Version: Portuguese

45ª Olimpíada Internacional de Matemática

Segundo dia

Terça-feira, 13 de Julho de 2004

Problema 4. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números reais positivos tais que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Mostre que t_i, t_j e t_k são as medidas dos lados de um triângulo para quaisquer i, j, k com $1 \leq i < j < k \leq n$.

Problema 5. Num quadrilátero convexo $ABCD$ a diagonal BD não é bissectriz do ângulo $\widehat{ABC}$ nem do ângulo $\widehat{CDA}$. Um ponto P no interior de $ABCD$ satisfaz

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{e} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Prove que os vértices do quadrilátero $ABCD$ pertencem a uma mesma circunferência se e só se $AP = CP$.

Problema 6. Um inteiro positivo é dito *alternante* se, na sua representação decimal, quaisquer dois dígitos consecutivos têm paridade diferente.

Determine todos os inteiros positivos n tais que n tem um múltiplo que é alternante.

Duração: 4 horas e 30 minutos.

Cada problema vale 7 pontos.