OBJETIVO

ITA
Matemática

7

MÓDULO 25

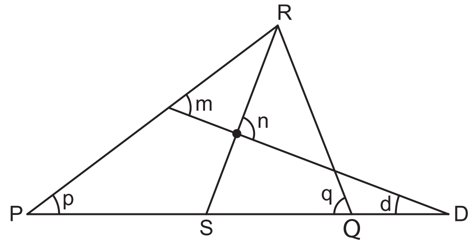
Geometria Plana I

1. (**MAM-*Mathematical Association of America***) – Dados um triângulo PQR, onde $\overline{RS}$ é bissetriz do ângulo interno $\hat{R}$ do triângulo, $\overline{PQ}$ é estendida até D e o ângulo n é reto, então

a) $m = \frac{1}{2}(p - q)$ b) $m = \frac{1}{2}(p + q)$

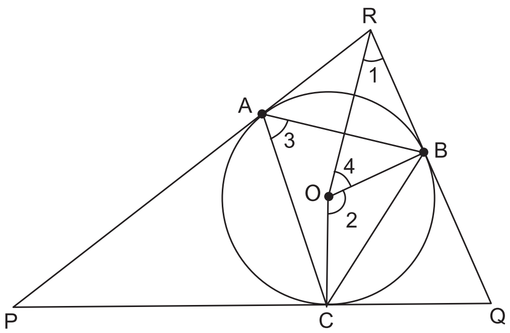
c) $d = \frac{1}{2}(q + p)$ d) $d = \frac{1}{2}m$

e) nenhuma das anteriores



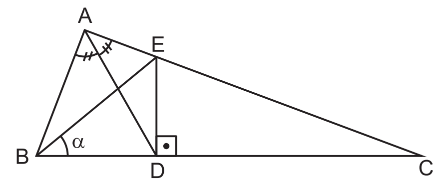
2. Mostre que o ângulo inscrito em uma circunferência é a metade do ângulo central correspondente.

3. **(ITA)** – Considere o triângulo PQR abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangências são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Os ângulos 1, 2, 3 e 4, conforme mostrado na figura abaixo, medem, nesta ordem:



a) 40°, 120°, 60°, 50° b) 40°, 100°, 50°, 40°
c) 60°, 140°, 60°, 40° d) 60°, 120°, 40°, 50°
e) n.d.a.

4. Da figura, sabe-se que D é o pé da bissetriz do ângulo reto $\hat{A}$ do triângulo retângulo ABC. Se $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, o ângulo α:



a) é igual a $\hat{c}$ b) é igual a $\dfrac{90° + \hat{c}}{2}$

c) é igual a 45° d) é maior que 45°

e) n.r.a.

5. **(OBM)** – No triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede 60° e o ângulo B mede 50°. Sejam M o ponto médio do lado AB e P o ponto sobre o lado BC tal que AC + CP = BP. Qual a medida do ângulo MPC?

a) 120° b) 125° c) 130°

d) 135° e) 145°

MÓDULO 26

Geometria Plana I

1. Se as medidas dos lados de um triângulo são dadas por $(2x - 8)$, $(8x - 10)$ e $(x^2 + 3)$, com $x \in \mathbb{Z}$, o perímetro é

a) 14 .

b) um número par.

c) um quadrado perfeito.

d) múltiplo de 5.

e) o dobro do maior lado.

2. **(ITA)** – De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 63 b) 65 c) 66 d) 70 e) 77

3. **(ITA)** – Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e) 106

8. **(ITA)** – Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
c) Apenas (I) é verdadeira.
d) Apenas (III) é verdadeira.
e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

