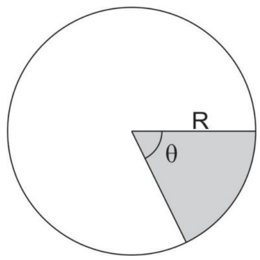
Exercícios dissertativos

1. (2000) Um setor circular, com ângulo central θ $(0 < \theta < 2\pi)$, é recortado de um círculo de papel de raio R (ver figura).Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto.



Determine, em função de R e θ,

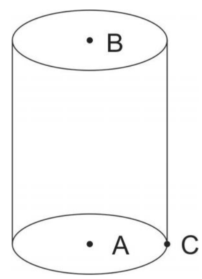
a) o raio da base do cone.

b) o volume do cone.

---

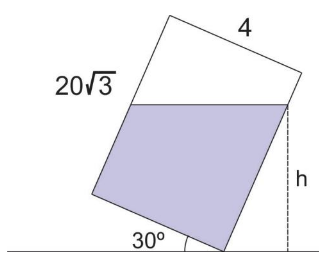
2. (2001)

Na figura ao lado, têm-se um cilindro circular reto, onde A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento BC, cujas distâncias a AC e AB são ambas iguais a d, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total (área lateral somada com as áreas das bases), em função de d.



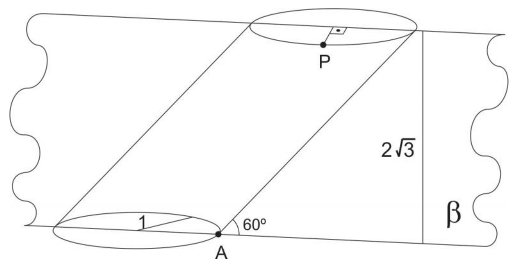
---

3. (2002) Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4cm e altura $20\sqrt{3}$cm, com $\dfrac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral abaixo). Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.



4. (2003)

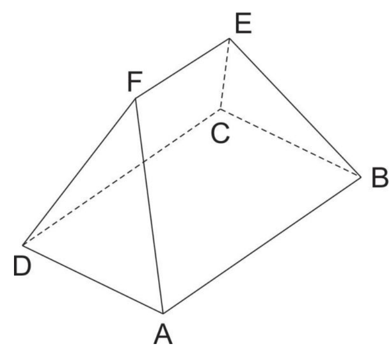
Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60º (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



---

5. (2004)

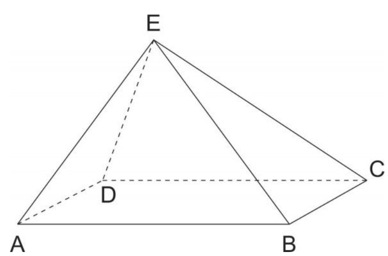
No sólido S, representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados $AB = 2\lambda$ e $AD = \lambda$; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são tirângulos equiláteros e o segmentos $\overline{EF}$ tem comprimento λ.



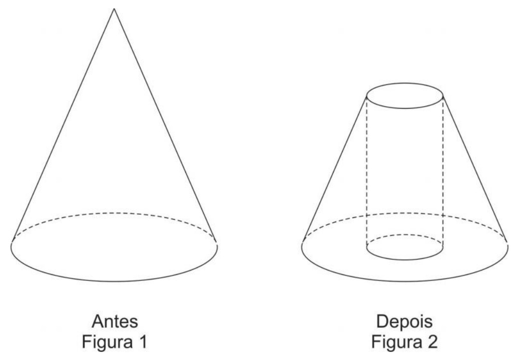
Determinar, em função de λ, o volume de S.

---

6. (2005) A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lado $AB = 4$ e $BC = 3$. As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.

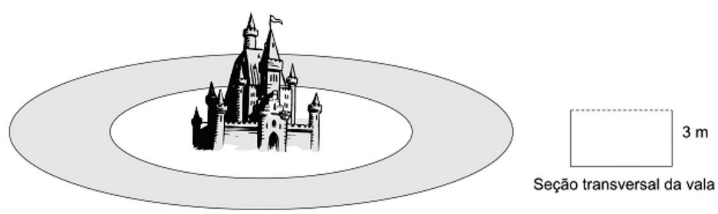


7. (2006) Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2. Se a área da base deste novo sólido é $\frac{2}{3}$ da área de B , determine seu volume.



---

8. (2007) Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são dois círculos concêntricos de raios 41 m e 45 m. A profundidade da vala é constante igual a 3 m.



O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões-pipa,cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5 m e altura igual a 8 m.

---

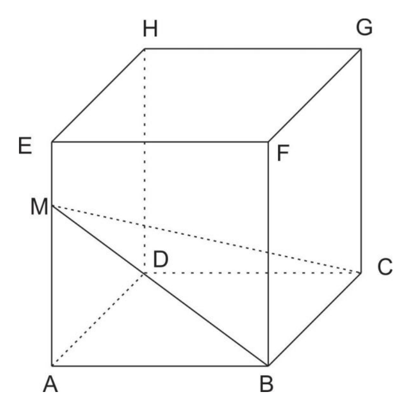
9. (2007)

O cubo ABCDEFGH possui arestas de comprimento a. O ponto M está na aresta $\overline{AE}$ e $AM = 3$. Calcule:

a) O volume do tetraedro BCGM.

b) A área do triângulo BCM.

c) A distância do ponto B à reta suporte do segmento $\overline{CM}$.



10. (2008)

Um poste vertical tem base quadrada de lado 2.

