2 + 1 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

De (I), (II) e (III), tem-se $-3 < x < -1$ ou $1 < x < 3$ e portanto $x = -2$ ou $x = 2$. Os lados medem 4 cm, 5 cm e 6 cm e o perímetro é 15 cm.

Resposta: C

3) O número de diagonais de um polígono de $2n$ lados

$$\text{é } \frac{2n(2n-3)}{2}.$$

Destas, $\frac{2n}{2}$ passam pelo centro.

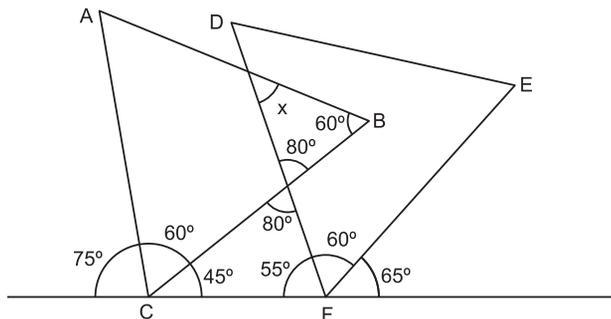
$$\text{N\~ao passam pelo centro } \frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{2n}{2} =$$

$$= n \cdot (2n - 3 - 1) = 2n(n - 2)$$

Resposta: A

■ MÓDULO 27

1)

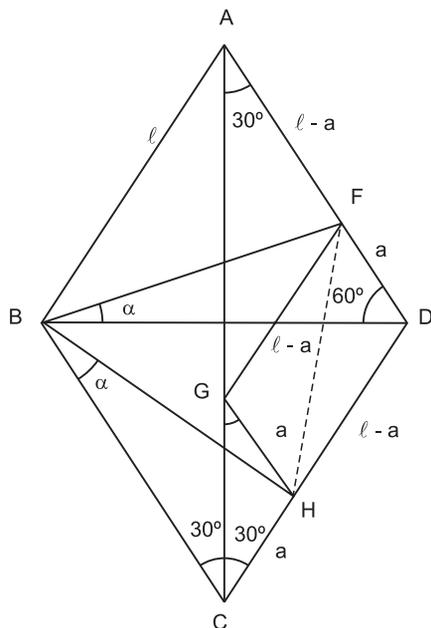


Os triângulos ABC e DEF são equiláteros e possuem ângulos internos de 60° . Desta forma os ângulos BCF e DFC e medem respectivamente 45° e 55° , e permitem obter os demais ângulos assinalados na figura.

Assim, $x + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 40^\circ$

Resposta: B

2)



a) No paralelogramo DFGH temos $\widehat{FDH} = \widehat{FGH} = 120^\circ$ e $\widehat{DFG} = \widehat{DHG} = 60^\circ$. Por ser $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{DH}$ os ângulos \widehat{AFG} e \widehat{GHC} medem 120° e, consequentemente, os ângulos \widehat{AGF} e \widehat{HGC} medem 30° , o que prova que os triângulos AFG e GHC são isósceles.

b) Desta forma, $CH = GH = FD = a$, $AF = GF = HD = \ell - a$, onde ℓ é a medida do lado do losango.

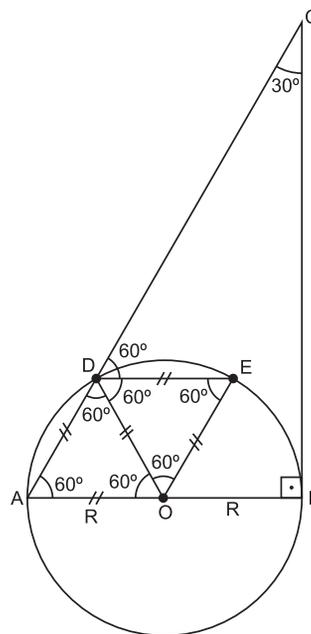
c) Os triângulos CBH e DBF são congruentes, pois $CB = DB = \ell$, $\widehat{BCH} = \widehat{BDF} = 60^\circ$ e $CH = DF$. Do que se conclui $\widehat{CBH} = \widehat{DBF} = \alpha$ e $BH = BF$.

d) Como $\widehat{HBF} = \widehat{HBD} + \widehat{DBF} = \widehat{HBD} + \widehat{CBH} = 60^\circ$ e $BH = BF$, o triângulo FBH é equilátero.

Resposta: Demonstração

■ MÓDULO 28

1)



Os triângulos DAO e DEO são equiláteros.

Assim, sendo R o raio da circunferência de diâmetro AB, tem-se:

$$1) AB = 2R$$

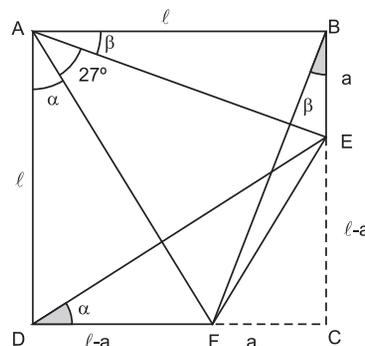
$$2) OA = AD = OD = DE = OE = R$$

Logo:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow DE = \frac{1}{2} \cdot AB$$

2) Considere a figura:



a) Seja ℓ a medida do lado do quadrado e $FC = a$. Como $FC + CE = \ell$, temos

$CE = \ell - a$, $DF = \ell - a$, $EB = \ell - (\ell - a) = a$ e, portanto, $EB = FC$ e $DF = CE$.

b) Os triângulos ABE e BCF são congruentes pelo critério LAL. Pelo mesmo motivo também são congruentes os triângulos ADF e DCE. Assim, $\widehat{DAF} = \alpha$ e $\widehat{BAE} = \beta$.

c) Como $\alpha + \beta + 27^\circ = 90^\circ$, temos $\alpha + \beta = 63^\circ$.

Resposta: 63°