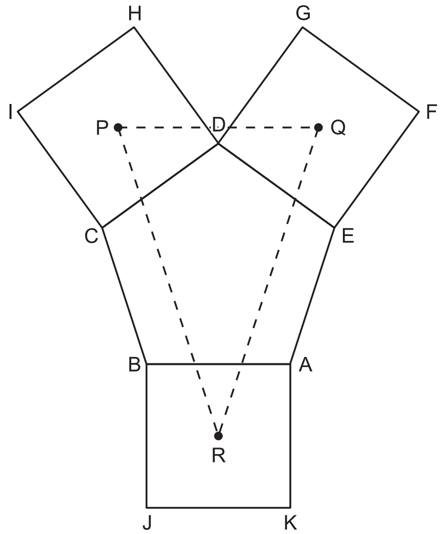
MÓDULO 27

Geometria Plana I

1. **(ITA)** – Num triângulo ABC, BC = 4 cm, o ângulo C mede 30° e a projeção do lado AB sobre BC mede 2,5 cm. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:

a) 1 cm b) $\sqrt{2}$ cm c) 0,9 cm
d) $\sqrt{3}$ cm e) 2 cm

4. Na figura



ABCDE é um pentágono regular. P, Q e R são os centros dos quadrados DEFG, CDHI e ABJK. A medida do ângulo $P\hat{R}Q$ é:

a) 18° b) 24° c) 30° d) 36° e) 42°

3. **(ITA)** – Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40°. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

4. **(ITA)** – Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades $b_n \le a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$ pertence ao intervalo

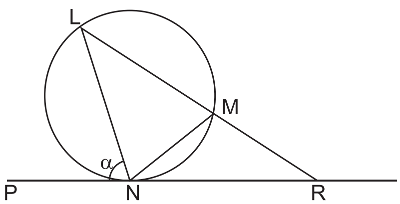
a) $3 < n < 7$ b) $6 < n < 9$ c) $8 < n < 11$

d) $10 < n < 13$ e) $12 < n < 15$

MÓDULO 28

Geometria Plana I

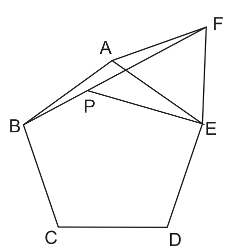
1. **(OBM-RETIFICADO)** – Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta LM corta a reta PQ em R. Se LM = LN e a medida do ângulo PNL é α, $\alpha > 60°$, quanto mede o ângulo LRP?



a) $3\alpha - 180°$ b) $180° - 2\alpha$ c) $180° - \alpha$
d) $90° - \alpha/2$ e) α

2. Sobre os lados do triângulo ABC são construídos os triângulos equiláteros ABP, BCQ e CAR, não sobrepostos ao triângulo ABC. Demonstre que as retas $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BR}$ e $\overleftrightarrow{CP}$ se interceptam em um mesmo ponto **O**.

3. **(OBM)** – Na figura, ABCDE é um pentágono regular e AEF é um triângulo equilátero. Seja P um ponto sobre o segmento BF, no interior de ABCDE, e tal que o ângulo PÊA mede 12°, como mostra a figura abaixo. Calcule a medida, em graus, do ângulo PÂC.

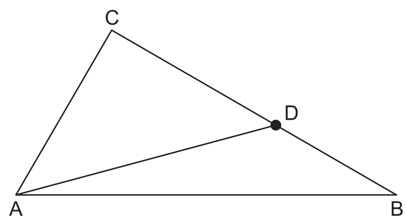


exercícios-tarefa

■ MÓDULO 25

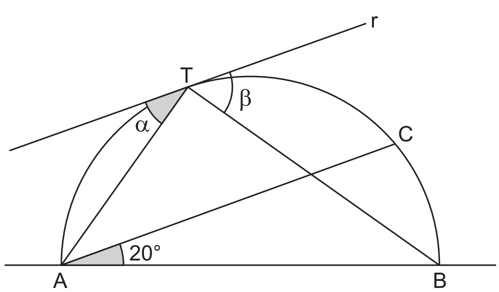
1. No triângulo ABC, AC = CD e $C\hat{A}B - A\hat{B}C = 30°$. Então, o ângulo $B\hat{A}D$ mede:

a) 30°
b) 20°
c) 22,5°
d) 10°
e) 15°



2. Na figura, AB é o diâmetro do semi-círculo que forma 20° com a corda $\overline{AC}$. Se r é tangente ao círculo e r // $\overline{AC}$, os ângulos α e β medem, respectivamente:

a) 20° e 70° b) 25° e 65° c) 30° e 60°
d) 35° e 55° e) 10° e 70°



3. **(ITA)** – Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo, considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