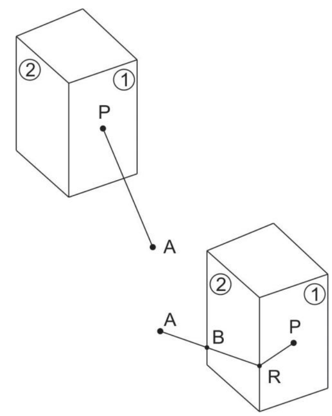
Uma corda de comprimento 5 está esticada e presa a um ponto P do poste, situado à altura 3 do solo e distando 1 da aresta lateral. A extremidade livre A da corda está no solo, conforme indicado na figura.

A corda é então enrolada ao longo das faces 1 e 2, mantendo-se esticada e com a extremidade A no solo, até que a corda toque duas arestas da face 2 em pontos R e B, conforme a figura.

Nessas condições,

a) Calcule PR.

b) Calcule PR.



---

11. (2008)

Pedrinho, brincando com seu cubo mágico, colocou-o sobre um copo, de maneira que

- apenas um vértice do cubo ficasse no interior do copo, conforme ilustra a foto;
- os pontos comuns ao cubo e ao copo determinassem um triângulo eqüilátero.

Sabendo-se que o bordo do copo é uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ cm, determine o volume da parte do cubo que ficou no interior do copo.

---

12. (2009) A figura representa uma pirâmide ABCDE, cuja base é o retângulo ABCD. Sabe-se que

$$AB = CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AD = BC = AE = BE = CE = DE = 1$$
$$AP = DQ = \frac{1}{2}$$

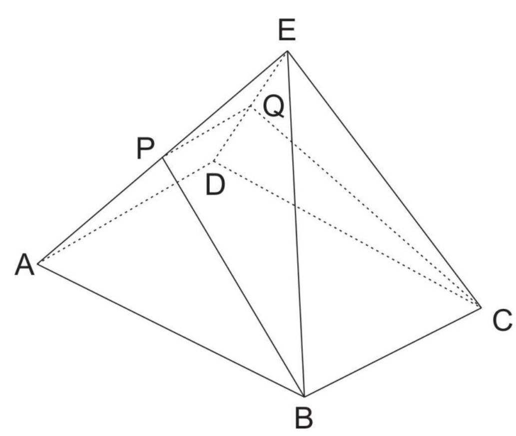
Nessas condições determine:

a) A medida de $\overline{BP}$.

b) A área do trapézio $BCQP$.

c) a área do triângulo ABD.

d) O volume da pirâmide $BPQCE$.



13. (2010) Dois planos π_1 e π_2 se interceptam ao longo de uma reta r, de maneira que o ângulo entre eles meça α radianos, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Um triângulo equilátero ABC, de lado ℓ, está contido em π_2, de modo que $\overline{AB}$ esteja em r. Seja D a projeção ortogonal de C sobre o plano π_1, e suponha que a medida θ, em radianos, do ângulo $C\widehat{A}D$, satisfaça $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

    Nessas condições, determine em função de ℓ

    a) o valor de α.

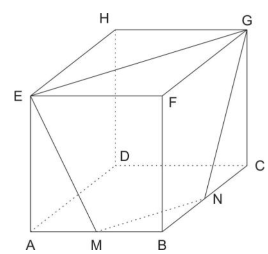
    b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

    c) a área do triângulo ABD.

    d) o volume do tetraedro ABCD.

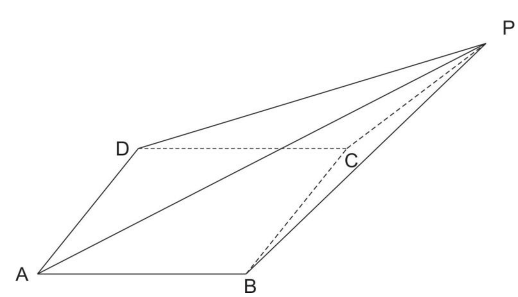
---

14. (2011) Na figura abaixo, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H tem lado ℓ. Os pontos M e N são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule a área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F, G.



---

15. (2012)



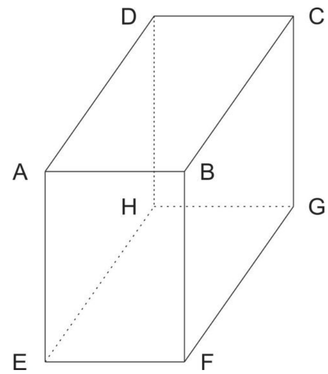
A base do tetraedro PABCD é o quadrado ABCD de lado ℓ, contido no plano α. Sabe-se que a projeção ortogonal do vértice P no plano α está no semiplano de α determinado pela reta $\overline{BC}$ e que não contém o lado $\overline{AD}$. Além disso, a face BPC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ cuja altura forma, com o plano α, um ângulo θ, em que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Sendo PB=$\ell\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, determine, em função de ℓ e θ,

a) o volume do tetraedro PABCD;

b) a altura do triângulo APB relativa ao lado $\overline{AB}$;

c) a altura do triângulo APD relativa ao lado $\overline{AD}$.

16. (2013) No paralelepípedo reto retângulo ABCDEFGH da figura, tem-se $AB = 2$, $AD = 3$ e $AE = 4$.



a) Qual a área do triãngulo ABD?

b) Qual é o volume do tetraedro ABDE?

c) Qual é a área do triângulo BDE?

---

17. (2015) No cubo $ABCDEFGH$, representado na figura, na página de respostas, cada aresta tem medida 1. Seja M um ponto na semirreta de origem A que passa por E. Denote por θ o ângulo $\widehat{BMH}$ e por x a medida do segmento $\overline{AM}$.

(a) Exprima $cos\theta$ em função de x.

(b) Para que valores de x o ângulo θ é obtuso?

c) Mostre que, se $x = 4$, então θ mede menos do que 45^o.