■ MÓDULO 26

1. **(OBM)** – DEFG é um quadrado no exterior do pentágono regular ABCDE. Quanto mede o ângulo $E\hat{A}F$?

a) 9° b) 12° c) 15° d) 18° e) 21°

2. **(COLÉGIO NAVAL)** – Dois lados de um triângulo são iguais a 4cm e 6cm. O terceiro lado é um número inteiro expresso por $x^2 + 1$, com $x \in \mathbb{Z}$. O seu perímetro é:

a) 13 cm b) 14 cm c) 15 cm
d) 16 cm e) 20 cm

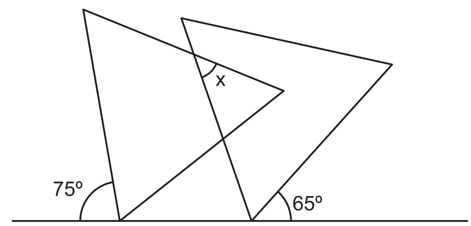
3. **(ITA)** – O número de diagonais de um polígono regular de 2n lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a esse polígono, é dado por:

a) $2n(n-2)$ b) $2n(n-1)$ c) $2n(n-3)$

d) $\dfrac{n(n-5)}{2}$ e) n.d.a.

■ MÓDULO 27

1. **(OBM)** – Na figura, os dois triângulos são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

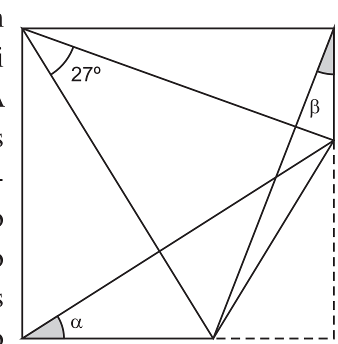
2. **(BIELORÚSSIA)** – No losango ABCD, ∠ A = 60°. Os pontos **F**, **H** e **G** estão sobre os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$ de modo que DFGH é um paralelogramo. Prove que FBH é um triângulo equilátero.

■ MÓDULO 28

1. **(ITA)** – Considere uma circunferência de centro em O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo BCA meça 30°. Seja D o ponto de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual

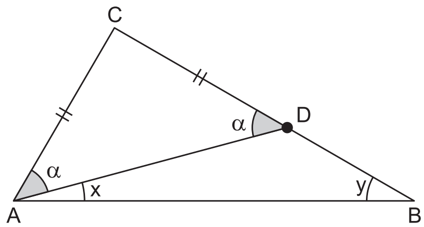
a) a metade da medida de AB.
b) a um terço da medida de AB.
c) a metade da medida de DC.
d) a dois terços da medida de AB.
e) a metade da medida de AE.

2. **(OBM)** – O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura ao lado?



MÓDULO 25

1)



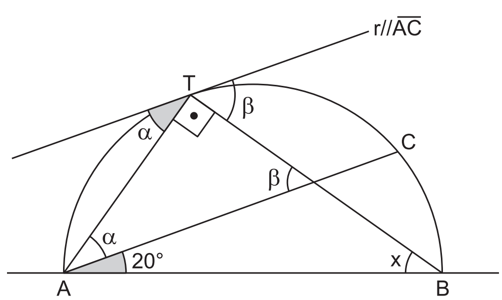
Conforme a figura, $x + y = \alpha$

Do enunciado $C\hat{A}B - A\hat{B}C = (\alpha + x) - y = 30°$
Desta forma,

$$\left.\begin{array}{l} x + y = \alpha \\ x - y = 30° - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x = 15°$$

Resposta: E

2)

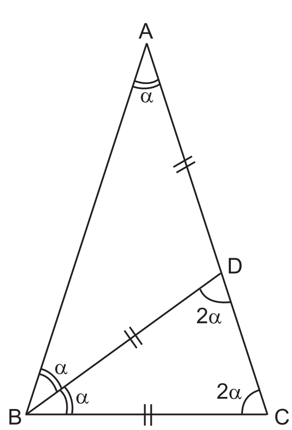


Conforme a figura,
$\beta = x + 20°$
$\alpha = x$, pois correspondem ao mesmo arco $\overset{\frown}{AT}$.
Assim,

$$\left\{\begin{array}{l} \beta = \alpha + 20° \\ \alpha + \beta = 90° \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 35° \\ \beta = 55° \end{array}\right.$$

Resposta: D

3)



1) Seja α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADB é isósceles de base $\overline{AB}$, temos:
$D\hat{A}B = D\hat{B}A = \alpha$

2) $B\hat{D}C = 2\alpha$, pois é ângulo externo do triângulo ABD.

3) ΔCBD é isósceles de base $\overline{CD} \Rightarrow B\hat{C}D = B\hat{D}C = 2\alpha$

4) ΔABC é isósceles de base $\overline{BC} \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2\alpha$

Assim, no triângulo CBD, temos:

$2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$

Resposta: C

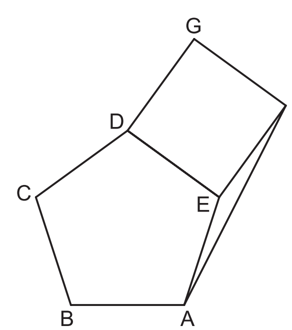
MÓDULO 26

1) Lembrando que o ângulo interno de um pentágono regular é igual a $\dfrac{(5-2) \cdot 180°}{5} = 108°$, temos que

$A\hat{E}F = 360 - 108° - 90° = 162°$

Como o triângulo AEF é isósceles com AE = EF, temos

$$E\hat{A}F = \frac{180° - 162°}{2} = 9°$$



Resposta: A

2)
I) $x^2 + 1 < 4 + 6 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$
II) $4 < x^2 + 1 + 6 \Leftrightarrow x^2 > -3 \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$
III) $6 < x^2 + 1 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$
De (I), (II) e (III), tem-se $-3 < x < -1$ ou $1 < x < 3$ e portanto $x = -2$ ou $x = 2$. Os lados medem 4 cm, 5 cm e 6 cm e o perímetro é 15 cm.
Resposta: C

3) O número de diagonais de um polígono de 2n lados é $\dfrac{2n(2n-3)}{2}$.

Destas, $\frac{2n}{2}$ passam pelo centro.

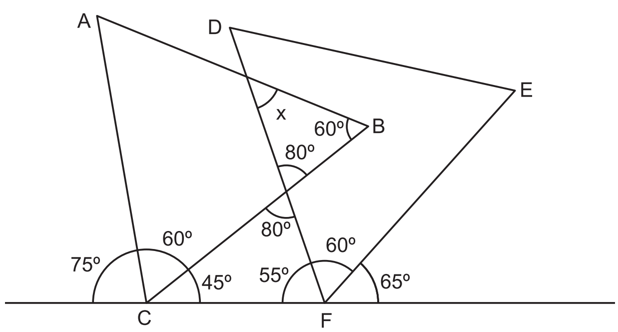
Não passam pelo centro $\frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{2n}{2} =$

$= n \,.\, (2n - 3 - 1) = 2n(n - 2)$

Resposta: A

■ Módulo 27

1)

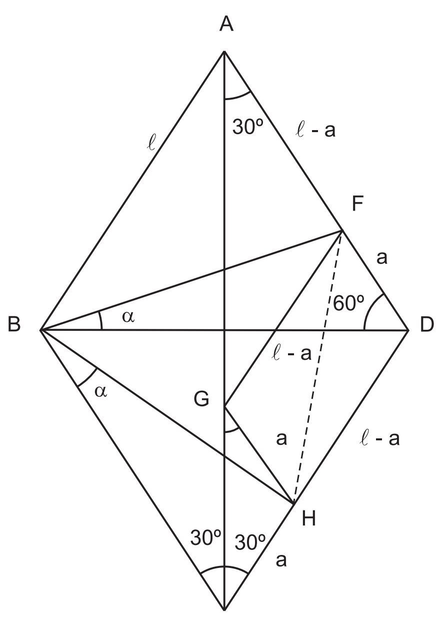


Os triângulos ABC e DEF são equiláteros e possuem ângulos internos de 60°. Desta forma os ângulos $B\hat{C}F$ e $D\hat{F}C$ e medem respectivamente 45° e 55°, e permitem obter os demais ângulos assinalados na figura.

Assim, $x + 60° + 80° = 180° \Leftrightarrow x = 40°$

Resposta: B

2)



a) No paralelogramo DFGH temos $F\hat{D}H = F\hat{G}H = 120°$ e $D\hat{F}G = D\hat{H}G = 60°$. Por ser $\overleftrightarrow{FG} \,//\, \overleftrightarrow{DH}$ os ângulos $A\hat{F}G$ e $G\hat{H}C$ medem 120° e, consequentemente, os ângulos $A\hat{G}F$ e $H\hat{G}C$ medem 30º, o que prova que os triângulos AFG e GHC são isósceles.

b) Desta forma, CH = GH = FD = a, AF = GF = HD = = ℓ – a, onde ℓ é a medida do lado do losango.

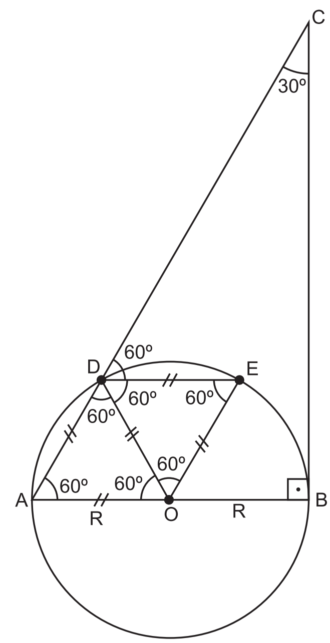
c) Os triângulos CBH e DBF são congruentes, pois CB = DB = ℓ, BCH = BDF = 60° e CH = DF. Do que se conclui CBH = DBF = α e BH = BF.

d) Como $H\hat{B}F = H\hat{B}D + D\hat{B}F = H\hat{B}D + C\hat{B}H = 60°$ e BH = BF, o triângulo FBH é equilátero.

Resposta: Demonstração

■ Módulo 28

1)



Os triângulos DAO e DEO são equiláteros. Assim, sendo R o raio da circunferência de diâmetro AB, tem-se:

1) AB = 2R

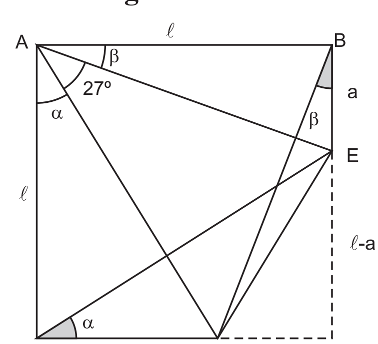
2) OA = AD = OD = DE = OE = R

Logo:

$\frac{DE}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow DE = \frac{1}{2} = .\, AB$

2) Considere a figura:



a) Seja ℓ a medida do lado do quadrado e FC = a. Como FC + CE = ℓ, temos CE = ℓ – a, DF = ℓ – a, EB = ℓ – (ℓ – a) = a e, portanto, EB = FC e DF = CE.

b) Os triângulos ABE e BCF são congruentes pelo critério LAL. Pelo mesmo motivo também são congruentes os triângulos ADF e DCE. Assim, $D\hat{A}F = \alpha$ e $B\hat{A}E = \beta$.

c) Como $\alpha + \beta + 27° = 90°$, temos $\alpha + \beta = 63°$.

Resposta: 63°